

**Ристо Малчески
Алекса Малчески
Самоил Малчески**

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 19
(збирка задачи за IV и V одделение)

Скопје, 2020

Рецензенти

проф. д-р Методи Главче

доц. д-р Катерина Аневска

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски",
Скопје

373.3.016:51(076.12)

МАЛЧЕСКИ, Ристо

Математички талент 19 : (збирка задачи за IV и V одделение) / Ристо
Малчески, Алекса Малчески, Самоил Малчески. - Скопје : Армаганка,
2020. - 315 стр. : илустр. ; 25 см

Библиографија: стр. 313-315

ISBN 978-608-4904-51-9

1. Малчески, Алекса [автор] 2. Малчески, Самоил [автор]

COBISS.MK-ID 51291653

СОДРЖИНА

Предговор	5
I Аритметика и алгебра	
I.1. Пресметувања	7
I.2. Бројни ребуси	12
I.3. Распоредувања и магични фигури	16
I.4. Равенки	20
II Деливост	
II.1. Делење со остаток	22
II.2. Признаци за деливост	23
II.3. Прости броеви	24
III Текстуални задачи	
III.1. Броеви и цифри	25
III.2. Пазаруваме и пресметуваме пари	30
III.3. Времето е важно	36
III.4. Задачи со мерни броеви	42
III.5. Дополнителни задачи	49
IV Геометрија	
IV.1. Отсечки и агли	61
IV.2. Триаголник	64
IV.3. Четириаголник	68
V Логика и комбинаторика	
V.1. Множества	78
V.2. Логички главоболки	81
V.3. Занимливи броења	85
V.4. Броења на геометриски фигури	90
V.5. Распоредувања	94
V.6. Боења, покривања и расекувања	96
Решенија на задачите	
I Аритметика и алгебра	
I.1. Пресметувања	98
I.2. Бројни ребуси	109
I.3. Распоредувања и магични фигури	123
I.4. Равенки	133

II	Деливост	
	II.1. Делење со остаток	137
	II.2. Признаци за деливост	140
	II.3. Прости броеви	142
III	Текстуални задачи	
	III.1. Броеви и цифри	144
	III.2. Пазаруваме и пресметуваме пари	158
	III.3. Времето е важно	171
	III.4. Задачи со мерни броеви	184
	III.5. Дополнителни задачи	199
IV	Геометрија	
	IV.1. Отсечки и агли	226
	IV.2. Триаголник	232
	IV.3. Четириаголник	242
V	Логика и комбинаторика	
	V.1. Множества	264
	V.2. Логички главоболки	271
	V.3. Занимливи броења	282
	V.4. Броења на геометриски фигури	296
	V.5. Распоредувања	305
	V.6. Боења, покривања и расекувања	308
	Литература	313

ПРЕДГОВОР

Ниту едно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент* 19 е наменета за талентираниите ученици по математика од четврто и петто одделение и е комплементарна со книгите *Математички талент* 1, 2, 13 и 14, т.е. на извесен начин е дополнување на овие книги. Меѓутоа, сметаме дека оваа книга ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на математички надарените ученици, како и за бројните вљубеници во математиката. Книгата, всушност, е збирка од 731 решени задачи во која во пет одделни дела се обработени алгебарски, аритметички, текстуални, логички, комбинаторни, геометриски и задачи од теорија на броеви, приспособени за учениците на возраст од десет до дванаесет години.

Како и во останатите книги од серијата *Математички талент*, така и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области.

Рецензентите, д-р Методи Главче и д-р Катерина Аневска, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје
мај, 2020 г.

Авторите

I АРИТМЕТИКА И АЛГЕБРА

I.1. ПРЕСМЕТУВАЊА

1. Калкулаторот на Горјан е расипан и при собирање на броевите x и y тој го дава збирот $x + y + 1$. Горјан ги собрал броевите 1, 2, 3 и 4. Што покажал неговиот калкулатор?
2. Определи ја разликата меѓу најголемиот трицифрен број запишан со различни цифри и најмалиот двоцифрен број запишан со исти цифри.
3. Определи ја разликата меѓу најголемиот и најмалиот трицифрен број на кои збиравите на цифрите им се еднакви на 4.
4. Со a и b да ги означиме соодветно најголемиот и најмалиот трицифрен број чиј збир на цифри е еднаков на 5. Определи ја разликата $a - b$.
5. Определи ја разликата на најмалиот непарен шестцифрен број и најголемиот парен петцифрен број.
6. Нека бројот A е еднаков на бројот на сите двоцифрени броеви кај кои цифрата на единиците е поголема од цифрата на десетките, а бројот B е еднаков на бројот на сите двоцифрени броеви кај кои цифрата на десетките е поголема од цифрата на единиците. Определи го збирот $A + B$.
7. Со помош на цифрите 0, 5 и 8 запиши ги најголемиот и најмалиот петцифрен број, при дадените цифри може да се повторуваат и секоја цифра е употребена барем еднаш. Определи ги збирот и разликата на добиените броеви.
8. Определи го збирот на најмалиот и најголемиот трицифрен број формиран со некои од цифрите 0, 2 и 5.
9. Определи го збирот на најмалиот четирицифрен број запишан со различни цифри и најголемиот парен трицифрен број запишан со различни цифри.

10. Даден е десетцифрениот број 3794618502. Прецртај три цифри така што добиениот број ќе биде:
 - 1) најмал можен број,
 - 2) најголем можен број.
11. Запиши го бројот кој се добива со собирање на 14 илјади, 14 стотки, 14 десетки и 14 единици.
12. Меѓу цифрите 987654321 постави шест знаци + така што збирот на добиените едноцифрени и двоцифрени броеви е еднаков на 108. Определи го збирот на едноцифрените броеви?
13. Меѓу броевите

$780 \quad 109 \quad 255 \quad 124 \quad 364 \quad 656$

 запиши знаци за собирање и одземање (+ или -) така што вредноста на добиениот израз ќе биде еднаква на нула.
14. Калина (К) сака да множи со 4, Симона (С) сака да додава 5, а Ратка (Р) сака да одзема 2. Во кој редослед треба трите точно по еднаш да ги реализираат своите омилени операции за да од бројот 12 го добијат бројот 60?
15. Со помош на шест четворки, загради и симболите на математичките операции состави броен израз чија вредност е еднаква на 100.
16. Со помош на четири деветки и симболите за математичките операции запиши шест бројни изрази секој од кои е еднаков на 1. (Дозволено е користење на загради.)
17. Ана ја напишала таблицата за множење со 2 при што запишнала од $2 \cdot 1$ и завршила со $2 \cdot 10$. Румена ја запишала таблицата за множење со 3 при што започнала од $3 \cdot 1$ и завршила со $3 \cdot 10$ и Иван ја запишал таблицата за множење со 4 при што започнал од $4 \cdot 1$ и завршил со $4 \cdot 10$. Колку еднакви производи се среќаваат барем во двете таблици.
18. Со помош на броевите 1, 6, 9 и 9 и операциите собирање, одземање, делење и множење запиши бројни изрази чии вредности се 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8. Користењето на загради е дозволено.
19. Јасен има картончиња, на секое од кои е напишана по една цифра. Со помош на девет картончиња тој запишал точен пример на собирање на два трициф-

$$\begin{array}{r}
 \boxed{2} \boxed{8} \boxed{9} \\
 + \quad \boxed{4} \boxed{1} \boxed{5} \\
 \hline
 \boxed{6} \boxed{0} \boxed{3}
 \end{array}$$

рени броеви. Неговиот другар Мирко ги сменил местата на две од картончињата, со што се добила ситуацијата на цртежот десно. Запиши ги цифрите на двете разместени картончиња?

20. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$20 \cdot 19 + 20 + 19$$

21. На местата на буквите $\overline{ab} \cdot c$ запиши ги цифрите 8, 4 и 3 така што добиениот производ ќе биде најмал.

22. Пресметај ги вредностите на изразите:

а) $444 : 2 + 229$,

б) $92 \cdot 5 + 4 : 4$,

в) $544 - 416 : 4$,

г) $400 + 300 : 5$.

23. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(254 - 18 \cdot 3) : 5.$$

24. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$48 + 243 + (307 + 100 + 307).$$

25. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$665 - 5 \cdot (18 : 2 - 7) \cdot 65 + 35.$$

26. а) Пресметај ја вредноста на изразот:

$$2018 - (12 \cdot 7 + 13 \cdot 7 + 75 \cdot 7 + 219 : 3).$$

б) Ако a е цифрата на десетилјадитите, b е цифрата на илјадитите, c е цифрата на стотките и d е цифрата на десетките на бројот 305714 пресметај ја вредноста на изразот $bc - ad$.

27. Пресметај:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) \cdot 9.$$

28. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$23 \cdot 17 + 24 \cdot 17 + 26 \cdot 17 + 27 \cdot 17.$$

29. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(137 + 241 + 763 + 459) : 2.$$

30. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(503 - 6 + 6) - (16 + 80 \cdot 5) : 4.$$

31. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$201 \cdot 7 + (20 \cdot 17 + 17) : 17 - (2 + 0 + 1 + 7) \cdot (20 - 17),$$

32. Пресметај ја вредноста на изразот:

- а) $924 - 742 : 7$,
- б) $856 : 8 + 13 \cdot 9 - 7 \cdot 5$,
- в) $44 - 44 \cdot 0 + 424 : 4 + 147 \cdot 2$.

33. Пресметај ја вредноста на изразот:

- а) $918 : 3 + 3 + 10 \cdot 10 - 9$,
- б) $(2012 : 4 - 4) \cdot 4$,
- в) $672 - 72 : (3 + 4 : 4)$.

34. Пресметај ја вредноста на изразот:

- а) $1 \cdot 55 : 11 - 0 \cdot (121 \cdot 21 + 324 : 6 - 16)$,
- б) $6 \cdot 46 : 12 + 4 \cdot (12 \cdot 21 + 324 : 6 - 196)$
- в) $(393 + 256 - 199) \cdot 2 + 24 : 6 - 141$,
- г) $2 \cdot ((55 : 5 + 39) : 5 + 11 \cdot 12) - 20$.

35. Пресметај ја вредноста на изразот:

- а) $(400 + 4) : 4 - 400 : 4 + 4 : 4$,
- б) $306 : 3 - 2 \cdot 29 + 10 \cdot 4 - 4$,
- в) $424 : 4 + 4 \cdot 111 + 460$,
- г) $244 + 4 \cdot 50 + 444$.

36. Пресематј ја вредноста на изразот:

- а) $99 \cdot 8 + 99 \cdot 7 + 99 \cdot 1 + 99 \cdot 2 - 99 \cdot 3 - 99 \cdot 4 - 99 \cdot 5 - 99 \cdot 6$,
- б) $4 \cdot 1000 + 20 \cdot 100 + 1$,
- в) $43207 + 92714 - 13207$.

37. Пресметај ја вредноста на изразот $20 - (2a + 2)$, каде a е решението на равенката $(4 + a) : 2 = 3$.

38. Пресметај: $4028 - (a + b + c)$, ако

$$a = 898 : 2 + 955 : 5, \quad b = (144 - 144 : 8) \cdot 7 \quad \text{и} \quad c = 82 \cdot 9 - 82 : 3.$$

39. Определи ја вредноста на C ако четвртина од C е еднаква на $A - B$ каде $A = (24 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2$ и $B = 9 \cdot 8$.

40. Пресметај ја вредноста на изразот

$$(a(c - 2b) + 21 \cdot 9) : 4,$$

каде a е најголемиот едноцифрен број, b е најмалиот двоцифрен број кој не е делив со 2 и c е најмалиот непарен трицифрен број.

41. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(2018 + 2016 + \dots + 6 + 4 + 2) - (2017 + 2015 + \dots + 5 + 3 + 1).$$

42. Нека $A = 1 + 3 + 5 + \dots + 99$ и $B = 2 + 4 + 6 + \dots + 100$. Определи ја разликата $B - A$.

43. а) Пресметај ја вредноста на изразот:

$$636 : 6 - 4 - 3 \cdot 15 + 5,$$

- б) Ако $a = 25 - 12$, $b = 3 \cdot 5 + 4$, $c = 36 : 12 - 1$, пресметај ја вредноста на изразот:

$$45a + 11b - (7c + 11)(7c - 11).$$

- в) Пресметај ја вредноста на изразот:

$$2009 - 2007 + 2005 - 2003 + 2001 - 1999 + \dots + 9 - 7 + 5 - 3 + 1.$$

44. Нека

$$A = 2 \cdot 3 \cdot 3, B = 1 + 0 \cdot (5 \cdot 132 - 236) + 78 \cdot 2 - 4 \cdot 39 \text{ и } C = 52 : 4 - 33 : 3.$$

Определи го најголемиот меѓу производите AB , BC и CA .

45. Природните броеви се запишани во низа еден по друг:

$$123456789101112131415161718192021\dots$$

Која цифра се наоѓа на 2018-тото место?

46. Определи го седмиот член на низата броеви:

$$4413, 4404, 4396, 4389, 4383, _, _ \dots$$

47. Определи го збирот на првите осум членови на низата броеви:

$$2, 3, 5, 9, 17, _, _, _.$$

48. Малиот брат на Горјан се учи да пишува и напишал 215 букви една по друга: МАМОТАТЕМАМОТАТЕМАМОТАТЕМАМ... Која буква е 198-ма по ред?

49. Пабло ги симнувал играчките од новогодишната елка во текот на една седмица. Во понеделникот тој симнал 1 играчка, а потоа секој следен ден симнувал толку играчки колку што веќе симнал претходните денови. Во неделата тој ги симнал последните играчки. Колку играчки имало на елката?

1.2. БРОЈНИ РЕБУСИ

50. Во точно решена задача за множење $\overline{2*5} \cdot \overline{2*6} = \overline{A****}$ една од цифрите е заменета со A , а останатите цифри се заменети со $*$. Определи го бројот на можните вредности на A .

51. Горјан точно помножил трицифрен и двоцифрен број, а потоа две од цифрите ги заменил со ѕвездички и добил: $\overline{13*} \cdot \overline{*6} = \overline{*34}$. Определи го збирот на цифрите кои се заменети со ѕвездичките.

52. Реши го бројниот ребус во кој на исти бујви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$\overline{B} + \overline{AAAA} + \overline{AAAA} = \overline{BAAAA}.$$

53. Реши го бројниот ребус во кој на исти цифри соодветствуваат исти букви, а на различни цифри соодветствуваат различни букви:

$$\overline{A} + \overline{AB} + \overline{BB} + \overline{ABBB} = \overline{ADD5}.$$

54. Реши го бројниот ребус $\overline{a51} - \overline{1b3} = \overline{62c}$ во кој на различните букви соодветствуваат различни цифри.

55. Реши го бројниот ребус

$$\overline{A} + \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = \overline{1CC3}$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

56. Реши го бројниот ребус

$$\overline{A} + \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = 1989,$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

57. Определи го бројот $\overline{ABC}$ ако $C + B = A - B$ и $\overline{CCB} \cdot B = \overline{BAB}$ при што на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

58. Реши го бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$\overline{AAA} + \overline{BB} + \overline{CC} = \overline{CDAB}.$$

59. Реши го бројниот ребус

$$\overline{ABC} + \overline{BC} + C = 518$$

во кој на исти букци соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри (Запишаните броеви се трицифрен, двоцифрен и едноцифрен.). Определи го збирот $A + B + C$.

60. Реши го бројниот ребус

$$\overline{SM} + \overline{MT} + \overline{TS} = \overline{SMT},$$

во кој на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.

61. Реши го бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$\overline{SMT} + \overline{MT} + T = \overline{TTT}.$$

62. Реши го бројниот ребус

$$\overline{ABCD} + \overline{ABC} + \overline{AB} + A = 4321,$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

63. Реши го бројниот ребус

$$\overline{AB} + \overline{ABB} + \overline{CBBC} = \overline{BCDC}$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

64. Во бројниот ребус

$$\overline{NAF} + \overline{NIF} + \overline{NUF} = \overline{UFFF}$$

на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри. Ако $N = 8$, определи го збирот $A + I$.

65. Реши го бројниот ребус

$$\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 2016,$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

66. Реши го бројниот ребус

$$\overline{ABCD} + \overline{BCD} + \overline{BD} + D = 2008$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

67. Реши го бројниот ребус

а) $A + \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = 2001,$

б) $A + \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = 2002,$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

68. Дешифрирај го бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$\overline{ABCC} + \overline{CCBA} = \overline{ADCEB}.$$

69. Реши го бројниот ребус

а) $\overline{AACB} - \overline{ABC} - \overline{AB} - A = 2001,$

б) $\overline{AACB} - \overline{ABC} - \overline{AB} - A = 2002,$

в) $\overline{AADB} - \overline{ABC} - \overline{AB} - A = 2003.$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

70. Реши го бројниот ребус, во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$A + \overline{AB} + \overline{ABB} + \overline{ABBC} = \overline{DDA3}.$$

71. Реши го ребусот

$$\overline{OBOROT} + \overline{OBOROT} = \overline{KOLELO}$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

72. Реши го ребусот

$$\overline{ATAKA} + \overline{UDAR} + \overline{UDAR} = \overline{NOKAUT}$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

73. На местото на ѕвездичките запиши ги сцифрите од 0 до 9 така што секоја цифра ќе ја искрстишиш точно еднаш, ќе добие точно одземање и намаленикот ќе биде најголем:

$$***** - ***** = **.$$

74. Реши го бројниот ребус

$$A \cdot A \cdot A = \overline{ONA}$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

75. Реши го бројниот ребус во кој на исти цифри соодветствуваат исти букви, а на различни цифри соодветствуваат различни букви:

$$\begin{array}{r} \overline{ABA} \cdot \overline{AA} \\ \overline{ABA} \\ \hline \overline{ABA} \\ \hline \overline{A99A} \end{array}$$

76. Реши го бројниот ребус

$$\overline{MA} \cdot \overline{M} \cdot \overline{A} = \overline{AAA}$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

77. Реши го бројниот ребус

$$\overline{abcd} \cdot 9 = \overline{dcba},$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

78. Реше го бројниот ребус:

$$\overline{5a} \cdot \overline{8b} = \overline{cd46}, \text{ во кој } a > b.$$

79. Дешифрирај го множењето

$$\overline{abcde} = \overline{ee} \cdot \overline{eaa},$$

во кое на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

80. Во равенството $\overline{**} \cdot \overline{*} \cdot \overline{*} = 2$ на местото на ѕвездичките стави соодветни цифри така што ќе се добие точно равенство.

81. Дешифрирај го множењето

$$\begin{array}{r} \overline{**} \cdot \overline{**} \\ \overline{**} \\ \hline \overline{97} \\ \hline \overline{1***} \end{array}$$

82. На местата на ѕвездичките стави ги потребните цифри така што множењето ќе биде точно

$$\overline{*4*} \cdot 15 = \overline{3*9*}.$$

83. Дешифрирај го делењето

$$**** : *7 = **$$

$$\begin{array}{r} **5 \\ \hline \end{array}$$

$$**$$

$$\begin{array}{r} *1 \\ \hline \end{array}$$

$$0$$

така што на местата на ѕвездичките ќе ставиш соодветни цифри.

84. На местото на ѕвездичките стави ги потребните цифри така што множењето $*8** \cdot 45 = 26*17*$ ќе биде точно

85. Реконструирај го множењето:

$$\begin{array}{r} **,*** \\ \hline \end{array}$$

$$***$$

$$**$$

$$+ ***$$

$$\hline 62*7*$$

86. Во ребусот $\overline{KEN} = G \cdot U + R \cdot U$ на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат различни цифри. Определи ја разликата меѓу најголемиот и најмалиот можен трицифрен број $\overline{KEN}$.

I.3. РАСПОРЕДУВАЊА, МАГИЧНИ ФИГУРИ

87. Броевите 21, 22, 23 ... 31, 32 се запишани во три колони. Во секоја колона има еднаков број броеви и збирот на броевите запишани во секоја колона е еднаков. Определи го збирот на броевите запишани во секоја колона.

88. Секоја од цифрите 3, 7 и 9 треба да се запише $\square\square.\square = ?$ во едно од квадратчињата на цртежот десно така што производот на двоцифрениот и едноцифрениот број е најголем. Определи го овој производ.

89. Во квадратчињата запиши ги цифрите од 0 до 9, во секое квадратче по една цифра, така што ќе добиеш точно равенство:

$$\square\square + \square \cdot \square - \square\square : \square = \square\square\square$$

90. Дополни ја фигурата прикажана на цртежот десно така во полињата ќе бидат запишани броевите од 0 до 9 (во секое поле по еден број), а во полињата кои имаат заедничка страна или теме нема да има последователни броеви.

7			
5			4
8			1

91. Во празните квадратчиња на цртежот десно запиши броеви, така што збирот на броевите запишани во секои три соседни квадратчиња е еднаков на 15.

5							6		
---	--	--	--	--	--	--	---	--	--

92. Пополни ги празните полиња на цртежот така што збирот на броевите запишани во секои три хоризонтални соседни полиња и секои три вертикални соседни полиња биде еднаков на 12.

	5						
					1		
6							
			2				

93. Во секое поле на табелата прикажана на цртежот десно запиши по еден број така што збирот на броевите запишани во секои три хоризонтални и во секои три вертикални полиња ќе биде еднаков на 15.

	7					
				8		

94. Познато е дека квадратот прикажан на цртежот десно е магичен, т.е. збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков. Кој број треба да е запишан на местото на ѕвездичката?

4		2
	5	
	*	

95. Броевите 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и 11 распореди ги во магичен 3×3 квадрат. Колку изнесува збирот на броевите во секој колона, секој ред и на секоја дијагонала?
96. Состави магичен 3×3 квадрат во кој сите запишани броеви се различни природни броеви и чиј карактеристичен збир (збирот во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала) е еднаков на 12.
97. Први девет парни двоцифрени броеви распореди ги во квадратна 3×3 табела така што ќе добиеш магичен квадрат, т.е. збирот на

броевите запишани во секоја редица, секоја колона и на секоја дијагонала ќе биде еднаков.

98. Состави магичен 3×3 квадрат таков што збирот на броевите во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков на 21.

99. Состави магичен 3×3 квадрат во кој се запишани броевите 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 и 14.

100. Празните полиња во квадратот прикажан на цртежот десно пополни ги со непарните броеви од 13 до 29 така што збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала ќе биде еднаков.

	21	

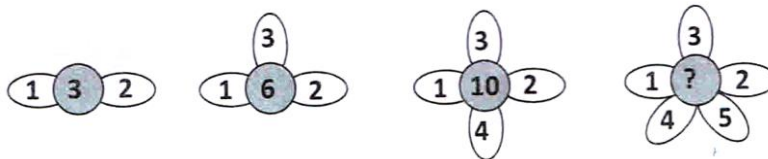
101. Празните полиња на цртежот десно пополни ги со броевите 0, 4, 8, 10, 12 и 14 така што ќе добиеш магичен квадрат, т.е. квадрат во кој збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков.

2	16	6

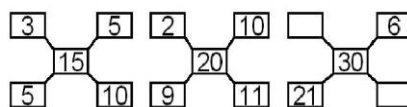
102. Дополни го магичниот квадрат прикажан на цртежот десно.

		20
21		
14	19	

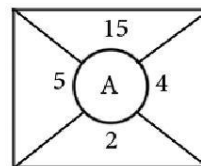
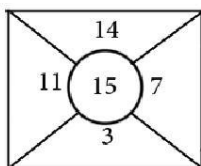
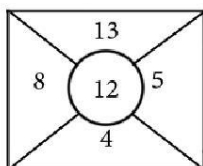
103. Броевите во цветовите на долните цртежи се запишани според определено правило. Кој број треба да се запише на местото на прашалникот?



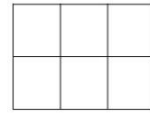
104. Разгледај ги фигурите прикажани на цртежот десно. Кои броеви недостасуваат во третата фигура?



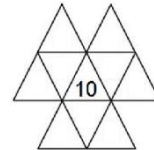
105. Разгледај ги долните цртежи дијаграми. Кој број треба да е запишан на местото на буквата А?



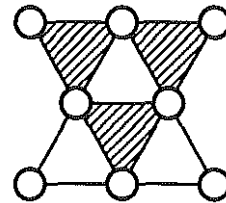
106. Во секое квадратче на цртежот десно е запишан по еден број. Збирот на сите запишани броеви е еднаков на 55. Горјан ги собрал броевите од првиот ред и броевите од првата колона, а потоа ги собрал двата збира и добил 67. Бојана ги собрала броевите од вториот ред и броевите од втората колона, а потоа ги собрала двата збира и добила збир 26. Определи го збирот на броевите запишани во третата колона.



107. Во малите триаголнички запиши ги броевите од 1 до 9 така што збирот на броевите запишани во секој голем триаголник е еднаков на 25.

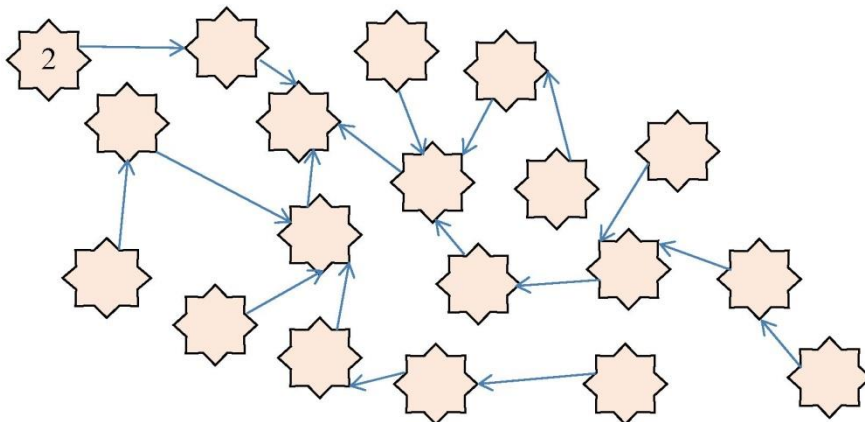


108. Во кругчињата на цртежот десно запиши ги броевите од 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8, во секое кругче различен број, така што збирот на броевите запишани во темињата на секој штрафиран триаголник е еднаков на 14, а збирот на броевите запишани во темињата на секој бел триаголник е еднаков на 13.



109. а) Во снегулките запиши ги броевите така што ќе ја следиш насоката на стрелката: во првиот ред на табелата е бројот запишан во снегулката на почетокот на стрелката, а во вториот – бројот запишан во снегулката во која стрелката завршува.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
↓	8	14	1	8	12	1	4	8	3	19	15	1	4	8	13	18	9	9	4



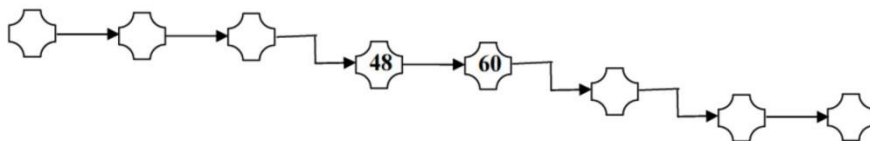
- б) Определи го збирот на сите броеви запишани во снегулките. Запиши го збирот како производ на четири природни броја.

I.4. РАВЕНКИ

110. Кои броеви треба да се запишат во сивите кругчиња. Определи го нивниот збир.

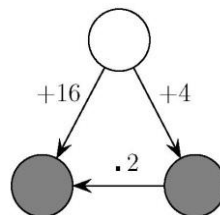


111. Во долната шема пополни ги празните полиња според правилата дадени на цртежот десно.



Определи го збирот на броевите запишани во првото и последното поле.

112. Во шемата прикажана на цртежот десно се запишани три броја така што пресметувањата ќе бидат точни. Определи го збирот на броевите запишани во сивите кругови?



113. Реши ја равенката:

$$x + 44 = 408 : 4 + 4 \cdot 10 .$$

114. Пресметај ја вредноста на изразот $A = 1730 + x - (4x + 80) : 5$, ако x е решението на равенката $x - 56 = 224$.

115. Решија равенката

$$354 : 3 - 2 \cdot 29 = x - 300 .$$

116. Реши ја равенката:

$$125 \cdot 3 - x = 2 \cdot 8 + 149 .$$

117. Реши ја равенката:

$$7x = 54 : 3 + 402 .$$

118. Реши ја равенката:

$$2x + 788 = 217 \cdot 4 .$$

119. Реши ја равенката:

$$(73 - x) \cdot 5 - 16 = 344 .$$

120. Реши ја равенката:

а) $x:4 = 200 - 64$

б) $x:29 = 252$.

121. Реши ја равенката:

$$x:29 = 20357 - 19468.$$

122. Пресметај ја вредноста на изразот $A = 2013 - 13x + (x + 15):11$, каде x е решението на равенката $30:(2x + 1) = 2$.

123. Нека

$$4x = 9005 - 8585, \quad 505:y = 5 \text{ и } z:6 = 2000 - 1982.$$

Подреди ги броевите x, y и z по големина.

II ДЕЛИВОСТ

II.1. ДЕЛЕЊЕ СО ОСТАТОК

1. Јордан за украсување на куќата во текот на новогодишните празници на оградата наредил светилки на следниов начин: една сина, две жолти, три зелени, четири црвени, една сина, две жолти, три зелени, четири црвени итн. Тој наредил 250 светилки. Која боја е 137-мата светилка по ред?
2. За дочекот на Новата 2019-та година Вера ја украсила својата кука со низа од 2019 светилки, во пет различни бои, кои се наредени во редослед: сина, зелена, црвена, портокалова, жолта и потоа редоследот постојано се повторува. Определи ја бојата на последната 2019-та светилка.
3. Определи го најмалиот природен број чиј збир на цифри е 2012.
4. Определи ги количникот и остатокот при делењето на изразот
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 75$$
со бројот 35.
5. Определи го бројот кој поделен со 143 дава остаток 132, а поделен со 144 го дава истиот количник и остатокот 108.
6. Определи го четирицифрениот број кој поделен со бројот 131 дава остаток 112, а поделен со бројот 132 дава ист количник и остаток 98.
7. Ако броевите 263 и 245 ги поделиме со еден ист број, ќе добиеме остатоци 8 и 7, соодветно. Определи го непознатиот делител.
8. Ако бројот 860 го поделиме со бројот a се добива остаток 9, а ако го бројот 1200 го поделиме со бројот a се добива остаток 16. Кои количници се добиваат при овие делења?
9. Ако броевите 1199 и 1391 ги поделиме со еден ист број се добиваат остатоци 10 и 28, соодветно. Со кој број сме ги поделиле дадените броеви?

10. Ако броевите 4373 и 826 ги поделиме со еден ист број, добиваме остатоци 8 и 7, соодветно. Определи го непознатиот делител.
11. Броевите 860 и 1200 ги делиме со еден ист број и добиваме остатоци 9 и 16, соодветно. Определи ги количниците кои се добиваат.
12. Ако бројот 1000 го поделиме со некој број добиваме остаток 8, а ако бројот 900 го поделиме со истиот тој број добиваме остаток 1. Определи ги количниците кои ги добиваме во првото и второто делење.
13. Збирот на два броја е 2003, а при делење на поголемиот со помалиот број се добива количник 7 и остаток 131. Определи ги овие броеви.
14. Разликата на два броја е 1860, а при делење на поголемиот со помалиот број се добива количник 14 и остаток 1. Определи ги овие броеви.
15. Во бројот $\overline{1988ab}$ буквите a и b замени ги со соодветни цифри така што добиениот број ќе биде делив со 24.

II.2. ПРИЗНАЦИ ЗА ДЕЛИВОСТ

16. Дали сите свездички во бројот $\overline{1*5*4*7}$ може да се заменат со иста цифра така што бројот ќе биде делив со 3?
17. Определи ја непознатата цифра x така што бројот $\overline{32x60}$ ќе биде делив со бројот 56.
18. Дали бројот $\underbrace{444\dots44}_{2019 \text{ пати}}$ е делив со бројот 8?
19. Определи ги цифрите a и b така што бројот $\overline{199a1b}$ е делив со 12.
20. Определи ги цифрите a и b така што шестцифрениот број $\overline{a1993b}$ ќе биде делив со 45.
21. Во бројот $n = \overline{a1995b}$ определи ги цифрите a и b така што добиениот шестцифрен број n е делив со 72.
22. Докажи дека бројот $\underbrace{222\dots222}_{2016 \text{ двојки}}$ не е делив со бројот 18.

23. Докажи дека збирот S на првите 1000 природни броеви е делив со бројот 77.
24. На местото на буквите стави соодветни цифри така што збирот на броевите $\overline{199a}$ и $\overline{b234}$ ќе биде делив со 18.

II.3. ПРОСТИ БРОЕВИ

25. Запиши ги сите трицифрени броеви чиј производ на цифри е еднаков на 42.
26. Определи ги сите природни броеви чиј производ на цифри е еднаков на 528.
27. Определи ги сите парови трицифрени броеви чиј производ е еднаков на 51051.
28. Определи ги сите парови трицифрени броеви чиј производ е еднаков на 222222.
29. Определи ги сите прости трицифрени броеви чиј производ на цифри е еднаков на 70.

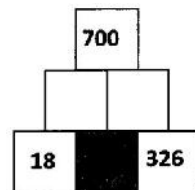
III ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

III.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Со помош на цифрите 0, 5 и 8 запиши ги најголемот и најмалиот трицифрен број со различни цифри, а потоа определи го нивниот збир.
2. Иван еден по друг ги запишал броевите од 8 до 888:
8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 ... 886, 887, 888.
Колку пати вкупно ги запишал цифрите 6 и 9.
3. Определи го најмалиот трицифрен број чиј збир на цифри е еднаков на нивниот производ.
4. Определи ја вредноста на изразот $a - (b - c)$, каде a е најмалиот трицифрен број запишан со различни цифри, b е најголемиот трицифрен број во кој точно две од цифрите се еднакви и c е најголемиот трицифрен број запишан со различни цифри.
5. Определи ја разликата на најголемиот трицифрен број чија цифра на единиците е четири пати поголема од цифрата на стотките и бројот кој е трипати поголем од најголемиот парен двоцифрен број.
6. Определи ја разликата меѓу најголемиот и најмалиот десетцифрен природен број секој од кои е запишан со помош на различни цифри.
7. Ангела замислила еден број. Од замислениот број ја одзела разликата на броевите 352 и 274 и добила број кој е за 215 поголем од бројот 107. Кој број го замислила Ангела?
8. Горјан запишал три броја. Првиот број е 270, вториот број е за 140 поголем од првиот и третиот број е за 180 помал од вториот. Со кој број Горјан треба да го собере збирот на трите броја за да добие 1000?
9. Марија одзела од бројот 1000 некој број, но при пресметувањето направила грешка и добила разлика 631, која била за 150 поголема од точниот резултат. Кој број го одзела Марија?
10. Дедо Алекса му кажал на Горјан еден двоцифрен број. Горјан забележал дека ако бројот го помножи со 3, тогаш повторно ќе добие

двоцифрен број, а ако од почетниот број одземе 3 и потоа добиениот број го подели со 3, тој повторно ќе добие двоцифрен број. Кој број му го кажал дедо Алекса на Горјан?

11. Збирот на четири броја е еднаков на 2014. Колку ќе биде еднаков збирот ако три од овие броеви се зголемат за по 49, а четвртиот се намали за 62?
12. Цифрата на единиците на еден број е 0. Ако истата ја избришеме, тогаш тој број се намалува за 27405. Кој е тој број?
13. Определи го бројот кој е за 60 поголем од својата третина.
14. Колку пати треба да го додадеме најголемиот двоцифрен број на најмалиот двоцифрен број за да добиеме 1000?
15. Во трите квадрати на првиот ред на фигурата прикажана на цртежот десно се запишани три броја. Потоа во секој квадрат е запишан збирот на броевите кои се наоѓаат во квадратите непосредно под него. Некои броеви биле избришани. Кој број бил запишан во црниот квадрат?



16. Разликата на еден двоцифрен број и двоцифрениот број запишан со истите цифри но во обратен редослед е еднаква на 72. Определи го збирот на овие броеви.
17. Куќите на една улица се нумерирани со броевите од 1 до 185. Колку пати е употребена цифрата 4?
18. Ана направила тефтерче така што превиткала 15 листови хартија, секој лист во различна боја, а потоа го сошила. Потоа таа последователно ги нумерирала страниците со броевите од 1 до 60. Ако страницата со број 16 е црвена, кој е бројот на следната по ред црвена страница?



19. Марко нашол дел од една стара книга. Страниците на делот од книгата биле последователни при што првата страница била нумерирана со бројот 143, а последната страница била нумерирана со број запишан со истите цифри, но во друг редослед. Колку листови имал делот кој го нашол Марко?

20. Колку цифри се употребени за нумерирање на книга која има 567 страници?
21. Колку цифри се употребени за нумерирање на книга која има 789 страници?
22. Колку цифри се употребени за нумерирање на книга која има 2019 страници?
23. Горјан прочитал книга која има 195 листови. Колку страници има оваа книга? Колку цифри се употребени за нумерирање на страниците на оваа книга?
24. Горјан во депото на една библиотека нашол стара заборавена книга во која недостасувале страниците од 1149 до 1310 страница. Колку пати цифрата 7 треба да е запишана на страниците кои недостасуваат?
25. На една стара книга и недостасуваат 142 страници, така што книгата почнува од 143-тата страница, а завршува со страница која исто така е запишана со цифрите 1, 3 и 4, но во друг редослед. Определи го бројот на страниците кои сега ги има оваа книга.
26. Кабините на една жичара се нумерирани со броевите 1, 2, 3 итн. и се наоѓаат на еднакво растојание една од друга. Кога кабината со број 39 тргнува од долната станица на жичарата, од горната станица тргнува кабината со број 93.
Кој е бројот на кабината која тргнува од горната станица, ако од долната станица тргнува кабината со број 67?
27. Горјан на таблата запишал трицифрен број. Сања, Маја и Теодора помножиле по две од цифрите на запишаниот број и добиле три различни резултати. Сања добила 28, а Маја добила 36. Ако сите три точно пресметувале, кој број го добила Теодора?
28. Збирот на цифрите на природниот број n е еднаков на 23. Определи ја најмалата можна вредност на збирот на цифрите бројот $n + 1$.
29. На прашањето кога е роден Кирил одговорил: „Роден сум напролет на непарен датум. Ако од бројот на денот го одземеме бројот на месецот, добиениот резултат го поделиме на 5 и на крајот помножиме со 2, ќе добиеме 10.“ На кој датум е роден Кирил?
30. а) На таблата се запишани броевите од 10 до 19. Определи го збирот на сите цифри кои се употребени за запишување на овие броеви.

- б) Определи го збирот на сите цифри кои се употребени за запишување на сите природни броеви од 1 до 2019.
31. Збирот на два броја е еднаков на 24. При делење на поголемиот број со помалиот број се добива количник 3 и остаток 4. Определи ги овие броеви.
32. Учителката по математика поставила задача да се определи разликата на два броја. Михајло се збунил и наместо да ја определи разликата, тој ги собрал броевите. Останатите ученици точно го определиле точниот одговор 812, а Михајло точно собирал и добил 824. Кои броеви требало да ги одземе Михајло?
33. Збирот на два броја е еднаков на 1988, а нивната разлика е 678. Определи ги овие броеви.
34. Нека a, b, c се природни броеви поголеми од 10 и такви што $a + b - c = 2019$. Определи ја вредноста на изразот $a + b - c$ кога секој од броевите a, b, c ќе се намали за 10.
35. Нека a, b, c се природни броеви поголеми од 919 такви што вредноста на изразот $a - b - c$ е еднаква на 2019. Колкава ќе биде вредноста на овој израз ако секој од броевите a, b, c се намали за 919?
36. Збирот на три броја е 849. Првиот број е најмал и секој следен е за 47 поголем од претходниот. Определи ги овие броеви.
37. Збирот на два броја е 825, при што поголемиот број завршува со цифрата 0. Ако во поголемиот број ја избришеме цифрата 0, тогаш се добива помалиот број. Определи ги овие броеви.
38. Дадени се два броја такви што цифрата на единиците на поголемиот број е 1 и ако истата ја избришеме, го добиваме помалиот број. Збирот на двата броја е еднаков на 474. Определи ги овие броеви.
39. Збирот на два броја е еднаков на 196. Ако на поголемиот број му ја избришеме цифрата на единицата се добива помали број. Определи ги овие броеви.
40. Збирот на два броја е еднаков на 52. Ако првиот број се замени со единаесет пати поголем број, тогаш збирот на двата броја ќе биде еднаков на 152. Определи ги овие броеви.

41. Збирот на два броја е еднаков на 1804. Ако првиот број го зголемиме четири пати, тогаш збирот на броевите е 1996. Определи ги овие броеви.
42. Определи го оној двоцифрен број кој ќе се зголеми 26 пати ако од левата страна му се допише цифрата 7.
43. Збирот на три броја е еднаков на 440. Првиот број е двапати помал од вториот, а е седум пати поголем од третиот. Определи ги овие броеви.
44. При собирање по два од три непознати броја се добиени збировите 156, 162 и 170. Определи ги непознатите броеви.
45. Збирот на неколку природни броеви е 44. Горјан секој од овие броеви го зголемил за 4 и кога ги собрал добил збир 144. Кој број ќе го добие Горјан ако повторно го зголеми секој собирук, но сега за 7?
46. Васко прво со 8 го помножил најмалиот трицифрен број запишан со различни цифри, а потоа од добиениот производ го одзел најголемиот двоцифрен број. Кој број го добил Васко?
47. Замислив еден број. Бројот го помножив со 4, добиениот производ го намалив за 4 и добив 44. Кој број го замислив?
48. Замислив еден број, го помножив со 4, до добиениот производ одзедов 44 и добив 1988. Кој број го замислив?
49. Ако еден број го помножиме со бројот кој е за 3 помал од него добиваме производ 54. Кои броеви ги множиме?
50. Производот на два броја е еднаков на 2250. Едниот број е намален за 6, а другиот број останал непроменет по што новиот производ е еднаков на 1800. Определи ги почетните броеви.
51. Даниел требало даден број да го подели со 4 и на добиениот резултат да додаде 30. Меѓутоа тој се збунил и дадениот број го помножил со 4, а потоа од добиениот резултат одзел 30, по што го добил точниот резултат на поставената задача. Кој е почетниот број?
52. Производот на три броја е еднаков на 270 при што производот на првиот и третиот број е еднаков на 30, а производот на вториот и третиот број е еднаков на 135. Определи ги овие броеви.

53. Иван од цифрите 2, 3 и 4 ги формирал сите трицифрени броеви кај кои цифрите не се повторуваат, а потоа од збирот на парните броеви го одзел збирот на непарните броеви. Кој број го добил Иван?
54. Илија трипати по ред фрлил коцка за играње. Кога Васил го прашал колкав е збирот на трите броеви кои паднале, Илија одговорил: „Заборавај. Помнам само дека првиот пат падна непарен број, вториот пат падна парен број, а последниот пат не падна бројот 1.“
55. Определи го парниот број x чија третина е природен број помал од 6 и за кој важи $11 < x < 19$.
56. Дамјан, ученик во основно образование, на дигитрон ги помножил следните броеви: бројот на своите години, бројот на одделението во кое оди, бројот на годините на неговата мајка и уште еден трицифрен број. Резултатот од множењата бил бројот 333333. Колку години има Дамјан, а колку неговата мајка?
57. Во една овошна градина јаболкниците се засадени во редица и се нумерирани последователно со броевите 1, 2, 3 итн. На секое дрво има еднаков број јаболка, кој не е поголем од 15. Пабло решил да ги преброи сите јаболка во овошната градина и започнал од првото дрво, па продолжил на второто итн. до последното дрво. Се покажало дека јаболката со број 169 и 180 се на едно дрво, а оние со број 126 и 141 се на различни дрвја кои што не се соседни. Пресметај го збирот на цифрите на најмалиот можен број јаболка во оваа овошна градина.

III.2. ПАЗАРУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

58. Владо, Натка и Јасен биле на пазар. Владо и Натка потрошиле 1988 денари, Владо и Јасен потрошиле 2988 денари, а Јасен и Натка потрошиле 3988 денари. Колку пари потрошил секој од нив?
59. Мирјана, Весна и Натка на пазар потрошиле 5280 денари. Мирјана потрошила 340 денари повеќе од Весна, а три пати помалку од вкупната сума која ја потрошиле Весна и Натка заедно. Колку пари потрошила секоја домаќинка?
60. Вера добила две понуди за претплата за мобилен телефон. *Понуда А*: Неограничен број разговори за 2000 денари месечна претплата. *Пону-*

да Б: Месечна претплата од 800 денари и 7 денари за секој разговор. Колку најмалку разговори месечно треба Вера да направи за да понудата А биде поповолна од понудата Б?

61. Ако Марко купи четири тетратки, му остануваат 9 денари, а за пет тетратки му недостасуваат 9 денари. Колку пари има Марко?
62. Ако Матеј купи 5 тетратки, тогаш ќе му останат 70 денари, а ако сака да купи 6 тетратки, тогаш ќе му недостасуваат 10 денари. Колку пари има Матеј?
63. Мартин бил во книжарница и пресметал дека ако купи 11 тетратки, тогаш ќе му останат 20 денари, а за да купи 15 тетратки му недостасуваат 100 денари. Колку пари чини една тетратка и колку пари имал Мартин?
64. Ако 5 тетратки чинат колку 2 книги, а 3 книги чинат колку еден ранец, колку тетратки може да купи Герасим со парите за 2 ранци?
65. Мартин секое претплатно заработува 350 денари, а секое поплатно троши половината од парите кои ги има во моментот. Вечерта на 4 април Мартин имал 870 денари. Колку пари имал Мартин на 1 април наплатно?
66. Витезот Златокос купил копје, штит, меч и коњ за што вкупно платил 25 златници. Штитот, мечот и коњот заедно чинат 22 златника, копјето, штитот и мечот заедно чинат 15 златници, а копјето, штитот и коњот заедно чинат 17 златници. Колку поединечно платил Златокос за копјето, штитот, мечот и коњот?
67. Ана му дала половина од своите пари на Михајло, а потоа Михајло и дал на Ана третина од сумата која ја имал во тој момент. Се покажало дека на кракот и двајцата имале по 80 денари. Колку пари имал секој од нив на почетокот?
68. Во двата џеба Ана има 35 денари. Ако од десниот џеб стави во левиот џеб онолку денари колку што има во него, тогаш во десниот џеб ќе останат 3 денари повеќе отколку во левиот џеб. Колку денари има Ана на почетокот во секој џеб?
69. Мајката, таткото и Горјан отишле во слаткарница. Мајката порачала кафе и торта, таткото порачал кафе и сок, а Горјан порачал торта и сок. Секој добил одделна сметка за својата порачка. Мајката требало

да плати 132 денари, таткото 101 денар и Горјан требало да плати 185 денари.

а) Колку пари треба да платат сите тројца заедно?

б) Колку чинат кафето, сокот и тортата одделно?

70. Тројца пријатели во слаткарница купиле: првиот купил 4 колачи, 1 сладолед и 10 бомбони за 240 денари, вториот купил 3 колачи, 1 сладолед и 7 бомбони за 180 денари, а третиот купил 1 колач, 1 сладолед и 1 бомбона. Колку денари плати третиот пријател?
71. Три баклави и два сока заедно чинат 310 денари, а четири баклави и 3 сока заедно чинат 430 денари. Колку пари заедно чинат 5 сока и 5 баклави?
72. Два молива и 5 тетратки чинат 110 денари, а 8 моливи и 2 тетратки чинат 80 денари. Колку чини еден молив, а колку една тетратка?
73. За новогодишните пакетчиња во една компанија купиле 11 кукли и 13 мечиња, за што вкупно платиле 14200 денари. Познато е дека 5 кукли и 6 мечиња заедно чинат 6500 денари. Колку вкупно чинат една кукла и 1 мече? Колку одделно чинат една кукла и едно мече?
74. Во две училишта донеле компјутери, принтери и телевизори. Првото училиште добило 3 компјутери, 1 принтер и 2 телевизори со вкупна вредност 49400 денари. Второто училиште добило 3 компјутери и 1 принтер со вкупна вредност 33700 денари. Ако еден компјутер е 8300 денари поскап од еден принтер, определи ја цената на еден телевизор, на еден компјутер и на еден принтер.
75. Павел купил две чоколада од по 72 денари. На продавачот му дал банкнота од 200 денари. Колку денари му вратил продавачот?
76. Со парите што ги има Горјан може да купи 15 мини-чоколади и една голема чоколада. Горјан си купил една голема чоколада и му останале 300 денари. Колку пари чини една мини-чоколада?
77. Тодор од книжарницата сакал да купи неколку моливи и за таа цел дал банкнота од 100 денари. Во последен момент се сетил дека треба да купи и гума која чини 20 денари. Се покажало дека продавачката му вратила толку пари колку што чинеле моливите. Колку пари платил Тодор за гумата и моливите?

78. Катерина има 2500 денари и треба да купи 27 чоколади од по 60 денари. Колку најмногу бомбониери од 180 денари таа може да купи?
79. Колку третратки може да се купат со 20 евра и 50 евроценти, ако една тетратка чини 1 евро и 35 евроценти?
80. Шест исти чоколади чинат 630 денари. Колку пари платил Горјан, ако купил 5 такви чоколади?
81. Два и половина ѓеврек чинат колку еден ѓеврек и 15 денари. Колку чини еден ѓеврек?
82. Во продавница за новогодишни украси има три вида елки: мала, средна и голема. Средната елка чини 1050 денари. Големата елка е двапати поскапа од средната елка. Малата елка е трипати поевтина од големата елка. Колку пари чини малата елка?
83. Киро имал 100 денари и си купил чоколадо. Тој пресметал дека со половина од парите кои му останале може да си купи уште две такви чоколада. Колку пари чини едно чоколадо?
84. Три колачи и половина колач чинат колку 2 колачи и уште 4 евра и 50 евроценти. Колку евра чини еден колач?
85. Два чадори и една топка чинат 2700 денари, а две топки и еден чадор чинат 1800 денари. Колку пари чини еден чадор?
86. Еден козинак и три шарени јајца чинат 320 денари. Три козинака и четири шарени јајца чинат 760 денари. Колку чини еден козинак, а колку едно шарено јајце?
87. Семејството Јакопетрески купило телевизор кој чини 999 евра. Тоа платило 423 евра, а останатата сума требало да ја плаќа на шест еднакви месечни рати. Колку пари треба секој месец да уплаќа семејството Јакопетрески?
88. За новогодишните пакетчиња на своите деца мајката на Ана купила 14 чоколади и 9 чоколадни јајца и платила 3315 денари. Мајката на Татјана купила 8 исти чоколади и 6 исти чоколадни јајца како и мајката на Ана и платила 2010 денари. Колку пари чини едно чоколадо, а колку едно чоколадно јајце?
89. Ангел купил три пакетчиња бомбони, а Ѓорѓи купил две пакетчиња од истите бомбони. Ангел и Ѓорѓи го сретнале Павел и трите момчиња

подеднакво ги поделиле сите бомбони и се договориле дека така ќе си ги поделат и трошоците. Откако ги направиле пресметките се покажало дека Павел треба за бомбоните на пријателите да им даде 100 денари.

а) Колку чини едно пакетче бомбони?

б) По колку денари треба да добијат Ангел и Ѓорѓи?

90. Ако Марија му поклони на Ласко 10 денари, тогаш двајцата ќе имаат еднакви суми пари. Ако Ласко и поклони на Марија 20 денари, тогаш Марија ќе има четири пати повеќе пари од Ласко. Колку пари има Марија, а колку Ласко?
91. Ако Јагода и поклони на Натка 10 денари, тогаш тие ќе имаат еднакви суми пари. Ако Натка и поклони на Јагода 10 денари, тогаш Јагода ќе има двапати повеќе пари од Натка. Колку пари има Натка, а колку Јагода?
92. Павел и Томи сакаат да купат иста збирка по математика. За купување на збирката на Павел му недостасуват 132 денари, а на Томи му недостасуваат 164 денари. Затоа решиле заеднички да ја купат збирката задачи. Меѓутоа, и тогаш немале доволно пари и им недостасувале 48 денари. Определи ја цената на збирката. Колку пари има Павел, а колку Томи?
93. Софија имала 3240 денари. Третина од парите таа ги потрошила за учебници, а со четвртина од останатите пари купила ранец. Колку пари и останале на Софија?
94. Вера и Фросина имаат определени суми пари и решиле да купат иста книга. Меѓутоа, за купување на книгата на Вера и недостасувале 2 евра, а на Фросина и недостасувале 7 евра. Затоа решиле заедно да ја купат книгата, но и тогаш немале доволно пари. Колку пари чини книгата, ако нејзината цена изразена во евра е природен број?
95. Елена има еднаков број монети од 1 и 2 денари. Ако купи тетратка и истата ја плати само со монети од 2 денара, ќе и преостанат три монети од 2 денара. Ако сака тетратката да ја плати само со монети од 1 денар, тогаш ќе и недостигаат 5 монети. Колку монети има Елена?
96. Владо, Натка и Јагода заедно имаат 600 денари. Кога Владо ќе потроши $\frac{1}{2}$ од своите пари, Натка ќе потроши $\frac{2}{3}$ од своите пари и Јагода

ќе потроши $\frac{4}{5}$ од своите пари, им остануваат еднакви суми пари.
Колку пари има секој од нив?

97. Мала торта се расекува на 8 еднакви парчиња, а голема на 12 еднакви парчиња. Секое добиено парче чини еднаков цел број евра. Иван и Маја имаат еднакви суми пари. Со своите пари Иван си купил 5 мали торти, а Маја си купила 3 големи торти и ѝ останале 8 евра. Колку пари имал секој од нив?
98. Ивана и Илија имаат еднакви суми пари. Понатаму Раде и Румена имаат еднакви суми пари при што секој од нив има 1000 денари повеќе од Ивана. Павел има толку пари колку што имаат Румена и Илија заедно. Петмината заедно имаат 9000 денари.
а) Колку денари има секое дете?
б) Децата се наредени во колона еден по друг во следниот редослед: Раде, Ивана, Илија, Павел и Румена. Првиот му дал половина од своите пари навториот, потоа вториот му дава на третиот половина од парите кои ги има во моментот итн. Колку пари ќе има Румена по ваквата размена?
99. Илија бил во книжарница е забележал дека 11 гумички чинат колку што чинат заедно 2 острилки и 1 пенкало, а 1 пенкало чини колку што чинат заедно 1 острилка и 2 гумички. Колку гумички чини 1 пенкало?
100. Елена била на пазар и забележала дека 3 kg портокали чинат колку што чинат 2 kg мандарини, а 3 kg мандарини чинат колку што чини 1 kg киви. Колку килограми портокали може да се купат за парите колку што чинат 2 kg киви?
101. Татјана купила неколку чоколади и неколку сокови. Цената на едно чоколадо е 40 денари, а цената на еден сок е 50 денари. Татјана потрошила 460 денари и имала повеќе чоколади од сокови. Колку чоколади и колку сокови купила Татјана?
102. Два принтери и три лаптопи заедно чинат 3800 евра. Шест принтери и седум лаптопи заедно чинат 9600 евра. Колку чинат заедно еден принтер и еден лаптоп? (Сите принтери се од ист вид и сите лаптопи се од ист вид.)
103. Билет за театарска претстава чини 10 евра за дете и 17 евра за возрасно лице, при што нема намалување за групна посета. Група посети-

тели вкупно платила 199 евра. Колку возрасни лица и колку деца има во групата?

104. Иван забележал дека 55 еднакви бонбони чинат 1 евро и 17 евроценти помалку од 64 од истите бонбони. Колку чинат 8 бонбони од овој вид?

III.3. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

105. Ана започнала да ја пишува домашната работа во 16 часот и 15 минути и завршила во 18 часот и 5 минути. Таа домашната работа по математика ја пишувала 55 минути, а останатото време го потрошила за пишување домашната работа по македонски јазик. Колку време Ана ја пишувала домашната работа по македонски јазик?
106. Илија тргнал со воз од Љубљана за Скопје вечерта во 10:25 часот и стигнал во Скопје следниот ден наутро во 6:15 часот. Колку време патувал Илија?
107. Илија со возот од Скопје за Белград патувал од вечерта во 22:15 часот, до утрото следниот ден во 4:05 часот. Колку време патувал Илија?
108. Таткото на Иван купил елка и во 18:35 часот тргнал од продавницата да си оди дома. Тој за еден час изминува 6 km , а продавницата е оддалечена од неговата кука 3 km . Таткото ветил дека во 19:00 часот ќе ја однесе елката дома. Колку минути тој ќе задоцни?
109. Павлина отишла на гости кај Михаил. Таа од дома тргнала во 9:20 часот и стигнала кај Михаил во 10:10 часот. На враќање Павлина одела по истиот пат, но се движела двапати побрзо и дома стигнала во 12:15 часот. Колку време Павлина била кај Михаил дома?
110. Во 10 часот 57 минути и 53 секунди (10:57:53) Михаил започнал телефонски разговор, кој траел 177 секунди. Во колку часот Михаил го завршил разговорот?
111. На еден добротворен концерт децата од КУД Македонски свезди пред публиката настапиле со неколку песни. Првата песна траела 5 минути и 28 секунди, втората песна траела 6 минути и 11 секунди, третата

траела 4 минути и 37 секунди и последната траела 7 минути и 5 секунди. Колку време траел настапот на КУД Македонски свезди?

112. Продавач има на располагање пакети од по 100 листови. За 6 секунди продавачот брои 10 листови. Определи го најкраткото време за кое продавачот може да ги подготви листовите за купец кој сака да купи 70 листови.

113. Самоил имал железна цевка долга 10 m , која ја расекол на цевки со должина од по 1 m . За едно сечење му требале по 4 минути, а меѓу секои две сечења тој одмарал по 3 минути. За колку минути Самоил ја расекол цевката?

114. Иван едно по друго во редица ги запишал броевите од 4 до 444:

456789101112...434444.

Тој пишува со иста брзина и за 10 секунди Иван запишувам 15 цифри. Колку секунди Иван ги запишувал овие броеви?

115. За регулирање на сообраќајот на една раскрсница е поставен семафор со 3 сигнални светла, кој за автомобилите свети 57 секунди зелено, 3 секунди жолто и 23 секунди црвено и тоа во овој редослед. Едно утро Јасен забележал дека во 8:00 за автомобилите се запалило зеленото сетло. Кое светло ќе свети на семафорот за автомобилите, кои се на тоа место, точно во 10:00 истиот ден?

116. Третина од зелената свеќа изгорува за 30 минути, а четвртина од сината свеќа изгорува за 20 минути. Ако двете свеќи се запалат истовремено, која од нив ќе изгори побрзо?

117. Водоводцијата Дончо една метална цевка ја сече на три дела за 6 минути. За колку минути Дончо иста таква цевка ќе ја пресече на 9 делови?

118. Јана чита книга која има 240 страници. Таа за 6 минути чита една страница. Ако Јана чита секој ден по 1 час, за колку дена таа ќе ја прочита книгата?

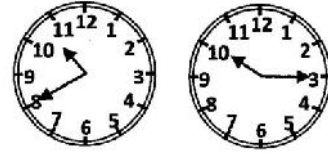
119. Покрај патеката во паркот на еднакво растојание едно од друго се засадени дрвја. Верверица скока последователно од дрво на дрво, при што почнува од првото дрво и не се враќа назад. По 20 секунди верверицата била на петтото дрво. По колку секунди од почетокот на скока-

њето верверицата ќе дојде до дваесеттото дрво, ако скока со иста брзина?

120. Еден летен ден денот е двапати подолг од ноќта. Ако сонцето изгреало во 5 часот, во колку часот тоа ќе зајде?
121. Џуџињата на Снежана решиле во рудникот за дијаманти да работат едно по друго, така што секое џуџе ќе работи 5 минути повеќе од претходното. Првото џуџе започнало до работа во 9:10 часот и работело 15 минути, па работело второто џуџе, па третото итн. Снежана го донела појадокот во 10:45 минути. Кое џуџе работело во тој момент?
122. Седумте џуџиња, Снежана и Дедо Мраз направиле 185 играчки за новогодишни подароци. Колку играчки направила Снежана, ако таа и Дедо Мраз направиле еднаков број играчки, а секое џуџе направило по 7 играчки помалку од Снежана?
123. Во Москва на денот на краткодневницата (23 декември) денот е за 10 часа пократок од ноќта. Определи кога изгрева Сонцето, ако тоа заоѓа во 15:48 часот.
124. Располагаме со два песочни часовници. Кај првиот часовник целиот песок истекува од едната половина во другата половина за 25 минути, а кај вториот за 20 минути. Како со помош на овие два часовници наједноставно ќе измериме време од 30 минути?
125. Горјан во 14 часот и 15 минути почнал да гледа филм, кој завршил во 16 часот и 23 минути. Во текот на прикажувањето на филмот телевизијата давала реклами кои траеле 8 минути. Колку време траел филмот?
126. На секој цел час сидниот часовник на Самоил бие толку пати, колку што покажува часовната стрелка, а на секој половина час меѓу целите часови часовникот бие по еднаш. Колку пати биел часовникот во новогодишната ноќ меѓу 11 часот и 15 минути и 1 часот и 45 минути?
127. Двата часовника на цртежот работат точно, но не покажуваат точно време. Левиот часовник е 20 минути назад. Кое ќе биде точното време кога десниот часовник ќе покажува 12:00?



128. Двата часовника на цртежот десно работат точно, но не го покажуваат точното време. Десниот часовник е 15 минути понапред. Колку ќе биде часот кога левиот часовник ќе покажува 12 часот?



129. На 12 април Текнувало и неговите пријатели шрумфови истрелале ракета кон Марс. Текнувало им соопштил на пријателите дека ракетата ќе слета на Марс по извесно време. На прашањето „По колку време?“, Текнувало подигнал еден палец. Пријетлите веднаш почнале да предлагаат верзии за одговорот на Текнувало со подигнатиот прст: една секунда, една минута, еден час, еден ден, една седмица, еден месец. На тоа Текнувало рекол: „Еден од вас погоди, а останатите згрешија за 24, 60, 168, 720, 3600 пати.“ По колку време според Текнувало ракетата ќе слета на Марс.
130. Два часовника се навиеени на 4. април 2019 година во 9 часот наутро. Едниот часовник работи точно, а другиот оди напред 3 минути на час. Кој ден и во колку часот двата часовника повторно ќе покажат исто време?
131. Три часовници во даден момент покажуваат 9:48, 9:51 и 10:05. Од точното време часовниците се разликуваат 5 минути, 8 минути и 9 минути. Колку од часовниците заостанувале од точното време и колку е точното време во тој момент?
132. Самоил јаде 5 колачи за 15 минути, а Горјан јаде 6 колачи за 36 минути. За колку минути двајцата заедно ќе изедат 27 колачи? (Секој јаде со постојан апетит.)
133. Тони и Илија бојадисуваат дрвена ограда направена од еднакви штици. За 40 минути Тони бојадисува 10 штици, а Илија за 30 минути бојадисува 6 штици од оградата. Колку штици од оградата ќе бојадисаат двајцата заедно за 20 минути?
134. Шест деца јадат шест јаболка за шест минути. Колку деца ќе изедат 80 јаболка за 48 минути?
135. Павел, Томи и Даниел работат со еднаква брзина и за 12 часа тие можат да ја окосат ливадата на дедо Марко. За колку часа Томи и Даниел можат да ја окосат ливадата на дедо Марко, ако работат со истата брзина?

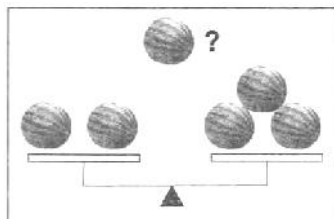
136. Велосипедист, движејќи се со постојана брзина, за 1 час и 24 минути поминал $\frac{7}{9}$ од патот меѓу местата А и В. Колку време му било потребно на велосипедистот да го помине половината од патот меѓу местата А и В?
137. Иван 40 дена последователно решавал по 3 задачи на ден. Првите задачи ги решил во четврток на 28 февруари 2019 година. На која дата и во кој ден од седмицата тој ги решил последните задачи?
138. Дедо Ѓорѓи тргнал на патување низ Европа на 28-ми во петок и се вратил дома на 1-ви во петок, при што низ Европа патувал 36 дена. Во кои месеци дедо Ѓорѓи го реализирал своето европско патешествие?
139. Четири седмици пред олимпијадата по математика Станко и Марко започнале да се подготвуваат за натпреварот. Станко решавал по една задача во понеделник, две – во вторник, три – во среда, четири – во четврток, пет – во петок, а во сабота и недела спортувал. Марко решавал по 3 задачи во четири последователни дена, а следните два дена спортувал. Ако двајцата започнале да решаваат задачи на 22.4.2019 година (понеделник), по колку задачи решил секој од нив до 17.5.2019 година (петок).
140. Во работилницата на чичко Младен на секои три минути се изработуваат по 12 санки, а на секои две минути се пакуваат по шест од веќе изработените санки. Едно утро, пред да се отпочне со работа, во работилницата имало 30 готови незапакувани санки и немало запакувана ниту една санка. Во 9:00 часот работниците почнале соработа. Колку запакувани и колку незапакувани санки имало во 9:30 часот.
141. Во месец април во 1963 година три вторници биле на парен датум. Кој ден во неделата бил 13. април?
142. Во една престапна година се регистрирани 53 понеделници. Определи кој ден од неделата бил 6. април.
143. Подготвувајќи се за натпревар Горјан од 5.02.2020 година започнал секој ден да решава по 5 задачи. На која дата тој ја решил 151-та задача?
144. За колку ќе се намали бројот на деновите во годината ако сите месеци имаат по 30 дена?

145. Пред 5 години Горјан и Јована заедно имале 5 години. Колку години заедно ќе имаат Горјан и Јована по 5 години?
146. Таткото има четири пати повеќе години од синот и ќерката заедно, а по 24 години тој ќе има толку години колку што ќе имаат синот и ќерката заедно. Колку години сега има таткото?
147. Натка е 4 години постара од Јагода, а Владимир има толку години колку што имаат Натка и Јагода заедно. Третина од збирот на нивните година е еднаква на 16. Колку години има секој од нив?
148. Пред 5 години Виолета имала 3 години помалку отколку што има денес нејзината сестра Лерка. Денес збирот на нивните години е еднаков на 16. Колку години има денес Виолета?
149. Следната година Иван ќе има двапати повеќе години од Јагода. Колку години има Јагода, а колку Иван, ако се знае дека Иван е 7 години постар од Јагода?
150. Кога синот имал 6 години, таткото имал 30 години. Сега таткото е четири пати постар од синот. Колку години има таткото, а колку синот?
151. Кога јас сум се родил, мојот брат имал трипати повеќе години од мојата сестра. Денес јас имам 10 години и збирот на годините на сите тројца е еднаков на 46. Колку години има брат ми денес?
152. Софија денес е точно 3 пати постара отколку што била пред 6 години. По колку години таа ќе биде 4 пати постара отколку што е денес.
153. Дедото и внукот заедно имаат 65 години. Колку години има дедото, а колку внукот ако се знае дека внукот има толку месеци колку што дедото има години?
154. Мајда е 22 години помлада од нејзината мајка, а мајката на Мајда е 22 години помлада од бабата на Мајда. Збирот на годините на Мајда, нејзината мајка и нејзината баба е 111. Колку години имала Мајда пред 6 години?
155. Татко, мајка, син и ќерка заедно имаат 73 години. Таткото е постар од мајката 3 години, а сестрата е постара од братот 2 години. Вкупниот збир на годините на сите членови на семејството пред 4 години бил 58 години. Колку години има денес секој член на ова семејство?

156. Катерина, Елеонора и Ирина се родени во ист ден и месец, но во различни години. Денес тие заедно слават роденден и збирот на нивните години е 44. Тие решиле повторно заедо да го прослават роденденот тогаш кога збирот на нивните години повторно ќе биде двоцифрен број запишан со исти цифри. По колку години повторно заедно ќе го прославуваат роденденот?

III.4. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

157. Ана и Борис заедно имаат 85 kg , Ана и Виктор заедно имаат 97 kg , Виктор и Ѓорѓи заедно имаат 100 kg . Колку килограми заедно имаат Борис и Ѓорѓи?
158. Пет овци за 8 дена јадат 120 kg сено. Колку сено ќе изедат 80 овци за 15 дена.
159. Трговецот Марко измешал определено количество бел грав со цена 100 денари и 100 kg црн грав со цена 60 денари. Целиот грав го продавал по цена 75 денари за килограм и остварил иста заработувачка. Колку килограми грав имало од по 100 денари?
160. Кофа полна со вода има маса 13 kg , а празната кофа има маса 1 kg . Горјан на коњот Вранец му дал кофа полна со вода и коњот испил третина од содржината на кофата. Определи ја масата на кофата заедно со преостанатата вода?
161. Во една продавница во неколку вреќи имало 144 kg лешници. По една седмица од секоја вреќа биле продадени по 6 kg лешници, по што вкупното количество лешници се намалило четири пати, а половината од вреќите биле празни. Следната седмица од секоја од останатите вреќи биле продадени уште по 2 kg лешници. Колку килограми лешници се продадени во текот на двете седмици?
162. Во продавницата има шест лубеници со различни маси – 6 kg , 7 kg , 8 kg , 9 kg , 10 kg и 11 kg . Итар Пејо купил 2 лубеници, а Насрадин Оџа купил 3 лубеници. Трите лубеници на Насрадин Оџа



имаат маса колку двете лубеници на Итар Пејо. Определи ја масата на лубеницата која останала непродадена.

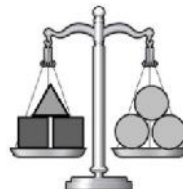
163. Трите ваги на долните цртежи се во рамнотежа. Што треба да стои на местото на прашалникот?



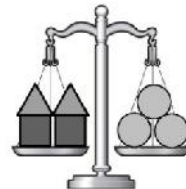
164. Вагите прикажани на долните цртежи се во рамнотежа. Определи ја масата на срцето и на алката.



165. Вагата прикажана на цртежот десно е во рамнотежа. Масата на триаголникот е еднаква на 15 kg , а на кругот е за 4 kg помала од масата на триаголникот. Определи ја масата на квадратот.



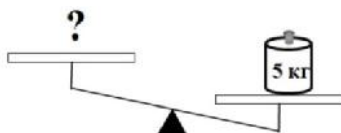
166. Вагата прикажана на цртежот десно е во рамнотежа. Триаголникот има маса 53 g , а масата на кругот е за 35 g помала од масата на квадратот. Определи ја масата на квадратот.



167. Две јаболка заедно тежат 100 g . Првото јаболко и тег од 20 g е во рамнотежа со второто јаболко и тег од 50 g . Колку тежи секое од јаболката?
168. Бомбона, лижавче и колаче заедно имаат маса 18 g , а 4 бомбони, 3 лижавчиња и 2 колачиња заедно имаат маса 56 g . Определи ја масата на 1 бомбона, 2 лижавчиња и 3 колачиња.
169. Три круши и две јаболка заедно тежат 621 g , а пет јаболка и три круши заедно тежат 972 g . Колку грама тежат една круша и едно јаболко?

170. Во табелата десно дадени се масите на пет животни. Кои од нив треба да ги ставиме на левиот тас на вагата за да истата биде во рамнотежа?

Еж	$1\text{ kg } 20\text{ g}$
Желка	$1\text{ kg } 620\text{ g}$
Мачка	$3\text{ kg } 360\text{ g}$
Зајак	$3\text{ kg } 480\text{ g}$
Петел	$2\text{ kg } 360\text{ g}$



171. Пристигнатите новогодишни пакети биле распределени за обработка меѓу службениците на поштенската испостава. Вкупната маса на пакетите кои требало да ги обработи Иван била шест пати поголема од вкупната маса на пакетите кои требало да ги обработи Павел. Иван дал два од своите најлесни пакети на Ѓорѓи и вкупната маса на останатите пакети станала четири пати поголема од вкупната маса на пакетите на Павел. Колку пакети требало да обработи Иван?

172. Боата (Б), Мајмунот (М), Слончето (С) и Папагалот (П) решиле да сеизмерат кој колку тежи. Мајмунот запишал:

$$Б = 48П, С = 12М, М = 3П, Б = 4М, С = 36П.$$

Се покажало дека Мајмунот се измешал – броевите навистина биле точни, но сите стоеле на други места, а сите букви биле запишани на вистинските места. Колку папагали навистина тежи Боата, Мајмунот и Слончето?

173. Турист тргнал од местото А кон местото С и стигнал во местото В. Колку пати растојанието кое му останало е поголемо од растојанието кое го поминал?



174. На местата на квадратчињата запиши ги мерните единици кои недостасуваат така што ќе биде точно равенството

$$2 \square + 70 \square = 27 \text{ dm}.$$

175. Васил е повисок од Бојан за 2 cm , а е понизок од Ангел за 14 cm . Ако Ангел е висок 159 cm , колку е висок Бојан?

176. На рафт со должина 40 cm Кирил сака да постави автомобилчиња, секое од кои има должина 4 cm . Колку автомобилчиња може да постави Кирил, ако меѓу секои две автомобилчиња остава растојание од 2 cm ?

177. Две штици со различни должини се поделени на еднакви делови, секој со должина 1 метар и 10 сантиметри. Првата штица е поделена со 4

сечења, а втората со 7 сечења. За колку сантиметри втората штица е подолга од првата?

178. Ванчо и Галина биле на растојание 190 m еден од друг. Тие истовремено тргнале еден кон друг и додека Галина поминала 55 m , Ванчо поминал 15 m повеќе од неа. Колкаво е сега растојанието меѓу Ванчо и Галина?
179. Илија за 15 минути испешачил 1 km и 50 m . Колку метри ќе помине Илија ако со истата брзина оди 1 час и 5 минути?
180. Ана и Билјана купиле по една лента со иста должина. Ана својата лентата ја поделила на три еднакви делови, а Билјана својата лента ја поделила на пет еднакви делови. Се покажало дека деловите на Ана се за 20 cm подолги од деловите на Билјана. Колку била долга секоја од лентите кои ги купиле Ана и Билјана?
181. Во еден град на главната улица во права линија се училиште, пошта и банка. Од училиштето до поштата има $1\text{ km } 215\text{ m}$, а растојанието меѓу училиштето и банката е за една третина помало. Определи го растојанието меѓу поштата и банката.
182. Пабло движејќи се со постојана брзина за два часа поминал 12 km . Колку километри поминал Пабло за половина час?
183. Илија патувал со автомобил. Тој возел со постајана брзина и за 4 часа поминал 240 km . Колку километри поминал Илија за 2 часа и 30 минути?
184. Автомобил движејќи се со постојана брзина за час и половина поминува 120 km . Колку километри ќе помине автомобилот за 4 часа, ако се движи со истата постојана брзина?
185. Еден возач со својот автомобил поминал 200000 km и притоа секое од петте тркала (четирите погонски и едено резервно) поминало еднаков број километри. Колку километри поминало секое тркало?
186. На растојание од 125 m кучето Рекс видело зајак и потрчало по него. Во истиот момент зајакот почнал да бега. Со еден скок зајакот прескокнува половина метар, а Рекс со еден скок прескокнува два метра. Освен тоа, додека зајакот скокнува седум пати, Рекс скокнува два па-

ти. Колку метри претрчал Рекс од моментот кога го видел, до моментот кога го фатил зајакот?

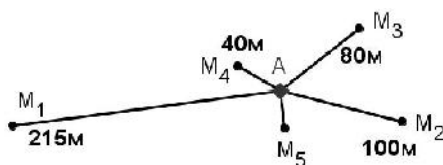
187. Возачот Мирко во три дена со камионот поминал 1634 km . Првиот и вториот ден Мирко заедно поминал 986 km , а вториот и третиот ден тој заедно поминал 1130 km . Колку километри поинувал Мирко секој од трите дена?

188. Полжав во понеделник почнал да се качува на дрво високо 15 m . Преку ден се качува 3 m , а во текот на ноќта се симнува 2 m . Кој ден од седмицата полжавот ќе се искачи на врвот на дрвото?

189. Марко и Максим се натпреваруваат во трчање. Марко за 1 минута претрчува 180 метри, а Максим за 1 минута претрчува 200 метри. Марко почнал да трча една минута пред да тргне Максим. По колку време Максим ќе го стигне Марко?

190. Горјан за 12 минути пешки поминува 1 km , а со тротинет за 30 минути поминува 6 km . Одејќи од местото A во местото B тој пешки одел 48 минути, а потоа со тротинет поминал уште 9 km . Од местото B во местото A се враќал само возејќи тротинет. Колку минути Горјан возел од B до A ?

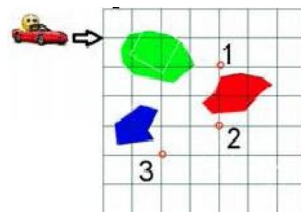
191. Горјан по еднаш пазарувал првиот ден од маркетот M_1 , вториот ден од маркетот M_2 , третиот ден од маркетот M_3 , четвртиот ден од маркетот M_4



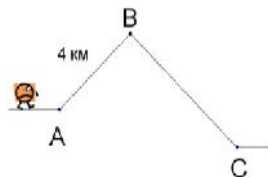
и петтиот ден пазарувал двапати од маркетот M_5 (цртеж десно). Тргнувал од дома и додека пазарувал вкупно поминал 994 m . Определи го растојанието од домот на Горјан (точката A) до маркетот M_5 .

192. Должината на патот меѓу градовите A и B , изразена во километри, е еднаква на најголемиот непарен двоцифрен број. Автомобил тргнал од градот A во 7 часот и 15 минути. Откако пристигнал во градот B возачот одморил толку минути колку што е најмалиот парен двоцифрен број и тргнал за градот A . Во колку часот тој пристигнал во градот A , ако цело време возел со постојана брзина од 66 km на час.

193. Патот меѓу градовите M и K е долг 189 km , а патот меѓу градовите P и K е 9 km . Колку пати патот меѓу градовите M и P е подолг од патот меѓу градовите P и K ?
194. Кога еден велосипедист поминал 4 km и уште половина од остатокот од патот, му останало да помине уште 4 km и третина од целиот пат. Колку километри возел велосипедистот?
195. Еден трактор минува пат со должина 1 m ако предното тркало се заврти еднаш, а пат со должина 4 m ако задното тркало се заврти еднаш. Колку пат поминал тракторот ако предното тркало се завртило 39 пати повеќе од задното?
196. Другарите Иван, Ангел и Илија патуваат со различни превозни средства. За два часа Иван изминал 480 km . Ангел се движел двапати поспоро од Иван и Илија патувал 8 часа и изминал 200 km помалку од Иван. Познато е дека еден од тројцата другари патувал со велосипед. Кој патувал со велосипед?
197. Автомобил тргнал од местото A во местото B , а истовремено камион тргнал од местото B во местото A . Патот меѓу овие две места е долг 462 km , а возилата се разминале по 3 часа и 30 минути од поаѓањето. Определи ги нивните средни брзини ако средната брзина на автомобилот е за 12 km/h поголема од средната брзина на камионот.
198. Велосипедист тргнал од Охрид за Прилеп и за првите два часа поминал 24 km . Продолжил да вози со истата брзина и четири часа по поаѓањето тој забележал дека му останале уште 9 km до средината на патот меѓу Охрид и Прилеп. Определи ја должината на патот меѓу двата града.
199. На картата прикажана десно со кругчиња се означени бензиските станици на кои може да се тури гориво. Движењето е дозволено само по линиите на мрежата, а преку обоените области не смее да се поминува. Секое мало квадратче има периметар 4 km . Колку метри е најкраткото растојание до една од бензиските станици?



200. Кога се качува по угорнина дедо Марко се движи со брзина од 2 km на час, а кога оди по удолнина тој се движи со брзина од 3 km на час. Растојанието меѓу местата A и B е 4 km ,



а од местото B до местото C дедо Марко стигнува за 2 часа (цртеж десно). Во понеделникот дедо Марко тргнал во 8 часот и 45 минути и одел од A до C без да застанува. Потоа 30 минути одмарал во C и тргнал назад кон местото A . Во местото B повторно одморил 30 минути и потоа без да застанува се вратил во местото A .

- а) Определи го растојанието меѓу местата B и C .
- б) Во колку часот дедо Марко тргнал од C кон B ?
- в) Колку часа по тргнувањето од местото A дедо Марко се вратил во местото A ?
201. Илија и Мирко истовремено тргнале од градот A за градот B . Илија изминува 7 km на час, а Мирко првиот час минува 1 km , вториот час минува 2 km , третиот час минува 3 km итн. по 1 km повеќе секој следен час. По колку часа Мирко ќе го стигне Илија? Колку километри ќе бидат оддалечени од градот A кога Мирко ќе го сигне Илија?
202. Павел има две буриња кои собираат по 200 литри вода. Во првото буре има 160 литри вода, а во второто буре има 180 литри вода. Павел прво прелеал вода од првото буре и го дополнил второто буре, а потоа прелеал вода од второто буре и го дополнил првото буре.
- а) Колку литри вода останале во второто буре?
- б) Колку литри вода вкупно прелеал Павел?
203. Базен за вода се полни од две цевки, а се празни од една цевка. Преку првата цевка за 1 час се влеваат 150 литри вода, што е за 30 литри помалку од водата која се влева преку втората цевка. Низ третата цевка за 1 час истекуваат 190 литри вода. Колку литри вода ќе има во базенот, ако тој на почетокот е празен и трите цевки истовремено се отворени во текот на 3 часа?
204. Во три сада има 30 литри млеко. Ако последователно од првиот сад претуриме во вториот 4 литри, од вториот претуриме во третиот 2 литри и од третиот претуриме во првиот 3 литри, тогаш во сите сада ќе има еднакво количество млеко. Определи по колку литри млеко имало во секој сад на почетокот.

III.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

205. Во првата гајба има 1999 јаболка повеќе од втората гајба. Во која гајба ќе има повеќе јаболка и за колку, ако од првата префрлиме 1000 јаболка во втората гајба.
206. Брзиот воз за Скопје тргнал од Битола со 282 патници. На станицата во Прилеп се симнале 35 и се качиле 47 патници. На станицата во Велес се симнале 52 и се качиле 56 патници. Со колку патници продолжил возот по Велес?
207. Од кошница со бомбони Деница зела половината и уште една бомбона. Потоа Васко зел половина од преостанатите бомбони и уште една бомбона. На крајот Никола зел половина од преостанатите бомбони и последните три бомбони. Колку бомбони имало во кошницата на почетокот?
208. Од кошницата со велигденските јајца Бојан ги зел половината јајца и уште три јајца. Потоа од Кирил зел половина од преостанатите јајца и уште две јајца и на крајот Дејан зел половина од преостанатите јајца и уште едно јајце, по што кошницата останала празна. Колку јајца имало на почетокот во кошницата?
209. Елена бојадисала 36 велигденски јајца, кои биле за 9 повеќе од јајцата што ги бојадисала Фросина. Вера ги поделила јајцата подеднакво во три корпи. Колку јајца имало во секоја корпа?
210. Горјан има 23 соученици. Бројот на девојчињата е еднаков на вредноста на изразот $(540:9 + 66) - 118$. Колку момчиња учат во одделението на Горјан
211. Секој од учесниците на училишниот маратон добил по една капа. На третина од девојчињата им биле поделени 51 розова капа, а останатите девојчиња и сите момчиња добиле 228 сини капи. Колку момчиња учествувале на маратонот?
212. Во една деветкатна станбена зграда има само еднособни, двособни и трисобни станови. На секој кат има по 27 станови. Во зградата има 80 двособни станови и тие се двапати повеќе од еднособните станови. Колку трисобни станови има во оваа зграда?

213. Сестрите Боркица, Габриела и Даниела заедно ја украсувале новогодишната елка. Боркица и Габриела заедно ставиле 50 лампиони, Габриела и Даниела заедно ставиле 40 лампиони и Даниела и Боркица заедно ставиле 30 лампиони. Колку лампиони секоја од сестрите ставила на новогодишната елка?
214. Владимир и Натка имаат определен број бомбони. Ако Владимир и поклони на Натка 10 бомбони, тогаш двајцата ќе имаат еднаков број бомбони. Ако Натка му поклони на Владимир 20 бомбони, тогаш Владимир ќе има четири пати повеќе бомбони од Натка. Колку бомбони има секој од нив?
215. Баба Вера во три чинии ставила бомбони. Горјан прво од првата чинија преместил во втората и третата чинија толку бомбони колку што имало бомбони во тој момент во соодветната чинија. Потоа од втората чинија преместил во првата и втората чинија толку бомбони колку што имало бомбони во тој момент во соодветната чинија. На крајот од третата чинија преместил во првата и втората чинија толку бомбони колку што имало бомбони во тој момент во соодветната чинија, по што во секоја чинија имало по 16 бомбони. Колку бомбони имало на почетокот во секоја чинија?
216. Во три сада Самоил ставил вкупно 60 ореви. Неговиот син Горјан од првиот преместил во вториот сад 8 ореви, потоа од вториот преместил во третиот сад 6 ореви и на крајот од третиот сад преместил во првиот сад 2 орева, по што во трите сада имало еднаков број ореви. Колку ореви имало на почетокот во секој сад?
217. Цветанка бојадисала црвени, зелени и жолти јајца. На Елена и дала половина од јајцата, на Фросина и дала половина од преостанатите јајца и на Вера и дала половина од преостанатите јајца. Цветанка секогаш давала еднаков број црвени, зелени и жолти јајца. На крајот и останале 2 црвени и 4 жолти јајца. Колку јајца бојадисала Цветанка и во која боја?
218. На 6 дрвја има 129 птици. Во еден момент одлетале 6 птици од првото дрво, 11 од второто, 8 од третото, 10 од четвртото, 7 од петтото и 9 од шестото. Тогаш на сите дрвја останале ист број на птици. По колку птици имало на секое дрво на почетокот?

219. Во 2005 година Марко засадил дрво кое шест години покасно првпат родило 10 круши. Потоа секоја следна година дрвото раѓало по 10 круши повеќе отколку што родило претходната година. Колку круши родило дрвото заклучно со 2019 година?
220. На 9 јаболкници вкупно има 241 јаболка, при што на секоја јаболкница има најмалку едно јаболко и сите јаболкници имаат различен број јаболка. Кој е најголемиот број јаболка што може да ги има една од овие јаболкници?
221. На 9 јаболкници вкупно има 234 јаболка. На секое дрво има различен број јаболка. Определи го најголемиот број јаболка кој што може да го има јаболкницата со најмалку јаболка.
222. Баба Лена има ореви Во три торби. Таа преместила од првата торба во втората толку ореви колку што имало во втората торба, и во првата торба останале 96 ореви. Потоа преместила од втората торба во третата толку ореви колку што имало во третата. На крајот преместила од третата торба во првата толку ореви колку што останале во првата, и тогаш во трите торби имало еднаков број ореви. Колко ореви имало на почетокот во секоја торба?
223. Павел има 14 топчиња повеќе од Ристо и 4 топчиња повеќе од Славчо. Откако Петар и Славчо му дале дел од своите топчиња на Ристо, сите тројца имале еднаков број топчиња. Колку топчиња му дал Славчо на Ристо?
224. Софија, Веселка и Дијана погодувале колку бомбони има во една кутија. Софија рекла дека има 100 бомбони, Веселка рекла дека има 125 бомбони, а Дијана рекла дека во кутијата има 160 бомбони. Колку бомбони имало во кутијата ако едното од девојчињата згрешило за 11, а другите две за 49 и 24 бомбони.
225. Една живинарска фарма испорачала 720 јајца, кои биле спакувани во кутии со по 6 јајца. При транспортот се искршиле 140 јајца. Останатите јајца биле спакувани во кутии по 12 јајца. Колку кутии јајца биле спакувани. Дали останале нескршени јајца кои не може да се спакуваат?
226. Во едно училиште се украсени шест. На секоја елка има по 14 зелени светилки. На половината елки има по 18 сини светилки. Црвените светилки се двапати повеќе од зелените, а жолтите светилки се четвр-

тина од црвените. Половина од сите светилки светат силно, а другите светат послабо. Сите елки имаат еднаков број црвени и жолти светилки. Определи го бројот на:

- а) зелените светилки,
- б) сините светилки,
- в) црвените светилки,
- г) жолтите светилки,
- д) светилките кои светат силно.

