Ристо Малчески
Сава Гроздев
Катерина Аневска

ГЕОМЕТРИЈА НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

Скопје, 2019

Рецензент
Проф. д-р Алекса Малчески
Проф. д-р Веселин Ненков

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

511.14:514.12(075.3)(076)

МАЛЧЕСКИ, Ристо
Геометрија на комплексен број / Ристо Малчески, Сава Гроздев, Катерина Аневска. - Скопје : Армаганка, 2019. - 284 стр. ; 25 см

Библиографија: стр. 283-284

ISBN 978-608-4904-98-4
1. Гроздев, Сава [автор] 2. Аневска, Катерина [автор]
а) Комплексни броеви - Евклидова геометрија - Задачи за средно образование
COBISS.MK-ID 111695370

С О Д Р Ж И Н А

III ГЛАВА
ГЕОМЕТРИЈА НА КРУЖНИЦА И ТРИАГОЛНИК

IV ГЛАВА
РЕШЕНИ ПРИМЕРИ И ЗАДАЧИ
ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

ПРЕДГОВОР

> Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките, каде нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Оваа книга е наменета за учениците од средното образование кои сакаат да ги прошират своите знаења за комплексните броеви и нивната примена во Евклидската геометрија. Имено, учениците од средното образование се стекнуваат со елементарни знаења за комплексните броеви и операциите со истите, како и за геометриското претставување на истите. Меѓутоа, значењето на комплексните броеви и нивната примена во останатите математички дисциплини е далеку поголемо, на што укажува и содржината на оваа книга.

Во книгава е направен обид да се собере и презентира оној материјал за кој сметавме дека може да им користи на учениците надарени за математика, но и на други читатели кои се интересираат за оваа област. Материјалот кој е предмет на разработка е поделен во две глави, при што во првата глава се разработени содржините кои се однесуваат на комплексните броеви и нивното геометриско претставување, а додека втората глава е посветена на шримената на комплексните броеви во Евклидската геометрија. Притоа, на почетокот од втората глава се дадени различните видови равенки на права и кружница, за да во следните разгледувања посебно внимание се обрне на движењата и сличностите во Евклидската рамнина, т.е. на нивната класификација. Понатаму, заради посебното значење, и тоа не само за потребите на нашите разгледувања, туку и за натамошното проучување на комплексната анализа, одделно е разгледана трансформацијата на Мобиус и нејзините геометриски својства. Во вториот дел од оваа глава се разгледани геометријата на кружницата, како и низа класични теореми од Евклидската геометрија, кои се разбира се докажани со апаратот на комплексните броеви.

Книгава содржи голем број на дефиниции и детални докази на 138 теореми, леми и последици. Понатаму, теориските разгледувања се пропратени со 64 решени примери и се илустрирани со 88 цртежи. На крајот од книгата се дадени решени примери и задача за самостојна работа, вкупно 143 и 161, соодветно . Покрај стандардните резултати и примери, книгава содржи голем број задачи од националните олимпијади на Бугарија, Иран, Јапонија, Кина, Кореја, Полска, Романија, Русија, САД, Србија, Турција и Украина, како и од Балканските и Меѓународните математички олимпијади.

Рецензентите проф. д-р АЛекса Малчески и проф. д-р Веселин Ненков со своите корисни сугестии и забелешки допринесе да се подобри содржината на книгава, за што посебно и благодариме.

За крај, и покрај вложениот напор, свесни сме дека се можни подобрувања на оваа книга, како и дека се присутни грешки, кои за жал не го одминуваат издавањето на било кој ракопис. Затоа однапред сме благодарни на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе допринесе да се подобри книгава.

Август, 2014 Авторите
Скопје

I ГЛАВА
КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

1. ПОИМ ЗА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ. ОСНОВНИ СВОЈСТВА

1.1. Дефиниција. *Комплексен број* z го нарекуваме подредениот пар реални броеви (a,b).

Множеството комплексни броеви ќе го означуваме со симболот $\mathbf{C}$, т.е. $\mathbf{C}=\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathbf{R}\}$.

За комплексните броеви (0,0) и (1,0) ќе ги прифатиме ознаките n и e, соодветно.

Непосредно од дефиницијата следува дека комплексните броеви $z_1=(a_1,b_1)$ и $z_2=(a_2,b_2)$ се *еднакви***,** ако $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$.

1.2. Дефиниција. Нека се дадени комплексните броеви $z_1=(a_1,b_1)$ и $z_2=(a_2,b_2)$. *Збир* на броевите z_1 и z_2 ќе го нарекуваме комплексниот број

$$z_1+z_2=(a_1+a_2,b_1+b_2).$$

1.3. Дефиниција. Нека се дадени комплексните броеви $z_1=(a_1,b_1)$ и $z_2=(a_2,b_2)$. *Производ* на броевите z_1 и z_2 ќе го нарекуваме комплексниот број

$$z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1)$$

1.4. Теорема. За воведените аритметички операции, собирање и множење на комплексни броеви, важат познатите закони на аритметиката. Имено, за секои комплексни броеви z_1,z_2,z_3 важи:

i) $z_1+z_2=z_2+z_1$, *комутативен закон на собирањето,*

ii) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$, *асоцијативен закон на собирањето,*

iii) $z_1z_2=z_2z_1$, *комутативен закон на множењето,*

iv) $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$, *асоцијативен закон на множењето*, и *v)* $(z_1+z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$, *дистрибутивен закон.*

Доказ. *i)* Нека $z_1=(a_1,b_1)$ и $z_2=(a_2,b_2)$ се произволни комплексни броеви. Имаме,

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)=(a_2+a_1,b_2+b_1)=(a_2,b_2)+(a_1,b_1)$$

односно, $z_1+z_2=z_2+z_1$.

Аналогно се докажуваат својствата *ii), iii), iv)* и *v).* Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

Да напоменеме дека во доказот на теорема 1.4 експлицитно (но по координати) се искористени комутативниот, асоцијативниот и дистрибутивниот закон за операциите собирање и множење на реалните броеви.

