Општински натпревар 2018

I година

1А. Ако n е непарен број, тогаш бројот n^3+3n^2-n-3 е делив со 48. Докажи!

Решение. Го трансформираме дадениот израз и добиваме

$$n^3+3n^2-n-3=n^2(n+3)-(n+3)=(n+3)(n^2-1)=(n+3)(n-1)(n+1).$$

Бидејќи n е непарен број, n може да се запише како $n=2k-1$ за некој природен број k. Тогаш

$$(n+3)(n-1)(n+1)=(2k+2)(2k-2)2k=8(k-1)k(k+1).$$

Производ од три последователни броеви е секогаш делив со 6. Следува дека 48 е делител на бројот n^3+3n^2-n-3.

1Б. Ако збирот на броевите $\overline{xyz}$ и $\overline{abc}$ е делив со 37 докажи дека и бројот $\overline{xyzabc}$ е делив со 37.

Решение. Според условот

$$\overline{xyz}+\overline{abc}=37k \qquad (*)$$

Понатаму, $\overline{xyzabc}=1000\cdot\overline{xyz}+\overline{abc}$, па ако замениме од (*) ќе добиеме

$$\overline{xyzabc}=1000\cdot\overline{xyz}+(37k-\overline{xyz})=999\overline{xyz}+37k.$$

Со разложување на $999=37\cdot 27$ конечно добиваме

$$\overline{xyzabc}=999\overline{xyz}+37k=37\cdot 27\overline{xyz}+37k=37(27\overline{xyz}+k).$$

2А. 3Б. Растојанието од местото А до местото В автомобил го поминува со постојана брзина. Ако автомобилот се движи со брзина поголема за 8 километри на час, тогаш од А до В ќе патува 3 часа помалку, а ако се движи со брзина помала за 8 километри на час, тогаш од А до В ќе патува 5 часа повеќе. Определи го растојанието меѓу местата А и В.

Решение. Нека возилото се движи во брзина v, а поминатото време нека е t, и нека растојанието го означиме со s. Тогаш

$$(v+8)(t-3)=s \Rightarrow vt-3v+8t-24=s \Rightarrow s-3v+8t-24=s \Rightarrow -3v+8t=24$$

$$(v-8)(t+5)=s \Rightarrow vt+5v-8t-40=s \Rightarrow s+5v-8t-40=s \Rightarrow 5v-8t=40$$

На овој начин добиваме систем две равенки со две непознати

$$\begin{cases} -3v+8t=24 \\ 5v-8t=40 \end{cases}.$$

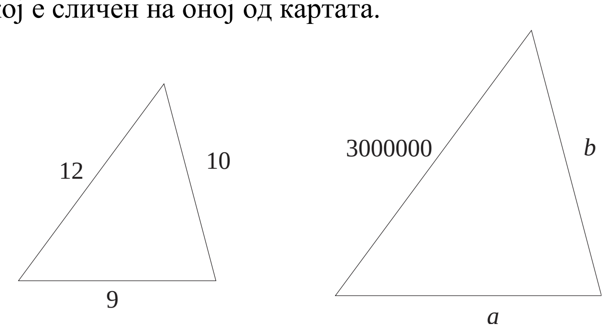
Ако ги собереме двете равенки добиваме $2v=64$, односно $v=32\ km/h$. Ако замениме во првата равенка, добиваме

$$-3v+8t=24 \Rightarrow 8t=24+3v \Rightarrow t=\tfrac{24+3v}{8}=\tfrac{24+96}{8}=15\,h.$$

Бараното растојание е $s=vt=32\cdot 15=480\,km.$

2Б. На географска карта растојанијата меѓу три точки се 9 *cm,* 10 *cm* и 12 *cm*. Најголемото од тие растојанија во природата е 30 *km*. Определи ги другите две растојанија во природата и размерот на картата.

Решение. Трите точки на картата може да ги преставиме како триаголник со страни 9 *cm,* 10 *cm* и 12 *cm*. Во природата тие ќе претставуваат триаголник кој е сличен на оној од картата.