На елка со сини светилки се ставени и 29 портокалови светилки. Уште колку светилки треба да се стават на оваа елка за да на неа вкупно има 100 светилки?

227. Горјанза подарок добил кутија бонбони. За појадок изел една третина од сите бонбони, за ручек изел 2 бонбони помалку отколку за појадок, а за вечера ги изел преостаните 9 бонбони. Колку бонбони имало во кутијата?
228. Марко својата новогодишна елка ја украсил со $(124 \cdot 2 - 50) + 2$ лампиони, а Стојмен на својата елка ставил половина од лампионите кои ги ставил Марко. Колку лампиони има на елката на Стојмен?
229. Елена има осум круши и три пати повеќе јаболка. Колку повеќе јаболка од круши има Елена?
230. Дузина означува 12. Бојан има 2 дузини кутии со по 3 дузини бомбони во секоја од нив. Колку бомбони има Бојан?
231. Во еден расадник има 124 садници на бреза, кои се четири пати помалку од боровите садници. Колку садници има во расадникот?
232. Три исти кошници собираат 117 јајца. Колку такви кошници се потребни за да се сместат 390 јајца?
233. Матеј решава по 4 задачи дневно, а неговиот брат Доротеј решава по 3 задачи дневно. Двајцата заедно решиле 210 задачи, при што задачи решавале секој ден. Колку задачи решил секој од браќата?
234. Учениците од одделението на Горјан се поделиле во две групи. Првата група засадила 72 борчиња за 4 часа, а втората група засадила 72 елки за 3 часа. Колку дрвја сите заедно засадувале за 1 час?
235. Самоил требало за 6 дена да засади 441 дрво. Првите три дена тој садел по 82 дрвја, а вторите три дена садел еднаков број дрвја на ден. По колку дрвја садел Самоил вторите три дена?

236. Меѓу секои два ката во еден влез на зградата на Горјан има еднаков број скалила. За да стигне од првиот до третиот кат, Горјан поминува 24 скалила. Колку скалила ќе помине Горјан одејќи од првиот до седмиот кат?
237. Пет деца самостојно цртале и вкупно нацртале 55 цртежи, но ниту едно од нив не нацртало повеќе од 13 цртежи. Определи го најмалиот број цртежи кои што може да ги нацрта некое од децата.
238. Сликарите Даниел, Киро, Саво и Пецко цртале цртежи. Бројот на цртежите нацртани од Саво и Пецко е број кој е четири пати поголем од 27. Саво нацртал 6 цртежи помалку од Пецко, Киро нацртал 3 пати помалку цртежи од Саво, а Даниел нацртал 36 цртежи помалку од Пецко. Колку цртежи нацртал секој сликар?
239. Иван за четири дена решил 136 задачи. Првиот и вториот ден решил еднаков број задачи. Третиот ден решил толку задачи колку што решил првиот и вториот ден заедно, а четвртиот ден решил толку задачи колку што заедно решил првите три дена. По колку задачи решавал Иван секој од етирите дена?
240. Златко има зајак и зајачица. Во јануари зајачицата окотила 8 зајчиња, при што имало 2 женски зајчиња повеќе од машки. По три месеци секоја женка окотила по 8 зајчиња. Колку зајчиња имал Златко во април?
241. Дијана од домашната и училишната библиотека прочитала вкупно 45 книги. Анета прочитала од градската и од училишната библиотека вкупно 55 книги. Двете прочитале еден ист број книги од училишната библиотека. Ако од домашната и од градската библиотека се прочитани вкупно 20 книги, колку книги девојчињата прочитале од училишната библиотека?
242. Вера читала книга која имала 600 страници. Таа првата седмица прочитала 112 страници, а втората седмица прочитала двапати повеќе страници отколку првата. Вера сака да ја прочита книгата следните осум дена и притоа да чита еднаков број страници на ден. Колку страници таа треба да чита дневно?
243. Марко за четири дена прочитал една книга. Првиот ден тој прочитал третина од книгата, а четвртиот ден тој прочитал четвртина од кни-

гата. Вториот ден Марко прочитал четири пати повеќе страници од третиот ден. Колку страници читал Марко секој ден, ако четвртиот ден тој прочитал 72 страници?

244. Во еден ресторант има 33 маси и до секоја маса има по 4 столици. Колку гости ќе јадат во ресторантот на појадок, ручек и вечера, ако на појадокот сите места се зафатени, на ручекот по едно место на секоја маса е слободно, а на вечера има 31 гости помалку отколку што собира ресторантот?

245. Патнички воз има 7 вагони. Во секој вагон има по 9 купиња со по 8 места. На почетната станица се качиле 360 патници. Колку вагони може да се откачат ако се знае дека на секоја следна станица се качуваат помалку патници отколку што слегуваат?

246. За тенискиот турнир Марко купил 3 пакувања со по 12 бели топчиња и 2 пакувања со по 15 жолти топчиња. За секој меч се користени по 6 нови топчиња и се употребени сите топчиња. Колку меча се одиграле на турнирот?

247. Елеонора сака мед. Во продавницата од каде што го купува медот таа за секои пет празни грниња добива едно полно грне со мед. Елеонора купила 27 грниња со мед и секоја седмица јаде по едно грне со мед. Колку седмици таа ќе јаде мед, ако секои пет празни грниња ги заменува за полно грне?

248. Правилата на една игра се следниве: на почетокот секој играч играта ја започнува со 10 бода и треба десет пати да стрела во мета. За секој погодок играчот добива 1 бод, а за секое промашување тој губи 1 бод. Колку пати погодил Илија ако на крајот од играта тој имал 18 бодови?

249. Снежана во шумата набрала 70 јагоди. Секое од седумте џуџиња изело по 7 јагоди, а некои џуџиња изеле уште по две јагоди. Останале 17 јагоди. Колку џуџиња изеле по 7 јагоди?

250. Снежана има 43 бомбони и секое од седумте џуџиња има по 3 бомбони. По колку бомбони треба да му даде Снежана на секое џуџе така што сите ќе имаат еднаков број бомбони?

251. Една верверичка во текот на првата недела собрала 84 ореви, во текот на втората недела 96 ореви, а во текот на третата недела 65 ореви. Друга верверичка во четвртата недела собрала трипати повеќе ореви,

отколку првата верверичка во втората и третата недела заедно. Колку вкупно ореви собрале двете верверички во текот на четирите недели?

252. Ивана испекла 6 тави со по 9 колачи во секоја тава, а Ангела испекла 7 тави со по 8 колачи во секоја тава. Марија ги украсила колачите со јагоди. На некои колачи ставила по 1 јагода, а на останатите ставила по 2 јагоди. Таа употребила 200 јагоди. Колку колачи се украсени само со 1 јагода?
253. Горјан оди 10 чекори напред, па се враќа 2 чекори назад, потоа 10 чекори напред и 1 назад, потоа 10 чекори напред и 2 назад итн. Колку чекори треба да направи Горјан за да од почетното место биде оддалечен 1000 чекори?
254. Кокошка и пол за ден и пол несат јајце и пол. Колку јајца ќе снесат 60 кокошки за 36 дена?
255. Горјан добил полна кутија бомбони. Првиот ден тој изел четвртина од бомбоните, а вториот ден изел четвртина од преостанатите бомбони. Колку бомбони имало на почетокот во кутијата ако на крајот на вториот ден Горјан имал 9 бомбони?
256. Волшебната јаболкница на Алиса, ноќта меѓу вторник и среда за првпат родила јаболка и тоа точно 8. Секое претпладне јаболкницата раѓа по 13 јаболка, а секоја вечер Алиса јаде по 5 јаболка. Кој ден од седмицата на јаболкницата ќе има повеќе од 500 јаболка?
257. Пет круши и 17 јаболка тежат колку осум круши и 13 јаболка. Колку круши тежат колку што тежат 72 јаболка?
258. Во училишната библиотека има 4 шкафови, секој шкаф има по 7 полици и на секоја полица има по 28 книги. Седумнаесет ученици позајмиле по 3 книги, а 147 ученици позајмиле по 2 книги. Колку книги останале во библиотеката?
259. Марија, Петра и Елена саделе цвеќиња. Марија садела 5 часа и засадила 60 цвеќиња, Петра садела 4 часа, а Елена работела 6 часа и засадила 66 цвеќиња. За еден час Петра засадила толку цвеќиња повеќе од Марија, колку што Елена за еден час засадила помалку од Марија. Колку цвеќиња засадила Петра?
260. Во училиштето на Горјан во прво одделение учат 199 ученици, кои се за 31 помалку од учениците во второ одделение. Во трето одделение

учат 145 ученици помалку отколку во прво и второ одделение заедно, а во четврто одделение учат 68 ученици повеќе отколку во трето одделение. Колку се повеќе ученици во четврто отколку во прво одделение?

261. Три пријателки береле јаболка. Соња набрала 12 јаболка, Тања набрала половина од јаболката кои ги набрала Петранка, а Петранка набрала колку што заедно набрале Соња и Тања. Колку јаболка набрале трите девојчиња заедно?

262. Лерка изела 48 ореви за три дена, при што секој ден јадела по 3 ореви помалку од претходниот ден. Колку ореви изела Лерка третиот ден?

263. Во едно училиште на секои две момчиња има три девојчиња, а на десет момчиња има еден наставник. Колку момчиња, девојчиња и наставници има во училиштето, ако вкупниот број наставници и ученици е еднаков на 312?

264. На часот по математика наставникот донесол линијари. Илија забележал: „Ако бројот на линијарите се собере со бројот на учениците, се добива бројот 100“. Потоа наставникот на секој ученик му поделил по два линијари, по што му останале 19 линијари неподелени. Колку ученици имало во одделението на Илија и колку линијари донесол наставникот?

265. Докторот Офболи на три болни животни им поделил 2012 волшебни апчиња. Носорогот добил две апчиња повеќе од крокодилот, а слонот добил едно апче повеќе од носорогот. Колку апчиња добило секое животно?

266. Иван за украсување на новогодишната елка купил 11 кутии со лампиони. Во дел од кутиите имало по 5 црвени лампиони, а во останатите кутии имало по 3 сини лампиони. Колку лампиони купил Иван ако сините лампиони се за 1 повеќе од црвените?

267. Баба Велика за Велигден бојадисала 48 јајца – црвени, зелени и жолти. Црвените јајца биле три пати повеќе од зелените, а жолтите биле колку црвените и зелените заедно. Колку јајца од секоја боја бојадисала баба Велика?

268. Илија и Зоран имале потешкотии со правописот на неколку исти англиски зборови. За да научи како точно се пишуваат зборовите Илија

ги напишал 13 пати, а Зоран ги напишал 5 пати. Се покажало дека Илија напишал 936 зборови повеќе од Зоран. Колку зборови Илија и Зоран не знаеле правилно да ги напишат?

269. Во училишниот ресторан сите маси имаат по 4 ногарки и покрај секоја маса се поставени по 4 столци секоја од кои има по 3 ногарки. Масите и столчињата заедно имаат 240 ногарки. Кој е најголемиот број деца кои може да седнат во ресторанот ако на секоја столица седи по едно дете?
270. Во продавница има црни, сини и бели вентиаџи. Црните вентиаџи имаат по 2 џеба, сините по 3, а белите по 5 џеба. Сините вентиаџи се колку црните и се за 10 помалку од белите. Колку бели вентиаџи има, ако сите вентиаџи вкупно имаат 200 џебови?
271. Во дворот на дедо Стојан има кокошки и кози. Животните вкупно имаат 26 нозе.
а) Кој е најголемиот можен број животни?
б) Кој е најмалиот можен број животни?
272. Во дворот на дедо Марко има само прасиња и кокошки. Тие заедно имаат 40 глави и 130 нозе. Колку прасиња, а колку кокошки има во дворот на дедо Марко?
273. Фармерот Стојко одгледувал кокошки и зајаци. Кога ги пребројал главите на сите животни тој добил 100, а кога ги пребројал нозете на сите животни тој добил 320. Колку зајаци и колку кокошки има Стојко?
274. На една ливада има овци и кокошки. Тие заедно имаат 60 глави и нозе. Глави се 16. Колку овци има наливадата?
275. Фармер вкупно одгледува 12 кокошки и зајаци. Познато е дека бројот на сите нозе е 6 пати поголем од бројот на кокошките. Колку уши имаат животните на фармерот?
276. Дедо Илија на пазар донесол 52 кафези во кои имало 246 кокошки. Во секој кафез имало или по 4 или по 6 кокошки.
а) Во колку кафези имало по 4 кокошки?
б) Колку кокошки му останале на дедо Илија кога од секој кафез со по 6 кокошки продал по 1 кокошка?
277. Во санката со Дедо Мраз се качиле неколку џуџиња. Санката ја влечеле 7 елени.

- Колку цуџиња имало во санката ако сите заедно имале 36 нозе?
278. Во една фарма има вкупно 100 животни, и тоа зајаци, петли и кокошки. Зајаци се двапати повеќе од петлите, а петлите се за 20 помалку од кокошките. Колку нозе имаат заедно животни на фармата?
279. Група од 52 ученика со жичарница се качува кон планинарскиот дом Дервен. Учениците се сместени во кабинни кои собираат четири или шест лица, при што се искористени 10 кабинни и во кабините нема слободни места. Колку кабинни со по шест места се искористени?
280. Група од 60 патници се превезувала преку река со помош на 9 чамци, од кои некои имале 6, а некои 8 седишта. Притоа сите чамци биле полни. Определи го бројот на чамците од секој вид.
281. Во речното пристаниште има 12 чамци, големи и мали. Големите чамци имаат по 8 седишта, а малите имаат по 5 седишта. Сите чамци заедно имаат 75 седишта. Колку големи и колку мали чамци има во пристаништето?
282. За украсување на новогодишната елка осум ученици изработиле украси. Ученикот со број 1 изработил 2 украса, ученикот со број 2 изработил 3 украса, ученикот со број 3 изработил 5 украси, ученикот со број 4 изработил 8 украси, ученикот со број 5 изработил 12 украси и ученикот со број 6 изработил 17 украси. Бројот на украсите кои ги изработиле учениците со броевите 7 и 8 се определува според правилото по кое секој од првите шест ученици го изработил својот број на украси. По колку украси изработиле седмиот и осмиот учебник?
283. Во една корпа има двапати повеќе јаболка отколку во друга корпа. Ако од секоја корпа се земат по 20 јаболка, тогаш во првата корпа ќе има трипати повеќе јаболка отколку во втората. Колку јаболка имало на почетокот во секоја корпа?
284. Ако учениците во одделението на Горјан седнат по двајца во клупа, без места ќе останат 3 ученика, а ако седнат по тројца во клупа, ќе останат три слободни клупи. Колку клупи има во училницата на Горјан? Колку ученици учат во одделението на Горјан?
285. Зајакот Ушко секој ден јаде по еден морков повеќе од претходниот ден. Тој за 9 дена изел 72 моркови. Колку моркови изел Ушко седмиот ден?

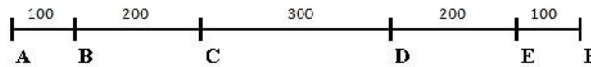
286. Кога Крали Марко и отсекува една глава на ламјата Огненка, на Огненка ѝ пораснале 7 нови глави. Потоа Крали Марко на Огненка и ги пресекол четвртина од главите кои таа ги имала во моментот, но и пораснале 8 нови глави, па така Огненка имала 17 глави. Колку глави имала Огненка на почетокот?
287. За новогодишната прослава биле порачани вкупно 600 сокови, тулумби и баклави. Определи колку баклави се порачани, ако тие се за 294 помалку од соковите и се за 132 повеќе од тулумбите.
288. Јато гуски наишло на осамена гуска. „Здраво сто гуски“ – рекла осамената гуска. „Не сме сто. Колку што сме, уште толку, уште полови-на, уште четвртина и ти да си со нас, тогаш сме точно сто“ – одговориле гуските. Колку гуски броело јатото?
289. Во текот на учебната година училиштето на Горјан во различно време организира три екскурзии за учениците од петто одделение, па така некои ученици биле на повеќе од една екскурзија. На првата екскурзија биле A ученици, на втората биле B ученици и на третата биле C ученици. Бројот на учениците кои биле на точно една екскурзија е еднаков на бројот на учениците кои биле на точно две екскурзии, како и на бројот на учениците кои биле трите екскурзии. Определи колку ученици биле и на трите екскурзии ако:
- $$A = (1005 : 5) \cdot 7 + (12003 - 7539) : -1890,$$
- $$B = (1 + 2 + 3 + \dots + 22 + 23) : 4,$$
- $$C = 2019 \cdot 23 + 1991 \cdot 13 - 1988 \cdot 13 - 2018 \cdot 23 + 4.$$
290. Во една кутија има 20 бели, црни и црвени топчиња. По колку топчиња може да има од секоја боја ако белите топчиња се шест пати повеќе од црните?
291. Кате и Лиле собираат сликички. Кате има 360 сликички повеќе од Лиле. Ако Лиле и даде 24 сликички на Кате, тогаш Кате ќе има 4 пати повеќе сликички од Лиле. Колку сликички имаат вкупно двете девојчиња?
292. Едно семејство има неколку деца. Секое девојче има толку браќа колку што има сестри. Секое момче има двапати повеќе сестри, отколку браќа. Колку деца има во тоа семејство?

293. Во прифатилиште за животни имало 90 кучиња и мачиња. Бројот на нозете на кучињата е четири пати поголем од бројот на ушите кај мачките. Колку кучиња и колку мачиња имало во прифатилиштето?
294. Секое момче во III^a одделение има по 2 топчиња, а секое девојче има по 5 топчиња. Во одделението има два пати повеќе момчиња од девојчиња и сите заедно имаат повеќе од 80, а помалку од 89 топчиња. Колку ученици има во ова одделение?
295. Група во која биле помалку од 15 момчиња и девојчиња тргнала на излет. Ако на излет тргнале трипати повеќе девојчиња, тогаш во групата ќе имало повеќе девојчиња од момчиња. Ако на излет тргнале двапати повеќе момчиња, тогаш во групата ќе имало момчиња повеќе од петкратниот број на девојчињата. Колку девојчиња и колку момчиња имало во групата?
296. Новогодишната елка е украсена со жолти, црвени и сини лампиони. Вкупно има 30 лампиони. Жолтите лампиони се за 7 повеќе од сините, а црвените лампиони се повеќе отколку што се жолтите и сините заедно. Кој е најголемиот можен број жолти лампиони?
297. Андон, Стефан и Теодор биле во книжарница. Секој од нив купил најмалку по една книга и сите купиле различен број книги. Антон и Стефан заедно купиле 6 книги, а Теодор и Антон заедно купиле 4 книги. Колку книги заедно купиле Стефан и Теодор?
298. За правење мала торта се потребни 4 јајца, а за правење средна торта се потребни 6 јајца. Колку најмногу торти од двата вида може да се направат со точно 32 јајца?

IV ГЕОМЕТРИЈА

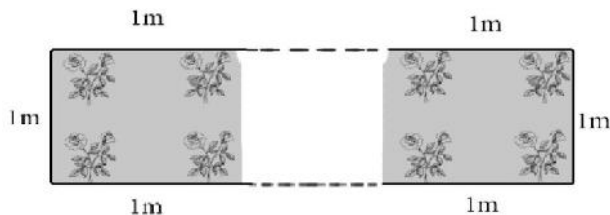
IV.1. ОТСЕЧКИ И АГЛИ

1. Должините на отсечките на цртежот се дадени во милиметри. Определи ја разликата на должините на отсечките AE и CF .



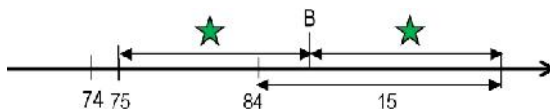
2. На една права се означени неколку точки така што растојанието меѓу две соседни точки е еднакво на 7 cm , а растојанието меѓу крајните точки е еднакво на 728 cm . Колку точки се означени на правата?
3. Колку светилки треба да се постават за да се осветли патека долга 2 km ако растојанието меѓу две светилки е 5 m и светилки се поставуваат и на почетокот и на крајот на патеката.
4. Во еден ред се засадени 100 елки. Растојанието меѓу секои две соседни елки е еднакво, а од третата до осмата елка растојанието е 15 m . Определи го растојанието од првата до последната елка во редот.
5. Должината на отсечката AB е еднаква на $42\text{ dm } 4\text{ mm}$. Должината на отсечката CD е четири пати помала од должината на отсечката AB . Определи го збирот на должините на отсечките AB и CD .

6. Учениците од одделението на Пабло засадило трендафили рози на двете страни по должината на централната алеа во градскиот парк. Должината на алеата е 68 m , а трендафилите се засадени на растојание 1 m еден од друг, почнувајќи од самиот крај на алеата. Колку трендафили засадило соучениците на Пабло?

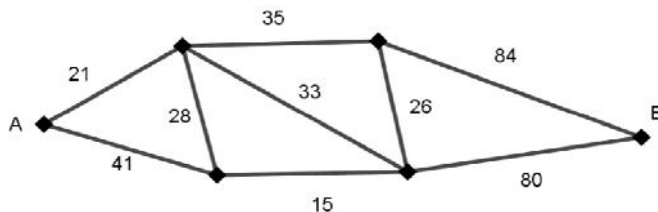


7. Марија во дворот има цветна леа долга 3 m , во која од едниот до другиот крај засадила два реда цвеќе. На едната страна од леата таа на секои 30 cm засадила каранфили, а на спротивната страна од леата на секои 20 cm Марија засадила лалиња. Колку цвета засадила Марија?

8. На цртежот десно отсечките означени со ѕвездичките се со еднаква должина. Кој број треба да е запишан на местото на буквата B ?



9. На правата p последователно се дадени точките M, A, B, C, D и N така што $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$. Растојанието меѓу средините на отсечките AB и CD е 32 cm , а растојанието меѓу средините на отсечките MA и DN е еднакво на 57 cm . Определи ја должината на отсечката MN .
10. Нека точките A, B, C и D лежат на една права, не задолжително во овој редослед. Познато е дека $\overline{AC} = 24\text{ cm}$, $\overline{AD} = 38\text{ cm}$, $\overline{BC} = 19\text{ cm}$ и $\overline{BD} = 43\text{ cm}$. Определи ја должината на отсечката CD .
11. На долниот цртеж се дадени можните патишта меѓу неколку различни градови и нивните должини изразени во километри.



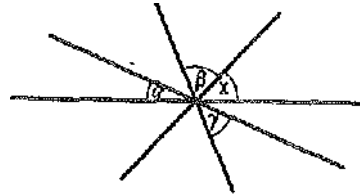
Определи ја должината на најкраткиот пат меѓу градовите A и B .

12. На цртот десно должината на страната на едно мало квадратче е еднаква на 1 cm . Определи ја вкупната должина на отсечките на фигурите кои се страни или делови од страни на само еден квадрат.



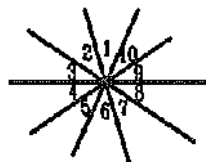
13. Даден е аголот $\alpha = 160^\circ$ кој е поделен на четири делови така што првиот дел е двапати поголем од вториот, вториот е четирипати поголем од четвртиот, а третиот и трипати поголем од четвртиот. Определи ги големините на секој од четирите делови.

14. Определи ги агли α и β за кои се знае дека нивниот збир е прав агол и аголот α е за 1° поголем од аголот β .
15. За агли α, β и γ прикажани на цртежот десно важи
 $\alpha = 23^\circ 30'$, $\beta = 66^\circ 45'$ и $\gamma = 43^\circ 30'$.
 Определи го аголот x .
16. Определи ги комплементните агли α и β за кои важи $\alpha : \beta = 1 : 4$.
17. Правите a и b се сечат и формираат два остри агли α и γ и два тапи агли β и δ . Определи ги овие агли ако важи $7(\alpha + \gamma) = 5(\beta + \delta)$.
18. Аголот x е поголем од својот суплементен агол y за толку колку што е аголот y поголем од својот комплементен агол z . Определи ги агли x, y и z .
19. Определи го аголот кој е суплементен на својата седмина.
20. Разликата на аголот α и неговиот напореден агол β е еднаква на 36° . Определи го аголот γ кој е комплементен на аголот β .
21. Определи го аголот α кој е за 18° поголем од половината од својот суплементен агол.
22. Аголот α е суплементен со аголот β , а е комплементен со третина од аголот β . Определи ги агли α и β .
23. Остриот агол x и аголот кој е еднаков на шестина од неговиот суплементен агол се комплементни агли. Определи го аголот x .
24. Агли α и β се суплементни, а агли β и γ се комплементни. Определи ги агли α, β и γ ако аголот α е пет пати поголем од аголот γ .
25. Даден е аголот α . Ако α и β се суплементни агли, а β и γ се комплементни агли, определи ја разликата на агли α и γ . Изрази го преку аголот α суплементниот агол на аголот γ .



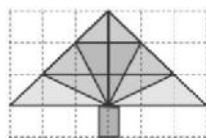
26. Определи го збирот на два агли кои се суплементни со два комплементни агли.
27. Пет прави се сечат во една точка и формираат десет агли кои се означени со броевите од 1 до 10 (цртеж десно). Докажи дека

$$\angle 1 + \angle 3 + \angle 5 + \angle 7 + \angle 9 = 180^\circ.$$

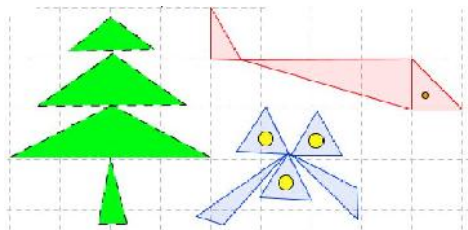


IV.2. ТРИАГОЛНИК

28. Определи го бројот на рамнокраките триаголници прикажани на цртежот десно.

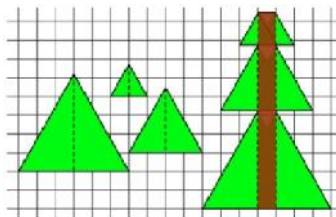


29. Определи колку рамнострани, рамнокраки, разностранни, остроаголни, правоаголни и тапоаголни триаголници се содржани во фигурите прикажани на дадените цртежи.



30. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е 240 cm , а должината на неговиот крак е 84 cm . Што е подолго, кракот или основата и за колку?
31. Периметарот на еден триаголник е 68 cm . Должината на едната страна е 23 cm , а другата е за 2 cm подолга. Определи ја должината на третата страна.
32. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е еднаков на 100 cm , а должината на една негова страна е еднаква на 40 cm . Определи ги должините на другите две страни на триаголникот.
33. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\overline{AB} = 187\text{ cm}$, должината на AC е за 25 cm помала од должината на AB и должината на BC е за 88 cm поголема од должината на AB . Определи го периметарот на $\triangle ABC$.

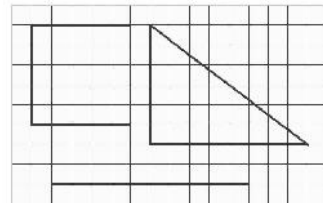
34. Мирјана нацрнала три рамнострани триаголници кои ги поделила по испрекинатите линии. Добиените делови ги ис-



користила за да го направи моделот на елката прикажан на цртежот десно. Колку сантиметри е периметарот на моделот на елката ако должината на страната на најмалиот триаголник е еднаква на 4 cm ?

35. Должината на страната на рамностран триаголник е еднаква на 100 mm . Периметарот на триаголникот е еднаков на периметарот на правоаголникот чија една страна е долга 5 cm . Определи ја должината на другата страна на правоаголникот.
36. Едната страна на триаголникот е долга 19 cm . Должината на втората страна изразена во сантиметри е еднаква на најмалиот двоцифрен број и е за 5 cm пократка од третата страна. Периметарот на овој триаголник е еднаков на периметарот на квадрат. Определи ја должината на страната на квадратот.
37. Рамностран триаголник и квадрат имаат еднакви периметри. Страната на триаголникот е за 5 cm подолга од страната на квадратот. Определи го периметарот на квадратот.
38. Која фигура има најмал периметар: рамнокрак триаголник со основа 86 mm и крак 32 cm , квадрат со страна 2 dm , правоаголник со должина 25 cm и ширина 120 mm , рамностран триаголник со страна 27 cm .

39. На цртежот десно страните на триаголникот имаат должини 6, 8 и 10 мерни единици. Која фигура има најголем периметар?



40. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на 86 cm . Едната страна е за 1 cm подолга од другата страна. Определи го периметарот на рамнокракиот триаголник чии страни се еднакви на страните на правоаголникот.
41. Квадрат и рамностран триаголник имаат еднакви страни. Збирот на нивните периметри е еднаков на 301 cm . Определи го периметарот на квадратот.
42. Рамнокрак триаголник, квадрат и правоаголник имаат еднакви периметри. Плоштината на квадратот е еднаква на 100 cm^2 . Основата на

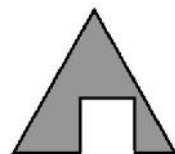
триаголникот е двапати помала од неговиот крак и е еднаква на една од страните на правоаголникот. Определи ја другата страна на правоаголникот.

43. Даден е триаголник кај кој должината на едната страна е еднаква на периметарот на квадратот со должина на страна 8 cm . Должината на втората страна на триаголникот е за 5 cm пократка од должината на првата негова страна, а должината на третата страна е двапати поголема од должината на правоаголник со периметар 28 cm и ширина 5 cm . Определи го периметарот на триаголникот.

44. Периметарот на триаголникот е еднаков на 12 cm и е три пати поголем од едната страна. Определи ја страната на квадратот со периметар еднаков на периметарот на правоаголникот чији страни се еднакви на другите две страни на триаголникот.

45. Должината на едната страна на правоаголникот е 8 cm , а другата негова страна е два пати пократка. Периметарот на рамностраниот триаголник е за 1 dm и 2 cm поголем од периметарот на правоаголникот. Определи ја должината на страната на рамностраниот триаголник.

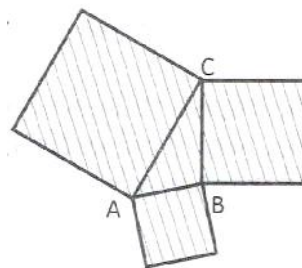
46. Фигурата на цртежот десно е добиена кога од рамностраниот триаголник е отсечен квадрат чија страна е трипати пократка од страната на триаголникот. Периметарот на добиената фигура е еднаков на 396 cm . Определи ја должината на страната на триаголникот.



47. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од правоаголник и два рамнострани триаголника. Периметарот на еден од триаголниците е еднаков на 30 cm , а должината на правоаголникот е 20 cm . Определи го периметарот на оваа фигура.

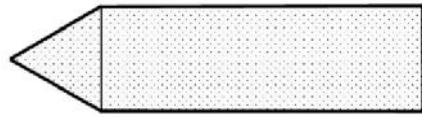


48. Даден е триаголник ABC . Над секоја страна на триаголникот во неговата надворешност е конструиран квадрат (види цртеж). Периметарот на штрафираната фигура е 108 cm . Определи го периметарот на триа-

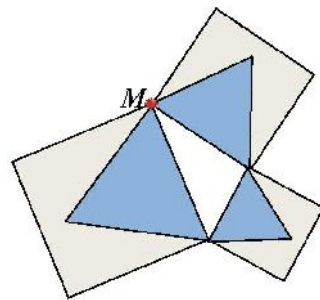


голникот ABC .

49. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од рамностран триаголник и правоаголник. Периметарот на целата фигура е за 116 mm поголем од периметарот на триаголникот и за 24 mm поголем од периметарот на правоаголникот. Определи ја плоштината на правоаголникот.

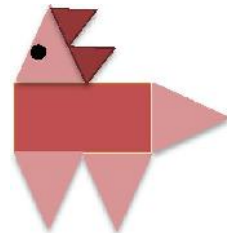


50. Елена го нацртала белиот триаголник кај кој должините на страните изразени во сантиметри се последователни природни броеви чиј производ е еднаков на 60. Потоа над секоја од страните на триаголникот, од неговата надворешна страна, таа нацртала по еден рамностран триаголник и по еден квадрат (цртеж десно).

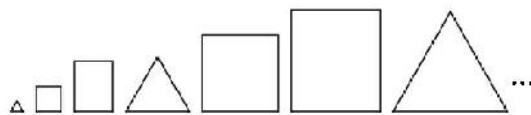


- а) Определи го збирот на сите отсечки на добиената фигура.
б) Дали може Елена тргнувајќи од точката M да помине точно по еднаш по секоја отсечка од добиената фигура без притоа да го подигне моливот.

51. Елеонора користејќи два еднакви мали рамностранни триаголници, четири еднакви големи рамностранни триаголници и еден правоаголник чиј периметар е еднаков на 120 cm направила модел на петел (цртеж десно). Определи го периметарот на овој модел?



52. На цртежот десно е прикажан почеток на низа од рамностранни триаголници, квадрати и правоаголници чии должини на страни изразени во сантиметри се: 1, 2, 3 и 4, 5, 6, 7 и 8, 9, 10, 11 и 12, итн. Определи го периметарот на фигурата која има должина на страна 67 cm .



53. Милан во квадратна мрежа го запишал бројот 17 (цртеж десно). Расто-



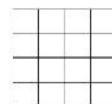
јанието меѓу хоризонталните и вертикалните линии во мрежата е еднакво на 1 cm . Определи ја плоштината на цифрите со кои е запишан овој број?

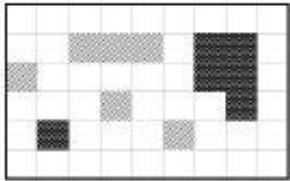
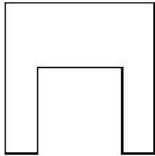
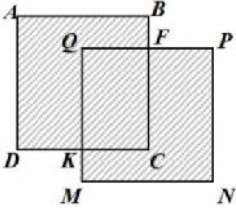
54. Горјан нацртал неколку триаголници и неколку квадрати. Вкупно тој нацртал 17 фигури. Сите фигури заедно имаат 60 страни. Колку триаголници и колку квадрати нацртал Горјан?
55. Огнен нацртал седум триаголници, шест квадрати и десет шестаголници. Колку агли имаат заедно нацртаните многуаголници?
56. Ивана нацрнала пет триаголници, три квадрати и девет осумаголници. Потоа ги пребројала аглите и страните на сите нацртани фигури. За колку бројот на аглите е поголем од бројот на страните?
57. Марија залепила неколку триаголници и добила фигура во форма на звезда како на цртежот десно. Определи го најмалиот број триаголници со кои Марија може да ја направи ѕвездата.
58. Кои многуаголници може да се добијат како пресек на еден остар агол и еден квадрат? За секој поединечен случај нацртај цртеж.
59. Каков многуаголник може да се добие како разлика на множествата точки на два остроаголни триаголници?



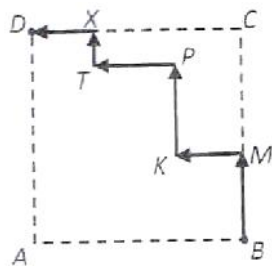
IV.3. ЧЕТИРИАГОЛНИК

60. Пресметај го периметарот на четириаголникот $ABCD$ чии страни се со должини
 $\overline{AB} = 2\text{ m } 3\text{ cm}$, $\overline{BC} = 2\text{ m } 10\text{ cm}$, $\overline{CD} = 2\text{ m } 15\text{ mm}$ и $\overline{DA} = 200\text{ cm } 20\text{ mm}$.
61. Шаховската табла е во облик на квадрат и има 64 еднакви квадратни полиња. Периметарот на секое поле е еднаков на 18 cm . Пресметај го периметарот на шаховската табла.
62. Квадратот на цртежот десно е составен од 16 помали квадрати, секој од кои има периметар 40 cm . Определи го периметарот на големиот квадрат.

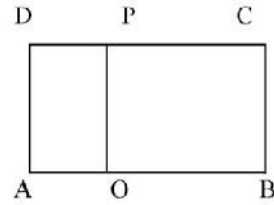


63. Должините на страните на еден правоаголник се 59 cm и 37 cm . Определи ја должината на страната на квадратот чиј периметар е еднаков на периметарот на правоаголникот.
64. Мерниот број на плоштината на квадратот изразен во квадратни сантиметри е двапати поголем од мерниот број на периметарот на квадратот изразен во сантиметри. Определи ги периметарот и плоштината на овој квадрат.
65. Дадени се два еднакви квадрати, секој од кои има плошина 100 cm^2 . Должината на страната на едниот квадрат ја зголемуваме за 2 cm , а периметарот на другиот квадрат го зголемуваме за 16 cm , по што повторно добиваме квадрат. Кој квадрат по направените промени ќе има поголема плошина?
66. Квадрат е составен од неколку помали еднакви квадратчиња. Лена ги обоила квадратчињата кои се распоредени на двете дијагонали. Таа вкупно обоила 17 квадратчиња. Колку квадратчиња останале необоени?
67. Должината на страната на квадратот е еднаква на 24 cm , а една страна на правоаголникот кој има еднаква плошина со квадратот е долга 18 cm . Кој има поголем периметар: квадратот или правоаголникот?
68. Татјана со цвеќиња ги засадила сивите, а Милица ги засадила црните леи на цртежот десно. На која од нив ќе ѝ треба повеќе метри жица за да ги огради леите кои ги засадила?
- 
69. На цртежот десно е прикажан квадрат со должина на страна 28 cm , од кој на покажаниот начин е отсечен квадрат со должина на страна 16 cm . Определи го периметарот на добиената фигура.
- 
70. На цртежот десно дадени се два еднакви квадрати $ABCD$ и $MNPQ$, а $KCFQ$ е правоаголник со периметар 24 cm . Ако $\overline{BF} = 1\text{ cm}$, а $\overline{FP} = 3\text{ cm}$, определи го периметарот на штрафираната фигура.
- 

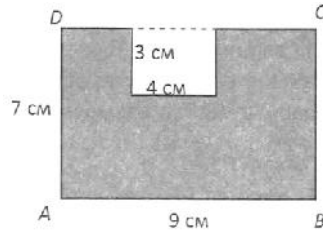
71. Колку пати ќе се зголеми периметарот на квадратот ако неговата страна се зголеми три пати.
72. Ако должината на даден правоаголник ја зголемиме за 3 cm , а неговата ширина ја зголемиме за 5 cm , ќе добиеме квадрат со плоштина 81 cm^2 . Определи ја плоштината на правоаголникот.
73. Ако должината на страната на квадратот се зголеми за 1 cm , тогаш неговата плоштина се зголемува за 17 cm^2 . Определи го периметарот на овој квадрат.
74. Ако страната на квадратот се зголеми за 2 cm , тогаш се добива нов квадрат чија плоштина е за 144 cm^2 поголема од плоштината на почетниот квадрат. Определи ги периметарот и плоштината на почетниот квадрат.
75. Ако една страна на квадратот се зголеми за 2 cm , а другата се намали за 5 cm , се добива правоаголник чија плоштина е за 46 cm^2 помала од плоштината на квадратот. Определи ја должината на страната на квадратот.
76. Периметарот на квадратот $ABCD$ е еднаков на 36 cm . Мравка се движи од темето B до темето D по патеката $B \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow T \rightarrow X \rightarrow D$, како што е покажано на цртежот десно. Колку сантиметри поминала мравката?
77. Даден е квадрат со плоштина 36 cm^2 . Да се определи должината на правоаголникот кој има ширина 3 cm и ист периметар како и квадратот.
78. Правоаголно дворно место има должина 56 m и два пати помала ширина. Дедо Илија има 500 m жица и дворот го заградил со ограда во која имало два реда жица. Колку метра жица му останало на дедо Илија?



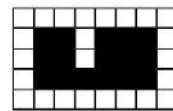
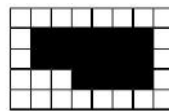
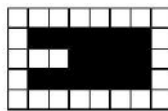
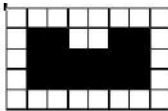
79. Правоаголникот $ABCD$ со отсечката OP е поделен на два дела (цртеж десно). Периметарот на правоаголникот $OBCP$ е за 36 cm поголем од периметарот на правоаголникот $AOPD$. Определи ја должината на страната OB ако $\overline{AO} = 2\text{ cm}$ и $\overline{AD} = 30\text{ mm}$.



80. Даден е правоаголник $ABCD$, $\overline{AB} = 9\text{ cm}$ и $\overline{AD} = 7\text{ cm}$. Од него е отсечен правоаголник со должини на страни 3 cm и 4 cm (цртеж десно). Определи го периметарот на добиената фигура.

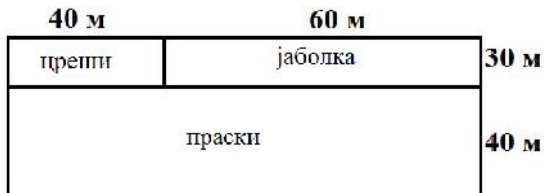


81. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на 14 cm , а должините на неговите страни изразени во сантиметри се природни броеви. Колку правоаголници има со ова својство? Кој од овие правоаголници има најголема плоштина?
82. Ширината на еден правоаголник е 56 cm , а неговиот периметар е пет пати поголем од ширината. Определи ја должината на овој правоаголник.
83. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на 1 m , а должината на една негова страна е 36 cm . Определи ја должината на другата страна на правоаголникот.
84. На долните цртежи се прикажани четири фигури поставени во квадратна мрежа. Кои две од дадените фигури имаат еднакви периметри?

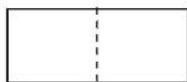


85. Плоштината на квадрат со должина на страна 6 cm е еднаква на плоштината на правоаголник кој не е квадрат чии должини на страни се изразени со природни броеви. Колку такви правоаголници постојат? Определи ги најмалиот и најголемиот периметар на овие правоаголници.

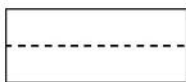
86. Правоаголник со периметар 96 cm со една права ер поделен на два исти квадрати.
- 1) Определи ја разликата на периметраите на правоаголникот и еден од добиените квадрати.
 - 2) Определи ги плоштините на правоаголникот и еден од кавдартите.
87. Горјан расекол квадратен лист на два правоаголника, од кои составил нов правоаголник кој не е квадрат. Периметарот на новодобиениот правоаголник е еднаков на 60 cm . Определи го периметарот на почетниот квадрат.
88. Даден е правоаголник со должини на страни $22\text{ dm} + 40\text{ mm}$ и $3\text{ m} - 8\text{ cm}$. Определи го периметарот на правоаголникот, а потоа определи ја должината на страната на квадратот кој има еднаков периметар како и правоаголникот.
89. Еден под може целосно да се покрие само со плочки со димензии $22\text{ cm} \times 11\text{ cm}$ или само со плочки со димензии $20\text{ cm} \times 20\text{ cm}$ (плочките не се кршат). За покривање на подот со плочки со димензии $22\text{ cm} \times 11\text{ cm}$ се потребни 200 плочки. Колку плочки се потребни ако подот се покрива со плочки со димензии $20\text{ cm} \times 20\text{ cm}$?
90. Определи ја разликата на збирот на периметрите на деловите засадени со цреши, јаболка и праски, и периметарот на целата овошна градина.



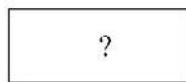
91. Павел, Ангел и Иван отсекле три еднакви картонски правоаголници. Павел и Ангел своите правоаголници ги пресекле како што е прикажано на долните цртежи. Павел добил два еднакви правоаголници, секој со периметар 24 cm , а Ангел добил два еднакви правоаголници, секој со периметар 42 cm . Определи го периметарот на правоаголникот на Иван.



Петар

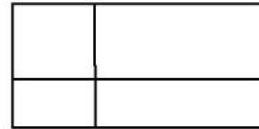


Ангел



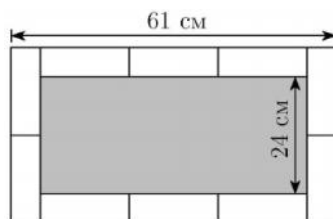
Иван

92. Правоаголник е поделен на четири правоаголници како што е прикажано на цртежот десно. Периметрите на три од четирите правоаголници се еднакви на 36 cm , 48 cm и 56 cm . Колку може да биде еднаков периметарот на четвртиот правоаголник?



93. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на 72 cm , а должините на неговите страни се разликуваат за 4 cm . Определи ја плоштината на овој правоаголник.
94. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на 90 cm , при што две должини на правоаголникот се еднакви на три ширини на правоаголникот. Определи ја плоштината на овој правоаголник.
95. Даден е правоаголник $ABCD$, $\overline{AB} = 5\text{ cm}$, $\overline{BC} = 4\text{ cm}$. Точката M припаѓа на страната AB , а точката N припаѓа на страната CD . Периметарот на четириаголникот $AMND$ е еднаков на периметарот на четириаголникот $MBCN$ и изнесува 14 cm . Определи ја должината на отсечката MN .
96. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на 72 cm , а должината на едната страна е двапати помала од должината на другата страна. Пресметај ја плоштината на четириаголникот чији темиња се средините на страните на овој правоаголник.
97. Даден е правоаголник со периметар 2 m . Ако должината на едната страна на правоаголникот се зголеми за 10 cm , а на другата страна се намали за 10 cm , се добива квадрат. Определи ги плоштините на правоаголникот и квадратот.
98. Ако едната страна на даден квадрат се зголеми за 8 cm , а другата се намали за 6 cm , се добива правоаголник чија плоштина е еднаква на плоштината на дадениот квадрат. Определи ги периметрите на квадратот и правоаголникот.
99. Двете спротивни страни на еден квадрат се зголемени за по 3 cm , а другите две спротивни страни се намалени за по 2 cm , со што е добиен правоаголник со периметар 26 cm . Определи го периметарот на дадениот квадрат.

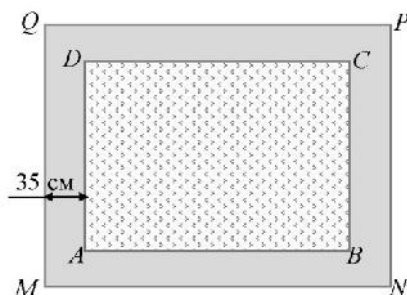
100. Сивиот правоаголник на цртежот десно е ограничен со десет еднакви правоаголни плочки. Користејќи ги податоците на цртежот десно, определи го периметарот на сивиот правоаголник.



101. Од сите страни на еден парк во форма на правоаголник е направена патека со еднаква широчина (цртеж десно). Периметарот на внатрешниот правоаголник е за 24 m помал од периметарот на надворешниот правоаголник. Определи ја ширината на патеката.



102. На цртежот десно правоаголникот $ABCD$ е цветна градина. Околу градината е направена патека со ширина 35 cm и е добиен правоаголникот $MNPQ$, чиј периметар е еднаков на 116 dm .

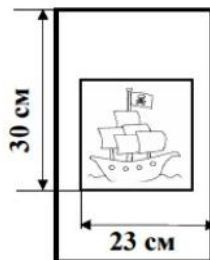


а) Определи го периметарот на правоаголникот $ABCD$.

б) Должините на страните на двата правоаголника ако $\overline{PN} = \overline{AB}$.

103. Илија проектирал правоаголно фудбалско игралиште со должина 100 m и периметар 290 m . Понатаму, околу игралиштето предвидел земјена патека со ширина 5 m , која со пластична ограда висока 1 m требало да биде одделена од трибините за гледачите. Колкава е плоштината на оградата која треба да се постави?

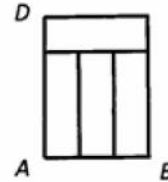
104. Слика во форма на квадрат е поставена во правоаголна рамка со периметар 140 cm . Сликата е на еднакво растојание од горната и долната страна на рамката, како и на еднакво растојание од левата и десната страна на рамката. Според податоците на цртежот десно определи ја страната на сликата.



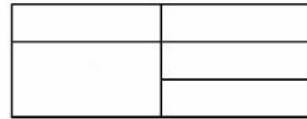
105. Павел исекол правоаголник од хартија, го превиткал на половина и добил помал правоаголник. Потоа тој го превиткал на половина добиениот правоаголник и добил нов правоаголник со димензии 5 cm и

8 cm . Колку најманогу може да биде периметарот на почетниот правоаголник? Колку најмалку може да биде периметарот на почетниот правоаголник?

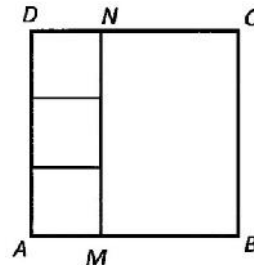
106. На цртежот десно е даден правоаголникот $ABCD$ кој е поделен на четири еднакви правоаголници. Ако $\overline{AD} = 36\text{ cm}$, определи го периметарот на еден од делбените правоаголници.



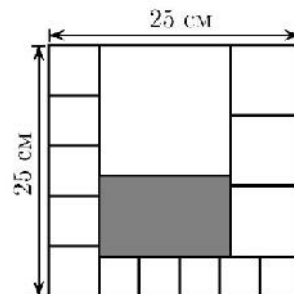
107. Големият правоаголник прикажан на цртежот десно е составен од пет правоаголници, и тоа четири мали еднакви правоаголници и еден среден правоаголник. Периметарот на еден мал правоаголник е еднаков на 46 mm , а периметарот на средниот правоаголник е еднаков на 54 mm . Определи го периметарот на големият правоаголник.



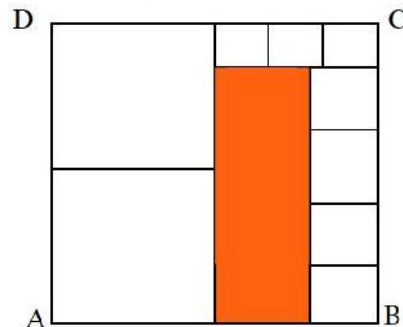
108. На цртежот десно квадратот $ABCD$ е поделен на правоаголник $MBCN$ и три мали квадрати, кои се обоени. Ако периметарот на еден од обоените квадрати е еднаков на 16 cm , определи за колку периметарот на правоаголникот $AMND$ е помал од периметарот на правоаголникот $MBCN$.



109. Квадрат со должина на страна еднаква на 25 cm е поделен на 14 бели квадрати и еден сив правоаголник (цртеж десно). Определи го периметарот на сивиот правоаголник.

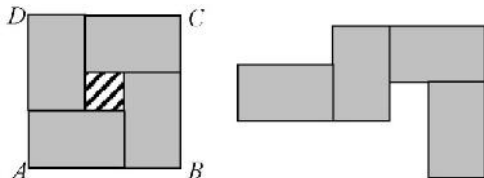


110. Даден квадрат $ABCD$ со должина на страна 24 cm е поделен на 9 квадрати и еден правоаголник (цртеж десно). Определи ги разликите на периметрите и плоштините на

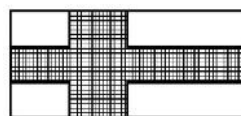


еден од големите делбени квадрати и правоаголникот?

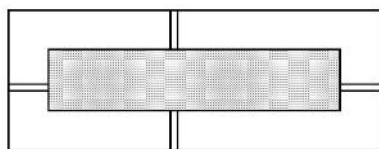
111. Маја исекала 8 еднакви правоаголници и кога по 4 наредила еден до друг, таа ги направила двете фигури прикажани на цртежот десно. Ако на првата фигура должината на страната на квадратот $ABCD$ е 37 cm , а должината на страната на штрафираното квадратче е 7 cm , определи го периметарот на втората фигура.



112. Од лист хартија со димензии 45 cm и 60 cm се исечени два мали и два поголеми правоаголници како што е прикажано на цртежот десно. Определи го периметарот на останатиот дел (штрафираната фигура).



113. Сивиот дел на цртежот десно означува зграда, а белиот дел го означува дворот околу зградата во кој се направени 4 патеки со еднаква должина по кои може да се стигне до оградата на дворот. Должината на оградата е за 80 m поголема од периметарот на зградата. Определи ја должината на секоја од патеките.



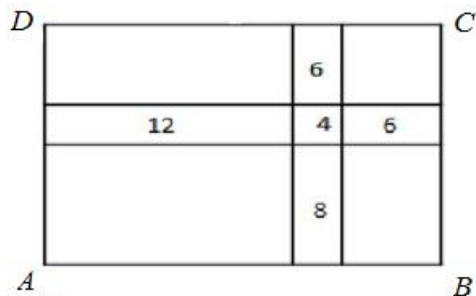
114. Во населбата на Горјан прават ново детско игралиште. Тоа има форма на правоаголник чија должина и три пати поголема од ширината. Периметарот на игралиштето е 336 m .



а) Колку метри е подолга должината на игралиштето од неговата ширина?

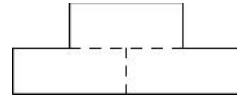
б) Покрај една од подолгите страни на игралиштето биле поставени светилки, кои се наоѓале на растојание 2 m една од друга (цртеж десно). Колку светилки биле поставени?

115. Правоаголникот $ABCD$ е поделен на правоаголници со должини на страни цели броеви изразени во сантиметри (цртеж десно). На пет од овие правоаголници се означени

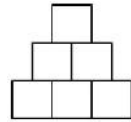


периметрите. Определи го периметарот на правоаголникот $ABCD$.

116. Фигура е направена од три складни правоаголници, како што е прикажано на сликата. Секој правоаголник има периметар. Колку е периметарот на оваа фигура?

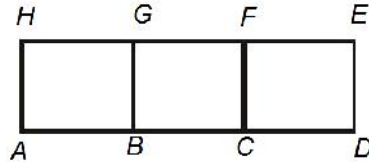


117. Од шест еднакви квадрати, секој со периметар 36 cm , е формирана фигурата прикажана на цртежот десно. Определи ги периметарот и плоштината на дадената фигура.



118. Градината на дедо Стојан е долга 105 m и нејзината должина е за 98 m поголема од нејзината ширина. Дедо Стојан со компири засадил 642 m^2 од градината. Определи ја плоштината на незасадениот дел од градината.

119. На цртежот десно се означени патиштата меѓу раскрсниците A, B, C, D, E, F, G, H , при што растојанијата меѓу секои две раскрсници се еднакви. Секој правоаголник претставува правоаголна маршрута. Веселин во произволен редослед по еднаш ги поминал сите правоаголни маршрути и констатирал дека поминал пат долг 32 km . Определи ја должината на најдолгата маршрута.



120. Килимче во облик на правоаголник е исткаено на бели и црни ленти, кои се паралелни со неговата ширина (цртеж десно). Ширината на килимчето е 2 m , белата лента е со широчина 3 cm , црната е со широчина 2 cm , а лентите наизменично се менуваат почнувајќи од бела лента. Определи ги плоштините на белиот и црниот дел на килимчето ако неговата должина е еднаква на 303 cm .



V ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

V.1. МНОЖЕСТВА

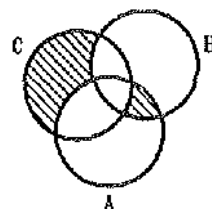
1. Во едно училиште има 120 ученици. На натпреварот по математика учествувале 83 ученици, а на натпреварот по пеење учествувале 56 ученици. Колку ученици учествувале и на двата натпревари, ако се знае дека 13 ученици не учествувале на ниту еден од двата натпревара?
2. Во едно одделение има 15 математичари и 28 спортисти. Во одделението има 35 ученици и 4 не се ниту математичари ниту спортисти. Колку ученици се и спортисти и математичари.
3. Во трето и четврто одделени во едно училиште вкупно предаваат 12 учители. Од нив 9 учители предаваат во трето одделение, а 7 учители предаваат во четврто одделение. Колку учители предаваат во двете одделенија?
4. Во едно училиште има 50 ученици во петто одделение, од кои 20 учат англиски јазик, 35 ученици учат француски јазик, а 10 ученици не учат ниту еден од наведените јазици. Колку ученици истовремени учат и англиски и француски јазик?
5. Во едно одделение има 26 ученици. Од нив 16 знаат да возат велосипед, 13 знаат да пливаат, а 5 знаат и да пливаат и да возат велосипед. Колку ученици од ова одделение ниту знаат да пливаат, ниту знаат да возат велосипед?
6. Во одделението на Вера учат 25 ученици. Од нив 12 ученици имаат брат, 10 ученици имаат сестра, а 6 ученици немаат ниту брат ниту сестра. Колку ученици имаат и брат и сестра?
7. Иван има колекција од 25 автомобилчиња: црвени, сини и зелени. Ако 19 од автомобилчињата во колекцијата не се црвени, а 17 не се сини, колку зелени автомобилчиња има во колекцијата на Иван?
8. Во фудбалската е одбојкарската секција на едно училиште членуваат вкупно 92 ученика. Некои ученици се членови и на двете секции.

- а) Определи го бројот на членовите во одбојкарската секција, ако во фудбалската секција членуваат 63 ученици, а 7 пати помалку ученици членуваат и во двете секции.
- б) Определи го бројот на членовите во одбојкарската секција, ако 20 ученици членуваат и во двете секции, а учениците кои членуваат само во фудбалската секција се 7 пати повеќе од учениците кои членуваат во одбојкарската секција.
9. Во едно училиште учат 450 ученици. Со спорт не се занимаваат само 20 ученици, а секој од останатите ученици се занимава со точно еден од спортовите: кошарка, одбоја или фудбал. Кошарка и одбојка играат 215 ученици, а фудбал и одбојка играат 323 ученици. Колку ученици се занимаваат со секој од овие спортови?
 10. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 1000 и кои не се деливи ниту со 3 ниту со 5.
 11. Горјан во овошната градина набрал 93 овошки – јаболка, круши и дуњи. Се покажало дека меѓу јаболката и крушите 25 се црвливи, меѓу крушите и дуњите 18 се црвливи и меѓу дуњите и јаболката 11 се црвливи. Колку од овошките кои ги набрал Горјан не се црвливи?
 12. Летниот одмор на Васил траел 92 дена. Од нив тој фудбал играл во 58 дена, пешачел во 63 дена и пливал во 66 дена. Тој само во три дена играл фудбал, пешачел и пливал. Колку дена Васил во ист ден пливал и пешачел?
 13. Во петто одделение во едно училиште учат 90 ученици. Познато е дека 22 ученици учат англиски јазик, 28 руски јазик, 35 француски јазик, 5 англиски и руски, 7 француски и англиски, 9 француски и руски, а само англиски 12 ученици. Колку ученици ги учат сите три јазици, а колку не учи ниту еден од наведнатите јазици?
 14. Во низа се запишани првите 180 природни броеви. Потоа се избришани сите броеви кои завршуваат на нула, па се избришани сите броеви кои се делив со 4 и на крајот се избришани сите броеви кои се деливи со 3. Колку броеви останале?
 15. Група од 52 деца саделе елки, борови и чемпреси. Притоа 18 деца саделе точно по два вида дрвја, елки саделе 37 деца, борови саделе 23 деца и чемпреси саделе 28. Колку деца ги саделе трите вида дрвја?

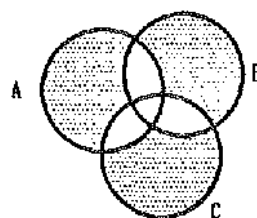
16. Дадена е права p на која последователно се означени точките M, N, P и Q . Определи го множеството $(\overline{MN} \cup \overline{NP}) \setminus (\overline{PQ} \setminus \overline{MP})$.

17. Нацртај две конвексни множества точки A и B така што множествата $A \cap B$ и $A \cup B$ се конвексни, а множеството $A \setminus B$ не е конвексно.

18. Кои операции треба да се извршат на множествата A, B и C за да се добие множеството кое е осенчено на цртежот десно?



19. На множествата A, B и C примени ги операциите $\cup, \cap$ и $\setminus$ така што ќе го добиеш осенченото множество на цртежот десно.



20. Колку подмножества има множеството $A = \{1, 2, 3, 4\}$?

21. Определи го множеството X за кое важи $\{a, b, c, d\} \cup X = \{a, b, c, d\}$.

22. Определи го множеството X за кое важи

$$X \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad X \cap \{2, 3, 4\} = \{3, 4\}.$$

23. Определи го множеството X за кое се исполнети условите

$$X \subset \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \text{ и } X \cap \{2, 3, 4, 7\} = \{2, 4\}.$$

24. Определи ги множествата A, B и C за кои важи:

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad (A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset,$$

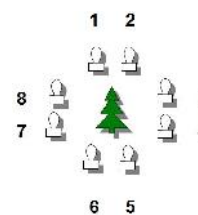
$$A \setminus B = \{1, 3, 5\}, \quad C \setminus B = \{2, 4\}, \quad (A \cap B) \setminus C = \{6\}.$$

25. Нека A е множеството од сите природни броеви кои се деливи со 4 и се помали од 2019, B е множеството од сите природни броеви деливи со 10 и помали од 2019 и C е множеството од сите природни броеви деливи со 75 и помали од 2019. Определи го множеството $A \cap B \cap C$.

26. Нека A е множеството од сите делители на бројот 6. Определи го множеството B во кое функцијата $f(x) = 2x + 1988$ го пресликува множеството A . Множествата A и B и пресликувањето f претстави ги со дијаграм.

V.2. ЛОГИЧКИ ГЛАВОБОЛКИ

27. За еден петцифрен број Иван смета дека е *интересен* ако збирот на двете крајни цифри е еднаков на збирот на средните три цифри со кои е запишан бројот. На пример, бројот 81597 е интересен. Определи го збирот на цифрите на следниот по големина интересен број.
28. Матеј го прашал Горјан колку прабаби имаат заедно сите негови прабаби?
29. Драган купил 5 жетони за стрелање со воздушна пушка. За секој погодок тој добивал 2 наградни жетони. Колку пати погодил Драган ако се знае дека тој пукал вкупно 17 пати?
30. При решавање на една иста задача Илија, Борјан и Милан ги добиле следниве решенија: 358, 257 и 468. Секој од нив точно определил само една цифра на точното решение на задачата (Илија – цифрата на единиците, Борјан – цифрата на десетките и Милан – цифрата на стотките). Определи го точното решение на задачата, ако тоа е трицифрен број.
31. Синџир е скинат на 5 делови, така што во секој дел има по 3 алки. Определи го најмалиот број алки кои треба да се отворат и повторно да се состават за да од петте дела може да се состави синџир кој ќе има два слободни краја.
32. На цртежот десно е претставена елка околу која се распоредени осум светилки. На долните цртежи е показано правилото според кое почнувајќи од 22 часот светат светилките распоредени околу елката. Која светилка ќе светне во 23 часот и 15 минути? Која светилка ќе светне последна и во колку часот?



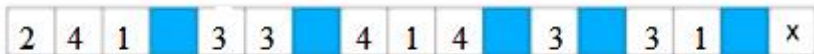
33. Четворица пријатели играат неколку игри со криење. Во секоја игра тројца од пријателите се кријат, а еден ги бара. Се покажало дека

Иван се криел најмногу од сите и тоа 10 пати, а Дејан се криел најмалку од сите и тоа 7 пати. Колку игри изиграле пријателите?

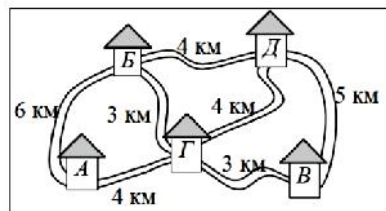
34. На еден математички натпревар учествувале 48 ученици, кои се распоредени во неколку училници така што во секоја училница има еднаков број ученици. Во секоја училница има по 6 момчиња и неколку девојчиња. Во колку училници се распоредени учениците, ако се знае дека на натпреварот учествуваат помалку девојчиња од момчиња?
35. Се сретнале пет момчиња – Ангел, Борјан, Венцислав, Горјан и Данчо. Ангел се поздрави со еден од нив, Борјан – со двајца, Венцислав – со тројца и Горјан – со четворица. Со колку момчиња се поздрави Данчо?
36. На лист се нацртани 5 отсечки. Првата отсечка сече една од останатите, втората отсечка сече две, трета сече три и четвртата отсечка ги сече четирите останати отсечки. Колку отсечки сече петтата отсечка?
37. На роденденската прослава на Горјан има 19 лица. Дали е можно секој од гостите од порано да е познаник со точно 3 гости?
38. Во група од седум третоодделенци, седум четвртоодделенци и еден петтоодделенец, секој третоодделенец има по десет познаници, а секој четвртоодделенец има по три познаници. Колку познаници има петтоодделенецот?
39. Двајца возрасни луѓе и две деца треба да се превезат од една на друга страна на реката. На располагање имаат мал чамец во кој може да се превезат или две деца или еден возрасен човек. Како најбрзо ќе ја преминат реката, ако сите знаат да веслаат?
40. На левиот брег на реката се наоѓаат 6 војници и две деца. На располагање имаат само еден чамец во кој најмногу може да се превезе еден војник или 2 деца. Колку пати најмалку чамецот треба да ја премине реката за да сите осум лица се превезат на десниот брег на реката?
41. Девет пријатели треба со чамец да преминат од еден на друг брег на река која е широка 20 m. Во чамецот истовремено може да се превезуваат најмногу три лица. Определи го најмалата должина на патот кој ќе го помине чамецот.



42. Ристо е осми во редот за сладолед. Пред него е Лилјана, која е зад Теодор. Пред Теодор е Ема, која е седма во редот, ако се брои одназад-напред. Колку луѓе чекаат во редот за сладолед?
43. Горјан наредил група деца едно зад друго. Се покажало дека зад Томи има 15 деца меѓу кои е и Аника, а пред Аника имало 15 деца меѓу кои и Томи. Ако меѓу Томи и Аника има 7 деца, колку деца наредил Горјан во колоната?
44. На клупа во паркот седнале Ана, Кате, Никола и Диме. Кате седи до Ана, но не седи до Никола. Никола не седи до Диме. Во кој редослед се седнати четирите деца?
45. Другарите Зоран, Милан, Веселин и Кирил застанале во права линија. Познато е дека Зоран е на 4 метри од Кирил и е на 20 метри од Милан, а Кирил е на 16 метри од Милан и е точно на средина меѓу Веселин и Милан. Определи го растојанието меѓу Веселин и Зоран.
46. Ако кенгурот Скокалко скокне во некое квадратче, тогаш следниот скок треба да е со должина онолку квадратчиња колку што е бројот во квадратчето во кое се наоѓа Скокалко. Колку долг треба да е првиот скок на Скокалко за безбедно да стигне во квадратчето X, а при тоа да не падне во вода?

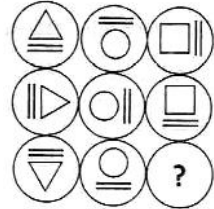


47. Автобус патува од местото A до местото B, при што по еднаш минува низ местата B, Г и Д. Определи ја должината на најкраткиот пат по кој може да патува автобусот.



48. Во еден хотел има пет гости од Полска, 7 од Чешка, 8 од Германија, неколку гости од Франција и нема гости од друга држава. На екскурзија треба да отидат најмалку 22 гости за да сме сигурни дека меѓу нив има барем седум гости од иста држава. Колку гости има од Франција?
49. Околу тркалезна маса на еднакви растојанија седнале 18 лица, некои од кои се витези и останатите се лажливци. Витезите секогаш ја говорат вистината, а лажговците секога лажат. Секој од присутните кажал дека лево и десно од него седат витез и лажливец.

Колку витези седеле на масата?

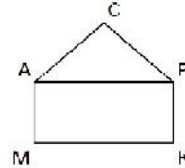
50. Тројца пријатеи треба да поделат 7 полни, 7 празни и 7 до половина полни чаши со лимонада. Сите чаши се исти. Поделбата треба да биде направена така што секој од пријателите ќе добие еднаков број чаши и еднакво количество лимонада. Како тоа може да се направи, но при- тоа лимонадата да не се прелева од една во друга чаша?
51. На цртежите десно е дадена низа од три фигури, која е формирана според опре- делено правило. Определи ја следната фигура во низата.
- 
52. На цртежот десно според определено правило се распоредени фигурите во кругчињата. Која фигу- ра треба да стои во кругчето во кое се наоѓа прашалникот?
- 
53. Во паркот се сретнале тројца другари: професорот Белоски, писателот Црнкоски и лекарот Црвенкоски. „Занимливо, еден од нас е црнокос, другиот има бела коса, третиот има црвена коса, но ниту еден од нас нема боја на коса на која укажува неговото презиме“ – рече црноко- сиот. „Во право си“ – се сложи Белоски. Која е бојата на косата на секој од пријателите?
54. Во текот на оваа седмица четири девојчиња отишле по еднаш во теа- тар и тоа: една во понеделник, две во вторник и четвртата во среда. Кои две девојчиња биле во театар во вторник, ако Ана, Тена и Мила во театар биле во различни денови, Петра била во театар пред Тена, а Ана била во театар по Мила.
55. Три пријателки – Маја, Светлана и Даринка се родени во една иста година, но во различни годишни времиња: зима, пролет и лето. Свет- лана е помала од Даринка, а меѓу родендените на Маја и Даринка поминало повеќе од половина година. Која кога се родила, ако е поз- нато дека на 1 октомври сите три немаат еднаков број години?
56. Ако пеперутката ја говори вистината тогаш таа ја менува бојата во зелена, а ако излаже тогаш таа станува црвена. Се сретнале две пеперутки. Првата рекла: „Ние и двете сме црвени“. Потоа втората рекла: „Ако си молчевме, сега и дветеќе бевме црвени“.

Дали двете пеперутки по втората реченица се истобојни?

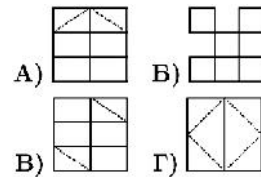
Забелешка. Ако пеперутката е црвена и таа излаже, тогаш останува црвена, а ако е зелена и ја говори вистината таа останува зелена.

57. Три од наградите на новогодишната наградна игра биле шапка, маска и ранец. Наградите ги добиле Моника, Жарко и Саво. Шапката паднала или кај Моника или кај Жарко, а маската не ја добил ниту Жарко ниту Саво. Кој која награда ја добил?

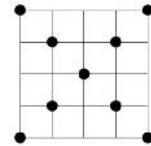
58. Илија поминал по сите патишта по еднаш и на крајот пристигнал во градот P . Од кој град го почнал своето патување Илија?



59. На цртежот десно се прикажани четири фигури. Која од нив не може да се нацрта без да се подигне моливот од листот и без повеќе оати да се поминува по една отсечка? (Цртањето на фигурата започнува од теме и завршува во теме.)

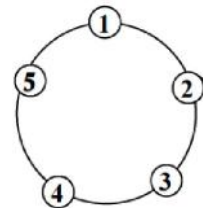


60. Во земјата Недојдија 9 градови се распоредени како на цртежот десно. Петар Пан сака меѓу некои од градовите да направи прави патишта кои што нема да се сечат надвор од градовите и од секој град да излегуваат точно по 4 патишта. Помогни му на Петар Пан да ги конструира патиштата. (Мрежата е дадена за поедноставно цртање, тоа не мора да се патишта.)

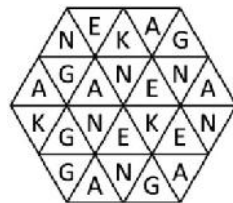


V.3. ЗАНИМЛИВИ БРОЕЊА

61. На кружница се запишани броевите 1, 2, 3, 4 и 5, како што е прикажано на цртежот десно. Скакулец скока во насока на движењето на стрелката на часовникот од број на број според следново правило: ако се наоѓа на непарен број, тогаш скока врз соседниот број, а ако се наоѓа на парен број, тогаш прескокнува еден број. Ако скакулецот на почетокот се наоѓал на бројот 5, на кој број ќе се наоѓа по 100 скока?

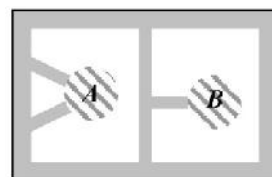
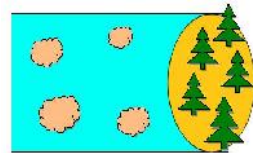


62. На колку начини зборот KENGA може да се прочита на фигурата прикажана на цртежот десно, ако соседните букви од зборот мора да лежат во триаголници кои што имаат заедничка страна?



63. Антонио фрлил коцка за играње 21 пат. Притоа бројот 1 паднал 2 пати, бројот 2 паднал 2 пати, а секој од броевите 3, 4, 5 и 6 паднал по 4 пати. Страните на коцката со непарен број точки се обоени со жолта боја, а страните на коцката со парен број точки се обоени со црвена боја. Колку пати паднала жолта боја?
64. Чуварот на училиштето има 7 клуча за вратите од 7 училници, но не знае кој клуч е од која училница. Кој е најголемиот можен број проби што треба да ги направи чуварот за да открие кој клуч која училница ја отклучува?
65. На секое дете му дале по 4 картончиња. На секое картонче биле запишани слоговите ПА, или НА, или МА. Се покажало дека 13 деца со своите картончиња можат да го запечат зборот МАМА, 15 деца – зборот ПАПА и 17 деца – зборот НАНА. Зборот ПАНАМА можат да го запишат 45 деца. Колку деца вкупно добиле картончиња?
66. Располагаме со 19 триаголници, 28 квадрати и 6 кругови. Кој е најмалиот број фигури кои треба да се отстранат за да останат фигури само од еден вид?
67. Во кутија има 15 сини, 8 црвени и 3 бели топчиња. Определи го најмалиот број топчиња кои без гледање треба да ги извадиме од кутијата за да сме сигурни дека меѓу нив има најмалку 10 со иста боја и најмалку 5 со друга боја.
68. Во стаклена бомбониера има 4 бомбони со вкус на јагода, 5 бомбони со вкус на карамела и 6 чоколадни бомбони. Определи го најмалиот број бомбони кои без да се гледа треба да се земат така што да имаме по една бомбона од секој вид.
69. Во вреќата на Дедо Мраз има 444 автомобилчиња, 555 камиончиња и 666 авиончиња. Определи го најмалиот број играчки кои без да гледа треба да ги извади Дедо Мраз за да биде сигурен дека меѓу нив има најмалку едно авионче.

70. Горјан има 70 лампиони за украсување на новогодишната елка, од кои 20 се сини, 20 се црвени, 20 се жолти и останатите 10 се бели и зелени. Определи го најмалиот број лампиони кои треба да се земат без гледање за да сме сигурни дека меѓу нив ќе има 10 од иста боја.
71. На една корпа пишува „Јаболка“ и во неа има само јаболка: 8 зелени и 11 жолти. На друга корпа пишува „Круши“ и во неа има само круши: 14 зелени и 5 жолти. Определи го најмалиот број плодови кои треба да се извадат за да сме сигурни дека сме извадиле барем 10 истобојни плодови. (Можеме да избереме од која корпа ќе вадиме плодови, но бојата на плодот не ја гледаме сè додека не го извадиме.)
72. Сите двоцифрени броеви се запишани на картончиња (по еден број на едно картонче). Кој е најмалиот број картончиња што треба да го извлечеме без гледање, за да сме сигурни дека најмалку на пет картончиња се запишани броеви кои имаат еднаков збир на цифри?
73. На колку начини може бројот 161 да се запише како збир на два броја такви што првиот собирок е помал од вториот собирок?
74. За време на денот на пролетта учениците од V^1 одделение во еден ред засадило 16 елки. Потоа меѓу секои две елки учениците од V^2 одделение засадило уште по една елка, а потоа меѓу секои две елки учениците од V^3 одделение засадило уште по една елка. Колку елки засадило сите петтоодделенци заедно?
75. Во градината на Ивана во еден ред се посадени 13 лалиња и нема други лалиња. Секој ден меѓу секои две соседни лалиња Ивана засудува по едно ново лале. Колку лалиња ќе има во градината по четири дена?
76. Во морето има четири острови. Од секој остров излегуваат по три моста: едниот го поврзува островот со брегот, а другите два го поврзуваат островот со други острови. Меѓу два острова може да има само по еден мост. Определи го бројот на сите мостови.
77. На цртежот десно е прикажана шема на парк. Со буквата A е означен детски плоштад, со B е означена фонтана и патеките во паркот се обоени со сива боја. На колку различни начи-



ни може да се стигне од плоштадот до фонтаната, без притоа да се минува низ едно место двапати.

78. Определи го бројот на петцифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на 2.
79. Определи го бројот на сите трицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4 и цифрата на стотките е еднаква на цифрата на десетките.
80. Определи го бројот на двоцифрените броеви кај кои цифрата на десетките е помала од цифрата на единиците.
81. Определи го бројот на сите трицифрени непарни броеви чиј збир на цифри е еднаков на 5.
82. Колку петцифрени броеви завршуваат на цифрата 4? Колку петцифрени броеви почнуваат и завршуваат на цифрата 7?
83. Запиши ги сите четирицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 3. Колку броеви запиша?
84. Запиши ги сите петцифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 3.
85. Запиши ги сите четирицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 10, а цифрата на десетките им е еднаква на 5.
86. Определи го бројот на четирицифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4.
87. Определи го бројот на трицифрените броеви чиј производ на цифри е еднаков на 36.
88. Определи го бројот на четирицифрените природни броеви чиј производ на цифри е еднаков на 6.
89. Определи го бројот на петцифрените броеви чиј производ на цифри е еднаков на 4.
90. Определи го бројот на сите природни броеви кои се помали од 1000 и чиј збир на цифри е еднаков на 5.
91. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 3000 и чиј производ на цифри е еднаков на 210.

92. Определи го бројот на четирицифрените броеви кои се запишани само со цифрите 1, 2 и 3 и кои се деливи со бројот 9.
93. Определи го бројот на броевите кои се поголеми од 10, се помали од 1000 и чиј збир на цифри е еднаков на 7.
94. Определи го бројот на трицифрените броеви кај кои цифрата на стотките е парна, а цифрата на единиците е непарна.
95. Колку различни трицифрени броеви може да се запишат само со помош на цифрите 6 и 7?
96. Определи го бројот на петцифрените броеви кои имаат три соседни еднакви цифри, а другите две цифри се различни од нив и се различни меѓу себе.
97. Определи го бројот на двоцифрените броеви кај кои:
 - 1) двете цифри се парни,
 - 2) двете цифри се непарни.
98. Определи го бројот на броевите кои се поголеми од 0 и се помали од 100000, а можат да се запишат само со цифрите 1 и 0.
99. За еден петцифрен број ќе велиме дека е *планински* ако првите три цифри му се во растечки редослед, а последните три цифри му се во опаѓачки редослед. На пример, бројот 35642 е *планински*, а бројот 45532 *не е планински*. Определи го бројот на планинските броеви кај кои цифрата на стотките е еднаква на 5.
100. За еден број ќе велиме дека е *прекрасен* ако е запишан само со цифрите 0, 2, 4, 6 и 8. На пример, бројот 424 е прекрасен. Колку прекрасни броеви се поголеми од 20 и се помали од 208?
101. Определи го бројот на трицифрените броеви кои имаат исто значење било да се читаат оддесно-налево, било да се читаат одлево-надесно.
102. Колку седумцифрени броеви почнуваат со 2019, а колку завршуваат со 2019?
103. Определи го бројот на парните броеви кои се помали од 10000 и во чиј запис не учествуваат цифрите 0, 1, 3, 4, 6, 7, 8 и 9.
104. Определи го бројот на трицифрените броеви запишани со различни непарни цифри од кои една од цифрите е 7.

105. На клупа во паркот треба да седнат Ѓорѓи, Ирина, Деница, Петра и Симон. На колку начини тоа може да го направат ако секогаш меѓу две девојчиња мора да седи точно едно момче?

106. Павел има четири различни маици, седум различни пантолони и 3 различни пара патики. На колку различни начини може да се облечи Павел?

107. Фросина има:

- сина и црвена шапка,
- жолта, сина и црвена блуза,
- жолта, сина, црвена и зелена сукња.

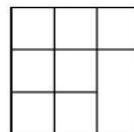
Фросина не носи жапка и блуза со иста боја. На колку различни начини таа може да избере шапка, блуза и сукња за се облече.



108. На колку начини во натписот СКОПСКИ МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР може да се заокружат три букви така што одлево-надесно ќе се прочита СМТ.

109. Во понеделник учениците од V^a одделение треба да имаат два последователни часови математика и по еден час музичко, ликовно и физичко. Часот по физичко не смее да биде прв час. На колку начини може да се направи распоредот на часовите за овој ден?

110. На цртежот десно е прикажан план на парк (линиите се патеки). Определи го бројот на различните најкратки патишта од долниот лев агол до горниот десен агол.



V.4. БРОЕЊА НА ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

111. На правата p се дадени точките A, B, C, D и E (цртеж десно). Запиши ги сите отсечки определени со овие точки. Колку отсечки запиша?

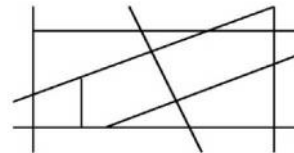


112. Правите a и b се паралелни. На правата a се означени точките A, B, C, D , а на правата b се означени точките E, F . Наброј ги сите прави кои содржат најмалку две од означените шест точки.

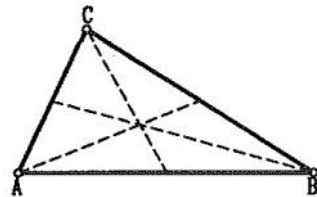
113. Нацртај две прави a и b кои се сечат во точка P . На правата a избери три точки и означи ги со A, B и C , а на правата b избери две точки и означи ги со D и E , различни од точката P . Определи го бројот на правите кои содржат точно две од точките A, B, C, D и E .

114. Во рамнината се дадени 5 различни точки кои не лежат на една права. Колку прави се определени со овие точки?

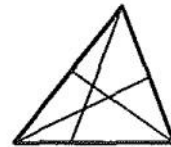
115. Колку прави агли се прикажани на цртежот десно?



116. Определи ги бројот на отсечките и бројот на триаголниците на цртежот десно.



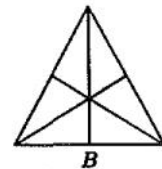
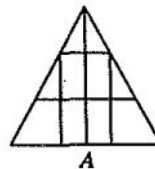
117. Определи го бројот на отсечките кои се прикажани на цртежот десно. Определи го бројот на триаголниците кои се прикажани на цртежот десно.



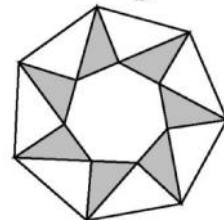
118. Колку отсечки и колку триаголници се прикажани на цртежот десно?



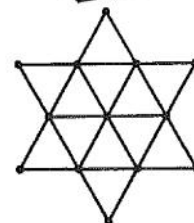
119. Која од фигурите прикажани на цртежот десно содржи повеќе триаголници?



120. Определи го бројот на триаголниците кои се содржат во фигурата прикажана на цртежот десно.



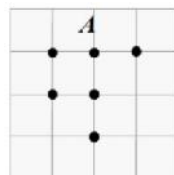
121. Определи ги бројот на отсечките и бројот на триаголниците прикажани на цртежот десно.



122. Колку триаголници можеме да нацртаме чии темиња се шесте точки прикажани на цртежот десно?

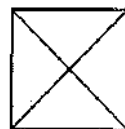


123. Во квадратна мрежа се дадени 6 точки (цртеж десно). Колку триаголници постојат такви што едното теме е точката A , а другите две темиња се некои од дадените точки?



124. Дадени се две паралелни прави a и b . На правата a се дадени точките A, B, C, D , а на правата b се дадени точките E, F, G . Колку конвексни четириаголници се определени со овие точки?

125. Определи ги бројот на отсечките и бројот на триаголниците прикажани на цртежот десно.

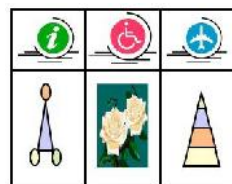


126. Нацртај квадрат со должина на страна 3 cm и сите четири негови оски на симетрија. Колку отсечки има на цртежот?

127. Колку триаголници се прикажани на цртежот десно?



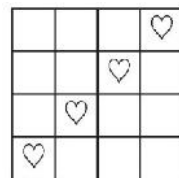
128. Определи го бројот на правоаголниците кои се содржат на цртежот десно.



129. Во колку правоаголници на цртежот десно се содржи ѕвездата?

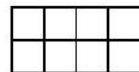


130. Фигурата на цртежот десно е поделена на квадрати и во четири од нив е нацртано срце. Определи го бројот на правоаголниците кои содржат точно две срца.



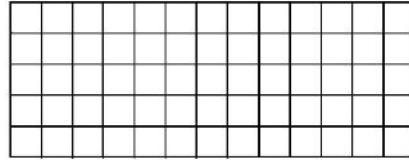
131. Квадрат со должина на страна 3 cm е поделен на квадратни сантиметри. Нацртај го соодветниот цртеж и преброј колку отсечки и колку квадрати содржи добиената фигура?

132. Определи го бројот на отсечките чии крајни точки се во темињата на квадратчињата на цртежот десно.

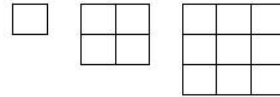


133. Квадрат со должина на страна 6 cm е поделен на еднакви квадратчиња со должина на страна 1 cm . Колку отсечки и колку квадрати се прикажани на добиената фигура.

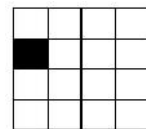
134. Правоаголник со димензии 5 cm и 13 cm е поделен на квадратчиња со должина на страна 1 cm . За едно квадратче ќе велиме дека е *парно* ако има заедничка страна со парен број други квадратчиња, а дека е *непарно* ако има заедничка страна со непарен број други квадратчиња. За колку парните квадратчиња се повеќе од непарните?



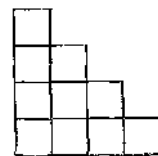
135. За да направиме 1 квадрат со должина на страна 1 кибритче ни се потребни 4 кибритчиња. Понатаму, за да направиме квадрат со должина на страна 2 кибритчиња, кој е составен од 4 единечни квадрати, ни се потребни 12 кибритчиња. Слично за квадрат со должина на страна 3 кибритчиња, поделен на 9 единечни квадрати, ни се потребни 24 кибритчиња. Колку кибритчиња ни се потребни за да направиме квадрат со должина на страна 10 кибритчиња?



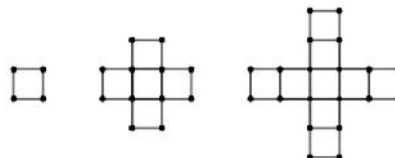
136. Определи го бројот на квадратите на фигурата десно кои може да се состават од белите квадратчиња, т.е. не го содржат црното квадратче и се поголеми од него?



137. Определи го бројот на квадратите и бројот на правоаголниците кои не се квадрати, прикажани на фигурата дадена на цртежот десно.