1.5. Теорема. За секој комплексен број z важат следниве равенства $z+n=z$, $z\cdot n=n$ и $z\cdot e=z.$

Доказ. Навистина, ако $z=(a,b)$ е произволен комплексен број, тогаш

$$z+n=(a,b)+(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b)=z\ ,$$

$$z\cdot n=(a,b)\cdot(0,0)=(a\cdot 0-b\cdot 0,a\cdot 0+b\cdot 0)=(0,0)=n\text{, и}$$

$$z\cdot e=(a,b)\cdot(1,0)=(a\cdot 1-b\cdot 0,a\cdot 0+1\cdot b)=(a,b)=z.\ ■$$

1.6. Теорема. Ако $z_1+z_3=z_2+z_3$, тогаш $z_1=z_2$.

Доказ. Нека $z_1=(a_1,b_1),$ $z_2=(a_2,b_2)$ и $z_3=(a_3,b_3)$ се произволни комплексни броеви. Имаме,

$$z_1+z_3=(a_1,b_1)+(a_3,b_3)=(a_1+a_3,b_1+b_3)\quad\text{и}$$

$$z_2+z_3=(a_2,b_2)+(a_3,b_3)=(a_2+a_3,b_2+b_3)\ .$$

Од $z_1+z_2=z_2+z_3$ и дефиниција 1.1 добиваме $a_1+a_3=a_2+a_3$ и $b_1+b_3=b_2+b_3$. Од својствата на реалните броеви следува дека последните равенства се еквивалентни на равенствата $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$ што според дефиниција 1.1 значи $z_1=z_2$. ■

1.7. Теорема. За секој комплексен број z постои еден и само еден комплексен број w, таков што $z+w=n$.

Доказ. Нека $z=(a,b)$ е произволен комплексен број. Да земеме $w=(-a,-b)$. Добиваме,

$$z+w=(a,b)+(-a,-b)=(a+(-a),b+(-b))=(0,0)=n\ .$$

Со тоа ја докажавме егзистенцијата на комплексниот број w. Единственоста следува од теорема 1.6. ■

Во натамошните разгледувања комплексниот број w за кој важи $z+w=n$, ќе го означуваме со $w=-z$.

Нека z и w се произволни комплесни броеви. Комплексниот број $z+(-w)$ ќе го нарекуваме *разлика* на броевите z и w и ќе го означуваме со $z-w$.

1.8. Теорема. За секои комплексни броеви z_1 и z_2 важи

$$(-z_1)\cdot z_2 = z_1\cdot(-z_2) = -(z_1 z_2) = (-e)\cdot(z_1 z_2),$$

така што нема двосмисленост во записот $-z_1 z_2$.

Доказ. Нека $z_1=(a_1,b_1)$ и $z_2=(a_2,b_2)$ се произволни комплексни броеви. Имаме,

$$\begin{aligned}(-z_1)\cdot z_2 &= (-a_1,-b_1)\cdot(a_2,b_2) = (-a_1a_2+b_1b_2, -a_1b_2-b_1a_2)\\ &= -(a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+b_1a_2) = -(z_1z_2).\end{aligned}$$

Но, за множењето важи комутативниот закон, па од докажаното равенство добиваме

$$-(z_1z_2) = -(z_2z_1) = (-z_2)z_1 = z_1(-z_2).$$

Конечно, според теорема 1.5 и претходно покажаните равенства имаме

$$(-e)(z_1z_2) = -(e(z_1z_2)) = -(z_1z_2) = (-z_1)z_2 = z_1(-z_2)\,. ■$$

1.9. Дефиниција. Аритметичката вредност на бројот

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

ќе ја нарекуваме *модул* на комплексниот број $z=(a,b)$.

Јасно, модулот на секој комплексен број z е ненегативен реален број.

1.10. Теорема. а) Ако $z\neq n$, тогаш $|z|>0$ и $|n|=0$.

б) $|z_1\cdot z| = |z_1|\cdot|z|$, за секои комплексни броеви z и z_1.

Доказ. Нека $z=(a,b)$ и $z_1=(a_1,b_1)$ се произволни комплексни броеви.

а) Јасно

$$|n| = \sqrt{0^2+0^2} = 0\,.$$

Ако $z\neq n$, тогаш $a\neq 0$ или $b\neq 0$, т.е. $a^2>0$ или $b^2>0$. Според тоа,

$$|z|^2 = a^2 + b^2 > 0.$$

б) Од

$$\begin{aligned}|z_1 z|^2 &= |(a_1 a - b_1 b, a_1 b + b_1 a)|^2 \\ &= (a_1 a - b_1 b)^2 + (a_1 b + b_1 a)^2 \\ &= a_1^2 a^2 + b_1^2 b^2 + a_1^2 b^2 + b_1^2 a^2 \\ &= (a_1^2 + b_1^2)(a^2 + b^2) = |z_1|^2 |z|^2,\end{aligned}$$

добиваме $|z_1 \cdot z| = |z_1| \cdot |z|$. ■

1.11. Забелешка. Од принципот на математичка индукција и од теорема 1.10.б) непосредно следува

$$|z_1 z_2 ... z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot ... \cdot |z_n|. \blacksquare \tag{1}$$

1.12. Теорема. Ако $zw = n$, тогаш $z = n$ или $w = n$.

Доказ. Ако $zw = n$, тогаш од теорема 1.10 следува

$$|z| \cdot |w| = |zw| = |n| = 0.$$

Но, $|z|$ и $|w|$ се реални броеви, па од последното равенство следува $|z| = 0$ или $|w| = 0$, односно $z = n$ или $w = n$. ■

1.13. Теорема. Ако $z \neq n$ и $zw = zw_1$, тогаш $w = w_1$.

Доказ. Од $zw = zw_1$ имаме $-zw = -zw_1$, па значи

$$n = zw - zw_1 = z(w - w_1).$$

Бидејќи $z \neq n$, од теорема 1.12 следува $w - w_1 = n$, т.е. $w = w_1$. ■

1.14. Теорема. За секој комплексен број $z \neq n$ постои еден и само еден комплексен број w, во ознака $\frac{e}{z}$, таков што $zw = e$.

Доказ. Прво ќе ја докажеме егзистенцијата на комплексниот број $w = \frac{e}{z}$. Нека $z = (a,b) \neq n$ е произволен комплексен број. Ставаме

$$w = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

Тогаш,

$$zw = (a,b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1,0) = e.$$

Единственоста непосредно следува од теорема 1.13. ■

1.15. Теорема. Ако $z \neq n$, тогаш за секој комплексен број w постои единствен комплексен број u, таков што $zu = w$.

