VII ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2020

IV одделение

1. Бројот на недели со непарен датум во еден месец е непарен број, а бројот на сите останати денови во тој месец, кои имаат непарен датум е парен број. Во кој ден од седмицата е 29-ти од тој месец? Дали тој месец може да биде март?
   Решение. Јасно е дека првата недела од месецот мора да биде број од 1 до 7. Притоа непарен број непарни датуми кои се недела, се возможни ако неделата е 1-ви или 3 -ти од месецот. Ако првата недела од месецот е на 3 ти, тогаш следните недели се 10,17, 24 и 31. Значи сите останати денови од тој месец со непарен датум се 1, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 19, 21, 23, 25, 27 и 29, т.е. има 13 такви денови, но тоа е непарен број.
   Според тоа, бараниот месец ќе започне во недела, т.е. недели се: 1, 8, 15, 22 и 29, а сите други денови со непарен датум се: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 25, 27, кои се вкупно 12. Заради ова месецот мора да започне во недела и да има 30 дена или да е февруари во престапна година.
   Конечно, 29-ти од тој месец е во недела и тој месец не може да биде март бидејќи март има 31 ден.

2. Цевка со должина $5m$ е поделена на еднакви делови со 4 сечења. Од секој дел е формиран правоаголник таков што должината е четирипати поголема од ширината. Колку cm изнесува должината на правоаголнкот?
   Решение. Со 4 сечења од цевката се добиваат пет дела, секој со должина $5:5=1\,m$. Од тоа што должината е четири пати поголема од ширината значи дека должината и ширината прават заедно пет еднакви дела. Од тоа што периметарот на секој правоаголник е 1 метар се добива дека еден дел изнесува $1\,m:10=100\,cm:10=10\,cm$.
   Конечно должината на правоаголникот изнесува $4\cdot 10\,cm=40\,cm$.

3. За призмата која има 7 ѕидови одреди го бројот на рабови и темиња. Запиши го равенството кое важи меѓу бројот на темиња, рабови и ѕидови за било која призма и потоа провери го дека за дадената призма.
   Решение. Призмата има 7 ѕидови, од кои два се основите, па затоа омотачот на призмата има 5 ѕидови. Според тоа, призмата е петстрана, па затоа има $2\cdot 5=10$ темиња и $3\cdot 5=15$ рабови.

Ако со *S, T* и *P* соодветно го означиме бројот на ѕидовите, темињата и рабовите, тогаш бараното равенство е: $S+T=P+2$. Во наиот случај имаме $7+10=15+2$.

4. Збирот на должините на сите страни на два квадрати е 96 *cm*. Ако страната на едниот квадрат е три пати подолга од страната на другиот квадрат, пресметај ги должините на страните на двата квадрати.
   Решение. *Прв начин.* Бидејќи страната на едниот квадрат е трипати подолга од страната на другиот квадрат, периметар на едниот квадрат е трипати поголем од периметарот на дригиот квадрат. Значи, периметарот на вториот квадрат е еднаков на $96:4=24\,cm$, па затоа должината на неговата страна е $24:4=6\,cm$. Според тоа, должината на страната на поголемиот квадрат е еднаква на $3\cdot 6=18\,cm$.
   Втор начин. Ако со x ја означиме должината на страната на помалиот квадрат, тогаш должината на страната на поголемиот квадрат е $3x$. Сега, збирот на нивните периметри е $96\,cm$, па затоа $4x+4\cdot 3x=96$, од каде добиваме $16x=96$, т.е. $x=96:16=6\,cm$. Конечно, должината на страната на поголемиот квадрат е еднаква на $3\cdot 6=18\,cm$.

V одделение

1. Над секоја страна на даден правоаголник, надвор од него, конструираме рамностран триаголник. Да се пресмета периметарот на добиената фигура ако периметарот на правоаголникот е 72 *cm*.
   Решение. При конструирање на рамностраните триаголници секоја страна на правоаголникот ја заменуваме со две страни со иста должина. Според тоа, периметарот на добиената фигура е двапати поголем од периметарот на правоаголникот, т.е. тој е еднаков на $2\cdot 72=144\,cm$.