138. Иван последователно направил три фигури од кибритчиња кои се прикажани на цртежот десно.

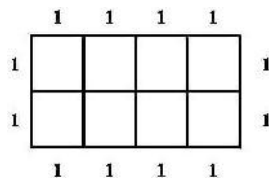


а) Колку квадратчиња ќе има 2019-тата фигура.

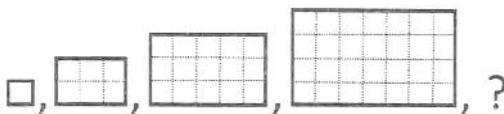
б) Колку чкорчиња се потребни за да се направи 2019-тата фигура.

в) Определи го периметарот на 2019-тата фигура, ако должината на едно чкорче е еднаква на 5 cm .

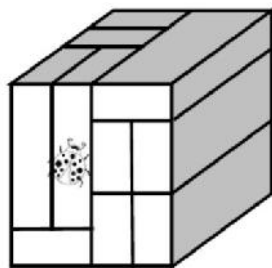
139. Определи го бројот на правоаголниците кои се содржани на фигурата дадена на цртежот десно и чиј периметар е еднаков на 6.



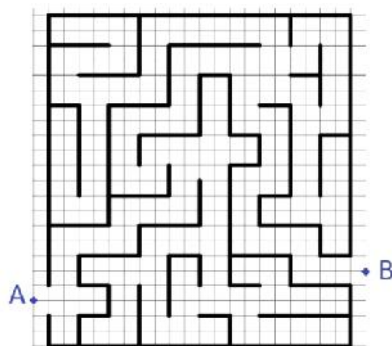
140. На цртежите десно се прикажани четири правоаголници кои според определено правило се нацртани еден по друг. Од колку квадратчиња ќе се состои петтиот правоаголник кој треба да се нацрта според истото правило?



141. На цртежот десно е прикажано тело составено од тули. До колку тули се допира тулата на чија предна страна се наоѓа бубамарата?



142. а) Во лавиринтот прикажан на цртежот десно определи го најкраткиот пат од *A* до *B* и пресметај ја неговата должина. Движењето во лавиринтот е по сивите линии, а должината на страната на малите квадратчиња во мрежата е 3 cm .



- б) Определи го бројот на левите свртувања по најкраткиот пат.
в) Определи го бројот на десните свртувања по најкраткиот пат.

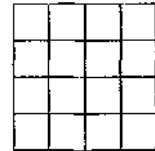
V.5. РАСПОРЕДУВАЊА

143. Броевите 1, 2, 3, ..., 32 распореди ги во четири групи од по 8 броеви така што збирите на броевите во секоја група ќе бидат еднакви.

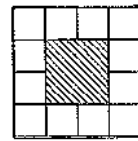
144. Буквите на зборот КЛАС распореди ги во празните квадратчиња, по една буква во секое квадратче, така што во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала да нема две исти букви. Која буква е запишана во квадратчето во кое е ѕвездата?

К	Л	А	С
С	А		
			*

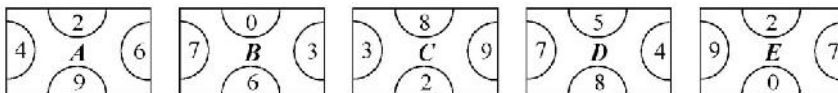
145. Дали може во полињата на квадратот прикажан на цртежот десно да се распоредат броевите 1, 2, 3 и 4 така што во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала да се запишани различни броеви?



146. Тврдината на цртежот десно е заштитена со 12 бункери. Во овие бункери треба да се распоредат 18 војници така што секоја од четирите страни на тврдината ја бранат по 7 војници и во секој бункер има најмалку по 1 војник. Најди барем два распореда на војниците во бункерите.



147. Дени се пет исти правоаголници, на чии страни се запишани природни броеви (види цртеж).



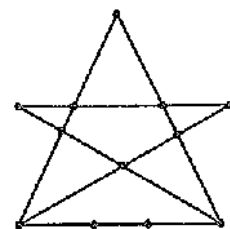
Петте правоаголници треба да се постават, без да се вртат или превртуваат, на означените места од I до V, така што броевите запишани на заедничките страни им се еднакви. Кој правоаголник треба да се постави на местото I?

I	II	III
IV	V	

148. Квадрат е поделен на 25 единечни квадратчиња. Во секое единечно квадратче треба да се запише еден од броевите 1, 2, 3, 4 или 5 така што во секој ред, секоја колона и во секоја фигура ограничена со задебелени линии е запишан секој од петте броеви. Некои броеви се веќе запишани. Определи го збирот на броевите во четирите аголни квадратчиња на квадратот.

	4		
			2
1			
			3

149. Распореди 12 точки на 6 прави така што на секоја права има по 4 точки.

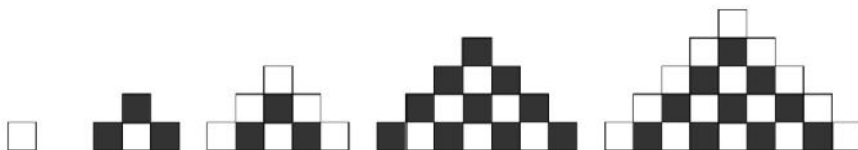


V.6. БОЕЊА, ПОКРИВАЊА И РАСЕКУВАЊА

150. Разгледај го цртежот десно. Уште колку квадратчиња треба да се обојат така што белите квадратчиња ќе бидат половина од сивите квадратчиња?



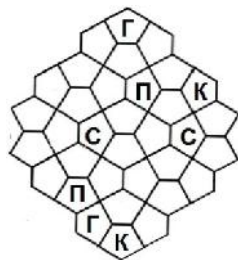
151. На долниот цртеж е прикажана низа од пет фигури кои според определено правило се формирани од црни и бели квадратчиња. Колку црни квадратчиња содржи единаесеттата фигура во оваа низа?



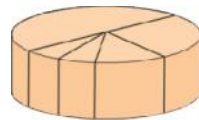
152. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од 10 еднакви фигури, секоја од кои е обоена во една боја: црвена, сина или жолта. Фигурите обоени во иста боја не се допираат. Во две фигури е запишана нивната боја. Во која боја е обоена фигурата во која е срцето?



153. Во Хогворт секој од факултетите (Грифиндор, Слитерин, Когтевран и Пуфендуј) има своја библиотека и своја спортска сала. Според правилата, за секој факултет постои коридор меѓу библиотеката и салата, покриен со плочки во боја на факултетот. Коридорите мечу себе не се сечат. Претстави ги овие четири коридори на мапата прикажана на цртежот десно. (Од соба во соба може да се преминува само ако собите имаат заеднички ѕид.)



154. Маја за роденден направила торта и ја исекла прво на половина, па едната половина ја исекла на половина и продолжила да сече така што добила парчиња како на цртежот десно. Најмалото пресечено парче тежи 100 g. Колку тежи целата торта?



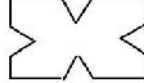
155. Пабло превиткал лист хартија два пати, како што е прикажано на цртежот десно, и направил едно сечење по права линија. Потоа го одвиткал листот. Кои од долните фигури не може да ги добие Пабло?



А



Б



В

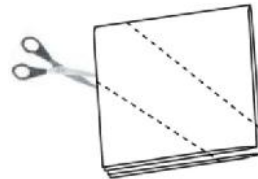


Г



Д

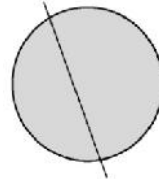
156. Лист хартија е превиткан двапати, како што е прикажано на цртежот десно. Потоа со ножница е пресечен по двете испрекинати линии. На колку делови е поделен листот?



157. Определи го најголемиот број делови на кои може да се подели лист хартија со помош на три прави.

158. Определи ги најмалиот и најголемиот број прави кои треба да се повлечат во рамнината така што таа ќе биде поделена на 7 области.

159. Круг може со помош на една права да се подели на два дела. Определи го е најмалиот број прави кои дополнително треба да се повлечат за да кругот се подели на 11 делови.



160. Даден е круг. Нацртај 4 прави кои кругот го делат на најголем можен број делови.

161. Лук Скајвокер го нашол волшебниот знак на императорот Палпатин, направен од златни прачки (цртеж десно). За да ја изгуби моќта императорот Палпати Скајвокер треба со ласерскиот меч да го подели знакот на шест дела. Но, енергијата која останала во мечот била доволна само за три сечења. Како Лук може со три сечења да го расече знакот на шест дела?



РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

I АРИТМЕТИКА И АЛГЕБРА

I.1. ПРЕСМЕТУВАЊА

1. Калкулаторот на Горјан е расипан и при собирање на броевите x и y тој го дава збирот $x + y + 1$. Горјан ги собрал броевите 1, 2, 3 и 4. Што покажал неговиот калкулатор?

Решение. Збирот на броевите кои Горјан ги собрал е $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Притоа тој собирал три пати и при секое собирање збирот се зголемувал за 1. Според тоа, калкулаторот на Горјан покажал $10 + 3 = 13$.

2. Определи ја разликата меѓу најголемиот трицифрен број запишан со различни цифри и најмалиот двоцифрен број запишан со исти цифри.

Решение. Најголемиот трицифрен број запишан со различни цифри е 987, а најмалиот двоцифрен број запишан со исти цифри е 11. Нивната разлика е $987 - 11 = 976$.

3. Определи ја разликата меѓу најголемиот и најмалиот трицифрен број на кои збирите на цифрите им се еднакви на 4.

Решение. Најголемиот трицифрен број чиј збир на цифри е 4 е бројот 400, а најмалиот трицифрен број чиј збир на цифри е 4 е бројот 103. Нивната разлика е $400 - 103 = 297$.

4. Со a и b да ги означиме соодветно најголемиот и најмалиот трицифрен број чиј збир на цифри е еднаков на 5. Определи ја разликата $a - b$.

Решение. Според условот на задачата имаме $a = 500$ и $b = 104$. Значи, бараната разлика е $a - b = 500 - 104 = 396$.

5. Определи ја разликата на најмалиот непарен шестцифрен број и најголемиот парен петцифрен број.

Решение. Најмалиот непарен шестцифрен број е 100001, а најголемиот парен петцифрен број е 99998. Нивната разлика е еднаква на $100001 - 99998 = 3$.

6. Нека бројот A е еднаков на бројот на сите двоцифрени броеви кај кои цифрата на единиците е поголема од цифрата на десетките, а бројот B

е еднаков на бројот на сите двоцифрени броеви кај кои цифрата на десетките е поголема од цифрата на единиците. Определи го збирот $A+B$.

Решение. Имаме вкупно 90 двоцифрени броеви, од кои броевите 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 и 99 се запишани со еднакви цифри, т.е. имаме 9 двоцифрени броеви запишани со еднакви цифри. Бидејќи збирот $A+B$ е еднаков на бројот на двоцифрените броеви кои се запишани со различни цифри, добиваме $A+B=90-9=81$.

7. Со помош на цифрите 0, 5 и 8 запиши ги најголемиот и најмалиот петцифрен број, при што дадените цифри може да се повторуваат и секоја цифра е употребена барем еднаш. Определи ги збирот и разликата на добиените броеви.

Решение. Најголемиот можен број е 88850, а најмалиот можен број е 50008. Нивната разлика е $88850-50008=38842$, а нивниот збир е $88850+50008=138858$.

8. Определи го збирот на најмалиот и најголемиот трицифрен број формиран со некои од цифрите 0, 2 и 5.

Решение. Најголемиот трицифрен број кој може да се формира со некои од дадените цифри е 555, а најмалиот трицифрен број кој може да се формира со некои од дадените цифри е 200. Нивниот збир е $200+555=755$.

9. Определи го збирот на најмалиот четирицифрен број запишан со различни цифри и најголемиот парен трицифрен број запишан со различни цифри.

Решение. Најмалиот четирицифрен број запишан со различни цифри е 1023, а најголемиот парен трицифрен број запишан со различни цифри е 986. Збирот на овие два броја е $1023+986=2009$.

10. Даден е десетцифрениот број 3794618502. Прецртај три цифри така што добиениот број ќе биде:

- 1) најмал можен број,
- 2) најголем можен број.

Решение. 1) Најмалиот можен број е 3418502.

2) Најголемиот можен број е 9618502.

11. Запиши го бројот кој се добива со собирање на 14 илјади, 14 стотки, 14 десетки и 14 единици.

Решение. Бараниот број е $14000+1400+140+14=15554$.

12. Меѓу цифрите 987654321 постави шест знаци + така што збирот на добиените едноцифрени и двоцифрени броеви е еднаков на 108. Определи го збирот на едноцифрените броеви?

Решение. Имаме,

$$9 + 8 + 7 + 6 + 54 + 3 + 21 = 108.$$

Збирот на едноцифрените броеви е еднаков на $9 + 8 + 7 + 6 + 3 = 33$.

13. Меѓу броевите

$$780 \quad 109 \quad 255 \quad 124 \quad 364 \quad 656$$

запиши знаци за собирање и одземање (+ или -) така што вредноста на добиениот израз ќе биде еднаква на нула.

Решение. Јасно, пред бројот 656 мора да биде запишан знакот -, а пред броевите 255 и 364 мора да бидат запишани различни знаци (Зошто?). Понатаму, пред броевите 109 и 124 мора да бидат запишани различни знаци. Со непосредна проверка добиваме:

$$780 + 109 + 255 - 124 - 364 - 656 = 0.$$

14. Калина (К) сака да множи со 4, Симона (С) сака да додава 5, а Ратка (Р) сака да одзема 2. Во кој редослед треба трите точно по еднаш да ги реализираат своите омилените операции за да од бројот 12 го добијат бројот 60?

Решение. Бидејќи $60 : 4 = 15$, а $12 - 2 + 5 = 15$ и $12 + 5 - 2 = 15$ заклучуваме дека редоследот на извршување на омилените операции на трите девојчиња треба да е СРК или РСК.

15. Со помош на шест четворки, загради и симболите на математичките операции состави броен израз чија вредност е еднаква на 100.

Решение. Две од можните решенија на задачата се:

$$(444 - 44) : 4 = 100 \quad \text{и} \quad (4 \cdot 4 + 4) \cdot (4 : 4 + 4) = 100.$$

16. Со помош на четири деветки и симболите за математичките операции запиши шест бројни изрази секој од кои е еднаков на 1. (Дозволено е користење на загради.)

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} (9 : 9) \cdot (9 : 9) &= 1, & (9 + 9) : (9 + 9) &= 1, & (9 + 9 - 9) : 9 &= 1, \\ (9 : 9) : (9 : 9) &= 1, & (9 \cdot 9) : (9 \cdot 9) &= 1, & 9 : 9 + 9 - 9 &= 1. \end{aligned}$$

17. Ана ја напишала таблицата за множење со 2 при што запишала од $2 \cdot 1$ и завршила со $2 \cdot 10$. Румена ја запишала таблицата за множење со 3 при што започнала од $3 \cdot 1$ и завршила со $3 \cdot 10$ и Иван ја запишал

таблицата за множење со 4 при што започнал од $4 \cdot 1$ и завршил со $4 \cdot 10$. Колку еднакви производи се среќаваат барем во две таблици.

Решение. Имаме:

$$\begin{array}{lll} 2 \cdot 2 = 1 \cdot 4 = 4, & 3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 6, & 4 \cdot 2 = 2 \cdot 4 = 8, \\ 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 4 = 12, & 8 \cdot 2 = 4 \cdot 4 = 16, & 9 \cdot 2 = 6 \cdot 3 = 18 \\ 10 \cdot 2 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ и} & 8 \cdot 3 = 6 \cdot 4 = 24, & \end{array}$$

што значи дека барем во две таблици се среќаваат 8 еднакви производи.

18. Со помош на броевите 1, 6, 9 и 9 и операциите собирање, одземање, делење и множење запиши бројни изрази чии вредности се 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8. Користењето на загради е дозволено.

Решение. Имаме:

$$\begin{array}{l} 1 + 6 \cdot (9 - 9) = 1, \\ 9 : (9 - 6) - 1 = 2, \\ 6 : (1 + 9 : 9) = 3, \\ 9 : (9 - 6) + 1 = 4, \\ 6 - 1 + 9 - 9 = 5, \\ 6 + 1 - 9 : 9 = 6, \\ 6 + 1 \cdot (9 : 9) = 7, \\ 6 + 1 + 9 : 9 = 8. \end{array}$$

19. Јасен има картончиња, на секое од кои е напишана по една цифра. Со помош на девет картончиња тој запишал точен пример на собирање на два трицифрени броеви. Неговиот другар Мирко ги сменил местата на две од картончињата, со што се добила ситуацијата на цртежот десно. Запиши ги цифрите на двете разместени картончиња?

$$\begin{array}{r} \boxed{2} \boxed{8} \boxed{9} \\ + \boxed{4} \boxed{1} \boxed{5} \\ \hline \boxed{6} \boxed{0} \boxed{3} \end{array}$$

Одговор. Заменети се картончињата на кои се запишани цифрите 3 и 4. Точното собирање е $289 + 315 = 604$.

20. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$20 \cdot 19 + 20 + 19$$

Решение. Имаме:

$$20 \cdot 19 + 20 + 19 = 380 + 20 + 19 = 419$$

21. На местата на буквите $\overline{ab} \cdot c$ запиши ги цифрите 8, 4 и 3 така што добиениот производ ќе биде најмал.

Решение. За да производот биде најмал треба цифрите a и c да се најмалите можни. Според тоа, цифрите a и c треба да се 3 и 4, а цифрата на b треба да е 8. Притоа производот $b \cdot c$ треба да е најмал, па затоа $c = 3$ и $a = 4$. Конечно, $48 \cdot 3 = 144$.

22. Пресметај ги вредностите на изразите:

а) $444 : 2 + 229$,

б) $92 \cdot 5 + 4 : 4$,

в) $544 - 416 : 4$,

г) $400 + 300 : 5$.

Решение. Имаме:

а) $444 : 2 + 229 = 222 + 229 = 451$.

б) $92 \cdot 5 + 4 : 4 = 460 + 1 = 461$.

в) $544 - 416 : 4 = 544 - 104 = 440$.

г) $400 + 300 : 5 = 400 + 60 = 460$.

23. Пресметај ја вредноста на изразот: $(254 - 18 \cdot 3) : 5$.

Решение. Имаме:

$$(254 - 18 \cdot 3) : 5 = (254 - 54) : 5 = 200 : 5 = 40.$$

24. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$48 + 243 + (307 + 100 + 307).$$

Решение. Имаме

$$48 + 243 + (307 + 100 + 307) = 291 + 714 = 1005.$$

25. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$665 - 5 \cdot (18 : 2 - 7) \cdot 65 + 35.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} 665 - 5 \cdot (18 : 2 - 7) \cdot 65 + 35 &= 665 - 5 \cdot (9 - 7) \cdot 65 + 35 \\ &= 665 - 5 \cdot 2 \cdot 65 + 35 \\ &= 665 - 650 + 35 = 15 + 35 = 50. \end{aligned}$$

26. а) Пресметај ја вредноста на изразот:

$$2018 - (12 \cdot 7 + 13 \cdot 7 + 75 \cdot 7 + 219 : 3).$$

б) Ако a е цифрата на десетилјадитите, b е цифрата на илјадитите, c е цифрата на стотките и d е цифрата на десетките на бројот 305714 пресметај ја вредноста на изразот $bc - ad$.

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned} 2018 - (12 \cdot 7 + 13 \cdot 7 + 75 \cdot 7 + 219 : 3) &= 2018 - (84 + 91 + 525 + 73) \\ &= 2018 - 773 = 1245. \end{aligned}$$

б) Имаме, $a=0, b=5, c=7$ и $d=1$, па затоа $bc-ad=5\cdot 7-1\cdot 0=35$.

27. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(1+2+3+4+5+6+7+8)\cdot 9.$$

Решение. Имаме:

$$(1+2+3+4+5+6+7+8)\cdot 9=36\cdot 8=288.$$

28. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$23\cdot 17+24\cdot 17+26\cdot 17+27\cdot 17.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} 23\cdot 17+24\cdot 17+26\cdot 17+27\cdot 17 &= (23+24+26+27)\cdot 17 \\ &= 100\cdot 17=1700. \end{aligned}$$

29. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(137+241+763+459):2.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} (137+241+763+459):2 &= (137+763+241+459):2 \\ &= (900+700):2=1600:2=800. \end{aligned}$$

30. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(503-6+6)-(16+80\cdot 5):4.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} (503-6+6)-(16+80\cdot 5):4 &= 503-(16+400):4=503-416:4 \\ &= 503-104=399. \end{aligned}$$

31. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$201\cdot 7+(20\cdot 17+17):17-(2+0+1+7)\cdot (20-17),$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} 201\cdot 7+(20\cdot 17+17):17-(2+0+1+7)\cdot (20-17) &= \\ &= 1407+(20+1)\cdot 17:17-10\cdot 3 \\ &= 1407+21-30=1428-30=1398. \end{aligned}$$

32. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $924-742:7,$

б) $856:8+13\cdot 9-7\cdot 5,$

в) $44-44\cdot 0+424:4+147\cdot 2.$

Решение. а) Имаме:

$$924-742:7=924-106=818.$$

б) Имаме:

$$856:8+13\cdot9-7\cdot5=107+117-35=224-35=189.$$

в) Имаме:

$$44-44\cdot0+424:4+147\cdot2=44-0+106+294=150+294=444.$$

33. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $918:3+3+10\cdot10-9$,

б) $(2012:4-4)\cdot4$,

в) $672-72:(3+4:4)$.

Решение. а) Имаме:

$$918:3+3+10\cdot10-9=306+3+100-9=409-9=400.$$

б) Имаме:

$$(2012:4-4)\cdot4=(503-4)\cdot4=499\cdot4=1996.$$

в) Имаме:

$$672-72:(3+4:4)=672-72:4=672-18=654.$$

34. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $1\cdot55:11-0\cdot(121\cdot21+324:6-16)$,

б) $6\cdot46:12+4\cdot(12\cdot21+324:6-196)$

в) $(393+256-199)\cdot2+24:6-141$,

г) $2\cdot((55:5+39):5+11\cdot12)-20$.

Решение. а) Имаме:

$$1\cdot55:11-0\cdot(121\cdot21+324:6-16)=55:11-0=5-0=5.$$

б) Имаме:

$$\begin{aligned}6\cdot46:12+4\cdot(12\cdot21+324:6-196) &= 276:12+4\cdot(252+54-196) \\ &= 23+4\cdot110=23+440=463.\end{aligned}$$

в) Имаме:

$$(393+256-199)\cdot2+24:6-141=450\cdot2+6-141=900+6-141=765.$$

г) Имаме:

$$\begin{aligned}2\cdot((55:5+39):5+11\cdot12)-20 &= 2\cdot((11+39):5+11\cdot12)-20 \\ &= 2\cdot(50:5+132)-20 \\ &= 2\cdot(10+132)-20 \\ &= 2\cdot142-20=264.\end{aligned}$$

35. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $(400+4):4-400:4+4:4$,

б) $306:3-2\cdot29+10\cdot4-4$,

$$\text{в)} 424:4 + 4 \cdot 111 + 460,$$

$$\text{г)} 244 + 4 \cdot 50 + 444.$$

Решение. Имаме:

$$\text{а)} (400 + 4):4 - 400:4 + 4:4 = 404:4 - 100 + 1 = 101 - 100 + 1 = 2,$$

$$\text{б)} 306:3 - 2 \cdot 29 + 10 \cdot 4 - 4 = 102 - 58 + 40 - 4 = 44 + 36 = 80,$$

$$\text{в)} 424:4 + 4 \cdot 111 + 460 = 106 + 444 + 460 = 550 + 460 = 1010,$$

$$\text{г)} 244 + 4 \cdot 50 + 444 = 244 + 200 + 444 = 444 + 444 = 888.$$

36. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\text{а)} 99 \cdot 8 + 99 \cdot 7 + 99 \cdot 1 + 99 \cdot 2 - 99 \cdot 3 - 99 \cdot 4 - 99 \cdot 5 - 99 \cdot 6,$$

$$\text{б)} 4 \cdot 1000 + 20 \cdot 100 + 1,$$

$$\text{в)} 43207 + 92714 - 13207.$$

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned} 99 \cdot 8 + 99 \cdot 7 + 99 \cdot 1 + 99 \cdot 2 - 99 \cdot 3 - 99 \cdot 4 - 99 \cdot 5 - 99 \cdot 6 &= \\ &= 99 \cdot (8 + 7 + 1 + 2 - 3 - 4 - 5 - 6) \\ &= 99 \cdot (18 - 18) = 99 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

б) Имаме:

$$4 \cdot 1000 + 20 \cdot 100 + 1 = 4000 + 2000 + 1 = 6001.$$

в) Имаме:

$$\begin{aligned} 43207 + 92714 - 13207 &= 43207 - 13207 + 92714 \\ &= 30000 + 92714 = 122714. \end{aligned}$$

37. Пресметај ја вредноста на изразот $20 - (2a + 2)$, каде a е решението на равенката $(4 + a):2 = 3$.

Решение. Од $(4 + a):2 = 3$ следува $4 + a = 6$, т.е. $a = 2$. Според тоа, вредноста на изразот е

$$20 - (2a + 2) = 20 - (2 \cdot 2 + 2) = 20 - (4 + 2) = 20 - 6 = 14.$$

38. Пресметај: $4028 - (a + b + c)$, ако

$$a = 898:2 + 955:5, \quad b = (144 - 144:8) \cdot 7 \quad \text{и} \quad c = 82 \cdot 9 - 82:3.$$

Решение. а) Имаме:

$$a = 898:2 + 955:5 = 449 + 191 = 640,$$

$$b = (144 - 144:8) \cdot 7 = (144 - 18) \cdot 7 = 126 \cdot 7 = 882 \quad \text{и}$$

$$c = 82 \cdot 9 - 82:3 = 738 - 273 = 465.$$

Затоа:

$$4028 - (a + b + c) = 4028 - (640 + 882 + 465) = 4028 - 1987 = 2041.$$

39. Определи ја вредноста на C ако четвртина од C е еднаква на $A - B$ каде $A = (24 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2$ и $B = 9 \cdot 8$.

Решение. Имаме,

$$A = (24 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2 = (24 + 24) \cdot 2 = 48 \text{ и } B = 9 \cdot 8 = 72.$$

Според тоа, $A - B = 48 - 72 = -24$, па затоа $C = 4(A - B) = 4 \cdot (-24) = -96$.

40. Пресметај ја вредноста на изразот

$$(a(c - 2b) + 21 \cdot 9) : 4,$$

каде a е најголемиот едноцифрен број, b е најмалиот двоцифрен број кој не е делив со 2 и c е најмалиот непарен трицифрен број.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} (a(c - 2b) + 21 \cdot 9) : 4 &= (9 \cdot (101 - 2 \cdot 11) + 21 \cdot 9) : 4 = (9 \cdot (101 - 22) + 21 \cdot 9) : 4 \\ &= (9 \cdot 79 + 21 \cdot 9) : 4 = 9 \cdot (21 + 79) : 4 = 900 : 4 = 225. \end{aligned}$$

41. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(2018 + 2016 + \dots + 6 + 4 + 2) - (2017 + 2015 + \dots + 5 + 3 + 1).$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} (2018 + 2016 + \dots + 6 + 4 + 2) - (2017 + 2015 + \dots + 5 + 3 + 1) &= \\ &= (2018 - 2017) + (2016 - 2015) + \dots + (6 - 5) + (4 - 3) + (2 - 1) \\ &= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1}_{1009 \text{ пати}} = 1009. \end{aligned}$$

42. Нека $A = 1 + 3 + 5 + \dots + 99$ и $B = 2 + 4 + 6 + \dots + 100$. Определи ја разликата $B - A$.

Решение. *Прв начин.* Имаме:

$$\begin{aligned} B - A &= 2 + 4 + 6 + \dots + 100 - (1 + 3 + 5 + \dots + 99) \\ &= (2 - 1) + (4 - 3) + (6 - 5) + \dots + (100 - 99) \\ &= \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{50 \text{ пати}} = 50. \end{aligned}$$

Втор начин. Имаме

$$\begin{aligned} B &= 2 + 4 + 6 + \dots + 100 = (1 + 1) + (1 + 3) + (1 + 5) + \dots + (1 + 99) \\ &= 1 + 3 + 5 + \dots + 99 + \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{50 \text{ пати}} = A + 50, \end{aligned}$$

па затоа $B - A = 50$.

43. а) Пресметај ја вредноста на изразот:

$$636 : 6 - 4 - 3 \cdot 15 + 5,$$

б) Ако $a = 25 - 12$, $b = 3 \cdot 5 + 4$, $c = 36 : 12 - 1$, пресметај ја вредноста на изразот:

$$45a + 11b - (7c + 11)(7c - 11).$$

в) Пресметај ја вредноста на изразот:

$$2009 - 2007 + 2005 - 2003 + 2001 - 1999 + \dots + 9 - 7 + 5 - 3 + 1.$$

Решение. а) Имаме:

$$636 : 6 - 4 - 3 \cdot 15 + 5 = 106 - 4 - 45 + 5 = 102 - 45 + 5 = 57 + 5 = 62.$$

б) Имаме $a = 13$, $b = 19$, $c = 2$, па затоа

$$\begin{aligned} 45a + 11b - (7c + 11)(7c - 11) &= 45 \cdot 13 + 11 \cdot 19 - (7 \cdot 2 + 11)(7 \cdot 2 - 11) \\ &= 585 + 209 - 25 \cdot 3 = 794 - 75 = 719. \end{aligned}$$

в) Имаме 1005 непарни броеви, па затоа ако ги групираме разликите, добиваме $(1005 - 1) : 2 = 502$ разлики кои се еднакви на 2. Според тоа:

$$\begin{aligned} (2009 - 2007) + (2005 - 2003) + (2001 - 1999) + \dots + (9 - 7) + (5 - 3) + 1 &= \\ = 502 \cdot 2 + 1 &= 1004 + 1 \\ &= 1005. \end{aligned}$$

44. Нека

$$A = 2 \cdot 3 \cdot 3, B = 1 + 0 \cdot (5 \cdot 132 - 236) + 78 \cdot 2 - 4 \cdot 39 \text{ и } C = 52 : 4 - 33 : 3.$$

Опреди го најголемиот меѓу производите AB , BC и CA .

Решение. Имаме:

$$A = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18,$$

$$\begin{aligned} B &= 1 + 0 \cdot (5 \cdot 132 - 236) + 78 \cdot 2 - 4 \cdot 39 \\ &= 1 + 0 + 156 - 156 = 1 \end{aligned}$$

$$C = 52 : 4 - 33 : 3 = 13 - 11 = 2.$$

Според тоа, $AB = 18$, $BC = 2$ и $CA = 36$, т.е. најголем е производот $CA = 36$.

45. Природните броеви се запишани во низа еден по друг:

$$123456789101112131415161718192021\dots$$

Која цифра се наоѓа на 2018-тото место?

Решение. На првите 9 места во низата се наоѓаат едноцифрените броеви, на следните 180 места се наоѓаат двоцифрените броеви, а потоа се трицифрените броеви. Имаме $2018 - (9 + 180) = 1829$ и како $1829 = 3 \cdot 609 + 2$ заклучуваме дека на 2018-тото место е втората цифра на шестотитни и десеттиот трицифрен број, т.е. на бројот $99 + 610 = 709$. Значи, бараната цифра е 0.

46. Определи го седмиот член на низата броеви:

4413, 4404, 4396, 4389, 4383, _____, _____ ...

Решение. Имаме, $4413 - 4404 = 9$, $4404 - 4396 = 8$, $4396 - 4389 = 7$ и $4389 - 4383 = 6$, па затоа шестиот член на низата ќе биде за 5 помал од петтиот, а седмиот член на низата ќе биде за 4 помал од шестиот. Значи, шестиот член на низата е $4383 - 5 = 4378$ и седмиот член на низата е $4378 - 4 = 4374$.

47. Определи го збирот на првите осум членови на низата броеви:

2, 3, 5, 9, 17, __, __, __.

Решение. Забележуваме дека

$$3 = 2 \cdot 2 - 1, 5 = 2 \cdot 3 - 1, 9 = 2 \cdot 5 - 1 \text{ и } 17 = 2 \cdot 9 - 1.$$

Според тоа, секој следен член на низата се добива кога претходниот член се помножи со 2 и од добиениот производ се одземе 1. Значи, шестиот член на низата е $2 \cdot 17 - 1 = 33$, седмиот член е $2 \cdot 33 - 1 = 65$ и осмиот член е $2 \cdot 65 - 1 = 129$. Конечно, збирот на првите осум членови на дадената низа е еднаков на

$$2 + 3 + 5 + 9 + 17 + 33 + 65 + 129 = 263$$

48. Малиот брат на Горјан се учи да пишува и напишал 215 букви една по друга: МАМОТАТЕМАМОТАТЕМАМОТАТЕМАМ... Која буква е 198-ма по ред?

Решение. Забележуваме дека во низата букви делот МАМОТАТЕ последователно се повторува. Овој дел има 8 букви и како $198 = 24 \cdot 8 + 6$ заклучуваме дека 198-ма по ред е шестата буква од делот МАМОТАТЕ, а тоа е буквата А.

49. Пабло ги симнувал играчките од новогодипшната елка во текот на една седмица. Во понеделникот тој симнал 1 играчка, а потоа секој следен ден симнувал толку играчки колку што веќе симнал претходните денови. Во неделата тој ги симнал последните играчки. Колку играчки имало на елката?

Решение. Пабло во понеделникот симнал 1 играчка, во вторникот 1 играчка, во средата 2 играчки, во четвртокот 4 играчки, во петокот 8 играчки, во саботата 16 играчки и во неделата 32 играчки. Значи, на елката вкупно имало $1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 64$ играчки.

I.2. БРОЈНИ РЕБУСИ

50. Во точно решена задача за множење $\overline{2*5} \cdot \overline{2*6} = \overline{A****}$ една од цифрите е заменета со A , а останатите цифри се заменети со $*$. Определи го бројот на можните вредности на A .

Решение. Цифрата A е најмала ако на местата на $*$ во множителите е цифрата 0 и притоа имаме $205 \cdot 206 = 42230$, т.е. најмалата вредност на A е 4. Цифрата A е најголема ако на местата на $*$ во множителите е цифрата 9 и притоа имаме $295 \cdot 296 = 87320$, па затоа $A = 8$. Но цифрата A може да биде 5, 6 или 7, што може да се види од следниве примери:

$$235 \cdot 236 = 55460,$$

$$255 \cdot 256 = 65280,$$

$$275 \cdot 276 = 75900.$$

Според тоа, цифрата A може да прими 5 вредности.

51. Горјан точно помножил трицифрен и двоцифрен број, а потоа две од цифрите ги заменил со ѕвездички и добил: $\overline{13*} \cdot 6 = \overline{*34}$. Определи го збирот на цифрите кои се заменети со ѕвездичките.

Решение. За да производот на единиците биде 4 на местото на ѕвездичката на трицифрениот множител треба да биде цифрата 4 или цифрата 9. Ако е цифрата 4, добиваме $134 \cdot 6 = 804$, што не е точно. Затоа, $139 \cdot 6 = 834$, па бараниот збир е еднаков на $9 + 8 = 17$.

52. Реши го бројниот ребус во кој на исти бујви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$B + \overline{AAAA} + \overline{AAAA} = \overline{BAAAA}.$$

Решение. При собирање на два едноцифрени број збирот е помал од 19, па затоа збирот на илјадитите е помал или еднаков на 19, т.е. $B = 1$. Сега имаме:

$$1 + \overline{AAAA} + \overline{AAAA} = \overline{1AAAA}$$

$$1 + \overline{AAAA} + \overline{AAAA} = 10000 + \overline{AAAA}$$

$$\overline{AAAA} = 9999,$$

односно

$$1 + 9999 + 9999 = 19999.$$

53. Реши го бројниот ребус во кој на исти цифри соодветствуваат исти букви, а на различни цифри соодветствуваат различни букви:

$$\overline{A} + \overline{AB} + \overline{BB} + \overline{ABBB} = \overline{ADD5}.$$

Решение. Јасно, $A=1$. Сега од собирањето на единиците следува дека цифрата на единиците на изразот $3B+1$ е еднаква на 5. Последното е можно ако и само ако $B=8$. Конечно, добиваме

$$1+18+88+1888=1995.$$

54. Реши го бројниот ребус $\overline{a51} - \overline{1b3} = \overline{62c}$ во кој на различните букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Дадениот ребус го запишуваме во видот: $\overline{a51} = \overline{1b3} + \overline{62c}$. Од собирањето на единиците имаме $c+3=11$, па затоа $c=8$ и ребусот е $\overline{a51} = \overline{1b3} + 628$. Сега, од собирањето на десетките имаме $b+2+1=5$, па затоа $b=2$ и ребусот е $\overline{a51} = 123 + 628$. Од последното равенство наоѓаме $a=7$, што значи решението е $751-123=628$.

55. Реши го бројниот ребус

$$A + \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = \overline{1CC3}$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Јасно $A=1$. Бидејќи при собирање на единиците памтиме 1 или 2, од собирањето на десетките следува $1+A+B+C=10+C$ или $2+A+B+C=10+C$, па затоа $B=8$ или $B=7$. Ако $B=8$, тогаш од собирањето на стотките следува $C=A+B+1=10$, што не е можно бидејќи C е цифра. Значи, $B=7$, па затоа $C=A+B+1=9$ и $D=6$. Конечно, решението на ребусот е

$$1+17+179+1796=1993.$$

56. Реши го бројниот ребус

$$A + \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = 1989,$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Од собирањето на илјадитите следува дека $A=1$ и ако замениме во бројниот ребус, по средувањето добиваме

$$B + \overline{BC} + \overline{BCD} = 878, \text{ т.е. } 111B + 11C + D = 878.$$

Понатаму, ако $B < 7$, тогаш $111B + 11C + D < 800$, а ако $B > 8$, тогаш $111B + 11C + D > 888$, што е противречност. Затоа $B=7$ и добиваме $11C + D = 101$. Значи, $C=9$ и $D=2$. Конечно,

$$1+17+179+1792=1989.$$

57. Определи го бројот $\overline{ABC}$ ако $C + B = A - B$ и $\overline{CCB} \cdot B = \overline{BAB}$ при што на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Од равенството $\overline{CCB} \cdot B = \overline{BAB}$ следува дека $B \in \{0, 1, 5, 6\}$, но $B \neq 0, 1$. Според тоа, B е 5 или 6. За да производот е трицифрен број, мора да е $C = 1$. Сега, ако $B = 6$, тогаш од $C + B = A - B$ следува $A = 8$. Меѓутоа $116 \cdot 6 \neq 686$. Ако $B = 5$, тогаш од $C + B = A - B$ добиваме $A = 7$ и притоа важи $115 \cdot 5 = 575$.

58. Реши го бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$\overline{AAA} + \overline{BB} + \overline{CC} = \overline{CDAB}.$$

Решение. Бидејќи збир на три едноцифрени броеви е помал од 27, при собирање на десетките преносот може да биде најмногу 2, па затоа при собирање на стотките збирот е помал или еднаков на 11. Според тоа, $C = 1$. Сега од собирањето на единиците имаме $A + B + C = 10 + B$ и како $C = 1$, добиваме $A = 9$. Од собирањето на десетките имаме $A + B + C + 1 = 10 + A$, па затоа $B = 8$. Конечно, од $A + 1 = \overline{CD}$ добиваме $D = 0$, па затоа

$$999 + 88 + 11 = 1098.$$

59. Реши го бројниот ребус

$$\overline{ABC} + \overline{BC} + C = 518$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри (Запишаните броеви се трицифрен, двоцифрен и едноцифрен.). Определи го збирот $A + B + C$.

Решение. Производот $3 \cdot C$ завршува на 8 ако и само ако $C = 6$, па затоа $\overline{AB6} + \overline{B6} + 6 = 518$ од каде добиваме $\overline{AB0} + \overline{B0} = 500$. Сега, производот $2 \cdot B$ завршува на 0, па затоа $B = 5$ и конечно $A = 4$. Според тоа, $456 + 56 + 6 = 518$ и $A + B + C = 4 + 5 + 6 = 15$.

60. Реши го бројниот ребус

$$\overline{SM} + \overline{MT} + \overline{TS} = \overline{SMT},$$

во кој на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.

Решение. Од собирањето на единиците добиваме $M + T + S = T$ или $M + T + S = 10 + T$ или $M + T + S = 20 + T$. Ако $M + T + S = T$, тогаш

$M + S = 0$, што е противречност, а ако $M + T + S = 20 + T$, тогаш $M + S = 20$, што повторно е противречност. Значи, $M + T + S = 10 + T$, односно $M + S = 10$. Сега збирот на цифрите на десетките е еднаков на $M + S + T + 1 = 11 + T$, па затоа $11 + T = 10S + M$. Ако $T = 9$, тогаш $S = 2$ и $M = 0$, што не е можно бидејќи $M + S = 10$. Значи, $T < 9$, па затоа $S = 1$ и $S = 10 - 1 = 9$. Конечно, од $11 + T = 10S + M$ добиваме $11 + T = 19$, т.е. $T = 8$. Значи, $19 + 98 + 81 = 198$.

61. Реши го бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$\overline{SMT} + \overline{MT} + T = \overline{TTT}.$$

Решение. Од собирањето на цифрите на единиците добиваме $3T = T$ или $3T = 10 + T$ или $3T = 20 + T$. Од првото равенство добиваме $T = 0$ што не е можно (Зошто?). Од третото равенство следува $T = 10$, што повторно не е можно бидејќи T е цифра. Значи, $3T = 10 + T$, од каде добиваме $T = 5$ и сега ребусот го има видот $\overline{SM5} + \overline{M5} + 5 = 555$. Од последното равенство добиваме $5S + M = 27$. Но, S и M се цифри и како $S \neq 5$ од последното равенство следува $S = 4$ и $M = 7$. Конечно, решението на ребусот е:

$$475 + 75 + 5 = 555.$$

62. Реши го бројниот ребус

$$\overline{ABCD} + \overline{ABC} + \overline{AB} + A = 4321,$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Од условот на задачата слеува

$$\begin{aligned} 4321 &= \overline{ABCD} + \overline{ABC} + \overline{AB} + A \\ &= 1000A + 100B + 10C + D + 100A + 10B + C + 10A + B + A \\ &= 1111A + 111B + 11C + D. \end{aligned}$$

Од последното равенство следува $2 < A < 4$, т.е. $A = 3$. Понатаму, $111B + 11C + D = 988$, па затоа $7 < B < 9$, т.е. $B = 8$. Сега добиваме $11C + D = 100$, од каде следува $C = 9$ и $D = 1$. Конечно,

$$3891 + 389 + 38 + 3 = 4321.$$

63. Реши го бројниот ребус

$$\overline{AB} + \overline{ABB} + \overline{CBBC} = \overline{BCDC}$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Од збирот на единиците следува дека $B + B + C$ завршува на цифрата C , па затоа $B = 0$ или $B = 5$. Но, B е прва цифра на збирот, па затоа $B \neq 0$, што значи дека $B = 5$. Имаме

$$\overline{A5} + \overline{A55} + \overline{C55C} = \overline{5CDC},$$

од каде заклучуваме дека $C = 4$, т.е. $\overline{A5} + \overline{A55} + 4554 = \overline{54D4}$. Според тоа, $11A = 79 + D$. Конечно, од последното равенство следува $A = 8$ и $D = 9$, па бараното собирање е

$$85 + 855 + 4554 = 5494.$$

64. Во бројниот ребус

$$\overline{NAF} + \overline{NIF} + \overline{NUF} = \overline{UFFF}$$

на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри. Ако $N = 8$, определи го збирот $A + I$.

Решение. Јасно, $U = 2$, па затоа ребусот го добива обликот:

$$\overline{8AF} + \overline{8IF} + \overline{82F} = \overline{2FFF}.$$

Понатаму, бидејќи производот $3F$ има цифра на единици F , а $F \neq 0$ добиваме дека $F = 5$. Според тоа, ребусот сега го добива обликот

$$\overline{8A5} + \overline{8I5} + 825 = 2555,$$

од каде лесно се заклучува дека $A + I = 12$.

65. Реши го бројниот ребус

$$\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 2016,$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Јасно, $a = 1$, бидејќи ако $a = 2$, тогаш лесно се гледа дека $b = 0$, од каде ќе следува дека $c = 0$ и $d = 4$, што е противречност. Сега ребусот го добива видот

$$\overline{1bcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 2016,$$

односно $2 \cdot \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 1016$, од каде добиваме $b = 5$ или $b = 4$. Ако $b = 5$, тогаш $c = 0$ и $d = 4$. Но тогаш $\overline{cd} = 04$ и ова не е двоцифрен број. Значи, $b = 4$ и ребусот го добива видот

$$3 \cdot \overline{cd} + d = 216.$$

Јасно, $5 < c < 8$ и ако $c = 7$, тогаш добваме $4d = 6$, што не е можно, па затоа $c = 6$ и $d = 9$. Конечно, решението на ребусот е

$$1469 + 469 + 69 + 9 = 2016 .$$

66. Реши го бројниот ребус

$$\overline{ABCD} + \overline{BCD} + \overline{BD} + D = 2008$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Единствена можност за A е 1. Сега равенството можеме да го запишеме во видот $\overline{BCD} + \overline{BCD} + \overline{CD} + D = 1008$. Понатаму, ако $B \geq 5$, тогаш $\overline{BCD} + \overline{BCD} \geq 520 + 520 > 1008$, што не е можно. Ако пак $B \leq 3$, тогаш $\overline{BCD} + \overline{BCD} + \overline{BD} + D \leq 398 + 398 + 38 + 8 < 1008$, што повторно не е можно. Значи, $B = 4$ и равенството го добива видот $2\overline{CD} + 2D = 168$, од каде лесно добиваме $C = 8$ и $D = 2$. Конечно, имаме $1482 + 482 + 42 + 2 = 2008$.

67. Реши го бројниот ребус

а) $A + \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = 2001$,

б) $A + \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = 2002$,

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Аналогно како во претходната задача се добиваат решенијата:

а) $1 + 18 + 180 + 1802 = 2001$,

б) $1 + 18 + 180 + 1803 = 2002$.

68. Дешифрирај го бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$\overline{ABCC} + \overline{CCBA} = \overline{ADCEB} .$$

Решение. Збирот на два четирицифрени броеви е секогаш помал од 20000, па затоа $A = 1$. Бидејќи $A = 1$, C мора да биде 8 или 9, бидејќи само во овои случаи добиваме збир поголем од 10000. Ако $C = 9$, тогаш од $1 + 9 = 10$ следува $B = 0$ и како $C + B = 9 + 0 + 1 = 10$, добиваме $E = 0$, што не е можно. Значи, $C = 8$, па затоа $C + A = 8 + 1 = 9 = B$. Тогаш $B + C = 9 + 8 = 17$, па затоа $E = 7$. Конечно, собирањето е $1988 + 8891 = 10879$.

69. Реши го бројниот ребус

а) $\overline{AACB} - \overline{ABC} - \overline{AB} - A = 2001$,

$$\text{б) } \overline{AACB} - \overline{ABC} - \overline{AB} - A = 2002,$$

$$\text{в) } \overline{AADB} - \overline{ABC} - \overline{AB} - A = 2003.$$

во кој на исти букци соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. а) Од $\overline{AACB} - 2001 < 1000$, заклучуваме дека $A = 3$ или $A = 2$. Ако $A = 3$, тогаш

$$\overline{AACB} - \overline{ABC} - \overline{AB} - A = \overline{33CB} - \overline{3BC} - \overline{3B} - 3 > 2800$$

па затоа во овој случај немаме решение на задачата. Ако $A = 2$, тогаш $10(C - B) = 23 + C$, од каде следува $C = 7$. Според тоа, $10(7 - B) = 30$, па затоа $B = 4$. Конечно, $2274 - 247 - 24 - 2 = 2001$.

б) Задачата се решава аналогно како под а) и се добива дека ребусот има единствено решение $2263 - 236 - 23 - 2 = 2002$.

в) Задачата се решава аналогно како под а) и се добива дека ребусот има пет решенија и тоа:

$$2230 - 205 - 20 - 2 = 2003,$$

$$2241 - 215 - 21 - 2 = 2003,$$

$$2263 - 235 - 23 - 2 = 2003,$$

$$2274 - 245 - 24 - 2 = 2003,$$

$$2296 - 265 - 26 - 2 = 2003.$$

70. Реши го бројниот ребус, во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$A + \overline{AB} + \overline{ABB} + \overline{ABBC} = \overline{DDA3}.$$

Решение. Збирот на два различни едноцифрени броја е помал или еднаков на 17, па затоа при собирањето на стотките имаме пренос 1, што значи дека $D = A + 1$. Слично при собирањето на десетките имаме пренос 1 или 2, па затоа $A + B + 1 = 10 + D$ или $A + B + 2 = 10 + D$. Но, $D = A + 1$, па ако замениме во претходните две равенки добиваме $D + B = 10 + D$ или $D + B + 1 = 10 + D$, т.е. $B = 10$ или $B = 9$. Сега, бидејќи B е цифра, имаме $B = 9$. Според тоа,

$$A + \overline{A9} + \overline{A99} + \overline{A99C} = \overline{DDA3}$$

и ако замениме $D = A + 1$, добиваме

$$A + 10A + 9 + 100A + 99 + 1000A + 990 + C = 1100(A + 1) + 10A + C,$$

т.е. $A + C = 5$. Но, цифрата 3 е веќе искористена и како $A \geq 1$, од последната равенка добиваме $A = 1, C = 4$ или $C = 1, A = 4$. Конечно, задачата има две решенија и тоа:

$$1+19+199+1994=2213 \text{ и } 4+49+499+4991=5543 .$$

71. Реши го ребусот

$$\overline{OBOROT} + \overline{OBOROT} = \overline{KOLELO}$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Од собирањето на единиците следува дека цифрата O е парна, а од собирањето на стоилјадитите следува дека $O < 5$. Според тоа, $O = 2$ или $O = 4$. Значи, во декадните единици во кои учествува O нема пренос. Одделно ќе ги разгледаме двата случаја. Ако $O = 2$, тогаш $T = 1$, $B = 6$ или обратно $T = 6$, $B = 1$. Ако $T = 1$, $B = 6$, тогаш добиваме $L = 4$, $K = 5$, но сега за R нема погодна цифра. Ако $T = 6$, $B = 1$, тогаш како и претходно наоѓаме $L = 4$, $K = 5$. За да имаме соодветен пренос треба да е $R \geq 5$ и лесно се добива дека единствена можност е $R = 9$, $E = 8$. Според тоа, во овој случај решението е $212926 + 212926 = 425852$. Ако $O = 4$, тогаш со аналогни размислувања добиваме уште две решенија и тоа:

$$424547 + 424547 = 849094 \text{ и } 474342 + 474342 = 948684 .$$

72. Реши го ребусот

$$\overline{ATAKA} + \overline{UDAR} + \overline{UDAR} = \overline{NOKAUT}$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Ако $A \leq 7$, тогаш збирот на левата страна е помал од 100000, па не може да е шестцифрен број. Освен тоа,

$$\overline{ATAKA} + \overline{UDAR} + \overline{UDAR} < 99999 + 9999 + 9999 < 119997 ,$$

па затоа единствена можност е $N = 1$ и $O = 0$. Освен тоа, од собирањето на стотките следува дека $A + D + D +$ (евентуален пренос) треба да завршува на A . Последното не е можно ако преносот е 1, но преносот не може и да отсуствува бидејќи при собирање на десетките имаме две A . Значи, преносот при собирањето на стотките мора да е 2, па затоа $D + D + 2$ завршува на 0, што е можно само ако $D = 4$ или $D = 9$. Ако $D = 9$, тогаш мора да е $A = 8$. Но, тогаш збирот $T + U + U + 2$ е помал или еднаков на 22, па затоа $K = 2$. Но, тогаш од собирањето на десетките не можеме да добиеме пренос 2, кој ни е потребен за собирање на стотките. Затоа $D = 4$. Ако $A = 8$, тогаш цифрата T е парна. Сега за да важи $T + U + U > 20$ мора да е $U = 9$.

Сега лесно се гледа дека за останатите две парници цифри 2 и 6 за T не добиваме соодветни вредности за R и K . Останува можноста $D=4$ и $A=9$. Во овој случај T е непарна цифра, а K е парна. Со разгледување на останатите можности се добива решението

$$93989 + 7492 + 7492 = 108973.$$

73. На местото на ѕвездичките запиши ги сцифрите од 0 до 9 така што секоја цифра ќе ја искртистиш точно еднаш, ќе добие точно одземање и намаленикот ќе биде најголем:

$$****_ - **** = **.$$

Решение. Бидејќи сите цифри се различни ѕвездичките ќе ги замениме со букви и равенството го запишуваме во видот

$$\overline{abcd} - \overline{efgh} = \overline{ij}.$$

За да биде разликата двоцифрен број, бидејќи цифрите се различни, потребно е да се исполнети равенствата $a=e+1$ и $10+b-1=f$. Но, b и f се цифри, па последното е можно само ако $b=0$ и $f=9$.

Значи, ребусот го добива видот $\overline{a0cd} - \overline{e9gh} = \overline{ij}$. Бидејќи бараме намалителот да е најголем, а 8 е најголемата неискористена цифра првата можност е $a=8$ и $e=7$, па тогаш ребусот го добива видот $\overline{80cd} - \overline{79gh} = \overline{ij}$. За останатите цифри можни се следниве случаи: $d-h=j$, $10+c-g=i$ или $10+d-h=j$, $9+c-g=i$, при што и во двата случаја $g>c$. Ги разгледуваме сите случаи за цифрите c, d, g, h, i и j и заклучуваме дека во овие случаи не се добива решение на ребусот. Аналогно ја отфрламе можноста $a=7, e=6$. За $a=6, e=5$ се добиваат осум решенија на ребусот. Притоа најголемата вредност на намаленикот е 6021 и бараното решение на ребусот е $6021 - 5984 = 37$.

74. Реши го бројниот ребус

$$A \cdot A \cdot A = \overline{ONA}$$

во кој на исти букци соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Со едноставна проверка на сите можности за цифрата A ги добиваме решенијата:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125, \quad 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216, \quad 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729.$$

75. Реши го бројниот ребус во кој на исти цифри соодветствуваат исти букви, а на различни цифри соодветствуваат различни букви:

$$\begin{array}{r} \overline{ABA} \cdot \overline{AA} \\ \hline \end{array}$$

$$\overline{ABA}$$

$$\begin{array}{r} \overline{ABA} \\ \hline \end{array}$$

$$\overline{A99A}$$

Решение. Очигледно $A=1$, Понатаму, од $A+B=9$ следува $1+B=9$, т.е. $B=8$. Конечно, $181 \cdot 11 = 1991$.

76. Реши го бројниот ребус

$$\overline{MA} \cdot M \cdot A = \overline{AAA}$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Имаме

$$\overline{MA} \cdot M \cdot A = \overline{AAA}$$

$$\overline{MA} \cdot M \cdot A = 111A$$

$$\overline{MA} \cdot M = 111$$

$$\overline{MA} \cdot M = 3 \cdot 37.$$

Но, бројот 37 не се дели со ниту еден природен број различен од 1 и 37, па од последното равенство следува $M=3$ и $A=7$. Конечно, решението на дадениот броен ребус е: $37 \cdot 3 \cdot 7 = 777$.

77. Реши го бројниот ребус

$$\overline{abcd} \cdot 9 = \overline{dcba},$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Јасно, $a=1$, бидејќи ако $a>1$, тогаш производот $\overline{abcd} \cdot 9$ ќе биде петцифрен број. Сега од $\overline{1bcd} \cdot 9 = \overline{dcbl}$ следува дека $9d$ завршува на 1, па затоа $d=9$. Значи, $\overline{1bc9} \cdot 9 = \overline{9cbl}$. Бидејќи $b \neq 1$ и $c \neq 9$ од $9 \cdot 1b \leq 9c$ добиваме дека $b=0$. Според тоа, $\overline{10c9} \cdot 9 = \overline{9c01}$ и како бројот $\overline{9c01}$ е делив со 9, добиваме дека збирот $9+c+0+1=10+c$ е делив со 9, па затоа $c=8$. Конечно, $1089 \cdot 9 = 9801$.

78. Реше го бројниот ребус: $\overline{5a} \cdot \overline{8b} = \overline{cd46}$, во кој $a > b$.

Решение. За да цифрата на единиците на производот биде еднаква на 6 потребно е цифрите на единиците на множителите да се 1 и 6, или 2 и 3, или 6 и 6, или 7 и 8, или 4 и 9. Бидејќи $a > b$, случајот 6 и 6 отпаѓа, а во останатите случаи заради $a > b$ добиваме: $56 \cdot 81 = 4536$ и ова не е решение, $53 \cdot 82 = 4346$ и ова е решение на бројниот ребус, $58 \cdot 87 = 5046$ и ова е решение на бројниот ребус и $59 \cdot 84 = 4956$ и ова не е решение на бројниот ребус. Конечно задачата има две решенија и тоа: $53 \cdot 82 = 4346$ и $58 \cdot 87 = 5046$.

79. Дешифрирај го множењето: $\overline{abcde} = \overline{ee} \cdot \overline{eaa}$, во кое на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Ако $e \leq 2$, тогаш производот на десната страна на равенството не може да биде петцифрен број. Потоа, производот $e \cdot a$ треба да има цифра на единици e , па затоа ако $e = 3, 7$ или 9 , тогаш единствена можност за a е 1. Од овие три случаи добиваме едно решение и тоа $33 \cdot 311 = 10263$. Ако $e = 4, 6$ или 8 , тогаш $a = 1$ или 6 . Со непосредна проверка добиваме дека во овие случаи немаме решение. Конечно, ако $e = 5$, тогаш

$$27500 = 55 \cdot 500 \leq \overline{ee} \cdot \overline{eaa} \leq 55 \cdot 599 = 32945,$$

па затоа $a = 2$ или $a = 3$. Непосредно проверува дека и во двата случаи немаме решение на дадениот ребус.

80. Во равенството $** \cdot * - * = 2$ на местото на ѕвездичките стави соодветни цифри така што ќе се добие точно равенство.

Решение. Од $** \cdot * - * = 2$ следува $** \cdot * = 2 + *$. На левата страна на последното равенство имаме производ на двоцифрен и едноцифрен број и тоа е двоцифрен број. Значи, $2 + *$ е двоцифрен број, што е можно само ако на местото на ѕвездата е бројот 8 или бројот 9, т.е. ако $2 + 8 = 10$ или $2 + 9 = 11$. Според тоа, задачата има две решенија и тоа $10 \cdot 1 - 8 = 2$ или $11 \cdot 1 - 9 = 2$.

81. Дешифрирај го множењето

$$\begin{array}{r} ** \cdot ** \\ \hline ** \\ 97 \\ \hline 1*** \end{array}$$

Решение. Бројот 97 не се дели со ниту еден природен број, па затоа од множењето со десетките следува дека првиот множител е еднаков на 97, а цифрата на десетките на вториот множител на единиците е еднаква на 1. Сега е јасно дека и цифрата на единиците на првиот множител е еднаква на 1, па затоа имаме $97 \cdot 11 = 1067$.

82. На местата на ѕвездичките стави ги потребните цифри така што множењето ќе биде точно $\overline{*4*} \cdot 15 = \overline{3*9*}$.

Решение. Производот е делив со 15, што значи дека тој е делив со 3 и со 5. Од деливоста со 5 следува дека цифрата на единиците во четирицифрениот број може да биде 0 или 5. Ако цифрата на единиците е 0, тогаш од деливоста со 3 следува дека цифрата на стотките може да биде 0, 3, 6 или 9, т.е. во овој случај производот е еден од броевите 3090, 3390, 3690 или 3990. Ако цифрата на единиците е 5, тогаш слично се добива дека цифрата на стотките може да биде 1, 4 или 7, т.е. производот е еден од броевите 3195, 1495 или 3795. Конечно, од

$$3090:15 = 206, \quad 3390:15 = 226, \quad 3690:15 = 246, \quad 3990:15 = 266,$$

$$3195:15 = 213, \quad 3495:15 = 233, \quad 3795:15 = 253,$$

следува дека единствено решение на задачата е $246 \cdot 15 = 3690$.

83. Дешифрирај го делењето

$$**** \cdot *7 = **$$

$$\begin{array}{r} **5 \\ \hline ** \\ *1 \\ 0 \end{array}$$

така што на местата на ѕвездичките ќе ставиш соодветни цифри.

Решение. Првата цифра на количникот е 5, бидејќи само во тој случај производот $*7$ завршува на цифрата 5. За да определиме втората цифра на количникот забележуваме дека $*7 \cdot * = *1$, што е можно само ако едноцифрениот множител е еднаков на 3. Значи, втората цифра на количникот е 3 и добиваме

$$**** \cdot *7 = 53$$

$$\begin{array}{r} **5 \\ \hline ** \\ *1 \\ 0 \end{array}$$

Понатаму, бидејќи $*7 \cdot 3 = *1$ заклучуваме дека првата цифра на делителот е помала од 3 (во спротивно $37 \cdot 3 = 111 > 100$) и е поголема од 1 (во спротивно $5 \cdot 17 = 85 < 100$). Значи, втората цифра на делителот е 2, па како $27 \cdot 53 = 1431$ добиваме

$$1431 : 27 = 53$$

$$\begin{array}{r} 135 \\ \hline \end{array}$$

$$81$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \hline \end{array}$$

$$0.$$

84. На местото на ѕвездичките стави ги потребните цифри така што множењето $*8** \cdot 45 = \overline{26*17*}$ ќе биде точно

Решение. Бројот е делив со 45, што значи дека е делив со 5 и со 9. Последното значи дека неговата цифра на единиците е 0 или 5, а збирот на цифрите му е делив со 9. Ако цифрата на единиците 0, тогаш бидејќи збирот $*+16$ треба да е делив со 9 го добиваме бројот 262170, а ако цифрата на единиците е 5, тогаш збирот $*+21$ треба да е делив со 9 и го добиваме бројот 266175. Во првиот случај има $262170 : 45 = 5826$, а во вториот имаме $266175 : 45 = 5915$ и овде цифрата на единиците на првиот множител не е 8. Конечно, решение на задачата е $5826 \cdot 45 = 262170$.

85. Реконструирај го множењето:

$$\begin{array}{r} ** \cdot *** \\ \hline *** \\ ** \\ + *** \\ \hline 62*7* \end{array}$$

Решение. Првата цифра на третиот производ е 6, па затоа непознатиот двоцифрен множител ќе биде поголем или еднаков на $600 : 9 > 66$. Но, според вториот производ овој двоцифрен множител има содржател кој е двоцифрен број и има цифра на десетките 8, а тоа е можно само ако цифрата на десетките на трицифрениот множител е 1, а двоцифрениот множител е од видот $8*$. Сега, од неравенството $6 < 600 : 89$ и $629 : 80 < 8$ следува дека цифрата на стотките на трицифрениот множител е 7, па ребусот го прима обликот:

$$\begin{array}{r}
 8^* \cdot 71^* \\
 *** \\
 8^* \\
 + *** \\
 \hline
 62^* 7^*
 \end{array}$$

Но, $85 < 600 : 7$, па затоа двоцифрениот множител ќе биде некој од броевите 86, 87, 88 или 89. Ако двоцифрениот множител е 86, тогаш ребусот го добивам обликот

$$\begin{array}{r}
 86 \cdot 71^* \\
 *** \\
 86 \quad , \\
 + 602 \\
 \hline
 62^* 7^*
 \end{array}$$

што не е можно бидејќи од собирањето $^* + 8 + 2$ не може да се добие пренос 2. Ако двоцифрениот множител е 87, тогаш го добиваме следно решение на ребусот

$$\begin{array}{r}
 87 \cdot 717 \\
 609 \\
 87 \\
 + 609 \\
 \hline
 62379.
 \end{array}$$

Од другите две можности не се добива решение на ребусот, па затоа најденото решение е единствено.

86. Во ребусот $\overline{KEN} = G \cdot U + R \cdot U$ на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат различни цифри. Определи ја разликата меѓу најголемиот и најмалиот можен трицифрен број $\overline{KEN}$.

Решение. Ако ребусот го запишеме во видот

$$\overline{KEN} = (G + R) \cdot U$$

добиваме дека трицифрениот број $\overline{KEN}$ е производ на едноцифрен број со збирот на два различни едноцифрени броја. Бидејќи збирот на два различни едноцифрени броја е помал или еднаков на $9 + 8 = 17$ заклучуваме дека $U \geq 6$. Можни се следниве случаи:

- 1) Ако $U = 6$, тогаш од $\overline{KEN} = 6(G + R)$ следува $G + R = 17$, па затоа $(G + R) \cdot U = (9 + 8) \cdot 6 = 102 = \overline{KEN}$ е едно решение на задачата.
- 2) Ако $U = 7$, тогаш од $\overline{KEN} = 7(G + R)$ следува $G + R = 15, 16, 17$, па затоа $(G + R) \cdot U = (9 + 6) \cdot 7 = 105 = \overline{KEN}$ е едно решение на задачата, а за $G + R = 16$ и $G + R = 17$ не се добива решение на задачата.
- 3) Ако $U = 8$, тогаш од $\overline{KEN} = 8(G + R)$ следува $G + R = 13, 14, 15, 16$, па затоа $(G + R) \cdot U = (7 + 6) \cdot 8 = 104 = \overline{KEN}$ е едно решение на задачата, $(G + R) \cdot U = (9 + 6) \cdot 8 = 120 = \overline{KEN}$ е друго решение на задачата, а за $G + R = 14$ и $G + R = 16$ не се добива решение на задачата.
- 4) Ако $U = 9$, тогаш од $\overline{KEN} = 9(G + R)$ следува $G + R = 12, 13, 14, 15$, па затоа $(G + R) \cdot U = (7 + 5) \cdot 9 = 108 = \overline{KEN}$ е едно решение на задачата, $(G + R) \cdot U = (8 + 7) \cdot 9 = 135 = \overline{KEN}$ е друго решение на задачата, а за $G + R = 13$ и $G + R = 14$ не се добива решение на задачата.
- Клучно, бараната разлика меѓу најголемиот и најмалиот трицифрен број $\overline{KEN}$ е $135 - 102 = 33$.

1.3. РАСПОРЕДУВАЊА, МАГИЧНИ ФИГУРИ

87. Броевите 21, 22, 23 ... 31, 32 се запишани во три колони. Во секоја колона има еднаков број броеви и збирот на броевите запишани во секоја колона е еднаков. Определи го збирот на броевите запишани во секоја колона.

Решение. Имаме $32 - 20 = 12$ броеви кои се запишани во три колони. Според тоа, во секоја колона се запишани по 4 броја. Збирот на сите броеви е еднаков на

$$\begin{aligned} 21 + 22 + 23 + \dots + 31 + 32 &= (21 + 32) + (22 + 31) + \dots + (26 + 27) \\ &= 6 \cdot 53 = 318. \end{aligned}$$

Според тоа, збирот на броевите запишани во секоја од трите колони е еднаков на $318 : 3 = 106$. На пример, во првата колона се запишани броевите 21, 22, 31, 32, во втората колона се запишани броевите 23, 24, 29, 30 и во третата колона се запишани броевите 25, 26, 27, 28.

88. Секоја од цифрите 3, 7 и 9 треба да се запише во едно од квадратчињата на цртежот десно така што производот на двоцифрениот и едноцифрениот број е најголем. Определи го овој производ.

$$\square\square \cdot \square = ?$$

Решение. За да производот биде најголем потребно е цифрите 7 и 9 да се цифрата на десетките на двоцифрениот број и едноцифрениот број или обратно. Притоа, можни се два случаја и тоа: $93 \cdot 7 = 651$ или $73 \cdot 9 = 657$, што значи дека бараниот број е 657.

89. Во квадратчињата запиши ги цифрите од 0 до 9, во секое квадратче по една цифра, така што ќе добиеш точно равенство:

$$\square\square + \square \cdot \square - \square\square : \square = \square\square\square$$

Решение. Задачата има повеќе решенија, како на пример:

$$84 + 5 \cdot 9 - 63 : 7 = 120 \quad \text{или} \quad 97 + 5 \cdot 8 - 42 : 6 = 130.$$

90. Дополни ја фигурата прикажана на цртежот десно така во полињата ќе бидат запишани броевите од 0 до 9 (во секое поле по еден број), а во полињата кои имаат заедничка страна или теме нема да има последователни броеви.

7			
5			4
8			1

Решение. Бројот 3 може да биде запишан во сивото поле или во белото поле над него. Ако бројот 3 е запишан во белото поле, тогаш бидејќи ова поле има заедничка страна или теме со секој од празните правоаголници не можеме во нив да го запишеме бројот 2. Ако бројот 3 е запишан во сивото поле, тогаш бројот 2 мора да го запишеме во десниот голем правоаголник. Сега бројот 0 го запишуваме во полето над сивото поле, лево од сивото поле го запишуваме бројот 6, а над него бројот 9 (цртеж десно). Значи, во сивото поле се наоѓа бројот 3.

7		2	
5	0	9	4
8	3	6	1

91. Во празните квадратчиња на цртежот десно запиши броеви, така што збирот на броевите запишани во секои три соседни квадратчиња е еднаков на 15.

$$5 \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad 6 \quad \square \quad \square$$

Решение. Нека во двете полиња непосредно по бројот 5 се запишани броевите a и b . Тогаш важи $5 + a + b = 15$, па како збирот на броевите запишани во секои три соседни полиња е еднаков, шемата го добива видот:

5	a	b	5	a	b	5	a	b	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Јасно, $a = 6$, па од $5 + a + b = 15$ следува $b = 4$. Конечно, пополнетата шема е:

5	6	4	5	6	4	5	6	4	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

92. Пополни ги празните полиња на цртежот така што збирот на броевите запишани во секои три хоризонтални соседни полиња и секои три вертикални соседни полиња биде еднаков на 12.

	5						
					1		
6							
			2				

Решение. За да збирот на броевите запишани во секои три хоризонтални соседни полиња е еднаков потребно е првата, четвртата и седмата колона да се еднакви, а исто важи и за втората, петтата и осмата колона. Слично добиваме дека првиот и четвртиот ред се еднакви. Така ја добиваме табелата:

2	5		2	5		2	5
		1			1		
6			6			6	
2	5		2	5		2	5

Понатаму, од условот дека збирот на броевите запишани во три соседни хоризонтални или вертикални полиња е еднаков на 12 прво ја добиваме табелата

2	5	5	2	5	5	2	5
4		1	4		1	4	
6		6	6		6	6	
2	5	5	2	5	5	2	5

а потоа табелата

2	5	5	2	5	5	2	5
4	7	1	4	7	1	4	7
6	0	6	6	0	6	6	0
2	5	5	2	5	5	2	5

93. Во секое поле на табелата прикажана на цртежот десно запиши по еден број така што збирот на броевите запишани во секои три хоризонтални и во секои три вертикални полиња ќе биде една-

	7					
				8		

ков на 15.

Упатство. Јасно, првата, четвртата и седмата колона мора да бидат идентични, а исто така и првата и четвртата редица мора да бидат идентични. Понатаму, треба да се искористи фактот дека броевите запишани во секои три соседни хоризонтални и секои три соседни вертикални полиња имаат еднаков збир. Решението на задачата е дадено на цртежот десно.

0	7	8	0	7	8	0
7	8	0	7	8	0	7
8	0	7	8	0	7	8
0	7	8	0	7	8	0

94. Познато е дека квадратот прикажан на цртежот десно е магичен, т.е. збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков. Кој број треба да е запишан на местото на ѕвездичката?

4		2
	5	
	*	

Решение. Првиот ред и втората колона имаат едно заедничко поле, па затоа збирот на броевите запишани во другите две полиња на првиот ред и другите две полиња на втората колона мора да е еднаков. Тоа значи дека на местото на ѕвездичката треба да е запишан бројот $4 + 2 - 5 = 1$.

95. Броевите 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и 11 распореди ги во магичен 3×3 квадрат. Колку изнесува збирот на броевите во секој колона, секој ред и на секоја дијагонала?

Решение. Збирот на сите броеви запишани во магичниот квадрат е еднаков на $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 63$, што значи дека збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков на $63 : 3 = 21$. Распоредот на броевите во магичниот квадрат, на пример, може да се направи ако секој број во магичниот 3×3 квадрат во кој се запишани броевите од 1 до 9 се зголеми за 2.

96. Состави магичен 3×3 квадрат во кој сите запишани броеви се различни природни броеви и чиј карактеристичен збир (збирот во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала) е еднаков на 12.

Решение. Имаме три редици, па затоа збирот на сите броеви запишани во магичниот квадрат е еднаков на $3 \cdot 12 = 36$. Запишаните броеви се природни и различни меѓу себе и бидејќи

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

1	8	3
6	4	2
5	0	7

заклучуваме дека во магичниот квадрат се запишани броевите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8. Едно решение на задачата е дадено на цртежот десно.

97. Први девет парни двоцифрени броеви распореди ги во квадратна 3×3 табела така што ќе добиеш магичен квадрат, т.е. збирот на броевите запишани во секоја редица, секоја колона и на секоја дијагонала ќе биде еднаков.

Одговор. Бараниот магичен квадрата е прикажан на цртежот десно. Можни се и други распореди, меѓутоа во секој можен распоред бројот 10 се наоѓа во централното поле на квадратот.

8	18	4
6	10	14
16	2	12

98. Состави магичен 3×3 квадрат таков што збирот на броевите во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков на 21.

Решение. Задачата има повеќе решенија. Едно од нив е дадено на цртежот десно.

4	9	8
11	7	3
6	5	10

99. Состави магичен 3×3 квадрат во кој се запишани броевите 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 и 14.

Решение. Збирот на сите запишани броеви е еднаков на

$$6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 90,$$

па затоа збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков на $90 : 3 = 30$.

Нека во централното поле е запишан бројот x . Ако ги собереме броевите запишани на двете дијагонали и во средната редица и средната колона тогаш сме ги собрале сите запишани броеви и уште трипати бројот x . Затоа $90 + 3x = 4 \cdot 30$, т.е. $x = 10$. Според тоа, во централното поле треба да го запишеме бројот 10. Останатите броеви ги делиме на четири парови чиј збир е еднаков на 20 и секој пар го распоредуваме во ред, колона или на дијагонала, водејќи сметка збирот на запишаните броеви во секој ред и секоја колона да е еднаков на 30. Едно од можните решенија е прикажано на цртежот десно.

13	6	11
8	10	12
9	14	7

100. Празните полиња во квадратот прикажан на цртежот десно пополни ги со непарните броеви од 13 до 29 така што збирот на броевите запи-

	21	

шани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала ќе биде еднаков.

Решение. Збирот на сите непарни броеви од 13 до 29 е:

$$13+15+17+19+21+23+25+27+29=289.$$

Според тоа, збирот броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала треба да е еднаков на $289:3=63$. Броевите, без бројот 21 ќе ги поделиме на парови 13 и 29, 15 и 27, 17 и 25, 19 и 23. Секој од овие парови треба да го запишеме во некој ред, некоја колона или на некоја дијагонала водејќи сметка збирите во сите редови, сите колони и на сите дијагонали да се еднакви на 63. Со непосредна проверка се добива едно од можните решенија прикажани на цртежот десно.

19	29	15
17	21	25
27	13	23

101. Празните полиња на цртежот десно пополни ги со броевите 0, 4, 8, 10, 12 и 14 така што ќе добиеш магичен квадрат, т.е. квадрат во кој збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков.

2	16	6

Решение. Збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков на $2+16+6=24$. Нека во централното поле на магичниот квадрат е запишан бројот a . Ако ги собереме броевите запишани во средниот ред, средната колона и на двете дијагонали, тогаш добиениот збир е еднаков на збирот на сите броеви запишани во магичниот квадрат зголемен за трикратната вредност на бројот a , па затоа

$$4 \cdot 24 = 0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 3a,$$

од каде наоѓаме $96 = 72 + 3a$, т.е. $a = 8$. Сега во левото поле на третиот ред треба да го запишеме бројот $24 - (6 + 8) = 10$, во средното поле на третиот ред треба да го запишеме бројот $24 - (8 + 16) = 0$ и во десното поле на третиот ред треба да го запишеме бројот $24 - (2 + 8) = 14$. Понатаму, во левото поле на вториот ред треба да го запишеме бројот $24 - (2 + 10) = 12$ и во десното поле на вториот ред треба да го запишеме бројот $24 - (6 + 14) = 4$ (направи цртеж).

102. Дополни го магичниот квадрат прикажан на цртежот десно.

Решение. Нека во централното поле на магич-

		20
21		
14	19	

ниот квадрат е запишан бројот x . Тогаш од втората колона и дијагоналата добиваме дека во горното поле на втората колона е запишан бројот $y = 20 + 14 + x - (x + 19) = 15$. Понатаму, од првата колона и дијагоналата добиваме дека во горното поле на првата колона е запишан бројот

$$z = 20 + x + 14 - (21 + 14) = x - 1,$$

а од третиот ред и дијагоналата следува дека во десното поле на третиот ред е запишан бројот

$x - 1$	15	20
21	x	13
14	19	$x + 1$

$$u = 20 + x + 14 - (14 + 19) = x + 1.$$

Слично се добива во десното поле на вториот ред е запиша бројот

$$v = 15 + x + 19 - (21 + x) = 13,$$

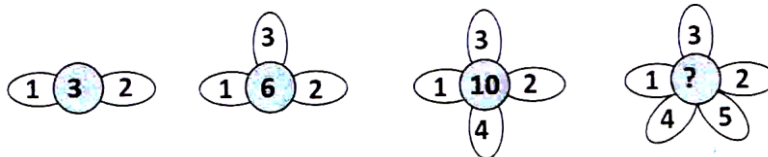
со што го добиваме магичниот квадрат прикажан на горниот цртеж. Сега од двете дијагонали имаме

$$x - 1 + x + x + 1 = 20 + x + 14,$$

па затоа $x = 17$. Конечно, бараниот магичен квадрат е прикажан на цртежот десно.

16	15	20
21	17	13
14	19	18

103. Броевите во цветовите на долните цртежи се запишани според определено правило. Кој број треба да се запише на местото на прашалникот?

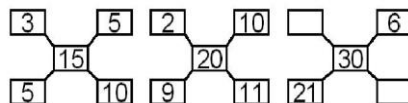


Решение. Имаме, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$ и $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, што значи дека бројот запишан во кругчето е еднаков на збирот на броевите запишани на цветните ливчиња. Според тоа, на местото на прашалникот треба да се запише бројот $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

104. Разгледај ги фигурите прикажани на цртежот десно. Кои броеви недостасуваат во третата фигура?

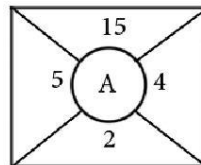
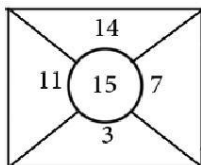
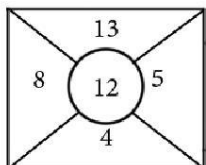
Решение. За првата фигура важи

$3 \cdot 5 = 15 = 5 + 10$, а за втората фигура важи $2 \cdot 10 = 20 = 9 + 11$. Значи правилото е бројот запишан во централното квадратче е еднаков на производот на броевите запишани во горните квадратчиња, т.е. на



збирот на броевите запишани во долните квадратчиња. Според тоа, во горното квадратче на трета фигура треба да е запишан бројот $30:6=5$, а во долното бројот $30-21=9$.

105. Разгледај ги долните цртежи дијаграми. Кој број треба да е запишан на местото на буквата А?



Решение. За броевите на левата и средната фигура важи

$$8+13-(4+5)=12 \text{ и } 11+14-(3+7)=15.$$

Според ова правило на местото на буквата А треба да е запишан бројот

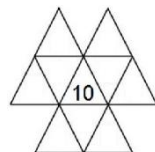
$$5+15-(2+4)=14.$$

106. Во секое квадратче на цртежот десно е запишан по еден број. Збирот на сите запишани броеви е еднаков на 55. Горјан ги собрал броевите од првиот ред и броевите од првата колона, а потоа ги собрал двата збира и добил 67. Бојана ги собрала броевите од вториот ред и броевите од втората колона, а потоа ги собрала двата збира и добила збир 26. Определи го збирот на броевите запишани во третата колона.



Решение. Горјан ги собрал броевите од првиот ред и броевите од првата колона, а Бојана ги собрала броевите од вториот ред и втората колона, што значи дека тие заедно еднаш ги собрале сите запишани броеви и ги собрале броевите запишани во првата и втората колона. Бидејќи добиле збир $67+26=93$, а збирот на сите запишани броеви е еднаков на 55, заклучуваме дека збирот на броевите запишани во првата и втората колона е еднаков на $93-55=38$. Конечно, збирот на броевите запишани во третата колона е еднаков на $55-38=17$.

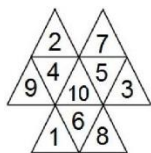
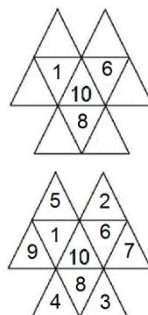
107. Во малите триаголнички запиши ги броевите од 1 до 9 така што збирот на броевите запишани во секој голем триаголник е еднаков на 25.



Решение. Имаме три големи триаголници за кои бројот 10 е заеднички, а останатите три броја се засебни за секој од овие триаголници и уште еден голем триаголник во чие централно триаголничко се содржи бројот 10, а во останатите три

триаголницина се содржи по еден од броевите од првите три големи триаголници.

Значи, броевите од 1 до 9 треба да ги поделиме во три групи, секоја од кои има збир еднаков на $25 - 10 = 15$, и во овие групи се содржат по еден број чиј збир е еднаков на 15. Поедноставно е прво да земеме три броја чиј збир е 15 и да ги распоредиме во централниот квадрат. На пример, нека тоа се броевите 1, 6 и 8 (цртеж десно). Сега во големиот триаголник во кој е бројот 1 треба да запишеме уште два броја чиј збир е еднаков на 14, а тоа мора да се броевите 5 и 9. Останува во

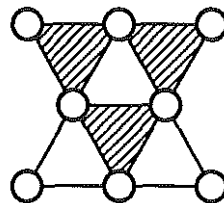


големиот триаголник да запишеме два броја чиј збир е еднаков на 9, а тоа може да се само броевите 2 и 7. Конечно, во големиот триаголник во кој е бројот 8 мора да ги запишеме броевите 3 и 4. На цртежот десно е дадено едно од можните решенија.

Ако, на пример во централниот голем триаголник ги запишеме броевите 4, 5 и 6, чиј збир е еднаков на 15, тогаш со напoлно аналогни размеслувања добиваме уште едно од можните решенија на задачата, кое е прикажано на цртежот лево.

Обиди се да најдеш уште неколку решенија на оваа задача.

108. Во кругчињата на цртежот десно запиши ги броевите од 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8, во секое кругче различен број, така што збирот на броевите запишани во темињата на секој штрафиран триаголник е еднаков на 14, а збирот на броевите запишани во темињата на секој бел триаголник е еднаков на 13.



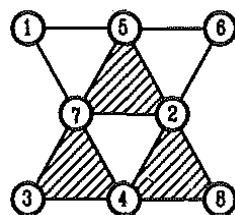
Решение. Ако бројот 8 го запишеме во кругче кое е теме само на бел триаголник, тогаш во останатите две темиња треба да ги запишеме броевите 1 и 4, или броевите 2 и 3. Но овие броеви се наоѓаат во кругчиња кои се темиња на црн триаголник, па затоа за да збирот е 14 во третото кругче треба да го запишеме бројот 9, што не е можно.

Ако бројот 8 го запишеме во кругче кое е теме на два бели и два црни триаголници, тогаш броевите 1 и 4, или броевите 2 и 3 треба да ги запишеме во останатите две темиња на белите триаголници. Но, тогаш еден од двата пара е запишан во темиња на црн триаголник, па повторно треба да го запишеме бројот 9, што е противречност.

Ако бројот 8 го запишеме во кругче кое е теме на два бели и еден црн триаголник, тогаш во темињата на белите триаголници мора да ги запишеме паровите 1, 4 и 2, 3, со тоа што во темињата на црниот триаголник мора да се запишани броевите 2 и 4. Сега во темето на третиот бел триаголник мора да е запишан бројот 7, па во третото теме на еден од црните триаголници мора повторно да се запише бројот 3, што е противречност.

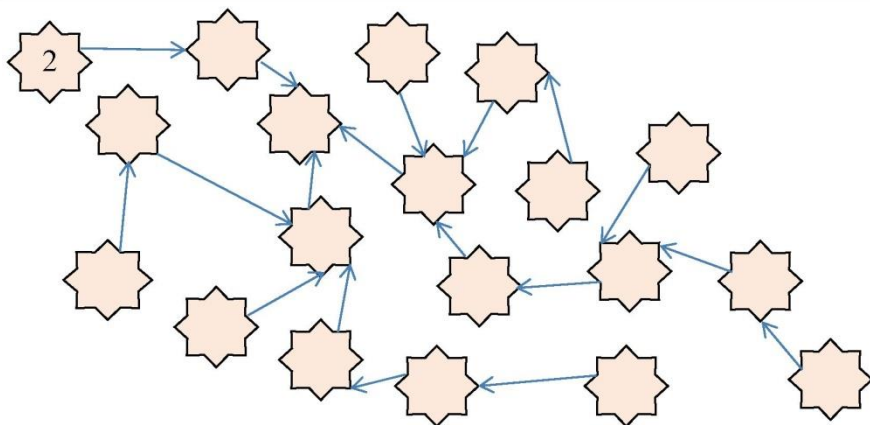
Ако бројот 8 го запишеме во теме кое е заедничко на еден бел и два црни триаголници, тогаш во останатите темиња на црните триаголници мора да ги запишеме броевите 1 и 5, или 2 и 4. Притоа во другите две темиња на белиот триаголник мора да ги запишеме броевите 1 и 4. Но, тогаш во третото теме на третиот црн триаголник треба да го запишеме бројот 9, што е противречност.

Останува бројот 8 да го запишеме во кругче кое е теме само на црн триаголник. Тогаш во другите две темиња на овој триаголник мора да ги запишеме броевите 1 и 5, или броевите 2 и 4. Случајот кога ги запишуваме броевите 1 и 5 доведува до противречност (провери), а при запишување на броевите 2 и 4 само едната можност доведува до решението кое е прикажано на цртежот десно.



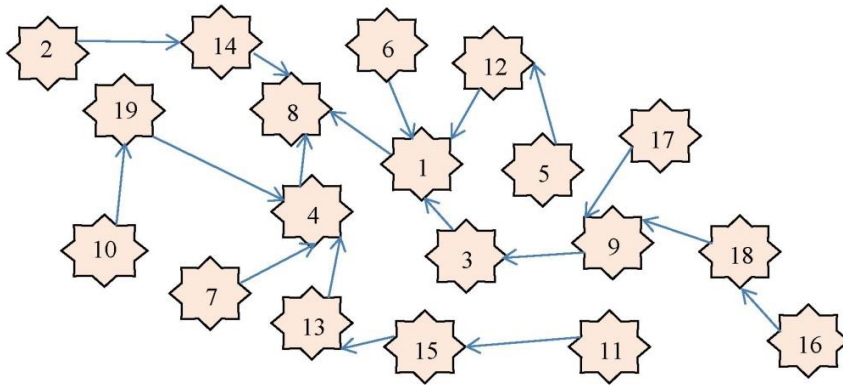
109. а) Во снегулките запиши ги броевите така што ќе ја следиш насоката на стрелката: во првиот ред на табелата е бројот запишан во снегулката на почетокот на стрелката, а во вториот – бројот запишан во снегулката во која стрелката завршува.

↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	8	14	1	8	12	1	4	8	3	19	15	1	4	8	13	18	9	9	4



б) Определи го збирот на сите броеви запишани во снегулките. Запиши го збирот како производ на четири природни броја.

Решение. а) Единствената ѕвезда од која не излегува стрелка е ѕвездата со број 8 и како важи $2 \rightarrow 14 \rightarrow 8$ овие три ѕвезди лесно се пополнуваат. Понатаму, имаме три ѕвезди во кои влегуваат по три стрелки и излегува по една стрелка, која влегува во ѕвездата со број 8, и тоа се ѕвездите 1 и 4. Броевите им се определуваат од должините на веригите кои влегуваат во нив: $16 \rightarrow 18 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ и $11 \rightarrow 15 \rightarrow 13 \rightarrow 4$. Понатаму лесно се определуваат броевите во другите ѕвезди (види цртеж).

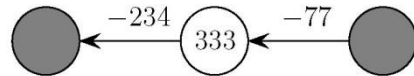


Збирот на броевите запишани во ѕвездите е

$$1 + 2 + 3 + \dots + 18 + 19 = 190 = 10 \cdot 19 = 2 \cdot 5 \cdot 19 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 19.$$

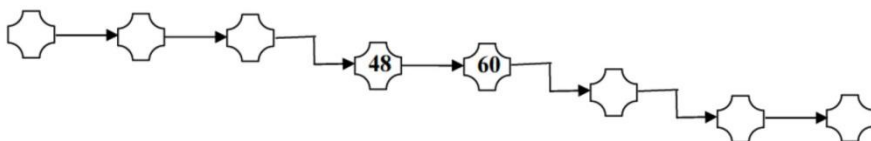
I.5. РАВЕНКИ

110. Кои броеви треба да се запишат во сивите кругчиња. Определи го нивниот збир.



Решение. Во десното сиво кругче треба да се запише бројот $333 + 77 = 410$, а во левото кругче бројот $333 - 234 = 99$. Нивниот збир е $410 + 99 = 509$.

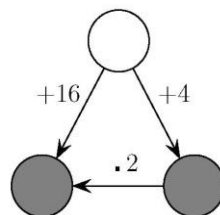
111. Во долната шема пополни ги празните полиња според правилата дадени на цртежот десно.



Опреди го збирот на броевите запишани во првото и последното поле.

Решение. Одејќи напред од полето во кое е запишан бројот 60 последователно треба да ги запишуваме броевите: $60 - 23 = 37$, $37 - 23 = 14$ и $14 + 12 = 26$. Одејќи наназад од полето во кое е запишан бројот 48 последователно треба да ги запишуваме броевите: $48 + 23 = 71$, $71 - 12 = 59$ и $59 - 12 = 47$. Конечно, збирот на броевите запишани во првото и последното поле е $47 + 26 = 73$.

112. Во шемата прикажана на цртежот десно се запишани три броја така што пресметувањата ќе бидат точни. Опреди го збирот на броевите запишани во сивите кругови?



Решение. Ако во левиот сив круг е запишан бројот x , тогаш одејќи во обратната насока од насоката на стрелките добиваме дека во белиот круг треба да е запишан бројот $x - 16$, односно бројот $\frac{x}{2} - 4$. Така ја добиваме равенката $x - 16 = \frac{x}{2} - 4$. Решението на последната равенка е $x = 24$. Според тоа, во сивите кругови се запишани броеите 24 и $\frac{24}{2} = 12$ и нивниот збир е $24 + 12 = 36$.

113. Реши ја равенката:

$$x + 44 = 408 : 4 + 4 \cdot 10.$$

Решение. Имаме:

$$x + 44 = 408 : 4 + 4 \cdot 10,$$

$$x + 44 = 102 + 40,$$

$$x + 44 = 142,$$

$$x = 142 - 44 = 98.$$

114. Пресметај ја вредноста на изразот $A = 1730 + x - (4x + 80) : 5$, ако x е решението на равенката $x - 56 = 224$.

Решение. Имаме $x = 224 + 56 = 280$, па затоа

$$\begin{aligned} A &= 1730 + 280 - (4 \cdot 280 + 80) : 5 \\ &= 2010 - (1120 + 80) : 5 \\ &= 2010 - 240 = 1770. \end{aligned}$$

115. Реши ја равенката: $354 : 3 - 2 \cdot 29 = x - 300$.

Решение. Имаме:

$$354:3 - 2 \cdot 29 = x - 300,$$

$$118 - 58 = x - 300,$$

$$60 = x - 300$$

$$x = 300 + 60 = 360.$$

116. Реши ја равенката: $125 \cdot 3 - x = 2 \cdot 8 + 149$.

Решение. Имаме:

$$125 \cdot 3 - x = 2 \cdot 8 + 149$$

$$375 - x = 16 + 149$$

$$x = 375 - 165$$

$$x = 210.$$

117. Реши ја равенката: $7x = 54:3 + 402$.

Решение. Последователно добиваме

$$7x = 54:3 + 402,$$

$$7x = 18 + 402,$$

$$7x = 420,$$

$$x = 420:7,$$

$$x = 60.$$

118. Реши ја равенката: $2x + 788 = 217 \cdot 4$.

Решение. Имаме

$$2x + 788 = 217 \cdot 4$$

$$2x + 788 = 868$$

$$2x = 868 - 788$$

$$2x = 80$$

$$x = 80:2 = 40.$$

119. Реши ја равенката: $(73 - x) \cdot 5 - 16 = 344$.

Решение. Имаме

$$(73 - x) \cdot 5 - 16 = 344$$

$$(73 - x) \cdot 5 = 344 + 16$$

$$73 - x = 360:5$$

$$x = 73 - 72 = 1.$$

120. Реши ја равенката:

а) $x:4 = 200 - 64$

б) $x:29 = 252$.

Решение. а) Последователно добиваме:

$$x : 4 = 200 - 64$$

$$x : 4 = 136$$

$$x = 136 \cdot 4 = 544.$$

б) Имаме:

$$x : 29 = 252,$$

$$x = 29 \cdot 252,$$

$$x = 7308.$$

121. Реши ја равенката: $x : 29 = 20357 - 19468$.

Решение. Имаме:

$$x : 29 = 20357 - 19468,$$

$$x : 29 = 889,$$

$$x = 29 \cdot 889$$

$$x = 25781.$$

122. Пресметај ја вредноста на изразот $A = 2013 - 13x + (x + 15) : 11$, каде x е решението на равенката $30 : (2x + 1) = 2$.

Решение. Имаме:

$$30 : (2x + 1) = 2,$$

$$2x + 1 = 30 : 2,$$

$$2x = 15 - 1,$$

$$x = 7,$$

па затоа

$$A = 2013 - 13 \cdot 7 + (7 + 15) : 11 = 2013 - 91 + 22 : 11 = 1922 + 2 = 1924.$$

123. Нека

$$4x = 9005 - 8585, \quad 505 : y = 5 \text{ и } z : 6 = 2000 - 1982.$$

Подреди ги броевите x, y и z по големина.

Решение. Имаме:

$$4x = 9005 - 8585,$$

$$505 : y = 5,$$

$$z : 6 = 2000 - 1982$$

$$4x = 420,$$

$$y = 505 : 5,$$

и

$$z = 6 \cdot 18,$$

$$x = 105,$$

$$y = 101,$$

$$z = 108.$$

Според тоа, $y < x < z$.

II ДЕЛИВОСТ

II.1. ДЕЛЕЊЕ СО ОСТАТОК

1. Јордан за украсување на куќата во текот на новогодишните празници на оградата наредил светилки на следниов начин: една сина, две жолти, три зелени, четири црвени, една сина, две жолти, три зелени, четири црвени итн. Тој наредил 250 светилки. Која боја е 137-мата светилка по ред?

Решение. При поставувањето на светилките последователно се повторува група од $1+2+3+4=10$ светилки. Од $137=13\cdot 10+7$ заклучуваме дека 137-та светилка е седмата светилка во групата која се повторува и како $1+2+3=6$ добиваме дека тоа е првата светилка во групата црвени светилки, т.е. тоа е црвена светилка.

2. За дочекот на Новата 2019-та година Вера ја украсила својата куќа со низа од 2019 светилки, во пет различни бои, кои се наредени во редослед: сина, зелена, црвена, портокалова, жолта и потоа редоследот постојано се повторува. Определи ја бојата на последната 2019-та светилка.

Решение. Имаме $2019=5\cdot 403+4$, што значи дека во низата од 2019 светилки групата од 5 светилки во дадениот редослед се повторува 403 пати, а потоа имаме уште 4 светилки во истиот редослед. Четвртата светилка е портокалова, што значи дека и 2019-тата светилка е портокалова.

3. Определи го најмалиот природен број чиј збир на цифри е 2012.

Решение. Најмал природен број е бројот кој има најмалку цифри и чии цифри се подредени по големина во растечки редослед. Бидејќи $2012=9\cdot 223+5$, заклучуваме дека бараниот број е $\underbrace{599\dots 99}_{223}$.

4. Определи ги количникот и остатокот при делењето на изразот

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12+75$$

со бројот 35.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12+75 &= \\ &= 35\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12+35\cdot 2+5 \\ &= 35\cdot (1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12+2)+5 \end{aligned}$$

што значи дека бараниот количник е $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 2$ и остатокот е 5.

5. Определи го бројот кој поделен со 143 дава остаток 132, а поделен со 144 го дава истиот количник и остатокот 108.

Решение. Имаме $x = 143q + 132$ и $x = 144q + 108$, па затоа

$$143q + 132 = 144q + 108,$$

од каде добиваме $q = 24$. Конечно, $x = 143 \cdot 24 + 132 = 3564$.

6. Определи го четирицифрениот број кој поделен со бројот 131 дава остаток 112, а поделен со бројот 132 дава ист количник и остаток 98.

Решение. Нека бараниот број е n и количникот при делењата е q . Од условот на задачата следува $n = 131q + 112$ и $n = 132q + 98$. Според тоа, $131q + 112 = 132q + 98$, од каде наоѓаме $q = 14$. Конечно, бараниот број е $n = 131 \cdot 14 + 112 = 1946$.

7. Ако броевите 263 и 245 ги поделиме со еден ист број, ќе добиеме остатоци 8 и 7, соодветно. Определи го непознатиот делител.

Решение. Според условот на задачата, бараниот број е заеднички делител на броевите $263 - 8 = 255$ и $245 - 7 = 238$. Од $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$ и $238 = 2 \cdot 7 \cdot 17$ следува дека бараниот делител е 17.

8. Ако бројот 860 го поделиме со бројот a се добива остаток 9, а ако го бројот 1200 го поделиме со бројот a се добива остаток 16. Кои количници се добиваат при овие делења?

Решение. Броевите $860 - 9 = 851$ и $1200 - 16 = 1184$ се деливи со бројот a . Јасно, $a > 16$, па од $851 = 37 \cdot 23$ и $1184 = 37 \cdot 32$ следува дека $a = 37$ и бараните количници се 23 и 32.

9. Ако броевите 1199 и 1391 ги поделиме со еден ист број се добиваат остатоци 10 и 28, соодветно. Со кој број сме ги поделиле дадените броеви?

Решение. Броевите $1199 - 10 = 1189$ и $1391 - 28 = 1363$ се деливи со бараниот број. Сега, ги разложуваме на множители броевите 1189 и 1363 и добиваме $1189 = 29 \cdot 41$ и $1363 = 29 \cdot 47$. Бидејќи 29 е заеднички делител на двата броја кој е поголем од 10 и 28, т.е. поголем од двата остатоци заклучуваме дека броевите 1199 и 1391 сме ги поделиле со 29.

10. Ако броевите 4373 и 826 ги поделиме со еден ист број, добиваме остатоци 8 и 7, соодветно. Определи го непознатиот делител.

Решение. Ако од 4373 одземеме 8, а од 826 одземеме 7 ги добиваме броевите 4365 и 819. Имаме, $4365 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 97$ и $819 = 3 \cdot 3 \cdot 91$. Значи, заеднички делители на броевите 4365 и 819 се 1, 3 и 9, па бидејќи $9 > 8$ и $9 > 7$ заклучуваме дека бараниот делител е 9.

11. Броевите 860 и 1200 ги делиме со еден ист број и добиваме остатоци 9 и 16, соодветно. Определи ги количниците кои се добиваат.

Решение. За броевите $860 - 9 = 851$ и $1200 - 16 = 1184$ добиваме

$$851 = 37 \cdot 23 \text{ и } 1184 = 32 \cdot 37,$$

што значи дека заеднички делители на овие два броја се 1 и 37. Бидејќи остатоците се 9 и 16, заклучуваме дека бројот со кој се поделени дадените броеви 860 и 1200 е 37 и количниците се 23 и 32, соодветно.

12. Ако бројот 1000 го поделиме со некој број добиваме остаток 8, а ако бројот 900 го поделиме со истиот тој број добиваме остаток 1. Определи ги количниците кои ги добиваме во првото и второто делење.

Решение. Нека a е непознатиот делител, а q_1 и q_2 се количниците кои се добиваат при делењето на броевите 1000 и 900, соодветно. Од условот на задачата следува $aq_1 + 8 = 1000$ и $aq_2 + 1 = 900$. Ако од првата ја одземеме втората равенка добиваме $a(q_1 - q_2) = 93$. Понатаму, бидејќи остатоците при делењето на броевите со бројот a се 1 и 8 заклучуваме дека $a > 8$, па од $93 = 3 \cdot 31$ и $a(q_1 - q_2) = 93$ следува дека $a = 93$ и $q_1 - q_2 = 1$ или $a = 31$ и $q_1 - q_2 = 3$.

За $a = 93$ добиваме $1000 = 93 \cdot 10 + 70$ и $900 = 93 \cdot 9 + 63$, што значи дека во овој случај немаме решение на задачата.

За $a = 31$ добиваме $1000 = 31 \cdot 32 + 8$ и $900 = 31 \cdot 29 + 1$, што значи дека бараните количници се $q_1 = 32$ и $q_2 = 29$.

13. Збирот на два броја е 2003, а при делење на поголемиот со помалиот број се добива количник 7 и остаток 131. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека бараните броеви се a и b , $a > b$. Имаме $a + b = 2003$ и $a = 7b + 131$. Според тоа, $8b + 131 = 2003$, од каде добиваме $b = 234$, па затоа $a = 2003 - 234 = 1769$. Значи, бараните броеви се 234 и 1769.

14. Разликата на два броја е 1860, а при делење на поголемиот со помалиот број се добива количник 14 и остаток 1.

Определи ги овие броеви.

Решение. Нека бараните броеви се a и b , $a > b$. Имаме $a - b = 1860$ и $a = 14b + 1$. Според тоа, $13b + 1 = 1860$, од каде добиваме $b = 143$, па затоа $a = 1860 + 143 = 2003$. Значи, бараните броеви се 143 и 2003.

15. Во бројот $\overline{1988ab}$ буквите a и b замени ги со соодветни цифри така што добиениот број ќе биде делив со 24.

Решение. Имаме $198800 = 24 \cdot 8283 + 8$. Тоа значи дека бројот $198800 - 8 = 198792$ е делив со 24. Според тоа, бараните броеви се:

$$198792 + 24 = 198816,$$

$$198816 + 24 = 198840,$$

$$198840 + 24 = 198864,$$

$$198864 + 24 = 198888.$$

Конечно, $a = 1, b = 6$; $a = 4, b = 0$; $a = 6, b = 4$ и $a = b = 8$ се решенија на задачата.

II.2. ПРИЗНАЦИ ЗА ДЕЛИВОСТ

16. Дали сите свездички во бројот $\overline{1*5*4*7}$ може да се заменат со иста цифра така што бројот ќе биде делив со 3?

Решение. Ако на местото на свездичките ја ставиме цифрата a , тогаш збирот на цифрите на добиениот број ќе биде $3a + 7$ и како тој не е делив со 3, заклучуваме дека добиениот број не е делив со 3.

17. Определи ја непознатата цифра x така што бројот $\overline{32x60}$ ќе биде делив со бројот 56.

Решение. Еден број е делив со 56 ако и само ако е делив со 7 и со 8. Понатаму, еден број е делив со 8 ако и само ако неговиот трицифрен завршеток е делив со 8, што значи дека цифрата x може да биде 1, 3, 5, 7 или 9. Непосредно проверуваме дека од петте можности само бројот 32760 е делив со 7, па затоа $x = 7$.

18. Дали бројот $\underbrace{444\dots44}_{2019 \text{ пати}}$ е делив со бројот 8?

Решение. Природен број е делив со бројот 8 ако и само ако неговиот трицифрен завршеток е делив со бројот 8. Трицифрениот завршеток

на бројот $\underbrace{444\dots44}_{2019 \text{ пати}}$ е 444 и како $444 = 8 \cdot 55 + 4$, заклучуваме дека

дадениот број не е делив со 8.

19. Определи ги цифрите a и b така што бројот $\overline{199a1b}$ е делив со 12.

Решение. Природен број е делив со 12 ако и само ако е делив со 3 и со 4. Од деливоста со 4 следува дека двоцифрениот завршеток на бројот $\overline{1b}$ треба да е дели со 4, па затоа $b = 2$ или $b = 6$. Ако $b = 2$, тогаш збирот на цифрите на бројот е еднаков на $22 + a$ и заради деливоста со 3, тој треба да е делив со 3, па затоа a може да биде 2, 5 или 8. Ако $b = 6$, тогаш збирот на цифрите на бројот е еднаков на $26 + a$, па во овој случај a може да биде 1, 4 или 7. Конечно, сите барани броеви се: 199212, 199512, 199812, 199116, 199416 и 199716,

20. Определи ги цифрите a и b така што шестцифрениот број $\overline{a1993b}$ ќе биде делив со 45.

Решение. Еден број е делив со 45 ако и само ако е делив со 9 и со 5. Од деливоста со 5 следува дека $b = 0$ или $b = 5$. Понатаму, за $b = 0$ од деливоста со 9 следува дека збирот на цифрите $a + 22$ на бројот $\overline{a19930}$ треба да е делив со 9, од каде добиваме $a = 5$. За $b = 5$ од деливоста со 9 следува дека збирот на цифрите $a + 27$ треба да е делив со 9, па бидејќи бројот треба да е шестцифрен добиваме $a > 0$, што значи $a = 9$. Конечно, бараните броеви се 519930 и 919935.

21. Во бројот $n = \overline{a1995b}$ определи ги цифрите a и b така што добиениот шестцифрен број n е делив со 72.

Решение. Еден број е делив со 72 ако и само ако е делив со 8 и со 9. Од деливоста со 8 следува дека трицифрениот завршеток $\overline{95b}$ треба да е делив со 8. Со непосредна проверка за парните вредности на b добиваме дека последното важи само за $b = 2$. Според тоа, треба да ја определиме цифрата a така што бројот $n = \overline{a19952}$ ќе биде делив со 9. Последното значи дека збирот $a + 1 + 9 + 9 + 5 + 2 = a + 26$ треба да е делив со 9, од каде добиваме $a = 1$. Според тоа задачата има единствено решение $a = 1$ и $b = 2$.

22. Докажи дека бројот $\underbrace{222\dots222}_{2016 \text{ двојки}}$ е делив со бројот 18.

Решение. Еден број е делив со 18 ако и само ако е делив со 2 и со 9. Бројот $\underbrace{222\dots222}_{2016 \text{ двојки}}$ е парен, па значи е делив со 2. Понатаму, збирот на

цифрите на бројот $\underbrace{222\dots222}_{2016 \text{ двојки}}$ е еднаков на $2016 \cdot 2 = 9 \cdot 226 \cdot 2 = 9 \cdot 452$

и бидејќи тој е делив со 9, добиваме дека и дадениот број е делив со 9.

23. Докажи дека збирот S на првите 1000 природни броеви е делив со бројот 77.

Решение. Бидејќи

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \dots + 998 + 999 + 1000 \\ &= (1 + 1000) + (2 + 999) + \dots + (500 + 501) \\ &= 500 \cdot 1001 = 500 \cdot 13 \cdot 77 \end{aligned}$$

добиваме дека $77 \mid S$.

24. На местото на буквите стави соодветни цифри така што збирот на броевите $\overline{199a}$ и $\overline{b234}$ ќе биде делив со 18.

Решение. Еден број е делив со 18 ако и само ако е делив со 2 и со 9. Од деливоста со 2 следува дека цифрата a треба да е парна, т.е. $a = 0, 2, 4, 6$ или 8.

За $a = 0$ имаме $1990 + \overline{b234} = \overline{(b+2)224}$, па од деливоста со 9 следува дека збирот на цифрите $b+10$ треба да е делив со 9, што значи $b = 8$.

За $a = 2$ имаме $1992 + \overline{b234} = \overline{(b+2)226}$, па од деливоста со 9 следува дека збирот на цифрите $b+12$ треба да е делив со 9, што значи $b = 6$.

За $a = 4$ имаме $1994 + \overline{b234} = \overline{(b+2)228}$, па од деливоста со 9 следува дека збирот на цифрите $b+14$ треба да е делив со 9, што значи $b = 4$.

За $a = 6$ имаме $1996 + \overline{b234} = \overline{(b+2)230}$, па од деливоста со 9 следува дека збирот на цифрите $b+7$ треба да е делив со 9, што значи $b = 2$.

За $a = 8$ имаме $1998 + \overline{b234} = \overline{(b+2)232}$, па од деливоста со 9 следува дека збирот на цифрите $b+9$ треба да е делив со 9, што значи $b = 9$.

II.3. ПРОСТИ БРОЕВИ

25. Запиши ги сите трицифрени броеви чиј производ на цифри е еднаков на 42.

Решение. Бројот 42 како производ на три едноцифрени броеви може да се запише на два начина и тоа: $42 = 1 \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, па затоа бараните броеви се: 167, 176, 617, 671, 716, 761, 237, 273, 327, 372, 723 и 732.

26. Определи ги сите природни броеви чиј производ на цифри е еднаков на 528.

Решение. Имаме $528 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$, што значи дека една од цифрите на бараните броеви треба да биде 11. Но, 11 е двоцифрен број, па затоа не постои природен број чиј производ на цифри е еднаков на 528.

27. Определи ги сите парови трицифрени броеви чиј производ е еднаков на 51051.

Решение. Бројот 51051 го разложуваме на прости множители и добиваме

$$51051 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17.$$

Затоа дадениот број може да се запише на три начина како производ на трицифрени броеви

$$51051 = 187 \cdot 273 = 119 \cdot 429 = 143 \cdot 357.$$

28. Определи ги сите парови трицифрени броеви чиј производ е еднаков на 222222.

Решение. Бројот 222222 го разложуваме на прости множители и добиваме $222222 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$. Со комбинирање на множителите во разложувањето добиваме $462 \cdot 481$, $546 \cdot 407$, $231 \cdot 962$, $273 \cdot 814$, $858 \cdot 259$, $429 \cdot 518$ и $286 \cdot 777$, што значи дека задачата има 7 решенија.

29. Определи ги сите прости трицифрени броеви чиј производ на цифри е еднаков на 70.

Решение. Имаме $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$. Се бара прост број, што значи дека тој не може да е парен и не може да завршува на цифрата 5. Значи, остануваат броевите 257 и 527. Но, $527 = 17 \cdot 31$, па затоа бараниот број е 257.

III ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

III.1.БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Со помош на цифрите 0, 5 и 8 запиши ги најголемот и најмалиот трицифрен број со различни цифри, а потоа определи го нивниот збир.

Решение. Најголемиот трицифрен број со различни цифри запишан со помош на цифрите 0, 5 и 8 е бројот 850, а најмалиот трицифрен број запишан со различни цифри е 508. Збирот на овие два броеви е $850 + 508 = 1358$.

2. Иван еден по друг ги запишал броевите од 8 до 888:

8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 ... 886, 887, 888.

Колку пати вкупно ги запишал цифрите 6 и 9.

Решение. Во секоја стотка од 1 до 900, освен во седмата цифрата 6 е запишана 20 пати, а во седмата стока е запишан 120 пати. Затоа меѓу запишаните броеви цифрата 6 е запишана $120 + 8 \cdot 20 - 2 = 278$ пати. Понатаму, во секоја стотка од 1 до 899 цифрата 9 е запишана 20 пати. Затоа меѓу запишаните броеви цифрата 9 е запишана $9 \cdot 20 - 12 = 168$ пати. Конечно, меѓу запишаните броеви цифрите 6 и 9 вкупно се запишани $278 + 168 = 446$ пати.

3. Определи го најмалиот трицифрен број чиј збир на цифри е еднаков на нивниот производ.

Решение. Ниту една од цифрите не може да е 0, бидејќи во тој случај производот на цифрите ќе биде 0, а збирот ќе биде различен од 0. Ако две или повеќе цифри се еднакви на 1, тогаш производот на цифрите ќе биде еднаков на третата цифра, а збирот на цифрите ќе биде за 2 поголем од третата цифра, што не е можно. Затоа најмногу една од цифрите може да биде еднаква на 1. Најмалиот таков број кај кој една од цифрите е 1 е бројот 122, но производот на неговите цифри е еднаков на 4, а нивниот збир е еднаков на 5, па затоа тој не е решение на задачата. Следен е бројот 123 и вој број ги задоволува условите на задачата. Имено, $1 + 2 + 3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$, што значи дека решение на задачата е бројот 123.

4. Определи ја вредноста на изразот $a - (b - c)$, каде a е најмалиот трицифрен број запишан со различни цифри, b е најголемиот трицифрен

број во кој точно две од цифрите се еднакви и c е најголемиот трицифрен број запишан со различни цифри.

Решение. Најмалиот трицифрен број запишан со различни цифри е $a = 102$, најголемиот трицифрен број во кој точно две од цифрите се еднакви е $b = 998$ и најголемиот трицифрен број запишан со различни цифри е $c = 987$. Според тоа,

$$a - (b - c) = 102 - (998 - 987) = 102 - 11 = 91.$$

5. Определи ја разликата на најголемиот трицифрен број чија цифра на единиците е четири пати поголема од цифрата на стотките и бројот кој е трипати поголем од најголемиот парен двоцифрен број.

Решение. Најголемиот трицифрен број чија цифра на единиците е четири пати поголема од цифрата на стотките е бројот 298, а најголемиот парен двоцифрен број е 98. Според тоа, бараната разлика е

$$298 - 3 \cdot 98 = 298 - 294 = 4.$$

6. Определи ја разликата меѓу најголемиот и најмалиот десетцифрен природен број секој од кои е запишан со помош на различни цифри.

Решение. Најголемиот десетцифрен број запишан со различни цифри е бројот 9876543210, а најмалиот десетцифрен број запишан со различни цифри е бројот 1023456789. Нивната разлика е

$$9876543210 - 1023456789 = 8853086421.$$

7. Ангела замислила еден број. Од замислениот број ја одзела разликата на броевите 352 и 274 и добила број кој е за 215 поголем од бројот 107. Кој број го замислила Ангела?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-нанапред. Бројот кој на крајот го добила Ангела е $215 + 107 = 322$. Овој број го добила кога од замислениот број ја одзела разликата $352 - 274 = 78$, па затоа замислениот број е $322 + 78 = 400$.

8. Горјан запишал три броја. Првиот број е 270, вториот број е за 140 поголем од првиот и третиот број е за 180 помал од вториот. Со кој број Горјан треба да го собере збирот на трите броја за да добие 1000?

Решение. Вториот број кој Горјан го запишал е $270 + 140 = 410$, а третиот број е $410 - 180 = 230$. Според тоа, збирот на запишаните броеви е $270 + 410 + 230 = 910$. Значи, за да добие 1000 Горјан збирот на трите броја треба да го собере со $1000 - 910 = 90$.

9. Марија одзела од бројот 1000 некој број, но при пресметувањето направила грешка и добила разлика 631, која била за 150 поголема од точниот резултат. Кој број го одзела Марија?

Решение. При одземањето Марија наместо бројот 631 требало да го добие бројот $631 - 150 = 481$. Според тоа, Марија го одзела бројот $1000 - 481 = 519$.

10. Дедо Алекса му кажал на Горјан еден двоцифрен број. Горјан забележал дека ако бројот го помножи со 3, тогаш повторно ќе добие двоцифрен број, а ако од почетниот број одземе 3 и потоа добиениот број го подели со 3, тој повторно ќе добие двоцифрен број. Кој број му го кажал дедо Алекса на Горјан?

Решение. Ако по множењето со 3 се добива двоцифрен број, тогаш почетниот број е помал или еднаков на $99 : 3 = 33$. Ако по второто делење се 3 се добива двоцифрен број, тогаш претходно добиениот резултат е поголем или еднаков на $3 \cdot 10 = 30$, што значи дека почетниот број е поголем или еднаков на $30 + 3 = 33$. Конечно, од претходно изнесеното следува дека дедо Алекса на Горјан му го кажал бројот 33.

11. Збирот на четири броја е еднаков на 2014. Колку ќе биде еднаков збирот ако три од овие броеви се зголемат за по 49, а четвртиот се намали за 62?

Решение. Ако секој од трите од дадените броеви се зголеми за 49, а четвртиот се намали за 62, тогаш збирот ќе се зголеми за

$$3 \cdot 49 - 62 = 147 - 62 = 85.$$

Според тоа, збирот ќе биде еднаков на $2014 + 85 = 2099$.

12. Цифрата на единиците на еден број е 0. Ако истата ја избришеме, тогаш тој број се намалува за 27405. Кој е тој број?

Решение. Ако по бришењето на цифрата 0 се добива бројот x , тогаш бараниот број е $10x$. Според тоа, $10x - x = 27405$, од каде добиваме $x = 3045$ и бараниот број е 30450.

13. Определи го бројот кој е за 60 поголем од својата третина.

Решение. Третината на бројот да ја означиме со x . Тогаш бараниот број е $3x$ и важи $3x - x = 60$, од каде добиваме $x = 30$. Според тоа, бараниот број е $3 \cdot 30 = 90$.

14. Колку пати треба да го додадеме најголемиот двоцифрен број на најмалиот двоцифрен број за да добиеме 1000?

Решение. Најголемиот двоцифрен број е 99, а најмалиот двоцифрен број е 10. Ако бројот 99 го додадеме n пати на бројот 10 и добиеме 1000, тогаш

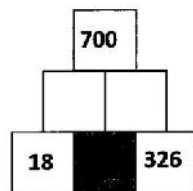
$$99n + 10 = 1000,$$

$$99n = 990,$$

$$n = 990 : 99 = 10.$$

Според тоа, за да добиеме 1000 бројот 99 треба да го додадеме 10 пати на бројот 10.

15. Во трите квадрати на првиот ред на фигурата прикажана на цртежот десно се запишани три броја. Потоа во секој квадрат е запишан збирот на броевите кои се наоѓаат во квадратите непосредно под него. Некои броеви биле избришани. Кој број бил запишан во црниот квадрат?



Решение. Нека во црниот квадрат е запишан бројот x . Тогаш во белите квадрати кои се непосредно над него се запишани броевите $18 + x$ и $326 + x$. Затоа $16 + x + 326 + x = 700$, од каде наоѓаме

$$2x = 700 - (16 + 326),$$

$$2x = 356,$$

$$x = 178.$$

16. Разликата на еден двоцифрен број и двоцифрениот број запишан со истите цифри но во обратен редослед е еднаква на 72. Определи го збирот на овие броеви.

Решение. Нека броевите се $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$, $a > b \neq 0$. Имаме $\overline{ab} - \overline{ba} = 72$, па затоа $10a + b - 10b - a = 72$, односно $a - b = 8$. Но, a и b се цифри, па од последното равенство следува дека $a = 9$ и $b = 1$. Значи, броевите се 91 и 19, па нивниот збир е $91 + 19 = 110$.

17. Куќите на една улица се нумерирани со броевите од 1 до 185. Колку пати е употребена цифрата 4?

Решение. Во секоја од деветнаесетте десетки (од 1 до 185) цифрата 4 се појавува по еднаш како цифра на единиците, а во петтата и петнаесеттата десетка се појавува по десет пати како цифра на десетките. Според тоа, имаме $19 + 2 \cdot 10 = 39$ четворки.

18. Ана направила тефтерче така што превиткала 15 листови хартија, секој лист во различна боја, а потоа го сошила. Потоа таа последователно ги



нумерирала страниците со броевите од 1 до 60. Ако страницата со број 16 е црвена, кој е бројот на следната по ред црвена страница?

Решение. Бидејќи страницата со број 16 е црвена, црвена е и страницата со број 15. Значи, меѓу последните 14 страници нема црвена, а двете страници пред нив се црвени. Сега бидејќи $60 - 14 = 46$ заклучуваме дека црвени се страниците 46 и 45, т.е. бројот на следната по ред црвена страница е 45.

19. Марко нашол дел од една стара книга. Страниците на делот од книгата биле последователни при што првата страница била нумерирана со бројот 143, а последната страница била нумерирана со број запишан со истите цифри, но во друг редослед. Колку листови имал делот кој го нашол Марко?

Решение. Броеви поголеми од 143 и запишани со истите цифри се 314, 341, 413 и 431. Последната нумерирана страница на делот на книгата мора да е означена со парен број, што значи дека таа е нумерирана со бројот 314. Според тоа, делот од книгата кој го нашол Марко имал $314 - 142 = 172$ страници или $172 : 2 = 86$ листа.

20. Колку цифри се употребени за нумерирање на книга која има 567 страници?

Решение. Меѓу првите 567 броеви и 9 едноцифрени, 90 двоцифрени и $567 - 9 - 90 = 468$ трицифрени броеви. Значи, за нумерирање на страниците на книгата се искористени

$$9 + 90 \cdot 2 + 468 \cdot 3 = 9 + 180 + 1404 = 1593 \text{ цифри.}$$

21. Колку цифри се употребени за нумерирање на книга која има 789 страници?

Решение. За првите 9 страници се употребени 9 цифри, за следните 90 страници се употребени по 2 цифри за страница или вкупно $2 \cdot 90 = 180$ цифри и за следните $789 - 99 = 690$ страници се употребени по 3 цифри за страница или вкупно $3 \cdot 690 = 2070$ цифри. Според тоа, за нумерирање на целата книга се употребени

$$2070 + 180 + 9 = 2259 \text{ цифри.}$$

22. Колку цифри се употребени за нумерирање на книга која има 2019 страници?

Решение. За нумерирање на страниците на книгата се употребени 9 едноцифрени, 90 двоцифрени, 900 трицифрени и $2019 - 999 = 1020$ четирицифрени броеви. Според тоа, се употребени

$$9 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 1020 \cdot 4 = 6969 \text{ цифри.}$$

23. Горјан прочитал книга која има 195 листови. Колку страници имаа оваа книга? Колку цифри се употребени за нумерирање на страниците на оваа книга?

Решение. Книгата која ја прочитал Горјан има $195 \cdot 2 = 390$ страници. За нумерирање на страните на истата се искористени 9 едноцифрени, 90 двоцифрени и $390 - (9 + 90) = 291$ трицифрени броеви. Според тоа, за нумерирање на книгата се искористени

$$9 + 90 \cdot 2 + 291 \cdot 3 = 9 + 180 + 873 = 1062 \text{ цифри.}$$

24. Горјан во депото на една библиотека нашол стара заборавена книга во која недостасувале страниците од 1149 до 1310 страница. Колку пати цифрата 7 треба да е запишана на страниците кои недостасуваат?

Решение. На страниците кои недостасуваат цифрата 7 во записот на единиците се јавува 16 пати, а во записот на десетките се јавува 20 пати. Според тоа, во нумерацијата на страниците кои недостасуваат цифрата 7 се јавува $16 + 20 = 36$ пати.

25. На една стара книга и недостасуваат 142 страници, така што книгата почнува од 143-тата страница, а завршува со страница која исто така е запишана со цифрите 1, 3 и 4, но во друг редослед. Определи го бројот на страниците кои сега ги има оваа книга.

Решение. Првата од преостанатите страници на книгата е 143, па затоа последната страница која е парна и е запишана со цифрите 1, 3 и 4 е 314. Бидејќи недостасуваат првите 142 страници, сега книгата има $314 - 142 = 172$ страници.

26. Кабините на една жичара се нумерирани со броевите 1, 2, 3 итн. и се наоѓаат на еднакво растојание една од друга. Кога кабината со број 39 тагнува од долната станица на жичарата, од горната станица тргнува кабината со број 93.

Кој е бројот на кабината која тргнува од горната станица, ако од долната станица тргнува кабината со број 67?

Решение. На жичарата оддолу-нагоре се движат $93 - 39 = 54$ кабинини. Бидејќи кабинетите се наоѓаат на еднакво растојание една од друга, одгоре-надолу исто така се движат 54 кабинини. Според тоа, жичарата вкупно има $2 \cdot 54 = 108$ кабинини. Значи, кога од долната станица тргнува кабината со број 67, од горната станица тргнува кабина со број $67 - 54 = 13$.

27. Горјан на таблата запишал трицифрен број. Сања, Маја и Теодора помножиле по две од цифрите на запишаниот број и добиле три различни резултати. Сања добила 28, а Маја добила 36. Ако сите три точно пресметувале, кој број го добила Теодора?

Решение. Броевите 28 и 36 треба да се запишат како производи на два едноцифрени броеви и притоа во двата производи мора да има еден заеднички множител (Зошто?). Имаме $28 = 4 \cdot 7$, и бидејќи 7 не е делител на 36, а $36 = 4 \cdot 9$ добиваме дека цифрите на бројот кој го запишал Горјан се 4, 7 и 9, па бидејќи трите добиле различни резултати заклучуваме дека Теодора ги помножила цифрите 7 и 9 и го добила бројот $9 \cdot 7 = 63$.

28. Збирот на цифрите на природниот број n е еднаков на 23. Определи ја најмалата можна вредност на збирот на цифрите бројот $n + 1$.

Решение. Ако цифрата на единиците на бројот n не е 9, тогаш збирот на цифрите на бројот $n + 1$ е еднаков на $23 + 1 = 24$. Ако цифрата на единиците на бројот n е 9, но цифрата на десетките не е 9, тогаш збирот на цифрите на бројот $n + 1$ е еднаков на $23 - 9 + 1 = 15$. Ако цифрите на единиците и десетките на бројот n се 9, тогаш збирот на цифрите на бројот $n + 1$ е еднаков на $23 - 18 + 1 = 6$. Според тоа, бараната најмала можна вредност на збирот на цифрите на бројот $n + 1$ е 6.

29. На прашањето кога е роден Кирил одговорил: „Роден сум напролет на непарен датум. Ако од бројот на денот го одземеме бројот на месецот, добиениот резултат го поделиме на 5 и на крајот помножиме со 2, ќе добиеме 10.“ На кој датум е роден Кирил?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-напред. Пред да помножиме со 2 го имаме бројот $10 : 2 = 5$, а пред да поделиме со 5 го имаме бројот $5 \cdot 5 = 25$. Бројот 25 е разлика на непарен двоцифрен помал или еднаков на 31 и едноцифрен број помал од 6, а поголем од 2. Ако Кирил е роден во март, тогаш имаме $25 + 3 = 28$, што не е можно бидејќи 28 е парен број. Ако Кирил е роден во април, тогаш имаме $29 = 25 + 4$, што е можно. Ако Кирил е роден во мај, тогаш имаме $30 = 25 + 5$, што не е можно бидејќи 30 е парен број. Ако Кирил е роден во јуни, тогаш $31 = 25 + 6$, што не е можно бидејќи јуни има 30 дена. Конечно, од претходно изнесеното заклучуваме дека Кирил е роден на 29 април.

30. а) На таблата се запишани броевите од 10 до 19. Определи го збирот на сите цифри кои се употребени за запишување на овие броеви.

б) Определи го збирот на сите цифри кои се употребени за запишување на сите природни броеви од 1 до 2019.

Решение. а) При запишување на броевите од 10 до 19, за запишување на единиците се употребени цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, а за запишување на десетките десет пати е употребена цифрата 1. Според тоа, бараниот збир е еднаков на $1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10 \cdot 1 = 55$.

б) Збирот на цифрите кои се потребни за запишување на броевите од 1 до 9 е $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$, збирот на цифрите кои се потребни за запишување на броевите од 10 до 19 е $45 + 10 \cdot 1$, за запишување на броевите од 20 до 29 е $45 + 10 \cdot 2$, ..., за запишување на броевите од 90 до 99 е $45 + 9 \cdot 9$. Според тоа, збирот на цифрите кои се потребни за запишување на броевите од 1 до 99 е еднаков на

$$45 + 45 + 10 \cdot 1 + 45 + 10 \cdot 2 + \dots + 45 + 10 \cdot 9 = 10 \cdot 45 + 10 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) \\ = 10 \cdot 45 + 10 \cdot 45 = 900.$$

Понатаму, броевите од 100 до 199 може да се добијат ако го запишеме бројот 100, од лево пред броевите од 1 до 9 го запишеме бројот 10 и пред броевите од 10 до 99 од лево ја запишеме цифрата 1. Затоа збирот на цифрите со кои се запишани броевите од 100 до 199 е еднаков на збирот на цифрите со кои се запишани броевите од 1 до 99 зголемен за $100 \cdot 1$, т.е. е еднаков на $900 + 100 \cdot 1$. Слични, збирот на цифрите со кои се запишани броевите од 200 до 299 е еднаков на $900 + 100 \cdot 2$, ..., збирот на цифрите со кои се запишани броевите од 900 до 999 е еднаков на $900 + 100 \cdot 9$. Според тоа, збирот на цифрите со кои се запишани броевите од 1 до 999 е еднаков на

$$900 + 900 + 100 \cdot 2 + \dots + 900 + 100 \cdot 9 = 10 \cdot 900 + 100 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) \\ = 10 \cdot 900 + 100 \cdot 45 = 13500.$$

Аналогно се добива дека збирот на цифрите со кои се запишани броевите од 1000 до 1999 е еднаков на $13500 + 1000 \cdot 1 = 14500$. Сега, збирот на цифрите кои се употребени за запишување на броевите од 2000 до 2019 е еднаков на $20 \cdot 2 + 45 + 55 = 140$.

Конечно, збирот на сите цифри кои се употребени за запишување на броевите од 1 до 2019 е еднаков на $13500 + 14500 + 140 = 28140$.

31. Збирот на два броја е еднаков на 24. При делење на поголемиот број со помалиот број се добива количник 3 и остаток 4. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека бараните броеви се a и b . Од условот на задачата следува $a + b = 24$ и $a = 3b + 4$. Значи, $3b + 4 + b = 24$, од каде добиваме $b = 5$. Конечно, $a = 24 - 5 = 19$

32. Учителката по математика поставила задача да се определи разликата на два броја. Михајло се збунил и наместо да ја определи разликата, тој ги собрал броевите. Останатите ученици точно го определиле точниот одговор 812, а Михајло точно собирал и добил 824. Кои броеви требало да ги одземе Михајло?

Решение. Михајло наместо да го одземе намалителот, тој го додал кон намаленикот, па затоа разликата $824 - 812 = 12$ е двапати поголема од намалителот. Според тоа, намалителот е $12 : 2 = 6$, а намаленикот е $812 + 6 = 818$.

33. Збирот на два броја е еднаков на 1988, а нивната разлика е 678. Определи ги овие броеви.

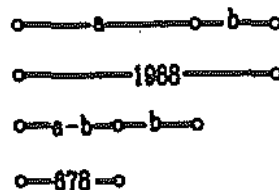
Решение. Задачата ќе ја решиме со методот на отсечки (цртеж десно). Очигледно

$$2b = 1988 - 678 = 1310,$$

од каде добиваме

$$b = 1310 : 2 = 655.$$

Според тоа, $a = 1988 - 655 = 1333$.



34. Нека a, b, c се природни броеви поголеми од 10 и такви што $a + b - c = 2019$. Определи ја вредноста на изразот $a + b - c$ кога секој од броевите a, b, c ќе се намали за 10.

Решение. *Прв начин.* Со намалување за 10 на броевите a и b вредноста на изразот се намалува за $10 + 10 = 20$, а со намалување за 10 на бројот c вредноста на изразот се зголемува за 10. Според тоа, вредноста на изразот се намалува за $20 - 10 = 10$ и таа е еднаква на $2019 - 10 = 2009$.

Втор начин. Вредноста на изразот ќе биде:

$$a - 10 + b - 10 - (c - 10) = a + b - c - (20 - 10) = 2019 - 10 = 2009.$$

35. Нека a, b, c се природни броеви поголеми од 919 такви што вредноста на изразот $a - b - c$ е еднаква на 2019. Колкава ќе биде вредноста на овој израз ако секој од броевите a, b, c се намали за 919?

Решение. *Прв начин.* Кога бројот a ќе се намали за 919, тогаш вредноста на изразот се намалува за 919, а кога секој од броевите b и

c се намалува за 919, тогаш вредноста на изразот се зголемува за $919 + 919$. Значи, вредноста на изразот ќе се зголеми за 919 и таа ќе изнесува $2019 + 919 = 2938$.

Втор начин. Имаме

$$\begin{aligned}(a - 919) - (b - 919) - (c - 919) &= a - 919 - b + 919 - c + 919 \\ &= a - b - c + 919 = 2019 + 919 = 2938.\end{aligned}$$

36. Збирот на три броја е 849. Првиот број е најмал и секој следен е за 47 поголем од претходниот. Определи ги овие броеви.

Решение. Ако првиот број е x , тогаш вториот број е $x + 47$ и третиот број е $x + 47 + 47 = x + 94$. Според тоа,

$$x + x + 47 + x + 94 = 849,$$

$$3x + 141 = 849,$$

$$3x = 708,$$

$$x = 708 : 3 = 236$$

и бараните броеви се 236, 283 и 330.

37. Збирот на два броја е 825, при што поголемиот број завршува со цифрата 0. Ако во поголемиот број ја избришеме цифрата 0, тогаш се добива помалиот број. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека помалиот број го означиме со x . Тогаш поголемиот број е $\overline{x0} = 10x$, па затоа $x + 10x = 825$, од каде добиваме $x = 75$. Според тоа, бараните броеви се 75 и 750.

38. Дадени се два броја такви што цифрата на единиците на поголемиот број е 1 и ако истата ја избришеме, го добиваме помалиот број. Збирот на двата броја е еднаков на 474. Определи ги овие броеви.

Решение. Ако помалиот број е x , тогаш поголемиот број е $\overline{x1} = 10x + 1$, па затоа $x + (10x + 1) = 474$, од каде добиваме $11x = 473$, т.е. $x = 43$. Според тоа, бараните броеви се 43 и 431.

39. Збирот на два броја е еднаков на 196. Ако на поголемиот број му ја избришеме цифрата на единицата се добива помали број. Определи ги овие броеви.

Решение. Бараните броеви се од видот $\overline{ABC}$ и $\overline{AB}$. Според условот на задачата имаме $\overline{ABC} + \overline{AB} = 196$, од каде следува $A = 1$. Според тоа, $\overline{1BC} + \overline{1B} = 196$, т.е. $\overline{BC} + \overline{B} = 86$. Значи, $11B + C = 86$ и како B и C се природни броеви од последното равенство добиваме $B = 7$, па затоа $C = 9$. Конечно, бараните броеви се 179 и 17.

40. Збирот на два броја е еднаков на 52. Ако првиот број се замени со еднаесет пати поголем број, тогаш збирот на двата броја ќе биде еднаков на 152. Определи ги овие броеви.

Решение. Вториот збир е поголем од првиот за десеткратната вредност на првиот број и тоа е еднакво на $152 - 52 = 100$. Значи, првиот број е еднаков на $100 : 10 = 10$, а вториот број е еднаков на $52 - 10 = 42$.

41. Збирот на два броја е еднаков на 1804. Ако првиот број го зголемиме четири пати, тогаш збирот на броевите е 1996. Определи ги овие броеви.

Решение. Кога првиот број се зголемува четири пати, збирот всушност се зголемува за неговата трикратна вредност. Според тоа, првиот број е еднаков на $(1996 - 1804) : 3 = 192 : 3 = 64$. Значи, вториот број е еднаков на $1804 - 64 = 1740$.

42. Определи го оној двоцифрен број кој ќе се зголеми 26 пати ако од левата страна му се допише цифрата 7.

Решение. Ако на двоцифрениот број x од левата страна му се допише цифрата 7, тогаш тој се зголемува за 700, т.е. се добива бројот $700 + x$. Бидејќи новодобиениот број е 26 пати поголем од почетниот број, добиваме $700 + x = 26x$. Значи, $25x = 700$, односно $x = 700 : 25 = 28$.

43. Збирот на три броја е еднаков на 440. Првиот број е двапати помал од вториот, а е седум пати поголем од третиот. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека третиот број е x . Бидејќи првиот број е седум пати поголем од третиот, добиваме дека првиот број е $7x$. Но, вториот број е двапати поголем од првиот, па затоа вториот број е $2 \cdot 7x = 14x$. Значи, $x + 7x + 14x = 440$, од каде добиваме $22x = 440$, т.е. $x = 20$. Според тоа, бараните броеви се $7x = 2 \cdot 20 = 40$, $14x = 14 \cdot 20 = 280$ и $x = 20$.

44. При собирање по два од три непознати броја се добиени збирите 156, 162 и 170. Определи ги непознатите броеви.

Решение. Во секој од збирите се собрани по два различни броја и секој од непознатите броеви учествува двапати во дадените зборови. Тоа значи дека збирот $156 + 162 + 170 = 488$ е двапати поголем од збирот на трите непознати броја. Значи, збирот на непознатите броеви е еднаков на $488 : 2 = 244$. Според тоа, бараните броеви се

$$244 - 156 = 88, \quad 244 - 162 = 82 \quad \text{и} \quad 244 - 170 = 74.$$

45. Збирот на неколку природни броеви е 44. Горјан секој од овие броеви го зголемил за 4 и кога ги собрал добил збир 144. Кој број ќе го добие Горјан ако повторно го зголеми секој собирук, но сега за 7?

Решение. При првото зголемување на секој собирук за 4 збирот се зголемил за $144 - 44 = 100$. Тоа значи дека имаме $100 : 4 = 25$ собируци. Понатаму, ако секој собирук се зголеми за 7, збирот се зголемува за $25 \cdot 7 = 175$, што значи дека Горјан ќе го добие бројот $144 + 175 = 319$.

46. Васко прво со 8 го помножил најмалиот трицифрен број запишан со различни цифри, а потоа од добиениот производ го одзел најголемиот двоцифрен број. Кој број го добил Васко?

Решение. Најмалиот трицифрен број запишан со различни цифри е бројот 102, а најголемиот двоцифрен број е 99. Според тоа, Васко го добил бројот $8 \cdot 102 - 99 = 816 - 99 = 717$.

47. Замислив еден број. Бројот го помножив со 4, добиениот производ го намалив за 4 и добив 44. Кој број го замислив?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад нанапред. Добиеениот производ е $44 + 4 = 48$. Значи, замислениот број е $48 : 4 = 12$.

48. Замислив еден број, го помножив со 4, до добиениот производ одзедов 44 и добив 1988. Кој број го замислив?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад нанапред. Пред да одземам 44 доиениот број е $1988 + 44 = 2032$. Сега, бројот кој го замислив се добива ако 2032 го поделиме со 4, па затоа замислениот број е $2032 : 4 = 508$.

49. Ако еден број го помножиме со бројот кој е за 3 помал од него добиваме производ 54. Кои броеви ги множиме?

Решение. Имаме:

$$54 = 1 \cdot 54 = 2 \cdot 27 = 3 \cdot 18 = 6 \cdot 9.$$

Единствен случај кога двата множители се разликуваат за 3 е кога ги множиме броевите 6 и 9. Според тоа, почетниот број е 9, а бројот кој е за 3 помал од него е 6.

50. Производот на два броја е еднаков на 2250. Едниот број е намален за 6, а другиот број останал непроменет по што новиот производ е еднаков на 1800.

Опреди ги почетните броеви.

Решение. *Прв начин.* Нека бараните броеви се x и y . Од условот на задачата следува дека $xy = 2250$ и $(x - 6)y = 1800$. Според тоа,

$$xy - (x - 6)y = 2250 - 1800,$$

$$xy - xy + 6y = 450$$

$$6y = 450$$

$$y = 75.$$

Конечно, $x = 2250 : 75 = 30$.

Втор начин. Кога првиот множител се намалува за 6, а вториот останува непроменет, тогаш производот се намалува за шесткратната вредност на вториот множител. Но, производот се намалил за $2250 - 1800 = 450$, па затоа вториот множител е еданков на $450 : 6 = 75$. Конечно, првиот множител е $2250 : 75 = 30$.

51. Даниел требало даден број да го подели со 4 и на добиениот резултат да додаде 30. Меѓутоа тој се збунил и дадениот број го помножил со 4, а потоа од добиениот резултат одзел 30, по што го добил точниот резултат на поставената задача. Кој е почетниот број?

Решение. Нека почетниот број е n . Од условот на задачата следува $n : 4 + 30 = 4n - 30$, од каде добиваме $n : 4 = 4n - 60$, т.е. $n = 4(4n - 60)$.

Решение на последната равенка е $n = 16$, што значи дека почетниот број е 16.

52. Производот на три броја е еднаков на 270 при што производот на првиот и третиот број е еднаков на 30, а производот на вториот и третиот број е еднаков на 135. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека бараните броеви се a, b, c . Имаме, $abc = 270$, $ac = 30$ и $bc = 135$. Значи,

$$b = abc : (ac) = 270 : 30 = 9, \quad a = abc : (bc) = 270 : 135 = 2 \text{ и}$$

$$c = ac : a = 30 : 2 = 15.$$

53. Иван од цифрите 2, 3 и 4 ги формирал сите трицифрени броеви кај кои цифрите не се повторуваат, а потоа од збирот на парните броеви го одзел збирот на непарните броеви. Кој број го добил Иван?

Решение. Со дадените цифри Иван ги формирал броевите 234, 243, 324, 342, 423 и 432. Збирот на парните броеви е

$$234 + 324 + 342 + 432 = 1332,$$

а збирот на непарните броеви е

$$243 + 423 = 666.$$

Според тоа, Иван го добил бројот $1332 - 666 = 666$.

54. Илија трипати по ред фрлил коцка за играње. Кога Васил го прашал колкав е збирот на трите броеви кои паднале, Илија одговорил: „Заборавај. Помнам само дека првиот пат падна непарен број, вториот пат падна парен број, а последниот пат не падна бројот 1.“

Решение. При првото фрлање можни броеви се 1, 3 и 5, при второто фрлање можни броеви се 3, 4 и 6, а при третото тоа се броевите 2, 3, 4, 5 и 6. Збирот на броевите кои паднале во првите две фрлања може да е: 3, 5, 5, 7, 7, 7, 9, 9 или 11, т.е. можни се пет различни зборови и тоа: 3, 5, 7, 9 или 11. Секој од овие зборови при третото фрлање ги дава можните зборови:

3 → 5, 6, 7, 8, 9

5 → 7, 8, 9, 10, 11

7 → 9, 10, 11, 12, 13

9 → 11, 12, 13, 14, 15

11 → 13, 14, 15, 16, 17.

Според тоа, можни се следните зборови: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 и 17, што значи дека се можни 13 различни зборови.

55. Определи го парниот број x чија третина е природен број помал од 6 и за кој важи $11 < x < 19$.

Решение. Парни броеви поголеми од 11 и помали од 19 се 12, 14, 16 и 18. Од наведените броеви деливи со 3 се броевите 12 и 18. Но, $18 : 3 = 6$, па затоа бараниот број е 12.

56. Дамјан, ученик во основно образование, на дигитрон ги помножил следните броеви: бројот на своите години, бројот на одделението во кое оди, бројот на годините на неговата мајка и уште еден трицифрен број. Резултатот од множењата бил бројот 333333. Колку години има Дамјан, а колку неговата мајка?

Решение. Имаме $333333 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ и Дамјан е ученик во основно образование. Затоа тој може да биде во III, VII или IX одделение (останатите делители на 333333 се поголеми од 9). Ако Дамјан е во III одделение, тогаш тој може да има 8 или 9 години, т.е. бројот 333333 треба да е делив со 24 или 27, а тоа не е случај. Ако Дамјан е во IX одделение, тогаш тој може да има 14 или 15 години, т.е. 333333 треба да е делив со 2 или со 5, а тоа не е случај. Значи, Дамјан е во VII одделение, па тој има 13 години. Остануваат множителите 3, 3, 11 и 37.

Јасно, мајката на Дамјан има $3 \cdot 11 = 33$ години, а трицифрениот број е $3 \cdot 37 = 111$.

57. Во една овошна градина јаболкниците се засадени во редица и се нумерирани последователно со броевите 1, 2, 3 итн. На секое дрво има еднаков број јаболка, кој не е поголем од 15. Пабло решил да ги преброи сите јаболка во овошната градина и започнал од првото дрво, па продолжил на второто итн. до последното дрво. Се покажало дека јаболката со број 169 и 180 се на едно дрво, а оние со број 126 и 141 се на различни дрвја кои што не се соседни. Пресметај го збирот на цифрите на најмалиот можен број јаболка во оваа овошна градина.

Решение. Од условот на задачата јаболката со број 169 и 180 се на едно дрво, заклучуваме дека на едно дрво има најмалку $180 - 168 = 12$ јаболка. Од условот на задачата јаболката со број 126 и 141 се на различни дрвја кои што не се соседни, па заклучуваме дека 126 е на една јаболкница, 141 на друга јаболкницапа и меѓу овие две јаболкници има јаболкница на која има помалку од $141 - 126 = 15$ јаболка. Но, на јаболкницата има најмалку 12 јаболка, па затоа бројот на јаболката на една јаболкница е еднаков на 12, 13 или 14. Ќе ги разгледаме трите случаи.

- 1) Ако на секое дрво има по 12 јаболка, тогаш јаболката 126 и 141 ќе се наоѓаат на соседни дрва (единаесеттото и дванаесеттото), што противречи на условот на задачата.
- 2) Ако на секое дрво има по 13 јаболка, тогаш јаболката 126 и 141 ќе се наоѓаат на соседни дрва (десеттото и еднаесеттото), што противречи на условот на задачата.
- 3) Ако на секое дрво има по 14 јаболка, тогаш јаболката 126 и 141 ќе се наоѓаат на деветтото и еднаесеттото дрво. Понатаму, во градината има најмалку 180 јаболка и како $180 = 12 \cdot 14 + 12$ заклучуваме дека во градината има најмалку 13 јаболкници, односно најмалку $13 \cdot 14 = 182$ јаболка. Конечно, збирот на цифрите на најмалиот можен број јаболка е еднаков на $1 + 8 + 2 = 11$.

III.2. ПАЗАРУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

58. Владо, Натка и Јасен биле на пазар. Владо и Натка потрошиле 1988 денари, Владо и Јасен потрошиле 2988 денари, а Јасен и Натка потрошиле 3988 денари. Колку пари потрошил секој од нив?

Решение. Ако ги собереме сите потрошени суми, тогаш добиениот збир е двапати поголем од сумата пари кои ја потрошиле заедно сите тројца. Според тоа, Владо, Натка и Јасен заедно потрошиле

$$(1988 + 2988 + 3988) : 2 = 8964 : 2 = 4482 \text{ денари.}$$

Бидејќи Владо и Натка потрошиле 1988 денари, добиваме дека Јасен потрошил $4482 - 1988 = 2494$ денари. Слично, Натка потрошила $4482 - 2988 = 1494$ денари и Владо потрошил $4482 - 3988 = 494$ денари.

59. Мирјана, Весна и Натка на пазар потрошиле 5280 денари. Мирјана потрошила 340 денари повеќе од Весна, а три пати помалку од вкупната сума која ја потрошиле Весна и Натка заедно. Колку пари потрошила секоја домаќинка?

Решение. Мирјана потрошила еден дел, а Весна и Натка потрошиле три пати повеќе. Значи, Мирјана потрошила четири пати помалку од сумата што сите заедно ја потрошиле, т.е. потрошила $5280 : 4 = 1320$ денари. Весна потрошила 340 денари помалку од Мирјана, т.е. таа потрошила $1320 - 340 = 980$ денари. Конечно, Натка потрошила $5280 - (980 + 1320) = 2980$ денари.

60. Вера добила две понуди за претплата за мобилен телефон. *Понуда А:* Неограничен број разговори за 2000 денари месечна претплата. *Понуда Б:* Месечна претплата од 800 денари и 7 денари за секој разговор. Колку најмалку разговори месечно треба Вера да направи за да понудата А биде поповолна од понудата Б?

Решение. Разликата во месечната претплата е $2000 - 800 = 1200$ денари. Бидејќи $1200 = 171 \cdot 7 + 3$, за да понудата А биде поповолна од понудата Б, Вера треба да направи најмалку 172 разговори.

61. Ако Марко купи четири тетратки, му остануваат 9 денари, а за пет тетратки му недостасуваат 9 денари. Колку пари има Марко?

Решение. При купувањето на 4 тетратки на Марко му преостануваат 9 денари, а за да ја купи петтата тетратка му требаат уште 9 денари. Значи, една тетратка чини $9 + 9 = 18$ денари. Конечно, Марко има $4 \cdot 18 + 9 = 81$ денар.

62. Ако Матеј купи 5 тетратки, тогаш ќе му останат 70 денари, а ако сака да купи 6 тетратки, тогаш ќе му недостасуваат 10 денари. Колку пари има Матеј?

Решение. Нека цената на една тетратка е x денари. Значи, кога Матеј купува 5 тетратки, тој има $5x + 70$ денари, а кога купува 6 тетратки има $6x - 10$ денари. Според тоа, $5x + 70 = 6x - 10$, односно $x = 80$. Конечно, Матеј има $5 \cdot 80 + 70 = 470$ денари.

63. Мартин бил во книжарница и пресметал дека ако купи 11 тетратки, тогаш ќе му останат 20 денари, а за да купи 15 тетратки му недостасуваат 100 денари. Колку пари чини една тетратка и колку пари имал Мартин?

Решение. Нека цената на една тетратка е x денари. Од податокот кога Мартин купува 11 тетратки добиваме дека тој имал $11x + 20$ денари, а од податокот кога сако да купи 15 тетратки добиваме дека тој имал $15x - 100$ денари. Според тоа, $11x + 20 = 15x - 100$, од каде добиваме $4x = 120$, т.е. $x = 30$ денари. Значи, цената на една тетратка е 30 денари и Мартин имал $11 \cdot 30 + 20 = 350$ денари.

64. Ако 5 тетратки чинат колку 2 книги, а 3 книги чинат колку еден ранец, колку тетратки може да купи Герасим со парите за 2 ранци?

Решение. Со парите за 2 ранци Герасим може да купи $2 \cdot 3 = 6$ книги. Но, со парите за 2 книги тој може да купи 5 тетратки, па затоа со парите за 6 книги, Герасим може да купи $(6 : 2) \cdot 5 = 15$ тетратки. Според тоа, со парите за 2 ранци Герасим може да купи 15 тетратки.

65. Мартин секое претпладне заработува 350 денари, а секое попладне троши половината од парите кои ги има во моментот. Вечерта на 4 април Мартин имал 870 денари. Колку пари имал Мартин на 1 април напладне?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-нанапред. На 4 април напладне Мартин имал $2 \cdot 870 = 1740$ денари. На 3 април вечерта имал $1740 - 350 = 1390$ денари, а на пладне имал $1390 \cdot 2 = 2780$ денари. На 2 април вечерта имал $2780 - 350 = 2430$ денари, а на пладне имал $2 \cdot 2430 = 4860$ денари. На 1 април вечерта имал $4860 - 350 = 4510$ денари, а на пладне имал $2 \cdot 4510 = 9020$ денари.

66. Витезот Златокос купил копје, штит, меч и коњ за што вкупно платил 25 златници. Штитот, мечот и коњот заедно чинат 22 златника, копјето, штитот и мечот заедно чинат 15 златници, а копјето, штитот и коњот заедно чинат 17 златници. Колку поединечно платил Златокос за копјето, штитот, мечот и коњот?

Решение. Копјето чини $25 - 22 = 3$ златници, коњот чини $25 - 15 = 10$ златници и мечот чини $25 - 17 = 8$ златници. Конечно, штитот чини $25 - (3 + 10 + 8) = 25 - 21 = 4$ златници.

67. Ана му дала половина од своите пари на Михајло, а потоа Михајло и дал на Ана третина од сумата која ја имал во тој момент. Се покажало дека на кракот и двајцата имале по 80 денари. Колку пари имал секој од нив на почетокот?

Решение. По втората размена $\frac{2}{3}$ од парите на Михајло биле еднакви на 80 денари, што значи дека Михајло ѝ дал на Ана $80 : 2 = 40$ денари. Значи, тој имал $80 + 40 = 120$ денари, а Ана имала $80 - 40 = 40$ денари. Бидејќи Ана во првата размена му дала на Михајло половина од своите пари, заклучуваме дека таа на почетокот имала $2 \cdot 40 = 80$ денари, а Михајло имал $120 - 40 = 80$ денари.

68. Во двата џеба Ана има 35 денари. Ако од десниот џеб стави во левиот џеб онолку денари колку што има во него, тогаш во десниот џеб ќе останат 3 денари повеќе отколку во левиот џеб. Колку денари има Ана на почетокот во секој џеб?

Решение. По преместувањето на парите во левиот џеб, Ана во него ќе има $(35 - 3) : 2 = 32 : 2 = 16$ денари. Ана на почетокот во левиот џеб имала двапати помалку пари отколку што имала по преместувањето, што значи дека таа имала $16 : 2 = 8$ денари. Конечно, во десниот џеб Ана имала $35 - 8 = 27$ денари.

69. Мајката, таткото и Горјан отишле во слаткарница. Мајката порачала кафе и торта, таткото порачал кафе и сок, а Горјан порачал торта и сок. Секој добил одделна сметка за својата порачка. Мајката требало да плати 132 денари, таткото 101 денар и Горјан требало да плати 185 денари.

а) Колку пари треба да платат сите тројца заедно?

б) Колку чинат кафето, сокот и тортата одделно?

Решение. а) Сите тројца заедно треба да платат $132 + 101 + 185 = 418$ денари.

б) Значи, 2 сока, 2 торти и 2 кафиња чинат 418 денари, па затоа 1 сок, 1 торта и 1 кафе чинат $418 : 2 = 209$ денари. Значи, сокот чини $209 - 132 = 77$ денари, тортата чини $209 - 101 = 108$ денари и кафето чини $209 - 185 = 24$ денари.

70. Тројца пријатели во слаткарница купиле: првиот купил 4 колачи, 1 сладолед и 10 бомбони за 240 денари, вториот купил 3 колачи, 1 сладолед и 7 бомбони за 180 денари, а третиот купил 1 колач, 1 сладолед и 1 бомбона. Колку денари плати третиот пријател?

Решение. Ако од купените работи на првиот ги одземеме купените работи на вториот добиваме дека 1 колач и 3 бомбони чинат 60 денари. Според тоа, 2 колачи и 6 бомбони чинат 120 денари. Сега ако од купените работи на вториот пријател одземеме 2 колачи и 6 бомбони добиваме дека 1 колач, 1 сладолед и 1 бомбона чинат 60 денари.

71. Три баклави и два сока заедно чинат 310 денари, а четири баклави и 3 сока заедно чинат 430 денари. Колку пари заедно чинат 5 сока и 5 баклави?

Решение. Ако од групата од 4 баклави и 3 сока отстраниме 3 баклави и 2 сока добиваме 1 баклава и 1 сок, кои заедно чинат $430 - 310 = 120$ денари. Според тоа, 5 баклави и 5 сока заедно чинат $5 \cdot 120 = 600$ денари.

72. Два молива и 5 тетратки чинат 110 денари, а 8 моливи и 2 тетратки чинат 80 денари. Колку чини еден молив, а колку една тетратка?

Решение. Осум моливи и 20 тетратки чинат $4 \cdot 110 = 440$ денари. Според тоа, $20 - 2 = 18$ тетратки чинат $440 - 80 = 360$ денари, па затоа една тетратка чини $360 : 18 = 20$ денари. Конечно, еден молив чини $(110 - 5 \cdot 20) : 2 = 5$ денари.

73. За новогодишните пакетчиња во една компанија купиле 11 кукли и 13 мечиња, за што вкупно платиле 14200 денари. Познато е дека 5 кукли и 6 мечиња заедно чинат 6500 денари. Колку вкупно чинат една кукла и 1 мече? Колку одделно чинат една кукла и едно мече?

Решение. Бидејќи 5 кукли и 6 мечиња заедно чинат 6500 денари, ако помножиме со 2 добиваме дека 10 кукли и 12 мечиња заедно чинат 13000 денари. Сега ако од групата од 11 кукли и 13 мечиња извадиме 10 кукли и 12 мечиња, добиваме дека 1 кукла и 1 мече заедно чинат $14200 - 13000 = 1200$ денари. Според тоа, 5 кукли и 5 мечиња заедно чинат $5 \cdot 1200 = 6000$ денари, па како 5 кукли и 6 мечиња заедно чинат 6500 денари, добиваме дека 1 мече чини $6500 - 6000 = 500$ денари. Конечно, 1 кукла чини $1200 - 500 = 700$ денари.

74. Во две училишта донеле компјутери, принтери и телевизори. Првото училиште добило 3 компјутери, 1 принтер и 2 телевизори со вкупна

вредност 49400 денари. Второто училиште добило 3 компјутери и 1 принтер со вкупна вредност 33700 денари. Ако еден компјутер е 8300 денари поскап од еден принтер, определи ја цената на еден телевизор, на еден компјутер и на еден принтер.

Решение. Два телевизори чинат $49400 - 33700 = 15700$ денари. Значи, еден телевизор чини $15700 : 2 = 7850$ денари. Ако наместо принтер второто училиште добие еден компјутер повеќе тогаш набавката ќе чинеше 8300 денари повеќе, што значи дека 4 компјутери чинат $33700 + 8300 = 42000$ денари. Значи, еден компјутер чини $42000 : 4 = 10500$ денари. Конечно, еден принтер чини $10500 - 8300 = 2200$ денари.

75. Павел купил две чоколада од по 72 денари. На продавачот му дал банкнота од 200 денари. Колку денари му вратил продавачот?

Решение. Двете чоколада чинат $2 \cdot 72 = 144$ денари. Продавачот на Павел му вратил $200 - 144 = 56$ денари.

76. Со парите што ги има Горјан може да купи 15 мини-чоколади и една голема чоколада. Горјан си купил една голема чоколада и му останале 300 денари. Колку пари чини една мини-чоколада?

Решение. Според условот на задачата 15 мини-чоколади чинат 300 денари. Значи, една мини-чоколада чини $300 : 15 = 20$ денари.

77. Тодор од книжарницата сакал да купи неколку моливи и за таа цел дал банкнота од 100 денари. Во последен момент се сетил дека треба да купи и гума која чини 20 денари. Се покажало дека продавачката му вратила толку пари колку што чинеле моливите. Колку пари платил Тодор за гумата и моливите?

Решение. Сумата $100 - 20 = 80$ денари е двапати поголема од сумата која Тодор ја платил за моливите. Според тоа, моливите чинеле $80 : 2 = 40$ денари, а за гумата и моливите Тодор платил $40 + 20 = 60$ денари.

78. Катерина има 2500 денари и треба да купи 27 чоколади од по 60 денари. Колку најмногу бомбониери од 180 денари таа може да купи?

Решение. За купување на чоколадите Катерина ќе потроши $27 \cdot 60 = 1620$ денари. Значи, за купување на бомбониери ќе и останат $2500 - 1620 = 880$ денари. Конечно, бидејќи $880 = 4 \cdot 180 + 160$ заклучуваме дека Катерина ќе купи 4 бомбониери, а за петтата ќе и недостасуваат 20 денари.

79. Колку третратки може да се купат со 20 евра и 50 евроценти, ако една тетратка чини 1 евро и 35 евроценти?

Решение. Имаме вкупно $20 \cdot 100 + 50 = 2050$ евроценти, а една тетратка чини $100 + 35 = 135$ евроценти. Бидејќи

$$2050 = 15 \cdot 135 + 25$$

заклучуваме дека со 20 евра и 50 евроценти може да се купат 15 тетратки и ќе ни преостанат 25 евроценти.

80. Шест исти чоколади чинат 630 денари. Колку пари платил Горјан, ако купил 5 такви чоколади?

Решение. Една чоколади чини $630 : 6 = 105$ денари. Горјан за 5 такви чоколади платил $5 \cdot 105 = 525$ денари.

81. Два и половина ѓеврек чинат колку еден ѓеврек и 15 денари. Колку чини еден ѓеврек?

Решение. Бидејќи два и половина ѓеврек чинат колку еден ѓеврек и 15 денари, добиваме дека еден и половина ѓеврек чини 15 денари. Но, во еден и половина ѓеврек има три половици ѓеврек, па затоа половина ѓеврек чини $15 : 3 = 5$ денари. Конечно, еден ѓеврек чини $2 \cdot 4 = 10$ денари.

82. Во продавница за новогодишни украси има три вида елки: мала, средна и голема. Средната елка чини 1050 денари. Големата елка е двапати поскапа од средната елка. Малата елка е трипати поевтина од големата елка. Колку пари чини малата елка?

Решение. Големата елка е двапати поскапа од средната елка, па затоа таа чини $2 \cdot 1050 = 2100$ денари. Сега, малата елка е трипати поевтина од големата елка, па затоа таа чини $2100 : 3 = 700$ денари.

83. Киро имал 100 денари и сѐ купил чоколадо. Тој пресметал дека со половина од парите кои му останале може да си купи уште две такви чоколадо. Колку пари чини едно чоколадо?

Решение. Бидејќи со половина од парите кои му останале Киро може да си купи уште 2 такви чоколадо, со сите пари кои му останале тој може да си купи уште 4 такви чоколадо. Но, тој веќе купил 1 чоколадо, па затоа 100 денари чинат $1 + 4 = 5$ чоколадо. Според тоа, 1 чоколадо чини $100 : 5 = 20$ денари.

84. Три колачи и половина колач чинат колку 2 колачи и уште 4 евра и 50 евроценти. Колку евра чини еден колач?

Решение. Според условот на задачата еден и половина колач чини 4 евра и 50 евроценти. Значи, три половини колач чинат 450 евроценти. Според тоа, половина колач чини $450:3=150$ евроценти. Конечно, еден колач чини $2 \cdot 150 = 300$ евроценти, односно 3 евра.

85. Два чадори и една топка чинат 2700 денари, а две топки и еден чадор чинат 1800 денари. Колку пари чини еден чадор?

Решение. Ако ги ставиме на купче двата чадори и едната топка и двете топки и едниот чадор, добиваме дека три чадори и три топки чинат $2700 + 1800 = 4500$ денари. Според тоа, еден чадор и една топка чинат $4500:3=1500$ денари. Но, два чадори и една топка чинат 2700 денари, па затоа еден чадор чини $2700 - 1500 = 1200$ денари.

86. Еден козинак и три шарени јајца чинат 320 денари. Три козинака и четири шарени јајца чинат 760 денари. Колку чини еден козинак, а колку едно шарено јајце?

Решение. Бидејќи еден козинак и три шарени јајца чинат 320 денари, заклучуваме дека три козинака и девет шарени јајца чинат $3 \cdot 320 = 960$ денари. Понатаму, три козинака и четири шарени јајца чинат 760 денари, па затоа $9 - 4 = 5$ шарени јајца чинат $960 - 760 = 200$ денари. Значи, едно шарено јајце чини $200:5 = 40$ денари. Конечно, еден козинак чини $320 - 3 \cdot 40 = 200$ денари.

87. Семејството Јакопетрески купило телевизор кој чини 999 евра. Тоа платило 423 евра, а останатата сума требало да ја плаќа на шест еднакви месечни рати. Колку пари треба секој месец да уплаќа семејството Јакопетрески?

Решение. Откако платило 423 евра, останале да се платат уште $999 - 423 = 576$ евра. Овие пари треба да се платат на шест еднакви месечни рати, па затоа секој месец треба да се плаќаат по $576:6=96$ евра.

88. За новогодишните пакетчиња на своите деца мајката на Ана купила 14 чоколади и 9 чоколадни јајца и платила 3315 денари. Мајката на Татјана купила 8 исти чоколади и 6 исти чоколадни јајца како и мајката на Ана и платила 2010 денари. Колку пари чини едно чоколадо, а колку едно чоколадно јајце?

Решение. Според условот на задачата мајката на Татјана купила 8 чоколади и 6 чоколадни јајца за 2010 денари, што значи дека двојно помалку, т.е. 4 чоколади и 3 чоколадни јајца чинат 1005 денари. Но,

ако помножине со 3 добиваме дека 12 чоколади и 9 чоколадни јајца чинат 3015 денари. Ако од групата од 14 чоколади и 9 чоколадни јајца одземеме 12 чоколади и 9 чоколадни јајца добиваме 2 чоколади и тие чинат $3315 - 3015 = 300$ денари. Според тоа, една чоколада чини $300 : 2 = 150$ денари. Конечно, едно чоколадно јајце чини $(1005 - 4 \cdot 150) : 3 = (1005 - 600) : 3 = 405 : 3 = 135$ денари.

89. Ангел купил три пакетчиња бомбони, а Ѓорѓи купил две пакетчиња од истите бомбони. Ангел и Ѓорѓи го сретнале Павел и трите момчиња подеднакво ги поделиле сите бомбони и се договориле дека така ќе си ги поделат и трошоците. Откако ги направиле пресметките се покажало дека Павел треба за бомбоните на пријателите да им даде 100 денари.

а) Колку чини едно пакетче бомбони?

б) По колку денари треба да добијат Ангел и Ѓорѓи?

Решение. а) Децата поделиле $2 + 3 = 5$ пакетчиња бомбони. Бидејќи Павел дал 100 денари, петте пакетчиња бомбони чинеле $3 \cdot 100 = 300$ денари. Според тоа, 1 пакетче бомбони чиниле $300 : 5 = 60$ денари.

б) За три пакетчиња Ангел платил $3 \cdot 60 = 180$ денари, а за две пакетчиња Ѓорѓи платил $2 \cdot 60 = 120$ денари. Затоа, Ангел треба да добие $180 - 100 = 80$ денари, а Ѓорѓи треба да добие $120 - 100 = 20$ денари.

90. Ако Марија му поклони на Ласко 10 денари, тогаш двајцата ќе имаат еднакви суми пари. Ако Ласко и поклони на Марија 20 денари, тогаш Марија ќе има четири пати повеќе пари од Ласко. Колку пари има Марија, а колку Ласко?

Решение. Бидејќи кога Марија му поклонува на Ласко 10 денари, тие имаат исти суми пари, заклучуваме дека Марија има 20 денари повеќе од Ласко. Значи, ако Ласко има x денари, тогаш Марија има $x + 20$ денари. Кога Ласко и поклонува на Марија 20 денари, тој има $x - 20$ денари, а Марија има $(x + 20) + 20 = x + 40$ денари. Затоа важи $4(x - 20) = x + 40$, од каде добваме $x = 40$. Значи, Ласко има 40 денари, а Марија има $40 + 20 = 60$ денари.

91. Ако Јагода и поклони на Натка 10 денари, тогаш тие ќе имаат еднакви суми пари. Ако Натка и поклони на Јагода 10 денари, тогаш Јагода ќе има двапати повеќе пари од Натка. Колку пари има Натка, а колку Јагода?

Решение. Нека еднакви суми пари се x . Тогаш Јагода има $x + 10$, а Натка има $x - 10$ денари. Кога Натка и поклонува на Јагода 10 денари, тогаш Јагода има $x + 20$, а Натка има $x - 20$ денари и важи $x + 20 = 2(x - 20)$, од каде добиваме $x = 60$. Според тоа, Јагода има 70 денари, а Натка има 50 денари.

92. Павел и Томи сакат да купат иста збирка по математика. За купување на збирката на Павел му недостасуваат 132 денари, а на Томи му недостасуваат 164 денари. Затоа решиле заеднички да ја купат збирката задачи. Меѓутоа, и тогаш немале доволно пари и им недостасувале 48 денари. Определи ја цената на збирката. Колку пари има Павел, а колку Томи?

Решение. Нека цената на збирката е x . Тогаш Павел има $x - 132$, а Томи има $x - 164$ денари. Бидејќи при заедничко купување на збирката им недостасуваат 48 денари, добиваме

$$x - 132 + x - 164 + 48 = x$$

од каде наоѓаме $x = 248$. Значи, цената на збирката е 248 денари, Павел има 116 денари, а Томи има 84 денари.

93. Софија имала 3240 денари. Третина од парите таа ги потрошила за учебници, а со четвртина од останатите пари купила ранец. Колку пари и останале на Софија?

Решение. За учебници Софија потрошила $3240 : 3 = 1080$ денари, што значи дека пред да купи ранец таа имала $3240 - 1080 = 2160$ денари. Сега, од овие 2160 денари за ранец потрошила $2160 : 4 = 540$ денари, што значи дека и останале $2160 - 540 = 1620$ денари.

94. Вера и Фросина имаат определени суми пари и решиле да купат иста книга. Меѓутоа, за купување на книгата на Вера и недостасувале 2 евра, а на Фросина и недостасувале 7 евра. Затоа решиле заедно да ја купат книгата, но и тогаш немале доволно пари. Колку пари чини книгата, ако нејзината цена изразена во евра е природен број?

Решение. Нека цената на книгата е x евра. Тогаш Вера има $x - 2$ евра, а Фросина има $x - 7$ евра. Бидејќи кога заедно сакаат да ја купат книгата повторно немаат доволно пари, добиваме $x - 2 + x - 7 < x$ што значи $x < 9$. Но, на Фросина и недостасуваат 7 евра, што значи дека книгата чини повеќе од 7 евра, т.е. $x > 7$. Според тоа, $7 < x < 9$, па затоа $x = 8$ евра.

95. Елена има еднаков број монети од 1 и 2 денари. Ако купи тетратка и истата ја плати само со монети од 2 денара, ќе и преостанат три монети од 2 денара. Ако сака тетратката да ја плати само со монети од 1 денар, тогаш ќе и недостигаат 5 монети. Колку монети има Елена?

Решение. Нека Елена има x монети од 2 денара и x монети од 1 денар. Кога тетратката ја плаќа со монети од 2 денара, тогаш Елена дава $x - 3$ монети, а ако сака да плати со монети од 1 денар, тогаш и требаат $x + 5$ монети. Затоа, $x + 5 = 2(x - 3)$, од каде добиваме $x = 11$. Значи, Елена има 11 монети од 1 денар и 11 монети од 2 денара, т.е. таа вкупно има 22 монети.

96. Владо, Натка и Јагода заедно имаат 600 денари. Кога Владо ќе потроши $\frac{1}{2}$ од своите пари, Натка ќе потроши $\frac{2}{3}$ од своите пари и Јагода ќе потроши $\frac{4}{5}$ од своите пари, им остануваат еднакви суми пари. Колку пари има секој од нив?

Решение. Еднаква сума пари која му останува на секој од нив да ја означиме со x . Значи, Владо имал $2x$ денари, Натка имала $3x$ денари и Јагода имала $5x$ денари. Според тоа, $2x + 3x + 5x = 600$, па затоа $x = 60$ денари. Конечно, Владо имал 120 денари, Натка имала 180 денари и Јагода имала 300 денари.

97. Мала торта се расекува на 8 еднакви парчиња, а голема на 12 еднакви парчиња. Секое добиено парче чини еднаков цел број евра. Иван и Маја имаат еднакви суми пари. Со своите пари Иван си купил 5 мали торти, а Маја си купила 3 големи торти и ѝ останале 8 евра. Колку пари имал секој од нив?

Решение. Нека едно парче торта чини x евра. Тогаш Иван потрошил $5 \cdot 8x = 40x$ евра, а Маја потрошила $3 \cdot 12x = 36x$ евра и ѝ останале 8 евра. Двајцата имале еднакви суми пари, па затоа $40x = 36x + 8$, од каде добиваме $x = 2$ евра. Според тоа, Иван и Маја имале по $40 \cdot 2 = 36 \cdot 2 + 8 = 80$ евра.

98. Ивана и Илија имаат еднакви суми пари. Понатаму Раде и Румена имаат еднакви суми пари при што секој од нив има 1000 денари повеќе од Ивана. Павел има толку пари колку што имаат Румена и Илија заедно. Петмината заедно имаат 9000 денари.

а) Колку денари има секое дете?

б) Децата се наредени во колона еден по друг во следниот редослед: Раде, Ивана, Илија, Павел и Румена. Првиот му дал половина од своите пари навториот, потоа вториот му дава на третиот половина од парите кои ги има во моментот итн. Колку пари ќе има Румена по ваквата размена?

Решение. а) Нека Ивана и Илија имаат по x денари. Тогаш Раде и Румена имаат по $x+1000$ денари, а Павел има $x+x+1000=2x+1000$ денари. Сите заедно имаат 9000 денари, па затоа

$$2x + 2(x+1000) + 2x + 1000 = 9000,$$

од каде добиваме $x=1000$. Според тоа, Ивана има 1000 денари, Илија има 1000 денари, Раде има 2000 денари, Румена има 2000 денари и Павел има 3000 денари.

б) Раде ѝ дава на Ивана половина од неговите пари, т.е. ѝ дава 1000 денари, па сега Ивана ќе има 2000 денари. Понатаму, Ивана му дава на Илија 1000 денари, што значи дека Илија ќе има 2000 денари. Илија му дава на Павел 1000 денари, што значи дека Павел сега ќе има 4000 денари. Конечно, Павел ѝ дава на Румена 2000 денари, па таа на крајот од размената ќе има 4000 денари.

99. Илија бил во книжарница е забележал дека 11 гумички чинат колку што чинат заедно 2 острилки и 1 пенкало, а 1 пенкало чини колку што чинат заедно 1 острилка и 2 гумички. Колку гумички чини 1 пенкало?

Решение. Нека 1 гумичка чини x денари, 1 острилка чини y денари и 1 пенкало чини z денари. Од условот на задачата следува дека $11x=2y+z$ и $z=2x+y$. Според тоа, $11x=2y+2x+y$, па затоа $9x=3y$, од каде добиваме $y=3x$. Сега ако од последното равенство замениме во $z=2x+y$, добиваме $z=2x+y=2x+3x=5x$, што значи дека 1 пенкало чини колку што чинат 5 гумички.

100. Елена била на пазар и забележала дека 3 kg портокали чинат колку што чинат 2 kg мандарини, а 3 kg мандарини чинат колку што чини 1 kg киви. Колку килограми портокали може да се купат за парите колку што чинат 2 kg киви?

Решение. За парите колку што чинат 2 kg киви може да се купат $2 \cdot 3 = 6$ kg мандарини. Понатаму, за парите колку што чинат 6 kg мандарини може да се купат $(6:2) \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9$ kg портокали. Значи, за парите колку што чинат 2 kg киви може да се купат 9 kg портокали.

101. Татјана купила неколку чоколади и неколку сокови. Цената на едно чоколадо е 40 денари, а цената на еден сок е 50 денари. Татјана потрошила 460 денари и имала повеќе чоколади од сокови. Колку чоколади и колку сокови купила Татјана?