Доказ. Според теорема 1.14, за комплексниот број $z \neq n$ постои единствен комплексен број $\frac{e}{z}$, таков што $z \cdot \frac{e}{z} = e$. Ставаме $u = \frac{e}{z} \cdot w$ и добиваме единствен комплексен број u за кој важи $zu = z \cdot \frac{e}{z} w = w$. ■

2. АЛГЕБАРСКИ ЗАПИС НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

2.1. Во досегашните разгледувања ја развивме аритметиката на комплексните броеви без да го воведиме вообичаениот симбол i. Сега ќе докажеме, дека ознаката (a,b) е еквивалентна на вообичената ознака $a + ib$.

Доказите на тврдењата во теорема 2.2 се елементарни, па затоа истите нема да ги презентираме.

2.2. Теорема. За секои реални броеви a и b исполнети се следниве равенства

а) $(a,0) + (b,0) = (a+b,0)$,

б) $(a,0)(b,0) = (ab,0)$,

в) $|(a,0)| = |a|$, каде $|a|$ е апсолутната вредност на реалниот број a,

г) $\frac{(a,0)}{(b,0)} = (\frac{a}{b},0)$, ако $b \neq 0$. ■

2.3. Од тврдењата во теорема 2.2 непосредно следува дека пресликувањето $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ дефинирано со $f(a) = (a,0)$ е биекција од множеството $\mathbf{R}$ во множеството $A = \{(a,0) \,|\, a \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{C}$, која ги запазува операциите. Затоа множеството реални броеви $\mathbf{R}$ можеме да го сметаме за подмножество од множеството комплексни броеви $\mathbf{C}$.

Според тоа, за комплексните броеви e и n природни се ознаките 1 и 0, соодветно и истите ќе ги користиме во натамошните разгледувања.

2.4. Дефиниција. Комплексниот број $i = (0,1)$ го нарекуваме *имагинарна единица*.

За имагинарната единица важи следново равенство

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 0\cdot 1) = (-1,0) = -1.$$

2.5. Од очигледното равенство $(0,1)\cdot(b,0) = (0,b)$ за произволен комплексен број $z = (a,b)$ имаме

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1)\cdot(b,0) = a + ib .$$

Дефиниција. Записот $z = a + ib$ го нарекуваме *алгебарски запис* на комплексниот број $z = (a,b)$.

Со помош на алгебарскиот запис на комплексен број, операциите собирање и множење на комплексни броеви ги запишуваме на следниов начин

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) ,$$
$$(a_1 + ib_1)\cdot(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

2.6. Дефиниција. Компонентите a и b на комплексниот број $z = a + ib$ ги нарекуваме *реален дел* и *имагинарен дел* од z, соодветно. Притоа ги користиме ознаките $a = \operatorname{Re} z$ и $b = \operatorname{Im} z$.

3. КОЊУГИРАН КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

3.1. Дефиниција. Комплексниот број $a - ib$ го нарекуваме *коњугиран* на комплексниот број $z = a + ib$ и го означуваме со $\overline{z}$.

3.2. Теорема. а) $\overline{\overline{z}} = z$, за секој комплексен број z .

б) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, за секои комплексни броеви z_1 и z_2 ,

в) $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, за секои комплексни броеви z_1 и z_2 ,

г) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$, за секој комплексен број z ,

д) $z - \overline{z} = 2\operatorname{Im} z$, за секој комплексен број z , и

ѓ) $z\cdot\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 \geq 0$, за секој комплексен број z .

Доказ. Непосредно следува од дефиницијата на коњугиран комплексен број и операциите собирање и множење на комплексни броеви.

Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

3.3. Забелешка. Од равенството $z-\bar{z}=2\operatorname{Im} z$ непосредно следува дека комплексен број z е реален ако и само ако $z=\bar{z}$.

3.4. Забелешка. Користејќи го равенството $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ и принципот на математичка индукција лесно може да се докаже следното равенство

$$\overline{z_1 z_2 z_3 \dots z_n}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\ldots\cdot\overline{z_n}\,, \tag{1}$$

за секој $n\in\mathbf{N}$ и произволни комплексни броеви $z_1, z_2, \dots, z_n$. Ако $z_k=z$, за секој $k=1,2,\dots,n$, тогаш од равенството (1) следува $\overline{z^n}=\bar{z}^n$.

3.5. Забелешка. Од теорема 3.2. ѓ) и а) добиваме

$$|\bar{z}|^2=\bar{z}\cdot\bar{\bar{z}}=\bar{z}\cdot z=|z|^2 \text{ , т.е. } |\bar{z}|=|z|.$$

Нека $z=x+iy$. Од равенството $|z|^2=z\bar{z}=x^2+y^2$ непосредно следуваат неравенствата

$$-|z|\le \operatorname{Re} z\le |z| \quad \text{и} \quad -|z|\le \operatorname{Im} z\le |z| \tag{2}$$

3.6. Пример. Нека

$$P(z)=a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\dots+a_{n-1}z+a_n$$

е полином со реални коефициенти. Докажи, дека ако w е нула на $P(z)$, тогаш и $\bar{w}$ е нула на $P(z)$.

Решение. Бидејќи w е нула на $P(z)$ имаме $P(w)=0$. Понатаму

$$\begin{aligned} P(\bar{w}) &= a_0\bar{w}^n+a_1\bar{w}^{n-1}+\dots+a_{n-1}\bar{w}+a_n \\ &= \overline{a_0 w^n+a_1 w^{n-1}+\dots+a_{n-1}w+a_n}=\overline{P(w)}=0, \end{aligned}$$

од што следува дека и $\bar{w}$ е нула на $P(z)$. ■

3.7. Пример. Да го разгледаме полиномот

$$P(z)=a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\dots+a_{n-1}z+a_n\,,\ a_0\ne 0\,,$$

запишан во видот

$$P(z)=a_0(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)\,,$$

каде z_i, $i=1,2,\dots,n$ се нулите на $P(z)$.