Ако земеме во предвид дека $1\,km=100000\,cm$, имаме дека најголемото растојание е 3000000. За останатите имаме

$$\frac{a}{9}=\frac{3000000}{12} \qquad \frac{b}{10}=\frac{3000000}{12}$$

$$\frac{a}{9}=250000 \qquad \text{и} \qquad \frac{b}{10}=250000$$

$$a=2250000cm \qquad b=2500000cm$$

Размерот на картата е 1: 250000**.**

3А. 4Б. Периметарот на правоаголен триаголник изнесува 18, а неговата плоштина е 9. Колкава е должината на хипотенузата на тој триаголник?

Решение. *Прв начин.* Нека a и b се должините на катетите, а c е должината на хипотенузата на дадениот триаголник. Од $a+b+c=18$ следува

$$(a+b)^2=(18-c)^2=18^2-36c+c^2.$$

Дадениот триаголник е правоаголен, па затоа $a^2+b^2=c^2$. Според тоа,

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=c^2+2ab,$$

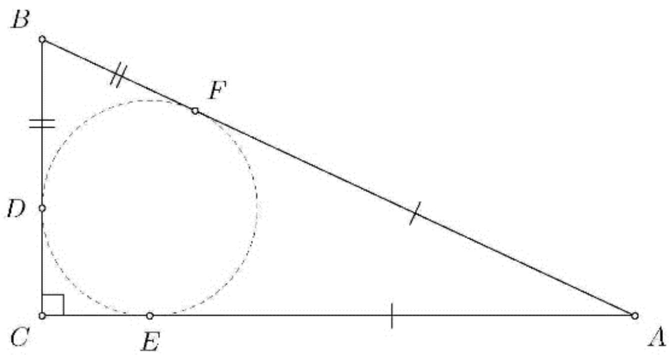
па затоа

$$c^2 + 2ab = 18^2 - 36c + c^2, \text{ т.е. } 2ab = 18^2 - 36c.$$

Понатаму, плоштината на триаголникот е 9, па затоа $ab = 18$ и ако замениме во последната равенка добиваме $36 = 18^2 - 36c$, од каде наоѓаме $c = 8$.

Втор начин. Нека a и b се должините на катетите, а c е должината на хипотенузата на дадениот триаголник. За плоштината на триаголникот имаме $P = \frac{a+b+c}{2} r$, каде r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот. Според тоа, $9 = \frac{18}{2} r$, т.е. $r = 1$.

Нека ABC е дадениот триаголник (види цртеж). При дадените ознаки имаме



$$c = \overline{AF} + \overline{FB} = \overline{AE} + \overline{BD} = (a - r) + (b - r) = a + b - 2r,$$

па затоа $r = \frac{a+b-c}{2}$. Бидејќи

$$a + b + c = 18, \text{ т.е. } a + b = 18 - c,$$

добиваме дека

$$c = a + b - 2r = 18 - c - 2r = 16 - c,$$

т.е. $c = 8$.

4А. Ако a, b, c и $\frac{a-b\sqrt{2018}}{b-c\sqrt{2018}}$ се рационални броеви, тогаш $ac = b^2$. Докажи!

Решение. Нека $\frac{a-b\sqrt{2018}}{b-c\sqrt{2018}} = r$. Тогаш $a - b\sqrt{2018} = r(b - c\sqrt{2018})$, па затоа

$$a - rb = (b - rc)\sqrt{2018} \qquad (*)$$

Ако $\sqrt{2018} = \frac{m}{n}$, каде $\text{NZD}(m,n) = 1$, тогаш $m^2 = n^2 \cdot 2018$, од каде добваме $2 \mid m^2 \Rightarrow 2 \mid m \Rightarrow 4 \mid m^2$, па затоа $2 \mid n^2 \Rightarrow 2 \mid n$, што е противречи на

$\mathrm{NZD}(m,n)=1$. Следува $\sqrt{2018}$ е ирационален број**.** Равенството (*) ќе биде исполнето само кога $a-rb=b-rc=0$**,** односно $r=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$. Од тука добиваме $ac=b^2$**.**

II година

1А. За кои вредности на параметарот m системот равенки

$$\begin{cases} 2x-5y=10 \\ 3x-2y=m \end{cases}$$

има решение (x,y) такво што $x>0, y<0$?