Решение. Нека Татјана купила x чоколади и y сокови. Таа потрошила 460 денари, па затоа $40x + 50y = 460$, односно $4x + 5y = 46$. Бидејќи $4x$ е парен број и 46 е парен број заклучуваме дека $5y$ мора да е парен број. Но, $y < 10$, па затоа y може да е 2, 4, 6 или 8. Со непосредна проверка добиваме дека можни решенија се $y = 2$ и $y = 6$. За $y = 2$ добиваме $x = 7$ и како $2 < 7$, тоа е едно решение на задачата. За $y = 6$ добиваме $x = 4$, па како $4 < 6$ заклучуваме дека ова не е решение на задачата. Значи, Татјана купила 7 чоколади и 2 сока.

102. Два принтери и три лаптопи заедно чинат 3800 евра. Шест принтери и седум лаптопи заедно чинат 9600 евра. Колку чинат заедно еден принтер и еден лаптоп? (Сите принтери се од ист вид и сите лаптопи се од ист вид.)

Решение. Ако од групата од шест принтери и седум лаптопи отстраниме два принтери и три лаптопи ни остануваат 4 принтери и 4 лаптопи и тие заедно чинат $9600 - 3800 = 5800$ евра. Според тоа, 1 принтер и 1 лаптоп заедно чинат $5800 : 4 = 1450$ евра.

103. Билет за театарска претстава чини 10 евра за дете и 17 евра за возрастно лице, при што нема намалување за групна посета. Група посетители вкупно платила 199 евра. Колку возрасни лица и колку деца има во групата?

Решение. Бидејќи платената сума завршува на цифрата 9, а сумата која ја платиле децата сигурно завршува на цифрата 0, заклучуваме дека сумата која ја пратиле возрасните завршува на цифрата 9. Значи, треба да најдеме содржател на бројот 17 кој е помал од 199 и чија цифра на единиците е 9. Единствен таков број е $119 = 7 \cdot 17$. Според тоа, во групата имало 17 возрасни лица и тие платиле 119 евра, а останатите $199 - 119 = 80$ евра се дадени за билети за деца, што значи дека во групата имало $80 : 10 = 8$ деца.

104. Иван забележал дека 55 еднакви бомбони чинат 1 евро и 17 евроценти помалку од 64 од истите бомбони. Колку чинат 8 бомбони од овој вид?

Решение. Од условот на задачата следува дека $64 - 55 = 9$ бомбони од дадениот вид чинат 1 евро и 17 евроценти, односно $100 + 17 = 117$ евроценти. Според тоа, 1 бомбона чини $117 : 9 = 13$ евроценти, што значи дека 8 бомбони чинат $8 \cdot 13 = 104$ евроценти.

III.3. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

105. Ана започнала да ја пишува домашната работа во 16 часот и 15 минути и завршила во 18 часот и 5 минути. Таа домашната работа по математика ја пишувала 55 минути, а останатото време го потрошила за пишување домашната работа по македонски јазик. Колку време Ана ја пишувала домашната работа по македонски јазик?

Решение. Од 16 часот и 15 минути до 18 часот и 5 минути поминале 1 час и 50 минути, односно 110 минути. Ана за домашната работа по математика потрошила 55 минути, што значи дека за домашната работа по македонски јазик потрошила $110 - 55 = 55$ минути.

106. Илија тргнал со воз од Љубљана за Скопје вечерта во 10:25 часот и стигнал во Скопје следниот ден наутро во 6:15 часот. Колку време патувал Илија?

Решение. Од 10:25 часот вечерта до полноќ има 1 час и 35 минути, а до 6:15 часот следното утро има 6 часа и 15 минути. Според тоа, Илија патувал $1\text{ h }35\text{ min} + 6\text{ h }15\text{ min} = 7\text{ h }50\text{ min}$.

107. Илија со возот од Скопје за Белград патувал од вечерта во 22:15 часот, до утрото следниот ден во 4:05 часот. Колку време патувал Илија?

Решение. Вечерта патувањето траело $24\text{ h} - 22\text{ h }15\text{ min} = 1\text{ h }45\text{ min}$ и следниот ден патувањето траело $4\text{ h }5\text{ min}$. Според тоа, Илија патувал $1\text{ h }45\text{ min} + 4\text{ h }5\text{ min} = 5\text{ h }50\text{ min}$.

108. Таткото на Иван купил елка и во 18:35 часот тргнал од продавницата да си оди дома. Тој за еден час изминува 6 km , а продавницата е оддалечена од неговата кука 3 km . Таткото ветил дека во 19:00 часот ќе ја однесе елката дома. Колку минути тој ќе задоцни?

Решение. Таткото патот од продавницата до дома ќе го помине за 30 минути. Според тоа, тој дома ќе пристигне во 19:05 часот, што значи дека ќе задоцни 5 минути.

109. Павлина отишла на гости кај Михаил. Таа од дома тргнала во 9:20 часот и стигнала кај Михаил во 10:10 часот. На враќање Павлина одела по истиот пат, но се движела двапати побрзо и дома стигнала во 12:15 часот. Колку време Павлина била кај Михаил дома?

Решение. Павлина од дома до куќата на Михаил пристигнала за 50 минути. Бидејќи кога се враќала дома одела по истиот пат, но се движела двапати побрзо заклучуваме дека таа од кај Михаил до дома стигнала за $50 : 2 = 25$ минути. Бидејќи дома стигнала во 12:15 часот, заклучуваме дека таа од кај Михаил тргнала во 11:50 часот. Конечно, Павлина кај Михаил дома била од 10:10 до 11:50 часот, односно 1 час и 40 минути

110. Во 10 часот 57 минути и 53 секунди (10:57:53) Михаил започнал телефонски разговор, кој траел 177 секунди. Во колку часот Михаил го завршил разговорот:

Решение. Бидејќи $177 = 2 \cdot 60 + 57$ во 177 секунди има 2 минути и 57 секунди. Тоа значи дека Михаил телефонскиот разговор го завршил во 10 часот 59 минути и $53 + 57 = 110$ секунди. Но, 110 секунди се 1 минута и 50 секунди, што значи дека Михаил телефонскиот разговор го завршил во 11 часот и 50 секунди (11:00:50).

111. На еден добротворен концерт децата од КУД Македонски свезди пред публиката настапиле со неколку песни. Првата песна траела 5 минути и 28 секунди, втората песна траела 6 минути и 11 секунди, третата траела 4 минути и 37 секунди и последната траела 7 минути и 5 секунди. Колку време траел настапот на КУД Македонски свезди?

Решение. Вкупното време во кое настапиле децата од КУД Македонски свезди е еднакво на

$$\begin{aligned} 5 \text{ min } 28 \text{ sec} + 6 \text{ min } 11 \text{ sec} + 4 \text{ min } 37 \text{ sec} + 7 \text{ min } 5 \text{ sec} &= 22 \text{ min } 81 \text{ sec} \\ &= 23 \text{ min } 21 \text{ sec}. \end{aligned}$$

112. Продавач има на располагање пакети од по 100 листови. За 6 секунди продавачот брои 10 листови. Определи го најкраткото време за кое продавачот може да ги подготви листовите за купец кој сака да купи 70 листови.

Решение. Продавачат најбрзо може да ги подготви листовите ако од пакет со 100 листа извади 30 листа. Овие 30 листа тој може да ги преброи за $3 \cdot 6 = 18$ секунди и тоа е најкраткото време за кое може да се подготват листовите за овој купец.

113. Самоил имал железна цевка долга 10 m , која ја расекол на цевки со должина од по 1 m . За едно сечење му требале по 4 минути, а меѓу секои две сечења тој одмарал по 3 минути. За колку минути Самоил ја расекол цевката?

Решение. Самоил цевката ја расекол на $10:1=10$ помали цевки. За тоа тој сечел девет пати и при деветте сечења одмарал осум пати. Според тоа, тој цевката ја расекол за $9 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 60$ минути.

114. Иван едно по друго во редица ги запишал броевите од 4 до 444:

456789101112...434444.

Тој пишува со иста брзина и за 10 секунди Иван запишувам 15 цифри. Колку секунди Иван ги запишувал овие броеви?

Решение. Иван запишал 6 едноцифрени броеви, односно 6 цифри. Потоа тој запишал 90 двоцифрени броеви, односно $2 \cdot 90 = 180$ цифри и $444 - 99 = 345$ трицифрени броеви, односно $3 \cdot 345 = 1035$ цифри. Значи, Иван запишал $6 + 180 + 1035 = 1221$ цифра. Бидејќи за 10 секунди Иван запишувал 15 цифри и пишува со иста брзина, тој за 2 секунди запишувал по 3 цифри. Конечно, од $1221:3 = 407$ следува дека Иван запишал 407 групи од по 3 цифри, за што потрошил $407 \cdot 2 = 814$ секунди.

115. За регулирање на сообраќајот на една раскрсница е поставен семафор со 3 сигнални светла, кој за автомобилите свети 57 секунди зелено, 3 секунди жолто и 23 секунди црвено и тоа во овој редослед. Едно утро Јасен забележал дека во 8:00 за автомобилите се запалило зеленото светло. Кое светло ќе свети на семафорот за автомобилите, кои се на тоа место, точно во 10:00 истиот ден?

Решение. Трите светла на семафорот вкупно светат $57 + 3 + 23 = 83$ секунди. Од 8:00 до 10:00 часот има 2 часа. Во еден час има 60 минути, што значи дека во 2 часа има $2 \cdot 60 = 120$ минути. Во една минута има 60 секунди, што значи дека во 120 минути има $120 \cdot 60 = 7200$ секунди. Имаме $7200 = 83 \cdot 86 + 62$ што значи дека до 10:00 часот на семафорот ќе се променат 86 циклуси од по 83 секунди и ќе останат 62 секунди. Од $62 - 57 - 3 = 2$ секунди, следува дека точно во 10:00 часот на семафорот ќе свети црвено светло.

116. Третина од зелената свеќа изгорува за 30 минути, а четвртина од сината свеќа изгорува за 20 минути. Ако двете свеќи се запалат истовремено, која од нив ќе изгори побрзо?

Решение. Третина од зелената свеќа изгорува за 30 минути, па затоа целата зелена свеќа ќе изгори за трипати подолго време, односно за $3 \cdot 30 = 90 \text{ min}$. Аналогно целата сина свеќа ќе изгори за четири пати подолго време од 20 минути, т.е. ќе изгори за $4 \cdot 20 = 80 \text{ min}$. Значи, побрзо ќе изгори сината свеќа.

117. Водоводцијата Дончо една метална цевка ја сече на три дела за 6 минути. За колку минути Дончо иста таква цевка ќе ја пресече на 9 делови?

Решение. Кога цевката ја сече на 3 дела, Дончо всушност прави 2 сечења. Значи, за едно сечење му се потребни $6 : 2 = 3$ минути. Кога цевката ја сече на 9 делови, Дончо прави 8 сечења, за кои му се потребни $8 \cdot 3 = 24$ минути.

118. Јана чита книга која има 240 страници. Таа за 6 минути чита една страница. Ако Јана чита секој ден по 1 час, за колку дена таа ќе ја прочита книгата?

Решение. Од $60 : 6 = 10$ следува дека Јана секој ден чита по 10 страници од книгата. Сега, бидејќи $240 : 10 = 24$ заклучуваме дека Јана книгата ќе ја прочита за 24 дена.

119. Покрај патеката во паркот на еднакво растојание едно од друго се засадени дрвја. Верверица скока последователно од дрво на дрво, при што почнува од првото дрво и не се враќа назад. По 20 секунди верверицата била на петтото дрво. По колку секунди од почетокот на скокањето верверицата ќе дојде до дваесеттото дрво, ако скока со иста брзина?

Решение. За 20 секунди верверицата прескокнува 4 еднакви растојанија меѓу првото и петтото дрво. Тоа значи дека едно растојание прескокнува за $20 : 4 = 5$ секунди. За да стигне до дваесеттото дрво таа треба да направи 19 скока, за што и се потребни $5 \cdot 19 = 95$ секунди.

120. Еден летен ден денот е двапати подолг од ноќта. Ако сонцето изгреало во 5 часот, во колку часот тоа ќе зајде?

Решение. Едно деноноќие има 24 часа. Бидејќи денот е двапати подолг од ноќта, добиваме дека ноќта трае $24 : 3 = 8$ часа. Според тоа, денот трае $24 - 8 = 16$ часа. Понатаму, сонцето изгреало во 5 часот, па затоа тоа ќе зајде во $5 + 16 = 21$ часот.

121. Џуџињата на Снежана решиле во рудникот за дијаманти да работат едно по друго, така што секое џуџе ќе работи 5 минути повеќе од претходното. Првото џуџе започнало да работи во 9:10 часот и работело 15 минути, па работело второто џуџе, па третото итн. Снежана го донела појадокот во 10:45 минути. Кое џуџе работело во тој момент?

Решение. Од 9:10 до 10:45 поминале 1 час и 35 минути, односно $60 + 35 = 95$ минути. Првото џуџе работело 15 минути, второто работело 20 минути, третото работело 25 минути, четвртото работело 30 минути, петтото работело 35 минути итн. Бидејќи

$$15 + 20 + 25 + 30 = 90 < 95 < 125 = 15 + 20 + 25 + 30 + 35,$$

заклучуваме дека кога Снежана го донела појадокот додека работело петтото џуџе.

122. Седумте џуџиња, Снежана и Дедо Мраз направиле 185 играчки за новогодишни подароци. Колку играчки направила Снежана, ако таа и Дедо Мраз направиле еднаков број играчки, а секое џуџе направило по 7 играчки помалку од Снежана?

Решение. Нека секое џуџе направило по x играчки. Тогаш Снежана и Дедо Мраз направиле по $x + 7$ играчки, па затоа сите заедно направиле $7x + 2(x + 7) = 9x + 14$ играчки. Според тоа, $9x + 14 = 185$, од каде добиваме $9x = 171$, т.е. $x = 19$. Според тоа, секое од седумте џуџиња направило по 19 играчки, а Снежана и Дедо Мраз направиле по 26 играчки.

123. Во Москва на денот на краткодневницата (23 декември) денот е за 10 часа пократок од ноќта. Определи кога изгрева Сонцето, ако тоа заоѓа во 15:48 часот.

Решение. Нека денот трае x часа. Тогаш ноќта трае $x + 10$ часа, па затоа $x + x + 10 = 24$, од каде добиваме $x = 7$ часа. Понатаму, Сонцето заоѓа во 15:48 часот, што значи дека тоа изгрева 7 часа порано, т.е. изгрева во 8:48 часот.

124. Располагаме со два песочни часовници. Кај првиот часовник целиот песок истекува од едната половина во другата половина за 25 минути, а кај вториот за 20 минути. Како со помош на овие два часовници наједноставно ќе измериме време од 30 минути?

Решение. Истовремено ги поставуваме двата часовници така што песокот ќе тече од полните во празните делови. По 20 минути вториот часовник, во кој целиот песок истекол во втората половина, го превр-

туваме. Во моментот кога во првиот часовник ќе истече целиот песок (по 25 минути) го превртуваме вториот часовник во почетната положба. До овој момент поминале 25 минути, а количеството песок кое треба да истече од вториот часовник ќе измери 5 минути. Значи, по истекувањето на песокот од вториот часовник ќе поминат $25 + 5 = 30$ минути.

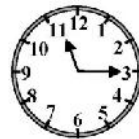
125. Горјан во 14 часот и 15 минути почнал да гледа филм, кој завршил во 16 часот и 23 минути. Во текот на прикажувањето на филмот телевизијата давала реклами кои траеле 8 минути. Колку време траел филмот?

Решение. Од 14 часот и 15 минути до 16 часот и 23 минути ипоминале 2 часа и 8 минути. Бидејќи во текот на прикажувањето на филмот телевизијата давала реклами 8 минути, добиваме дека самиот филм траел точно 2 часа.

126. На секој цел час сидниот часовник на Самоил бие толку пати, колку што покажува часовната стрелка, а на секој половина час меѓу целите часови часовникот бие по еднаш. Колку пати биел часовникот во новогодишната ноќ меѓу 11 часот и 15 минути и 1 часот и 45 минути?

Решение. Часовникот биел по еднаш во 23:30, 0:30, 1:00 и 1:30, а биел 12 пати во 24:00. Значи, сидниот часовник на Самоил во назначениот период биел $4 + 12 = 16$ пати.

127. Двата часовника на цртежот работат точно, но не покажуваат точно време. Левиот часовник е 20 минути назад. Кое ќе биде точното време кога десниот часовник ќе покажува 12:00?



Решение. Бидејќи левиот часовник е 20 минути назад, во моментот е 11 часот. Според тоа, десниот часовник е 15 минути напред. Последното значи дека кога десниот часовник ќе покажува 12:00, тогаш точното време е 11:45.

128. Двата часовника на цртежот десно работат точно, но не го покажуваат точното време. Десниот часовник е 15 минути понапред. Колку ќе биде часот кога левиот часовник ќе покажува 12 часот?



Решение. Кога десниот часовник покажува 10:15 точното време е 10:00. Но, тогаш левиот часовник покажува 10:40, што значи дека тој е 40 минути понапред од точното време. Затоа кога левиот часовник покажува 12:00 точното време е 11:20.

129. На 12 април Текнувало и неговите пријатели шрумфови истрелале ракета кон Марс. Текнувало им соопштил на пријателите дека ракетата ќе слета на Марс по извесно време. На прашањето „По колку време?“, Текнувало подигнал еден палец. Пријетлите веднаш почнале да предлагаат верзии за одговорот на Текнувало со подигнатиот прст: една секунда, една минута, еден час, еден ден, една седмица, еден месец. На тоа Текнувало рекол: „Еден од вас погоди, а останатите згрешија за 24, 60, 168, 720, 3600 пати.“ По колку време според Текнувало ракетата ќе слета на Марс.

Решение. Разликата меѓу ден и седмица е 7 пати, па затоа Текнувало немал во предвид ниту ден, ниту седмица. Аналогно, тој не сметал дека одговорот е месец, бидејќи меѓу броевите не е ниту 28, ниту 29, ниту 30 и ниту 31. Ако тоа е секунда или минута, тогаш во еден ден има $60 \cdot 24 = 1440$ минути, а во една седмица има $7 \cdot 1440 > 3600$ минути. Останува да провериме за еден час. Имаме: $3600s = 60 \text{ min} = 1h$ и во ден има 24 часа, во седмица има 168 часа и во 30 дена има 720 часа. Значи, Текнувало сметал дека ракетата ќе слета на Марс по еден час.

130. Два часовника се навиени на 4. април 2019 година во 9 часот наутро. Едниот часовник работи точно, а другиот оди напред 3 минути на час. Кој ден и во колку часот двата часовника повторно ќе покажат исто време?

Решение. Часовниците ќе покажат исто време кога двете стрелки повторно ќе се поклопат, што значи дека часовникот кој оди напред треба да побрза 12 часа. Бидејќи во 12 часа има $12 \cdot 60 = 720$ минути, за тоа да се случи ќе поминат $720 : 3 = 240$ часа, односно $240 : 24 = 10$ дена. Значи, двата часовници ќе покажат исто време дури на 14. април 2019 година.

131. Три часовници во даден момент покажуваат 9:48, 9:51 и 10:05. Од точното време часовниците се разликуваат 5 минути, 8 минути и 9 минути. Колку од часовниците заостанувале од точното време и колку е точното време во тој момент?

Решение. Разликата во покажувањето на I и II е 3 минути, во покажувањето на II и III е 14 минути, а во покажувањето на I и III е 17 минути. Бидејќи $8 + 9 = 17$, заклучуваме дека I часовник заостанува 8 или 9 минути, а III часовник избрзува 9 или 8 минути. Но, $8 - 5 = 3$, што значи дека I и II часовник заостануваат, а III часовник избрзува. Значи, заостануваат два часовника. Точното време е

$$9\text{ h }48\text{ min} + 8\text{ min} = 9\text{ h }56\text{ min} = 9:56.$$

132. Самоил јаде 5 колачи за 15 минути, а Горјан јаде 6 колачи за 36 минути. За колку минути двајцата заедно ќе изедат 27 колачи? (Секој јаде со постојан апетит.)

Решение. Самоил јаде 1 колач за $15:5 = 3$ минути, а Горјан јаде еден колач за $36:6 = 6$ минути. Според тоа, двајцата заедно за 6 минути јадат $2 + 1 = 3$ колачи. Конечно, бидејќи $27:3 = 9$ заклучуваме дека 27 колачи двајцата заедно ќе изедат за $9 \cdot 6 = 54$ минути.

133. Тони и Илија бојадисуваат дрвена ограда направена од еднакви штици. За 40 минути Тони бојадисува 10 штици, а Илија за 30 минути бојадисува 6 штици од оградата. Колку штици од оградата ќе бојадисаат двајцата заедно за 20 минути?

Решение. Бидејќи за 40 минути Тони бојадисува 10 штици, тој за 20 минути ќе бојадиса 5 штици. Понатаму, бидејќи Илија за 30 минути бојадисува 6 штици, тој за 10 минути ќе бојадиса 2 штици, што значи дека за 20 минути ќе бојадиса 4 штици. Конечно, двајцата заедно за 20 минути ќе бојадисаат $5 + 4 = 9$ штици.

134. Шест деца јадат шест јаболка за шест минути. Колку деца ќе изедат 80 јаболка за 48 минути?

Решение. Бидејќи 6 деца јадат 6 јаболка за 6 минути, заклучуваме дека 1 дете ќе изеде 1 јаболко за 6 минути. Според тоа, 1 дете ќе изеде 8 јаболка за 48 минути. Конечно, 10 деца ќе изедат 80 јаболка за 48 минути.

135. Павел, Томи и Даниел работат со еднаква брзина и за 12 часа тие можат да ја окосат ливадата на дедо Марко. За колку часа Томи и Даниел можат да ја окосат ливадата на дедо Марко, ако работат со истата брзина?

Решение. Секое од момчињата кога работи само ќе ја окоси ливадата за $3 \cdot 12 = 36$ часа. Затоа, кога заедно работат две момчиња, тие ливадата ќе ја окосат за двојно пократко време, односно за $36:2 = 18$ часа.

136. Велосипедист, движејќи се со постојана брзина, за 1 час и 24 минути поминал $\frac{7}{9}$ од патот меѓу местата A и B . Колку време му било потребно на велосипедистот да го помине половината од патот меѓу местата A и B ?

Решение. Велосипедистот за $1\text{h } 24\text{min} = 84\text{min}$ поминал $\frac{7}{9}$ од патот меѓу A и B , што значи дека $84:7 = 12\text{min}$ тој поминал $\frac{1}{9}$ од патот. Според тоа, $\frac{1}{18}$ од патот тој поминал за $12:2 = 6\text{min}$, па затоа $\frac{1}{2} = \frac{9}{18}$ од патот меѓу A и B тој го поминал за $9 \cdot 6 = 54\text{min}$.

137. Иван 40 дена последователно решавал по 3 задачи на ден. Првите задачи ги решил во четврток на 28 февруари 2019 година. На која дата и во кој ден од седмицата тој ги решил последните задачи?

Решение. Месецот февруари во 2019 година има 28 дена (оваа година не е престапна), месецот март има 31 ден. Според тоа, четириесеттиот ден е на 08.04.2019 година во понеделник.

138. Дедо Ѓорѓи тргнал на патување низ Европа на 28-ми во петок и се вратил дома на 1-ви во петок, при што низ Европа патувал 36 дена. Во кои месеци дедо Ѓорѓи го реализирал своето европско патешествие?

Решение. За да патувањето кое почнало на 28-ми и завршило на 1-ви трае 36 дена потребно е истото да се реализира во два последователни месеци кои имаат по 31 ден, т.е. да имаме $4 + 31 + 1 = 36$ дена. Последното е можно само ако патувањето е реализирано во месеците декември, јануари и февруари или пак во месеците јули, август и септември.

139. Четири седмици пред олимпијадата по математика Станко и Марко започнале да се подготвуваат за натпреварот. Станко решавал по една задача во понеделник, две – во вторник, три – во среда, четири – во четврток, пет – во петок, а во сабота и недела спортувал. Марко решавал по 3 задачи во четири последователни дена, а следните два дена спортувал. Ако двајцата започнале да решаваат задачи на 22.4.2019 година (понеделник), по колку задачи решил секој од нив до 17.5.2019 година (петок).

Решение. Од 22.4.2019 година, до 17.5.2019 година имаме 4 групи денови од понеделник до петок. Тоа значи дека Станко решил $4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 60$ задачи. Во овој период има $3 \cdot 7 + 5 = 26$ дена.

Од $26 = 4 \cdot 6 + 2$ следува дека Марко во овие 26 дена решавал по 3 задачи $4 \cdot 4 + 2 = 18$ дена. Значи, Марко решил $18 \cdot 3 = 54$ задачи.

140. Во работилницата на чичко Младен на секои три минути се изработуваат по 12 санки, а на секои две минути се пакуваат по шест од веќе изработените санки. Едно утро, пред да се отпочне со работа, во работилницата имало 30 готови незапакувани санки и немало запакувана ниту една санка. Во 9:00 часот работниците почнале со работа. Колку запакувани и колку незапакувани санки имало во 9:30 часот.

Решение. Бидејќи на секои три минути се изработуваат по 12 санки, за 30 минути се изработени 120 санки. На секои 2 минути се пакуваат по 6 санки, па затоа за 30 минути се запакувани 90 санки. Од изработените 120 санки незапакувани останале 30 санки. Во работилницата имало и 30 незапакувани санки од минатиот ден, па затоа во 9:30 часот имало 60 незапакувани санки.

141. Во месец април во 1963 година три вторници биле на парен датум. Кој ден во неделата бил 13. април?

Решение. Месецот април има 30 дена. Бидејќи меѓу два вторници има 7 дена, заклучуваме дека меѓу два вторници со парен датум има 14 дена, а меѓу три вторници со парен датум има 28 дена. Последното значи дека првиот вторник во месецот бил на 2. април, а последниот вторник во месецот бил на 30. април. Според тоа, 9. април е во вторник, па затоа 13. април е во сабота.

142. Во една престапна година се регистрирани 53 понеделници. Определи кој ден од неделата бил 6. април.

Решение. Бидејќи во престапна година има 366 дена, тоа значи дека во таа година има 52 цели седмици (364 дена) и уште два дена. Бидејќи имаме 53 понеделници, имаме два случаја: можно е во таа година да имаме 53 вторници (тогаш 1. јануари е во понеделник) или 53 недели (тогаш 1. јануари е во недела). Ако 1. јануари е во недела, тогаш 6. април е во петок, а ако 1. јануари е во недела, тогаш 6. април е во сабота.

143. Подготвувајќи се за натпревар Горјан од 5.02.2020 година започнал секој ден да решава по 5 задачи. На која дата тој ја решил 151-та задача?

Решение. Имаме $151 = 5 \cdot 30 + 1$, што значи дека Горјан 151-та задача ја решил 31-от ден од почетокот на подготовките. Бидејќи 2020 годи-

на е престапна, месецот февруари има 29 дена. Значи, во февруари Горјан решавал задачи 25 дена и останатите шест дена тој решавал во март, т.е. 151-та задача ја решил на 6.03.2020 година.

144. За колку ќе се намали бројот на деновите во годината ако сите месеци имаат по 30 дена?

Решение. Ако сите месеци имаат по 30 дена, тогаш годината ќе има $12 \cdot 30 = 360$ дена. Според тоа, во случај на обична година, бројот на деновите ќе се намали за $365 - 360 = 5$ дена, а во случај на престапна година бројот на деновите ќе се намали за $366 - 6 = 6$ дена.

145. Пред 5 години Горјан и Јована заедно имале 5 години. Колку години заедно ќе имаат Горјан и Јована по 5 години?

Решение. Бидејќи за период од 5 години секој е постар за по 5 години, денес Горјан и Јована заедно имаат $5 + 2 \cdot 5 = 15$ години. Слично, по 5 години Горјан и Јована заедно ќе имаат $15 + 2 \cdot 5 = 25$ години.

146. Таткото има четири пати повеќе години од синот и ќерката заедно, а по 24 години тој ќе има толку години колку што ќе имаат синот и ќерката заедно. Колку години сега има таткото?

Решение. По 24 години бројот на годините на синот и ќерката вкупно ќе се зголеми за $24 + 24 = 48$, а на таткото за 24. Значи, разликата меѓу годините на таткото и вкупниот број години на синот и ќерката ќе се намали за $48 - 24 = 24$. Бидејќи оваа разлика е еднаква на трикратниот збир на годините на синот и ќерката (Зошто?), добиваме дека синот и ќерката заедно имаат $24 : 3 = 8$ години, а таткото има $4 \cdot 8 = 32$ години.

147. Натка е 4 години постара од Јагода, а Владимир има толку години колку што имаат Натка и Јагода заедно. Третина од збирот на нивните година е еднаква на 16. Колку години има секој од нив?

Решение. Бидејќи третина од збирот на годините е еднаква на 16, заклучуваме дека збирот на годините е еднаков на $3 \cdot 16 = 48$. Според тоа, Владимир има $48 : 2 = 24$ години. Понатаму, Натка е 4 години постара од Јагода, што значи дека Натка има $(24 - 4) : 2 = 10$ години, а Јагода има $24 - 10 = 14$ години.

148. Пред 5 години Виолета имала 3 години помалку отколку што има денес нејзината сестра Лерка. Денес збирот на нивните години е еднаков на 16. Колку години има денес Виолета?

Решение. Нека денес Лерка има x години. Пред 5 години Виолета имала $x - 3$ години, што значи дека Виолета денес има $x - 3 + 5 = x + 2$ години. Значи, $x + x + 2 = 16$, од каде наоѓаме $x = 7$. Конечно, Виолета денес има $x + 2 = 7 + 2 = 9$ години.

149. Следната година Иван ќе има двапати повеќе години од Јагода. Колку години има Јагода, а колку Иван, ако се знае дека Иван е 7 години постар од Јагода?

Решение. Нека следната година Јагода има x години. Тогаш Иван ќе има $x + 7$ години и затоа $2x = x + 7$, од каде добиваме $x = 7$. Значи, Јагода има $x - 1 = 7 - 1 = 6$ години, а Иван има $6 + 7 = 13$ години.

150. Кога синот имал 6 години, таткото имал 30 години. Сега таткото е четири пати постар од синот. Колку години има таткото, а колку синот?

Решение. Нека синот пред x години имал 6 години. Сега тој има $6 + x$, а таткото има $30 + x$. Затоа $4(6 + x) = 30 + x$, од каде добиваме $24 + 4x = 30 + x$, односно $3x = 6$. Според тоа, $x = 6 : 3 = 2$, што значи дека сега синот има 8 години, а таткото има 32 години.

151. Кога јас сум се родил, мојот брат имал трипати повеќе години од мојата сестра. Денес јас имам 10 години и збирот на годините на сите тројца е еднаков на 46. Колку години има брат ми денес?

Решение. Јас сум роден пред 10 години, што значи дека тогаш збирот на годините на брат ми и сестра ми е еднаков на $46 - 3 \cdot 10 = 16$. Ако тогаш сестра ми имала x години, тогаш брат ми имал $3x$ години, па затоа $x + 3x = 16$, т.е. $x = 4$. Според тоа, пред 10 години брат ми имал $3 \cdot 4 = 12$ години, што значи дека денес има $12 + 10 = 22$ години.

152. Софија денес е точно 3 пати постара отколку што била пред 6 години. По колку години таа ќе биде 4 пати постара отколку што е денес.

Решение. Ако денес Софија има x години, таа пред 6 години имала $x - 6$ години, па затоа $x = 3(x - 6)$, односно $x = 9$. Нека по y години Софија е 4 пати постара отколку што е денес. По y години Софија ќе има $y + 9$ години, па затоа $y + 9 = 4 \cdot 9$, односно $y = 27$. Значи, по 27 години Софија ќе биде 4 пати постара отколку што е денес.

153. Дедото и внукот заедно имаат 65 години. Колку години има дедото, а колку внукот ако се знае дека внукот има толку месеци колку што дедото има години?

Решение. Бидејќи годината има 12 месеци, а внукот има толку месеци колку што има дедото заклучуваме дека дедото е 12 пати постар од внукот. Нека внукот има x години. Тогаш дедото има $12x$ години, па затоа $x + 12x = 65$, т.е. $x = 5$. Значи, внукот има 5 години, а дедото има $12 \cdot 5 = 60$ години.

154. Мајда е 22 години помлада од нејзината мајка, а мајката на Мајда е 22 години помлада од бабата на Мајда. Збирот на годините на Мајда, нејзината мајка и нејзината баба е 111. Колку години имала Мајда пред 6 години?

Решение. Нека Мајда има x години. Тогаш нејзината мајка има $x + 22$, а нејзината баба има $x + 22 + 22 = x + 44$ години. Затоа

$$x + x + 22 + x + 44 = 111,$$

$$3x + 66 = 111$$

$$3x = 45$$

$$x = 15.$$

Конечно, Мајда пред 6 години имала $15 - 6 = 9$ години.

155. Татко, мајка, син и ќерка заедно имаат 73 години. Таткото е постар од мајката 3 години, а сестрата е постара од братот 2 години. Вкупниот збир на годините на сите членови на семејството пред 4 години бил 58 години. Колку години има денес секој член на ова семејство?

Решение. Бидејќи пред 4 години збирот на годините на сите членови на семејството бил 58, и бидејќи $58 + 4 \cdot 4 = 74$ добиваме дека семејството денес заедно треба да има 74 години. Но, тоа денес заедно има 73 години, и како синот е најмал заклучуваме дека тој има 3 години. Според тоа, ќерката има $3 + 2 = 5$ години, а таткото и мајката заедно имаат $73 - (3 + 5) = 65$ години. Понатаму, таткото е постар 3 години од мајката, па затоа мајката има $(65 - 3) : 2 = 31$ година, а таткото има $31 + 3 = 34$ години.

156. Катерина, Елеонора и Ирина се родени во ист ден и месец, но во различни години. Денес тие заедно слават роденден и збирот на нивните години е 44. Тие решиле повторно заедно да го прослават роденденот тогаш кога збирот на нивните години повторно ќе биде двоцифрен број запишан со исти цифри. По колку години повторно заедно ќе го прославуваат роденденот?

Решение. *Прв начин.* Ако по x години повторно заедно го прославуваат роденденот, тогаш збирот на нивните години ќе биде $44 + 3x$ и

тој треба да е двоцифрен број запишан со исти цифри, т.е. број од видот $11t$, каде t е некој број поголем од 4, а помал или еднаков на 9. Значи, $44 + 3x = 11t$, од каде добиваме $3x = 11(t - 4)$. Според тоа, 3 делител на $t - 4$ и 11 е делител на x . Но, $0 < t - 4 \leq 5$, па како 3 е делител на $t - 4$, добиваме $t - 4 = 3$, односно $t = 7$. Последното значи $3x = 33$, од каде добиваме $x = 11$. Според тоа, по 11 години тие повторно заедно ќе го прославуваат роденденот.

Втор начин. Двоцифрени броеви кои се поголеми од 44 и се запишани со исти цифри се 55, 66, 77, 88 и 99. Ако по x години повторно заедно го прославуваат роденденот, тогаш збирот на нивните години ќе биде $44 + 3x$. Со непосредна проверка добиваме дека единствена можност е $44 + 3x = 77$, од каде добиваме $x = 11$. Според тоа, по 11 години тие повторно заедно ќе го прославуваат роденденот.

III.4. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

157. Ана и Борис заедно имаат 85 kg , Ана и Виктор заедно имаат 97 kg , Виктор и Ѓорѓи заедно имаат 100 kg . Колку килограми заедно имаат Борис и Ѓорѓи?

Решение. Според условот на задачата Ана, Борис, Виктор и Ѓорши заедно имаат $85 + 100 = 185\text{ kg}$. Но, Ана и Виктор заедно имаат 97 kg , па затоа Бори и Ѓорѓи заедно имаат $185 - 97 = 88\text{ kg}$.

158. Пет овци за 8 дена јадат 120 kg сено. Колку сено ќе изедат 80 овци за 15 дена.

Решение. Пет овци за 8 дена јадат 40 порции. Значи, една порција има $120 : 40 = 3\text{ kg}$. Осумдесет овци за 15 дена јадат $80 \cdot 15 = 1200$ порции. Според тоа, 80 овци за 15 дена ќе изедат $1200 \cdot 3 = 3600\text{ kg}$ сено.

159. Трговецот Марко измешал определено количество бел грав со цена 100 денари и 100 kg црн грав со цена 60 денари. Целиот грав го продавал по цена 75 денари за килограм и остварил иста заработувачка. Колку килограми грав имало од по 100 денари?

Решение. Нека има $x\text{ kg}$ грав од по 100 денари. Тогаш

$$100x + 60 \cdot 100 = (x + 100) \cdot 75, \text{ т.е. } 25x = 1500,$$

од каде следува $x = 1500 : 25 = 60\text{ kg}$.

160. Кофа полна со вода има маса 13 kg , а празната кофа има маса 1 kg .

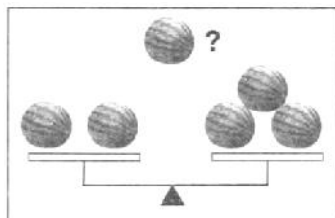
Горјан на коњот Вранец му дал кофа полна со вода и коњот испил третина од содржината на кофата. Определи ја масата на кофата заедно со преостанатата вода?

Решение. Водата во полна кофа има $13 - 1 = 12\text{ kg}$. Коњот Вранец испил $12 : 3 = 4\text{ kg}$ вода. Според тоа, кофата со преостанатата вода има $13 - 4 = 9\text{ kg}$.

161. Во една продавница во неколку вреќи имало 144 kg лешници. По една седмица од секоја вреќа биле продадени по 6 kg лешници, по што вкупното количество лешници се намалило четири пати, а половината од вреќите биле празни. Следната седмица од секоја од останатите вреќи биле продадени уште по 2 kg лешници. Колку килограми лешници се продадени во текот на двете седмици?

Решение. Бидејќи по првата седмица вкупното количество лешници се намалило четири пати, во продавницата останале $144 : 4 = 36\text{ kg}$ лешници. Значи, првата седмица се продадени $144 - 36 = 108\text{ kg}$ лешници и како од секоја вреќа се продадени по 6 kg заклучуваме дека имало $108 : 6 = 18$ вреќи. Понатаму, половината вреќи останале празни, што значи дека во $18 : 2 = 9$ вреќи имало лешници, па затоа втората седмица се продадени $9 \cdot 2 = 18\text{ kg}$ лешници. Конечно, во текот на двете седмици се продадени $108 + 18 = 126\text{ kg}$ лешници.

162. Во продавницата има шест лубеници со различни маси – 6 kg , 7 kg , 8 kg , 9 kg , 10 kg и 11 kg . Итар Пејо купил 2 лубеници, а Насрадин Оџа купил 3 лубеници. Трите лубеници на Насрадин Оџа имаат маса колку двете лубеници на Итар Пејо. Определи ја масата на лубеницата која останала непродана.



Решение. Збирот на масите на шесте лубеници е 51 kg . Бидејќи двете лубеници на Итар Пејо тежат колку трите лубеници на Насрадин Оџа, заклучуваме дека масата на купените лубеници треба да е делива со 2, а масата на преостанатата лубеница треба да е непарен број. Ако останала лубеницата од 7 kg , тогаш $(51 - 7) : 2 = 22\text{ kg}$ и нема две лу-

беници кои заедно имаат маса 22 kg . Ако останала лубеницата од 11 kg , тогаш $(51-11):2=20\text{ kg}$ и нема две лубеници кои заедно имаат маса 20 kg . Значи, треба да остане лубеницата со маса 9 kg и тогаш Итар Пејо ги купил лубениците од 10 kg и 11 kg , А Насрадин Оџа ги купил лубениците со маси 6 kg , 7 kg и 8 kg .

163. Трите ваги на долните цртежи се во рамнотежа. Што треба да стои на местото на прашалникот?



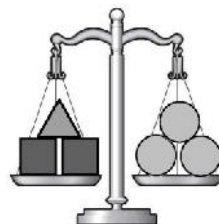
Решение. Од првата вага заклучуваме дека 1 квадратче тежи колку 3 триаголници. Сега, од втората вага следува дека 3 триаголници тежат колку што тежи 1 круг и 1 триаголник, што значи дека 1 круг тежи колку 2 триаголници. Конечно, на местото на прашалникот треба да стојат 2 триаголници.

164. Вагите прикажани на долните цртежи се во рамнотежа. Определи ја масата на срцето и на алката.



Решение. Десната вага е во рамнотежа, па затоа масата на алката е еднаква на масата на срцето и уште 120 g . Сега од левата вага добиваме дека масата на 5 срца и уште 120 g е еднаква на 300 g . Според тоа, маса на 5 срца е еднаква на $300-120=180\text{ g}$, па затоа масата на едно срце е еднаква на $180:5=36\text{ g}$. Конечно, масата на алката е еднаква на $36+120=156\text{ g}$.

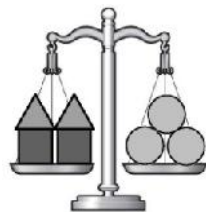
165. Вагата прикажана на цртежот десно е во рамнотежа. Масата на триаголникот е еднаква на 15 kg , а на кругот е за 4 kg помала од масата на триаголникот. Определи ја масата на квадратот.



Решение. Масата на кругот е еднаква на $15-4=11\text{ kg}$. Според тоа, масата на квадратот е еднаква на

$$(3 \cdot 11 - 15) : 2 = 9\text{ kg}.$$

166. Вагата прикажана на цртежот десно е во рамнотежа. Триаголникот има маса 53 g , а масата на кругот е за 35 g помала од масата на квадратот. Определи ја масата на квадратот.



Решение. Нека масата на кругот е x . Тогаш масата на квадратот е $x + 35$. Бидејќи вагата е во рамнотежа имаме:

$$2(x + 35) + 2 \cdot 53 = 3x$$

$$2x + 70 + 106 = 3x$$

$$x = 176\text{ g}.$$

Според тоа, масата на кругот е 176 g , а масата на квадратот е $176 + 35 = 211\text{ g}$.

167. Две јаболка заедно тежат 100 g . Првото јаболко и тег од 20 g е во рамнотежа со второто јаболко и тег од 50 g . Колку тежи секое од јаболката?

Решение. Нека масата на првото јаболко е a , а масата на второто јаболко е b . Од условот на задачата следува $a + b = 100$ и $a + 20 = b + 50$, т.е. $a = b + 30$. Според тоа, $b + 30 + b = 100$, т.е. $b = 35\text{ g}$ и $a = 100 - 35 = 65\text{ g}$.

168. Бомбона, лижавче и колаче заедно имаат маса 18 g , а 4 бомбони, 3 лижавчиња и 2 колачиња заедно имаат маса 56 g . Определи ја масата на 1 бомбона, 2 лижавчиња и 3 колачиња.

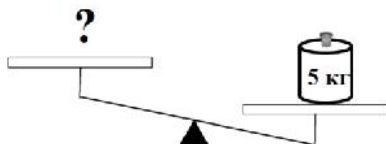
Решение. Пет бомбони, пет лижавчиња и 5 колачиња заедно имаат маса $5 \cdot 18 = 90\text{ g}$. Ако од купчето во кое има 5 бомбони, 5 лижавчиња и 5 колачиња, извадиме 4 бомбони, 3 лижавчиња и 2 колачиња, тогаш во купчето ќе останат 1 бомбона, 2 лижавчиња и 3 колачиња, па затоа тие заедно ќе тежат $90 - 56 = 34\text{ g}$.

169. Три круши и две јаболка заедно тежат 621 грам, а пет јаболка и три круши заедно тежат 972 грама. Колку грама тежат една круша и едно јаболко?

Решение. Ако од пет јаболка и три круши извадиме две јаболка и три круши добиваме три јаболка и тие тежат $972 - 621 = 351$ грам. Според тоа, едно јаболко тежи $351 : 3 = 117$ грама. Значи, три круши тежат $621 - 2 \cdot 117 = 621 - 234 = 387$ грама. Според тоа, една круша тежи

$387:3=129$ грама. Конечно, една круша и едно јаболко тежат $129+117=246$ грама.

170. Во табелата десно дадени се масите на пет животни. Кои од нив треба да ги ставиме на левиот тас на вагата за да истата биде во рамнотежа?



Еж	1 kg 20 g
Желка	1 kg 620 g
Мачка	3 kg 360 g
Зајак	3 kg 480 g
Петел	2 kg 360 g

Решение. Јасно, мачката и зајакот не може да се во комбинација, а не може ниту едно од овие животни да е со петелот. Лесно се гледа дека мачката и зајакот не може да се комбинираат ниту со ежот, ниту со желката. Според тоа, останува да провериме дали петелот, ежот и желката може да се на левиот тас на вагата и таа да е во рамнотежа. Одговорот е позитивен бидејќи:

$$1\text{ kg } 20\text{ g} + 1\text{ kg } 620\text{ g} + 2\text{ kg } 360\text{ g} = 4\text{ kg} + 1000\text{ g} = 4\text{ kg} + 1\text{ kg} = 5\text{ kg} .$$

171. Пристигнатите новогодишни пакети биле распределени за обработка меѓу службениците на поштенската испостава. Вкупната маса на пакетите кои требало да ги обработи Иван била шест пати поголема од вкупната маса на пакетите кои требало да ги обработи Павел. Иван дал два од своите најлесни пакети на Ѓорѓи и вкупната маса на останатите пакети станала четири пати поголема од вкупната маса на пакетите на Павел. Колку пакети требало да обработи Иван?

Решение. Нека масата изразена во килограми на пакетите за обработка од Павел е x килограми. Тогаш масата на пакетите за обработка од Иван е $6x$ килограми. Двата пакети, кои Иван ги дал на Ѓорѓи, имаат маса $6x - 4x = 2x$ килограми. Секој од останатите пакети има маса не помала од x килограми, бидејќи во спротивно двата пакети со најмала маса вкупно би имале маса помала од $2x$ килограми, што е противречност. Пакетите кои остануваат се најмногу 4, бидејќи во спротивно би тежеле најмалку $5x$ килограми. Задачата има 4 решения: 6, 5, 4 или 3.

Иван треба да обработи 6 пакети, на пример 6 пакети со маса од 1 kg .

Иван треба да обработи 5 пакети: 4 пакети од по 1 kg и 1 пакет од 2 kg .

Иван треба да обработи 4 пакети: 3 пакети од по 1 kg и 1 пакет од 3 kg .

Иван треба да обработи 3 пакети: 2 пакети од по 1 kg и 1 пакет од 4 kg .

Масата на пакетите кои требало да ги обработи Иван е еднаква на 6 kg , а масата на пакетите кои требало да ги обработи Павел е 1 kg .

172. Боата (Б), Мајмунот (М), Слончето (С) и Папагалот (П) решиле да се измерат кој колку тежи. Мајмунот запишал:

$$B = 48П, C = 12М, M = 3П, B = 4М, C = 36П.$$

Се покажало дека Мајмунот се измешал – броевите навистина биле точни, но сите стоеле на други места, а сите букви биле запишани на вистинските места. Колку папагали навистина тежи Боата, Мајмунот и Слончето?

Решение. Бидејќи сите маси се изразени со масите на Папагалот, заклучуваме дека Папагалот има најмала маса. Понатаму, од $C = 12М$ и $B = 4М$ заклучуваме дека мајмунот има помала маса од Слончето и Боата. Масите на Боата и Слончето се изразени двапати, преку масата на Папагалот и масата на Мајмунот, па затоа односот на нивите маси во два случаја мора да биде еднаков. При запишувањето на масите се добиени броевите: 48, 36, 12, 4, 3. Да забележиме дека имаме два пара со еднаков однос и тоа: (48, 36) и (4, 3), односно (48, 4) и (36, 3). Но во секој случај $M = 12П$, па затоа втората варијанта отпаѓа, затоа што тогаш Боата или Слончето имаат маса $3П$, па тоа ќе бидат полесно од Мајмунот, што не е точно. Затоа, $B = 48П, C = 36П$ или обратно. Првиот случај не е можен, бидејќи според условот Мајмунот сите броеви ги запишал на погрешно место. Затоа,

$$C = 48П, B = 36П, M = 12П.$$

173. Турист тргнал од местото А

кон местото С и стигнал во местото В. Колку пати растојанието кое му останало е поголемо од растојанието кое го поминал?



Решение. Од А до С има 20 должини на страната на единечните квадратчиња од мрежата. Туристот поминал 4 квадратчиња, што значи дека му останале 16 квадратчиња. Затоа растојанието кое му останало е $16 : 4 = 4$ пати поголемо од растојанието кое го поминал.

174. На местата на квадратчињата запиши ги мерните единици кои недостасуваат така што ќе биде точно равенството

$$2 \square + 70 \square = 27 \text{ dm}.$$

Решение. Имаме:

$$2 \square + 70 \square = 27 \text{ dm},$$

$$2 \square + 70 \square = 270 \text{ cm}.$$

За да збирот на левата страна биде 270 cm , потребно и доволно е да собереме 2 m и 70 cm , што значи дека

$$2 \text{ m} + 70 \text{ cm} = 200 \text{ cm} + 70 \text{ cm} = 270 \text{ cm} = 27 \text{ dm},$$

т.е. мерните единици кои недостасуваат се m и cm

175. Васил е повисок од Бојан за 2 cm , а е понизок од Ангел за 14 cm . Ако Ангел е висок 159 cm , колку е висок Бојан?

Решение. Васил е понизок од Ангел за 14 cm , што значи дека тој е висок $159 - 14 = 145 \text{ cm}$. Бојан е понизок од Васил за 2 cm , што значи дека тој е висок $145 - 2 = 143 \text{ cm}$.

176. На рафт со должина 40 cm Кирил сака да постави автомобилчиња, секое од кои има должина 4 cm . Колку автомобилчиња може да постави Кирил, ако меѓу секои две автомобилчиња остава растојание од 2 cm ?

Решение. За поставување на првото автомобилче на Кирил му се потребни 4 cm , а за поставување на секое следно автомобилче му се потребни по $4 + 2 = 6 \text{ cm}$. Откако ќе го постави првото автомобилче на Кирил му остануваат $40 - 4 = 36 \text{ cm}$. Тоа значи дека тој може да постави уште $36 : 6 = 6$ автомобилчиња, па затоа на рафтоот Кирил може да постави $1 + 6 = 7$ автомобилчиња.

177. Две штици со различни должини се поделени на еднакви делови, секој со должина 1 метар и 10 сантиметри. Првата штица е поделена со 4 сечења, а втората со 7 сечења. За колку сантиметри втората штица е подолга од првата?

Решение. Должината на секој од деловите е еднаква $100 + 10 = 110 \text{ cm}$. Првата штица е поделена со 4 сечења, што значи на 3 дела, а втората е поделена со 7 сечења, што значи на 6 дела. Последното значи дека втората штица има $6 - 3 = 3$ дела повеќе, па затоа таа е подолга за $3 \cdot 110 = 330 \text{ cm}$.

178. Ванчо и Галина биле на растојание 190 m еден од друг. Тие истовремено тргнале еден кон друг и додека Галина поминала 55 m , Ванчо поминал 15 m повеќе од неа. Колкаво е сега растојанието меѓу Ванчо и Галина?

Решение. Галина поминала 55 m , а Ванчо поминал $55 + 15 = 70\text{ m}$. Двајцата заедно поминале $55 + 70 = 125\text{ m}$, што значи дека сега растојанието меѓу нив е $190 - 125 = 65\text{ m}$.

179. Илија за 15 минути испешачил 1 km и 50 m . Колку метри ќе помине Илија ако со истата брзина оди 1 час и 5 минути?

Решение. За 15 минути Илија поминал 1050 m , што значи дека за 5 минути тој поминува $1050 : 3 = 350\text{ m}$. Понатаму, од $1\text{ h } 5\text{ min} = 65\text{ min}$ и $65 : 5 = 13$ следува дека за 1 час и 5 минути Илија ќе помине $13 \cdot 350 = 4550\text{ m}$.

180. Ана и Билјана купиле по една лента со иста должина. Ана својата лентата ја поделила на три еднакви делови, а Билјана својата лента ја поделила на пет еднакви делови. Се покажало дека деловите на Ана се за 20 cm подолги од деловите на Билјана. Колку била долга секоја од лентите кои ги купиле Ана и Билјана?

Решение. Нека должината на секој од петте дела на Билјана е x . Тогаш должината на секој од трите дела на Ана е еднаква $x + 20$. Бидејќи и во двата случаја деловите се добиени од ленти со еднакви должини важи $5x = 3(x + 20)$, од каде добиваме $x = 30\text{ cm}$. Конечно, лентите кои ги купиле Ана и Билјана биле со должина $5 \cdot 30 = 150\text{ cm}$.

181. Во еден град на главната улица во права линија се училиште, пошта и банка. Од училиштето до поштата има $1\text{ km } 215\text{ m}$, а растојанието меѓу училиштето и банката е за една третина помало. Определи го растојанието меѓу поштата и банката.

Решение. Растојанието меѓу училиштето и банката е

$$1215 - 1215 : 5 = 1215 - 243 = 972\text{ m}.$$

Ако банката е меѓу училиштето и поштата, тогаш бараното растојание е $1215 - 972 = 243\text{ m}$. Ако училиштето е меѓу банката и поштата, тогаш бараното растојание е $1215 + 972 = 2187\text{ m}$.

182. Пабло движејќи се со постојана брзина за два часа поминал 12 km .

Колку километри поминал Пабло за половина час?

Решение. Во еден час има два пати по половина час. Значи, во два часа има 4 пати по половина час. Според тоа, Пабло за половина час поминал $12 : 4 = 3 \text{ km}$.

183. Илија патувал со автомобил. Тој возел со постојана брзина и за 4 часа поминал 240 km . Колку километри поминал Илија за 2 часа и 30 минути?

Решение. За 4 часа Илија поминал 240 km , што значи дека за 1 час тој поминал $240 : 4 = 60 \text{ km}$. Последното значи дека за 30 минути Илија поминува $60 : 2 = 30 \text{ km}$, па затоа за 2 часа и 30 минутитој поминува $2 \cdot 60 + 30 = 150 \text{ km}$.

184. Автомобил движејќи се со постојана брзина за час и половина поминува 120 km . Колку километри ќе помине автомобилот за 4 часа, ако се движи со истата постојана брзина?

Решение. Во час и половина имаме 90 минути, односно три пати по 30 минути. Значи, за 30 минути автомобилот ќе помине $120 : 3 = 40 \text{ km}$, па затоа за $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 2 \cdot 30 \text{ min}$ ќе помине $2 \cdot 40 = 80 \text{ km}$. Конечно, за 4 часа автомобилот ќе помине $4 \cdot 80 = 320 \text{ km}$.

185. Еден возач со својот автомобил поминал 200000 km и притоа секое од петте тркала (четирите погонски и едено резервно) поминало еднаков број километри. Колку километри поминало секое тркало?

Решение. Секое од четирите тркала поминало по 200000 km , што значи вкупно $4 \cdot 200000 = 800000 \text{ km}$. Бидејќи возачот ги менувал тркалата рамномерно, секое тркало поминало по $800000 : 5 = 160000 \text{ km}$.

186. На растојание од 125 m кучето Рекс видело зајак и потрчало по него. Во истиот момент зајакот почнал да бега. Со еден скок зајакот прескокнува половина метар, а Рекс со еден скок прескокнува два метра. Освен тоа, додека зајакот скокнува седум пати, Рекс скокнува два пати. Колку метри претрчал Рекс од моментот кога го видел, до моментот кога го фатил зајакот?

Решение. Додека зајакот поминува $7 \cdot 50 = 350 \text{ cm}$, Рекс поминува $2 \cdot 200 = 400 \text{ cm}$. Според тоа, за исто време t Рекс поминува 50 cm по-

веќе од зајакот. Растојанието $125\text{ m} = 12500\text{ cm}$ Рекс ќе го надополни по $12500:50 = 250$ единици време t . За овие 250 единици време t Рекс ќе помине пат $250 \cdot 400 = 100000\text{ cm} = 1000\text{ m}$.

187. Возачот Мирко во три дена со камионот поминал 1634 km . Првиот и вториот ден Мирко заедно поминал 986 km , а вториот и третиот ден тој заедно поминал 1130 km . Колку километри поминувал Мирко секој од трите дена?

Решение. Во збирот $1130 + 986 = 2116\text{ km}$ се собрани километрите кои Мирко ги поминал трите дена и кон нив се додадени километрите кои Мирко ги поминал вториот ден. Според тоа, вториот ден Мирко поминал $2116 - 1634 = 482\text{ km}$. Значи, тој првиот ден поминал $986 - 482 = 504\text{ km}$, а третиот ден поминал $1130 - 482 = 648\text{ km}$.

188. Полжав во понеделник почнал да се качува на дрво високо 15 m . Преку ден се качува 3 m , а во текот на ноќта се симнува 2 m . Кој ден од седмицата полжавот ќе се искачи на врвот на дрвото?

Решение. Во текот на едно деноноќие полжавот на дрвото се искачува $3 - 2 = 1\text{ m}$. Според тоа, во првите 12 дена тој ќе се искачи 12 m и последните 3 m ќе ги искачи тринаесеттиот ден. Полжавот почнал да се качува во понеделник, што значи дека тој на врвот на дрвото ќе биде по 13 дена, т.е. во сабота.

189. Марко и Максим се натпреваруваат во трчање. Марко за 1 минута претрчува 180 метри, а Максим за 1 минута претрчува 200 метри. Марко почнал да трча една минута пред да тргне Максим. По колку време Максим ќе го стигне Марко?

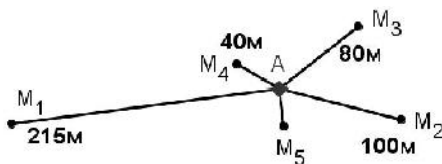
Решение. За 1 минута Максим го намалува растојанието за $200 - 180 = 20\text{ m}$. На почетокот Марко е 180 m пред Максим, што значи дека Максим ќе го стигне Марко по $180:20 = 9$ минути.

190. Горјан за 12 минути пешки поминува 1 km , а со тротинет за 30 минути поминува 6 km . Одејќи од местото A во местото B тој пешки одел 48 минути, а потоа со тротинет поминал уште 9 km . Од местото B во местото A се враќал само возејќи тротинет. Колку минути Горјан возел од B до A ?

Решение. Во првите 48 минути Горјан поминал $48:12 = 4\text{ km}$. Според тоа, патот меѓу местата A и B е долг $9 + 4 = 13\text{ km}$. Горјан со троти-

нет за 30 минути минува 6 km , што значи дека 1 km минува за $30:6 = 5$ минути. Значи, од B до A Горјан возел $13 \cdot 5 = 65$ минути.

191. Горјан по еднаш пазарувал
првиот ден од маркетот M_1 ,
вториот ден од маркетот M_2 ,
третиот ден од маркетот M_3 ,
четвртиот ден од маркетот M_4



и петтиот ден пазарувал двапати од маркетот M_5 (цртеж десно).
Тргнувал од дома и додека пазарувал вкупно поминал 994 m . Опре-
дели го растојанието од домот на Горјан (точката A) до маркетот M_5 .

Решение. Во првите четири дена Горјан поминал пат од

$$2 \cdot (215 + 40 + 80 + 100) = 2 \cdot 435 = 870\text{ m}.$$

Петтиот ден тој поминал пат долг $994 - 870 = 124\text{ m}$. Овие 124 m се
еднакви на четири должини на патот од домот на Горјан до маркетот
 M_5 , што значи дека маркетот M_5 од домот на Горјан е оддалечен
 $124:4 = 31\text{ m}$.

192. Должината на патот меѓу градовите A и B , изразена во километри, е
еднаква на најголемиот непарен двоцифрен број. Автомобил тргнал од
градоот A во 7 часот и 15 минути. Откако пристигнал во градоот B воза-
чот одморил толку минути колку што е најмалиот парен двоцифрен
број и тргнал за градоот A . Во колку часот тој пристигнал во градоот A ,
ако цело време возел со постојана брзона од 66 km на час.

Решение. Должината на патот од A до B е еднаква на 99 km . Бидејќи
возачот возел со постојана брзона од 66 km на час, тох во една насока
патот го поминал за 1 час и 30 минути. Значи, патувањето трае вкупно
З часа и одморот е 10 минути, т.е. во градоот A возачот пристигнал 3
часа и 10 минути по 7 часот и 15 минути, односно во 10 часот и 25
минути.

193. Патот меѓу градовите M и K е долг 189 km , а патот меѓу градовите
 P и K е 9 km . Колку пати патот меѓу градовите M и P е подолг од
патот меѓу градовите P и K ?

Решение. Случајот M да е меѓу K и P не е можен, па затоа можни
се два случаја и тоа:

- 1) Градот P е меѓу градовите M и K и тогаш патот меѓу градовите M и P е долг $189 - 9 = 180 \text{ km}$, што значи дека тој е подолг $180 : 9 = 20$ пати од патот меѓу градовите P и K .
- 2) Градот K е меѓу градовите M и P и тогаш патот меѓу градовите M и P е долг $189 + 9 = 198 \text{ km}$, што значи дека тој е подолг $198 : 9 = 22$ пати од патот меѓу градовите P и K .

194. Кога еден велосипедист поминал 4 km и уште половина од остатокот од патот, му останало да помине уште 4 km и третина од целиот пат. Колку километри возел велосипедистот?

Решение. Нека велосипедистот поминал x километри. Од условот на задачата ја добиваме равенката $4 + \frac{x-4}{2} + 4 + \frac{x}{3} = x$, чие решение е $x = 36$. Според тоа, велосипедистот поминал 36 km .

195. Еден трактор минува пат со должина 1 m ако предното тркало се заврти еднаш, а пат со должина 4 m ако задното тркало се заврти еднаш. Колку пат поминал тракторот ако предното тркало се завртило 39 пати повеќе од задното?

Решение. Додека задното тркало се завртува еднаш, предното тркало се завртува четири пати. Затоа ако задното тркало направи x завртувања, предното ќе направи $4x$ завртувања. Значи, $4x - x = 39$, од каде наоѓаме $x = 13$. Конечно, тракторот ќе помина $4x = 4 \cdot 13 = 52 \text{ m}$.

196. Другарите Иван, Ангел и Илија патуваат со различни превозни средства. За два часа Иван изминал 480 km . Ангел се движел двапати поспоро од Иван и Илија патувал 8 часа и изминал 200 km помалку од Иван. Познато е дека еден од тројцата другари патувал со велосипед. Кој патувал со велосипед?

Решение. Брзината на Иван е $480 : 2 = 240 \text{ km}$ на час, а брзината на Ангел е $240 : 2 = 120 \text{ km}$ на час. Илија за 8 часа поминал пат долг $480 - 200 = 280 \text{ km}$, што значи дека тој патувал со брзина $280 : 8 = 35 \text{ km}$ на час. Само брзината на Илија може да се достигне со велосипед, што значи дека Илија патувал со велосипед.

197. Автомобил тргнал од местото A во местото B , а истовремено камион тргнал од местото B во местото A . Патот меѓу овие две места е долг 462 km , а возилата се разминале по 3 часа и 30 минути од поаѓањето.

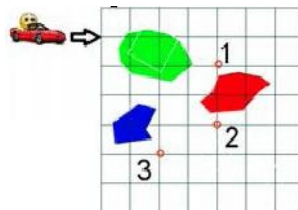
Опреди ги нивните средни брзини ако средната брзина на автомобилот е за 12 km/h поголема од средната брзина на камионот.

Решение. За 3,5 часа автомобилот поминал $3,5 \cdot 12 = 42 \text{ km}$ повеќе од камионот. Значи, ако камионот по 3,5 часа поминал $x \text{ km}$, тогаш автомобилот поминал $x + 42 \text{ km}$. Затоа $x + x + 42 = 462$, т.е. $x = 210 \text{ km}$. Според тоа, средната брзина на камионот е $210 : 3,5 = 60 \text{ km/h}$, а средната брзина на автомобилот е 72 km/h .

198. Велосипедист тргнал од Охрид за Прилеп и за првите два часа поминал 24 km . Продолжил да вози со истата брзина и четири часа по поаѓањето тој забележал дека му останале уште 9 km до средината на патот меѓу Охрид и Прилеп. Опреди ја должината на патот меѓу двата града.

Решение. Велосипедистот се движел со брзина $24 : 2 = 12 \text{ km}$ на час. По 4 часа возење тој поминал $4 \cdot 12 = 48 \text{ km}$, па како му останале уште 9 km до средината на патот меѓу Охрид и Прилеп, заклучуваме дека половината од должината на патот меѓу двата града е еднаква на $48 + 9 = 57 \text{ km}$. Според тоа, патот меѓу градовите Прилеп и Охрид е долг $2 \cdot 57 = 114 \text{ km}$.

199. На картата прикажана десно со кругчиња се означени бензиските станици на кои може да се тури гориво. Движењето е дозволено само по линиите на мрежата, а преку обоените области не смее да се поминува. Секое мало квадратче има периметар 4 km . Колку метри е најкраткото растојание до една од бензиските станици?



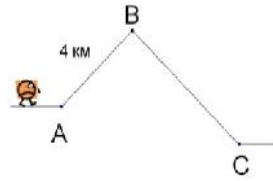
Решение. Должината на страната на едно мало квадратче е еднаква на $4 \text{ km} : 4 = 1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$.

Од местото каде се наоѓа автомобилот до бензиската станица 1 треба да се помине по 7 страни на малите квадратчиња, т.е. да се помине пат од 7000 m .

Слично, до бензиската станица 2 треба да се помине пат од 7000 m , а до бензиската станица 3 треба да се помине пат од 6000 m .

Според тоа, бараното најкратко растојание е еднакво на 6000 m .

200. Кога се качува по угорнина дедо Марко се движи со брзина од 2 km на час, а кога оди по удолнина тој се движи со брзина од 3 km на час. Растојанието меѓу местата A и B е 4 km ,



а од местото B до местото C дедо Марко стигнува за 2 часа (цртеж десно). Во понеделникот дедо Марко тргнал во 8 часот и 45 минути и одел од A до C без да застанува. Потоа 30 минути одмарал во C и тргнал назад кон местото A . Во местото B повторно одморил 30 минути и потоа без да застанува се вратил во местото A .

а) Определи го растојанието меѓу местата B и C .

б) Во колку часот дедо Марко тргнал од C кон B ?

в) Колку часа по тргнувањето од местото A дедо Марко се вратил во местото A ?

Решение. а) Од местото B до местото C дедо Марко оди 2 часа по удолнина, што значи дека растојанието од B до C е $2 \cdot 3 = 6\text{ km}$.

б) Од A до B дедо Марко патувал $4 : 2 = 2$ часа, колку што патувал и од B до C . Потоа, одмарал 30 минути во C и тргнал назад кон B . Значи, тој кон B тргнал во

$$8\text{ h }45\text{ min} + 2\text{ h} + 2\text{ h} + 30\text{ min} = 13\text{ h }45\text{ min} + 30\text{ min} = 13\text{ h }15\text{ min}.$$

в) Дедо Марко од местото C кон местото A тргнал по 4 часа и 30 минути. Потоа од C до B тој патувал $6 : 2 = 3$ часа, па одмарал 30 минути во B и од B кон A патувал $4 : 3 = 1\frac{1}{3}\text{ h} = 1\text{ h }20\text{ min}$. Значи, дедо Марко во A се вратил по

$$4\text{ h }30\text{ min} + 3\text{ h} + 30\text{ min} + 1\text{ h }20\text{ min} = 9\text{ h }20\text{ min}$$

откако тргнал од A .

201. Илија и Мирко истовремено тргнале од градот A за градот B . Илија изминува 7 km на час, а Мирко првиот час минува 1 km , вториот час минува 2 km , третиот час минува 3 km итн. по 1 km повеќе секој следен час. По колку часа Мирко ќе го стигне Илија? Колку километри ќе бидат оддалечени од градот A кога Мирко ќе го сигне Илија?

Решение. Седмиот час Илија и Мирко ќе поминат еднакво растојание и тоа по 7 km . Потоа Мирко секој следен час ќе го надополнува растојанието за кое заостанал гледајќи еден ден наназад. Тоа значи дека Мирко треба да помине растојанија:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, $7+1$, $7+2$, $7+3$, $7+4$, $7+5$, $7+6$,

т.е. растојание 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и 13 *km*, што значи дека тој Илија ќе го стигне по 13 часа. Бидејќи патуваат 13 часа, а Илија секој час минува по 7 километри во моментот кога Мирко ќе го стигне Илија тие од градот А ќе бидат оддалечени $7 \cdot 13 = 91 \text{ km}$.

202. Павел има две буриња кои собираат по 200 литри вода. Во првото буре има 160 литри вода, а во второто буре има 180 литри вода. Павел прво прелеал вода од првото буре и го дополнил второто буре, а потоа прелеал вода од второто буре и го дополнил првото буре.

а) Колку литри вода останале во второто буре?

б) Колку литри вода вкупно прелеал Павел?

Решение. а) Во двете буриња заедно има $160 + 180 = 340$ литри вода. Кога Павел при второто прелевање на водата го дополнил првото буре во второто буре останале $340 - 200 = 140$ литри вода.

б) При првото прелевање Павел прелеал $200 - 180 = 20$ литри вода. Во првото буре останале $160 - 20 = 140$ литри вода, па затоа при второто прелевање Павел прелеал $200 - 140 = 60$ литри вода. Според тоа, во двете прелевања Павел вкупно прелеал $20 + 60 = 80$ литри вода.

203. Базен за вода се полни од две цевки, а се празни од една цевка. Преку првата цевка за 1 час се влеваат 150 литри вода, што е за 30 литри помалку од водата која се влева преку втората цевка. Низ третата цевка за 1 час истекуваат 190 литри вода. Колку литри вода ќе има во базенот, ако тој на почетокот е празен и трите цевки истовремено се отворени во текот на 3 часа?

Решение. Преку втората цевка се влеваат $150 + 30 = 180$ литри вода на час. Значи, по 1 час откако ќе се отворат трите цевки во базентот ќе има $150 + 180 - 190 = 140$ литри вода. Конечно, по три часа во базентот ќе има $140 + 140 + 140 = 420$ литри вода.

204. Во три сада има 30 литри млеко. Ако последователно од првиот сад претуриме во вториот 4 литри, од вториот претуриме во третиот 2 литри и од третиот претуриме во првиот 3 литри, тогаш во сите сада ќе има еднакво количество млеко. Определи по колку литри млеко имало во секој сад на почетокот.

Решение. Од $30 : 3 = 10$ следува дека по третото претурање во секој сад ќе има по 10 литри млеко. Во третото претурање од третиот сад во првиот претураме 3 литри млеко, па затоа пред него во првиот сад

имало 7 литри, во вториот сад имало 10 литри и во третиот сад имало 13 литри млеко. Во второто претурање од вториот сад во третиот претураме 2 литри млеко, па затоа пред него во третиот сад имало 11 литри, во вториот имало 12 литри и во првиот имало 7 литри млеко. Во првото претурање од првиот во вториот сад претураме 4 литри млеко, па затоа пред него, т.е. на почетокот во првиот сад имало 11 литри, во вториот сад имало 8 литри и во третиот сад имало 11 литри млеко.

III.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

205. Во првата гајба има 1999 јаболка повеќе од втората гајба. Во која гајба ќе има повеќе јаболка и за колку, ако од првата префрлиме 1000 јаболка во втората гајба.

Решение. Ако во втората гајба има x јаболка, тогаш во првата има $x + 1999$. По префрлањето, во првата ќе има $x + 999$, а во втората $x + 1000$. Следува дека во втората има едно јаболко повеќе.

206. Брзиот воз за Скопје тргнал од Битола со 282 патници. На станицата во Прилеп се симнале 35 и се качиле 47 патници. На станицата во Велес се симнале 52 и се качиле 56 патници. Со колку патници продолжил возот по Велес?

Решение. По Прилеп возот продолжил со $282 - 35 + 47 = 294$ патници. Понатаму, по Велес возот продолжил со $294 - 52 + 56 = 298$ патници.

207. Од кошница со бомбони Деница зела половината и уште една бомбона. Потоа Васко зел половина од преостанатите бомбони и уште една бомбона. На крајот Никола зел половина од преостанатите бомбони и последните три бомбони. Колку бомбони имало во кошницата на почетокот?

Решение. Половина од бомбоните пред да земе Никола се 3 бомбони, па затоа пред да земе Никола во кошницата имало $3 + 3 = 6$ бомбони. Половина од бомбоните пред да земе Васко се $6 + 1 = 7$ бомбони, па затоа пред Васко да земе бомбони во кошницата имало $7 + 7 = 14$ бомбони. Половина од бомбоните пред Деница да земе бомбони е $14 + 1 = 15$, па затоа на почетокот во кошницата имало $15 + 15 = 30$ бомбони.

208. Од кошницата со велигденските јајца Бојан ги зел половината јајца и уште три јајца. Потоа од Кирил зел половина од преостанатите јајца и уште две јајца и на крајот Дејан зел половина од преостанатите јајца и уште едно јајце, по што кошницата останала празна. Колку јајца имало на почетокот во кошницата?

Решение. Јасно пред Дејан да земе јајца во кошницата имало $1 + 1 = 2$ јајца. Понатаму, пред Кирил да земеме јајца во кошницата имало $2 \cdot (2 + 2) = 8$ јајца и пред Бојан да земе јајца во кошницата имало $2 \cdot (8 + 3) = 22$ јајца. Значи, на почетокот во кошницата имало 22 јајца.

209. Елена бојадисала 36 велигденски јајца, кои биле за 9 повеќе од јајцата што ги бојадисала Фросина. Вера ги поделила јајцата подеднакво во три корпи. Колку јајца имало во секоја корпа?

Решение. Фросина бојадисала $36 - 9 = 27$ јајца. Двете заедно бојадисале $36 + 27 = 63$ јајца. Вера во секоја корпа ставила по $63 : 3 = 21$ јајце.

210. Горјан има 23 соученици. Бројот на девојчињата е еднаков на вредноста на изразот $(540 : 9 + 66) - 118$. Колку момчиња учат во одделението на Горјан

Решение. Бидејќи

$$(540 : 9 + 66) - 118 = (60 + 66) - 118 = 126 - 118 = 8,$$

во одделението на Горјан учат 8 девојчиња. Горјан има 23 соученици, што значи дека одделението брои 24 ученици и како 8 се девојчиња, заклучуваме дека $24 - 8 = 16$ се момчиња.

211. Секој од учесниците на училишниот маратон добил по една капа. На третина од девојчињата им биле поделени 51 розова капа, а останатите девојчиња и сите момчиња добиле 228 сини капи. Колку момчиња учествувале на маратонот?

Решение. Третина од девојчињата се 51 девојче, што значи дека на маратонот учествувале $3 \cdot 51 = 153$ девојче. Од нив $153 - 51 = 102$ девојчиња добиле сина капа. Според тоа, на маратонот учествувале $228 - 102 = 126$ момчиња.

212. Во една деветкатна станбена зграда има само еднособни, двособни и трисобни станови. На секој кат има по 27 станови. Во зградата има 80 двособни станови и тие се двапати повеќе од еднособните станови. Колку трисобни станови има во оваа зграда?

Решение. Во зградата има $9 \cdot 27 = 243$ станови. Бидејќи во зградата има 80 двособни станови и тие се двапати повеќе од едноособните станови, заклучуваме дека во зградата има $80 : 2 = 40$ едноособни станови. Значи, бројот на трисобните станови е еднаков на $243 - (80 + 40) = 123$.

213. Сестрите Боркица, Габриела и Даниела заедно ја украсувале новогодишната елка. Боркица и Габриела заедно ставиле 50 лампиони, Габриела и Даниела заедно ставиле 40 лампиони и Даниела и Боркица заедно ставиле 30 лампиони. Колку лампиони секоја од сестрите ставила на новогодишната елка?

Решение. Во трите збира двапати се броени лампионите кои секоја од сестрите ги ставила на елката. Тоа значи, дека тие ставиле вкупно $(50 + 40 + 30) : 2 = 120 : 2 = 60$ лампиони. Последното значи, дека Даниела ставила $60 - 50 = 10$ лампиони, Боркица ставила $60 - 40 = 20$ лампиони и Габриела ставила $60 - 30 = 30$ лампиони.

214. Владимир и Натка имаат определен број бомбони. Ако Владимир ѝ поклони на Натка 10 бомбони, тогаш двајцата ќе имаат еднаков број бомбони. Ако Натка му поклони на Владимир 20 бомбони, тогаш Владимир ќе има четири пати повеќе бомбони од Натка. Колку бомбони има секој од нив?

Решение. Владимир има 20 бомбони повеќе од Натка, бидејќи кога ќе и даде 10 бомбони, двајцата имаат еднаков број бомбони. Кога Натка ќе му даде 20 бомбони на Владимир таа ќе има за 20 помалку, а Владимир ќе има за 20 повеќе отколку на почетокот, што значи дека Владимир ќе има $20 + 20 + 20 = 60$ бомбони повеќе од Натка. Овие 60 бомбони се трипати повеќе од бомбоните на Натка, што значи дека Натка сега има $60 : 3 = 20$ бомбони, а Владимир 80 бомбони. Конечно, на почетокот Натка имала $20 + 20 = 40$ бомбони, а Владимир имал $80 - 20 = 60$ бомбони.

215. Баба Вера во три чинии ставила бомбони. Горјан прво од првата чинија преместил во втората и третата чинија толку бомбони колку што имало бомбони во тој момент во соодветната чинија. Потоа од втората чинија преместил во првата и втората чинија толку бомбони колку што имало бомбони во тој момент во соодветната чинија. На крајот од третата чинија преместил во првата и втората чинија толку бомбони колку што имало бомбони во тој момент во соодветната чинија, по што во секоја чинија имало по 16 бомбони. Колку бомбони имало на почетокот во секоја чинија?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-напред. На крајот во секоја од чиниите имало по 16 бомбони, што значи дека пред третото префрлање во првата и втората чинија имало по $16:2=8$ бомбони, а во третата чинија имало $16+8+8=32$ бомбони. Понатаму, пред второто префрлање во првата и третата чинија имало по $8:2=4$ и $32:2=16$ бомбони, соодветно, а во втората чинија имало $8+4+16=28$ бомбони. Конечно, пред првото префрлање, т.е. на почетокот во втората чинија имало $28:2=14$ бомбони, во третата чинија имало $16:2=8$ бомбони и во првата чинија имало $4+14+8=26$ бомбони.

216. Во три сада Самоил ставил вкупно 60 ореви. Неговиот син Горјан од првиот преместил во вториот сад 8 ореви, потоа од вториот преместил во третиот сад 6 ореви и на крајот од третиот сад преместил во првиот сад 2 орева, по што во трите сада имало еднаков број ореви. Колку ореви имало на почетокот во секој сад?

Решение. На крајот во сите садови имало по $60:3=20$ ореви. Пред третото преместување во првиот сад имало 18 ореви, во вториот сад имало 20 ореви и во третиот сад имало 22 ореви. Пред второто преместување во првиот сад имало 18 ореви, во вториот сад имало 26 ореви и во третиот сад имало 16 ореви. Конечно, пред првото преместување, т.е. на почетокот во првиот сад имало 26 ореви, во вториот сад имало 18 ореви и во третиот сад имало 16 ореви.

217. Цветанка бојадисала црвени, зелени и жолти јајца. На Елена ѝ дала половина од јајцата, на Фросина и дала половина од преостанатите јајца ѝ на Вера ѝ дала половина од преостанатите јајца. Цветанка секогаш давала еднаков број црвени, зелени и жолти јајца. На крајот и останале 2 црвени и 4 жолти јајца. Колку јајца бојадисала Цветанка и во која боја?

Решение. На Цветанка на крајот и останале 6 јајца, што значи дека таа на Вера и дала 6 јајца. Бидејќи Вера од секоја боја добила еднаков број јајца, таа добила по $6:3=2$ јајца од секоја боја. Значи, пред Вера да добие јајца Цветанка имала 4 црвени, 6 жолти и 2 зелени јајца. Според тоа, Фросина добила 12 јајца и тоа по $12:3=4$ јајца од секоја боја. Значи, пред Фросина да добие јајца Цветанка имала 8 црвени, 10 жолти и 6 зелени јајца. Според тоа, Елена добила 24 јајца и тоа по $24:3=8$ јајца од секоја боја. Конечно, Цветанка бојадисала 48 јајца и тоа 16 црвени, 18 жолти и 14 зелени.

218. На 6 дрвја има 129 птици. Во еден момент одлетале 6 птици од првото дрво, 11 од второто, 8 од третото, 10 од четвртото, 7 од петтото и 9 од шестото. Тогаш на сите дрвја останале ист број на птици. По колку птици имало на секое дрво на почетокот?

Решение. Кога одлетале птиците од шесте дрвја останале

$$129 - (6 + 11 + 8 + 10 + 7 + 9) = 129 - 51 = 78.$$

На сите дрвја останале по ист број на птици, значи $78 : 6 = 13$. На секое дрво останале по 13 птици. На почетокот на првото дрво имало $13 + 6 = 19$ птици, на второто $13 + 11 = 24$, на третото $13 + 8 = 21$, на четвртото $13 + 10 = 23$, на петтото $13 + 7 = 20$ и на шестото дрво $13 + 9 = 22$ птици.

219. Во 2005 година Марко засадил дрво кое шест години покасно првпат родило 10 круши. Потоа секоја следна година дрвото раѓало по 10 круши повеќе отколку што родило претходната година. Колку круши родило дрвото заклучно со 2019 година?

Решение. Шест години по 2005 година е 2011 година. Од 2011 до 2019 година, клучувајќи ги и крајните години имаме 9 години. Во овие 9 години дрвото последователно родило 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 и 90 круши, што значи дека тоа вкупно родило

$$10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 = 450 \text{ круши.}$$

220. На 9 јаболкници вкупно има 241 јаболка, при што на секоја јаболкница има најмалку едно јаболко и сите јаболкници имаат различен број јаболка. Кој е најголемиот број јаболка што може да ги има една од овие јаболкници?

Решение. На една јаболкница ќе има најголемможен број јаболка, ако на другите осум јаболкници има вкупно најмалможен број јаболка. Бидејќи на секоја јаболкница има различен број јаболка, на осумте јаболкници може да има најмалку $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ јаболка. Според тоа, на една јаболкница може да има најмногу $241 - 36 = 205$ јаболка.

221. На 9 јаболкници вкупно има 234 јаболка. На секое дрво има различен број јаболка. Определи го најголемиот број јаболка кој што може да го има јаболкницата со најмалку јаболка.

Решение. Јаболкницата која има најмал број јаболка ќе има најголемможен број јаболка, ако разликите на јаболката на различните јаболкници се најмали можни. Бидејќи $234 : 9 = 26$, заклучуваме дека разли-

ките ќе бидат најмали можни ако средната (петтата) јаболкница има 26 јаболки, а бројот на јаболката на соседните јаболкници се разликува за 1, т.е. ако јаболкниците имаат 26, 25, 27, 24, 28, 23, 29, 22 и 30 јаболка. Конечно, бараниот број јаболка е 22.

222. Баба Лена има ореви во три торби. Таа преместила од првата торба во втората толку ореви колку што имало во втората торба, и во првата торба останале 96 ореви. Потоа преместила од втората торба во третата толку ореви колку што имало во третата. На крајот преместила од третата торба во првата толку ореви колку што останале во првата, и тогаш во трите торби имало еднаков број ореви. Колко ореви имало на почетокот во секоја торба?

Решение. Бидејќи во првата торба останале 96 ореви, толку ореви биле префрлени во неа при третото префрлање, па така во неа на крајот има-ло $96 + 96 = 192$ ореви. Тоа значи дека во сите торби на крајот има-ло по 192 ореви. Сега одејќи одназад-напред добиваме дека пред тре-то-то префрлање во првата торба имало 92 ореви, а во третата торба имало $192 + 96 = 288$ ореви. Понатаму, пред да се префрлат ореви во третата торба во неа имало $288 : 2 = 144$ ореви, во втората имало $192 + 144 = 336$ ореви и во првата имало 96 ореви. Конечно, пред да се префрлат ореви во втората торба во неа имало $336 : 2 = 168$ ореви, во првата торба имало $96 + 168 = 264$ ореви и во третата торба имало 144 ореви.

223. Павел има 14 топчиња повеќе од Ристо и 4 топчиња повеќе од Славчо. Откако Петар и Славчо му дале дел од своите топчиња на Ристо, сите тројца имале еднаков број топчиња. Колку топчиња му дал Славчо на Ристо?

Решение. Бидејќи Павел има 14 топиња повеќе од Ристо и 4 повеќе од Славчо, заклучуваме дека Славчо има $14 - 4 = 10$ топчиња повеќе од Ристо. За да сите тројца имаат еднаков број топчиња потребно е овие $14 + 10 = 24$ топчиња да се распределат подеднакво на секој, т.е. секој да има по $24 : 3 = 8$ топчиња, што значи Павел да му даден на Ристо $14 - 8 = 6$ топчиња и Славчо да му даде на Ристо $10 - 8 = 2$ топчиња.

224. Софија, Веселка и Дијана погодувале колку бомбони има во една кутија. Софија рекла дека има 100 бомбони, Веселка рекла дека има 125 бомбони, а Дијана рекла дека во кутијата има 160 бомбони. Колку бомбони имало во кутијата ако едното од девојчињата згрешило за 11, а другите две за 49 и 24 бомбони.

Решение. Разликата меѓу најмалиот и најголемиот кажан број бомбони е $160 - 100 = 60$ и таа е поголема од 49, т.е. од најголемата направена грешка при погодувањето. Оттука следува дека бројот на бомбоните е поголем од 100 и е помал од 160. Понатаму, бидејќи $11 + 49 = 60$ заклучуваме дека грешките на Софија и Дијана се 11 и 49, во некој редослед. Значи, во кутијата имало $100 + 11 = 111$ или $100 + 49 = 149$ бомбони. Конечно, бидејќи Веселка направила грешка за 24 бомбони и $125 - 24 = 101$, а $125 + 24 = 149$ заклучуваме дека во кутијата имало 149 бомбони.

225. Една живинарска фарма испорачала 720 јајца, кои биле спакувани во кутии со по 6 јајца. При транспортот се искршиле 140 јајца. Останатите јајца биле спакувани во кутии по 12 јајца. Колку кутии јајца биле спакувани. Дали останале нескршени јајца кои не може да се спакуваат?

Решение. Од 720 јајца после транспортот останале $720 - 140 = 580$ јајца. Тие треба да се спакуваат во кутии по 12, значи би имале $580 : 12 = 48$ кутии останале 4 јајца кои нема да можат да се спакуваат на овој начин.

226. Во едно училиште се украсени шест. На секоја елка има по 14 зелени светилки. На половината елки има по 18 сини светилки. Црвените светилки се двапати повеќе од зелените, а жолтите светилки се четвртина од црвените. Половина од сите светилки светат силно, а другите светат послабо. Сите елки имаат еднаков број црвени и жолти светилки. Определи го бројот на:

- а) зелените светилки,
- б) сините светилки,
- в) црвените светилки,
- г) жолтите светилки,
- д) светилките кои светат силно.

На елка со сини светилки се ставени и 29 портокалови светилки. Уште колку светилки треба да се стават на оваа елка за да на неа вкупно има 100 светилки?

Решение. а) На елките има $6 \cdot 14 = 84$ зелени светилки.

б) Сини светилки има на $6 : 2 = 3$ елки и тоа по 18 на секоја елка, па затоа нивниот број е $3 \cdot 18 = 54$.