Од идентитетот

$$a_0(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_n)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_n$$

добиваме

$$a_0(z^n-(z_1+z_2+...+z_n)z^{n-1}+(-1)^n z_1z_2...z_n)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_n.$$

Ако ги изедначиме коефициентите пред соодветните степени ги добиваме формулите

$$z_1+z_2+...+z_n=-\frac{a_1}{a_0}$$

$$z_1z_2+...+z_1z_n+z_2z_3+...+z_2z_n+...+z_{n-1}z_n=-\frac{a_2}{a_0}$$

....

$$z_1z_2...z_k+...+z_1...z_{k-1}z_n+...+z_{n-k+1}z_{n-k+2}...z_n=(-1)^k\frac{a_k}{a_0}$$

....

$$z_1z_2...z_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}$$

кои во литературата се познати под името *Виетови формули*. ■

3.8. Забелешка. Во теорема 1.15 докажавме дека, ако $z\neq n$ тогаш за секој комплексен број w постои единствен комплексен број u таков што $zu=w$. Комплексниот број u ќе го нарекуваме *количник на комплексните броеви* w и z и го означуваме со $u=\frac{w}{z}$.

Притоа, ако $z=a_2+ib_2$ и $w=a_1+ib_1$, тогаш за количникот добиваме

$$u=\frac{w}{z}=\frac{w\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\,\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

Јасно, за количникот на комплексните броеви z_1 и z_2 важи

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

3.9. Пример. Ако $|z_1|=|z_2|=1$ и $z_1z_2\neq-1$, докажи дека $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ е реален број.

Решение. Имаме,

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\cdot\frac{\overline{1+z_1z_2}}{\overline{1+z_1z_2}}=\frac{(z_1+z_2)(1+\bar{z}_1\bar{z}_2)}{|1+z_1z_2|^2}$$

$$=\frac{z_1+z_2+z_1\bar{z}_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2\bar{z}_2}{|1+z_1z_2|^2}=\frac{z_1+\bar{z}_1}{|1+z_1z_2|^2}+\frac{z_2+\bar{z}_2}{|1+z_1z_2|^2}.$$

Но, $z_1+\overline{z_1}$ и $z_2+\overline{z_2}$ се реални броеви, па затоа и $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ е реален број. ■

3.10. Пример. Докажи, дека ако модулот на еден комплексен број е еднаков на 1, тогаш тој може да се претстави во обликот $\frac{c+i}{c-i}$, каде c е реален број.

Решение. Ако $|z|=1$ и $c=i\frac{z+1}{z-1}$, тогаш $z=\frac{c+i}{c-i}$ и $|\frac{c+i}{c-i}|=1$, т.е.

$$\frac{c+i}{c-i}\cdot\frac{\overline{c}-i}{\overline{c}+i}=1.$$

Со средување на последното равенство добиваме $c-\overline{c}=0$. Значи, $c\in\mathbf{R}$ и $z=\frac{c+i}{c-i}$, што и требаше да докажеме. ■

3.11. Теорема. За секои комплексни броеви z и $w\neq 0$ важи

$$|\frac{z}{w}|=\frac{|z|}{|w|}.$$

Доказ. Имаме:

$$|\frac{z}{w}|^2=\frac{z}{w}\cdot\overline{(\frac{z}{w})}=\frac{z}{w}\cdot\frac{\overline{z}}{\overline{w}}=\frac{z\overline{z}}{w\overline{w}}=\frac{|z|^2}{|w|^2}$$

односно $|\frac{z}{w}|=\frac{|z|}{|w|}$. ■

3.12. Пример. Најди ги сите комплексни броеви z за кои важат равенствата

$$|\frac{z-12}{z-8i}|=\frac{5}{3} \text{ и } |\frac{z-4}{z-8}|=1.$$

Решение. Ако $z=x+iy$, тогаш од условот на задачата добиваме

$$|\frac{z-12}{z-8i}|^2=\frac{|z-12|^2}{|z-8i|^2}=\frac{(x-12)^2+y^2}{x^2+(y-8)^2}=\frac{25}{9} \text{ и } |\frac{z-4}{z-8}|^2=\frac{|z-4|^2}{|z-8|^2}=\frac{(x-4)^2+y^2}{(x-8)^2+y^2}=1,$$

од што го добиваме системот равенки

$$\begin{cases}2x^2+2y^2+27x-50y+38=0\\ x=6\end{cases}$$

чии решенија се $x=6, y=17$ и $x=6, y=8$. Според тоа, бараните броеви се $z=6+17i$ и $z=6+8i$. ■

3.13. Пример. Ако a,b и c се комплексни броеви такви што

$$|a|=|b|=|c|=r,\ r>0$$

тогаш

$$|ab+bc+ca|=r\,|a+b+c|.$$

Докажи!

Решение. Од $r^2=|a|^2=a\bar{a}$ следува $\frac{1}{a}=\frac{\bar{a}}{r^2}$. Аналогно $\frac{1}{b}=\frac{\bar{b}}{r^2}$ и $\frac{1}{c}=\frac{\bar{c}}{r^2}$.

Според тоа,

$$\begin{aligned} ab+bc+ca &= abc(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}) = abc(\tfrac{\bar{a}}{r^2}+\tfrac{\bar{b}}{r^2}+\tfrac{\bar{c}}{r^2}) \\ &= \tfrac{abc}{r^2}\cdot\overline{a+b+c} \end{aligned},$$

од што следува дека

$$|ab+bc+ca|=\tfrac{|abc|}{r^2}\,|\overline{a+b+c}|=r\,|a+b+c|,$$

што и требаше да се докаже. ■

3.14. Теорема. За секои комплексни броеви z_1 и z_2 важи

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2| \quad \text{и} \quad |z_1-z_2|\ge||z_1|-|z_2||$$

Доказ. Според теорема 3.2 за секои комплексни броеви z_1 и z_2 важи

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re} z_1\overline{z_2} \tag{3}$$

$$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=|z_1|^2+|z_2|^2-2\operatorname{Re} z_1\overline{z_2}\,. \tag{4}$$

Ако го искористиме првото неравенство во (2), тогаш од равенствата (3) и (4) ги добиваме неравенствата

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2| \tag{5}$$

$$|z_1-z_2|\ge||z_1|-|z_2||\,. \tag{6}$$

Неравенството (5) е познато како *неравенство на триаголник*. ■

3.15. Последица. За секои комплексни броеви $z_1,z_2,...,z_n$ точно е неравенството

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}|z_i|.$$

Доказ. Непосредно следува од неравенството (5) и принципот на математичка индукција. ■