2. Растојанието помеѓу телефонските столбови на една улица долга 1600 *m* било 80 *m*. Заради садење нови дрвца на улицата, столбовите биле разместени така што новото растојание помеѓу столбовите е 50 *m*. Колку столбови по разместувањето останале на истото место?
   Решение. На истото место останува првиот столб и секој следен столб чие растојание од првиот столб е деливо со 80 и 50, т.е. е заеднички содржател на овие два броја. Но, $\text{НЗС}(50,80)=400$ и како $1600:400=4$ заклучуваме дека не се поместуваат $1+4=5$ столбови.

3. Даден е рамностран триаголник со плоштина $6\,cm^2$. Над секоја негова страна е конструиран рамностран триаголник. Да се пресмета плоштината на добиената фигура.

   Решение. При конструкција на рамностран триаголник над секоја страна на дадениот рамностран триаголник се добива фигура составена од 4 исти рамнострани триаголници. Значи, плоштината на добиената фигура е четири пати поголем од плоштината на дадениот рамностран триаголник, т.е. таа е еднаква на $4\cdot 6=24\,cm^2$.

4. Производот на три природни броја е 240. Производот на првиот и вториот број е 60, а производот на првиот и третиот број е 24. Кои се тие броеви?

   Решение. Нека дадените броеви ги означиме со a,b,c. Тогаш

$$abc=240,\ ab=60 \text{ и } ac=24.$$

   Според тоа,

$$c=abc:(ab)=240:60=4,$$
$$b=abc:(ac)=240:24=10 \text{ и}$$
$$a=ab:b=60:10=6.$$

   Значи, бараните броеви се 4, 6 и 10.

VI одделение

1. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е 3 dm. Пресметај го неговиот крак b, ако неговата основа е страна на рамностраниот триаголник со периметар 18 cm.

   Решение. Должината на основата на рамнокракиот триаголник е еднаква на $a=18:3=6\,cm$. Периметарот на рамнокракиот триаголник со основа a и крак b е $L=a+2b$, па затоа $3\,dm=6\,cm+2b$, од каде добиваме $b=(3\,dm-6\,cm):2=(30\,cm-6\,cm):2=12\,cm$.

2. Две жаби во исто време го напуштаат брегот. Се движат по патека од 18 лилјани (барско растение). Првата скока на секој трет лилјан, а втората на секој втор лилјан. На колку исти лилјани ќе скокнат двете жаби и кои се тие?

   Решение. Лилјаните на кои ќе скокнат ѝ двете жаби се заедничките содржатели на броевите 2 и 3, кои се помали или еднакви на 18. Бидејќи

$НЗС(2,3)=6$, добиваме дека жабите ќе скокнат на лилјаните означени со броевите 6, 12 и 18, т.е. на три исти лилјани.

3. Ако бројот 860 се подели со некој број, се добива остаток 9. Ако бројот 1200 се подели со истиот број се добива остаток 16. Колку се количниците при делење на 860 и 1200 со тој број?
Решение. Од условот на задачата следува дека броевите $860-9=851$ и $1200-16=1184$ се деливи со еден ист број поголем од 1. Понатаму,
$$\begin{aligned} НЗД(851,1184) &= НЗД(851,1184-851)=НЗД(851,333)\\ &= НЗД(333,851-333)=НЗД(333,518)\\ &= НЗД(333,518-333)=НЗД(333,185)\\ &= НЗД(333,333-185)=НЗД(333,148)\\ &= НЗД(148,333-147)=НЗД(185,148)\\ &= НЗД(185,185-148)=НЗД(185,37)\\ &= НЗД(5\cdot 37,37)=37. \end{aligned}$$
Сега, од $851:37=23$ и $1184:37=32$ и фактот дека 37 е прост број добиваме дека бараните количници се 23 и 32.

4. Страните на еден правоаголен триаголник се последователни природни броеви. Периметарот на правоаголниот триаголник е 12 dm. Над секоја страна од триаголникот е конструиран квадрат. Одреди ја плоштината на добиената фигура.
Решение. Бидејќи страните на правоаголниот триаголник се последователни природни броеви нивните должини се $a-1, a, a+1$. Според тоа, $a-1+a+a+1=12$, т.е. $a=4\ dm$. Значи, должините на страните на триаголникот се $3\ dm, 4\ dm, 5\ dm$, при што должините на катетите се $3\ dm$ и $4\ dm$. Конечно, плоштината на добиената фигура е еднаква на збирот на плоштините на триаголникот и плоштините на трите квадрати, односно на $3\cdot 3+4\cdot 4+5\cdot 5+\frac{3\cdot 4}{2}=9+16+25+6=56\ dm^2$.