в) Црвените светилки се двапати повеќе од зелените, што значи дека има $2 \cdot 84 = 168$ црвени светилки.

г) Бројот на жолтите светилки е еднаков на четвртина од бројот на црвените светилки, што значи дека има $168 : 4 = 42$ жолти светилки.

д) Вкупниот број светилки е еднаков на $84 + 54 + 168 + 42 = 348$. Половината од сите светилки светат силно, што значи дека силно светат $348 : 2 = 174$ светилки.

На елка на која има 18 сини светилки има и 14 зелени, $168 : 6 = 28$ црвени и $42 : 6 = 7$ жолти светилки. Според тоа, на елката на која се ставени 29 портокалови светилки има $29 + 18 + 14 + 28 + 7 = 96$ светилки, па за да има 100 светилки треба да се стават уште $100 - 96 = 4$ светилки.

227. Горјанза подарок добил кутија бонбони. За појадок изел една третина од сите бонбони, за ручек изел 2 бонбони помалку отколку за појадок, а за вечера ги изел преостаните 9 бонбони. Колку бонбони имало во кутијата?

Решение. Ако Горјан за ручек изедел уште 2 бонбони, тогаш ќе му останеле $9 - 2 = 7$ бонбони. Но, тогаш тој за појадок и за ручек ќе изедел две третини од бонбоните, што значи дека една третина од бонбоните е еднаква на 7 бонбони. Конечно, во кутијата имало $3 \cdot 7 = 21$ бонбона.

228. Марко својата новогодишна елка ја украсил со $(124 \cdot 2 - 50) + 2$ лампиони, а Стојмен на својата елка ставил половина од лампионите кои ги ставил Марко. Колку лампиони има на елката на Стојмен?

Решение. На елката на Марко има

$$(124 \cdot 2 - 50) + 2 = (248 - 50) + 2 = 198 + 2 = 200$$

лампиони. Значи, на елката на Стојмен има $200 : 2 = 100$ лампиони.

229. Елена има осум круши и три пати повеќе јаболка. Колку повеќе јаболка од круши има Елена?

Решение. Елена има $3 \cdot 8 = 24$ јаболка. Значи таа има $24 - 8 = 16$ јаболка повеќе од круши.

230. Дужина означува 12. Бојан има 2 дужини кутии со по 3 дужини бомбони во секоја од нив. Колку бомбони има Бојан?

Решение. Бојан има $2 \cdot 12 = 24$ кутии со бомбони. Во секоја кутија има по $3 \cdot 12 = 36$ бомбони. Според тоа, тој има $24 \cdot 36 = 864$ бомбони.

231. Во еден расадник има 124 садници на бреза, кои се четири пати помалку од боровите садници. Колку садници има во расадникот?

Решение. Боровите садници се $4 \cdot 124 = 496$, што значи дека вкупниот број садници во расадникот е $124 + 496 = 620$.

232. Три исти кошници собираат 117 јајца. Колку такви кошници се потребни за да се сместат 390 јајца?

Решение. Една кошница собира $117 : 3 = 39$ јајца. Значи, за да се сместат 390 јајца се потребни $390 : 39 = 10$ кошници.

233. Матеј решава по 4 задачи дневно, а неговиот брат Доротеј решава по 3 задачи дневно. Двајцата заедно решиле 210 задачи, при што задачи решавале секој ден. Колку задачи решил секој од браќата?

Решение. Двајцата заедно секој ден решавале по $4 + 3 = 7$ задачи. Бидејќи решиле вкупно 210 задачи, тие решавале $210 : 7 = 30$ последователни дена. Значи, Матеј решил $30 \cdot 4 = 120$ задачи, а Доротеј решил $30 \cdot 3 = 90$ задачи.

234. Учениците од одделението на Горјан се поделиле во две групи. Првата група засадила 72 борчиња за 4 часа, а втората група засадила 72 елки за 3 часа. Колку дрвја сите заедно засадувале за 1 час?

Решение. Првата група за 1 час засадувала $72 : 4 = 18$ борчиња, а втората група за 1 час засадувала $72 : 3 = 24$ елки. Според тоа, сите заедно за 1 час засадувале $18 + 24 = 42$ дрвја.

235. Самоил требало за 6 дена да засади 441 дрво. Првите три дена тој садел по 82 дрвја, а вторите три дена садел еднаков број дрвја на ден. По колку дрвја садел Самоил вторите три дена?

Решение. Првите три дена Самоил засади $3 \cdot 82 = 246$ дрвја. Значи, вторите три дена му останале да засади $441 - 246 = 195$ дрвја. Конечно, тој вторите три дена садел по $195 : 3 = 65$ дрвја на ден.

236. Меѓу секои два ката во еден влез на зградата на Горјан има еднаков број скалила. За да стигне од првиот до третиот кат, Горјан поминува 24 скалила. Колку скалила ќе помине Горјан одејќи од првиот до седмиот кат?

Решение. Кога оди од првиот до третиот кат Горјан два пати ги поминува скалилата кои се наоѓаат меѓу секои два ката. Според тоа, меѓу два ката има $24 : 2 = 12$ скалила. Кога оди од првиот до седмиот кат Горјан шест пати ги поминува скалилата кои се наоѓаат меѓу секои два ката, па затоа тој ќе помине $6 \cdot 12 = 72$ скалила.

237. Пет деца самостојно цртале и вкупно нацртале 55 цртежи, но ниту едно од нив не нацртало повеќе од 13 цртежи. Определи го најмалиот број цртежи кои што може да ги нацрта некое од децата.

Решение. Четири од децата може да нацртаат најмногу $4 \cdot 13 = 52$ цртежи. Значи, петтото дете може да нацрта најмалку $55 - 52 = 3$ цртежи.

238. Сликарите Даниел, Киро, Саво и Пецко цртале цртежи. Бројот на цртежите нацртани од Саво и Пецко е број кој е четири пати поголем од 27. Саво нацртал 6 цртежи помалку од Пецко, Киро нацртал 3 пати помалку цртежи од Саво, а Даниел нацртал 36 цртежи помалку од Пецко. Колку цртежи нацртал секој сликар?

Решение. Саво и Пецко заедно нацртале $4 \cdot 27 = 108$ цртежи. Бидејќи Саво нацртал 6 цртежи помалку од Пецко, заклучуваме дека Саво нацртал $(108 - 6) : 2 = 51$ цртеж, а Пецко нацртал $51 + 6 = 57$ цртежи. Понатаму, Киро нацртал трипати помалку цртежи од Саво, што значи дека тој нацртал $51 : 3 = 17$ цртежи. Конечно, Даниел нацртал 36 цртежи помалку од Пецко, односно тој нацртал $57 - 36 = 21$ цртеж.

239. Иван за четири дена решил 136 задачи. Првиот и вториот ден решил еднаков број задачи. Третиот ден решил толку задачи колку што решил првиот и вториот ден заедно, а четвртиот ден решил толку задачи колку што заедно решил првите три дена. По колку задачи решавал Иван секој од четирите дена?

Решение. Бидејќи четвртиот ден решил колку што решил заедно првите три дена, заклучуваме дека четвртиот ден тој решил $136 : 2 = 68$ задачи. Понатаму, бидејќи третиот ден решил колку што решил првиот и вториот ден заедно, добиваме дека третиот ден решил $68 : 2 = 34$ задачи. Конечно, првите два дена Иван решил по $34 : 2 = 17$ задачи.

240. Златко има зајак и зајачица. Во јануари зајачицата окотила 8 зајчиња, при што имало 2 женски зајчиња повеќе од машки. По три месеци секоја женка окотила по 8 зајчиња. Колку зајчиња имал Златко во април?

Решение. Бидејќи меѓу првите 8 зајачиња имало 2 женски повеќе од машки, добиваме дека $(8 - 2) : 2 = 3$ зајчиња биле машки и $8 - 3 = 5$ зајчиња биле женски. Значи, имаме 10 зајаци од кои 4 се машки и 6 се женски. Затоа во април женките окотиле нови $6 \cdot 8 = 48$ зајаци, што значи дека Златко во април имал $48 + 10 = 58$ зајаци.

241. Дијана од домашната и училишната библиотека прочитала вкупно 45 книги. Анета прочитала од градската и од училишната библиотека вкупно 55 книги. Двете прочитале еден ист број книги од училишната библиотека. Ако од домашната и од градската библиотека се прочитани вкупно 20 книги, колку книги девојчињата прочитале од училишната библиотека?

Решение. Нека секое од девојчињата прочитало по x книги од училишната библиотека. Тогаш $2x + 20 = 45 + 55$, од каде добиваме $x = 40$. Според тоа, секое од девојчињата прочитало по 40 книги од училишната библиотека, па заедно прочитале 80 книги од училишната библиотека.

242. Вера читала книга која имала 600 страници. Таа првата седмица прочитала 112 страници, а втората седмица прочитала двапати повеќе страници отколку првата. Вера сака да ја прочита книгата следните осум дена и притоа да чита еднаков број страници на ден. Колку страници таа треба да чита дневно?

Решение. Втората седмица Вера прочитала $2 \cdot 112 = 224$ страници. Тоа значи дека во текот на осумте дена таа треба да прочита $600 - 112 - 224 = 264$ страници. Значи, во секој од осумте дена Вера треба да чита по $264 : 8 = 33$ страници.

243. Марко за четири дена прочитал една книга. Првиот ден тој прочитал третина од книгата, а четвртиот ден тој прочитал четвртина од книгата. Вториот ден Марко прочитал четири пати повеќе страници од третиот ден. Колку страници читал Марко секој ден, ако четвртиот ден тој прочитал 72 страници?

Решение. Марко четвртиот ден прочитал 72 страници, па како тој овој ден прочитал четвртина од книгата заклучуваме дека книгата имала $4 \cdot 72 = 288$ страници. Првиот ден Марко прочитал третина од книгата, што значи дека првиот ден тој прочитал $288 : 3 = 96$ страници. Значи, вториот и третиот ден Марко заедно прочитал

$$288 - (96 + 72) = 120$$

страници. Но, вториот ден Марко прочитал четири пати повеќе страници од третиот ден, што значи дека третиот ден тој прочитал $120 : 5 = 24$ страници, а вториот ден прочитал $120 - 24 = 96$ страници.

244. Во еден ресторан има 33 маси и до секоја маса има по 4 столици. Колку гости ќе јадат во ресторанот на појадок, ручек и вечера, ако на

појадокот сите места се зафатени, на ручекот по едно место на секоја маса е слободно, а на вечера има 31 гости помалку отколку што собира ресторанот?

Решение. Ресторанот собира $33 \cdot 4 = 132$ гости. Значи, ќе појаднуваат 132 гости, ќе ручаат $33 \cdot 3 = 99$ гости и ќе вечераат $132 - 31 = 101$ гостин. Во текот на денот вкупно ќе јадат $132 + 99 + 101 = 332$ гости.

245. Патнички воз има 7 вагони. Во секој вагон има по 9 купина со по 8 места. На почетната станица се качиле 360 патници. Колку вагони може да се откачат ако се знае дека на секоја следна станица се качуваат помалку патници отколку што слегуваат?

Решение. Во еден вагон собира $9 \cdot 8 = 72$ патника. Затоа првите 360 патници може да се сместат во $360 : 72 = 5$ вагони. Бидејќи на секоја следна станица се качуваат помалку патници отколку што слегуваат, на секоја следна станица бројот на патниците се намалува, па затоа од возот може да се откачат $7 - 5 = 2$ вагони.

246. За тенискиот турнир Марко купил 3 пакувања со по 12 бели топчиња и 2 пакувања со по 15 жолти топчиња. За секој меч се користени по 6 нови топчиња и се употребени сите топчиња. Колку меча се одиграле на турнирот?

Решение. Марко купил $3 \cdot 12 + 2 \cdot 15 = 36 + 30 = 66$ топчиња. Бидејќи за секој меч се користени по 6 нови топчиња и се употребени сите топчиња, заклучуваме дека на турнирот се одиграни $66 : 6 = 11$ меча.

247. Елеонора сака мед. Во продавницата од каде што го купува медот таа за секои пет празни грниња добива едно полно грне со мед. Елеонора купила 27 грниња со мед и секоја седмица јаде по едно грне со мед. Колку седмици таа ќе јаде мед, ако секои пет празни грниња ги заменува за полно грне?

Решение. Кога ќе ги изеде првите 25 грниња со мед Елеонора добива уште $25 : 5 = 5$ полни грниња мед, па така таа тогаш ќе има уште $2 + 5 = 7$ грниња со мед. Кога ќе изеде уште 5 грниња со мед, таа добива уште 1 грне полно со мед, па така таа има уште $2 + 1 = 3$ грниња со мед. Според тоа, Елеонора ќе има да јаде во текот на една седмица по едно грне мед точно $25 + 5 + 3 = 33$ седмици.

248. Правилата на една игра се следниве: на почетокот секој играч играта ја започнува со 10 бода и треба десет пати да стрела во мета. За секој

погодок играчот добива 1 бод, а за секое промашување тој губи 1 бод. Колку пати погодил Илија ако на крајот од играта тој имал 18 бодови?

Решение. Бројот на бодовите на Илија се зголемил за $18 - 10 = 8$. Тоа значи дека тој бројот на погоците на Илија е за 8 поголем од бројот на промашувањата. Бидејќи Илија стрелал 10 пати, заклучуваме дека тој промашил $(10 - 8) : 2 = 1$. Конечно Илија метата ја погодил $10 - 1 = 9$ пати.

249. Снежана во шумата набрала 70 јагоди. Секое од седумте џуџиња изело по 7 јагоди, а некои џуџиња изеле уште по две јагоди. Останале 17 јагоди. Колку џуџиња изеле по 7 јагоди?

Решение. Прво седумте џуџиња изеле $7 \cdot 7 = 49$ јагоди останале $70 - 49 = 21$ јагода. Бидејќи на крајот остаале 17 јагоди, а некои џуџиња изеле уште по 2 јагоди, добиваме дека $(21 - 17) : 2 = 2$ џуџиња изеле уште по 2 јагоди. Конечно, $7 - 2 = 5$ џуџиња изеле по 7 јагоди.

250. Снежана има 43 бомбони и секое од седумте џуџиња има по 3 бомбони. По колку бомбони треба да му даде Снежана на секое џуџе така што сите ќе имаат еднаков број бомбони?

Решение. Сите заедно имаат $43 + 3 \cdot 7 = 64$ бомбони. Ако сите имаат еднаков број бомбони, тогаш ќе имаат по $64 : 8 = 8$ бомбони. Секое џуџе има по 3 бомбони, па затоа Снежана на секое џуџе треба да му даде по $8 - 3 = 5$ бомбони.

251. Една верверичка во текот на првата недела собрала 84 ореви, во текот на втората недела 96 ореви, а во текот на третата недела 65 ореви. Друга верверичка во четвртата недела собрала трипати повеќе ореви, отколку првата верверичка во втората и третата недела заедно. Колку вкупно ореви собрале двете верверички во текот на четирите недели?

Решение. Првата верверичка собрала $84 + 96 + 65 = 245$ ореви во текот на трите недели. Втората верверичка во четвртата недела собрала вкупно $3 \cdot (96 + 65) = 3 \cdot 161 = 483$ ореви. Двете верверички заедно собрале $245 + 483 = 728$ ореви.

252. Ивана испекла 6 тави со по 9 колачи во секоја тава, а Ангела испекла 7 тави со по 8 колачи во секоја тава. Марија ги украсила колачите со јагоди. На некои колачи ставила по 1 јагода, а на останатите ставила по 2 јагоди. Таа употребила 200 јагоди. Колку колачи се украсени само со 1 јагода?

Решение. Вкупно се испечени $6 \cdot 9 + 7 \cdot 8 = 110$ колачи. Ако на секој колач се ставени по 2 јагоди, тогаш Марија требало да употреби $2 \cdot 110 = 220$ јагови, што значи $220 - 200 = 20$ јагоди повеќе. Според тоа, таа на 20 колачи ставила по 1 јагода.

253. Горјан оди 10 чекори напред, па се враќа 2 чекори назад, потоа 10 чекори напред и 1 назад, потоа 10 чекори напред и 2 назад итн. Колку чекори треба да направи Горјан за да од почетното место биде оддалечен 1000 чекори?

Решение. Кога Горјан ќе направи 10 чекори напред, 2 назад, па 10 напред и 1 назад, тој прави 23 чекори и од почетното место се оддалечува 17 чекори. Бидејќи $1000 = 58 \cdot 17 + 14$, Горјан треба да направи 58 групи од по 23 чекори и да се придвижи напред уште 14 чекори. Последниот ќе го направи одејќи 10 чекори напред, 2 чекори назад и 6 чекори напред. Конечно, Горјан вкупно ќе направи

$$58 \cdot 23 + 10 + 2 + 6 = 1352 \text{ чекори.}$$

254. Кокошка и пол за ден и пол несат јајце и пол. Колку јајца ќе снесат 60 кокошки за 36 дена?

Решение. Имаме $60 = 40 \cdot 1,5$ и $36 = 24 \cdot 1,5$, што значи дека 60 кокошки за 36 дена ќе снесат $40 \cdot 24 \cdot 1,5 = 60 \cdot 24 = 1440$ јајца.

255. Горјан добил полна кутија бомбони. Првиот ден тој изел четвртина од бомбоните, а вториот ден изел четвртина од преостанатите бомбони. Колку бомбони имало на почетокот во кутијата ако на крајот на вториот ден Горјан имал 9 бомбони?

Решение. Горјан вториот ден изел четвртина од остатокот, па затоа преостанатите 9 бомбони се $\frac{3}{4}$ од остатокот. Според тоа, $\frac{1}{4}$ од остатокот е еднаква на $9:3=3$, што значи дека по првиот ден му останале $4 \cdot 3 = 12$ бомбони. Овие 12 бомбони се еднакви на $\frac{3}{4}$ од бројот на бомбоните во кутијата, па затоа $\frac{1}{4}$ од бројот на бомбоните во кутијата е еднаква на $12:3=4$.

Конечно, на почетокот во кутијата имало $4 \cdot 4 = 16$ бомбони.

256. Волшебната јаболкница на Алиса, ноќта меѓу вторник и среда за првпат родила јаболка и тоа точно 8. Секое претпладне јаболкницата раѓа по 13 јаболка, а секоја вечер Алиса јаде по 5 јаболка. Кој ден од седмицата на јаболкницата ќе има повеќе од 500 јаболка?

Решение. На јаболкницата во средата напладне имало $8+13=21$ јаболко. Понатаму, секој следен ден на јаболкницата има повеќе $13-5=8$ јаболка. На јаболкницата ќе има најмалку 501 јаболко, ако по средата бројот на јаболката се зголеми за најмалку $501-21=480$ јаболка. Бидејќи бројот на јаболката во текот еден ден се зголемува за 8, за зголемување од 480 јаболка се потребни $480:8=60$ дена. Понатаму, $60=8\cdot 7+4$, што значи дека по 7 седмици и 4 дена на јаболкницата ќе има повеќе од 500 јаболка. Конечно, 4 дена по среда е недела и тоа е бараниот ден од седмицата.

257. Пет круши и 17 јаболка тежат колку осум круши и 13 јаболка. Колку круши тежат колку што тежат 72 јаболка?

Решение. Ако од групата од 5 круши и 17 јаболка и од групата од 8 круши и 13 јаболка отстраниме 5 круши и 13 јаболка, тогаш во првата група ќе останат 4 јаболка, а во втората група ќе останат 3 круши. Бидејќи на почетокот две групи имаат иста тежина, а од секоја отстрануваме иста тежина, заклучуваме дека 4 јаболка и 3 круши имаат иста тежина. Понатаму, од $4\cdot 18=72$ и $3\cdot 18=54$ следува дека 72 јаболка имаат иста тежина како и 54 круши.

258. Во училишната библиотека има 4 шкафови, секој шкаф има по 7 полици и на секоја полица има по 28 книги. Седумнаесет ученици позајмиле по 3 книги, а 147 ученици позајмиле по 2 книги. Колку книги останале во библиотеката?

Решение. Во библиотеката има $4\cdot 7\cdot 28=28\cdot 28=784$ книги. Учениците позајмиле $3\cdot 17+147\cdot 2=51+294=345$ книги. Во библиотеката останале $784-345=439$ книги.

259. Марија, Петра и Елена саделе цвеќиња. Марија садела 5 часа и засадила 60 цвеќиња, Петра садела 4 часа, а Елена работела 6 часа и засадила 66 цвеќиња. За еден час Петра засадила толку цвеќиња повеќе од Марија, колку што Елена за еден час засадила помалку од Марија. Колку цвеќиња засадила Петра?

Решение. Марија садела по $60:5=12$ цвеќиња на час, а Елена садела по $66:6=11$ цвеќиња на час. Елена садела $12-11=1$ цвеќе помалку на час од Марија. Значи, Петра садела по $12+1=13$ цвеќиња на час и таа засадила $4\cdot 13=52$ цвеќиња.

260. Во училиштето на Горјан во прво одделение учат 199 ученици, кои се за 31 помалку од учениците во второ одделение. Во трето одделение

учат 145 ученици помалку отколку во прво и второ одделение заедно, а во четврто одделение учат 68 ученици повеќе отколку во трето одделение. Колку се повеќе ученици во четврто отколку во прво одделение?

Решение. Во второ одделение учат $199 - 31 = 168$ ученици, а во трето одделение учат $199 + 168 - 145 = 367 - 145 = 222$ ученици. Значи, во четврто одделение учат $222 + 68 = 290$ ученици и тоа се $290 - 199 = 91$ ученик повеќе отколку во прво одделение.

261. Три пријателки береле јаболка. Соња набрала 12 јаболка, Тања набрала половина од јаболката кои ги набрала Петранка, а Петранка набрала колку што заедно набрале Соња и Тања. Колку јаболка набрале трите девојчиња заедно?

Решение. Нека Петранка набрала $2x$ јаболка. Тогаш Тања набрала x јаболка. Според условот на задачата Петранка набрала колку што заедно набрале Соња и Тања, па затоа $2x = x + 12$, од каде добиваме $x = 12$. Значи, Тања набрала 12 јаболка, а Петранка набрала $2 \cdot 12 = 24$ јаболка. Конечно, трите девојчиња заедно набрале $12 + 24 + 12 = 48$ јаболка.

262. Лерка изела 48 ореви за три дена, при што секој ден јадела по 3 ореви помалку од претходниот ден. Колку ореви изела Лерка третиот ден?

Решение. Нека првиот ден Лерка изела x ореви. Тогаш вториот и третиот ден таа изела $x - 3$ и $x - 6$ ореви, соодветно. Но, трите дена Лерка вкупно изела 48 ореви, па затоа $x + x - 3 + x - 6 = 48$, од каде добиваме $x = 19$. Конечно, третиот ден Лерка изела $19 - 6 = 13$ ореви.

263. Во едно училиште на секои две момчиња има три девојчиња, а на десет момчиња има еден наставник. Колку момчиња, девојчиња и наставници има во училиштето, ако вкупниот број наставници и ученици е еднаков на 312?

Решение. Нека во училиштето има x наставници. Тогаш во училиштето има $10x$ момчиња. Во $10x$ момчиња имаме $10x : 2 = 5x$ групи од по 2 момчиња. Но, на секои 2 момчиња има 3 девојчиња, па затоа во училиштето има $5x \cdot 3 = 15x$ девојчиња. Според тоа, $x + 10x + 15x = 312$, т.е. $26x = 312$, од каде добиваме $x = 12$. Значи, во училиштето има 12 наставници, $12 \cdot 10 = 120$ момчиња и $12 \cdot 15 = 180$ девојчиња.

264. На часот по математика наставникот донесол линијари. Илија забележал: „Ако бројот на линијарите се собере со бројот на учениците, се

добива бројот 100“. Потоа наставникот на секој ученик му поделил по два линијари, по што му останале 19 линијари неподелени. Колку ученици имало во одделението на Илија и колку линијари донесол наставникот?

Решение. *Прв начин.* Од 100 линијари неподелени одтснале 19 линијари, па затоа бројот на учениците и поделените линијари е еднаков на $100 - 19 = 81$. Секој ученик добил по 2 линијари, што значи дека бројот на учениците е еднаков на $81 : (1 + 2) = 27$. Конечно бројот на линијарите е еднаков на $100 - 27 = 73$.

Втор начин. Ако во одделението има x ученици, тогаш тие добиле $2x$ линијари. Според тоа, $x + 2x + 19 = 100$, од каде добиваме $x = 27$. Конечно, бројот на линијарите е еднаков на $2x + 19 = 2 \cdot 27 + 19 = 73$.

265. Докторот Офболи на три болни животни им поделил 2012 волшебни апчиња. Носорогот добил две апчиња повеќе од крокодилот, а слонот добил едно апче повеќе од носорогот. Колку апчиња добило секое животно?

Решение. Ако крокодилот добил x апчиња, тогаш носорогот добил $x + 2$, а слонот добил $x + 3$ апчиња. Затоа $x + x + 2 + x + 3 = 2012$, од каде добиваме $3x + 5 = 2012$, односно $x = (2012 - 5) : 3 = 669$. Според тоа, крокодилот добил 669 апчиња, носорогот добил 671 апче и слонот добил 672 апчиња.

266. Иван за украсување на новогодишната елка купил 11 кутии со лампиони. Во дел од кутиите имало по 5 црвени лампиони, а во останатите кутии имало по 3 сини лампиони. Колку лампиони купил Иван ако сините лампиони се за 1 повеќе од црвените?

Решение. Нека црвени лампиони има во x кутии. Тогаш сини лампиони има во $11 - x$ кутии, па затоа Иван купил $5x$ црвени и $3(11 - x)$ сини лампиони. Од условот на задачата следува дека $3(11 - x) = 5x + 1$. Решението на последната равенка е $x = 4$, што значи дека Иван купил 4 кутии со црвени и 7 кутии со сини лампиони. Конечно, тој вкупно купил $4 \cdot 5 + 7 \cdot 3 = 41$ лампион.

267. Баба Велика за Велигден бојадисала 48 јајца – црвени, зелени и жолти. Црвените јајца биле три пати повеќе од зелените, а жолтите биле колку црвените и зелените заедно. Колку јајца од секоја боја бојадисала баба Велика?

Решение. Нека има x зелени јајца. Тогаш бројот на црвените јајца е $3x$, а жолти јајца се $x + 3x = 4x$. Тоа значи, $x + 3x + 4x = 48$, од каде добиваме $8x = 48$, т.е. $x = 6$. Значи, баба Велика бојадисала 6 зелени, 18 црвени и 24 жолти јајца.

268. Илија и Зоран имале потешкотии со правописот на неколку исти англиски зборови. За да научи како точно се пишуваат зборовите Илија ги напишал 13 пати, а Зоран ги напишал 5 пати. Се покажало дека Илија напишал 936 зборови повеќе од Зоран. Колку зборови Илија и Зоран не знаеле правилно да ги напишат?

Решение. Нека бројот на зборовите кои Илија и Зоран не знаеле да ги напишат е x . Тогаш Илија напишал $13x$ зборови, а Зоран напишал $5x$ зборови. Затоа, $13x - 5x = 936$, од каде добиваме $8x = 936$, т.е. $x = 117$.

269. Во училишниот ресторан сите маси имаат по 4 ногарки и покрај секоја маса се поставени по 4 столици секоја од кои има по 3 ногарки. Масите и столчињата заедно имаат 240 ногарки. Кој е најголемиот број деца кои може да седнат во ресторантот ако на секоја столица седи по едно дете?

Решение. Нека во ресторантот има x маси. Тогаш бројот на столици е еднаков на $4x$, па затоа вкупниот број ногарки е еднаков на $4x + 3 \cdot 4x = 16x$, што значи $16x = 240$, од каде добиваме $x = 15$. Конечно, во ресторантот има $4 \cdot 15 = 60$ столици, па затоа може да седнат најмногу 60 деца.

270. Во продавница има црни, сини и бели вентиаги. Црните вентиаги имаат по 2 џеба, сините по 3, а белите по 5 џеба. Сините вентиаги се колку црните и се за 10 помалку од белите. Колку бели вентиаги има, ако сите вентиаги вкупно имаат 200 џебови?

Решение. Нека во продавницата има x бели вентиаги. Тогаш бројот на црните вентиаги е $x - 10$, а толку се и сините вентиаги. Затоа $5x + 2(x - 10) + 3(x - 10) = 200$, од каде добиваме $10x - 50 = 200$, односно $x = 25$. Значи, во продавницата има 25 бели и по 15 сини и црни вентиаги.

271. Во дворот на дедо Стојан има кокошки и кози. Животните вкупно имаат 26 нозе.

а) Кој е најголемиот можен број животни?

Б) Кој е најмалиот можен број животни?

Решение. а) Бидејќи козите имаат 4 нозе, а кокошките имаат две нозе, најголемиот можен број животни се добива ако има една коза, а останатите се кокошки. Во случајов $(26 - 4) : 2 = 11$, што значи дека најголемиот број животни е 12.

б) Аналогно се добива дека најмалиот можен број животни е кога има најголем можен број кози. Во случајов, бидејќи $26 = 4 \cdot 6 + 2$ заклучуваме дека тоа е кога имаме 6 кози и една кокошка, па затоа бараниот број е 7.

272. Во дворот на дедо Марко има само прасиња и кокошки. Тие заедно имаат 40 глави и 130 нозе. Колку прасиња, а колку кокошки има во дворот на дедо Марко?

Решение. Прасето има 4 нозе, а кокошката 2 нозе. Ако сите животни се кокошки, тогаш во дворот ќе има $40 \cdot 2 = 80$ нозе, т.е. $130 - 80 = 50$ нозе помалку. Овие 50 нозе припаѓаат на прасињата и како прасето има 2 нозе повеќе од кокошката, во дворот има $50 : 2 = 25$ прасиња. Конечно, во дворот има $40 - 25 = 15$ кокошки.

273. Фармерот Стојко одгледувал кокошки и зајаци. Кога ги пребројал главите на сите животни тој добил 100, а кога ги пребројал нозете на сите животни тој добил 320. Колку зајаци и колку кокошки има Стојко?

Решение. Стојко има 100 животни. Ако сите животни се кокошки, тогаш бројот на нозете ќе биде еднаков на $100 \cdot 2 = 200$. Но, тој пребројал $320 - 200 = 120$ нозе повеќе и како секој зајак има по 2 нозе повеќе од секоја кокошка, заклучуваме дека Стојко има $120 : 2 = 60$ зајаци. Конечно, бројот на кокошките е еднаков на $100 - 60 = 40$.

274. На една ливада има овци и кокошки. Тие заедно имаат 60 глави и нозе. Глави се 16. Колку овци има на ливадата?

Решение. На ливадата има $60 - 16 = 44$ нозе. Ако сите животни се кокошки, тогаш ќе има $2 \cdot 16 = 32$ нозе, што значи $44 - 32 = 12$ нозе помалку. Овие 12 нозе припаѓаат по 2 на секоја овца на ливадата. Според тоа, на ливадата има $12 : 2 = 6$ овци.

275. Фармер вкупно одгледува 12 кокошки и зајаци. Познато е дека бројот на сите нозе е 6 пати поголем од бројот на кокошките. Колку уши имаат животните на фармерот?

Решение. Нека фармерот има x кокошки и $12 - x$ зајаци. Важи $2x + 4 \cdot (12 - x) = 6x$, од каде добиваме $x = 6$. Според тоа, фармерот

има 6 кокошки и 6 зајаци. Уши имаат само зајаци и тоа по 2, што значи дека животните на фармерот имаат $6 \cdot 2 = 12$ уши.

276. Дедо Илија на пазар донесол 52 кафези во кои имало 246 кокошки. Во секој кафез имало или по 4 или по 6 кокошки.

а) Во колку кафези имало по 4 кокошки?

б) Колку кокошки му останале на дедо Илија кога од секој кафез со по 6 кокошки продал по 1 кокошка?

Решение. а) Ако во сите кафези имало по 4 кокошки, тогаш дедо Илија ќе имал $52 \cdot 4 = 208$ кокошки. Но, Илија има $246 - 208 = 38$ кокошки повеќе и овие се по 2 распоредени во кафезите со по 6 кокошки. Според тоа, по 6 кокошки имало во $38 : 2 = 19$ кафези, а по 4 кокошки имало во $52 - 19 = 33$ кафези.

б) Кога од секој кафез со по 6 кокошки продал по 1 кокошка, дедо Илија продал 19 кокошки, па затоа му останале $246 - 19 = 227$ кокошки.

277. Во санката со Дедо Мраз се качиле неколку џуџиња. Санката ја влечеле 7 елени. Колку џуџиња имало во санката ако сите заедно имале 36 нозе?

Решение. Елените имаат $7 \cdot 4 = 28$ нозе. Според тоа, џуџињата и Дедо Мраз заедно имаат $36 - 28 = 8$ нозе. Тоа значи дека во санката имало $8 : 2 = 4$ луѓе и како еден од нив е Дедо Мраз заклучуваме дека во санката имало 3 џуџиња.

278. Во една фарма има вкупно 100 животни, и тоа зајаци, петли и кокошки. Зајаци се двапати повеќе од петлите, а петлите се за 20 помалку од кокошките. Колку нозе имаат заедно животни на фармата?

Решение. Нека на фармата има x петли. Тогаш бројот на зајаци е еднаков на $2x$, а бројот на кокошките е еднаков на $x + 20$. Според тоа, $x + 2x + x + 20 = 100$, од каде добиваме $x = 20$. Значи, на фармата има 20 петли, $2 \cdot 20 = 40$ зајаци и $20 + 20 = 40$ кокошки. Петлите и кокошките имаат по 2 нозе, а зајаци се имаат по 4 нозе, што значи дека сите животни заедно имаат $2 \cdot 20 + 4 \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 240$ нозе.

279. Група од 52 ученика со жичарница се качува кон планинарскиот дом Дервен. Учениците се сместени во кабини кои собираат четири или шест лица, при што се искористени 10 кабини и во кабините нема слободни места. Колку кабини со по шест места се искористени?

Решение. Ако сите кабини се со по 4 места, тогаш во десетте кабини може да се сместат $10 \cdot 4 = 40$ ученици. Значи, остануваат $52 - 40 = 12$ ученици кои по двајца се сместени во кабини со по 6 места. Според тоа, за превезување на учениците се искористени $12 : 2 = 6$ кабини со по 6 места.

280. Група од 60 патници се превезувала преку река со помош на 9 чамци, од кои некои имале 6, а некои 8 седишта. Притоа сите чамци биле полни. Определи го бројот на чамците од секој вид.

Решение. Ако сите чамци се со по 6 седишта, тогаш вкупниот број патници кои ќе се пренесат е $9 \cdot 6 = 54$, т.е. $60 - 54 = 6$ патници помалку. Овие 6 патници по двајца се сместени во чамците со по 8 седишта, па заклучуваме дека имаме $6 : 2 = 3$ чамци со по 8 седишта. Значи, имаме $9 - 3 = 6$ чамци со по 6 седишта.

281. Во речното пристаниште има 12 чамци, големи и мали. Големите чамци имаат по 8 седишта, а малите имаат по 5 седишта. Сите чамци заедно имаат 75 седишта. Колку големи и колку мали чамци има во пристаништето?

Решение. *Прв начин.* Ако сите чамци имаат по 5 седишта, тогаш вкупниот број седишта ќе биде еднаков на $12 \cdot 5 = 60$, т.е. ќе има $75 - 60 = 15$ седишта помалку. Секој чамец со 8 седишта има 3 седишта повеќе, па затоа бројот на чамците со 8 седишта е еднаков на $15 : 3 = 5$. Конечно, бројот на чамците со 5 седишта е еднаков на $12 - 5 = 7$.

Втор начин. Нека има x чамци со 8 седишта. Тогаш има $12 - x$ чамци со 5 седишта, па затоа $8x + 5(12 - x) = 75$. Значи, $8x + 60 - 5x = 75$, па затоа $x = 5$. Според тоа, има 5 чамци со 8 седишта и 7 чамци со 5 седишта.

282. За украсување на новогодишната елка осум ученици изработиле украси. Ученикот со број 1 изработил 2 украса, ученикот со број 2 изработил 3 украса, ученикот со број 3 изработил 5 украси, ученикот со број 4 изработил 8 украси, ученикот со број 5 изработил 12 украси и ученикот со број 6 изработил 17 украси. Бројот на украсите кои ги изработиле учениците со броевите 7 и 8 се определува според правилото по кое секој од првите шест ученици го изработил својот број на украси. По колку украси изработиле седмиот и осмиот учебник?

Решение. За учениците со броевите 2, 3, 4, 5 и 6 бројот на украсите се добива кога на бројот на украсите изработени од ученикот со претход-

ниот број последователно се додаваат броевите 1, 2, 3, 4, 5. Така, ако го запазиме ова правило ја добиваме следнава табела:

Ученик	1	2	3	4	5	6
Бр. кој се додава	-	1	2	3	4	5
Украси	2	$1+2=3$	$3+2=5$	$5+3=8$	$8+4=12$	$12+5=17$

Според тоа, ученикот со број 7 изработил $17+6=23$ украси, а ученикот со број 8 изработил $23+7=30$ украси.

283. Во една корпа има двапати повеќе јаболка отколку во друга корпа. Ако од секоја корпа се земат по 20 јаболка, тогаш во првата корпа ќе има трипати повеќе јаболка отколку во втората. Колку јаболка имало на почетокот во секоја корпа?

Решение. Нека во првата корпа има x јаболка. Тогаш во втората корпа има $2x$ јаболка. Кога од секоја корпа ќе извадиме по 20 јаболка, во корпите ќе има $x-20$ и $2x-20$ јаболка, па затоа

$$2x-20=3(x-20),$$

од каде наоѓаме $x=40$. Значи, во првата корпа има 40, а во втората има $2 \cdot 40=80$ јаболка.

284. Ако учениците во одделението на Горјан седнат по двајца во клупа, без места ќе останат 3 ученика, а ако седнат по тројца во клупа, ќе останат три слободни клупи. Колку клупи има во училницата на Горјан? Колку ученици учат во одделението на Горјан?

Решение. Нека во училницата има x клупи. Кога седнуваат по двајца во клупа добиваме дека бројот на учениците е $2x+3$, а кога седнуваат по тројца во клупа добиваме дека бројот на учениците е $3(x-3)$. Според тоа, $2x+3=3(x-3)$, од каде добиваме $x=12$. Значи, во училницата на Горјан има 12 клупи, а во одделението на Горјан учат $2 \cdot 12+3=27$ ученици.

285. Зајакот Ушко секој ден јаде по еден морков повеќе од претходниот ден. Тој за 9 дена изел 72 моркови. Колку моркови изел Ушко седмиот ден?

Решение. Ако петтиот ден Ушко изел x моркови, тогаш тој во текот на деветте дена јадел $x-4$, $x-3$, $x-2$, $x-1$, x , $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$, па затоа

$$x-4+x-3+x-2+x-1+x+x+1+x+2+x+3+x+4=72,$$

од каде добиваме $9x = 72$, односно $x = 8$. Според тоа, Ушко петтиот ден изел 8 моркови, што значи дека шестиот ден изел 9, а седмиот ден изел 10 моркови.

286. Кога Крали Марко и отсекува една глава на ламјата Огненка, на Огненка ѝ пораснале 7 нови глави. Потоа Крали Марко на Огненка и ги пресекол четвртина од главите кои таа ги имала во моментот, но и пораснале 8 нови глави, па така Огненка имала 17 глави. Колку глави имала Огненка на почетокот?

Решение. *Прв начин.* Задачата ќе ја решиме одејќи одназад- нанапред. Пред на Огненка да ѝ порасната последните 8 глави таа имала $17 - 8 = 9$ глави. Овие 9 глави се еднакви на $\frac{3}{4}$ од главите кои Огненка ги имала пред Крали Марко да ѝ пресече четвртина од главите. Значи, пред тоа Огненка имала $\frac{4}{3} \cdot 9 = 12$ глави. Тоа се главите кога на Огненка и пораснале 7 глави, што значи дека таа по сечењето на правата глава имала $12 - 7 = 5$ глави. Конечно, на почетокот Огненка имала $5 + 1 = 6$ глави.

Втор начин. Нека Огненка на почетокот имала x глави. По сечењето на првата глава таа имала $x - 1 + 7 = x + 6$ глави. Откако ѝ се отсечени $(x + 6) : 4$, на Огненка и останале $3(x + 6) : 4$, па како и пораснале нови 8 глави таа имала $3(x + 6) : 4 + 8$ глави. Според тоа,

$$3(x + 6) : 4 + 8 = 17$$

$$3(x + 6) : 4 = 9$$

$$3(x + 6) = 36$$

$$x + 6 = 12$$

$$x = 6.$$

Значи, на почетокот Огненка имала 6 глави.

287. За новогодишната прослава биле порачани вкупно 600 сокови, тулумби и баклави. Определи колку баклави се порачани, ако тие се за 294 помалку од соковите и се за 132 повеќе од тулумбите.

Решение. Нека се порачани x баклави. Тоа значи дека се порачани $x + 294$ сокови и $x - 132$ тулумби. Според тоа,

$$x + x + 294 + x - 132 = 600,$$

од каде наоѓаме $3x = 438$, т.е. $x = 146$. Според тоа, порачани се 146 баклави, 440 сокови и 14 тулумби.

288. Јато гуски наишло на осамена гуска. „Здраво сто гуски“ – рекла осамената гуска. „Не сме сто. Колку што сме, уште толку, уште половина, уште четвртина и ти да си со нас, тогаш сме точно сто“ – одговориле гуските. Колку гуски броело јатото?

Решение. Нека четвртина од јатото броело x гуски. Тогаш половината јато броело $2x$ гуски, а целото јато броело $4x$ гуски. Од условот на задачата следува $4x + 4x + 2x + x + 1 = 100$, од каде добиваме $x = 9$. Конечно, јатото броело $4 \cdot 9 = 36$ гуски.

289. Во текот на учебната година училиштето на Горјан во различно време организира три екскурзии за учениците од петто одделение, па така некои ученици биле на повеќе од една екскурзија. На првата екскурзија биле A ученици, на втората биле B ученици и на третата биле C ученици. Бројот на учениците кои биле на точно една екскурзија е еднаков на бројот на учениците кои биле на точно две екскурзии, како и на бројот на учениците кои биле трите екскурзии. Определи колку ученици биле и на трите екскурзии ако:

$$A = (1005 : 5) \cdot 7 + (12003 - 7539) : -1890,$$

$$B = (1 + 2 + 3 + \dots + 22 + 23) : 4,$$

$$C = 2019 \cdot 23 + 1991 \cdot 13 - 1988 \cdot 13 - 2018 \cdot 23 + 4.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} A &= (1005 : 5) \cdot 7 + (12003 - 7539) : -1890 = 201 \cdot 7 + 4464 : 8 - 1890 \\ &= 1407 + 558 - 1890 = 75, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (1 + 2 + 3 + \dots + 22 + 23) : 4 = ((1 + 22) + (2 + 21) + \dots + (11 + 12) + 23) : 4 \\ &= (12 \cdot 23) : 4 = 69, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 2019 \cdot 23 + 1991 \cdot 13 - 1988 \cdot 13 - 2018 \cdot 23 + 4 \\ &= (2019 - 2018) \cdot 23 + (1991 - 1988) \cdot 13 + 4 = 23 + 3 \cdot 13 + 4 = 66. \end{aligned}$$

Нека x е бројот на учениците кои патувале точно на една екскурзија. Тогаш

$$x + 2x + 3x = A + B + C = 75 + 69 + 66,$$

па затоа $6x = 210$, т.е. $x = 35$ ученици патувале на сите три екскурзии.

290. Во една кутија има 20 бели, црни и црвени топчиња. По колку топчиња може да има од секоја боја ако белите топчиња се шест пати повеќе од црните?

Решение. Нека x е бројот на црните топчиња. Тогаш имаме $6x$ бели топчиња и $20 - x - 6x = 20 - 7x$ црвени топчиња. Но, бројот на топчи-

њата е природен број, па затоа $20 - 7x$ треба да е природен број, што е можно само за $x = 1$ и за $x = 2$.

Ако $x = 1$, тогаш имаме 1 црно, 6 бели и 13 црвени топчиња.

Ако $x = 2$, тогаш имаме 2 црни, 12 бели и 6 црвени топчиња.

291. Кате и Лиле собираат сликички. Кате има 360 сликички повеќе од Лиле. Ако Лиле и даде 24 сликички на Кате, тогаш Кате ќе има 4 пати повеќе сликички од Лиле. Колку сликички имаат вкупно двете девојчиња?

Решение. Нека Кате има x , а Лиле има y сликички. Тогаш $x = 360 + y$ и $x + 24 = 4(y - 24)$. Според тоа, $360 + y + 24 = 4(y - 24)$, од каде добиваме $y = 160$. Значи, $x = 520$, т.е. двете девојчиња заедно имаат $520 + 160 = 680$ сликички

292. Едно семејство има неколку деца. Секое девојче има толку браќа колку што има сестри. Секое момче има двапати повеќе сестри, отколку браќа. Колку деца има во тоа семејство?

Решение. Нека во семејството има x девојчиња и y момчиња. Според условот на задачата важи $x - 1 = y$ и $x = 2(y - 1)$. Според тоа, $2(y - 1) - 1 = y$, т.е. $y = 3$. Сега е јасно дека $x = 4$, што значи дека во семејството има $x + y = 7$ деца.

293. Во прифатилиште за животни имало 90 кучиња и мачиња. Бројот на нозете на кучињата е четири пати поголем од бројот на ушите кај мачките. Колку кучиња и колку мачиња имало во прифатилиштето?

Решение. Ако во прифатилиштето има x кучиња и y мачиња, тогаш тие ќе имаат $4x$ нозе и $2y$ уши, соодветно. Затоа $4x = 4 \cdot 2y$, односно $x = 2y$. Понатаму, $x + y = 90$, и ако во последната равенка замениме $x = 2y$ добиваме $2y + y = 90$, од каде наоѓаме $y = 30$. Конечно во прифатилиштето имало 30 мачиња и $90 - 30 = 60$ кучиња.

294. Секое момче во III^a одделение има по 2 топчиња, а секое девојче има по 5 топчиња. Во одделението има два пати повеќе момчиња од девојчиња и сите заедно имаат повеќе од 80, а помалку од 89 топчиња. Колку ученици има во ова одделение?

Решение. Нека во одделението има x девојчиња. Тогаш бројот на момчињата е еднаков на $2x$. Според тоа, сите заедно имаат $5x + 2 \cdot 2x = 9x$ топчиња. Учениците имаат повеќе од 80, а помалку од

89 топчиња. Единствен број кој е делив со 9, а е поголем од 80 и помал од 89 е бројот 81. Значи, $9x = 81$, од каде добиваме $x = 81:9 = 9$. Значи, во одделението има 9 девојчиња и $2 \cdot 9 = 18$ момчиња, односно $9 + 18 = 27$ ученици.

295. Група во која биле помалку од 15 момчиња и девојчиња тргнала на излет. Ако на излет тргнале трипати повеќе девојчиња, тогаш во групата ќе имало повеќе девојчиња од момчиња. Ако на излет тргнале двапати повеќе момчиња, тогаш во групата ќе имало момчиња повеќе од петкратниот број на девојчињата. Колку девојчиња и колку момчиња имало во групата?

Решение. Нека во групата има x девојчиња и y момчиња. Од условот на задачата следува $x + y < 15$ и $5x < 2y < 6x$. Затоа

$$7x = 2x + 5x < 2x + 2y < 30$$

од ладе следува $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. Бројот x не може да биде 1 или 2 бидејќи не постои парен број меѓу $5 \cdot 1$ и $6 \cdot 1$, ниту постои парен број меѓу $5 \cdot 2$ и $6 \cdot 2$. Бројот x не може да е 4, бидејќи од $20 < 2y < 24$ следува $y = 11$, па затоа $x + y = 15$, што не е можно бидејќи групата брое-ла помалку од 15 деца. Значи, $x = 3$ и од $15 < 2y < 18$ следува $y = 8$.

296. Новогодишната елка е украсена со жолти, црвени и сини лампиони. Вкупно има 30 лампиони. Жолтите лампиони се за 7 повеќе од сините, а црвените лампиони се повеќе отколку што се жолтите и сините заедно. Кој е најголемиот можен број жолти лампиони?

Решение. Нека има x жолти лампиони. Тогаш бројот на сините лампиони се $x - 7$, а бројот на црвените лампиони y е поголем од $x + x - 7 = 2x - 7$. Според тоа, $y + x + x - 7 = 30$, односно $y = 37 - 2x$ и како $y > 2x - 7$ добиваме $2x - 7 < 37 - 2x$, од каде наоѓаме $4x < 44$, односно $x < 11$. Значи, може да има најмногу 10 жолти лампиони и притоа има 3 сини лампиони и 17 црвени лампиони.

297. Андон, Стефан и Теодор биле во книжарница. Секој од нив купил најмалку по една книга и сите купиле различен број книги. Антон и Стефан заедно купиле 6 книги, а Теодор и Антон заедно купиле 4 книги. Колку книги заедно купиле Стефан и Теодор?

Решение. Нека Андон, Стефан и Теодор купиле a, b и c книги, соодветно. Според условот на задачата $a, b, c \geq 1$, $a \neq b \neq c \neq a$, $a + b = 6$ и

$a + c = 4$. Јасно, $a, b \neq 3$ и $a, c \neq 2$. Понатаму, бидејќи $a \neq 2, 3$, $a, c \geq 1$ и $a + c = 4$, добиваме $a = 1$ и $c = 3$. Сега од $a + b = 6$ следува $b = 5$. Конечно, Стефан и Теодор заедно купиле $b + c = 5 + 3 = 8$ книги.

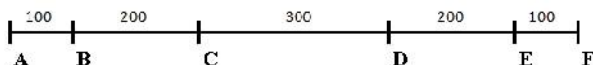
298. За правење мала торта се потребни 4 јајца, а за правење средна торта се потребни 6 јајца. Колку најмногу торти од двата вида може да се направат со точно 32 јајца?

Решение. Нека имаме x мали и y средни торти. Тогаш $4x + 6y = 32$, од каде добиваме $2x + 3y = 16$. Во последното равенство десната страна е парен број, па затоа мора и левата страна да е парен број, а тоа е можно само ако y е парен број. За $y = 2$ добиваме $2x = 10$, т.е. $x = 5$ и во овој случај имаме $2 + 5 = 7$ торти. За $y = 4$ имаме $2x = 4$, т.е. $x = 2$ и во овој случај имаме $4 + 2 = 6$ торти. Според тоа, може најмногу да се направат 7 торти од двата вида.

IV ГЕОМЕТРИЈА

IV.1. ОТСЕЧКИ И АГЛИ

1. Должините на отсечките на цртежот се дадени во милиметри. Определи ја разликата на должините на отсечките AE и CF .



Решение. Имаме:

$$\overline{AE} = 100 + 200 + 300 + 200 = 800 \text{ mm и}$$

$$\overline{CF} = 300 + 200 + 100 = 600 \text{ mm}.$$

Според тоа,

$$\overline{AE} - \overline{CF} = 800 - 600 = 200 \text{ mm}.$$

2. На една права се означени неколку точки така што растојанието меѓу две соседни точки е еднакво на 7 cm , а растојанието меѓу крајните точки е еднакво на 728 cm . Колку точки се означени на правата?

Решение. Ако на правата се означени n точки, тогаш меѓу соседните точки имаме $n-1$ растојание. Бидејќи растојанијата меѓу соседните точки се еднакви на 7 cm , а растојанието меѓу првата и последната точка е еднакво на 728 cm , добиваме $7(n-1) = 728$, од каде наоѓаме $n-1=104$, т.е. $n=105$.

3. Колку светилки треба да се постават за да се осветли патека долга 2 km ако растојанието меѓу две светилки е 5 m и светилки се поставуваат и на почетокот и на крајот на патеката.

Решение. Од $2 \text{ km} : 5 \text{ m} = 2000 \text{ m} : 5 \text{ m} = 400$ и фактот дека светилките се поставуваат и на почетокот и на крајот на патеката следува дека за осветлување на патеката треба да се постават $400 + 1 = 401$ светилка.

4. Во еден ред се засадени 100 елки. Растојанието меѓу секои две соседни елки е еднакво, а од третата до осмата елка растојанието е 15 m . Определи го растојанието од првата до последната елка во редот.

Решение. Бидејќи $8-3=5$, од третата до осмата елка имаме 5 еднакви растојанија. Според тоа, растојанието меѓу секои две соседни елки е еднакво на $15:5=3 \text{ m}$. Од првата до 100-тата елка имаме 99

еднакви растојанија, па затоа растојанието меѓу првата и последната елка е еднакво на $99 \cdot 3 = 297 \text{ m}$.

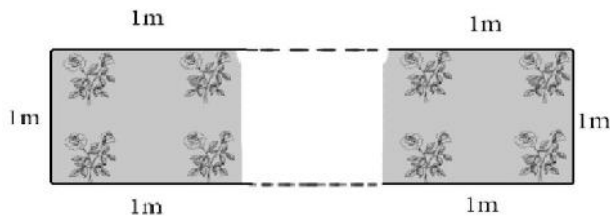
5. Должината на отсечката AB е еднаква на $42 \text{ dm } 4 \text{ mm}$. Должината на отсечката CD е четири пати помала од должината на отсечката AB . Определи го збирот на должините на отсечките AB и CD .

Решение. Должината на отсечката AB е

$$42 \text{ dm } 4 \text{ mm} = 420 \text{ cm } 4 \text{ mm} = 4200 \text{ mm} + 4 \text{ mm} = 4204 \text{ mm}.$$

Должината на отсечката CD е еднаква на $4204 : 4 = 1051 \text{ mm}$. Збирот на должините на отсечките AB и CD е: $4204 + 1051 = 5255 \text{ mm}$.

6. Учениците од одделението на Пабло засадили трендафили рози на двете страни по должината на централната алеа во градскиот парк. Должината на алеата е 68 m , а трендафилите се засадени на растојание 1 m еден од друг, почнувајќи од самиот крај на алеата. Колку трендафили засадили соучениците на Пабло?



Должината на алеата е 68 m , а трендафилите се засадени на растојание 1 m еден од друг, почнувајќи од самиот крај на алеата. Колку трендафили засадили соучениците на Пабло?

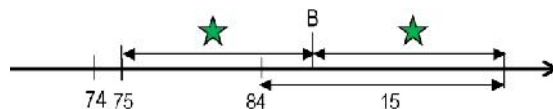
Решение. Првиот трендафил е засаден на почетокот на алеата, а потоа на секој метар е засаден по еден трендафил, што значи дека на едната страна се засадени $1 + 68 = 69$ трендафили. Според тоа, во алеата се засадени $2 \cdot 69 = 138$ трендафили.

7. Марија во дворот има цветна леа долга 3 m , во која од едниот до другиот крај засадила два реда цвеќе. На едната страна од леата таа на секои 30 cm засадила каранфили, а на спротивната страна од леата на секои 20 cm Марија засадила лалиња. Колку цвета засадила Марија?

Решение. Имаме $3 \text{ m} = 300 \text{ cm} = 10 \cdot 30 \text{ cm}$ и $3 \text{ m} = 300 \text{ cm} = 15 \cdot 20 \text{ cm}$.

Значи, на едната страна од леата имаме 10 растојанија меѓу каранфилите, што значи дека се засадени 11 каранфили, а на другата страна имаме 15 растојанија меѓу лалињата, што значи дека се засадени 16 лалиња. Конечно, Марија засадила $11 + 16 = 27$ цвеќиња.

8. На цртежот десно отсечките означени со

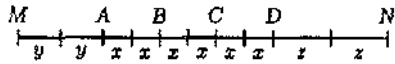


свездичките се со еднаква должина. Кој број треба да е запишан на местото на буквата B ?

Решение. На крајот од десната отсечка означена со свезда треба да е запишан бројот $84 + 15 = 99$. Според тоа, збирот на должините на двете отсечки е еднаков на $99 - 75 = 24$. Значи, должината на едната отсечка е еднаква на $24 : 2 = 12$, па затоа на местото на буквата B треба да е запишан бројот $75 + 12 = 87$.

9. На правата p последователно се дадени точките M, A, B, C, D и N така што $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$. Растојанието меѓу средините на отсечките AB и CD е 32 cm , а растојанието меѓу средините на отсечките MA и DN е еднакво на 57 cm . Определи ја должината на отсечката MN .

Решение. Нека $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2x$, $\overline{MA} = 2y$ и $\overline{DN} = 2z$ (цртеж десно).



Тогаш растојанието од средината на отсечката AB до средината на отсечката CD е $4x$, па затоа $4x = 32$, т.е. $x = 8\text{ cm}$ и $\overline{AD} = 6x = 48\text{ cm}$. Бидејќи растојанието од средината на MA до средината на DN е 57 cm , добиваме $y + 6x + z = 57$, па затоа $y + z = 57 - 48 = 9\text{ cm}$. Според тоа, $\overline{MN} = 2y + 6x + 2z = 2(y + z) + 6x = 18 + 48 = 66\text{ cm}$.

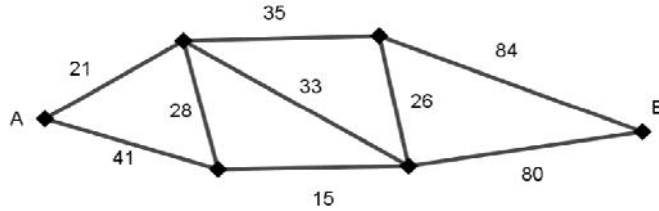
10. Нека точките A, B, C и D лежат на една права, не задолжително во овој редослед. Познато е дека $\overline{AC} = 24\text{ cm}$, $\overline{AD} = 38\text{ cm}$, $\overline{BC} = 19\text{ cm}$ и $\overline{BD} = 43\text{ cm}$. Определи ја должината на отсечката CD .

Решение. Од $\overline{AC} = 24\text{ cm}$ и $\overline{BC} = 19\text{ cm}$ следува дека или B е меѓу A и C , или C е меѓу A и B .

Ако C е меѓу A и B , тогаш $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC} = 43\text{ cm}$, а тоа противречи на равенствата $\overline{AD} = 38\text{ cm}$ и $\overline{BD} = 43\text{ cm}$ (Зошто?). Ако B е меѓу A и C , тогаш $\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC} = 5\text{ cm}$. Сега од $\overline{BD} = 43\text{ cm}$, $\overline{AB} = 5\text{ cm}$ и $\overline{AD} = 38\text{ cm}$ следува дека A е меѓу B и D , па затоа

$$\overline{CD} = \overline{DA} + \overline{AC} = 38 + 24 = 62\text{ cm}.$$

11. На долниот цртеж се дадени можните патишта меѓу неколку различни градови и нивните должини изразени во километри.



Опреди ја должината на најкраткиот пат меѓу градовите A и B .

Решение. Лесно се гледа дека меѓу градовите A и B трите патишта со најмала должина се патиштата со должина:

$$21 + 35 + 84 = 140 \text{ km},$$

$$41 + 15 + 80 = 136 \text{ km},$$

$$21 + 33 + 80 = 134 \text{ km}$$

(Зошто?). Според тоа, должината на најкраткиот пат меѓу градовите A и B е 134 km .

12. На цртот десно должината на страната на едно мало квадратче е еднаква на 1 cm . Опреди ја вкупната должина на отсечките на фигурите кои се страни или делови од страни на само еден квадрат.



Решение. На левата фигура вкупната должина на отсечките кои се страни или делови на страни на само еден квадрат е еднаква на $1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 3 + 3 = 14 \text{ cm}$. На десната фигура вкупната должина на отсечките кои се страни или делови на страни на само еден квадрат е еднаква на $3 + 3 + 3 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 18 \text{ cm}$. Според тоа, бараната вкупна должина е $14 + 18 = 32 \text{ cm}$.

13. Даден е аголот $\alpha = 160^\circ$ кој е поделен на четири делови така што првиот дел е двапати поголем од вториот, вториот е четирипати поголем од четвртиот, а третиот и трипати поголем од четвртиот. Опреди ги големините на секој од четирите делови.

Решение. Нека четвртиот агол е x . Според условот на задачата третиот агол е $3x$, вториот е $4x$ и првиот е $2 \cdot 4x = 8x$. Значи, $8x + 4x + 3x + x = 140^\circ$, од каде добиваме $x = 10^\circ$. Конечно. Бараните агли се $80^\circ, 40^\circ, 30^\circ$ и 10° .

14. Опреди ги аглиите α и β за кои се знае дека нивниот збир е прав агол и аголот α е за 1° поголем од аголот β .

Решение. Од условот на задачата следува $\alpha = \beta + 1^\circ$ и $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Според тоа, $2\beta + 1^\circ = 90^\circ$, т.е. $\alpha = 45^\circ 30'$ и $\beta = 44^\circ 30'$.

15. За аглие α, β и γ прикажани на цртежот десно важи

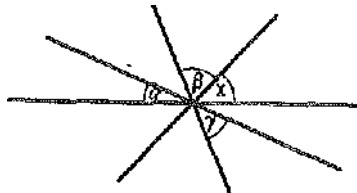
$$\alpha = 23^\circ 30', \beta = 66^\circ 45' \text{ и } \gamma = 43^\circ 30'.$$

Опреди го аголот x .

Решение. Од цртежот се гледа дека

$$\alpha + \beta + x + \gamma = 180^\circ,$$

па како $\alpha + \beta + \gamma = 133^\circ 30'$, добиваме дека $x = 180^\circ - 133^\circ 30' = 46^\circ 30'$.



16. Опреди ги комплементните агли α и β за кои важи $\alpha : \beta = 1 : 4$.

Решение. Од условот на задачата следува $\beta = 4\alpha$ и $\alpha + \beta = 90^\circ$. Според тоа, $\alpha + 4\alpha = 90^\circ$, од каде добиваме $\alpha = 18^\circ$. Конечно, $\beta = 72^\circ$.

17. Правите a и b се сечат и формираат два остри агли α и γ и два тапи агли β и δ . Опреди ги овие агли ако важи $7(\alpha + \gamma) = 5(\beta + \delta)$.

Решение. Од условот на задачата следува $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$. Според тоа, $7\alpha = 5\beta$ и $\alpha + \beta = 180^\circ$. Конечно, од последните две равенства наоѓаме $\alpha = 75^\circ$ и $\beta = 105^\circ$.

18. Аголот x е поголем од својот суплементен агол y за толку колку што е аголот y поголем од својот комплементен агол z . Опреди ги аглие x, y и z .

Решение. Јасно, z е најмалиот од бараните агли. Неговиот комплементен агол е $y = 90^\circ - z$, а суплементниот агол на y е $x = 90^\circ + z$.

Од условот на задачата следува $90^\circ + z - (90^\circ - z) = 90^\circ - z - z$, од каде добиваме $4z = 90^\circ$, т.е. $z = 22^\circ 30'$. Според тоа, $y = 90^\circ - z = 67^\circ 30'$ и $x = 90^\circ + z = 112^\circ 30'$.

19. Опреди го аголот кој е суплементен на својата седмина.

Решение. Ако бараниот агол го поделиме на седум еднакви делови, тогаш еден од добиените делови ќе биде еднаков на суплементниот агол. Затоа, суплементниот агол е еднаков на осмина од рамниот агол,

т.е. суплементниот агол е еднаков $180^\circ : 8 = 22^\circ 30'$. Конечно, бараниот агол е еднаков на $7 \cdot 22^\circ 30' = 180^\circ - 22^\circ 30' = 157^\circ 30'$.

20. Разликата на аголот α и неговиот напореден агол β е еднаква на 36° . Определи го аголот γ кој е комплементен на аголот β .

Решение. Од условот на задачата следува $\alpha - \beta = 36^\circ$ и $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Од последните две равенства следува $\alpha = 108^\circ$ и $\beta = 72^\circ$. Конечно, $\gamma = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.

21. Определи го аголот α кој е за 18° поголем од половината од својот суплементен агол.

Решение. Суплементниот агол на аголот α е еднаков на $180^\circ - \alpha$.

Значи, $\alpha = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) + 18^\circ$, од каде добиваме $\alpha = 72^\circ$

22. Аголот α е суплементен со аголот β , а е комплементен со третина од аголот β . Определи ги аглие α и β .

Решение. Од условот на задачата следува $\beta = 180^\circ - \alpha$ и $\alpha + \frac{\beta}{3} = 90^\circ$.

Значи, $\alpha + \frac{180^\circ - \alpha}{3} = 90^\circ$, од каде добиваме $\alpha = 45^\circ$, па затоа $\beta = 135^\circ$.

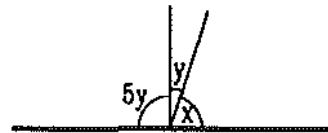
23. Остриот агол x и аголот кој е еднаков на шестина од неговиот суплементен агол се комплементни агли. Определи го аголот x .

Решение. Нека y комплементниот агол

на аголот x . Тогаш $x + y = 90^\circ$. Но, y е

еднаков на шестина од суплементниот агол на x , па затоа $x + y + 5y = 180^\circ$, од

каде добиваме $5y = 90^\circ$, т.е. $y = 18^\circ$. Конечно, $x = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$.



24. Аглие α и β се суплементни, а аглие β и γ се комплементни. Определи ги аглие α, β и γ ако аголот α е пет пати поголем од аголот γ .

Решение. Имаме $\alpha + \beta = 180^\circ$ и $\gamma + \beta = 90^\circ$, па затоа $\alpha - \gamma = 90^\circ$. Понатаму, $\alpha = 5\gamma$ и ако замениме во претходната равенка добиваме

$4\gamma = 90^\circ$, т.е. $\gamma = 22^\circ 30'$. Конечно, $\alpha = 5\gamma = 112^\circ 30'$ и $\beta = 67^\circ 30'$.

25. Даден е аголот α . Ако α и β се суплементни агли, а β и γ се комплементни агли, определи ја разликата на аглите α и γ . Изрази го преку аголот α суплементниот агол на аголот γ .

Решение. Од $\alpha + \beta = 180^\circ$ и $\beta + \gamma = 90^\circ$ следува $\alpha - \gamma = 90^\circ$. Значи, $\alpha = 90^\circ + \gamma$, па затоа $90^\circ + \gamma + \beta = 180^\circ$, што значи дека суплементен агол на аголот γ е $90^\circ + \beta = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - (\alpha - 90^\circ) = 270^\circ - \alpha$.

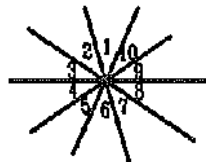
26. Определи го збирот на два агли кои се суплементни со два комплементни агли.

Решение. Нека α и β се двата комплементни агли, т.е. $\alpha + \beta = 90^\circ$. Нека суплементниот агол на α е $\gamma = 180^\circ - \alpha$ и суплементниот агол на β е $\delta = 180^\circ - \beta$. Тогаш

$$\gamma + \delta = 180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta = 360^\circ - (\alpha + \beta) = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ.$$

27. Пет прави се сечат во една точка и формираат десет агли кои се означени со броевите од 1 до 10 (цртеж десно). Докажи дека

$$\angle 1 + \angle 3 + \angle 5 + \angle 7 + \angle 9 = 180^\circ.$$



Решение. Имаме

$$\angle 1 = \angle 6, \angle 2 = \angle 7, \angle 3 = \angle 8, \angle 4 = \angle 9, \angle 5 = \angle 10.$$

како накрсни агли. Понатаму, ако ги искористиме горните равенства, од равенството

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 + \angle 9 + \angle 10 = 360^\circ$$

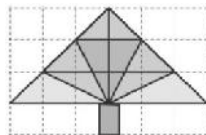
следува $2(\angle 1 + \angle 3 + \angle 5 + \angle 7 + \angle 9) = 360^\circ$, па затоа

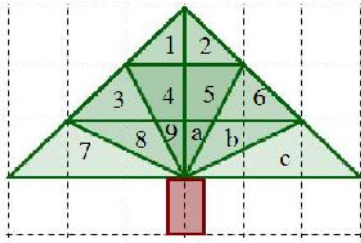
$$\angle 1 + \angle 3 + \angle 5 + \angle 7 + \angle 9 = 180^\circ.$$

IV.2. ТРИАГОЛНИК

28. Определи го бројот на рамнокраките триаголници прикажани на цртежот десно.

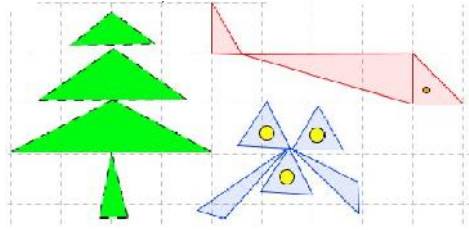
Решение. За да ги преброиме рамнокраките триаголници прикажани на дадениот цртеж триаголниците и четириаголниците ќе ги означиме како на цртежот лево. При





воведените ознаки рамнокраки триаголници се: 1, 2, 12, 9a, 38, 6b, 134, 256, 459a, 89ab, 123456, 134789, 256abc и 123456789abc. Според тоа, на дадениот цртеж се прикажани 14 рамнокраки триаголници.

29. Определи колку рамнострани, рамнокраки, разностранни, остроаголни, правоаголни и тапоаголни триаголници се содржани во фигурите прикажани на дадените цртежи.



Решение. Фигурите прикажани на дадените цртежи содржат 4 разностранни, 3 рамнострани, 5 рамнокраки, 4 остроаголни, 3 правоаголни и 5 тапоаголни триаголници.

30. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е 240 cm , а должината на неговиот крак е 84 cm . Што е подолго, кракот или основата и за колку?

Решение. Должината на основата на триаголникот е еднаква на $240 - 2 \cdot 84 = 240 - 168 = 72\text{ cm}$. Според тоа, подолг е кракот на триаголникот и тоа за $84 - 72 = 12\text{ cm}$.

31. Периметарот на еден триаголник е 68 cm . Должината на едната страна е 23 cm , а другата е за 2 cm подолга. Определи ја должината на третата страна.

Решение. Должината на втората страна е еднаква на $23 + 2 = 25\text{ cm}$. Според тоа, должината на третата страна е $68 - (23 + 25) = 20\text{ cm}$.

32. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е еднаков на 100 cm , а должината на една негова страна е еднаква на 40 cm . Определи ги должините на другите две страни на триаголникот.

Решение. Нека a и b се должините на основата и кракот на рамнокракиот триаголник. Имаме, $a + 2b = 100$. Мозни се два случаја:

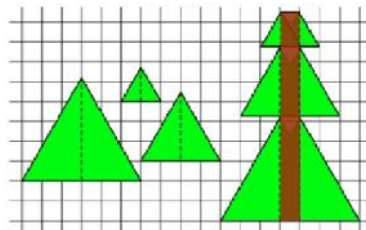
- 1) Ако $a = 40\text{ cm}$, тогаш $40 + 2b = 100$, па затоа $b = 30\text{ cm}$, што значи дека должините на другите две страни на триаголникот се 30 cm и 30 cm .

- 2) Ако $b = 40 \text{ cm}$, тогаш $a + 2 \cdot 40 = 100$, па затоа $a = 20 \text{ cm}$, што значи дека должините на другите две страни на триаголникот се 40 cm и 20 cm .

33. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\overline{AB} = 187 \text{ cm}$, должината на AC е за 25 cm помала од должината на AB и должината на BC е за 88 cm поголема од должината на AB . Определи го периметарот на $\triangle ABC$.

Решение. За должините на страните на $\triangle ABC$ имаме $\overline{AB} = 187 \text{ cm}$, $\overline{AC} = \overline{AB} - 25 = 187 - 25 = 162 \text{ cm}$ и $\overline{BC} = \overline{AB} + 88 = 187 + 88 = 275 \text{ cm}$. Според тоа, периметарот на $\triangle ABC$ е $L = 187 + 162 + 275 = 624 \text{ cm}$.

34. Мирјана нацртала три рамнострани триаголници кои ги поделила по испрекинатите линии. Добиените делови ги искористила за да го направи моделот на елката прикажан на цртежот десно. Колку сантиметри е периметарот на моделот на елката ако должината на страната на најмалиот триаголник е еднаква на 4 cm ?



Решение. Страната на најмалиот триаголник е составена од страните на 2 квадратчиња, што значи дека должината на страната на едно квадратче е еднаква на $4 : 2 = 2 \text{ cm}$. Понатаму, должината на страната на средниот триаголник е еднаква на должината на страните на 4 квадратчиња, па затоа таа е еднаква на $4 \cdot 2 = 8 \text{ cm}$, а должината на страната на големиот триаголник е еднаква на $6 \cdot 2 = 12 \text{ cm}$. Конечно, бидејќи периметарот на моделот на елката е еднаков на збирот на периметрите на трите триаголници зголемен за должините на две страни на малите квадратчиња добиваме дека тој е еднаков на

$$3 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 12 + 2 \cdot 2 = 12 + 24 + 36 + 4 = 76 \text{ cm}.$$

35. Должината на страната на рамностран триаголник е еднаква на 100 mm . Периметарот на триаголникот е еднаков на периметарот на правоаголникот чија една страна е долга 5 cm . Определи ја должината на другата страна на правоаголникот.

Решение. Периметарот на рамностраниот триаголник е еднаков на $3 \cdot 100 = 300 \text{ mm} = 30 \text{ cm}$.

Должината на другата страна на правоаголникот е еднаква на $(30 - 2 \cdot 5) : 2 = 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm}$.

36. Едната страна на триаголникот е долга 19 cm . Должината на втората страна изразена во сантиметри е еднаква на најмалиот двоцифрен број и е за 5 cm пократка од третата страна. Периметарот на овој триаголник е еднаков на периметарот на квадрат. Определи ја должината на страната на квадратот.

Решение. Должината на втората страна е 10 cm , а должината на третата страна е 15 cm . Според тоа, периметарот на квадратот е еднаков на $19 + 15 + 10 = 44 \text{ cm}$. Конечно, страната на квадратот е еднаква на $44 : 4 = 11 \text{ cm}$.

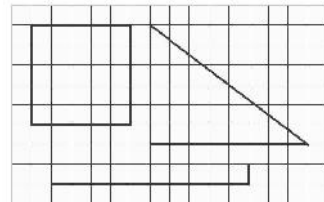
37. Рамностран триаголник и квадрат имаат еднакви периметри. Страната на триаголникот е за 5 cm подолга од страната на квадратот. Определи го периметарот на квадратот.

Решение. Нека x е должината на страната на квадратот. Тогаш должината на страната на триаголникот е $x + 5$. Бидејќи триаголникот е квадратот имаат еднакви периметри добиваме $4x = 3(x + 5)$, од каде добиваме $x = 15 \text{ cm}$. Конечно, периметарот на квадратот е еднаков на $4 \cdot 15 = 60 \text{ cm}$.

38. Која фигура има најмал периметар: рамнокрак триаголник со основа 86 mm и крак 32 cm , квадрат со страна 2 dm , правоаголник со должина 25 cm и ширина 120 mm , рамностран триаголник со страна 27 cm .

Решение. Периметарот на рамнокракиот триаголник е еднаков на $86 \text{ mm} + 2 \cdot 32 \text{ cm} = 726 \text{ mm}$, периметарот на квадратот е еднаков на $4 \cdot 2 \text{ dm} = 800 \text{ mm}$, периметарот на правоаголникот е еднаков на $2 \cdot 25 \text{ cm} + 2 \cdot 120 \text{ mm} = 740 \text{ mm}$ и периметарот на рамностраниот триаголник е еднаков на $3 \cdot 27 \text{ cm} = 810 \text{ mm}$. Според тоа, рамнокракиот триаголник има најмал периметар.

39. На цртежот десно страните на триаголникот имаат должини 6, 8 и 10 мерни единици. Која фигура има најголем периметар?



Решение. Периметарот на триаголникот

е еднаков на $6 + 8 + 10 = 24$ мерни единици. Периметарот на квадратот е еднаков на $4 \cdot 5 = 20$ мерни единици и периметарот на правоаголникот е еднаков на $2 \cdot (1 + 10) = 22$ мерни единици. Според тоа, триаголникот има најголем периметар.

40. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на 86 cm . Едната страна е за 1 cm подолга од другата страна. Определи го периметарот на рамнокракиот триаголник чии страни се еднакви на страните на правоаголникот.

Решение. Должината на едната страна на правоаголникот е еднаква на $(86 - 2 \cdot 1) : 4 = 84 : 4 = 21\text{ cm}$, а должината на другата страна е еднаква на 22 cm . Постојат два рамнокраки триаголници и тоа:

- со должини на страни $21\text{ cm}, 22\text{ cm}, 22\text{ cm}$ и периметар 65 cm ,
- со должини на страни $21\text{ cm}, 21\text{ cm}, 22\text{ cm}$ и периметар 64 cm .

41. Квадрат и рамностран триаголник имаат еднакви страни. Збирот на нивните периметри е еднаков на 301 cm . Определи го периметарот на квадратот.

Решение. Ако должината на страната на квадратот и триаголникот е a , тогаш збирот на нивните периметри е еднаков на $3a + 4a = 7a$. Затоа $7a = 301$, од каде добиваме $a = 301 : 7 = 43\text{ cm}$. Конечно, периметарот на квадратот е $4 \cdot 43 = 172\text{ cm}$.

42. Рамнокрак триаголник, квадрат и правоаголник имаат еднакви периметри. Плоштината на квадратот е еднаква на 100 cm^2 . Основата на триаголникот е двапати помала од неговиот крак и е еднаква на една од страните на правоаголникот. Определи ја другата страна на правоаголникот.

Решение. Од $100 = 10 \cdot 10$ следува дека должината на страната на квадратот е 10 cm , па затоа неговиот периметар е еднаков на $4 \cdot 10 = 40\text{ cm}$. Ако должината на основата на рамнокракиот триаголник е x , тогаш должината на кракот е $2x$, па затоа $x + 2x + 2x = 40$, од каде добиваме $x = 8\text{ cm}$. Значи, едната страна на правоаголникот е еднаква на 8 cm , па затоа другата страна е еднаква на $(40 - 2 \cdot 8) : 2 = 12\text{ cm}$.

43. Даден е триаголник кај кој должината на едната страна е еднаква на периметарот на квадратот со должина на страна 8 cm . Должината на

втората страна на триаголникот е за 5 cm пократка од должината на првата негова страна, а должината на третата страна е двапати поголема од должината на правоаголник со периметар 28 cm и ширина 5 cm . Определи го периметарот на триаголникот.

Решение. Должината на првата страна на триаголникот е еднаква на $4 \cdot 8 = 32\text{ cm}$, а должината на втората страна е $32 - 5 = 27\text{ cm}$. Понатаму, должината на правоаголникот е еднаква на $(28 - 2 \cdot 5) : 2 = 9\text{ cm}$, што значи дека должината на третата страна на триаголникот е еднаква на $2 \cdot 9 = 18\text{ cm}$. Конечно, периметарот на триаголникот е еднаков на $32 + 27 + 18 = 77\text{ cm}$.

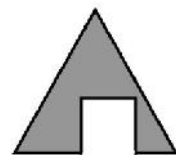
44. Периметарот на триаголникот е еднаков на 12 cm и е три пати поголем од едната страна. Определи ја страната на квадратот со периметар еднаков на периметарот на правоаголникот чији страни се еднакви на другите две страни на триаголникот.

Решение. Должината на едната страна на триаголникот $12 : 3 = 4\text{ cm}$. Според тоа, збирот на должините на другите две страни на триаголникот е еднаков на $12 - 4 = 8\text{ cm}$. Значи, периметарот на правоаголникот чији страни се еднакви на другите две страни на триаголникот е еднаков на $2 \cdot 8 = 16\text{ cm}$. Конечно, должината на страната на квадратот кој има периметар 16 cm е еднаква на $16 : 4 = 4\text{ cm}$.

45. Должината на едната страна на правоаголникот е 8 cm , а другата негова страна е два пати пократка. Периметарот на рамностраниот триаголник е за 1 dm и 2 cm поголем од периметарот на правоаголникот. Определи ја должината на страната на рамностраниот триаголник.

Решение. Должината на другата страна на правоаголникот е $8 : 2 = 4\text{ cm}$. Значи, периметарот на правоаголникот е еднаков на $2 \cdot (8 + 4) = 24\text{ cm}$. Според тоа, периметарот на рамностраниот триаголник е $24 + 10 + 2 = 36\text{ cm}$, па затоа должината на неговата страна е $36 : 3 = 12\text{ cm}$.

46. Фигурата на цртежот десно е добиена кога од рамностраниот триаголник е отсечен квадрат чија страна е трипати пократка од страната на триаголникот. Периметарот на добиената фигура е еднаков на 396 cm . Опре-



дели ја должината на страната на триаголникот.

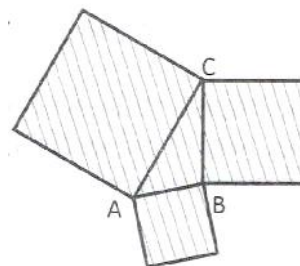
Решение. Нека должината на страната на квадратот е x . Тогаш должината на страната на триаголникот е $3x$ и периметарот на добиената фигура е $L = 3 \cdot 3x + 2x = 11x$. Според тоа, $11x = 396$, од каде добиваме $x = 36 \text{ cm}$. Според тоа, должината на страната на триаголникот е $3x = 3 \cdot 36 = 108 \text{ cm}$ и неговиот периметар е еднаков на $3 \cdot 108 = 324 \text{ cm}$.

47. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од правоаголник и два рамно-страни триаголника. Периметарот на еден од триаголниците е еднаков на 30 cm , а должината на правоаголникот е 20 cm . Определи го периметарот на оваа фигура.



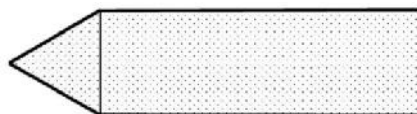
Решение. Должината на страната на рамностраниите триаголници е еднаква на $30 : 3 = 10 \text{ cm}$. Периметарот на фигурата е составен од четири страни на рамностраниите триаголници и две должини на правоаголникот, па затоа тој е еднаков на $4 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 80 \text{ cm}$.

48. Даден е триаголник ABC . Над секоја страна на триаголникот во неговата надворешност е конструиран квадрат (види цртеж). Периметарот на штрафираната фигура е 108 cm . Определи го периметарот на триаголникот ABC .



Решение. Ако должините на страните на триаголникот се a, b и c , тогаш периметарот на добиената фигура е еднаков на $3a + 3b + 3c$, па затоа важи $3a + 3b + 3c = 108$, односно $3(a + b + c) = 108$, т.е. $a + b + c = 36 \text{ cm}$. Значи, периметарот на триаголникот е еднаков на 36 cm .

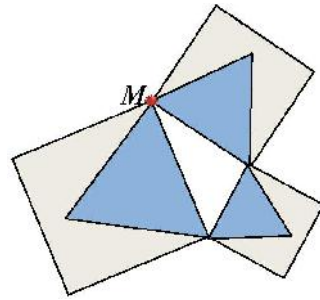
49. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од рамностран триаголник и правоаголник. Периметарот на целата фигура е за



116 mm поголем од периметарот на триаголникот и за 24 mm поголем од периметарот на правоаголникот. Определи ја плоштината на правоаголникот.

Решение. Нека должината на страната на триаголникот е a , а должините на страните на правоаголникот се a и b . Според условот на задачата имаме $3a + 2b = 3a + 116$ и $3a + 2b = 2a + 2b + 24$, од каде добиваме $b = 58 \text{ mm}$ и $a = 24 \text{ mm}$. Конечно, за плоштината на правоаголникот добиваме $P = 58 \cdot 24 = 1392 \text{ mm}^2$

50. Елена го нацрнала белиот триаголник кај кој должините на страните изразени во сантиметри се последователни природни броеви чиј производ е еднаков на 60. Потоа над секоја од страните на триаголникот, од неговата надворешна страна, таа нацрнала по еден рамностран триаголник и по еден квадрат (цртеж десно).



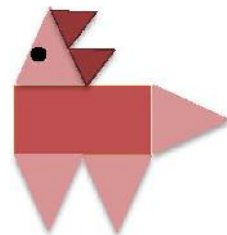
- а) Определи го збирот на сите отсечки на добиената фигура.
 б) Дали може Елена тргнувајќи од точката M да помине точно по еднаш по секоја отсечка од добиената фигура без притоа да го подигне моливот.

Решение. а) Имаме $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 3 \cdot 4 \cdot 5$, што значи дека должините на страните на белиот триаголник се еднакви на 3 cm , 4 cm и 5 cm . Добиената фигура содржи 6 отсечки со должина 3 cm , 6 отсечки со должина 4 cm и 6 отсечки со должина 5 cm . Значи, збирот на должините на сите отсечки е еднаков на

$$6 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 5 = 18 + 24 + 30 = 72 \text{ cm}.$$

- б) Одговорот на поставеното прашање е позитивен. На пример, тргнувајќи од точката M таа прво може да помине по страните на белиот триаголник, потоа да продолжи по останатите шест страни на рамностраните триаголници и на крајот да продолжи по останатите девет страни на квадратите.

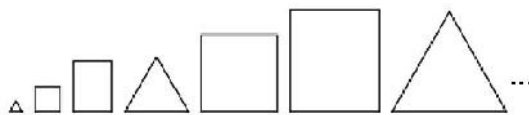
51. Елеонора користејќи два еднакви мали рамностранни триаголници, четири еднакви големи рамностранни триаголници и еден правоаголник чиј периметар е еднаков на 120 cm направила модел на петел (цртеж десно). Определи го периметарот на овој модел?



Решение. Од цртежот следува дека ширината a на правоаголникот е двапати помала од неговата должина b , т.е.

$b = 2a$. Значи, $2a + 2 \cdot 2a = 120$, односно $a = 20 \text{ cm}$. Според тоа, должината на страната на големиот рамнострани триаголник е еднаква на 20 cm , па затоа должината на страната на малиот рамнострани триаголник е еднаква на 10 cm . Конечно, периметарот на добиениот модел е еднаков на $4 \cdot 10 + 9 \cdot 20 = 40 + 180 = 220 \text{ cm}$.

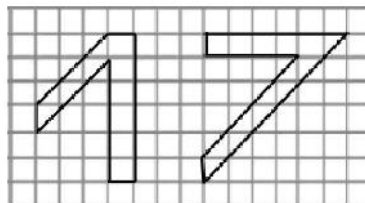
52. На цртежот десно е прикажан почеток на низа од рамнострани триаголници, квадрати и право-



голници чии должини на страни изразени во сантиметри се: 1, 2, 3 и 4, 5, 6, 7 и 8, 9, 10, 11 и 12, итн. Определи го периметарот на фигурата која има должина на страна 67 cm .

Решение. Должините на страните се последователните природни броеви, па како на секоја група од по три фигури соодветствуваат по четири должини и $67 = 4 \cdot 16 + 3$ заклучуваме дека имаме 16 групи од по три фигури, па потоа следува рамнострани триаголник со должина на страна 65 cm , па квадрат со должина на страна 66 cm , па правоаголник чија една страна е долга 67 cm , па затоа должината на другата страна е 68 cm и неговиот периметар е $2 \cdot (67 + 68) = 270 \text{ cm}$.

53. Милан во квадратна мрежа го запишал бројот 17 (цртеж десно). Расстојанието меѓу хоризонталните и вертикалните линии во мрежата е еднакво на 1 cm . Определи ја плоштината на цифрите со кои е запишан овој број?