Решение. Дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} -6x+15y=-30 \\ \ \ 6x-4y=2m \end{cases}$$

и оттука имаме $y=\frac{-30+2m}{11}$. Потоа,

$$x=\frac{10+5y}{2}=\frac{10+5\frac{-30+2m}{11}}{2}=\frac{110-150+10m}{22}=\frac{-20+5m}{11}.$$

Од условот во задачата имаме $\frac{-20+5m}{11}>0$ и $\frac{-30+2m}{11}<0$, односно $m>4$ и $m<15$. Значи, бараните вредности се $4<m<15$.

2А. Определи ја квадратната равенка $x^2+px+q=0$, ако е познато дека разликата на нејзините решенија е 7, а разликата на нивните кубови е 91.

Решение. Од условите на задачата следува $x_1-x_2=7$ и $x_1^3-x_2^3=91$. Затоа,

$$91=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=7(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$

и оттука добиваме $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=13$. Имаме:

$$q=x_1x_2=\frac{x_1^2+x_1x_2+x_2^2-(x_1-x_2)^2}{3}=\frac{13-7^2}{3}=-12,$$

$$p^2=(x_1+x_2)^2=(x_1-x_2)^2+4x_1x_2=7^2-4\cdot 12=49-48=1$$

и оттука $p=\pm 1$. Значи, бараните равенки се

$$x^2+x-12=0 \text{ и } x^2-x-12=0.$$

3АБ. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$x^2+(\tfrac{x}{x-1})^2=8 .$$

Решение. Ако равенката ја прошириме со додавање на $2x\cdot\frac{x}{x-1}$, истата последователно е еквивалентна со равенките

$$x^2+2x\cdot\tfrac{x}{x-1}+(\tfrac{x}{x-1})^2-2\tfrac{x^2}{x-1}-8=0$$

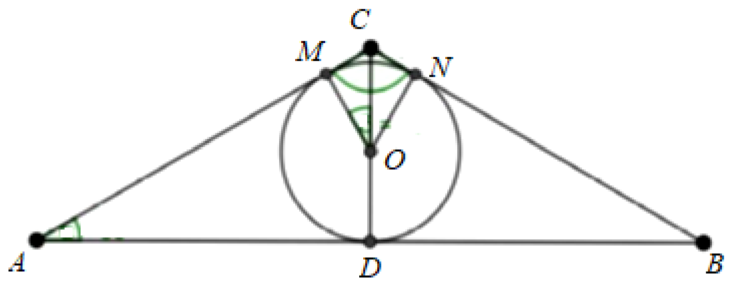
$$(x+\tfrac{x}{x-1})^2-2\tfrac{x^2}{x-1}-8=0$$

$$(\tfrac{x^2}{x-1})^2-2\tfrac{x^2}{x-1}-8=0 .$$

Воведуваме смена $\frac{x^2}{x-1}=t$ и ја добиваме равенката $t^2-2t-8=0$. Решенија на последната равенка се $t_1=4$ и $t_2=-2$, па според тоа ги добиваме равенките $x^2-4x+4=0$ и $x^2+2x-2=0$. Првата равенка има двоен корен $x_{1/2}=2$, а решенијата на втората равенка се $x_{3/4}=-1\pm\sqrt{3}$. Значи, решенија на почетната равенка се 2, $-1+\sqrt{3}$, $-1-\sqrt{3}$.

4АБ. Радиусот на впишаната кружница во рамнокрак триаголник со агол при врвот 120° е $\sqrt{3}\,cm$. Пресметај ја плоштината на триаголникот.

Решение. Нека O е центарот на впишаната кружница и нека $\overline{OD}=\overline{OM}=\overline{ON}$ се радиусите на впишаната кружница, каде што D,M и N се допирите со страните и нека $\overline{OC}=x$.