VII одделение

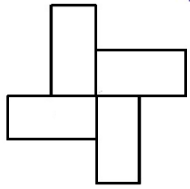
1. Еден шестцифрен број завршува на цифрата 5. Ако таа цифра се премести на почетокот на бројот, т.е. се избрише од крајот и се допише на почетокот на бројот, тогаш новодобиениот број ќе биде 4 пати поголем од почетниот број. Одреди го почетниот број.

Решение. Нека со x го означиме петцифрениот почеток на почетниот број, т.е. почетниот број е еднаков на $10x+5$. Новодобиениот број е $500000+x$. Од условот на задачата следува равенката

$$4(10x+5)=500000+x,$$

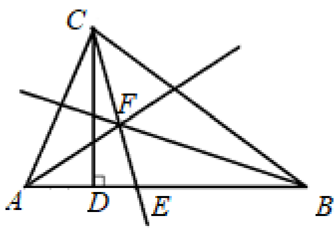
чие решение е $x=12820$. Почетниот број е $10x+5=128205$.

2. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од 4 складни правоаголника, кај кои едната страна е два пати подолга од другата. Пресметај го периметарот на оваа фигура, ако нејзината плоштина е $72\,cm^2$.



Решение. Плоштината на едниот правоаголник е $72:4=18\,cm^2$. Бидејќи едната страна е двапати подолга од другата страните на правоаголникот, страните се a и $2a$. Според тоа, $a\cdot 2a=18$, од каде добиваме $a\cdot a=9$. Според тоа, должините на страните на правоаголникот се $a=3\,cm$ и $2a=6\,cm$. Конечно, периметарот на правоаголникот е $8a+4\cdot 2a=16a=16\cdot 3\,cm=48\,cm$.

3. Во триаголникот ABC симетралите на аглите во темињата A и B се сечат под агол 140°. Висината и симетралата повлечени од аголот во темето C формираат агол од 20°. Одреди ги аглите во триаголникот.



Решение. Од триаголникот ABF следува $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+140^\circ=180^\circ$. Според тоа, $\alpha+\beta=80^\circ$, од каде добиване $\gamma=180^\circ-80^\circ=100^\circ$. Од тука следува $\measuredangle ECA=\frac{\gamma}{2}=50^\circ$ и како $\measuredangle ECD=20^\circ$, добиваме

$$\measuredangle DCA=\measuredangle ECA-\measuredangle ECD=30^\circ.$$

Сега, од триаголникот ADC имаме $\alpha=90^\circ-\measuredangle DCA=60^\circ$. Конечно, $\beta=180^\circ-\alpha-\gamma=20^\circ$

4. Во спортска продавница патиките се продавале за 900 ден. поефтино од тренерката. На акција патиките биле намалени за 10%, а тренер-

ката за 5%. Габи купила патики и тренерка на намаление и за нив платила вкупно 5480 ден. Колку чинеле патиките, а колку тренерката пред намалувањето?

Решение. Нека пред намалувањето цената на патиките била a. Тогаш цената на тренерката била $a+900$. По намалувањето цените на патиките и тренерката биле $0,9a$ и $0,95(a+900)$. Оттука следува равенката

$$0,9a+0,95(a+900)=5480,$$

чии решение е $a=2500$. Значи, цената на патиките била 2500, а на тренерката 3400 денари.

VIII одделение

1. На табла се запишани два цели броеви со збир делив со седум. Третиот број се добива како разлика на првиот и вториот, четвртиот како разлика на вториот и третиот, петтиот како разлика на третиот и четвртиот, итн. Докажи дека збирот од квадратите на првите седум броја добиени на претходно опишаниот начин е делив со седум.

