Зоран Штерјов

ТРИАГОЛНИЦИ КАЈ КОИ ШТО СТРАНИТЕ ФОРМИРААТ АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА

Нека ABC е триаголник чии страни a,b,c образуваат аритметичка прогресија (со разлика $d>0$) и да ги означиме со $a, a+d, a+2d$, соодветно. Ако $d=0$, тогаш аABC е рамностран и него ќе го нарекуваме **тривијален**, па овој случај натаму нема да го разгледуваме. За страните на еден триаголник важи неравенстваото $a+b>c$, па $a+a+d>a+2d$, а оттука $a>d$. Значи, $0<d<a$. Триаголникот аABC чии страни образуваат аритметичка прогресија ќе го означуваме со ABC-ап.

Видови ABC-ап триаголници. Нека должината на страната AB во ABC-ап е поголема од должините на останатите страни. Тоа значи дека γ - аголот кај темето C е поголем од останатите два агла. Од косинусната теорема имаме

$$\cos\gamma=\frac{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-\overline{AB}^2}{2\overline{AC}\cdot\overline{BC}}=\frac{a^2+(a+d)^2-(a+2d)^2}{2a(a+d)}=\frac{a-3d}{2a}$$

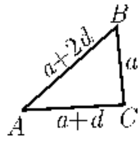
1. а) Ако $d=\frac{a}{3}$, тогаШ триаголникот ABC-ап е правоаголен (Зошто?).

б) Ако триаголникот ABC-ап е правоаголен тогаШ $d=\frac{a}{3}$.

Доказ. Од Питагоровата теорема имаме дека $a^2+(a+d)^2=(a+2d)^2$, т.е. $a^2-3d^2-2ad=0$. Ставајќи $2ad=3ad-ad$, добиваме $(a-3d)(a+d)=0$. Бидејќи $a,d>0$ добиваме $a+d\neq 0$. Значи, $a-3d=0$, т.е. $d=\frac{a}{3}$.

Еден триаголник ABC-ап е правоаголен ако и само ако $d=\frac{a}{3}$.

2. а) Ако $0<d<\frac{a}{3}$, тогаш триаголникот ABC-ап е остроаголен.



Доказ. Од $0<d<\frac{a}{3}$ добиваме $0<3d<a$, т.е. $-a<-3d<0$, односно $0<a-3d<a$. Бидејки $2a>0$ добиваме $\frac{0}{2a}<\frac{a-3d}{2a}<\frac{a}{2a}$, т.е. $0<\cos\gamma<\frac{1}{2}$. Оттука $\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$, Што значи дека најголемиот агол во триаголникот ABC-ап е остар, па ABC-ап е остроаголен триаголник.

б) Обратно, ако триаголникот ABC-ап е остроаголен,тогаш $0<d<\frac{a}{3}$.

Доказ. Нека ABC-ап е остроаголен триаголник. Тогаш $0<\cos\gamma<1$,

$$0<\frac{a-3d}{2a}<1,\ 0<a\text{-}3d<2a,\ \text{-}a<\text{-}3d<a,$$

и бидејќи $3d>0$, следува $0<3d<a$, т.е. $0<d<\frac{a}{3}$.

Триаголникот ABC-ап е остроаголен ако и само ако $0<d<\frac{a}{3}$.

3. а) Ако $\frac{a}{3}<d<a$, тогаш триаголникот ABC-ап е тапоаголен.

Доказ. Од $\frac{a}{3}<d<a$, следува дека $\text{-}3a<\text{-}3d<\text{-}a$, т.е. $-2a<a-3d<0$. Бидејќи $2a>0$, добиваме $\frac{-2a}{2a}<\frac{a-3d}{2a}<\frac{0}{2a}$, т.е. $-1<\cos\gamma<0$, Што значи дека $\gamma>90^0$, па триаголникот ABC-ап е тапоаголен.

б) Ако триаголникот ABC-ап е тапоаголен, тогаШ важи $\frac{a}{3}<d<a$.

Доказ. Бидејки триаголникот ABC-ап е тапоаголен имаме

$$\text{-}1<\cos\gamma<0,\ \text{-}1<\frac{a-3d}{2a}<0,\ \text{-}2a<a\text{-}3d<0,\ a<3d<3a,\ \frac{a}{3}<d<a\ .$$

Триаголникот ABC-ап е тапоаголен ако и само ако $\frac{a}{3}<d<a$.

Периметар. Периметарот $L=a+(a+d)+(a+2d)=3(a+d)$, т.е. тој е три пати поголем од должината на средната по големина страна.