Од правоаголниот триаголник CMO следува дека $\overline{MC}=\frac{x}{2}$, и важи

$$x^2-\tfrac{x^2}{4}=r^2,\ x^2=\tfrac{4r^2}{3},\ x=\tfrac{2r}{\sqrt{3}}=2\,cm .$$

Значи, $\overline{CD}=x+r=2+\sqrt{3}\,cm$ и затоа $\overline{AC}=2\overline{CD}=4+2\sqrt{3}\,cm$. Правоаголните триаголниците ADC и BDC се складни и се половинки од рамностран триаголник со страна $4+2\sqrt{3}cm$. Конечно, за бараната плоштина имаме

$$P = 2\frac{(4+2\sqrt{3})^2}{8}\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^2\sqrt{3} = 12+7\sqrt{3}cm\,.$$

1Б. Реши го системот равенки:

$$\frac{x+2y}{x+y} = \frac{2x+3}{y+1} = \frac{5}{3}\,.$$

Решение. Јасно, $x \neq -y$ и $y \neq -1$. Од $\frac{x+2y}{x+y} = \frac{5}{3}$ добиваме

$$3x+6y = 5x+5y\,,$$

а од $\frac{2x+3}{y+1} = \frac{5}{3}$ добиваме

$$6x+9 = 5y+5\,,$$

односно дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ 6x-5y=-4 \end{cases}.$$

Со замена на $y=2x$ во втората равенка, имаме $6x-10x=-4$ и оттука $x=1$ и $y=2$.

2Б. Квадратната равенка $x^2-9x+3=0$ има решенија a и b. Без да и пресметуваш a и b определи ги p и q, за да квадратната равенка $x^2+px+q=0$ има решенија a^2 и b^2.

Решение. Од $a+b=9$ и $ab=3$ следува

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=81-6=75$$

и оттука $p=-75$, а $q=a^2b^2=9$.

III година

1АБ. Реши ја равенката

$$27\cdot x^{\log_{27} x} = \sqrt[3]{x^{10}}\,.$$

Решение. За $x>0$, ќе ја логаритмираме равенката со основа 3. Користејќи ги својствата на логаритми последователно добиваме:

$$\log_3(27\cdot x^{\log_{27}x})=\log_3(x^{\frac{10}{3}})$$
$$\log_3 3^3+\log_3(x^{\log_{27}x})=\tfrac{10}{3}\log_3 x$$
$$3+\log_{27}x\cdot\log_3 x=\tfrac{10}{3}\log_3 x$$
$$3+\frac{1}{\log_x 3^3}\cdot\log_3 x=\tfrac{10}{3}\log_3 x$$
$$3+\frac{1}{3\log_x 3}\cdot\log_3 x=\tfrac{10}{3}\log_3 x$$
$$3+\tfrac{1}{3}\log_3 x\cdot\log_3 x=\tfrac{10}{3}\log_3 x$$
$$9+(\log_3 x)^2=10\cdot\log_3 x \qquad \Leftrightarrow$$
$$(\log_3 x)^2-10\cdot\log_3 x+9=0$$

Решенијата на последната квадратна равенка по $\log_3 x$ се $\log_3 x=1$ и $\log_3 x=9$, од каде добиваме $x=3$ и $x=3^9$.

2А. Реши ја равенката

$$9^x-6^x=4^{x+\frac{1}{2}}.$$

Решение. Имаме:

$$9^x-6^x=4^{x+\frac{1}{2}}$$
$$9^x-6^x=2\cdot 4^x$$
$$(\tfrac{3}{2})^x-1=2\cdot(\tfrac{2}{3})^x$$
$$(\tfrac{3}{2})^{2x}-(\tfrac{3}{2})^x-2=0.$$

Со смената $t=(\frac{3}{2})^x$, ја добиваме квадратната равенка $t^2-t-2=0$, чии што решенија се $t_1=-1$ и $t_2=2$. Бидејќи $t>0$, добиваме $t=2$, од каде $x=\log_{3/2}2$.