3.16. Пример. Докажи, дека за секои комплексни броеви z_1 и z_2 важи

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2). \tag{7}$$

Решение. Ако ги собереме равенствата (3) и (4) од теорема 3.14 кои важат за секои комплексни броеви z_1 и z_2 го добиваме бараниот идентитет, кој во литературата е познат како *равенство на паралелограм*. ■

3.17. Пример. Докажи дека за секои комплексни броеви z_1 и z_2 важи

$$|1-\overline{z_1}z_2|^2-|z_1-z_2|^2=(1+|z_1z_2|)^2-(|z_1|+|z_2|)^2.$$

Решение. Од $z\overline{z}=|z|^2$, непосредно следува

$$\begin{aligned}|1-\overline{z_1}z_2|^2-|z_1-z_2|^2&=(1-\overline{z_1}z_2)(\overline{1-\overline{z_1}z_2})-(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})\\&=(1-\overline{z_1}z_2)(1-\overline{z_2}z_1)-(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\&=1-\overline{z_1}z_2-\overline{z_2}z_1+\overline{z_1}z_1\overline{z_2}z_2-\overline{z_1}z_1-\overline{z_2}z_2+\overline{z_1}z_2-\overline{z_2}z_1\\&=1+|z_1z_2|^2-|z_1|^2-|z_2|^2\\&=(1+|z_1z_2|)^2-(|z_1|+|z_2|)^2,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

3.18. Теорема. Нека $z_i, w_i, i=1,2,...,n$ се произволни комплексни броеви. Тогаш

$$|\sum_{i=1}^{n} z_i w_i|^2 \le \sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 \sum_{i=1}^{n}|w_i|^2 . \tag{8}$$

Доказ. Означуваме

$$C=\sum_{i=1}^{n} w_i z_i,\quad A=\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 \text{ и } B=\sum_{i=1}^{n}|w_i|^2 .$$

Ако $A=0$, тогаш $|z_i|=0$, за секој $i=1,2,...,n$, па значи $z_i=0$, за секој $i=1,2,...,n$. Но, тогаш и $C=0$, па неравенството (8) е исполнето.

Ако $A\neq 0$, тогаш неравенството (8) следува од очигледното равенство

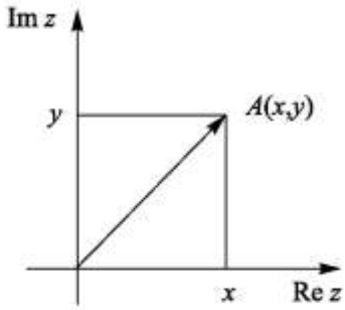
$$\sum_{i=1}^{n}|C\overline{z_i}-Aw_i|^2=\sum_{i=1}^{n}(C\overline{z_i}-Aw_i)(\overline{C}z_i-A\overline{w_i})=A(AB-|C|^2)$$

и неравенствата

$$\sum_{i=1}^{n}|C\overline{z_i}-Aw_i|^2\ge 0 \;,\; A>0 .$$

Неравенството (8) е познато како *неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц* за комплексни броеви. ■

4. ГЕОМЕТРИСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

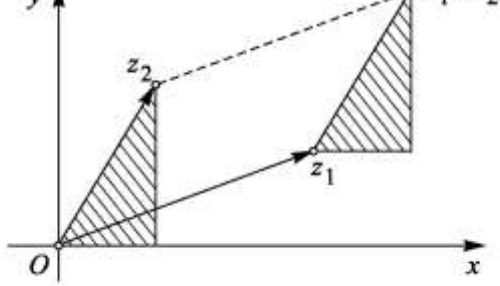


4.1. Со $\mathbf{R}^2$ ја означуваме Евклидската рамнина со Декартови координати. Секој комплексен број $z = x + iy$ е подреден пар реални броеви (x, y). Бидејќи множеството подредени парови реални броеви (x, y) е во обратно еднозначно соодветствие со $\mathbf{R}^2$, добиваме дека на секоја точка $A \in \mathbf{R}^2$ можеме да и придружиме комплексен број $z = x + iy$, и обратно (види цртеж). За комплексниот број z кој соодветствува на точката A ќе велиме дека е нејзин *афикс*. Ова соодветствие меѓу комплексните броеви и точките од Евклидската рамнина е биекција. Притоа, реалните броеви се пресликуваат на точките од апцисната оска, а имагинарните на точки од ординатата. Затоа апцисната оска ја нарекуваме *реална*, а ординатната ја нарекуваме *имагинарна оска*. При вакво толкување Евклидската рамнина $\mathbf{R}^2$, природно ја нарекуваме *комплексна рамнина*, а комплексните броеви точки од оваа рамнина.

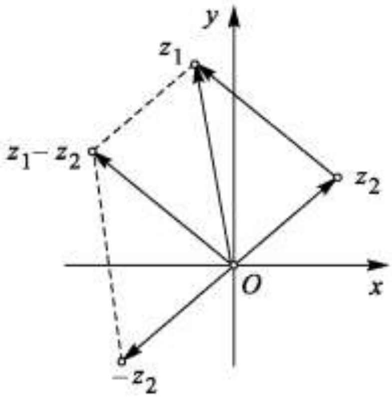
Јасно, точките z и $-z$ се симетрични во однос на координатниот почеток , а $\bar{z}$ и z се симетрични во однос на реалната оска. Имено, ако $z = x + iy$ тогаш

$$-z = (-x) + i(-y) \text{ и } \bar{z} = x + (-y)i\,.$$

Очигледно, комплексниот број z соодветствува на векторот со почетна точка O и крај во точката z. Јасно, ова соодветствие меѓу комплексните броеви и векторите на комплексната рамнина со почеток во O исто така е биекција. Затоа векторот, кој го одредува комплексниот број z, ќе го означуваме со истата буква z.



Со помош на векторската интерпретација нагледно можеме да ги илустрираме собирањето и одземањето на комплексни броеви. Според 1.2 добиваме дека бројот $z_1 + z_2$ соодветствува на векторот, добиен со собирање на



векторите z_1 и z_2 (цртеж горе). Векторот $z_1 - z_2$ се конструира како збир на векторите z_1 и $-z_2$ (цртеж лево).