Решение. Цифрата 1 е запишана со помош на 6 цели квадратчиња и шест триаголници, секој од кои е еднаков на половина квадратче. Значи, за запишување на цифрата 1 се искористени $6 + 6 : 2 = 9$ квадратчиња. Цифрата 7 е запишана со помош на 5 цели квадратчиња и 10 триаголници, секој од кои е еднаков на половина квадратче, т.е. за нејзино запишување се искористени $5 + 10 : 2 = 10$ квадратчиња. Конечно, за запишување на бројот 17 се искористени $9 + 10 = 19$ квадратчиња, па затоа плоштината на цифрите со кои е запишан бројот е 19 cm^2 .

54. Горјан нацртал неколку триаголници и неколку квадрати. Вкупно тој нацртал 17 фигури. Сите фигури заедно имаат 60 страни. Колку триаголници и колку квадрати нацртал Горјан?

Решение. Ако сите 17 нацртани фигури се триаголници, тогаш бројот на страните ќе биде еднаков на $17 \cdot 3 = 51$, што значи дека се нацртани $60 - 51 = 9$ страни повеќе и овие страни припаѓаат на квадратите. Бидејќи секој квадрат има по 1 страна повеќе од секој триаголник, заклучуваме дека Горјан нацртал 9 квадрати и $17 - 9 = 8$ триаголници.

55. Огнен нацртал седум триаголници, шест квадрати и десет шестаголници. Колку агли имаат заедно нацртаните многуаголници?

Решение. Триаголник има 3 агли, квадрат има 4 агли и шестаголник има 6 агли. Затоа нацртаните многуаголници заедно имаат

$$7 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 10 \cdot 6 = 21 + 24 + 60 = 105 \text{ агли.}$$

56. Ивана нацртала пет триаголници, три квадрати и девет осумаголници. Потоа ги пребројала аглиите и страните на сите нацртани фигури. За колку бројот на аглиите е поголем од бројот на страните?

Решение. Во секоја од нацртаните фигури бројот на аглиите е еднаков на бројот на страните. Тоа значи дека вкупниот број на агли кај нацртаните фигури е еднаков на вкупниот број страни, т.е. тој е поголем за 0.

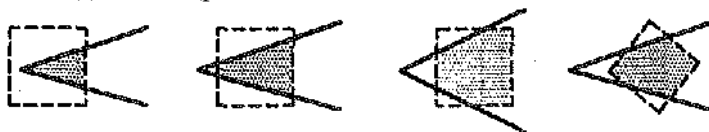
57. Марија залепила неколку триаголници и добила фигура во форма на звезда како на цртежот десно. Определи го најмалиот број триаголници со кои Марија може да ја направи свездата.



Решение. Петаголникот во свездата и два мали триаголници чии две страни лежат на една права формираат голем триаголник. Во случајот можеме да формираме два големи триаголници кои ќе содржат четири од малите триаголници и ни останува еден мал триаголник. Последното може да се направи, на пример, со триаголниците ADG , BEI и BCD . Според тоа, најмалиот број триаголници со кои Марија може да ја направи свездата е 3.

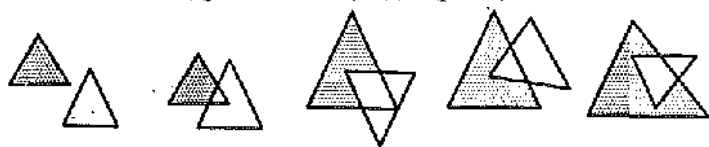
58. Кои многуаголници може да се добијат како пресек на еден остар агол и еден квадрат? За секој поединечен случај нацртај цртеж.

Решение. Пресекот на остар агол и квадрат може да биде триаголник, четириаголник, петаголник и шестаголник. Секој од овие случаи е прикажан на долните цртежи.



59. Каков многуаголник може да се добие како разлика на множествата точки на два остроаголни триаголници?

Решение. Како разлика на множествата точки на два остроаголни триаголника може да се добие триаголник, четириаголник, петаголник, шестаголник и седумаголник (види цртеж).



IV.3. ЧЕТИРИАГОЛНИК

60. Пресметај го периметарот на четириаголникот $ABCD$ чии страни се со должини

$$\overline{AB} = 2 \text{ m } 3 \text{ cm}, \overline{BC} = 2 \text{ m } 10 \text{ cm}, \overline{CD} = 2 \text{ m } 15 \text{ mm} \text{ и } \overline{DA} = 200 \text{ cm } 20 \text{ mm}.$$

Решение. Имаме:

$$\overline{AB} = 2030 \text{ mm}, \overline{BC} = 2100 \text{ mm}, \overline{CD} = 2015 \text{ mm} \text{ и } \overline{DA} = 2020 \text{ mm},$$

па затоа периметарот на четириаголникот $ABCD$ е еднаков на:

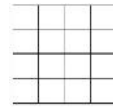
$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 2030 + 2100 + 2015 + 2020 = 8165 \text{ mm}.$$

61. Шаховската табла е во облик на квадрат и има 64 еднакви квадратни полиња. Периметарот на секое поле е еднаков на 18 cm . Пресметај го периметарот на шаховската табла.

Решение. Периметарот на секое квадратно поле е еднаков на $18 \text{ cm} = 180 \text{ mm}$. Според тоа, должината на страната на секое квадратно поле е еднаква на $180 : 4 = 45 \text{ mm}$. Шаховската табла е квадратна и е составена од 64 полиња и како $8 \cdot 8 = 64$ заклучуваме дека на секоја страна имаме по 8 мали квадрати. Според тоа, должината на

страната на таблата е еднаква на $8 \cdot 45 = 360 \text{ mm} = 36 \text{ cm}$. Конечно, периметарот на таблата е еднаков на $4 \cdot 36 = 144 \text{ cm}$.

62. Квадратот на цртежот десно е составен од 16 помали квадрати, секој од кои има периметар 40 cm . Определи го периметарот на големиот квадрат.



Решение. Нека a е должината на страната на малите квадрати. Тогаш должината на страната на големиот квадрат е еднаква на $4a = 40 \text{ cm}$. Оттука следува дека периметарот на големиот квадрат е еднаков на $4 \cdot 4a = 4 \cdot 40 = 160 \text{ cm}$.

63. Должините на страните на еден правоаголник се 59 cm и 37 cm . Определи ја должината на страната на квадратот чиј периметар е еднаков на периметарот на правоаголникот.

Решение. Периметарот на правоаголникот е еднаков на

$$2 \cdot (59 + 37) = 2 \cdot 96 = 192 \text{ cm}.$$

Според тоа, должината на страната на квадратот кој има еднаков периметар како и правоаголникот е $192 : 4 = 48 \text{ cm}$.

64. Мерниот број на плоштината на квадратот изразен во квадратни сантиметри е двапати поголем од мерниот број на периметарот на квадратот изразен во сантиметри. Определи ги периметарот и плоштината на овој квадрат.

Решение. Нека a е должината на страната на квадратот. Тогаш неговата плоштина е еднаква на $a \cdot a$, а неговиот периметар е еднаков на $4a$. Според тоа, $a \cdot a = 2 \cdot 4a$, од каде добиваме $a = 8 \text{ cm}$. Значи, периметарот на квадратот е еднаков на $4a = 32 \text{ cm}$, а плоштината е еднаква на $a \cdot a = 64 \text{ cm}^2$.

65. Дадени се два еднакви квадрати, секој од кои има плоштина 100 cm^2 . Должината на страната на едниот квадрат ја зголемуваме за 2 cm , а периметарот на другиот квадрат го зголемуваме за 16 cm , по што повторно добиваме квадрат. Кој квадрат по направените промени ќе има поголема плоштина?

Решение. Должините на страните двата квадрати се еднакви на 10 cm и нивните периметри се еднакви на $4 \cdot 10 = 40 \text{ cm}$. Должината на страната на првиот квадрат ќе биде еднаква на 12 cm , па затоа тој ќе има

плоштина $12 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$. Периметарот на вориот квадрат ќе биде еднаков на $40 + 16 = 56 \text{ cm}$, што значи дека должината на неговата страна ќе биде еднаква на $56 : 4 = 14 \text{ cm}$. Значи, плоштината на вториот квадрат ќе биде еднаква на $14 \cdot 14 = 196 \text{ cm}^2$ и таа ќе биде поголема од плоштината на првиот квадрат за $196 - 144 = 52 \text{ cm}^2$.

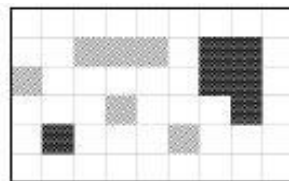
66. Квадрат е составен од неколку помали еднакви квадратчиња. Лена ги обоила квадратчињата кои се распоредени на двете дијагонали. Таа вкупно обоила 17 квадратчиња. Колку квадратчиња останале необоени?

Решение. Бројот на квадратчињата кои се распоредени на една дијагонала е еднаков на бројот на редовите (колониите) на квадратот. Бидејќи едно квадратче е заедничко за двете дијагонали, на една страна на квадратот се наоѓаат $(17 + 1) : 2 = 9$ квадратчиња. Според тоа, големиот квадрат има $9 \cdot 9 = 81$ мали квадратчиња. Лена обоила 17 квадратчиња, што значи дека необоени останале $81 - 17 = 64$ квадратчиња.

67. Должината на страната на квадратот е еднаква на 24 cm , а една страна на правоаголникот кој има еднаква плоштина со квадратот е долга 18 cm . Кој има поголем периметар: квадратот или правоаголникот?

Решение. Плоштината на квадратот е еднаква на $24 \cdot 24 = 576 \text{ cm}^2$. Должината на едната страна на правоаголникот е еднаква на 18 cm , па затоа должината на другата страна е еднаква на $576 : 18 = 32 \text{ cm}$. Значи, периметарот на квадратот е еднаков на $4 \cdot 24 = 96 \text{ cm}$, а периметарот на правоаголникот е еднаков на $2 \cdot (18 + 32) = 100 \text{ cm}$. Според тоа, периметарот на правоаголникот е за $100 - 96 = 4 \text{ cm}$ поголем од периметарот на квадратот.

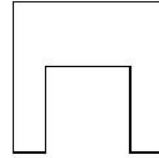
68. Татјана со цвеќиња ги засадила сивите, а Милица ги засадила црните леи на цртежот десно. На која од нив ќе ѝ треба повеќе метри жица за да ги огради леите кои ги засадила?



Решение. Леите се сместени во квадратна мрежа. Нека должината на страната на еден квадрат во мрежата е еднаква на $a \text{ m}$. На Татјана е се потребни $3 \cdot 4a + 2(a + 3a) = 20a \text{ m}$ жица, а на Милица и се потребни

$2 \cdot (2a + 3a) + 4a = 14a$ м жица. Според тоа, на Татјана и се потребни повеќе метри жица за да ги загради леите кои ги засадила.

69. На цртежот десно е прикажан квадрат со должина на страна 28 cm , од кој на покажаниот начин е отсечен квадрат со должина на страна 16 cm . Определи го периметарот на добиената фигура.



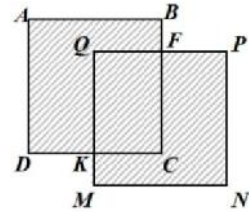
Решение. Вкупната должина на две отсечки во долниот дел на добиената фигура е еднаква на $28 - 16 = 12\text{ cm}$. Според тоа, периметарот на добиената фигура е еднаков на

$$3 \cdot 28 + 3 \cdot 16 + 12 = 84 + 48 + 12 = 144\text{ cm}.$$

70. На цртежот десно дадени се два еднакви квадрати $ABCD$ и $MNPQ$, а $KCFQ$ е правоаголник со периметар 24 cm . Ако

$$\overline{BF} = 1\text{ cm}, \text{ а } \overline{FP} = 3\text{ cm},$$

определи го периметарот на штрафираната фигура.



Решение. Јасно, должината на страната на квадратите е еднаква на $\overline{QF} + \overline{FP}$, односно на $\overline{BF} + \overline{FC}$. Според тоа, ако должината на страната на квадратите ја означиме со a , тогаш

$$\begin{aligned} 4a &= 2(\overline{QF} + \overline{FP}) + 2(\overline{BF} + \overline{FC}) = 2(\overline{QF} + \overline{FC}) + 2\overline{FP} + 2\overline{BF} \\ &= 24 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 32\text{ cm} \end{aligned}$$

од каде добиваме $a = 8\text{ cm}$. Според тоа, периметарот на штрафираната фигура е еднаков на

$$\begin{aligned} \overline{AD} + \overline{DK} + \overline{KM} + \overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PF} + \overline{FB} + \overline{BA} &= 4\overline{AD} + 2\overline{FB} + 2\overline{PF} \\ &= 4 \cdot 8 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ &= 40\text{ cm}. \end{aligned}$$

71. Колку пати ќе се зголеми периметарот на квадратот ако неговата страна се зголеми три пати.

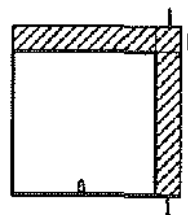
Решение. Нека должината на страната на квадратот е a . Тогаш неговиот периметар е $4a$. Ако должината на страната се зголеми три пати, т.е. ако е $3a$, тогаш неговиот периметар ќе биде еднаков на $4 \cdot 3a = 12a = 3 \cdot 4a$, што значи дека ќе се зголеми три пати.

72. Ако должината на даден правоаголник ја зголемиме за 3 cm , а неговата ширина ја зголемиме за 5 cm , ќе добиеме квадрат со плоштина 81 cm^2 . Определи ја плоштината на правоаголникот.

Решение. Бидејќи $81=9\cdot 9$ должината на страната на добиениот квадрат е еднаква на 9 cm . Според тоа, должината на почетниот правоаголник е еднаква на $9-3=6\text{ cm}$, а неговата ширина е еднаква на $9-5=4\text{ cm}$. Значи, плоштината на почетниот правоаголник е еднаква на $6\cdot 4=24\text{ cm}^2$.

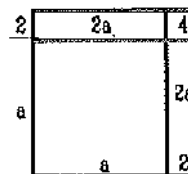
73. Ако должината на страната на квадратот се зголеми за 1 cm , тогаш неговата плоштина се зголемува за 17 cm^2 . Определи го периметарот на овој квадрат.

Решение. Нека должината на страната на квадратот е a . По продолжувањето на страната на квадратот неговата плоштина се зголемува за $2a+1$ (цртеж десно). Затоа $2a+1=17$, од каде добиваме $a=8\text{ cm}$. Конечно, периметарот на квадратот изнесува $4a=4\cdot 8=32\text{ cm}$.



74. Ако страната на квадратот се зголеми за 2 cm , тогаш се добива нов квадрат чија плоштина е за 144 cm^2 поголема од плоштината на почетниот квадрат. Определи ги периметарот и плоштината на почетниот квадрат.

Решение. Нека должината на страната на почетниот квадрат е a . Со зголемување на неговата страна за 2 cm , неговата плоштина се зголемува за плоштината на два правоаголника со страни 2 cm и a и еден квадрат со страна 2 cm (цртеж десно). Затоа $2\cdot 2a+2\cdot 2=144$, од каде добиваме $4a=140$, т.е. $a=35\text{ cm}$. Конечно периметарот на почетниот квадрат е $L=4a=4\cdot 35=140\text{ cm}$, а неговата плоштина е $P=a\cdot a=35\cdot 35=1225\text{ cm}^2$.



75. Ако една страна на квадратот се зголеми за 2 cm , а другата се намали за 5 cm , се добива правоаголник чија плоштина е за 46 cm^2 помала од

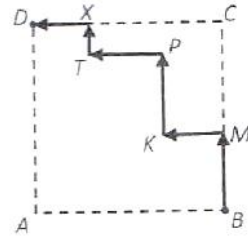
плоштината на квадратот. Определи ја должината на страната на квадратот.

Решение. Ако должината на страната на квадратот е x , тогаш од квадратот е одземен правоаголник со плоштина $5x$ и на добиениот правоаголник е додаден правоаголник со плоштина $2(x-5)$. Затоа, $5x - 2(x-5) = 46$, од каде добиваме $x = 12 \text{ cm}$.

76. Периметарот на квадратот $ABCD$ е еднаков на 36 cm . Мравка се движи од темето B до темето D по патеката

$$B \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow T \rightarrow X \rightarrow D,$$

како што е покажано на цртежот десно. Колку сантиметри поминала мравката?



Решение. Должината на страната на квадратот $ABCD$ е еднаква на $36 : 4 = 9 \text{ cm}$. Имаме:

$$\overline{BM} + \overline{KP} + \overline{TX} = \overline{BC} \text{ и } \overline{MK} + \overline{PT} + \overline{XD} = \overline{AB},$$

па затоа должината на патот $B \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow T \rightarrow X \rightarrow D$ е еднаква на $\overline{AB} + \overline{BC} = 2 \cdot 9 = 18 \text{ cm}$.

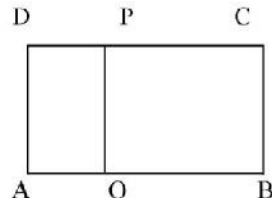
77. Даден е квадрат со плоштина 36 cm^2 . Да се определи должината на правоаголникот кој има ширина 3 cm и ист периметар како и квадратот.

Решение. Плоштината на квадратот е $P = 36 \text{ cm}^2$ од каде се добива дека страната на квадратот е 6 cm , а неговиот периметар е $L_k = 4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}$. Тогаш, ако во равенката за периметар на правоаголник замениме $L_p = 24 \text{ cm}$ и $b = 3 \text{ cm}$, добиваме $L_p = 2a + 2b$, т.е. $24 = 2a + 2 \cdot 3$ од каде што следи дека $2a = 24 - 6$, односно $a = 9 \text{ cm}$.

78. Правоаголно дворно место има должина 56 m и два пати помала ширина. Дедо Илија има 500 m жица и дворот го заградил со ограда во која имало два реда жица. Колку метра жица му останало на дедо Илија?

Решение. Ширината на дворот е еднаква на $56 : 2 = 28 \text{ m}$. Според тоа, периметарот на дворот е еднаков на $2 \cdot (56 + 28) = 168 \text{ m}$. Значи, дедо Илија потрошил $2 \cdot 168 = 336 \text{ m}$ жица и му останале $500 - 336 = 164 \text{ m}$ жица.

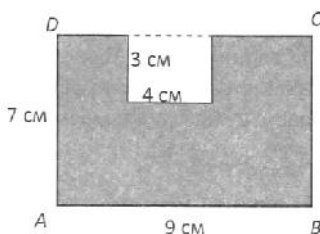
79. Правоаголникот $ABCD$ со отсечката OP е поделен на два дела (цртеж десно). Периметарот на правоаголникот $OBSP$ е за 36 cm поголем од периметарот на правоаголникот $AOPD$. Определи ја должината на страната OB ако $\overline{AO} = 2\text{ cm}$ и $\overline{AD} = 30\text{ mm}$.



Решение. Периметарот на правоаголникот $AOPD$ е еднаков на $2 \cdot (2 + 30) = 64\text{ cm}$. Ако $\overline{OB} = a\text{ cm}$, тогаш периметарот на правоаголникот $OBSP$ е еднаков на $2 \cdot (30 + a) = 60 + 2a\text{ cm}$. Според тоа,

$$60 + 2a = 64 + 10, \text{ т.е. } a = 20\text{ cm}.$$

80. Даден е правоаголник $ABCD$, $\overline{AB} = 9\text{ cm}$ и $\overline{AD} = 7\text{ cm}$. Од него е отсечен правоаголник со должини на страни 3 cm и 4 cm (цртеж десно). Определи го периметарот на добиената фигура.



Решение. По отстранувањето на правоаголникот со должини на страни 3 cm и 4 cm периметарот на добиената фигура се зголемува за $2 \cdot 3 = 6\text{ cm}$ (Зошто?). Периметарот на правоаголникот $ABCD$ е еднаков на $2 \cdot 9 + 2 \cdot 7 = 32\text{ cm}$, па затоа периметарот на добиената фигура е еднаков на $32 + 6 = 38\text{ cm}$.

81. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на 14 cm , а должините на неговите страни изразени во сантиметри се природни броеви. Колку правоаголници има со ова својство? Кој од овие правоаголници има најголема плоштина?

Решение. Нека a и b , $a > b$ се должините на страните на правоаголникот. Од условот на задачата следува $a + b = 7$. Понатаму, од последната равенка и фактот дека должините на страните се изразени во сантиметри се природни броеви добиваме $(a, b) \in \{(6, 1), (5, 2), (4, 3)\}$. Најголема плоштина има правоаголникот со должини на страни 4 cm и 3 cm и таа изнесува $3 \cdot 4 = 12\text{ cm}^2$.

82. Ширината на еден правоаголник е 56 cm , а неговиот периметар е пет пати поголем од ширината.

Опреди ја должината на овој правоаголник.

Решение. Периметарот на правоаголникот е еднаков на $5 \cdot 56 = 280 \text{ cm}$.

Според тоа, неговата должина е еднаква на $(280 - 2 \cdot 56) : 2 = 84 \text{ cm}$.

83. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на 1 m , а должината на една негова страна е 36 cm . Опреди ја должината на другата страна на правоаголникот.

Решение. Половина од периметарот на правоаголникот е еднаков на $1 \text{ m} : 2 = 100 \text{ cm} : 2 = 50 \text{ cm}$. Должината на едната негова страна е 36 cm , па затоа должината на другата страна на правоаголникот е еднаква на $50 \text{ cm} - 36 \text{ cm} = 14 \text{ cm}$.

84. На долните цртежи се прикажани четири фигури поставени во квадратна мрежа. Кои две од дадените фигури имаат еднакви периметри?



Решение. Нека должината на страната на квадратчињата во мрежата е еднаква на 1 cm . Периметрите на дадените фигури гледајќи од лево на десно се еднакви на: 20 cm , 22 cm , 18 cm и 22 cm . Значи, гледајќи од лево на десно втората и четвртата фигура имаат еднакви периметри.

85. Плоштината на квадрат со должина на страна 6 cm е еднаква на плоштината на правоаголник кој не е квадрат чии должини на страни се изразени со природни броеви. Колку такви правоаголници постојат? Опреди ги најмалиот и најголемиот периметар на овие правоаголници.

Решение. Плоштината на квадратот е еднаква на $6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}^2$. Бројот 36 како производ на два различни природни броја може да се запише на еден од следниве начини:

$$1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9.$$

Значи, постојат четири правоаголници чија плоштина е еднаква на плоштината на квадратот. Меѓу овие правоаголници најголемиот периметар е еднаков на $2 \cdot (1 + 36) = 74 \text{ cm}$, а најмалиот периметар е еднаков на $2 \cdot (4 + 9) = 26 \text{ cm}$.

86. Правоаголник со периметар 96 cm со една права е поделен на два исти квадрати.

1) Определи ја разликата на периметраите на правоаголникот и еден од добиените квадрати.

2) Определи ги плоштините на правоаголникот и еден од квадратите.

Решение. 1) Со a да ја означиме должината на страната на секој од двата квадрати (види цртеж). Тогаш должините на страните на правоаголникот се a и $2a$, па затоа $2(a + 2a) = 96$, од каде добиваме $a = 16 \text{ cm}$. Според тоа, периметарот на квадратот е еднаков на $4 \cdot 16 = 64 \text{ cm}$, па бараната разлика е еднаква на $96 - 64 = 32 \text{ cm}$.



2) Плоштината на квадратот е еднаква на $16 \cdot 16 = 256 \text{ cm}^2$, а плоштината на правоаголникот е еднаква на $2 \cdot 256 = 512 \text{ cm}^2$.

87. Горјан расекол квадратен лист на два правоаголника, од кои составил нов правоаголник кој не е квадрат. Периметарот на новодобиениот правоаголник е еднаков на 60 cm . Определи го периметарот на почетниот квадрат.

Решение. За да се состави правоаголник различен од квадрат потребно е квадратот да се расече на два еднакви правоаголници (Зошто?). Ако должината на страната на почетниот квадрат е $2a$, тогаш должините на страните на добиените правоаголници ќе бидат a и $2a$. Затоа кога од нив ќе се состави правоаголник тој ќе има должини на страни a и $2 \cdot 2a = 4a$, што значи дека неговиот периметар ќе биде еднаков на $2a + 2 \cdot 4a = 10a$. Затоа $10a = 60$, т.е. $a = 6 \text{ cm}$. Според тоа, должината на страната на почетниот квадрат е еднаква на $2 \cdot 6 = 12 \text{ cm}$, а неговиот периметар е $4 \cdot 12 = 48 \text{ cm}$.

88. Даден е правоаголник со должини на страни $22 \text{ dm} + 40 \text{ mm}$ и $3 \text{ m} - 8 \text{ cm}$. Определи го периметарот на правоаголникот, а потоа определи ја должината на страната на квадратот кој има еднаков периметар како и правоаголникот.

Решение. Должината на едната страна на правоаголникот е

$$22 \text{ dm} + 40 \text{ mm} = 220 \text{ cm} + 4 \text{ cm} = 224 \text{ cm},$$

а должината на другата страна е

$$3 \text{ m} - 8 \text{ cm} = 300 \text{ cm} - 8 \text{ cm} = 292 \text{ cm}.$$

Според тоа, периметарот на правоаголникот е еднаков на

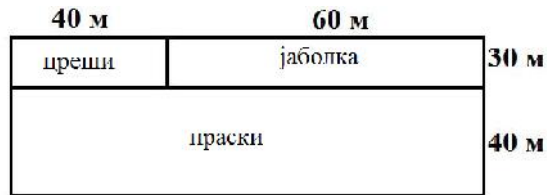
$$2 \cdot 224 + 2 \cdot 292 = 448 + 584 = 1032 \text{ cm}.$$

Должината на страната на квадратот кој има еднаков периметар како и правоаголникот е $1032 : 4 = 258 \text{ cm}$.

89. Еден под може целосно да се покрие само со плочки со димензии $22 \text{ cm} \times 11 \text{ cm}$ или само со плочки со димензии $20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ (плочките не се кршат). За покривање на подот со плочки со димензии $22 \text{ cm} \times 11 \text{ cm}$ се потребни 200 плочки. Колку плочки се потребни ако подот се покрива со плочки со димензии $20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$?

Решение. Плоштината на една $22 \text{ cm} \times 11 \text{ cm}$ плочка е еднаква на $22 \cdot 11 = 242 \text{ cm}^2$. Според тоа, плоштината на подот е еднаква на $200 \cdot 242 = 48400 \text{ cm}^2$. Понатаму, плоштината на една $20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ е еднаква на $20 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2$. Според тоа, за покривање на подот се потребни $48400 : 400 = 121$ плочка со димензии $20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$.

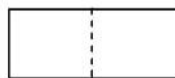
90. Определи ја разликата на збирот на периметрите на деловите засадени со цреши, јаболка и праски, и периметарот на целата овошна градина.



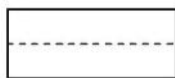
Решение. Должините на страните на целата овошна градина се 100 m и 70 m , па затоа нејзиниот периметар е $2 \cdot (100 + 70) = 340 \text{ m}$. Периметарот на делот засаден со цреши е еднаков на $2 \cdot (40 + 30) = 140 \text{ m}$, на делот засаден со јаболка е $2 \cdot (60 + 30) = 180 \text{ m}$ и на делот засаден со праски е $2 \cdot (100 + 40) = 280 \text{ m}$. Бараната разлика е

$$140 + 180 + 280 - 340 = 260 \text{ m}.$$

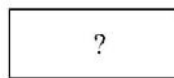
91. Павел, Ангел и Иван отсекле три еднакви картонски правоаголници. Павел и Ангел своите правоаголници ги пресекле како што е прикажано на долните цртежи. Павел добил два еднакви правоаголници, секој со периметар 24 cm , а Ангел добил два еднакви правоаголници, секој со периметар 42 cm . Определи го периметарот на правоаголникот на Иван.



Петар



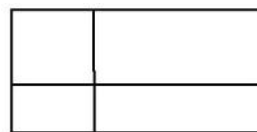
Ангел



Иван

Решение. Нека должините на страните на правоаголникот на Иван се a и b . Тогаш должините на страните на едниот правоаголник на Павел се a и $\frac{b}{2}$, а должините на страните на едниот правоаголник на Ангел се $\frac{a}{2}$ и b . Според тоа, $2a + b = 24$ и $a + 2b = 42$. Од последните две равенства добиваме $2a + b + a + 2b = 24 + 42$, односно $a + b = 22$. Конечно, периметарот на правоаголникот на Иван е еднаков на $2(a + b) = 2 \cdot 22 = 44 \text{ cm}$.

92. Правоаголник е поделен на четири правоаголници како што е прикажано на цртежот десно. Периметрите на три од четирите правоаголници се еднакви на 36 cm , 48 cm и 56 cm . Колку може да биде еднаков периметарот на четвртиот правоаголник?



Решение. Два од трите правоаголници на кои е поделен големиот правоаголник се во спротиви темиња на големиот правоаголник, што значи дека збирот на нивните периметри е еднаков на периметарот на големиот правоаголник. Според тоа, периметарот на големиот правоаголник може да биде еднаков на:

- $36 + 48 = 84 \text{ cm}$ и во овој случај периметарот на четвртиот делбен правоаголник е еднаков на $84 - 56 = 28 \text{ cm}$,
- $36 + 56 = 92 \text{ cm}$ и во овој случај периметарот на четвртиот делбен правоаголник е еднаков на $92 - 48 = 44 \text{ cm}$ и
- $48 + 56 = 104 \text{ cm}$ и во овој случај периметарот на четвртиот делбен правоаголник е еднаков на $104 - 36 = 68 \text{ cm}$.

93. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на 72 cm , а должините на неговите страни се разликуваат за 4 cm . Определи ја плоштината на овој правоаголник.

Решение. Нека a и b , $b > a$, се должините на страните на правоаголникот. Од условот на задачата следува $b = a + 4$, па затоа $2(a + a + 4) = 72$, од каде добиваме $2a + 4 = 36$, т.е. $a = 16 \text{ cm}$. Според тоа, $b = 16 + 4 = 20 \text{ cm}$ и плоштината на правоаголникот е еднаква на $16 \cdot 20 = 320 \text{ cm}^2$.

94. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на 90 cm , при што две должини на правоаголникот се еднакви на три ширини на правоаголникот. Определи ја плоштината на овој правоаголник.

Решение. Ако должината на правоаголникот е $3a$, тогаш неговата ширина е $2a$, а периметарот е еднаков на $2(3a + 2a) = 10a$. Значи, $10a = 90$, т.е. $a = 9\text{ cm}$. Според тоа, должините на страните на правоаголникот се еднакви на 18 cm и 27 cm , па неговата плоштина е еднаква на $18 \cdot 27 = 486\text{ cm}^2$.

95. Даден е правоаголник $ABCD$, $\overline{AB} = 5\text{ cm}$, $\overline{BC} = 4\text{ cm}$. Точката M припаѓа на страната AB , а точката N припаѓа на страната CD . Периметарот на четириаголникот $AMND$ е еднаков на периметарот на четириаголникот $MBCN$ и изнесува 14 cm . Определи ја должината на отсечката MN .

Решение. Според условот на задачата имаме

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 18,$$

$$\overline{AM} + \overline{MN} + \overline{ND} + \overline{DA} = 14$$

$$\overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN} + \overline{NM} = 14.$$

Но, $\overline{CN} + \overline{ND} = \overline{CD}$ и $\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AB}$, па затоа од горните равенства следува

$$\begin{aligned} 28 &= (\overline{AM} + \overline{MN} + \overline{ND} + \overline{DA}) + (\overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN} + \overline{NM}) \\ &= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} + 2\overline{MN} = 18 + 2\overline{MN}, \end{aligned}$$

од каде добиваме $\overline{MN} = 5\text{ cm}$ (направи цртеж).

96. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на 72 cm , а должината на едната страна е двапати помала од должината на другата страна. Пресметај ја плоштината на четириаголникот чии темиња се средишите на страните на овој правоаголник.

Решение. Нека должините на страните на правоаголникот се a и b . Според условот на задачата имаме $a + b = 36$ и $a = 2b$. Значи, $b + 2b = 36$, т.е. $b = 12\text{ cm}$. Според тоа, $a = 2 \cdot 12 = 24\text{ cm}$. Плоштината на правоаголникот е еднаква на $24 \cdot 12 = 288\text{ cm}^2$.

Отсечките кои ги поврзуваат средните на спротивните страни на правоаголникот го делат правоаголникот на четири еднакви делови, секој

од кои има плоштина $288 : 4 = 72 \text{ cm}^2$ (направи цртеж). Секој од овие делови со страните на четириаголникот чии темиња се средините на страните на правоаголникот е поделен на два еднакви дела чии плоштини се еднакви на $72 : 2 = 36 \text{ cm}^2$. Конечно, имаме четири вакви делови, па затоа бараната плоштина е $4 \cdot 36 = 144 \text{ cm}^2$.

97. Даден е правоаголник со периметар 2 m . Ако должината на едната страна на правоаголникот се зголеми за 10 cm , а на другата страна се намали за 10 cm , се добива квадрат. Определи ги плоштините на правоаголникот и квадратот.

Решение. Нека должините на страните на правоаголникот се a и b , $a < b$. Од условот на задачата добиваме $a + 10 = b - 10$, т.е. $b = a + 20$. Понатаму, од $2(a + b) = 200$ следува $2(a + a + 20) = 200$, т.е. $a = 40 \text{ cm}$. Според тоа, $b = 40 + 20 = 60 \text{ cm}$ и страната на добиениот квадрат е $c = a + 10 = 50 \text{ cm}$. Конечно, плоштината на правоаголникот е

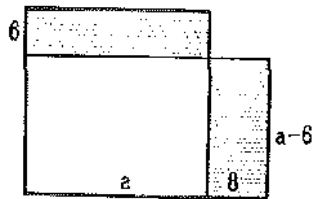
$$P_1 = 40 \cdot 60 = 2400 \text{ cm}^2,$$

а плоштината на квадратот е

$$P_2 = 50 \cdot 50 = 2500 \text{ cm}^2.$$

98. Ако едната страна на даден квадрат се зголеми за 8 cm , а другата се намали за 6 cm , се добива правоаголник чија плоштина е еднаква на плоштината на дадениот квадрат. Определи ги периметрите на квадратот и правоаголникот.

Решение. Нека должината на страната на дадениот квадрат е a . Тогаш должините на страните на правоаголникот се $a - 8$ и $a + 8$ (цртеж десно). Јасно, $6a = 8(a - 6)$, од каде добиваме $a = 24 \text{ cm}$. Според тоа, периметарот на квадратот е $4 \cdot 24 = 96 \text{ cm}$, а периметарот на правоаголникот е $2(18 + 32) = 100 \text{ cm}$.



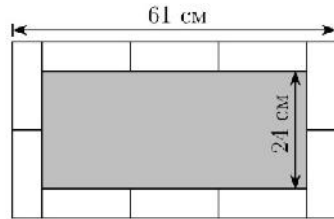
99. Двете спротивни страни на еден квадрат се зголемени за по 3 cm , а другите две спротивни страни се намалени за по 2 cm , со што е добиен правоаголник со периметар 26 cm . Определи го периметарот на дадениот квадрат.

Решение. Ако должината на страната на квадратот е x , тогаш должините на страните на правоаголникот се $x+3$ и $x-2$, па затоа

$$2(x+3) + 2(x-2) = 26,$$

од каде добиваме $4x + 2 = 26$, односно $x = 6 \text{ cm}$. Конечно, периметарот на квадратот е еднаков на $4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}$.

100. Сивиот правоаголник на цртежот десно е ограничен со десет еднакви правоаголници. Користејќи ги податоците на цртежот десно, определи го периметарот на сивиот правоаголник.



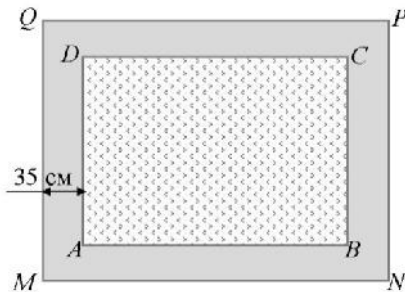
Решение. Нека должините на страните на белите плочки се a и b , $a > b$. Според цртежот имаме $3a + 2b = 61$ и $2a - 2b = 24$. Ако ги собереме добиените равенства наоѓаме $5a = 85$, т.е. $a = 17 \text{ cm}$. Според тоа, должините на страните на сивиот правоаголник се $3 \cdot 17 = 51 \text{ cm}$ и 24 cm , па затоа неговиот периметар е еднаков на $2 \cdot 51 + 2 \cdot 24 = 150 \text{ cm}$.

101. Од сите страни на еден парк во форма на правоаголник е направена патека со еднаква широчина (цртеж десно). Периметарот на внатрешниот правоаголник е за 24 m помал од периметарот на надворешниот правоаголник. Определи ја ширината на патеката.



Решение. Ако ширината на патеката е еднаква на x , тогаш должината на секоја страна на надворешниот правоаголник е за $2x$ поголема од должината на соодветната страна на внатрешниот правоаголник. Значи, периметарот на надворешниот правоаголник е за $4 \cdot 2x = 8x$ поголем од периметарот на внатрешниот правоаголник, па затоа $8x = 24$, односно $x = 3 \text{ m}$. Според тоа, ширината на патеката е еднаква на 3 m .

102. На цртежот десно правоаголникот $ABCD$ е цветна градина. Околу градината е направена патека со ширина 35 cm и е добиен правоаголникот $MNPQ$, чиј периметар е еднаков на 116 dm .



а) Определи го периметарот на правоаголникот $ABCD$.

б) Должините на страните на двата правоаголника ако $\overline{PN} = \overline{AB}$.

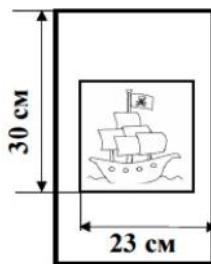
Решение. а) Секоја од страните на правоаголникот $ABCD$ е за $2 \cdot 35 = 70 \text{ cm} = 7 \text{ dm}$ пократка од соодветната страна на правоаголникот $MNPQ$. Затоа периметарот на правоаголникот $ABCD$ е еднаков на $116 \text{ dm} - 4 \cdot 7 \text{ dm} = 88 \text{ dm}$.

б) Нека $\overline{PN} = \overline{AB} = x$. Тогаш $\overline{BC} = x - 7$, па затоа $2x + 2(x - 7) = 88$, т.е. $4x = 102 \text{ dm}$, од каде добиваме $x = 255 \text{ cm}$. Според тоа, должините на страните на правоаголникот $ABCD$ се 255 cm и 185 cm . Понатаму, должините на страните на правоаголникот $MNPQ$ се 255 cm и $255 \text{ cm} + 7 \text{ dm} = 325 \text{ cm}$.

103. Илија проектирал правоаголно фудбалско игралиште со должина 100 m и периметар 290 m . Понатаму, околу игралиштето предвидел земјена патека со ширина 5 m , која со пластична ограда висока 1 m требало да биде одделена од трибините за гледачите. Колкава е плоштината на оградата која треба да се постави?

Решение. Ширината на игралиштето е еднаква на $(290 - 2 \cdot 100) : 2 = 45 \text{ m}$. Понатаму, должината на правоаголникот формиран од игралиштето и земјената патека е еднаква на $100 + 2 \cdot 5 = 110 \text{ m}$, а неговата ширина е еднаква на $45 + 2 \cdot 5 = 55 \text{ m}$ (направи цртеж). Според тоа, периметарот на овој правоаголник е еднаков на $2 \cdot 110 + 2 \cdot 55 = 330 \text{ m}$, па затоа плоштината на оградата е еднаква на $330 \cdot 1 = 330 \text{ m}^2$.

104. Слика во форма на квадрат е поставена во правоаголна рамка со периметар 140 cm . Сликата е на еднакво растојание од горната и долната страна на рамката, како и на еднакво растојание од левата и десната страна на рамката. Според податоците на цртежот десно определи ја страната на сликата.



Решение. Нека страната на сликата е x , сликата од горната и долната страна на рамката е на растојание a , а од левата и десната страна на рамката е на растојание b .

Тогаш

$$x + a = 30, \quad x + b = 23 \quad \text{и} \quad 2(x + 2a) + 2(x + 2b) = 140.$$

Затоа

$$2(x + a) + 2a + 2(y + b) + 2b = 140,$$

$$2 \cdot 30 + 2a + 2 \cdot 23 + 2b = 140,$$

$$2(a + b) = 34,$$

$$a + b = 17 \text{ cm}.$$

Понатаму,

$$2x + a + b = 30 + 23,$$

$$2x + 17 = 53,$$

$$2x = 36,$$

$$x = 18 \text{ cm}.$$

105. Павел исекол правоаголник од хартија, го превиткал на половина и добил помал правоаголник. Потоа тој го превиткал на половина добиениот правоаголник и добил нов правоаголник со димензии 5 cm и 8 cm . Колку најмногу може да биде периметарот на почетниот правоаголник? Колку најмалку може да биде периметарот на почетниот правоаголник?

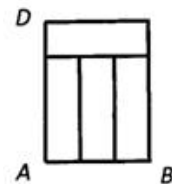
Решение. Почетниот правоаголник има најголем периметар ако превиткувањето е секогаш правено така што се преполовува поголемата страна. Тоа значи, дека по првото превиткување е добиен правоаголник со должини на страни 5 cm и 16 cm , а почетниот правоаголник, т.е. листот хартија е со должини на страни 5 cm и 32 cm . Конечно, периметарот на листот најмногу може да биде еднаков на

$$2 \cdot 5 + 2 \cdot 32 = 74 \text{ cm}.$$

За да ја добиеме најмалата можна вредност на почетниот правоаголник потребно е превиткувањето секогаш да се прави на помалата страна. Според тоа, по првото превиткување е добиен правоаголник со должини на страни 10 cm и 8 cm , а почетниот правоаголник, т.е. листот хартија е со должини на страни 10 cm и 16 cm . Конечно, периметарот на листот најмалку може да биде еднаков на

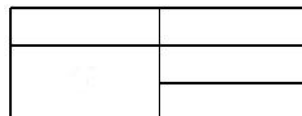
$$2 \cdot 10 + 2 \cdot 16 = 52 \text{ cm}.$$

106. На цртежот десно е даден правоаголникот $ABCD$ кој е поделен на четири еднакви правоаголници. Ако $\overline{AD} = 36 \text{ cm}$, определи го периметарот на еден од делбените правоаголници.



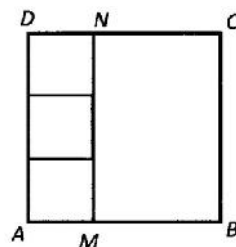
Решение. Нека должината на помалата страна на делбените правоаголници е a . Тогаш должината на поголемата страна е $3a$, па затоа $a + 3a = 36$, од каде добиваме $a = 9\text{ cm}$. Според тоа, делбените правоаголници имаат страни со должини 9 cm и $3 \cdot 9 = 27\text{ cm}$, па затоа периметарот на еден од делбените правоаголници е еднаков на $2 \cdot 9 + 2 \cdot 27 = 18 + 54 = 72\text{ cm}$.

107. Големiot правоаголник прикажан на цртежот десно е составен од пет правоаголници, и тоа четири мали еднакви правоаголници и еден среден правоаголник. Периметарот на еден мал правоаголник е еднаков на 46 mm , а периметарот на средниот правоаголник е еднаков на 54 mm . Определи го периметарот на големиот правоаголник.



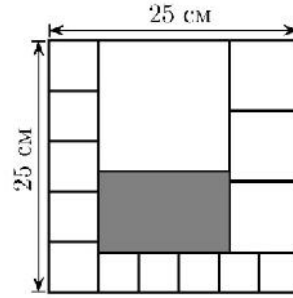
Решение. Нека должините на страните на малиот правоаголник се a и b . Тогаш должините на страните на големиот правоаголник се a и $2b$. Бидејќи нивните периметри се 46 mm и 54 mm , соодветно добиваме $2a + 2b = 46$ и $2a + 4b = 54$. Сега периметарот на големиот правоаголник е $2 \cdot 2a + 2 \cdot 3b = 4a + 6b = 2a + 2b + 2a + 4b = 46 + 54 = 100\text{ mm}$.

108. На цртежот десно квадратот $ABCD$ е поделен на правоаголник $MBCN$ и три мали квадрати. Ако периметарот на еден од малите квадрати е еднаков на 16 cm , определи за колку периметарот на правоаголникот $AMND$ е помал од периметарот на правоаголникот $MBCN$.



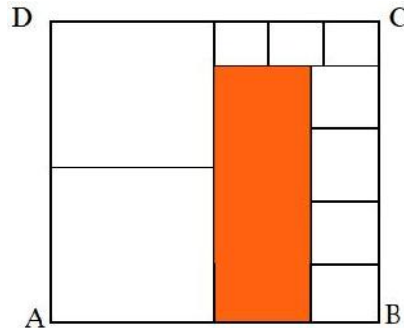
Решение. Должината на страната на еден од малите квадрати е $16 : 4 = 4\text{ cm}$. Според тоа, должината на страната на квадратот $ABCD$ е еднаква на $3 \cdot 4 = 12\text{ cm}$. Тоа значи, должините на страните на правоаголникот $AMND$ се 4 cm и 12 cm , па затоа неговиот периметар е еднаков на $2 \cdot 4 + 2 \cdot 12 = 32\text{ cm}$. Должините на страните на правоаголникот $MBCN$ се 12 cm и $12 - 4 = 8\text{ cm}$, па затоа неговиот периметар е еднаков на $2 \cdot 8 + 2 \cdot 12 = 40\text{ cm}$. Конечно, периметарот на правоаголникот $MBCN$ е за $40 - 32 = 8\text{ cm}$ поголем од периметарот на правоаголникот $AMND$.

109. Квадрат со должина на страна еднаква на 25 cm е поделен на 14 бели квадрати и еден сив правоаголник (цртеж десно). Определи го периметарот на сивиот правоаголник.



Решение. Должината на страната на вертикалните квадрати во левата колона е еднаква на $25:5 = 5\text{ cm}$. Понатаму, должината на страната на малите бели квадрати во долниот ред е еднаква на $(25-5):5 = 4\text{ cm}$. Значи, должината на страната на големите квадрати во десната колона е еднаква на $(25-4):3 = 7\text{ cm}$. Според тоа, должината на страната на најголемиот бел квадрат е еднаква на $25-(5+7) = 13\text{ cm}$. Конечно, должините на страните на сивиот правоаголник се еднакви на $25-(13+4) = 8\text{ cm}$ и 13 cm , па затоа неговиот периметар е еднаков на $2 \cdot 13 + 2 \cdot 8 = 42\text{ cm}$.

110. Даден квадрат $ABCD$ со должина на страна 24 cm е поделен на 9 квадрати и еден правоаголник (цртеж десно). Определи ги разликите на периметрите и плоштините на еден од големите делбени квадрати и правоаголникот?



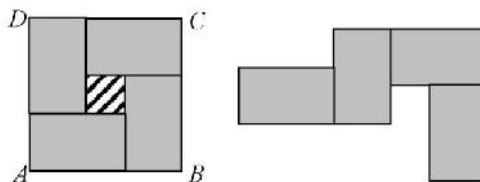
Решение. Должината на страната на големите делбени квадрати е еднаква на $24:2 = 12\text{ cm}$. Понатаму, должината на страната на малите делбени квадрати е еднаква на $(24-12):3 = 4\text{ cm}$, а должината на страната на средните делбени квадрати е еднаква на $(24-4):4 = 5\text{ cm}$. Според тоа, должините на страните на делбениот правоаголник се $24-4 = 20\text{ cm}$ и $24-(12+5) = 7\text{ cm}$. Значи, разликата на периметрите на големиот делбен квадрат и делбениот правоаголник е

$$2 \cdot 20 + 2 \cdot 7 - 4 \cdot 12 = 54 - 48 = 6\text{ cm},$$

а разликата меѓу нивните плоштини е еднаква на

$$12 \cdot 12 - 20 \cdot 7 = 144 - 140 = 4\text{ cm}^2.$$

111. Маја исекла 8 еднакви правоаголници и кога по 4 наредила еден до друг, таа ги направила двете фигури прикажани на цртежот десно. Ако



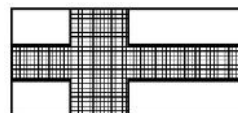
на првата фигура должината на страната на квадратот $ABCD$ е 37 cm , а должината на страната на штрафираното квадратче е 7 cm , определи го периметарот на втората фигура.

Решение. Нека должината на страните на еднаквите правоаголници се a и b , $a > b$. Од квадратот $ABCD$ наоѓаме $a + b = 37$ и $a - b = 7$. Ако ги собереме последните две равенства добиваме $2a = 44$, односно $a = 22\text{ cm}$, па затоа $b = 37 - 22 = 15\text{ cm}$.

За периметарот на втората фигура добиваме:

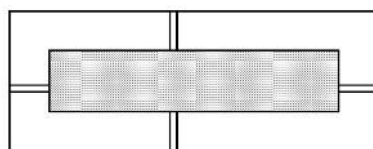
$$L = 5a + 5b + 3(a - b) = 5 \cdot 22 + 5 \cdot 15 + 3 \cdot (22 - 15) = 110 + 75 + 21 = 206\text{ cm}.$$

112. Од лист хартија со димензии 45 cm и 60 cm се исечени два мали и два поголеми правоаголници како што е прикажано на цртежот десно. Определи го периметарот на останатиот дел (штрафираната фигура).



Решение. Збирот на вертикалните леви отсечки на штрафираната фигура е еднаков на должината на малата страна на почетниот правоаголник, а исто толкав е и збирот на десните вертикални отсечки. Слично, збирот на горните хоризонтални отсечки на штрафираната фигура е еднаков на должината на поголемата страна на почетниот правоаголник, а исто толкав е збирот и на долните хоризонтални отсечки на штрафираната фигура. Според тоа, периметарот на штрафираната фигура е еднаков на периметарот на почетниот правоаголник, т.е. на $2 \cdot (45 + 60) = 210\text{ cm}$.

113. Сивиот дел на цртежот десно означува зграда, а белиот дел го означува дворот околу зградата во кој се направени 4 патеки со еднаква должина по кои може да се стигне до оградата на дворот. Должината на оградата е за 80 m поголема од периметарот на зградата. Определи ја должината на секоја од патеките.



Решение. Ширината на оградата од ширината на зградата е поголема за две должини на една патека, а истото важи и за должината мна оградата во однос на должината на зградата. Според тоа, периметарот на оградата е за $2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 8$ должини на една патека поголем од периметарот на зградата. Затоа должината на една патека е еднаква на $80 : 8 = 10 \text{ m}$.

114. Во населбата на Горјан прават ново детско игралиште. Тоа има форма на правоаголник чија должина и три пати поголема од ширината. Периметарот на игралиштето е 336 m .

а) Колку метри е подолга должината на игралиштето од неговата ширина?

б) Покрај една од подолгите страни на игралиштето биле поставени светилки, кои се наоѓале на растојание 2 m една од друга (цртеж десно). Колку светилки биле поставени?



Решение. а) Ако со x ја означиме ширината на игралиштето, тогаш неговата должина е $3x$. Затоа

$$2(x + 3x) = 336$$

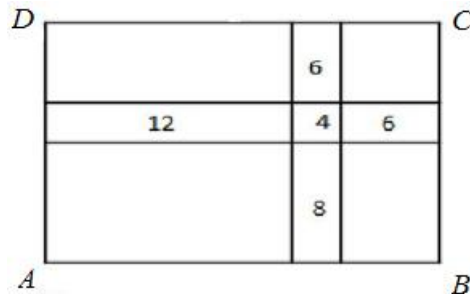
$$8x = 336$$

$$x = 42 \text{ m}.$$

Според тоа, ширината на игралиштето е 42 m , а неговата должина е $3 \cdot 42 = 126 \text{ m}$. Значи, должината е $126 - 42 = 84 \text{ m}$ поголема од ширината.

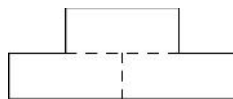
б) Имаме $126 : 2 = 63$ растојанија од по 2 m . Бидејќи на почетокот и на крајот имаме светилка, добиваме дека се поставени $63 + 1 = 64$ светилки.

115. Правоаголникот $ABCD$ е поделен на правоаголници со должини на страни цели броеви изразени во сантиметри (цртеж десно). На пет од овие правоаголници се означени периметрите. Определи го периметарот на правоаголникот $ABCD$.



Решение. Јасно, правоаголникот кој има периметар 4 cm е квадрат со должина на страна $4:4=1\text{ cm}$. Сега левиот правоаголник од него има должини на страни 1 cm и $(12-2\cdot 1):2=5\text{ cm}$, а десниот правоаголник од него има должини на страни 1 cm и $(6-2\cdot 1):2=2\text{ cm}$, а и правоаголникот кој е над него има должини на страни 1 cm и 2 cm . Конечно, правоаголникот кој е под него има должини на страни 1 cm и $(8-2\cdot 1):2=3\text{ cm}$. Значи, должините на страните на правоаголникот $ABCD$ се $5+1+2=8\text{ cm}$ и $2+1+3=6\text{ cm}$, па затоа неговиот периметар е $2\cdot(8+6)=28\text{ cm}$.

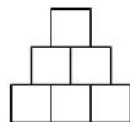
116. Фигура е направена од три складни правоаголници, како што е прикажано на цртежот. Секој правоаголник има периметар 14 cm . Колку е периметарот на оваа фигура?



Решение. Ако со x и y ги означиме должината и ширината на еден правоаголник, тогаш од условот на задачата, имаме: $2(x+y)=14$, т.е. $x+y=7$. Периметарот на дадената фигура е еднаков на

$$4(x+y)=4\cdot 7=28\text{ cm}.$$

117. Од шест еднакви квадрати, секој со периметар 36 cm , е формирана фигурата прикажана на цртежот десно. Определи ги периметарот и плоштината на дадената фигура.



Решение. Должината на страната на еден квадрат е еднаква на $36:4=9\text{ cm}$. Според тоа, плоштината на еден квадрат е еднаква на $9\cdot 9=81\text{ cm}^2$, што значи дека плоштината на целата фигура е еднаква на $6\cdot 81=486\text{ cm}^2$. Периметарот на дадената фигура е еднаков на периметарот на квадрат со должина на страна $3\cdot 9=27\text{ cm}$ (Зошто?). Според тоа, периметарот на дадената фигура е еднаков на $4\cdot 27=108\text{ cm}$.

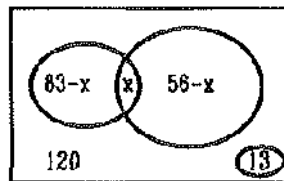
118. Градината на дедо Стојан е долга 105 m и нејзината должина е за 98 m поголема од нејзината ширина. Дедо Стојан со компири засадил 642 m^2 од градината. Определи ја плоштината на незасадениот дел од градината.

V ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

V.1. МНОЖЕСТВА

1. Во едно училиште има 120 ученици. На натпреварот по математика учествувале 83 ученици, а на натпреварот по пеење учествувале 56 ученици. Колку ученици учествувале и на двата натпревари, ако се знае дека 13 ученици не учествувале на ниту еден од двата натпревара?

Решение. Во училиштето вкупно се натпреварувале $120 - 13 = 107$ ученици. Ако на двата натпревара учествувале x ученици, тогаш на натпреварот по математика учествувале $83 - x$ ученици, а на натпреварот по пеење учествувале $56 - x$ ученици (цртеж десно). Затоа



$$83 - x + x + 56 - x = 107, \text{ т.е. } x = 139 - 107 = 32.$$

Според тоа, на двата натпревара учествувале 32 ученика.

2. Во едно одделение има 15 математичари и 28 спортисти. Во одделението има 35 ученици и 4 не се ниту математичари ниту спортисти. Колку ученици се и спортисти и математичари.

Решение. Ако x ученици се и спортисти и математичари, тогаш само со спорт се занимаваат $28 - x$ деца, а само математичари се $15 - x$ деца. Затоа, $35 - 4 = x + 28 - x + 15 - x$, од каде добиваме $31 = 43 - x$, т.е. $x = 12$ ученици се и спортисти и математичари.

3. Во трето и четврто одделени во едно училиште вкупно предаваат 12 учители. Од нив 9 учители предаваат во трето одделение, а 7 учители предаваат во четврто одделение. Колку учители предаваат во двете одделенија?

Решение. *Прв начин.* Нека x учители предаваат и во двете одделенија. Тогаш само во трето одделение предаваат $9 - x$ учители, а само во четврто одделение предаваат $7 - x$ учители. Затоа $9 - x + 7 - x + x = 12$ од каде добиваме $16 - x = 12$, т.е. $x = 4$.

Втор начин. Во збирот $9 + 7$ учителите кои предаваат во двете одделенија се броени двапати. Затоа во двете одделенија предаваат $9 + 7 - 12 = 16 - 12 = 4$ учители.

4. Во едно училиште има 50 ученици во петто одделение, од кои 20 учат англиски јазик, 35 ученици учат француски јазик, а 10 ученици не учат ниту еден од наведените јазици. Колку ученици истовремени учат и англиски и француски јазик?

Решение. Бидејќи 10 ученици не учат ниту еден од двата јазика, добиваме дека барем еден од наведените јазици учат $50 - 10 = 40$ ученици. Понатаму, ако x ученици ги учат и двата јазика, тогаш само англиски учат $20 - x$, а само француски $35 - x$ ученици. Затоа

$$x + 20 - x + 35 - x = 40, \text{ т.е. } x = 15.$$

Според тоа, 15 ученици ги учат и двата јазика.

5. Во едно одделение има 26 ученици. Од нив 16 знаат да возат велосипед, 13 знаат да пливаат, а 5 знаат и да пливаат и да возат велосипед. Колку ученици од ова одделение ниту знаат да пливаат, ниту знаат да возат велосипед?

Решение. Според условот на задачата $16 - 5 = 11$ ученици само знаат да возат велосипед, а $13 - 5 = 8$ ученици знаат само да пливаат. Според тоа, знаат да пливаат или да возат велосипед точно $11 + 8 + 5 = 24$ ученици, а ниту пливаат ниту возат велосипед $26 - 24 = 2$ ученика.

6. Во одделението на Вера учат 25 ученици. Од нив 12 ученици имаат брат, 10 ученици имаат сестра, а 6 ученици немаат ниту брат ниту сестра. Колку ученици имаат и брат и сестра?

Решение. Според условот на задачата $25 - 6 = 19$ ученици имаат брат или сестра. Понатаму, учениците во одделението имаат $12 + 10 = 22$ браќа и сестри, што значи дека $22 - 19 = 3$ ученици имаат и брат и сестра.

7. Иван има колекција од 25 автомобилчиња: црвени, сини и зелени. Ако 19 од автомобилчињата во колекцијата не се црвени, а 17 не се сини, колку зелени автомобилчиња има во колекцијата на Иван?

Решение. Бидејќи 19 автомобилчиња во колекцијата не се црвени, заклучуваме дека $25 - 19 = 6$ автомобилчиња се црвени. Слично, $25 - 17 = 8$ автомобилчиња се сини. Конечно, $25 - (6 + 8) = 11$ автомобилчиња се зелени.

8. Во фудбалската и одбојкарската секција на едно училиште членуваат вкупно 92 ученика. Некои ученици се членови и на двете секции.

а) Определи го бројот на членовите во одбојкарската секција, ако во фудбалската секција членуваат 63 ученици, а 7 пати помалку ученици членуваат и во двете секции.

б) Определи го бројот на членовите во одбојкарската секција, ако 20 ученици членуваат и во двете секции, а учениците кои членуваат само во фудбалската секција се 7 пати повеќе од учениците кои членуваат во одбојкарската секција.

Решение. а) Во двете секции членуваат $63:7=9$ ученици. Според тоа, само во фудбалската секција членуваат $63-9=54$ ученици. Значи, во одбојкарската секција членуваат $92-54=38$ ученици.

б) Само во една секција членуваат $92-20=72$ ученици. Ако само во одбојкарската секција членуваат x ученици, тогаш само во фудбалската секција членуваат $7x$ ученици. Затоа, $x+7x=72$, од каде добиваме $x=9$. Конечно, во одбојкарската секција членуваат $20+9=29$ ученици.

9. Во едно училиште учат 450 ученици. Со спорт не се занимаваат само 20 ученици, а секој од останатите ученици се занимава со точно еден од спортовите: кошарка, одбоја или фудбал. Кошарка и одбојка играат 215 ученици, а фудбал и одбојка играат 323 ученици. Колку ученици се занимаваат со секој од овие спортови?

Решение. Со еден од трите спорта се занимаваат $450-20=430$ ученици. Бидејќи кошарка и одбојка играат 215 ученици, добиваме дека фудбал играат $430-215=215$ ученици. Според тоа, одбојка играат $323-215=108$ ученици и кошарка играат $215-108=107$ ученици.

10. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 1000 и кои не се деливи ниту со 3 ниту со 5.

Решение. Од $1000=3\cdot 333+1$ следува дека од броевите кои се помали или еднакви на 1000 со бројот 3 се деливи 333 броја. Слично со бројот 5 се деливи 200 броја, а како $1000=15\cdot 66+10$ со бројот 15 се деливи 66 броја. Според тоа, имаме $1000-((333+200)-66)=533$ броја кои се помали од 1000 и не се деливи ниту со 3 ниту со 5.

11. Горјан во овошната градина набрал 93 овошки – јаболка, круши и дуњи. Се покажало дека меѓу јаболката и крушите 25 се црвливи, меѓу крушите и дуњите 18 се црвливи и меѓу дуњите и јаболката 11 се црвливи. Колку од овошките кои ги набрал Горјан не се црвливи?

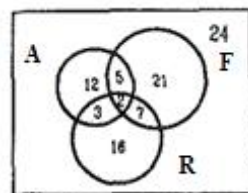
Решение. Забележуваме дека црвливите овошки од секој вид по двапати се броени со црвливите овошки од секој од другите два вида. Затоа збирот $25 + 18 + 11 = 54$ е двапати поголем од бројот на црвливите овошки. Според тоа, Горјан набрал $54 : 2 = 27$ црвливи овошки, што значи дека $93 - 27 = 66$ од овошките кои ги набрал не се црвливи.

12. Летниот одмор на Васил траел 92 дена. Од нив тој фудбал играл во 58 дена, пешачел во 63 дена и пливал во 66 дена. Тој само во три дена играл фудбал, пешачел и пливал. Колку дена Васил во ист ден пливал и пешачел?

Решение. Васил во $92 - 58 = 34$ не играл фудбал, во $92 - 63 = 29$ дена не пешачел и во $92 - 66 = 26$ дена не пливал. Понатаму, бидејќи сите три активности ги реализирал само во 3 дена, тој во $92 - 3 = 89$ дена пропуштал барем по една активност, па бидејќи $34 + 29 + 26 = 89$, заклучуваме дека во овие 89 дена тој пропуштал точно по една активност. Според тоа, Васил во ист ден пливал и пешачел во $89 - (29 + 26) = 37$ дена.

13. Во петто одделение во едно училиште учат 90 ученици. Познато е дека 22 ученици учат англиски јазик, 28 руски јазик, 35 француски јазик, 5 англиски и руски, 7 француски и англиски, 9 француски и руски, а само англиски 12 ученици. Колку ученици ги учат сите три јазици, а колку не учи ниту еден од наведените јазици?

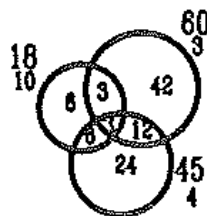
Решение. Нека x ученици ги учат сите три јазици. Тогаш само англиски и руски учат $5 - x$ ученици, само француски и англиски учат $7 - x$ ученици, па затоа $22 = 12 + (5 - x) + (7 - x) + x$, од каде добиваме $x = 2$. Сега лесно се составува Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно, од кој гледаме дека ниту еден од наведените јазици не учат 24 ученици.



14. Во низа се запишани првите 180 природни броеви. Потоа се избришани сите броеви кои завршуваат на нула, па се избришани сите броеви кои се деливи со 4 и на крајот се избришани сите броеви кои се деливи со 3. Колку броеви останале?

Решение. Имаме $180 : 10 = 18$ броеви кои се деливи со 10, $180 : 4 = 45$ броеви кои се деливи со 4 и $180 : 3 = 60$ броеви кои се деливи со 3. Понатаму, со 10 и со 4 се деливи $180 : 20 = 9$ броеви, со 10 и со 3 се

деливи $180:30=6$ броеви, со 3 и со 4 се деливи $180:12=15$ броеви и со 3, 4 и 10 се деливи $180:60=3$ броеви. Имајќи го предвид претходно кажаното го добиваме Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно. Значи, избришани се вкупно:



$$24 + 12 + 3 + 6 + 42 + 3 + 6 = 96$$

бројеви. Конечно, останале $180 - 96 = 84$ броеви.

15. Група од 52 деца саделе елки, борови и чемпреси. Притоа 18 деца саделе точно по два вида дрвја, елки саделе 37 деца, борови саделе 23 деца и чемпреси саделе 28. Колку деца ги саделе трите вида дрвја?

Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на Венов дијаграм (цртеж десно). Според условот на задачата

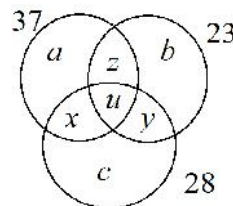
$$a + b + c + x + y + z + u = 52,$$

$$x + y + z = 18,$$

$$a + z + y + u = 37,$$

$$b + y + z + u = 23,$$

$$c + x + y + u = 28.$$



Ако ги собереме последните три равенства, по групирањето на собираците добиваме

$$(a + b + c + x + y + z + u) + (x + y + z) + 2u = 88.$$

Сега заменуваме од првите две равенства и наоѓаме

$$52 + 18 + 2u = 88,$$

односно $u = 9$. Според тоа, 9 деца ги саделе трите вида дрвја.

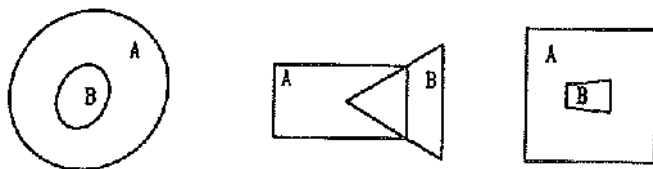
16. Дадена е права p на која последователно се означени точките M, N, P и Q . Определи го множеството $(\overline{MN} \cup \overline{NP}) \setminus (\overline{PQ} \setminus \overline{MP})$.

Решение. Бидејќи точките се последователно означени на правата (направи цртеж), добиваме

$$(\overline{MN} \cup \overline{NP}) \setminus (\overline{PQ} \setminus \overline{MP}) = \overline{MP} \setminus \emptyset = \overline{MP}.$$

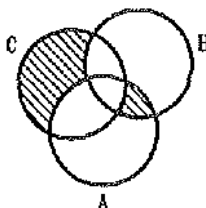
17. Нацртај две конвексни множества точки A и B така што множествата $A \cap B$ и $A \cup B$ се конвексни, а множеството $A \setminus B$ не е конвексно.

Решение. Задачата има повеќе решенија. Некои од нив се дадени на долните цртежи.



18. Кои операции треба да се извршат на множествата A, B и C за да се добие множеството кое е осенчено на цртежот десно?

Решение. Левиот осенчен дек е еднаков на $C \setminus (A \cup B)$, а десниот осенчен дел е еднаков на $(A \cap B) \setminus C$. Значи, $(C \setminus (A \cup B)) \cup ((A \cap B) \setminus C)$.



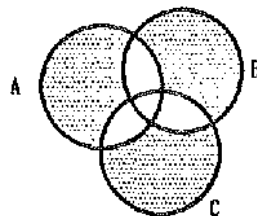
19. На множествата A, B и C примени ги операциите $\cup, \cap$ и $\setminus$ така што ќе го добиеш осенченото множество на цртежот десно.

Решение. Од множеството A осенчениот дел е еднаков на $A \setminus (B \cup C)$, од множеството B е еднаков на $B \setminus (A \cup C)$ и од множеството C е еднаков на $C \setminus (A \cup B)$. Конечно, осенчениот дел на цртежот десно е еднаков на

$$(A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B)).$$

Осенчениот дел може да се прикаже и како

$$(A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)).$$



20. Колку подмножества има множеството $A = \{1, 2, 3, 4\}$?

Решение. Подмножества на множеството A се:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \\ \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\},$$

што значи дека имаме 16 подмножества на множеството A .

21. Определи го множеството X за кое важи $\{a, b, c, d\} \cup X = \{a, b, c, d\}$.

Решение. Од даденото равенство следува дека $X \subseteq \{a, b, c, d\}$. Според тоа,

$$X \in \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \\ \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

22. Определи го множеството X за кое важи

$$X \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad X \cap \{2, 3, 4\} = \{3, 4\}.$$

Решение. Од $X \cap \{2, 3, 4\} = \{3, 4\}$ следува $3, 4 \in X$ и $2 \notin X$, а од $X \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ следува дека $6 \in X$ и $X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Според тоа, решение на задачата се множествата

$$\{3, 4, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}.$$

23. Определи го множеството X за кое се исполнети условите

$$X \subset \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \text{ и } X \cap \{2, 3, 4, 7\} = \{2, 4\}.$$

Решение. Од равенството $X \cap \{2, 3, 4, 7\} = \{2, 4\}$ следува дека $2, 4 \in X$ и $3, 7 \notin X$. Сега од $X \subset \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ следува дека решенијата на задачата се: $X = \{2, 4\}$, $X = \{2, 4, 5\}$, $X = \{2, 4, 5, 6\}$.

24. Определи ги множествата A, B и C за кои важи:

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad (A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset,$$

$$A \setminus B = \{1, 3, 5\}, \quad C \setminus B = \{2, 4\}, \quad (A \cap B) \setminus C = \{6\}.$$

Решение. Од $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$ и $C \setminus B = \{2, 4\}$ следува дека $B = \{6\}$ или $B = \emptyset$. Ако $B = \emptyset$, тогаш од $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$ и $C \setminus B = \{2, 4\}$ следува $A = \{1, 3, 5\}$ и $C = \{2, 4\}$. Но, тогаш $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, што е противречност. Според тоа, $B = \{6\}$. Сега од $(A \cap B) \setminus C = \{6\}$ следува $6 \in A$ и $6 \notin C$. Понатаму, од $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$ и $C \setminus B = \{2, 4\}$ заклучуваме дека $A = \{1, 3, 5, 6\}$ и $C = \{2, 4\}$.

25. Нека A е множеството од сите природни броеви кои се деливи со 4 и се помали од 2019, B е множеството од сите природни броеви деливи со 10 и помали од 2019 и C е множеството од сите природни броеви деливи со 75 и помали од 2019. Определи го множеството $A \cap B \cap C$.

Решение. Ако $n \in A \cap B \cap C$, тогаш n е делив со 4, со 10 и со 75, што значи дека е делив со $\text{NZS}(4, 10, 75) = 300$ и е број помал од 2019. Броеви кои се деливи со 300 и се помали од 2019 се: 300, 600, 900, 1200, 1500 и 1800, што значи дека

$$A \cap B \cap C = \{300, 600, 900, 1200, 1500, 1800\}.$$

26. Нека A е множеството од сите делители на бројот 6. Определи го множеството B во кое функцијата $f(x) = 2x + 1988$ го пресликува множеството A . Множествата A и B и пресликувањето f претстави ги со дијаграм.

Решение. Имаме $A = \{1, 2, 3, 6\}$. Бидејќи

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1988 = 1990,$$

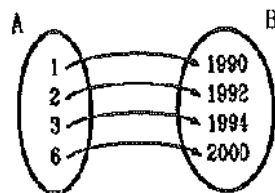
$$f(2) = 2 \cdot 2 + 1988 = 1992,$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1988 = 1994,$$

$$f(6) = 2 \cdot 6 + 1988 = 2000,$$

добиваме дека $B = \{1990, 1992, 1994, 2000\}$.

Бараниот дијаграм е прикажан на горниот цртеж.



V.2. ЛОГИЧКИ ГЛАВОБОЛКИ

27. За еден петцифрен број Иван смета дека е *интересен* ако збирот на двете крајни цифри е еднаков на збирот на средните три цифри со кои е запишан бројот. На пример, бројот 81597 е интересен. Определи го збирот на цифрите на следниот по големина интересен број.

Решение. Последователно броеви кои се поголеми од 81597 се: 81598, 81599, 81600, 81601, 81602, 81603, 81604, 81605, 81606, 81607, 81608, 81609, 81610. Се непосредна проверка гледаме дека меѓу горните броеви интересен број е само бројот 81610 и збирот на неговите цифри е 16.

28. Матеј го прашал Горјан колку прабаби имаат заедно сите негови прабаби?

Решение. Горјан има 4 прабаби. Секоја прабаба на Горјан има 4 прабаби. Според тоа, сите прабаби на Горјан заедно имаат $4 \cdot 4 = 16$ прабаби.

29. Драган купил 5 жетони за стрелање со воздушна пушка. За секој погодок тој добивал 2 наградни жетони. Колку пати погодил Драган ако се знае дека тој пукал вкупно 17 пати?

Решение. Драган има 5 жетони, а за 17 стрелања му се потребни 17 жетони. Тоа значи дека за своите погодоци тој добил $17 - 5 = 12$ жетони. Бидејќи со секој погодок добива по 2 жетони, заклучуваме дека тој метата ја погодил $12 : 2 = 6$ пати.

30. При решавање на една иста задача Илија, Борјан и Милан ги добиле следниве решенија: 358, 257 и 468. Секој од нив точно определил само една цифра на точното решение на задачата (Илија – цифрата на единиците, Борјан – цифрата на десетките и Милан – цифрата на стотки-

те). Определи го точното решение на задачата, ако тоа е трицифрен број.

Решение. Во броевите 358, 257 и 468 цифрата на единиците е иста во два од трите броја, па како само кај еден ученик е точно определена заклучуваме дека цифрата на единиците на точното решение е 7. Слично, цифрата на десетките на на точното решение е 6. Цифрите 7 и 6 се среќаваат во вториот и третиот број, што значи дека останува точната цифра на стотките е таа од првиот број и тоа е цифрата 3. Конечно, точното решение на задачата е 367.

31. Синџир е скинат на 5 делови, така што во секој дел има по 3 алки. Определи го најмалиот број алки кои треба да се отворат и повторно да се состават за да од петте дела може да се состави синџир кој ќе има два слободни краја.

Решение. Доволно е да ги отвориме само трите алки од едниот од петте делови. Тогаш вториот и третиот дел ги поврзуваме со првата алка, третиот и четвртиот дел со втората алка, четвртиот и петтиот дел со третата алка, со што добиваме синџир со два слободни краја.

32. На цртежот десно е претставена елка околу која се распоредени осум светилки. На долните цртежи е показано правилото според кое почнувајќи од 22 часот светат светилките распоредени околу елката. Која светилка ќе светне во 23 часот и 15 минути? Која светилка ќе светне последна и во колку часот?



Решение. Прво светнала светилката со број 1, па светилката со број 4, па светилката со број 7, па светилката со број 2. Значи, одејќи во насока на движењето на стрелките на часовникот, почнувајќи од светилката означена со број 1 на секои 15 минути светнува светилка кој е трета по ред од светилката која последна светнала. Според тоа, во 23 часот ќе светне светилката означена со бројот 5, а во 23 часот и 15 минути ќе светне светилката означена со бројот 8. Понатаму, во 23 часот и 30 минути ќе светне светилката означена со бројот 3 и по-

следна ќе светне светилката означена со бројот 6 и тоа во 23 часот и 45 минути.

33. Четворица пријатели играат неколку игри со криење. Во секоја игра тројца од пријателите се кријат, а еден ги бара. Се покажало дека Иван се криел најмногу од сите и тоа 10 пати, а Дејан се криел најмалку од сите и тоа 7 пати. Колку игри изиграле пријателите?

Решение. Бидејќи Иван се криел најмногу од сите и тоа 10 пати, а Дејан се криел најмалку од сите и тоа 7 пати, заклучуваме дека другите два пријатела се криеле 8 или 9 пати. Значи, пријателите вкупно се криеле $7 + 8 + 8 + 10 = 33$, $7 + 8 + 9 + 10 = 34$ или $7 + 9 + 9 + 10 = 35$ пати. Но, во секоја игра се кријат тројца, па затоа вкупниот број криења мора да е делив со 3. Од броевите 33, 34 и 35 само бројот 33 е делив со 3, што значи дека вкупно имаме 33 криења, односно $33 : 3 = 11$ игри.

34. На еден математички натпревар учествувале 48 ученици, кои се распоредени во неколку училници така што во секоја училница има еднаков број ученици. Во секоја училница има по 6 момчиња и неколку девојчиња. Во колку училници се распоредени учениците, ако се знае дека на натпреварот учествуваат помалку девојчиња од момчиња?

Решение. Бидејќи на натпреварот учествувале повеќе момчиња од девојчиња при што во секоја училница имало по 6 момчиња и еднаков број ученици, заклучуваме дека во секоја училница имало повеќе од 6 ученици. Но, бројот на момчињата кои учествувале на натпреварот е поголем од бројот на девојчињата, па затоа во секоја училница имаме еднаков број ученици кој е помал од 12. Сега од претходно изнесеното и $48 = 1 \cdot 48 = 2 \cdot 24 = 3 \cdot 16 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$ заклучуваме дека во секоја училница имало по 8 ученици, што значи дека учениците биле распоредени во 6 училници.

35. Се сретнале пет момчиња – Ангел, Борјан, Венцислав, Горјан и Данчо. Ангел се поздрави со еден од нив, Борјан – со двајца, Венцислав – со тројца и Горјан – со четворица. Со колку момчиња се поздрави Данчо?

Решение. Горјан се поздрави со четворица, што значи дека се поздрави со сите останати. Бидејќи Ангел се поздрави само со еден, добиваме дека тој не се поздрави со ниту еден друг. Понатаму, Венцислав се поздрави со тројца, па како не се поздрави со Ангел заклучуваме дека се поздрави со останатите тројца. Според тоа, Борјан кој се

поздравил со двајца се поздравил со Горјан и со Венцислав, па затоа не се поздравил со никој друг. Конечно, од претходно изнесеното сле-дува дека Данчо се поздравил само со Горјан и со Венцислав, т.е. со двајца.

36. На лист се нацртани 5 отсечки. Првата отсечка сече една од останати-те, втората отсечка сече две, трета сече три и четвртата отсечка ги сече четирите останати отсечки. Колку отсечки сече петтата отсечка?

Решение. Отсечките да ги означиме со 1, 2, 3, 4 и 5. Бидејќи четвртата отсечка сече четири од останатите таа ги сече отсечките 1, 2, 3 и 5. Но, првата отсечка сече една од останатите отсечки, па како ја сече 4, заклучуваме дека таа не се сеча со другите отсечки. Третата отсечка се-че три од останатите отсечки, па како не се сече со отсечката 1, заклу-чуваме дека таа ги сече отсечките 2, 4 и 5. Досега отсечката 2 се сече со отсечките 3 и 4, па бидејќи таа не сече други отсечки заклучуваме дека нема други пресеци меѓу отсечките. Конечно, петтата отсечка ги сече отсечките 3 и 4, што значи дека таа сече две отсечки.

37. На роденденската прослава на Горјан има 19 лица. Дали е можно секој од гостите од порано да е познаник со точно 3 гости?

Решение. Бидејќи ако A е познаник со B , тогаш и B е познаник со A , заклучуваме дека вкупниот број познанства мора да е парен. Но, $19 \cdot 3 = 57$ е непарен број, па затоа не е можно секој од гостите од порано да е познаник со точно 3 годти.

38. Во група од седум третоодделенци, седум четвртоодделенци и еден петтоодделенец, секој третоодделенец има по десет познаници, а секој четвртоодделенец има по три познаници. Колку познаници има пет-тооделенецот?

Решение. Бидејќи секој третооделенец има по 10 познаници, а бројот на третоодделенците е 7 заклучуваме дека секој третооделенец мора да познава најмалку три четвртоодделенци (случајот кога ги познава сите третоодделенци и петтооделенецот). Според тоа, бројот на поз-нанствата меѓу третоодделенците и четвртоодделенците е поголем или еднаков на $7 \cdot 3 = 21$. Но, според условот на задачата секој чет-вртооделенец има по 3 познаници, што значи дека бројот на поз-нанствата на четвртооделенците е еднаков на $7 \cdot 3 = 21$. Последното значи дека секој четвртооделенец познава само по 3 третооделенци, Конечно, петтооделенецот ги познава само сите третооделенци, т.е. тој има 7 познаници.

39. Двајца возрасни луѓе и две деца треба да се превезат од една на друга страна на реката. На располагање имаат мал чамец во кој може да се превезат или две деца или еден возрасен човек. Како најбрзо ќе ја преминат реката, ако сите знаат да веслаат?

Решение. Прво реката ја минуваат двете деца, а потоа првото дете се враќа и реката ја минува првиот возрасен човек. Понатаму, второто дете се враќа назад и реката ја минуваат двете деца, по што првото дете се враќа назад. Сега вториот возрасен човек ја минува реката и второто дете се враќа назад. Конечно, двете деца ја минуваат реката. Значи, имаме вкупно 9 преминувања на реката.

40. На левиот брег на реката се наоѓаат 6 војници и две деца. На располагање имаат само еден чамец во кој најмногу може да се превезе еден војник или 2 деца. Колку пати најмалку чамецот треба да ја премине реката за да сите осум лица се превезат на десниот брег на реката?

Решение. За да еден војник се префрли на десниот брег на реката се потребни четири преминувања со чамецот:

Прво преминување. Преку реката преминуваат двете деца.

Второ преминување. Првото дете се враќа на левиот брег на реката.

Трето преминување. Преку реката поминува војник.

Четврто преминување. Второто дете се враќа на левиот брег на реката.

За да преминат сите шест војници потребни се $6 \cdot 4 = 24$ преминувања. Тогаш двете деца се наоѓаат на левиот брег на реката, па за преминување на сите на десниот брег е потребно уште едно преминување. Значи, најмалиот можен број преминувања е еднаков на 25.

41. Девет пријатели треба со чамец да преминат од еден на друг брег на река која е широка 20 m. Во чамецот истовремено може да се превезуваат најмногу три лица. Определи го најмалата должина на патот кој ќе го помине чамецот.



Решение. Нека, на пример, лицето A постојано весла и пријателите се наоѓаат на левиот брег на реката. Прво лицето A на десниот брег пренесува двајца пријатели и се враќа на левиот брег. Потоа уште трипати лицето A пренесува по двајца пријатели, за што е потребно уште двапати да се врати на левиот брег. Според тоа, лицето A треба најмалку седум пати да ја премине реката (четирипати превезува по

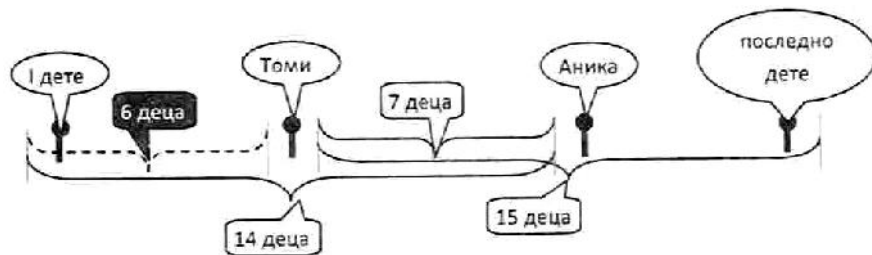
двајца и трипати се враќа сам), па затоа најмалата должина на патот кој ќе го помине чамецот е $7 \cdot 20 = 140 \text{ m}$.

42. Ристо е осми во редот за сладолед. Пред него е Лилјана, која е зад Теодор. Пред Теодор е Ема, која е седма во редот, ако се брои одназад-напред. Колку луѓе чекаат во редот за сладолед?

Решение. Ристо е осми, а Ема е три места пред него, што значи дека таа е петта во редот кога се брои однапред-назад, т.е. пред неа има 4 луѓе. Бидејќи Ема е седма во редот кога се брои одназад-напред, заклучуваме дека во редот има $4 + 7 = 11$ луѓе.

43. Горјан наредил група деца едно зад друго. Се покажало дека зад Томи има 15 деца меѓу кои е и Аника, а пред Аника имало 15 деца меѓу кои и Томи. Ако меѓу Томи и Аника има 7 деца, колку деца наредил Горјан во колоната?

Решение. Условите на задачата се шематски прикажани на долниот цртеж. Лесно се гледа дека пред Томи има $14 - (7 + 1) = 6$ деца. Затоа сите деца кои Горјан ги наредил едно зад друго се: 6 пред Томи, потоа е Томи и 15 се по Томи, т.е. тоа се $6 + 1 + 15 = 22$ деца.



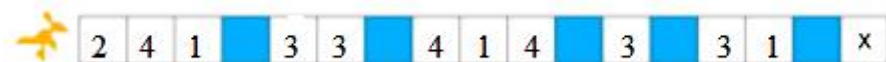
44. На клупа во паркот седнале Ана, Кате, Никола и Диме. Кате седи до Ана, но не седи до Никола. Никола не седи до Диме. Во кој редослед се седнати четирите деца?

Решение. За означување на децата ќе ги користиме првите букви од нивните имиња. Бидејќи Кате седи до Ана имаме редослед КА или АК. Понатаму, Никола не седи до Диме, па затоа Никола и Диме не се еден до друг, т.е. тие се од различни страни на КА и АК. Но, Никола не седи до Кате, што значи дека редоследот е ДКАН или НАКД.

45. Другарите Зоран, Милан, Веселин и Кирил застанале во права линија. Познато е дека Зоран е на 4 метри од Кирил и е на 20 метри од Милан, а Кирил е на 16 метри од Милан и е точно на средина меѓу Веселин и Милан. Определи го растојанието меѓу Веселин и Зоран.

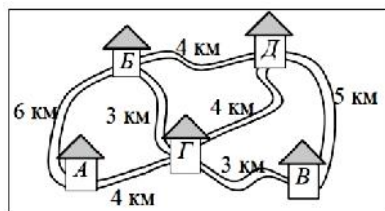
Решение. Бидејќи Зоран е на 4 метри од Кирил и е на 20 метри од Милан, Кирил е на 16 метри од Милан и $4 + 16 = 20$ заклучуваме дека Кирил е меѓу Зоран и Милан, т.е. распоредот е Зоран–Кирил–Милан. Понатаму, Кирил е точно на средина меѓу Веселин и Милан, па затоа растојанието од Веселин до Кирил е 16 метри. Според тоа, Зоран е лево од Кирил и е на растојание 4 метри од Кирил и Веселин е лево од Кирил и е на растојание 16 метри од Кирил. Затоа Веселин е лево од Зоран и е на растојание $16 - 4 = 12$ метри од Зоран.

46. Ако кенгурот Скокалко скокне во некое квадратче, тогаш следниот скок треба да е со должина онолку квадратчиња колку што е бројот во квадратчето во кое се наоѓа Скокалко. Колку долг треба да е првиот скок на Скокалко за безбедно да стигне во квадратчето X, а при тоа да не падне во вода?



Решение. Ќе броиме од десно на лево. При последниот скок Скокалко мора да е во квадратчето со првиот број 3 (ако е во квадратчето со број 1, ќе падне во вода). Во ова квадратче тој може да дојде од првото квадратче во кое е запишан бројот 4, а во него може да дојде од второто квадратче во кое е запишан бројот 1. Понатаму, во ова квадратче може да дојде од третото квадратче во кое е запишан бројот 3, а во него може да дојде од третото квадратче во кое е запишан бројот 4. Конечно, во ова квадратче Скокалко може да дојде ако првиот скок е со должина 2.