3А. Докажи дека за $0<\alpha_1<\alpha_2<...<\alpha_n<\frac{\pi}{2}$ важи двојното неравенство

$$\operatorname{tg}\alpha_1<\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+...+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+...+\cos\alpha_n}<\operatorname{tg}\alpha_n.$$

Решение. За $0<x<y<\frac{\pi}{2}$ важи $0<\sin x<\sin y$ и $\cos x>\cos y>0$. Тогаш за $0<\alpha_1<\alpha_2<...<\alpha_n<\frac{\pi}{2}$ важи

$$0<n\sin\alpha_1<\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+...+\sin\alpha_n<n\sin\alpha_n \qquad (i)$$

и

$$0 < n\cos\alpha_n < \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + ... + \cos\alpha_n < n\cos\alpha_1 ,$$

т.е.

$$0 < \frac{1}{n\cos\alpha_1} < \frac{1}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + ... + \cos\alpha_n} < \frac{1}{n\cos\alpha_n} \qquad (ii)$$

Од (i) и (ii) добиваме

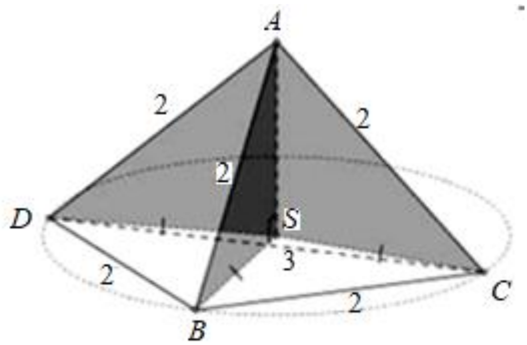
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{n\sin\alpha_1}{n\cos\alpha_1} < \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + ... + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + ... + \cos\alpha_n} < \frac{n\sin\alpha_n}{n\cos\alpha_n} = \operatorname{tg}\alpha_n .$$

4АБ. Даден е тетраедар $ABCD$ таков што

$$\overline{CD} = 3 \text{ и } \overline{AB} = \overline{AD} = \overline{AC} = \overline{BC} = \overline{BD} = 2 .$$

Пресметај го волуменот на тетраедарот $ABCD$.

Решение. Тетраедарот ќе го разгледуваме како три-страна пирамида во која основа е рамнокракиот триаголник BCD (види цртеж десно). Плоштината на триаголникот BCD ќе ја определиме со по-мош на Хероновата формула. Должините на страните на овој триаголник се $a = 2$, $b = 2$, $c = 3$ и полупериметарот е $s = \frac{7}{2}$. Според тоа,



$$P_{BCD} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{7} .$$

Нека S е подножјето на висината повлечена од темето A на основата BCD. Триаголниците ASB, ASC и ASD се правоаголни, имаат заедничка катета и хипотенузите им се со еднакви должини $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{AC} = 2$, па од Питагоровата теорема следува дека $\overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS}$. Според тоа, S е центарот на опишаната кружница околу триаголникот BCD. Оттука следува дека

$$R = \overline{BS} = \frac{abc}{4P_{BCD}} = \frac{2\cdot2\cdot3}{3\sqrt{7}} = \frac{4}{\sqrt{7}} .$$

Сега, од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AS} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BS}^2} = \sqrt{4 - \frac{16}{7}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} .$$

Конечно, волуменот на тетраедарот е

$$V=\frac{1}{3}P_{BCD}\cdot\overline{AS}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{7}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

2В. Ако $9^x+9^{-x}=15$, пресметај 81^x+81^{-x}.

Решение. Имаме**:**

$$81^x+81^{-x}=9^{2x}+9^{-2x}=(9^x+9^{-x})^2-2=15^2-2=223.$$

3В. Докажи го идентитетот

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}\ .$$

Решение. Користејќи ги формулите за тригонометриски функции од двоен агол и основното тригонометриско равенство, добиваме:

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}.$$

IV година

1А. Ако (a_n) е геометриска прогресија со позитивни членови, докажи дека $(\ln a_n)$ е аритметичка прогресија. Определи го збирот на првите 2018 членови на аритметичката прогресија.

Решение. За секој природен број n важи $a_{n+1}^2=a_n a_{n+2}$, па следува дека $2\ln a_{n+1}=\ln a_n+\ln a_{n+2}$, за секој природен број n. Значи, $(\ln a_n)$ е аритметичка прогресија. Имаме $S_{2018}=\frac{2018}{2}(2\ln a_1+2017\ln q)$, каде q е количникот на геометриската прогресија (a_n).