За правоаголен триаголник ABC - ап добиваме дека периметарот $L=3a+3d=3a+a=4a$, тој е еднаков на периметарот на квадрат со страна a .

Плоштина. Нека s е полупериметарот на триаголникот ABC-ап. Тогаш $s=\frac{L}{2}=\frac{3(a+d)}{2}$. Од Хероновата формула следува

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-a-d)(s-a-2d)},\ \text{т.е.}\ P=\frac{a+d}{4}\sqrt{3(a+3d)(a-d)}\ .$$

За правоаголен триаголник ABC-ап важи

$$P = \frac{a + \frac{a}{3}}{4}\sqrt{3\left(a + 3\frac{a}{3}\right)\left(a - \frac{a}{3}\right)} = \frac{2}{3}a^2 .$$

Значи, плоштината на триаголникот ABC-ап е еднаква на $\frac{2}{3}$ од плоштината на квадрат со страна a .

Висини. Висините во еден триаголник се пресметуваат според формулите $h_a = \frac{2P}{a}$, $h_b = \frac{2P}{b}$, $h_c = \frac{2P}{c}$. Заменувајќи во формулата за плоштина на аABC -ап добиваме

$$h_a = \frac{a+d}{2a}\sqrt{3(a+3d)(a-d)};$$

$$h_{a+d} = \frac{1}{2}\sqrt{3(a+3d)(a-d)};$$

$$h_{a+2d} = \frac{a+d}{2(a+2d)}\sqrt{3(a+3d)(a-d)}$$

Дали висините h_a, h_{a+d}, h_{a+2d} се во аритметичка прогресија? Од $a < a+d < a+2d$ следува $h_a > h_{a+d} > h_{a+2d}$ (зошто?). Ако $h_a + h_{a+2d} = 2h_{a+d}$, тогаш

$$\frac{a+d}{2a}\sqrt{3(a+3d)(a-d)} + \frac{a+d}{2(a+2d)}\sqrt{3(a+3d)(a-d)} = 2\frac{1}{2}\sqrt{3(a+3d)(a-d)} .$$

Делејќи со $\sqrt{3(a+3d)(a-d)} \neq 0$, добиваме

$$\frac{a+d}{2a} + \frac{a+2d}{2(a+2d)} = 1$$

т.е. $d=0$, па триаголникот ABC-ап е рамностран.

Во множеството нетривијални триаголници ABC-ап не постои триаголник чии висини се во аритметичка прогресија.

Дали висините во триаголникот ABC-ап образуваат геометриска прогресија? Ако $h_{a+d}^2 = h_a h_{a+2d}$, тогаш

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{3(a+3d)(a-d)}\right)^2 = \frac{a+d}{2a}\sqrt{3(a+3d)(a-d)}\,\frac{a+d}{2(a+2d)}\sqrt{3(a+3d)(a-d)}$$

т.е.

$$\frac{a+d}{a} - \frac{a+d}{a+2d} = 1 ,$$

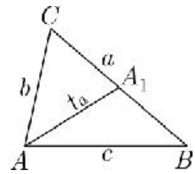
од каде што добиваме дека $d=0$.

Во множеството нетривијални триаголници ABC-ап не постои триаголник чии страни образуваат геометриска прогресија.

Тежишни линии. Теорема. Тежишните линии се пресметуваат според формулите

$$t_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},\ t_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2},\ t_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}\ .$$

Доказ. Тежишната линија t_a ја дели страната a на два еднакви дела. Од триаголникот ABA_1, според косинусната теорема имаме



$$c^2=t_a{}^2+\frac{a^2}{4}-2t_a\frac{a}{2}\cos\sphericalangle AA_1B;\ \sphericalangle AA_1C=\pi-\sphericalangle AA_1B$$

па

$$\cos\sphericalangle AA_1C=\cos\left(\pi-\sphericalangle AA_1B\right)=-\cos\sphericalangle AA_1B\ .$$

Од косинусната теорема за триаголникот ACA_1 имаме

$$b^2=t_a{}^2+\frac{a^2}{4}-2t_a\frac{a}{2}\cos\sphericalangle AA_1C=t_a{}^2+\frac{a^2}{4}+2t_a\frac{a}{2}\cos\sphericalangle AA_1B\ .$$

Ги собираме двете равенства и добиваме $c^2+b^2=2t_a{}^2+\frac{a^2}{2}$. Оттука

$t_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. Слично се изведуваат и другите две формули. ■

Тежишните линии на триаголникот ABC-ап ги добиваме според формулите

$$t_a=\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+12ad+10d^2},\ t_{a+d}=\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+6ad+7d^2},\ t_{a+2d}=\frac{1}{2}\sqrt{3a^2-2d^2}\ ,$$

со соодветна замена за a, $b=a+d$ и $c=a+2d$.