47. Автобус патува од местото A до местото B, при што по еднаш минува низ местата B, Г и Д. Определете ја должината на најкраткиот пат по кој може да патува автобусот.



Решение. Сите патишта по кои автобусот може да го оствари своето патување се:

- АБГДВ и овој пат е со должина $6 + 3 + 4 + 5 = 18 \text{ km}$,
- АБДГВ и овој пат е со должина $6 + 4 + 4 + 3 = 17 \text{ km}$ и
- АГБДВ и овој пат е со должина $4 + 3 + 4 + 5 = 16 \text{ km}$.

Значи, должината на најкраткиот пат е 16 km .

48. Во еден хотел има пет гости од Полска, 7 од Чешка, 8 од Германија, неколку гости од Франција и нема гости од друга држава. На екскурзија треба да отидат најмалку 22 гости за да сме сигурни дека меѓу нив има барем седум гости од иста држава. Колку гости има од Франција?

Решение. Ако на екскурзија заминат петте гости од Полска, 6 гости од Чешка, 6 гости од Германија, тогаш од овие држави на екскурзија имаме $5 + 6 + 6 = 17$ гости. Сега, за да сме сигурни дека кога на екскурзија ќе заминат 22 гости има седум гости од една држава, од Франција може да заминат точно 4 гости и еден од гостите мора да е од Чешка или Германија. Според тоа, од Франција во хотелот има 4 гости.

49. Околу тркалезна маса на еднакви растојанија седнале 18 лица, некои од кои се витези и останатите се лажливци. Витезите секогаш ја говорат вистината, а лажговците секогаш лажат. Секој од присутните кажал дека лево и десно од него седат витез и лажливец. Колку витези седеле на масата?

Решение. Бидејќи има и витези и лажливци, барем на едно место на масата еден до друг седат витез и лажливец (ВЛ). Според условот на задачата од другата страна на витезот седи витез, а од другата страна на лажливецот повторно седи витез, па така имаме ВВЛВ. Продолжувајќи на истиот начин добиваме распоред ЛВВЛВВ. На овој начин формираме групи од по три лица од кои двајца се витези и еден е лажливец (направи цртеж). Вакви групи има $18 : 3 = 6$, што значи дека на масата седат $6 \cdot 2 = 12$ витези.

50. Тројца пријатели треба да поделат 7 полни, 7 празни и 7 до половина полни чаши со лимонада. Сите чаши се исти. Поделбата треба да биде направена така што секој од пријателите ќе добие еднаков број чаши и еднакво количество лимонада. Како тоа може да се направи, но при тоа лимонадата да не се прелева од една во друга чаша?

Решение. Имаме вкупно $7 + 7 + 7 = 21$ чаша, што значи дека секој од пријателите треба да добие по $21 : 3 = 7$ чаши. Бидејќи 4 до половина полни чаши содржат лимонада колку што содржат 2 полни чаши, вкупното количество лимоната е еднакво на количеството содржано во 9 полни чаши и 3 до половина полни чаши. Тоа значи, дека секој од пријателите треба да добие 3 полни и една до половина полна чаша со лимонада. Ќе наведеме два начина на поделба на чашите кои го задоволуваат условот на задачата:

Прв начин. Двајцата пријатели добиваат по 3 полни чаши, по 3 празни чаши и по 1 до половина полна чаша, а третиот пријател добива 1 полна чаша, 1 празна чаша и 5 до половина полни чаши.

Втор начин. Двајцата пријатели добиваат по 2 полни, по 2 празни и по 3 до половина полни чаши, а третиот пријател добива 3 полни, 3 празни и 1 до половина полна чаша.

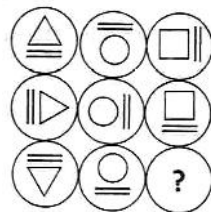
51. На цртежите десно е дадена низа од три фигури, која е формирана според определено правило. Определи ја следната фигура во низата.



Решение. Фигурите последователно се состојат од прав агол кој се врти во насока обратна од насоката на движењето на стрелката на часовникот, при што наспроти темето на правиот агол во првата фигура имаме отсечка, во втората фигура имаме агол и во третата фигура имаме триаголник. Според тоа, четвртата фигура се добива ако го ротираме за правиот агол на третата фигура и наспроти правиот агол нацртаме квадрат (цртеж десно).



52. На цртежот десно според определено правило се распоредени фигурите во кругчињата. Која фигура треба да стои во кругчето во кое се наоѓа прашалникот?



Решение. Секоја од фигурите во вториот и третиот ред е добиена со вртење во насоката на движењето на стрелката на часовникот на фигурата која се наоѓа одма над неа. Според тоа, во кругчето во кое е прашалникот треба да се наоѓа фигурата прикажана на цртежот десно.



53. Во паркот се сретнале тројца другари: професорот Белоски, писателот Црнкоски и лекарот Црвенкоски. „Занимливо, еден од нас е црнокос, другиот има бела коса, третиот има црвена коса, но ниту еден од нас нема боја на коса на која укажува неговото презиме“ – рече црнокосиот. „Во право си“ – се сложи Белоски. Која е бојата на косата на секој од пријателите?

Решение. Од разговорот следува дека Белоски нема црна коса, па како неговата коса не е бела, заклучуваме дека тој има црвена коса. Значи, Црнкоски нема црвена коса, па останува тој да има бела коса и конечно, Црвенкоски има црна коса.

54. Во текот на оваа седмица четири девојчиња отишле по еднаш во театар и тоа: една во понеделник, две во вторник и четвртата во среда. Кои две девојчиња биле во театар во вторник, ако Ана, Тена и Мила во театар биле во различни денови, Петра била во театар пред Тена, а Ана била во театар по Мила.

Решение. Бидејќи Ана, Тена и Мила биле во театар во различни денови, заклучуваме дека Петра е второто девојче кое во театар било во вторник. Бидејќи Петра во театар била пред Тена, заклучуваме дека Тена во театар била во среда. Конечно, бидејќи Ана била во театар по Мила, заклучуваме дека Ана била во вторник, а Мила во понеделник. Според тоа, во вторник во театар биле Ана и Петра.

55. Три пријателки – Маја, Светлана и Даринка се родени во една иста година, но во различни годишни времиња: зима, пролет и лето. Светлана е помала од Даринка, а меѓу родендените на Маја и Даринка поминало повеќе од половина година. Која кога се родила, ако е познато дека на 1 октомври сите три немаат еднаков број години?

Решение. Бидејќи на 1 октомври сите три немаат еднаков број години, таа која се родила во зима се родила во декември и таа е најмала. Понатаму, бидејќи меѓу родендените на Маја и Даринка поминало повеќе од шест месеци, а од почетокот на пролетта до крајот на летото има шест месеци, заклучуваме дека во декември се родила Маја или Даринка. Но, Светлана е помлада од Даринка, па затоа Даринка не може да е родена во декември. Според тоа, Маја е родена во декември, т.е. во зима, па како Светлана е помлада од Даринка, таа е родена во лето, а Даринка е родена во пролет.

56. Ако пеперутката ја говори вистината тогаш таа ја менува бојата во зелена, а ако излаже тогаш таа станува црвена. Се сретнале две пеперутки. Првата рекла: „Ние и двете сме црвени“. Потоа втората рекла: „Ако си молчевме, сега и двете ќе бевме црвени“. Дали двете пеперутки по втората реченица се истобојни?

Забелешка. Ако пеперутката е црвена и таа излаже, тогаш останува црвена, а ако е зелена и ја говори вистината таа останува зелена.

Решение. Реченицата на втората пеперутка запишана со други зборови е: „Од почетокот и двете бевме црвени“. Според тоа, е двете пеперутки кажале една иста реченица. Според тоа, или и двете реченици се вистинити или и двете реченици се неистинити. Ако речениците се неистинити, тогаш пеперутките ќе станат црвени, а ако се вистинити,

тие ќе станат зелени. Значи, по втората реченица пеперутките се исто-бојни.

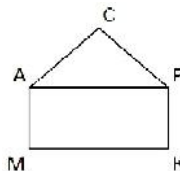
57. Три од наградите на новогодишната наградна игра биле шапка, маска и ранец. Наградите ги добиле Моника, Жарко и Саво. Шапката паднала или кај Моника или кај Жарко, а маската не ја добил ниту Жарко ниту Саво. Кој која награда ја добил?

Решение. Задачата ќе ја решиме користејќи табела во која ќе ги внесуваме дадените податоци. Јасно маската ја добила Моника, па затоа во колоната за маската последователно ставаме +, – и –. Сега бидејќи шапката паднала кај Моника или кај Жарко, заклучуваме дека шапката паднала кај Жарко, па во редот на Жарко последователно ставаме +, – и –. Сега во останатите две полиња во редот на Моника и во останатите две полиња во колоната на шапката ставаме знак –. Конечно, ранецот го добил Саво.

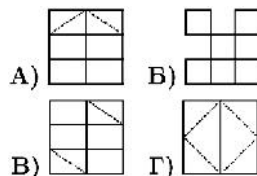
	ш	м	р
М	–	+	–
Ж	+	–	–
С	–	–	

58. Илија поминал по сите патишта по еднаш и на крајот пристигнал во градот P . Од кој град го почнал своето патување Илија?

Решение. Пристигнувањето во последниот град, како и тргнувањето од првиот град е можно само ако двата града се поврзани со непарен број патишта (Зошто?). Во нашиот случај тоа се градовите A и P . Бидејќи Илија пристигнал во градот P заклучуваме дека тој патувањето го почнал од градот A .

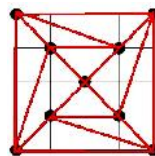
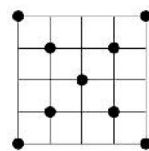


59. На цртежот десно се прикажани четири фигури. Која од нив не може да се нацрта без да се подигне моливот од листот и без повеќе пати да се поминува по една отсечка? (Цртањето на фигурата започнува од теме и завршува во теме.)



Решение. Јасно, ако фигурата има темиња кои се крајни точки на непарен број отсечки, тогаш цртањето на фигура на опишаниот начин мора да започне од вакво теме и да заврши во вакво теме. Притоа фигурата мора да содржи точно две вакви темиња (Зошто?). Фигурата A) има 4 темиња со непарен број отсечки, па затоа истата не може да се нацрта на опишаниот начин. Останите три фигури содржат по две вакви темиња и може да се нацртаат на опишаниот начин. Обиди се тоа самостојно да го направиш.

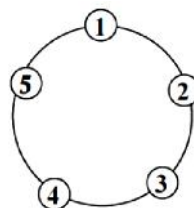
60. Во земјата Недојдија 9 градови се распоредени како на цртежот десно. Петар Пан сака меѓу некои од градовите да направи прави патишта кои што нема да се сечат надвор од градовите и од секој град да излегуваат точно по 4 патишта. Помогни му на Петар Пан да ги конструира патиштата. (Мрежата е дадена за поедноставно цртање, тоа не мора да се патишта.)



Решение. Постојат повеќе решенија на задачата. Едно од нив, во кое патичтата се означени со задебелени линии и прикажано на цртежот десно.

V.3. ЗАНИМЛИВИ БРОЕЊА

61. На кружнаца се запишани броевите 1, 2, 3, 4 и 5, како што е прикажано на цртежот десно. Скакулец скока во насока на движењето на стрелката на часовникот од број на број според следново правило: ако се наоѓа на непарен број, тогаш скока врз соседниот број, а ако се наоѓа на парен број, тогаш прескокнува еден број. Ако скакулецот на почетокот се наоѓал на бројот 5, на кој број ќе се наоѓа по 100 скока?

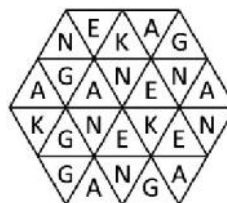


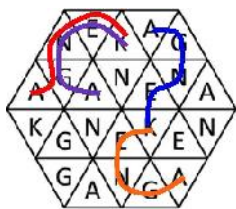
Решение. За да определиме на кој број ќе се најде скакулецот по 100 скока, треба да го определиме 101 број кој ќе се добие ако последователно ги запишуваме броевите на кои ќе се најде скакулецот. Ако го следиме правилото според кое скакулецот скока, тргнувајќи од бројот 5, ја добиваме следнава низа броеви:

5, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, 4 ...

Забележуваме дека по бројот 5 во добиената низа се повторува групата броеви 1, 2 и 4. Според тоа, бидејќи $101 = 1 + 3 \cdot 33 + 1$ добиваме дека 101 член на низата е притоа број во групата која се повторува, т.е. бројот 1.

62. На колку начини зборот KENGA може да се прочита на фигурата прикажана на цртежот десно, ако соседните букви од зборот мора да лежат во триаголници кои што имаат заедничка страна?





Решение. Начините на кои може на саканиот начин да се прочита бројот KENGA се означени на цртежот лево. Пребројувањето е извршено почнувајќи од рите букви K, со тоа што почнувајќи од едната буква K не е можно ниту еднаш да се прочита зборот KENGA, а од другите

две тоа е можно по два пати, т.е. зборот KENGA вкупно може да се прочита четири пати.

63. Антонио фрлил коцка за играње 21 пат. Притоа бројот 1 паднал 2 пати, бројот 2 паднал 2 пати, а секој од броевите 3, 4, 5 и 6 паднал по 4 пати. Страните на коцката со непарен број точки се обоени со жолта боја, а страните на коцката со парен број точки се обоени со црвена боја. Колку пати паднала жолта боја?

Решение. Со жолта боја се обоени страните со 1, 3 и 5 точки. Според тоа, жолта боја паднала $2 + 4 + 4 = 10$ пати.

64. Чуварот на училиштето има 7 клуча за вратите од 7 училници, но не знае кој клуч е од која училница. Кој е најголемиот можен број проби што треба да ги направи чуварот за да открие кој клуч која училница ја отклучува?

Решение. Имаме 7 клуча, па за да го открие клучот кој ја отклучува првата училница на чуварот му се потребни најмногу 6 проби. Сега остануваат 6 клуча, па за да го открие клучот која ја отклучува втората училница на чуварот му се потребни 5 проби. Продолжувајќи ја постапката добиваме дека за да открие кој клуч која училница ја отклучува на чуварот му се потребни $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ проба.

65. На секое дете му дале по 4 картончиња. На секое картонче биле запишани слоговите ПА, или НА, или МА. Се покажало дека 13 деца со своите картончиња можат да го запечат зборот МАМА, 15 деца – зборот ПАПА и 17 деца – зборот НАНА. Зборот ПАНАМА можат да го запишат 45 деца. Колку деца вкупно добиле картончиња?

Решение. Децата кои може да го запишат зборот ПАНАМА, за таа цел употребуваат 3 картончиња, при што четвртото картонче се совпаѓа со едно од овие три картончиња употребени за зборот ПАНАМА. Затоа, ако детето може да го запише зборот ПАНАМА, тоа може да го запише зборот МАМА или ПАПА или НАНА. Но, $45 = 13 + 15 + 17$. Притоа, секое дете има две еднакви картончиња, т.е. тоа може да го запише зборот МАМА или ПАПА или НАНА. Затоа секое дете има

три различни картончиња, односно секое дете може да го запише зборот ПАНАМА, т.е. биле 45 деца.

66. Располагаме со 19 триаголници, 28 квадрати и 6 кругови. Кој е најмалиот број фигури кои треба да се отстранат за да останат фигури само од еден вид?

Решение. За да останат фигури само од еден вид, задолжително мора целосно да ги отстраниме фигурите од другите два вида. Јасно, најмалку фигури ќе отстраниме ако ги отстраниме фигури од двата вида кои ги има помалку од третиот вид. Во нашиот случај тоа се 19 триаголници и 6 кругови, што значи дека треба да отстраниме најмалку $19 + 6 = 25$ фигури.

67. Во кутија има 15 сини, 8 црвени и 3 бели топчиња. Определи го најмалиот број топчиња кои без гледање треба да ги извадиме од кутијата за да сме сигурни дека меѓу нив има најмалку 10 со иста боја и најмалку 5 со друга боја.

Решение. Ако извадиме 22 топчиња, тогаш може да се случи 15 да се сини, 4 да се црвени и 3 да се бели, што значи нема да имаме 10 од една и 5 од друга боја. Ако извадиме 23 топчиња, тогаш во најлош случај тие може да бидат 3 бели, 8 црвени и 12 сини или пак 3 бели, 15 сини и 5 црвени, што значи дека во секој случај ќе имаме 10 од една и 5 од друга боја.

68. Во стаклена бомбониера има 4 бомбони со вкус на јагода, 5 бомбони со вкус на карамела и 6 чоколадни бомбони. Определи го најмалиот број бомбони кои без да се гледа треба да се земат така што да имаме по една бомбона од секој вид.

Решение. Ако се земат 9 бомбони, тогаш може да се случи 4 да се со вкус на јагода и 5 да се со вкус на карамела, т.е. да немаме по една бомбона од секој вид. Последното не може да се случи ако земеме 10 бомбони и тоа е најмалиот број бомбони кои треба да се земат за да имаме по една бомбона од секој вид.

69. Во вреќата на Дедо Мраз има 444 автомобилчиња, 555 камиончиња и 666 авиончиња. Определи го најмалиот број играчки кои без да гледа треба да ги извади Дедо Мраз за да биде сигурен дека меѓу нив има најмалку едно авионче.

Решение. Кога последователно без да гледаме земаме играчки може да се случи во некој редослед да земеме 444 автомобилчиња и 555

камиончиња. Тоа значи, дека ако земеме 999 играчки тогаш може да се случи меѓу нив да нема ниту едно авионче. Но, кога земаме 1000 играчки, тогаш сигурно барем една ќе биде авионче. Според тоа, баријантот најмал број е 1000.

70. Горјан има 70 лампиони за украсување на новогодишната елка, од кои 20 се сини, 20 се црвени, 20 се жолти и останатите 10 се бели и зелени. Определи го најмалиот број лампиони кои треба да се земат без гледање за да сме сигурни дека меѓу нив ќе има 10 од иста боја.

Решение. Кога последователно без гледање земаме лампиони може да се случи во некој редослед да земеме 9 сини, 9 црвени, 9 жолти и да ги земеме 10-те бели и зелени лампиони. Во овој случај ќе земеме $3 \cdot 9 + 10 = 37$ лампиони и сигурно нема да имаме 10 истобојни. Сега, со земање на следниот лампион тој мора да биде или син или црвен или жолт, што значи дека ако земеме 38 лампиони, тогаш сигурно ќе имаме 10 истобојни.

71. На една корпа пишува „Јаболка“ и во неа има само јаболка: 8 зелени и 11 жолти. На друга корпа пишува „Круши“ и во неа има само круши: 14 зелени и 5 жолти. Определи го најмалиот број плодови кои треба да се извадат за да сме сигурни дека сме извадиле барем 10 истобојни плодови. (Можеме да избереме од која корпа ќе вадиме плодови, но бојата на плодот не ја гледаме сè додека не го извадиме.)

Решение. Во случај кога вадиме од двете корпи, мора да извадиме 19 плодови, бидејќи ако извадиме 18 плодови може да се случи да имаме 9 зелени и 9 жолти плодови.

Ако вадиме само јаболка, тогаш за да сме сигурни дека 10 се истобојни мора да извадиме 18 јаболка. Имено, кога вадиме 17 јаболка може да се случи да извадиме 8 зелени и 9 жолти.

Ако вадиме само круши, тогаш мора да извадиме 15 круши, бидејќи кога вадиме 14 круши може да се случи 9 да се зелени и 5 да се жолти. Според тоа, подобро е да вадиме круши и најмалиот број плодови кој треба да го извадиме е 15.

72. Сите двоцифрени броеви се запишани на картончиња (по еден број на едно картонче). Кој е најмалиот број картончиња што треба да го извлечеме без гледање, за да сме сигурни дека најмалку на пет картончиња се запишани броеви кои имаат еднаков збир на цифри?

Решение. Има 1 картонче со збир на цифри 1, 2 картончиња со збир на цифри 2, 3 картончиња со збир на цифри 3, 1 картонче со збир на

цифри 18, 2 картончиња со збир на цифри 17 и 3 картончиња со збир на цифри 16. На останатите картончиња збирот на цифрите е од 4 до 15 и од секој збир има најмалку по 4 картончиња. Ако избереме $2 \cdot (1 + 2 + 3) + 12 \cdot 4 = 60$ картончиња, тогаш може да се случи да имаме најмногу по 4 картончиња со еднаков збир (Зошто?). Затоа треба да избереме 61 картонче и тогаш сигурно ќе имаме 5 картончиња со еднаков збир на цифри.

73. На колку начини може бројот 161 да се запише како збир на два броја такви што првиот собирук е помал од вториот собирук?

Решение. Имаме: $80 + 81 = 161$. Затоа во претставувањата на бројот 161 како збир на два броја такви што првиот собирук е помал од вториот собирук, првиот собирук може да биде еднаков само на 0, 1, 2, 3, 4 ... 80, што значи дека бараниот број претставувања е 81.

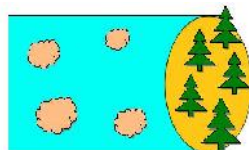
74. За време на денот на пролетта учениците од V^1 одделение во еден ред засадиле 16 елки. Потоа меѓу секои две елки учениците од V^2 одделение засадиле уште по една елка, а потоа меѓу секои две елки учениците од V^3 одделение засадиле уште по една елка. Колку елки засадиле сите петтоодделенци заедно?

Решение. Меѓу првите засадени 16 елки има 15 места, што значи дека учениците од V^2 одделение засадиле 15 елки. Досега се засадени вкупно $16 + 15 = 31$ елка и меѓу нив има 30 места. Значи, учениците од V^3 одделение засадиле 30 елки, што значи дека сите петтоодделенци засадиле вкупно $31 + 30 = 61$ елка.

75. Во градината на Ивана во еден ред се посадени 13 лалиња и нема други лалиња. Секој ден меѓу секои две соседни лалиња Ивана засадува по едно ново лале. Колку лалиња ќе има во градината по четири дена?

Решение. Меѓу 13 лалиња има 12 места, што значи дека по првиот ден во градината ќе има $13 + 12 = 25$ лалиња. Меѓу 25 лалиња има 24 места, што значи дека по два дена во градината ќе има $25 + 24 = 49$ лалиња. Меѓу 49 лалиња има 48 места, што значи дека по третиот ден во градината ќе има $49 + 48 = 97$ лалиња. На сличен начин добиваме дека по четвртиот ден во градината ќе има $97 + 96 = 193$ лалиња.

76. Во морето има четири острови. Од секој остров излегуваат по три моста - едниот го поврзува

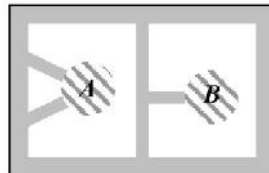


островот со брегот, а другите два го поврзуваат островот со други острови. Меѓу два острова може да има само по еден мост. Определи го бројот на сите мостови.

Решение. Имаме четири мостови кои ги поврзуваат островите со брегот. Понатаму, од секој остров излегуваат по 2 моста, кои се бројат по два пати (Зошто?). Значи, меѓу островите имаме $(4 \cdot 2) : 2 = 4$ моста, па затоа вкупниот број мостови е еднаков на $4 + 4 = 8$.

77. На цртежот десно е прикажана шема на парк.

Со буквата A е означен детски плоштад, со B е означена фонтана и патеките во паркот се обоени со сива боја. На колку различни начини може да се стигне од плоштадот до фонтаната, без притоа да се минува низ едно место двапати.



Решение. Од плоштадот може да се тргне по две патеки, т.е. на два начина. Понатаму, и во двата случаја за да стигнеме до фонтаната имаме по две раскрсници на кои имаме по два избора на патеките, што значи дека имаме $2 \cdot 2 = 4$ начини за да стигнеме до фонтаната. Конечно, вкупниот број патишта е еднаков на $2 \cdot 4 = 8$.

78. Определи го бројот на петцифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на 2.

Решение. Петцифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 2 се: 20000, 11000, 10100, 10010 и 10001. Според тоа, постојат 5 петцифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 2.

79. Определи го бројот на сите трицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4 и цифрата на стотките е еднаква на цифрата на десетките.

Решение. Броевите кои го задоволуваат условот на задачата се 112 и 220, што значи дека постојат само два броја со саканите својства.

80. Определи го бројот на двоцифрените броеви кај кои цифрата на десетките е помала од цифрата на единиците.

Решение. Со цифра на десетките 1 има 8 броја, со цифра на десетките 2 има 7 броја, со цифра на десетките 3 има 6 броја итн. со цифра на десетките 8 има 1 број. Јасно, со цифра на десетките 9 нема ниту еден број со саканото својство. Според тоа, постојат

$$8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$$

броја кај кои цифрата на десетките е помала од цифрата на единиците.

81. Определи го бројот на сите трицифрени непарни броеви чиј збир на цифри е еднаков на 5.

Решение. Бидејќи збирот на цифрите на трицифрениот непарен број треба да е еднаков на 5, заклучуваме дека цифрата на единиците може да биде 1 или 3. Ако цифрата на единиците е 1, тогаш броевите се од видот $\overline{ab1}$, каде $a + b = 4$ и $a \geq 1$, па затоа тоа се броевите 131, 221, 311 и 401. Ако цифрата на единиците е 3, тогаш броевите се од видот $\overline{ab3}$, каде $a + b = 2$ и $a \geq 1$, па затоа тоа се броевите 113 и 203. Според тоа, имаме 6 трицифрени непарни броеви чиј збир на цифри е еднаков на 5.

82. Колку петцифрени броеви завршуваат на цифрата 4? Колку петцифрени броеви почнуваат и завршуваат на цифрата 7?

Решение. Во бројот $\overline{****4}$ на местото на ѕвездичките може да се стави кој било четирицифрен број. Бидејќи има 9000 четирицифрени броеви, заклучуваме дека има 9000 петцифрени броеви кои завршуваат на цифрата 4.

На едноцифрените броеви од лево да им допишеме по две нули, а на двоцифрените броеви од лево да им запишеме по една нула. Така ги добиваме броевите 000, 001, 002, ..., 997, 998, 999. Секој од овие броеви може да се стави на местото на ѕвездичките во бројот $\overline{7****7}$, со што се добиваат сите петцифрени броеви кои почнуваат и завршуваат на цифрата 7. Вакви броеви се 1000, па затоа има 1000 петцифрени броеви кои почнуваат и завршуваат на цифрата 7.

83. Запиши ги сите четирицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 3. Колку броеви запиша?

Решение. Од $3 = 3 + 0 + 0 + 0 = 2 + 1 + 0 + 0 = 1 + 1 + 1 + 0$ добиваме дека бараните броеви се 3000, 2100, 2010, 2001, 1200, 1020, 1002, 1110, 1101 и 1011. Според тоа, има 10 четирицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 3.

84. Запиши ги сите петцифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 3.

Решение. Имаме $3 = 3 + 0 + 0 + 0 + 0 = 2 + 1 + 0 + 0 + 0 = 1 + 1 + 1 + 0 + 0$, па затоа бараните броеви се: 30000, 21000, 20100, 20010, 20001, 12000, 10200, 10020, 10002, 11100, 11010, 11001, 10101, 10011 и 10110.

85. Запиши ги сите четирицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 10, а цифрата на десетките им е еднаква на 5.

Решение. Збирот на останатите три цифри е еднаков на $10 - 5 = 5$ и бидејќи $5 + 0 + 0 = 4 + 1 + 0 = 3 + 2 + 0 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 5$ ги имаме следните трицифрени броеви: 500, 410, 401, 140, 104, 320, 302, 230, 203, 311, 131, 113, 221, 212, 122. Сега бараните броеви ги добиваме ако во горните броеви на местото на десетките ја додадеме цифрата 5. Имаме: 5050, 4150, 4051, 1450, 1054, 3250, 3052, 2350, 2053, 3151, 1351, 1153, 2251, 2152, 1252.

86. Определи го бројот на четирицифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4.

Решение. Бројот 4 како збир на четири едноцифрени броеви може да се запише на еден од следниве начини:

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 + 0 = 2 + 2 + 0 + 0 = 1 + 3 + 0 + 0 = 4 + 0 + 0 + 0.$$

Според тоа, бараните броеви се 1111, 2110, 2101, 2011, 1201, 1210, 1120, 1021, 1102, 1012, 2200, 2020, 2002, 1300, 1030, 1003, 3100, 3010, 3001 и 4000, т.е. имаме 20 такви броеви.

87. Определи го бројот на трицифрените броеви чиј производ на цифри е еднаков на 36.

Решение. Бројот 36 како производ на три едноцифрени броеви може да се запише на следниов начин:

$$36 = 1 \cdot 4 \cdot 9 = 1 \cdot 6 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 3 \cdot 3 \cdot 4.$$

Од производот $1 \cdot 4 \cdot 9$ ги имаме броевите 149, 194, 419, 491, 914 и 941, т.е. 6 броја. Слично, од производот $1 \cdot 6 \cdot 6$ имаме 3 броја, од производот $2 \cdot 2 \cdot 9$ имаме 3 броја, од производот $2 \cdot 3 \cdot 6$ имаме 6 броја и од производот $3 \cdot 3 \cdot 4$ имаме 3 броја.

Конечно, постојат $6 + 3 + 3 + 6 + 3 = 21$ број чиј производ на цифри е еднаков на 36.

88. Определи го бројот на четирицифрените природни броеви чиј производ на цифри е еднаков на 6.

Решение. Имаме $6 = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$, па затоа бараните броеви се 6111, 1611, 1161, 1116, 3211, 3121, 3112, 2311, 2131, 2311, 1123, 1132, 1213, 1231, 1312 и 1321. Според тоа, имаме 16 природни броеви чиј производ на цифри е еднаков на 6.

89. Определи го бројот на петцифрените броеви чиј производ на цифри е еднаков на 4.

Решение. Бројот 4 како производ на пет едноцифрени броеви може да се запише на два начина и тоа: $4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4$ и $4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2$. Затоа

петцифрените броеви чиј производ на цифри е еднаков на 4 се: 11114, 11141, 11411, 14111, 41111, 11122, 11212, 11221, 12112, 12121, 12211, 21112, 21121, 21211 и 22111. Според тоа, има 15 петцифрени чиј производ на цифри е 4.

90. Определи го бројот на сите природни броеви кои се помали од 1000 и чиј збир на цифри е еднаков на 5.

Решение. Имаме

$5 = 5 + 0 = 1 + 4 = 2 + 3 = 5 + 0 + 0 = 4 + 1 + 0 = 3 + 2 + 0 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1$, па затоа бараните броеви се: 5, 50, 14, 41, 23, 32, 500, 104, 140, 401, 410, 203, 230, 302, 320, 311, 131, 113, 122, 212 и 221. Според тоа, има 21 број кој е помал од 1000 и чиј збир на цифри е еднаков на 5.

91. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 3000 и чиј производ на цифри е еднаков на 210.

Решение. Имаме: $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, па затоа бараните броеви може да бидат:

- 1) трицифрените броеви запишани со помош на цифрите 5, 6 и 7 и такви броеви има $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$,
- 2) четитирицифрените броеви запишани со помош на цифрите 2, 3, 5 и 7, кај кои цифрата на илјадитите е еднаква на 2 и такви броеви се исто така 6, и
- 3) четрицифрените броеви запишани со помош на цифрите 1, 5, 6 и 7 кај кои цифрата на илјадитите е еднаква на 1 и такви броеви се исто така 6.

Според тоа, постојат $6 + 6 + 6 = 18$ броеви кои се помали од 3000 и чиј производ на цифри е еднаков на 210.

92. Определи го бројот на четирицифрените броеви кои се запишани само со цифрите 1, 2 и 3 и кои се деливи со бројот 9.

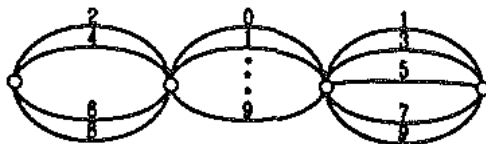
Решение. Природен број е делив со бројот 9 ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 9. Според тоа, цифрите на бараните четирицифрени броеви се (1, 2, 3, 3) или (2, 2, 2, 3). Бараните броеви се 1233, 1323, 1332, 2133, 2313, 2331, 3123, 3132, 3212, 3231, 3312, 3321, 2223, 2232, 2322 и 3222. Според тоа, имаме 16 броеви со саканите својства.

93. Определи го бројот на броевите кои се поголеми од 10, се помали од 1000 и чиј збир на цифри е еднаков на 7.

Решение. Броеви кои ги задоволуваат условите на задачата се: 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70, 106, 115, 124, 133, 142, 151, 160, 205, 214, 223, 232, 241, 250, 304, 313, 322, 331, 340, 403, 412, 421, 430, 502, 511, 520, 601, 610 и 700. Значи, постојат 35 броеви со саканите својства.

94. Определи го бројот на трицифрените броеви кај кои цифрата на стотките е парна, а цифрата на единиците е непарна.

Решение. За цифрата на стотките има 4 можности, за цифрата на десетките има 10 можности и за цифрата на единиците има 5 можности (види цртеж десно). Конечно, има $4 \cdot 10 \cdot 5 = 200$ броеви со саканите својства.



95. Колку различни трицифрени броеви може да се запишат само со помош на цифрите 6 и 7?

Решение. За цифрата на единиците имаме две можности, а исто толку можности имаме и за цифрата на десетките и за цифрата на стотките. Според тоа, само со цифрите 6 и 7 може да се запишат $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ различни трицифрени броеви. Тоа се броевите: 666, 667, 676, 766, 777, 776, 767 и 677.

96. Определи го бројот на петцифрените броеви кои имаат три соседни еднакви цифри, а другите две цифри се различни од нив и се различни меѓу себе.

Решение. Ако избришеме две од три еднакви соседни цифри, добиваме трицифрен број со различни цифри. Бројот на сите такви броеви е $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ (за првата цифра 9 избори, за втората исто така 9 избори и за третата 8 избори). Сега, бидејќи секоја од трите цифри на трицифрениот број може да е еднаква на избришаните две еднакви цифри заклучуваме дека бараниот број петцифрени броеви е еднаков на $648 \cdot 3 = 1944$.

97. Определи го бројот на двоцифрените броеви кај кои:

- 1) двете цифри се парни,
- 2) двете цифри се непарни.

Решение. 1) За цифрата на единиците имаме 5 можности, а за цифрата на десетките имаме 4 можности. Според тоа, имаме $5 \cdot 4 = 20$ двоцифрени броеви кај кои двете цифри се парни.

2) За цифрата на единиците имаме 5 можности и за цифрата на десетките имаме 5 можности. Според тоа, имаме $5 \cdot 5 = 25$ двоцифрени броеви кај кои двете цифри се непарни.

98. Определи го бројот на броевите кои се поголеми од 0 и се помали од 100000, а можат да се запишат само со цифрите 1 и 0.

Решение. Броеви кои се поголеми од 0 и се помали од 1, а можат да се запишат само со цифрите 0 и 1 има:

- едноцифрени – 1 број,
- двоцифрени – $2 \cdot 1 = 2$ броја,
- трицифрени – $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ броја,
- четирицифрени – $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ броја и
- петцифрени – $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 16$ броја.

Конечно, бараниот број броеви е еднаков на $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$.

99. За еден петцифрен број ќе велиме дека е *планински* ако првите три цифри му се во растечки редослед, а последните три цифри му се во опаѓачки редослед. На пример, бројот 35642 е *планински*, а бројот 45532 *не е планински*. Определи го бројот на планинските броеви кај кои цифрата на стотките е еднаква на 5.

Решение. Ќе ги преброиме можностите за цифрите на единиците и десетките. Ако цифрата на единиците е 0, тогаш за цифрата на десетките имаме четири можности. Ако цифрата на единиците е 1, тогаш за цифрата на десетките имаме 3 можности. Ако цифрата на единиците е 2, тогаш за цифрата на десетките имаме 2 можности и ако цифрата на единиците е 3, за цифрата на десетките имаме 1 можност. Според тоа, за цифрите на единиците и десетките имаме $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ можности. За секоја од овие можности за цифрите на илјадитите и десетилјадитите имаме по 6 можности (симетрично со цифрите на единиците и десетките, со тоа што отпаѓа цифрата 0). Конечно, имаме $6 \cdot 10 = 60$ планински броеви кај кои цифрата на стотките е 5.

100. За еден број ќе велиме дека е *прекрасен* ако е запишан само со цифрите 0, 2, 4, 6 и 8. На пример, бројот 424 е прекрасен. Колку прекрасни броеви се поголеми од 20 и се помали од 208?

Решение. Прекрасни броеви поголеми од 20 и помали од 208 се: 22, 24, 26, 28, 40, 42, 44, 46, 48, 60, 62, 64, 66, 68, 80, 82, 84, 86, 88, 200, 202, 204 и 206. Според тоа, има 23 прекрасни броеви поголеми од 20 и помали од 208.

101. Определи го бројот на трицифрените броеви кои имаат исто значење било да се читаат оддесно-налево, било да се читаат одлево-надесно.

Решение. Декадниот запис на бараните броеви е $\overline{aba}$, $a \neq 0$. За цифрата a има 9 можности, и за секоја од овие можности за цифрата b има 10 можности. Според тоа, бараниот број броеви е еднаков на $9 \cdot 10 = 90$.

102. Колку седумцифрени броеви почнуваат со 2019, а колку завршуваат со 2019?

Решение. Седумцифрените броеви кои почнуваат со 2019 се од видот $\overline{2019abc}$. Притоа на местото на a можеме да ја запишеме секоја од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, а истото важи и за b и c . Според тоа, за секоја од цифрите a, b и c имаме по 10 можности, што значи дека имаме $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ седумцифрени броеви кои почнуваат со 2019.

Седумцифрените броеви кои завршуваат со 2019 се од видот $\overline{abc2019}$. На местото на a можеме да ја запишеме секоја од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, а на местата на b и c секоја од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Според тоа, за a имаме 9 можности, а за b и c имаме по 10 можности, па затоа имаме $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ седумцифрени броеви кои завршуваат на 2019.

103. Определи го бројот на парните броеви кои се помали од 10000 и во чиј запис не учествуваат цифрите 0, 1, 3, 4, 6, 7, 8 и 9.

Решение. Бидејќи треба да ги преброиме парните броеви помали од 10000 во чиј запис не учествуваат цифрите 0, 1, 3, 4, 6, 7, 8 и 9, заклучуваме дека треба да ги преброиме парните броеви помали од 10000 кои се запишани само со цифрите 2 и 5. Јасно, едноцифрен таков број е само бројот 2. Понатаму, бидејќи кај сите броеви за цифрата на единиците имаме само една можност, т.е. цифрата 2, а за цифрата на десетките, цифрата на стотките и цифрата на илјадите имаме по 2 можности, т.е. цифрите 2 и 5, заклучуваме дека имаме $2 \cdot 1 = 2$ двоцифрени, $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ трицифрени, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ четирицифрени броеви. Според тоа, имаме $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ броеви со саканото својство.

104. Определи го бројот на трицифрените броеви запишани со различни непарни цифри од кои една од цифрите е 7.

Решение. Бараниот број ќе го определиме како разлика на бројот на сите трицифрени броеви запишани со различни непарни цифри и бројот на сите трицифрени броеви запишани со различни непарни цифри меѓу кои не се содржи цифрата 7. Непарни цифри се 1, 3, 5, 7 и 9, па кога ги запишуваме трицифрените броеви запишани со непарни цифри за првата цифра имаме 5 можности, за втората 4 можности и за третата 3 можности, т.е. имаме $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ вакви броеви. Кога ги запишуваме непарните трицифрени броеви кои не ја содржат цифрата 7 за првата цифра имаме 4 можности, за втората 3 можности и за третата 2 можности, т.е. имаме $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ вакви броеви. Според тоа, бараниот број е $60 - 24 = 36$.

105. На клупа во паркот треба да седнат Ѓорѓи, Ирина, Деница, Петра и Симон. На колку начини тоа може да го направат ако секогаш меѓу две девојчиња мора да седи точно едно момче?

Решение. Имаме 3 девојчиња и 2 момчиња. За да секогаш меѓу две девојчиња седи точно едно момче распоредот на девојчињата и момчињата мора да биде ДМДМД. Понатаму, двете момчиња на двете места може да се распоредат на 2 начина и тоа: ЃС и СЃ, а трите девојчиња на трите места може да се распоредат на 6 начина и тоа: ИДП, ИПД, ДПИ, ДИП, ПИД и ПДИ. Според тоа, децата на саканиор начин може да седнат на $2 \cdot 6 = 12$ начини.

106. Павел има четири различни маици, седум различни пантолони и 3 различни пара патики. На колку различни начини може да се облечи Павел?

Решение. Ако Павел избере една маица, тогаш панталоните може да ги избере на седум различни начини и за секој направен избор на пантолони, патиките може да ги избере на три различни начини, што значи дека за секој од четирите избори на маица останатите два дела може да ги избере на $7 \cdot 3$ начини. Конечно, Павел може да се облече на $4 \cdot 7 \cdot 3 = 84$ различни начина.

107. Фросина има:

- сина и црвена шапка,
- жолта, сина и црвена блуза,
- жолта, сина, црвена и зелена сукња.

Фросина не носи жапка и блуза со иста боја. На колку различни начини таа може да избере шапка, блуза и



сукња за се облече.

Решение. Ако Фросина избере сина шапка, тогаш таа може да избере жолта или црвена блуза и сукња во било која боја, што значи дека во овој случај имаме $2 \cdot 4 = 8$ избори. Слично, ако избере црвена шапка, тогаш може да избере жолта или црвена блуза и сукњата може да ја избере во било која боја, што значи дека во овој случај имаме $2 \cdot 4 = 8$ избори. Според тоа, бараниот број избори е еднаков на $8 + 8 = 16$.

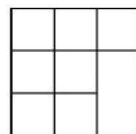
108. На колку начини во натписот СКОПСКИ МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР може да се заокружат три букви така што одлево-надесно ќе се прочита СМТ.

Решение. За буквата С имаме две можности. Понатаму, за буквата М имаме 2 можности, при што ако ја заокружине првата буква М, тогаш за буквата Т имаме 3 можности, а ако ја заокружине втората буква М, тогаш за буквата Т имаме 2 можности. Според тоа, во дадениот натпис за да одлево-надесно се прочита СМТ трите букви може да се заокружат на: $2 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 10$ начини.

109. Во понеделник учениците од V^a одделение треба да имаат два последователни часови математика и по еден час музичко, ликовно и физичко. Часот по физичко не смее да биде прв час. На колку начини може да се направи распоредот на часовите за овој ден?

Решение. Бидејќи часовите по математика се последователни доволно е да ги преброиме можните начини за распоредување на четирите предмети (Зошто?). Бидејќи физичко не смее да биде прв час, за првиот час имаме 3 можности. Потоа, за вториот час имаме 3 можности, т.е. сите предмети без предметот кој е веќе избран, за третиот час имаме 2 можности, т.е. сите предмети освен предметите кои се веќе избрани и за четвртиот час имаме 1 можност. Конечно, распоредот на часовите за овој ден може да се направи на $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ начини.

110. На цртежот десно е прикажан план на парк (линиите се патеки). Определи го бројот на различните најкратки патишта од долниот лев агол до горниот десен агол.



Решение. Почнувајќи од најдолната патека на секоја раскрсница го запишуваме бројот на најкратките патишта до неа. На долната патека ги запишуваме броевите 1, 1, 1 и 1. На патеката над неа ги запишуваме броевите 1, 2 и 3. На патеката над неа броевите 1, 3, 6 и 7. Конечно на најгорната патека ги запишуваме броевите 1, 4, 10

и 17. Да забележиме дека секој број е еднаков на збирот на броевите запишани во соседните раскрсници од кои може да се дојде до раскрсницата во која го запишуваме новиот број.

V.4. БРОЕЊА НА ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

111. На правата p се дадени точките A, B, C, D и E (цртеж десно). Запиши ги сите отсечки определени со овие точки. Колку отсечки запиша?



Решение. На дадениот цртеж се прикажани отсечките:

$AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE$ и DE ,

што значи дека се прикажани вкупно 10 отсечки.

112. Правите a и b се паралелни. На правата a се означени точките A, B, C, D , а на правата b се означени точките E, F . Наброј ги сите прави кои содржат најмалку две од означените шест точки.

Решение. Постојат 10 прави со саканото својство и тоа:

$AE, BE, CE, DE, AF, BF, CF, DF, a$ и b .

113. Нацртај две прави a и b кои се сечат во точка P . На правата a избери три точки и означи ги со A, B и C , а на правата b избери две точки и означи ги со D и E , различни од точката P . Определи го бројот на правите кои содржат точно две од точките A, B, C, D и E .

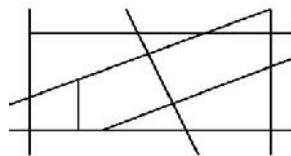
Решение. Имаме 8 прави и тоа: $a, b, AD, AE, BD, BE, CD, CE$ (направи цртеж).

114. Во рамнината се дадени 5 различни точки кои не лежат на една права. Колку прави се определени со овие точки?

Решение. Нека тоа се точките A, B, C, D и E . Ако четири точки лежат на една права на која не припаѓа петтата точка, тогаш имаме $1 + 4 = 5$ прави. Ако имаме две колинеарни тројки, на пример, A, B, C и A, D, E , тогаш имаме $2 + 2 \cdot 2 = 6$ прави. Ако постои само една тројка колинеарни точки, тогаш имаме $1 + 1 + 3 \cdot 2 = 8$ прави. Ако нема тројка колинеарни точки, тогаш имаме $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ прави.

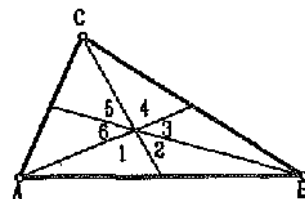
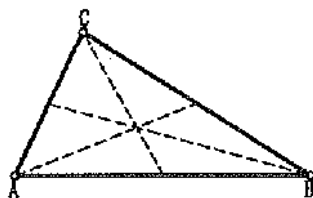
115. Колку прави агли се прикажани на цртежот десно?

Решение. Хоризонталните и вертикалните линии формираат $3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 16$ прави агли, а косите линии формираат $2 \cdot 4 = 8$ прави агли. Според тоа, на дадениот цртеж има $16 + 8 = 24$ прави агли.



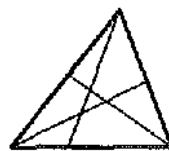
116. Определи ги бројот на отсечките и бројот на триаголниците на цртежот десно.

Решение. Од точката A излегуваат точно $3 \cdot 3 = 9$ отсечки, од точката B излегуваат 6 нови отсечки (не ги сметаме отсечките кои излегуваат од точката A) и од точката C излегуваат уште 3 нови отсечки. Конечно, на цртежот има вкупно $9 + 6 + 3 = 18$ отсечки. Ако малите триаголници ги означиме како на цртежот десно, тогаш сите триаголници се: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 34, 56, 123, 234, 345, 456, 561, 612 и 123456, што значи дека имаме вкупно 16 триаголници.

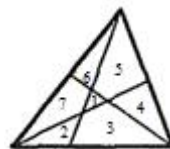


117. Определи го бројот на отсечките кои се прикажани на цртежот десно. Определи го бројот на триаголниците кои се прикажани на цртежот десно.

Решение. На страните на најголемиот триаголник има по 3 отсечки, а додека на останатите три прави има по 6 отсечки. Според тоа, на дадениот цртеж вкупно има $3 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 27$ отсечки.



Големиот триаголник е поделен на седум делови (цртеж десно). Триаголници на цртежот се: 1, 2, 4, 6, 13, 15, 17, 23, 45, 67, 234, 456, 672, 1345, 1327, 1567 и 1234567. Според тоа, на даденио цртеж се содржат 17 триаголници.



118. Колку отсечки и колку триаголници се прикажани на цртежот десно?

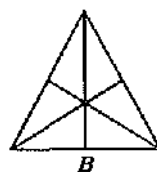
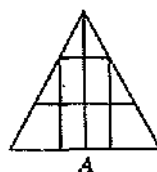
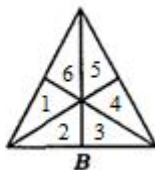
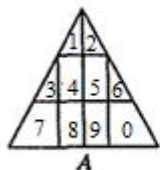
Решение. Петкраката ѕвезда има пет страни, на секоја од кои има $3 + 2 + 1 = 6$. Според тоа, на цртежот има вкупно $5 \cdot 6 = 30$ отсечки. На цртежот има 5 единелни триаголници и 5



триаголници составени од два единечни триаголници и централниот петаголник. Според тоа, вкупниот број триаголници е $5 + 5 = 10$.

119. Која од фигурите прикажани на цртежот десно содржи повеќе триаголници?

Решение. При ознаки како на цртежот лево триаголници прикажани на фигурата *A* се:

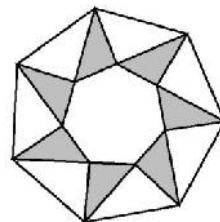


1, 2, 3, 6, 12, 37, 60, 134, 256, 13478, 25690, 123456, 1234567890, а на фигурата *B* се:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 23, 45, 61, 123, 234, 345, 456, 561, 612, 123456.

Според тоа, фигурата *A* содржи 13, а фигурата *B* содржи 16 триаголници, т.е. повеќе триаголници содржи фигурата *B*.

120. Определи го бројот на триаголниците кои се содржат во фигурата прикажана на цртежот десно.

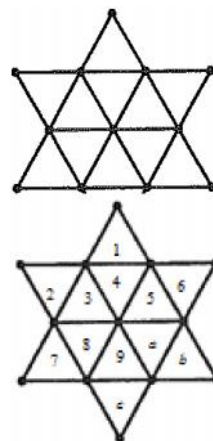
Решение. Дадена фигура содржи 7 бели, 7 сиви и 7 триаголници составени од по еден бел и еден сив триаголник. Според тоа, вкупниот број триаголници содржани во фигурата е $7 + 7 + 7 = 21$.



121. Определи ги бројот на отсечките и бројот на триаголниците прикажани на цртежот десно.

Решение. Најкратките отсечки (отсечки со должина 1) се 24, средните отсечки (отсечки со должина 2) се 15 и најдолгите отсечки (отсечки со должина 3) се 6. Според тоа, на цртежот се прикажани вкупно $24 + 15 + 6 = 45$ отсечки.

При ознаки како на цртежот десно триаголници се: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *a*, *b*, *c*, 1345, 2348, 3789, 456*a*, 59*ab*, 89*ac*, 1345789*ab*, 2345689*ac*. Според тоа, на дадениот цртеж се прикажани 20 триаголници.



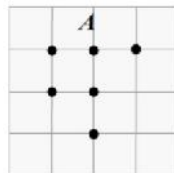
122. Колку триаголници можеме да нацртаме чии темиња се шесте точки прикажани на цртежот десно?



Решение. Едно теме на триаголникот треба да е само во ред и за ова теме имаме 6 избора. Останатите две темиња на триаголникот треба да се изберат меѓу точките на другиот ред и за нив имаме 3 избора. Според тоа, можеме да нацртаме $3 \cdot 6 = 18$ триаголници чии темиња се во дадените точки.

123. Во квадратна мрежа се дадени 6 точки (цртеж десно).

Колку триаголници постојат такви што едното теме е точката A , а другите две темиња се некои од дадените точки?

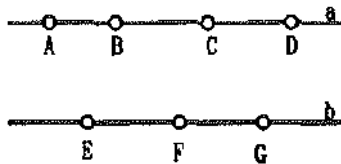


Решение. Точката A со двете точки кои се наоѓаат на иста хоризонтална линија формира две отсечки.

Секоја од овие отсечки со трите точки кои се наоѓаат под нив формираат по три триаголници и тоа се вкупно 6 триаголници. Понатаму, точката A е теме уште на два триаголници чии други две темиња се меѓу точките под точката A . Според тоа, постојат $6 + 2 = 8$ триаголници кои го задоволуваат условот на задачата.

124. Дадени се две паралелни прави a и b . На правата a се дадени точките A, B, C, D , а на правата b се дадени точките E, F, G . Колку конвексни четириаголници се определени со овие точки?

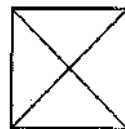
Решение. Секоја отсечка на правата a со секоја отсечка на правата b определува по еден конвексен четириаголник. На правата a се дадени точките A, B, C, D и тие определуваат $4 \cdot 3 : 2 = 6$



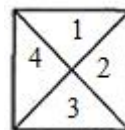
отсечки, а на правата b се дадени точките E, F, G и тие определуваат $3 \cdot 2 : 2 = 3$ отсечки. Според тоа, со дадените точки се определени $6 \cdot 3 = 18$ конвексни четириаголници.

125. Определи ги бројот на отсечките и бројот на триаголниците прикажани на цртежот десно.

Решение. На страните на квадратот има 4 отсечки и на секоја од двете дијагонали на квадратот има по 3 отсечки. Според тоа, на дадениот цртеж има $4 + 2 \cdot 3 = 10$ отсечки.

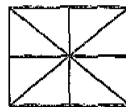


При ознаки како на цртежот десно триаголниците се: 1, 2, 3, 4, 12, 23, 34 и 41. Според тоа, на дадениот цртеж се прикажани 8 триаголници.



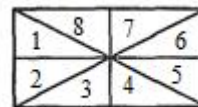
126. Нацртај квадрат со должина на страна 3 cm и сите четири негови оски на симетрија. Колку отсечки има на цртежот?

Решение. Бараниот квадрат и неговите оски на симетрија се прикажани на цртежот десно. Страните и оските на симетрија лежат на 8 прави и на секој од нив има по 3 отсечки. Според тоа, вкупниот број отсечки прикажани на цртежот е еднаков на $8 \cdot 3 = 24$.



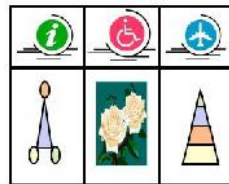
127. Колку триаголници се прикажани на цртежот десно?

Решение. При ознаки како на цртежот десно лево добиваме дека на дадениот цртеж се прикажани триаголниците: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 34, 56, 78, 1234, 3456, 5678 и 7812. Според тоа, на дадениот цртеж се прикажани вкупно 16 триаголници.



128. Определи го бројот на правоаголниците кои се содржат на цртежот десно.

Решение. Имаме табела која е составена од 6 единечни правоаголници, при што во еден од нив имаме 1 правоаголник. Самата табела содржи 6 единечни правоаголници, 7 правоаголници составени од по два единечни правоаголници, 2 правоаголници составени од по три единечни правоаголници, 2 правоаголници составени од по четири единечни правоаголници и 1 правоаголник составен од шест единечни правоаголници. Значи, вкупниот број правоаголници е еднаков на



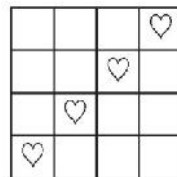
$$1 + 6 + 7 + 2 + 2 + 1 = 19.$$

129. Во колку правоаголници на цртежот десно се содржи ѕвездата?

Решение. Ѕвездата се содржи во 1 правоаголник составен од еден мал правоаголник, во 4 правоаголници составени од два мали правоаголници, во 2 правоаголници составени од три мали правоаголници, во 2 правоаголници составени од четири мали правоаголници и во 1 правоаголник составен од шест мали правоаголници. Конечно, ѕвездата се содржи во $1 + 4 + 2 + 2 + 1 = 10$ правоаголници.



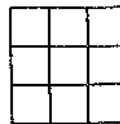
130. Фигурата на цртежот десно е поделена на квадрати и во четири од нив е нацртано срце. Определи го бројот на правоаголниците кои содржат точно две срца.



Решение. Бидејќи срцата се нацртани на дијагоналата, ако правоаголник содржи две срца, тогаш тие мораат да имаат заедничко теме. За срцата во првата и втората колона имаме 5 правоаголници кои содржат по две срца кои се со димензии 2×2 , 2×3 , 2×4 , 3×2 , 4×2 . Исто толку правоаголници има и за срцата кои се во третата и четвртата колона. За срцата кои се во втората и третата колона имаме 9 правоаголници и тоа: 1 со димензии 2×2 , 2 со димензии 2×3 , 1 со димензии 2×4 , 2 со димензии 3×2 , 1 со димензии 4×2 и 2 со димензии 3×3 . Според тоа, бараниот број правоаголници е еднаков на $5 + 5 + 9 = 19$.

131. Квадрат со должина на страна 3 cm е поделен на квадратни сантиметри. Нацртај го соодветниот цртеж и преброј колку отсечки и колку квадрати содржи добиената фигура?

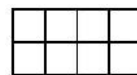
Решение. Фигурата која се добива е прикажана на цртежот десно. Фигурата содржи 8 отсечки со должина 3 cm .



На секоја до нив има по 4 точки, кои определуваат по 6 отсечки, што значи дека бројот на отсечките е $6 \cdot 8 = 48$.

Квадрати со плоштина $1, 4$ и 9 cm^2 има 9, 4 и 1, соодветно, што значи дека бројот на квадратите е еднаков на $9 + 4 + 1 = 14$.

132. Определи го бројот на отсечките чии крајни точки се во темињата на квадратчињата на цртежот десно.

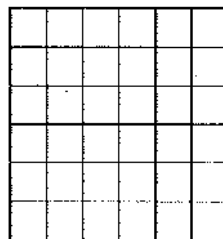


Решение. На цртежот имаме пет вертикални линии и секоја од нив содржи $1 + 2 = 3$ отсечки, што значи вкупно $5 \cdot 3 = 15$ вертикални отсечки. Понатаму, на цртежот имаме 3 хоризонтални линии и секоја од нив содржи $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ отсечки, што значи вкупно $10 \cdot 3 = 30$ хоризонтални отсечки. Конечно, на цртежот вкупно се содржани $15 + 30 = 45$ отсечки.

133. Квадрат со должина на страна 6 cm е поделен на еднакви квадратчиња со должина на страна 1 cm . Колку отсечки и колку квадрати се прикажани на добиената фигура.

Решение. При поделбата се добива фигурата прикажана на цртежот десно. Да земеме произволна права од добиената фигура. На неа има 7

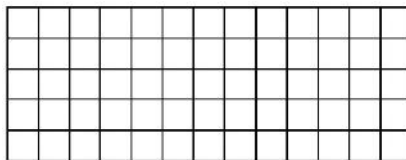
точки, па затоа бројот на отсечките е еднаков на $(7 \cdot 6) : 2 = 21$. Имаме 7 хоризонтални и 7 вертикални прави, што значи дека фигурата содржи $14 \cdot 21 = 294$ отсечки. Од воочените отсечки 6 се со должина 1 cm , 5 се со должина 2 cm , 4 се со должина 3 cm , 3 се со должина 4 cm , 2 се со должина 5 cm и 1 е со должина 6 cm . Затоа вкупниот број квадрати е еднаков на



$$6 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 91.$$

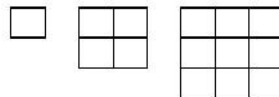
134. Правоаголник со димензии 5 cm и

13 cm е поделен на квадратчиња со должина на страна 1 cm . За едно квадратче ќе велиме дека е *парно* ако има заедничка страна со парен број други квадратчиња, а дека е *непарно* ако има заедничка страна со непарен број други квадратчиња. За колку парните квадратчиња се повеќе од непарните?



Решение. Непарни квадратчиња се наоѓаат само на страните на правоаголникот и тоа се сите квадратчиња освен аголните. На двете страни со должина 5 cm имаме $3 + 3 = 6$, а на двете страни со должини 13 cm имаме $11 + 11 = 22$ непарни квадратчиња. Според тоа, бројот на непарните квадратчиња е еднаков на $22 + 6 = 28$, а бројот на парните квадратчиња е еднаков на $5 \cdot 13 - 28 = 65 - 28 = 37$. Значи, бројот на парните квадратчиња е за $37 - 28 = 9$ поголем од бројот на непарните квадратчиња.

135. За да направиме 1 квадрат со должина на страна 1 кибритче ни се потребни 4 кибритчиња. Понатаму, за да направиме квадрат со



должина на страна 2 кибритчиња, кој е составен од 4 единечни квадрати, ни се потребни 12 кибритчиња. Слично за квадрат со должина на страна 3 кибритчиња, поделен на 9 единечни квадрати, ни се потребни 24 кибритчиња. Колку кибритчиња ни се потребни за да направиме квадрат со должина на страна 10 кибритчиња?

Решение. *Прв начин.* Забележуваме дека за да направи квадрат со должина на страна 2 кибритчиња, на квадратот со должина на страна 1

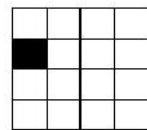
кибритче му додадовме уште $4 \cdot 2$ кибритчиња. За да добиеме квадрат со должина на страна 3 кибритчиња на квадратот со должина на страна му додадовме $4 \cdot 3$ нови кибритчиња. Продолжувајќи ја постапката гледаме дека за квадрат со должина на страна 4 кибритчиња треба да додадеме $4 \cdot 4$ кибритчиња, за квадрат со должина на страна 5 треба да додадеме $4 \cdot 5$ кибритчиња итн. Конечно за да направиме квадрат со должина на страна 10 кибритчиња ни се потребни:

$$4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \dots + 4 \cdot 9 + 4 \cdot 10 = 4 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 10) = 4 \cdot 55 = 220$$

кибритчиња.

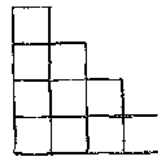
Втор начин. Квадрат со должина на страна 10 кибритчиња, кој е поделен на единечни квадратчиња, е составен од 11 хоризонтални отсечки и 11 вертикални отсечки, секој од кои е направена од по 10 кибритчиња. Според тоа, за составување на квадрат со должина на страна 10 кибритчиња, кој е поделен на единечни квадратчиња, ни се потребни $10 \cdot (11 + 11) = 10 \cdot 22 = 220$ кибритчиња.

136. Определи го бројот на квадратите на фигурата десно кои може да се состават од белите квадратчиња, т.е. не го содржат црното квадратче и се поголеми од него?



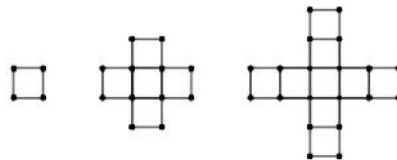
Решение. Имаме 7 квадрати со димензија 2×2 кои не го содржат црното квадратче и 2 квадрати со димензија 3×3 кои не го содржат црното квадратче. Според тоа, имаме $7 + 2 = 9$ квадрати кои ги задоволуваат условите на задачата.

137. Определи го бројот на квадратите и бројот на правоаголниците кои не се квадрати, прикажани на фигурата дадена на цртежот десно.



Решение. Квадрати со димензија 1×1 има 10, а со димензија 2×2 има 3. Според тоа, фигурата содржи вкупно 13 квадрати. Бројот на правоаголниците со димензија 1×2 е 12, со димензија 1×3 е 6, со димензија 1×4 е 2 и со димензија 2×3 е 2. Значи, вкупниот број правоаголници кои не се квадрати е 22.

138. Иван последователно направил три фигури од кибритчиња кои се прикажани на цртежот десно.



а) Колку квадратчиња ќе има 2019-тата фигура.

б) Колку чкорчиња се потребни за да се направи 2019-тата фигура.

в) Определи го периметарот на 2019-тата фигура, ако должината на едно чкорче е еднаква на 5 *cm*.

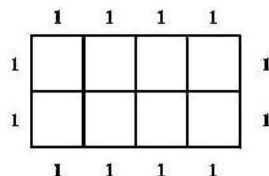
Решение. а) Првата фигура има 1 квадраче. Секоја следна фигура се добива со додавање на 4 нови квадратчиња. Според тоа 2019-тата фигура има $1 + 4 \cdot 2018 = 8073$ квадратчиња.

б) За првата фигура се потребни 4 чкорчиња. За секое следно квадратче на секоја следна фигура се потребни по 3 чкорчиња. Според тоа, за 2019-тата фигура се потребни $1 \cdot 4 + 8072 \cdot 3 = 24220$ чкорчиња.

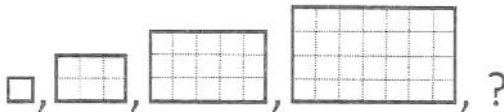
в) Периметарот на првата фигура е еднаков на периметарот на квадрат со страна 1 чкорче. Периметарот на втората фигура е еднаков на периметарот на квадрат со страна $2 \cdot 2 - 1 = 3$ чкорчиња. Периметарот на третата фигура е еднаков на периметарот на квадрат со страна $3 \cdot 2 - 1 = 5$ чкорчиња. Продолжувајќи на ист начин добиваме дека периметарот на 2019-тата фигура е еднаков на периметарот на квадрат со страна $2 \cdot 2019 - 1 = 4037$ чкорчиња. Значи, периметарот на 2019-тата фигура има $4 \cdot 4037 = 16148$ чкорчиња и тој е еднаков на $16148 \cdot 5 = 80740 \text{ cm} = 8074 \text{ dm}$.

139. Определи го бројот на правоаголниците кои се содржани на фигурата дадена на цртежот десно и чиј периметар е еднаков на 6.

Решение. Нека ширината и должината на правоаголник со периметар 6 се еднакви на a и b соодветно. Тогаш $2a + 2b = 6$, па затоа $a + b = 3$. Оттука следува дека $a = 1$ и $b = 2$, што значи дека треба да ги преброиме правоаголниците кои се составени од по две квадратчиња. Вакви правоаголници имаме по 1 во секоја од четирите колони и по 3 во секој од двата реда. Според тоа, бараниот број правоаголници е еднаков на $4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 10$.



140. На цртежите десно се прикажани четири правоаголници кои според определено правило се нацртани



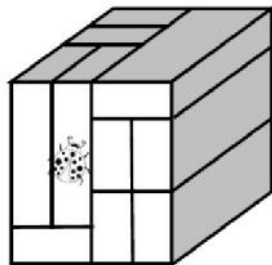
еден по друг. Од колку квадратчиња ќе се состои петтиот правоаголник кој треба да се нацрта според истото правило?

Решение. Секој следен правоаголник има по еден ред и по две колони повеќе квадратчиња. Според тоа, петтиот правоаголник ќе има 5 реда

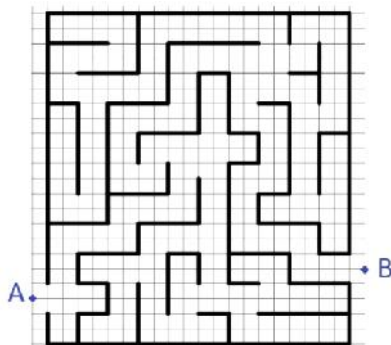
и 9 колони, што значи дека тој вкупно ќе содржи $5 \cdot 9 = 45$ квадратчиња.

141. На цртежот десно е прикажано тело составено од тули. До колку тули се допира тулата на чија предна страна се наоѓа бубамарата?

Решение. Тулата на чија предна страна се наоѓа бубамарата се допира: 1 тула под неа, 1 тула зад неа, 1 тула лево од неа и 3 тули десно од неа. Според тоа, оваа тула се допира да $1+1+1+3=6$ тули.



142. а) Во лавиринтот прикажан на цртежот десно определи го најкраткиот пат од A до B и пресметај ја неговата должина. Движењето во лавиринтот е по сивите линии, а должината на страната на малите квадратчиња во мрежата е 3 cm .



- б) Определи го бројот на левите свртувања по најкраткиот пат.
в) Определи го бројот на десните свртувања по најкраткиот пат.

Одговор. а) Лесно се пребројува дека најкраткиот пат содржи 68 должини на страни на квадратчињата од кои е составена мрежата. Според тоа, должината на најкраткиот пат е еднаква на $3 \cdot 68 = 204\text{ cm}$.

- б) Има 10 леви свртувања.
в) Има 10 десни свртувања.

V.5. РАСПОРЕДУВАЊА

143. Броевите 1, 2, 3, ..., 32 распореди ги во четири групи од по 8 броеви така што зборовите на броевите во секоја група ќе бидат еднакви.

Решение. Прво броевите ќе ги поделиме на $32 : 2 = 16$ групи од по 2 броја така што во секоја група збирот на броевите е еднаков. Имаме,
(1,32), (2,31), (3,30), (4,29), (5,28), (6,27), (7,26), (8,25), (9,24),
(10,23), (11,22), (12,21), (13,20), (14,19), (15,18), (16,17).

Сега доволно е да формираме четири групи од по 4 парови, што можеме да го направиме со произволен избор на паровите. Едно решение на задачата е:

$$\{1, 2, 3, 4, 29, 30, 31, 32\}, \{5, 6, 7, 8, 25, 26, 27, 28\}, \\ \{9, 10, 11, 12, 21, 22, 23, 24\}, \{13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

144. Буквите на зборот КЛАС распореди ги во празните квадратчиња, по една буква во секое квадратче, така што во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала да нема две исти букви. Која буква е запишана во квадратчето во кое е ѕвездата?

К	Л	А	С
С	А		
			*

Решение. Во втората колона се буквите Л и А, а на дијагоналата е буквата С, па затоа во третото квадратче на втората колона мора да е буквата К. Понатаму, во второто квадратче на третата колона мора да е буквата Л, па затоа во четвртото квадратче на првата

К	Л	А	С
С	А	Л	
Л	К		
А			

К	Л	А	С
С	А	Л	К
Л	К	С	А
А	С	К	Л

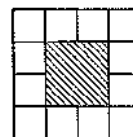
колона мора да е буквата А. Сега, во третото квадратче на првата колона мора да е нуквата Л (цртеж десно). Останатите квадратчиња лесно се пополнуваат. Пополнетата табела е прикажана на цртежот лево, од каде може да се види дека во квадратчето во кое е ѕвездата се наоѓа буквата А.

145. Дали може во полињата на квадратот прикажан на цртежот десно да се распоредат броевите 1, 2, 3 и 4 така што во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала да се запишани различни броеви?

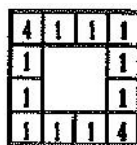
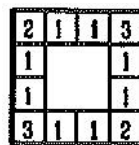
Решение. Броевите 1, 2, 3 и 4 може да се распоредат во квадратите на дадената фигура така што ќе биде исполнет условот на задачата. Едно од можните распоредувања е прикажано на цртежот десно.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

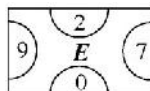
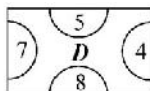
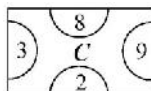
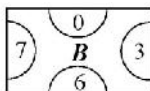
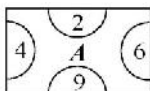
146. Тврдината на цртежот десно е заштитена со 12 бункери. Во овие бункери треба да се распоредат 18 војници така што секоја од четирите страни на тврдината ја бранат по 7 војници и во секој бункер има најмалку по 1 војник. Најди барем два распореда на војниците во бункерите.



Решение. Прво во секој бункер распоредуваме по еден војник, со што се распоредени 12 војници. Остануваат $18 - 12 = 6$ војници, кои треба да ги распоредиме така што на секоја страна ќе има по $7 - 4 = 3$ војници. Две решенија се прикажани на цртежите десно.



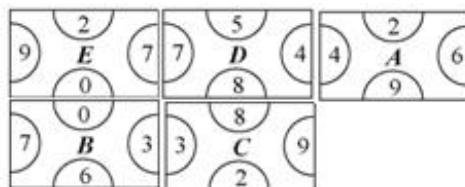
147. Дадени се пет исти правоаголници, на чии страни се запишани природни броеви (види цртеж).



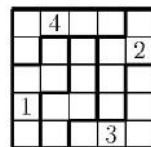
Петте правоаголници треба да се постават, без да се вртат или превртуваат, на означените места од I до V, така што броевите запишани на заедничките страни им се еднакви. Кој правоаголник треба да се постави на местото I?

I	II	III
IV	V	

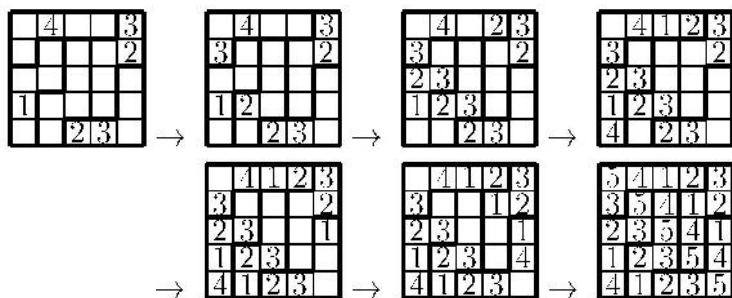
Решение. Според условот на задачата единствениот начин правоаголниците да бидат поставени на местата I до V е прикажан на цртежот десно. Според тоа, на местото I треба да е поставен правоаголникот E.



148. Квадрат е поделен на 25 единечни квадратчиња. Во секое единечно квадратче треба да се запише еден од броевите 1, 2, 3, 4 или 5 така што во секој ред, секоја колона и во секоја фигура ограничена со задебелени линии е запишан секој од петте броеви. Некои броеви се веќе запишани. Определи го збирот на броевите во четирите аголни квадратчиња на квадратот.



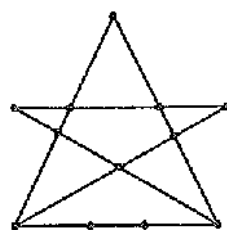
Решение. Последователното запишување на броевите 1, 2, 3, 4 и 5 така што се исполнети условите на задачата е прикажано на долните цртежи.



Според тоа, збирот на броевите запишани во четирите аголни квадратчиња е еднаков на $5 + 3 + 5 + 4 = 17$.

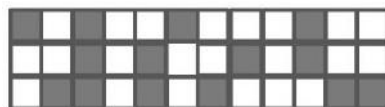
149. Распреди 12 точки на 6 прави така што на секоја права има по 4 точки.

Решение. Задачата има повеќе решенија. Еден од можните распореди е даден на цртежот десно.



V.6. БОЕЊА, ПОКРИВАЊА И РАСЕКУВАЊА

150. Разгледај го цртежот десно. Уште колку квадратчиња треба да се обојат така што белите квадратчиња ќе бидат половина од сивите квадратчиња?



Решение. На цртежот вкупно има $3 \cdot 12 = 36$ квадратчиња. За да белите квадратчиња се половина од сивите потребно е да има 12 бели и 24 сиви квадратчиња. Бели квадратчиња се 22, што значи дека треба да се обојат уште $22 - 12 = 10$ квадратчиња.

151. На долниот цртеж е прикажана низа од пет фигури кои според определено правило се формирани од црни и бели квадратчиња. Колку црни квадратчиња содржи единаесеттата фигура во оваа низа?



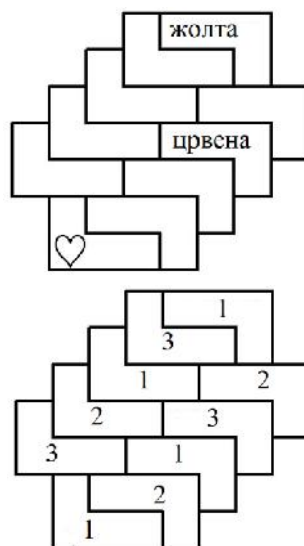
Решение. Втората и третата содржат по 3 црни квадратчиња. Четвртата и петтата фигура содржат по $3 + 2 \cdot 3 + 1 = 10$ црни квадратчиња.

Шестата и седмата фигура содржат по $10 + 2 \cdot 5 + 1 = 21$ црно квадратче. Осмата и деветтата фигура содржат по $21 + 2 \cdot 7 + 1 = 36$ црни квадратчиња. Конечно, десеттата и единаесеттата фигура содржат по $36 + 2 \cdot 9 + 1 = 55$ црни квадратчиња.

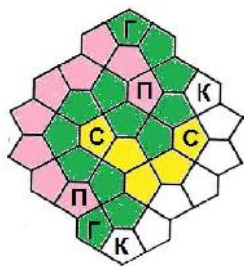
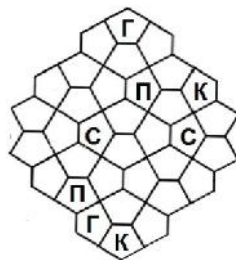
152. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од 10 еднакви фигури, секоја од кои е обоена во една боја: црвена, сина или жолта. Фигурите обоени во иста боја не се допираат. Во две фигури е запишана нивната боја. Во која боја е обоена фигурата во која е срцето?

Решение. Жолтата боја да ја означиме со 1, сината со 2 и црвената со 3.

Сега, бидејќи фигурите кои се допираат не се обоени во иста боја, го имаме боењето на големата фигура кое е прикажано на цртежот десно. Според тоа, фигурата во која е срцето е обоена во жолта боја.

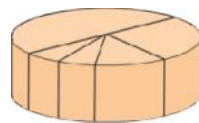


153. Во Хогворт секој од факултетите (Грифиндор, Слитерин, Когтевран и Пуфендуј) има своја библиотека и своја спортска сала. Според правилата, за секој факултет постои коридор меѓу библиотеката и салата, покриен со плочки во боја на факултетот. Коридорите меѓу себе не се сечат. Претстави ги овие четири коридори на мапата прикажана на цртежот десно. (Од соба во соба може да се преминува само ако собите имаат заеднички ѕид.)



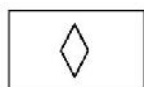
Решение. Решението на задачата е прикажано на цртежот лево. При наоѓање на истото прво е нацртана патеката КК, за која е јасно дека мора да оди по крајните десни соби. Потоа се нацртани патеките ГГ и ПП, при лесно се гледа дека патеката ПП мора цело време да се наоѓа лево од патеката ГГ. Конечно, патеката СС минува низ преостанатите соби.

154. Маја за роденден направила торта и ја исекла прво на половина, па едната половина ја исекла на половина и продолжила да сече така што добила парчиња како на цртежот десно. Најмалото пресечено парче тежи 100 g . Колку тежи целата торта?

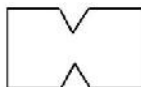


Решение. Според цртежот Маја прво тортата ја поделила на половина, потоа едната половина ја поделила на две четвртти, па едната четвртина ја поделила на две осмини и на крајот едната осмина ја поделила на две шеснаесеттини. Според тоа, една шеснаесеттина од тортата тежи 100 g , па затоа целата торта тежи $16 \cdot 100 = 1600\text{ g}$.

155. Пабло превиткал лист хартија два пати, како што е прикажано на цртежот десно, и направил едно сечење по права линија. Потоа го одвиткал листот. Кои од долните фигури не може да ги добие Пабло?



А



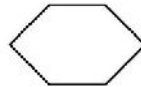
Б



В



Г

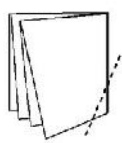


Д

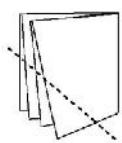
Решение. Од прикажаните фигури Пабло не можел да ја добие само фигурата В), за која се потребни две сечења. На долните цртежи се прикажани сечењата со кои се добиваат соодветните фигури.



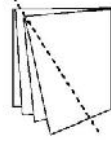
А



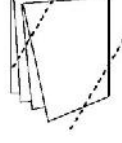
Б



Г

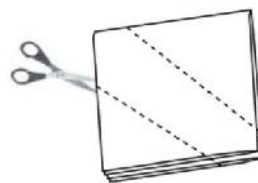


Д



В

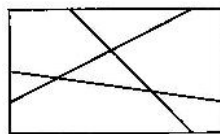
156. Лист хартија е превиткан двапати, како што е прикажано на цртежот десно. Потоа со ножица е пресечен по двете испрекинати линии. На колку делови е поделен листот?



Решение. Со едното сечење листот го делиме на два дела, а со другото сечење од едниот дел одделуваме 4 дела, т.е. овој дел го делиме на 5 дела. Според тоа, со сечењата по испрекинатите линии листот е поделен на 6 делови.

157. Определи го најголемиот број делови на кои може да се подели лист хартија со помош на три прави.

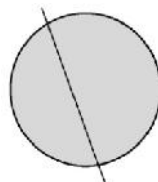
Решение. На цртежот десно е покажано како со помош на трите прави листот е поделен на 7 делови. Прво едната права го дели листот на 2 дела. Потоа со втората права, која не е паралелна на првата права, секој од двата дела го делиме на по два дела, па листот е поделен на 4 дела. Сега со третата права можеме најмногу три од четирите делови да поделиме на по 2 дела, па затоа најголемиот број делови на кои може да се подели листот со помош на три прави е $1 + 3 \cdot 2 = 7$.



158. Определи ги најмалиот и најголемиот број прави кои треба да се повлечат во рамнината така што таа ќе биде поделена на 7 области.

Решение. Најмалиот број прави кои рамнината ја делат на 7 делови е 3 прави кои по парови се сечат, а најголемиот број прави е 6 прави кои се паралелни меѓу себе.

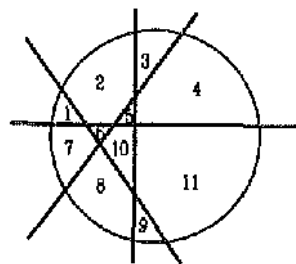
159. Круг може со помош на една права да се подели на два дела. Определи го е најмалиот број прави кои дополнително треба да се повлечат за да кругот се подели на 11 делови.



Решение. Ако повлечеме права која првата права ја сече во внатрешноста на кругот, тогаш кругот е поделен на 4 дела. Понатаму, ако повлечеме права која во внатрешноста на кругот веќе двете повлечени прави ги сече во различни точки, тогаш кругот е поделен на 7 дела. Конечно, ако повлечеме права која во внатрешноста на кругот веќе трите повлечени прави ги сече во различни точки, тогаш кругот е поделен на 11 дела (направи цртеж). Според тоа, треба да повлечеме уште 3 прави.

160. Даден е круг. Нацртај 4 прави кои кругот го делат на најголем можен број делови.

Решение. Како и да јацртаме првата права го дели кругот на 2 дела, а потоа втората права можеме да ја нацртаме така што кругот е поделен на 4 дела (правите се сечат). Третата права може да дели најмногу 3 од добиените делови, а потоа со четвртата права можеме да поделиме најмногу 4 од добиените делови (Зошто?). На овој начин со помош на четири прави кругот може да се подели најмногу на $2 + 2 + 3 + 4 = 11$ делови (цртеж десно).



161. Лук Скајвокер го нашол волшебниот знак на императорот Палпатин, направен од златни прачки (цртеж десно). За да ја изгуби моќта императорот Палпати Скајвокер треба со ласерскиот меч да го подели знакот на шест дела. Но, енергијата која останала во мечот била доволна само за три сечења. Како Лук може со три сечења да го расече знакот на шест дела?



Решение. Едно од можните решенија на задачата е прикажано на цртежот десно.

Обиди се само со три сечења знакот да го поделиш на седум делови.



ЛИТЕРАТУРА

1. Andrić, V.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja, DMS, Beograd, 1991
2. Andrić, V.; Ilić, V.; Lazarević, B.; Tomić, I.: Primpremni zadaci za matematička takmičenja za učenike osnovnih škola, DMS, Beograd, 1988
3. Ilić, N. V.: Odabrani zadaci sa matematičkih takmičenja 5. i 6. razred, DMS, Beograd, 1991
4. Stojanović, V.: Vodić za šampione (pripreme takmičenja za IV, V i VI razred), Matematiskop, Beograd, 1999
5. Андрић, В.: Математика X (приручник за припремање за такмичење ученика основних школа од IV до VIII разред), Круг, Београд, 1996
6. Аневска, К., Гоговска, В. Пресметување плоштини со броење, Нумерус, Скопје, 2015
7. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 1, Математилка искра 1, Скопје, 2020
8. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 2, Математилка искра 2, Скопје, 2020
9. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 3, Математилка искра 3, Скопје, 2020
10. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 4, Математилка искра 4, Скопје, 2020
11. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 5, Математилка искра 5, Скопје, 2020
12. Главче, М., Малчески, Р.: Движење по патеки и лавиринти, Нумерус, Скопје, 2015
13. Главче, М.: Забавни кибритчиња, Нумерус, Скопје, 2014
14. Главче, М.: Пет квадрати, а многу задачи, Нумерус, Скопје, 2016
15. Главче, М.: Пополнуваме тоа што недостасува, Нумерус, Скопје, 2014
16. Главче, М.: Пресметуваме зборови, Нумерус, Скопје, 2016
17. Главче, М.: Споредуваме и пресметуваме, Математичка искра, Скопје, 2020
18. Главче, М.: Цртаме без да го подигнеме моливот, Нумерус, Скопје, 2018

19. Главче, М.: Движење во лавиринти, Математичка искра 3, Скопје, 2020
20. Главче, М.: Прошетки по лавиринти, Математичка искра 5, Скопје, 2020
21. Златилов, В.; Топова, Т.; Цветкова, И.; Пендалиева, В.: Математическа читанка (4 клас), Труд & прозорец, София, 2000
22. Косев, К.: Сборник от задачи по математика за изјавени ученици в 4 клас, Модул, София, 1993
23. Косев, К.: Сборник от задачи по математика за изјавени ученици в 5 клас, Модул, София, 1994
24. Лазаревић, Б.: Припремни задаци за математичка такмичења за ученике IV разреда основне школе, ДМС, Београд, 1990
25. Малчески, Р., Главче, М.: Занимливи броења, Нумерус, Скопје, 2019
26. Малчески, Р., Главче, М.: Решаваме бројни ребуси, Нумерус, Скопје, 2017
27. Малчески, Р.: Да размислуваме со „здрав разум“, Математичка искра 2, Скопје, 2020
28. Малчески, Р.: Нестандардни мерки за должина, Математичка искра 3, Скопје, 2020
29. Малчески, Р.: Право, лево и десно, Математичка искра 2, Скопје, 2020
30. Малчески, Р.: Редослед на случување на настани, Математичка искра 1, Скопје, 2020
31. Малчески, Р.: Решаваме задачи со броење коцки, Нумерус, Скопје, 2016
32. Малчески, Р.: Решавање задачи со Венови дијаграми, Нумерус, Скопје, 2003
33. Малчески, Р.: Редици од броеви, Математичка искра 4, Скопје, 2020
34. Малчески, Р.: Црвенкапа и загатките на волкот, Математичка искра 1, Скопје, 2020
35. Малчески, Р.: Малчку поинакви пресметувања, Математичка искра 5, Скопје, 2020
36. Малчески, С.: Броиме коцки, Математичка искра 1, Скопје, 2020
37. Малчески, С.: Дополнуваме тоа што недостасува, Математичка искра 2, Скопје, 2020
38. Малчески, С.: Математика во правоаголна мрежа, Математилка искра 3, Скопје, 2020
39. Малчески, С., Главче, М.: Броиме патишта, Математичка искра 4, Скопје, 2020
40. Малчески, С.: Времето е важно, Математичка искра 5, Скопје, 2020

41. Раковска, Д.; Тонов, И. и др.: Математически състезания 4-7 клас, Регалия 6, София, 1993
42. Раковска, Д.; Тонов, И. и др.: Математически състезания 4-7 клас, Втора част, Регалия 6, София, 1995
43. Тюфекчиев, И.; Лесов, Х.: Задачи за извънкласна работа по математика в VI и V клас, СМБ, София, 1985
44. Христова, М.; Витанов, Т.; Миланова, Д.; Лозанов, Ч.: Клуб математика за всеки (5. клас), Анубис, София, 1998