1Б. Првите три члена од една геометриска прогресија се $x, x+6, x+30$. Определи го четвртиот член од таа геометриска прогресија.

Решение. Од тоа што $x, x+6, x+30$ се последователни членови на геометриска прогресија, следува дека квадратот на средниот член е еднаков на производот на првиот и третиот член од прогресијата, т.е.

$$x(x+30)=(x+6)^2,$$

односно

$$x^2+30x=x^2+12x+36\,.$$

Решението на последната равенка е $x=2$. Според тоа, првите три члена на геометриската прогресија се 2, 8 и 32, а четвртиот член е $a_4 = 2\cdot 4^3 = 128$.

2АБ. Разложи го на множители полиномот:

$$(1+a+a^2+...+a^n)^2 - a^n.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(1+a+a^2+...+a^n)^2 - a^n &= (\tfrac{1-a^{n+1}}{1-a})^2 - a^n = \frac{(1-a^{n+1})^2 - a^n(1-a)^2}{(1-a)^2}\\ &= \frac{(1-a^n)(1-a^{n+2})}{(1-a)^2} = \frac{1-a^n}{1-a}\frac{1-a^{n+2}}{1-a}\\ &= (1+a+a^2+...+a^{n-1})(1+a+a^2+...+a^{n+1})\end{aligned}$$

3А. Треба да избереме група од 6 луѓе од група од 8 луѓе, при што ако го избереме лицето A, мора да го избереме и лицето B. На колку начини може да се направи овој избор?

Решение. Ако не е избрано лицето A, тогаш од преостанатите 7 лица, можеме да избереме 6 лица на $\binom{7}{6}$ начини**.** Ако е избрано лицето A, тогаш мора да го избереме и лицето B, па од преостанатите 6 лица, треба да избереме 4 лица, што може да се направи $\binom{6}{4}$ начини**.** Конечно, изборот на луѓето според условите на задачата може да се направи на $\binom{7}{6}+\binom{6}{4}=22$ начина.

3Б. Докажи дека $n! > 2^n$, за секој природен број $n \geq 4$.

Решение. Доказот ќе го дадеме со помош на математичка индукција. За $n=4$, имаме дека $4! = 24 > 2^4 = 16$, тврдењето важи.

Претпоставуваме дека трврдењето е точно за $n=k$, т.е. важи $k! > 2^k$, за $k \geq 4$. За $n=k+1$, имаме

$$(k+1)! = (k+1)k! > (k+1)2^k > 2^{k+1},$$

при што искористивме дека $k+1 > 2$, за $k \geq 4$. Согласно принципот на математичка индукција тврдењето важи за секој природен број $n \geq 4$.

4АБ. Производ на осум последователни природни броеви не може да биде четврти степен на природен број. Докажи!

Решение. Нека x е најмалиот од осумте последователни природни броеви. Според тоа, броевите се $x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, x+6, x+7$, а нивниот производ е $P = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)$, кој можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned} P &= [x(x+7)][(x+1)(x+6)][(x+2)(x+5)][(x+3)(x+4)] \\ &= (x^2+7x)(x^2+7x+6)(x^2+7x+10)(x^2+7x+12). \end{aligned}$$

Ако воведеме смена $a = x^2+7x+6$, тогаш P можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned} P &= (a-6)a(a+4)(a+6) \\ &= (a^2-36)(a^2+4a) \\ &= a^4+4a^3-36a^2-144 \\ &= a^4+4a(a^2-9a-36) \\ &= a^4+4a(a+3)(a-12). \end{aligned}$$

Од условот на задачата x е природен број така што $x \geq 1$, па според тоа $a = x^2+7x+6 \geq 14$. Значи $a-12>0$, од каде добиваме дека $a^4 < P$. Од друга страна

$$P = a^4+4a^3-36a^2-144 < a^4+4a^3+6a^2+4a+1 = (a+1)^4.$$

Од последните две неравенства добиваме дека $a^4 < P < (a+1)^4$, па тврдењето на задачата следува од тоа што a и $a+1$ се последователни природни броеви.