Теорема. Во секој триаголник со страни a,b и c важи

$$t_a^2+t_b^2+t_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)\ .$$

Доказ. Ако ги собереме равенствата

$$t_a{}^2=\frac{1}{4}\left(2b^2+2c^2-a^2\right), t_b{}^2=\frac{1}{4}\left(2a^2+2c^2-b^2\right) \text{ и } t_c{}^2=\frac{1}{4}\left(2a^2+2b^2-c^2\right)$$

добиваме

$$t_a{}^2+t_b{}^2+t_c{}^2=\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}b^2+\frac{3}{4}c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)\ .\ ■$$

Во триаголникот ABC-ап добиваме

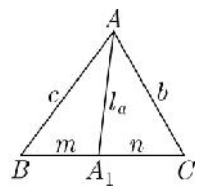
$$t_a^2+t_{a+d}^2+t_{a+2d}^2=\frac{25}{6}a^2\ .$$

Збирот на квадратите на тежишнните линии на ABC-ап е еднаков на $\frac{25}{6}$ од плоштината на квадрат со страна еднаква на најмалата страна во триаголникот.

Симетрали на агли. Теорема. Симетралите на аглите во триаголникот со страни a, b и c имаат должина

$$l_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]},$$
$$l_b = \frac{1}{a+c}\sqrt{ac\left[(a+c)^2 - b^2\right]}, \quad .$$
$$l_c = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab\left[(a+b)^2 - c^2\right]}$$

Доказ. Бисектрисата l_a ја дели страната a пропорционално со страните c и b, т.е $m:n = c:b$. Навистина, од синусната теорема за триаголникот AA_1B и триаголникот AA_1C имаме



$$\frac{c}{m} = \frac{\sin \sphericalangle AA_1B}{\sin \frac{\sphericalangle BAA_1}{2}} \text{ и } \frac{b}{n} = \frac{\sin \sphericalangle\left(\pi - AA_1B\right)}{\sin \frac{\sphericalangle CAA_1}{2}} = \frac{\sin \sphericalangle AA_1B}{\sin \frac{\sphericalangle BAA_1}{2}} .$$

Оттука $m:n = c:b$. Јасно $m+n=a.$ Од овие две равенства добиваме: $m = \frac{ac}{b+c}$, $n = \frac{ab}{b+c}$. Од косинусната теорема за триаголниците AA_1B и AA_1C имаме

$$\cos\frac{\sphericalangle BAA_1}{2} = \frac{l_a^2 + c^2 - m^2}{2l_a m} \text{ и } \cos\frac{\sphericalangle CAA_1}{2} = \frac{l_a^2 + b^2 - n^2}{2l_a n}.$$

Ги изедначуваме и добиваме

$$\left(l_a^2 + c^2 - m^2\right)n = \left(l_a^2 + b^2 - n^2\right)m \text{, т.е. } l_a^2 = \frac{nc^2 - mb^2}{m-n} - mn .$$

Заменуваме за m, n и добиваме

$$l_a^2 = \frac{bc\left[\left(b+c\right)^2 - a^2\right]}{\left(b+c\right)^2} \text{, т.е. } l_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc\left[\left(b+c\right)^2 - a^2\right]} .$$

Слично се добиваат и другите формули. ■

Во случај на триаголникот ABC-ап имаме

$$l_a = \frac{a+d}{2a+3d}\sqrt{3(a+2d)(a+3d)},\ l_{a+d} = \frac{1}{2}\sqrt{3a(a+2d)},\ l_{a+2d} = \frac{a+d}{2a+d}\sqrt{3a(a-d)} .$$

Средни линии. Средните линии во триаголникот ABC-ап образуваат аритметичка прогересија. Навистина, средните линни се $\frac{a}{2},\frac{a+d}{2},\frac{a+2d}{2}$, па од $\frac{a+d}{2}-\frac{a}{2}=\frac{d}{2}$ и $\frac{a+2d}{2}-\frac{a+d}{2}=\frac{d}{2}$ добиваме дека $\frac{a+d}{2}-\frac{a}{2}=\frac{a+2d}{2}-\frac{a+d}{2}$. Значи $\frac{a}{2},\frac{a+d}{2},\frac{a+2d}{2}$ образуваат аритметичка прогресија.

Дали постои триаголник ABC-ап чии страни образуваат геометриска прогресија? Кога би постоел, од $a(a+2d)=(a+d)^2$ би добиле дека $d=0$, т.е. триаголникот е рамностран.