Од досега изнесеното и од цртеж лево следува дека растојанието меѓу точките z_1 и z_2 е еднакво на должината на векторот $z_1 - z_2$, т.е. тоа е еднакво на $|z_1 - z_2|$. Јасно модулот $|z|$ е еднаков на должината на радиус-векторот на точката z. Ако ги разгледаме триаголниците со темиња во точките

$$O, z_1, z_1 + z_2 \text{ и } O, z_1, \ z_1 - z_2,$$

тогаш е очигледна геометриската смисла на неравенствата (5) и (6) од параграф 1.

4.2. Делење на отсечка во даден однос. Нека се дадени точките A и B чии афикси се z_1 и z_2, соодветно, и нека C е точка од отсечката AB, која ја дели AB во однос $\lambda : \mu \neq -1$, односно $\mu \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$. Од $\overrightarrow{AC} = z - z_1$ и $\overrightarrow{CB} = z_2 - z$ добиваме $\mu(z - z_1) = \lambda(z_2 - z)$. Според тоа, за афиксдот на точката C имаме $z = \frac{\lambda z_2 + \mu z_1}{\lambda + \mu}$. За $\lambda : \mu = 1$ добиваме дека средината C на отсечката AB има афикс $z = \frac{z_2 + z_1}{2}$.

Пример А. Средната точка C на отсечката AB чии крајни точки имаат афикси $a = 1 + i$ и $b = 3 + 5i$, има афикс

$$c = \frac{1 \cdot a + 1 \cdot b}{1+1} = \frac{(1+i)+(3+5i)}{2} = 1 + 3i. \ ■$$

Пример Б. Нека е даден четириагоник $ABCD$ и нека $M, N, P, Q, \ K, L$ се средините на отсечките AB, BC, CD, DA, BD, CA, соодветно. Докажи дека отсечките MP, NQ, KL се сечат во една точка T која секоја од нив ја преполовува.

Решение. Нека афиксите на точките $A, B, C, D, M, N, P, Q, K, L$ ги означиме со соодветните мали букви. Тогаш

$$m=\frac{a+b}{2},\, n=\frac{b+c}{2},\, p=\frac{c+d}{2},\, q=\frac{a+d}{2},\, k=\frac{b+d}{2},\, l=\frac{a+c}{2}.$$

Средините T, T_1, T_2 на отсечките MP, NQ, KL имаат афикси

$$t=\frac{a+b+c+d}{4},\, t_1=\frac{b+c+a+d}{4},\, t_2=\frac{b+d+a+c}{4}$$

и како $t=t_1=t_2$ добиваме дека MP, NQ, KL се сечат во една точка која секоја од нив ја преполовува. ■

4.3. Пример. а) Множеството точки z, кои ја задоволуваат равенката $|z-z_0|=R$, е кружница со радиус R и центар во точката z_0. Имено, $|z-z_0|$ е растојание помеѓу точките A и B чии афикси се z и z_0, соодветно.

б) Равенката

$$||z-z_1|-|z-z_2||=2a,$$

каде $a<\frac{1}{2}|z_1-z_2|$ е равенка на хипербола со фокуси во точки со афикси z_1 и z_2 и реална полуоска, еднаква на a, (зошто?).

в) Множеството точки z, кои ја задоволуваат равенката

$$|z-z_1|=|z-z_2|,$$

е множество точки, еднакво оддалечени од точките z_1 и z_2. Значи,

$$|z-z_1|=|z-z_2|$$

е равенката на симетралата на отсечката чии крајни точки имаат афикси z_1 и z_2.

г) Множеството точки z, кои ја задоволуваат равенката

$$|z-z_1|+|z-z_2|=2a,$$

Каде

$$a>\frac{1}{2}|z_1-z_2|,$$

е елипса со фокуси во точките z_1, z_2, и голема полуоска еднаква на a, бидејќи $|z-z_1|+|z-z_2|$ е збирот на растојанијата од точката M со афикс z до точките A и B чии афикси се z_1 и z_2, соодветно. ■

4.4. Пример. Определи го множеството точки, кои соодветствуваат на комплексните броеви за кои е исполнет условот

$$|2z|\ge|1+z^2|.$$

Решение. Ставаме $z=x+iy$ и добиваме

$$|1+z^2|=|1+(x+iy)^2|=\sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}\ .$$

Според тоа,

$$4(x^2+y^2)\geq 1+x^4+y^4+2x^2-2y^2-2x^2y^2+4x^2y^2\,,$$

$$1+x^4+y^4-2x^2-2y^2+2x^2y^2-4y^2\leq 0\,,$$

$$(x^2+y^2-1)^2-4y^2\leq 0\,,$$

$$(x^2+y^2-1-2y)(x^2+y^2-1+2y)\leq 0$$

или

$$(x^2+(y-1)^2-2)(x^2+(y+1)^2-2)\leq 0\,.$$

Последното неравенство е исполнето ако и само ако

$$x^2+(y-1)^2-2\geq 0 \text{ и}$$

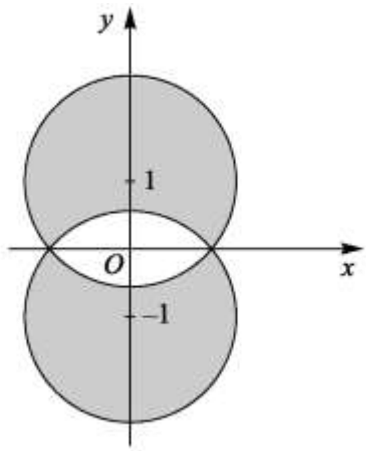
$$x^2+(y+1)^2-2\leq 0$$

или

$$x^2+(y-1)^2-2\leq 0 \text{ и}$$

$$x^2+(y+1)^2-2\geq 0\,.$$

Бараното множество точки е претставено со штрафираната површина на цртеж десно. ■

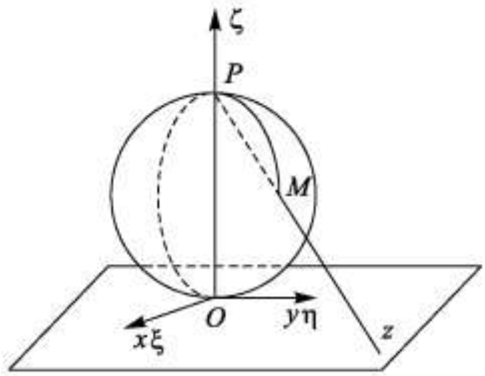


5. ПРОШИРЕНА КОМПЛЕКСНА РАМНИНА. РИМАНОВА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

5.1. Стереографска проекција. Во Евклидскиот простор $\mathbf{R}^3$ со Декартови правоаголни координати ξ,η,ζ да ја разгледаме сферата S со центар во точката $(0,0,\frac{1}{2})$ и радиус $\frac{1}{2}$:

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\zeta=0\,. \tag{1}$$

Рамнината $\zeta = 0$ ја идентификуваме со комплексната рамнина $\mathbf{C}$, реалната оска $\operatorname{Im} z = 0$ се совпаѓа со оската $\eta = 0$, $\zeta = 0$, а имагинарната оска $\operatorname{Re} z = 0$ се совпаѓа со оската $\zeta = 0$, $\xi = 0$.