Решение. Нека првите два броја запишани на таблата редоследно се x и y. Тогаш постои природен број k таков што $x+y=7k$. Следните пет запишани броја се:

$$\begin{aligned}
&x-y,\\
&y-(x-y)=2y-x,\\
&x-y-(2y-x)=2x-3y,\\
&2y-x-(2x-3y)=5y-3x,\\
&2x-3y-(5y-3x)=5x-8y.
\end{aligned}$$

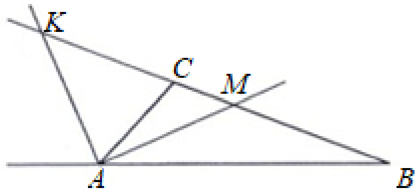
Збирот на квадратите на првите седум запишани броја е:

$$\begin{aligned}
A&=x^2+y^2+(x-y)^2+(2y-x)^2+(2x-3y)^2+(5y-3x)^2+(5x-8y)^2\\
&=x^2+y^2+x^2-2xy+y^2+4y^2-4xy+x^2+4x^2-12xy+9y^2+\\
&\quad+25y^2-30xy+9x^2+25x^2-80xy+64y^2\\
&=41x^2-128xy+104y^2=42x^2-126xy+105y^2-(x^2+2xy+y^2)\\
&=7(6x^2-18xy+15y^2)-(x+y)^2=7(6x^2-18xy+15y^2)-7^2k^2\\
&=7(6x^2-18xy+15y^2-7k^2),
\end{aligned}$$

па затоа $7\,|\,A$, што и требаше да се докаже.

2. Во триаголникот ABC внатрешниот агол кај темето A е 50°. Симетралите на внатрешниот и надворешниот агол кај темето A ја сечат BC во точките M и K, соодветно. Пресметај ги аглите на триаголникот ABC ако триаголникот AMK е рамнокрак.

Решение. Имаме

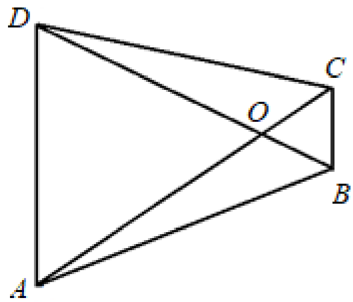


$$\measuredangle MAK = \frac{\alpha}{2} + \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ,$$

и затоа $\measuredangle AMK = \measuredangle MKA = 45^\circ$. Сега, од триаголникот ACM добиваме $\gamma = \measuredangle ACM = 180^\circ - 45^\circ - 25^\circ = 110^\circ$. Конечно, од триаголникот ABC следува $\beta = 180^\circ - 110^\circ - 50^\circ = 20^\circ$.

3. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ дијагоналите се сечат во точка O. Ако триаголниците AOB и COD имаат еднакви плоштини, тогаш четириаголникот $ABCD$ е трапез или паралелограм. Докажи!

Решение. Триаголниците ABD и ACD имаат заедничка страна AD и како



$$P_{ABD} = P_{AOB} + P_{AOD} = P_{COD} + P_{AOD} = P_{ACD}$$

заклучуваме дека висините во овие триаголници повлечени од темињата B и C се еднакви. Според тоа, точките B и C се на еднакво растојание од страната AD, па затоа $AD \parallel BC$, т.е. четириаголникот $ABCD$ е трапез или паралелограм.

4. Пресметај:

$$\frac{2^3 \cdot 4^5 \cdot 6^7}{8^9 \cdot 10^{11}} : 0,015^7 .$$

Решение. Имаме:

$$\frac{2^3 \cdot 4^5 \cdot 6^7}{8^9 \cdot 10^{11}} : 0,015^7 = \frac{2^3 \cdot 4^5 \cdot 6^7}{8^9 \cdot 10^{11}} : \left(\frac{15}{1000}\right)^7 = \frac{2^3 \cdot (2^2)^5 \cdot 6^7}{(2^3)^9 \cdot (2 \cdot 5)^{11}} \cdot \frac{1000^7}{15^7} = \frac{2^3 \cdot 2^{10} \cdot 2^7 \cdot 3^7}{2^{27} \cdot 2^{11} \cdot 5^{11}} \cdot \frac{10^{21}}{3^7 \cdot 5^7}$$

$$= \frac{2^{20}}{2^{38} \cdot 5^{11}} \cdot \frac{(2 \cdot 5)^{21}}{5^7} = \frac{2^{20}}{2^{38} \cdot 5^{11}} \cdot \frac{2^{21} \cdot 5^{21}}{5^7} = \frac{2^{41} \cdot 5^{21}}{2^{38} \cdot 5^{18}} = 2^3 \cdot 5^3 = 1000.$$

IX одделение

1. За броевите a,b,c,d важи $ac+ad+bc+db=68$ и $c+d=4$. Пресметај ја вредноста на изразот $a+b+c+d$.