Не постои триаголник ABC-ап чии страни образуваат геометриска прогресија.

Опишана кружница. Ако $0<d<\frac{a}{3}$ триаголникот е остроаголен па центарот на опишаната кружница припаѓа во внатрешноста на триаголникот. Ако $\frac{a}{3}<d<a$ триаголникот е тапоаголен, па центарот на опишаната кружница припаѓа на надворешноста на триаголникот. Ако $d=\frac{a}{3}$, триаголникот е правоаголен па центарот на опишаната кружница е средина на хипотенузата.

За радиусот R на опишаната кружница околу еден ABC -ап имаме

$$R=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}}{4P}=\frac{a(a+d)(a+2d)}{4\frac{a+d}{4}\sqrt{3(a+3d)(a-d)}}=\frac{a+2d}{\sqrt{3(a+3d)(a-d)}}.$$

а за правоаголен ABC -ап, заменувајќи $d=\frac{a}{3}$ добиваме $R=\frac{5}{6}a$.

Впишана кружница. Радиусот r на впишаната кружница на еден ABC-ап е

$$r=\frac{2\frac{a+d}{4}\sqrt{3(a+3d)(a-d)}}{a+a+d+a+2d}=\frac{\sqrt{3(a+3d)(a-d)}}{6}.$$

Од последните две равенства добиваме $6Rr=a(a+2d)$ и $R-r=\frac{a}{2}$. Значи производот на најмалата и најголемата страна е еднаков на $6Rr$. За правоаголен триаголник $d=\frac{a}{3}$, па добиваме $r=\frac{a}{3}=d$.

Радиусот на впишаната кружница во правоаголен триаголник ABC-ап е еднаков на разликата d на аритметичката прогресија.

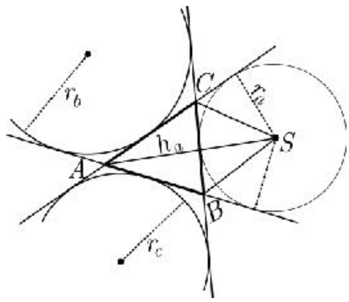
Припишани кружници. Припишана кружница над страна a од $\triangle ABC$ е кружница чии тангенти се страната a и продолженијата на страните b и c.

Теорема. Нека h_a, h_b, h_c се висини, а r_a, r_b, r_c се радиуси на припишаните кружници на триаголник со страни a, b и c. Тогаш важи

$$\frac{1}{r_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a},\ \frac{1}{r_b}=\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b},\ \frac{1}{r_c}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_c}$$

Доказ. Нека S е центар на припишаната кружница над страната a. Од цртежот гледаме дека $P_{ABS}+P_{ACS}-P_{BCS}=P_{ABC}$, т.е.

$$\frac{1}{2}r_a c+\frac{1}{2}r_a b-\frac{1}{2}r_a a=\frac{1}{2}ah_a .$$



Оттука

$$r_a=\frac{ah_a}{b+c-a} \qquad (*)$$

Бидејќи $a:b=h_b:h_a$ и $a:c=h_c:h_a$, добиваме $b=\frac{ah_a}{h_b}$ и $c=\frac{ah_a}{h_c}$. Заменувајќи ги b и c во равенството (*) добиваме

$$r_a=\frac{h_a h_b h_c}{h_a h_b+h_a h_c-h_b h_c},\text{ т.е. }\frac{1}{r_a}=\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_a}.$$

Слично ги добиваме и другите формули. ■

За радиусите на припишаните кружници над страните на триаголникот ABC-ап имаме

$$\frac{1}{r_a}=\frac{1}{h_{a+d}}+\frac{1}{h_{a+2d}}-\frac{1}{h_a}=\frac{1}{\frac{2P}{a+d}}+\frac{1}{\frac{2P}{a+2d}}-\frac{1}{\frac{2P}{a}}=\frac{a+d}{2P}+\frac{a+2d}{2P}-\frac{a}{2P}=\frac{a+3d}{2P}$$

и оттука

$$r_a=\frac{2P}{a+3d}=\frac{a+d}{2}\sqrt{\frac{3(a+3d)}{a+d}} .$$

Слично,

$$r_{a+d}=\frac{1}{2}\sqrt{3(a+3d)(a-d)},\ r_{a+2d}=\frac{a+2d}{2}\sqrt{\frac{3(a+3d)}{a+d}} .$$

Радиусите на припишаните кружници во првоаголен триаголник ABC-ап се

$$r_a=\frac{2}{3}a,\ r_{a+d}=a,\ r_{a+2d}=2a.$$