Од точката $P(0,0,1)$ повлекуваме права која ја сече сферата S во точка $M(\xi,\eta,\zeta)$, различна од P. Пресекот на правата PM со комплексната рамнина го означуваме со $z = x + iy$. Точката $M(\xi,\eta,\zeta)$ ја нарекуваме *стереографска проекција* на точката z врз сферата S со *пол* P (види цртеж).

Стереографската проекција воспоставува обратно еднозначно соодветствие помеѓу точките од комплексната рамнина $\mathbf{C}$ и точките од сферата S без точката P. Според тоа, секоја точка на сферата S, без полот P, можеме да ја разгледуваме како точка од комплексната рамнина. Ваквата интерпретација на комплексните броеви ја нарекуваме *интерпретација на Риман*, а S ја нарекуваме *Риманова сфера*.

Точките $P(0,0,1)$, $M(\xi,\eta,\zeta)$ и z се колинеарни, па затоа

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta - 1}{-1}$$

или

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta},\ y = \frac{\eta}{1-\zeta},\ z = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}. \tag{2}$$

Според тоа, $|z|^2 = \frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)^2}$ и ако замениме во (1) добиваме $|z|^2 = \frac{\zeta}{1-\zeta}$ односно

$$\zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}. \tag{3}$$

Ако замениме во (2) иземеме предвид дека $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ добиваме

$$\xi = \frac{z+\bar{z}}{2(1+|z|^2)},\ \eta = \frac{z-\bar{z}}{2i(1+|z|^2)}. \tag{4}$$

Формулите (3) и (4) ги нарекуваме *формули на стереографската проекција.*

5.2. Проширена комплексна рамнина. Во 5.1 воспоставивме обратно еднозначно соодветствие меѓу комплексната рамнина и Римановата сфера S, без полот P. Ако на множеството $\mathbf{C}$ го додадеме "идеалниот комплексен број" $z=\infty$ и ја "потполниме" комплексната рамнина присоединувајќи кон неа единствена бескрајно оддалечена точка, која ја означуваме со симболот ∞, тогаш имаме биекција помеѓу Римановата сфера S и множеството $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$, при што полот P соодветствува на бескрајно оддалечената точка ∞.

Комплексната рамнина заедно со бескрајно оддалечената точка ќе ја наречеме *проширена комплексна рамнина* и ќе ја означуваме со $\mathbf{C}_\infty=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$. Да забележиме дека, за разлика од конечните точки бесконечната точка не учествува во алгебарските операции со комплексните броеви.

5.3. Растојание во проширената рамнина. Во комплексната рамнина $\mathbf{C}$ растојанието меѓу точките z и z' го дефиниравме со $|z-z'|$. Во $\mathbf{C}_\infty$ дефинираме растојание меѓу точките z и z', $d(z,z')$ како растојание меѓу соодветните стереографски проекции на точките z и z'. Имено, ако $M(\xi,\eta,\zeta)$ и $M'(\xi',\eta',\zeta')$ се стереографските проекции на точките $z\neq\infty$ и z', тогаш

$$d(z,z')=\sqrt{(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2}=\frac{|z-z'|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z'|^2}}$$

и ако $z'=\infty$, тогаш

$$d(z,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

5.4. Теорема. При стереографската проекција секоја кружница од комплексната рамнина на Римановата сфера се пресликува во кружница која не го содржи полот, и обратно.

Доказ. Нека

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0,\quad A,B,C\in\mathbf{R} \tag{5}$$

е произволна кружница во комплексната рамнина xOy. Од (2) и (5) добиваме $\frac{\zeta}{1-\zeta}+A\frac{\xi}{1-\zeta}+B\frac{\eta}{1-\zeta}+C=0$, односно

$$A\xi+B\eta+(1-C)\zeta+C=0. \tag{6}$$

Равенката (6) е равенка на рамнина која не минува низ полот $P(0,0,1)$. Според тоа, координатите ξ,η,ζ ги задоволуваат равенките (1) и (6), па затоа точките (ξ,η,ζ) лежат на сферата (1) и рамнината (6), т.е. формираат кружница на Римановата сфера, која не минува низ полот.

Обратно, секоја кружница на Римановата сфера (1), која не минува низ полот при стереографската проекција се пресликува во кружница на комплексната рамнина, бидејќи, користејќи произволни броеви A,B,C равенката на пресечната рамнина можеме да ја претставиме во вид (6). ■

5.5. Теорема. При стереографската проекција секоја права на комплексната рамнина се пресликува во кружница која го содржи полот, и обратно.

Доказ. Нека

$$Ax+By+C=0,\quad A,B,C\in\mathbf{R} \tag{7}$$

е произволна права во комплексната рамнина xOy. Од (2) и (7) добиваме

$$A\frac{\xi}{1-\zeta}+B\frac{\eta}{1-\zeta}+C=0$$

односно

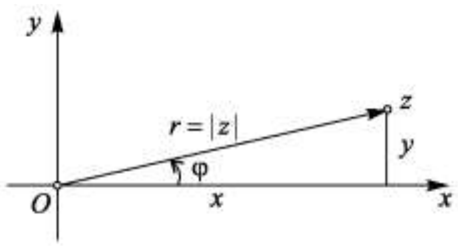
$$A\xi+B\eta+-C\zeta+C=0\,. \tag{8}$$

Равенката (8) е равенка на рамнина која минува низ полот $P(0,0,1)$. Според тоа, координатите ξ,η,ζ ги задоволуваат равенките (1) и (8), па затоа точките (ξ,η,ζ) лежат на сферата (1) и рамнината (8), т.е. формираат кружница на Римановата сфера, која минува низ полот.