Решение. Од $ac+ad+bc+db=68$ и $c+d=4$ следува

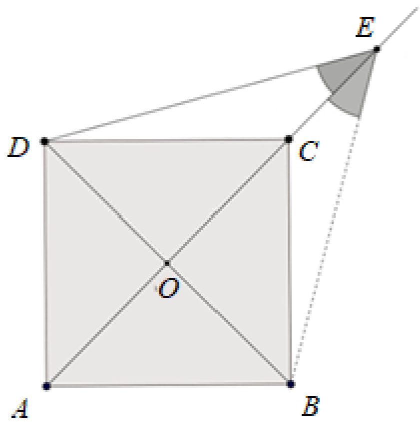
$$ac+ad+bc+db=68,$$
$$a(c+d)+b(c+d)=68,$$
$$(c+d)(a+b)=68,$$
$$4(a+b)=68,$$
$$a+b=17.$$

Според тоа, $a+b+c+d=17+4=21$.

2. Даден е квадрат *ABCD*. На продолжението на дијагоналата *AC* е избрана точка *E* така што $\overline{DE}=\overline{AC}$. Одреди ја мерката на аголот *DEC*.

Решение. Бидејќи *ABCD* е квадрат, дијагоналата *AC* е симетрала на дијагоналата *BD*, па затоа триаголникот *BDE* е рамнокрак со основа *BD*. Понатаму, $\overline{DE}=\overline{AC}=\overline{BD}$, што значи дека основата и кракот на рамнокракиот триаголник *BDE* се еднакви, т.е. тој е рамностран. Според тоа, $\measuredangle DEB=60^\circ$, па затоа

$$\measuredangle DEC=\frac{1}{2}\measuredangle DEB=\frac{1}{2}\cdot 60^\circ=30^\circ.$$



3. Определи ги позитивните броеви a,b,c за кои важи

$$a^2+ab+ac=20,$$
$$ab+b^2+bc=30,$$
$$ac+bc+c^2=50.$$

Решение. Од условот на задачата следува

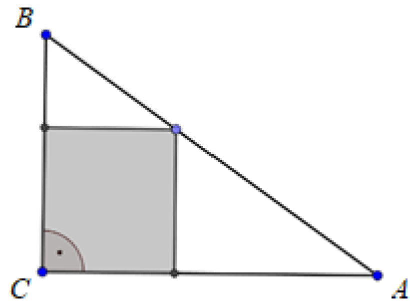
$$a(a+b+c)=20,\quad b(a+b+c)=30,\quad c(a+b+c)=50. \qquad (1)$$

Ако ги собереме последните равенства, добиваме

$$a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c)=100,$$
$$(a+b+c)(a+b+c)=100.$$

Сега, бидејќи a,b,c се позитивни броеви, од последното равенство следува $a+b+c=10$. Сега, од равенствата (1) следува $a=2, b=3, c=5$.

4. Пресметај ја плоштината на квадратот впишан во правоаголен триаголник со хипотенуза 13 cm и катета 5 cm (види цртеж).

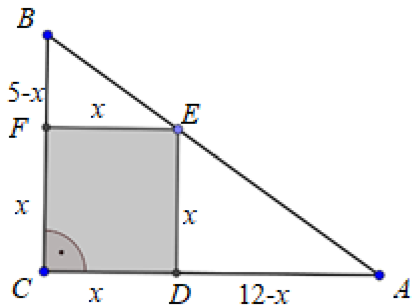


Решение. Нека $c=13\,cm, a=3\,cm$. Тогаш од Питагоровата теорема следува

$$b^2=13^2-5^2, \text{ т.е. } b=12\,cm.$$

Понатаму, од сличноста на триаголниците AED и EBF ја добиваме пропорцијата

$$(12-x):x=x:(5-x),$$



од каде добиваме $x=\frac{60}{17}\,cm$. Конечно, плоштината на впишаниот триаголник е $P=x^2=\frac{3600}{289}\,cm^2$.