Обратно, секоја кружница на Римановата сфера (1), која минува низ полот при стереографската проекција се пресликува во кружница на комплексната рамнина, бидејќи, користејќи произволни броеви A,B,C равенката на пресечната рамнина можеме да ја претставиме во вид (8). ■

5.6. Нека l и q се две криви на Римановата сфера (1), кои се сечат во точка M и во оваа точка може да се повлечат тангенти кон кривите l и q, кои тангенти образуваат агол α. Нека l',q' и M' се сликите на l, q и M, соодветно, при стереографската проекција врз комплексната рамнина. Може да се докаже дека аголот меѓу тангентите на кривите l' и q', повлечени во точката M' е еднаков на α. Доказот на ова тврдење нема да го презентираме, бидејќи истиот излегува надвор од рамките на нашите разгледувања.

6. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ЗАПИС НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ



6.1. Аргумент на комплексен број. Аголот φ, кој го зафаќа радиус-векторот на точката z со позитивната насока на реалната оска, го нарекуваме *аргумент на комплексниот број* z, и за него ја прифаќаме ознаката $\varphi = \operatorname{Arg} z$, (види цртеж). Аргументот го сметаме за позитивен или негативен во зависност од тоа, дали истиот е ориентиран од позитивната насока на реалната оска кон позитивната или кон негативната насока на имагинарната оска, соодветно.

За бројот $z = 0$ аргументот не е определен, па затоа во сите натамошни разгледувања поврзани со аргументот, претпоставуваме, дека $z \neq 0$.

Положбата на точката z во комплексната рамнина е еднозначно определена како со нејзините Декартови координати x, y така и со поларните координати $r = |z|$ и $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Овие координати меѓу себе се поврзани со формулите

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \qquad (1)$$

За дадена точка z нејзиниот модул е еднозначно определен, а аргументот со точност до собирок $2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Вредноста на аргументот, која го задоволува условот $0 < \operatorname{Arg} z \leq 2\pi$ ја нарекуваме *главна вредност на аргументот* и ја означуваме со $\arg z$. Во натамошните разгледувања најчесто работиме со главната вредност на аргументот.

6.2. Тригонометриски запис на комплексен број. Од формулите (1), кои ги сврзуваат Декартовите и поларните координати на точката z, го добиваме таканаречениот *тригонометриски запис на комплексен број*

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)). \qquad (2)$$

Користејќи го записот (2) за производот на комплексните броеви:

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ и } z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

добиваме

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \qquad (3)$$

Понатаму, според 1.10 и дефиницијата на $\arg$ од

$$z_1 z_2 = |z_1 z_2|(\cos(\arg(z_1 z_2)) + i\sin(\arg(z_1 z_2)))$$

следува, дека

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi\,,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{4}$$

Аналогно, од равенството $z_1 = z_2 z_3$, при $z_2 \neq 0$, од 3.11 добиваме

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi\,,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

6.3. Моаврова формула. Формулите (3) и (4), за производ на два комплексни броеви, со помош математичка индукција, лесно се обопштуваат за конечно многу множители $z_1, z_2, ..., z_n$. Имено,

$$\arg(z_1 z_2 ... z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + ... + \arg z_n + 2k\pi\ ,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{5}$$

Специјално, ако $z_1 = z_2 = ... = z_n$, тогаш добиваме

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{и} \quad \arg z^n = n \arg z + 2k\pi\ ,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

односно

$$z^n = |z|^n (\cos(n \arg z) + i\sin(n \arg z)). \tag{6}$$

Формулата (6) е позната како *Моаврова формула.*

6.4. Пример. Пресметај ја разликата

$$(-1 + i\sqrt{3})^9 - (1 + i\sqrt{3})^9 .$$

Решение. Од

$$|-1 + i\sqrt{3}| = 2 \ \text{ и } \ \arg(-1 + i\sqrt{3}) = \tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\,,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

добиваме

$$-1 + i\sqrt{3} = 2(\cos \tfrac{2\pi}{3} + i\sin \tfrac{2\pi}{3}) .$$

Согласно Моавровата формула имаме:

$$(-1 + i\sqrt{3})^9 = 2^9(\cos \tfrac{2\pi}{3} \cdot 9 + i\sin \tfrac{2\pi}{3} \cdot 9) = 2^9$$

Аналогно добиваме

$$(1 + i\sqrt{3})^9 = 2^9(\cos \tfrac{9\pi}{3} + i\sin \tfrac{9\pi}{3}) = -2^9 .$$

Според тоа,

$$(-1 + i\sqrt{3})^9 - (1 + i\sqrt{3})^9 = 2^9 - (-2^9) = 2^{10} . \ ■$$

6.5. Пример. а) Пресметај

$$(1 - i\sqrt{3})^3 (1 + i)^{10} .$$

б) Нека

$$f(n)=(\tfrac{1+i}{\sqrt{2}})^n+(\tfrac{1-i}{\sqrt{2}})^n .$$

Пресметај $f(1990)+f(1994)$.

Решение. а) Имаме

$$1-i\sqrt{3}=2(\cos\tfrac{\pi}{3}-i\sin\tfrac{\pi}{3}) \text{ и } 1+i=\sqrt{2}(\cos\tfrac{\pi}{4}+i\sin\tfrac{\pi}{4}) .$$

Според тоа,

$$(1-i\sqrt{3})^3(1+i)^{10}=2^3(\cos\pi-i\sin\pi)\cdot 2^5(\cos\tfrac{5\pi}{2}+i\sin\tfrac{5\pi}{2})$$

$$=2^8(-1-i\cdot 0)(0+i)=-256i.$$

б) Од

$$\tfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\cos\tfrac{\pi}{4}+i\sin\tfrac{\pi}{4} \text{ и } \tfrac{1-i}{\sqrt{2}}=\cos\tfrac{\pi}{4}-i\sin\tfrac{\pi}{4}$$

добиваме

$$f(n)=2\cos\tfrac{n\pi}{4} .$$

Значи,

$$f(1990)+f(1994)=2\cos\tfrac{1990\pi}{4}+2\cos\tfrac{1994\pi}{4}=2\cos\tfrac{995\pi}{2}+2\cos\tfrac{997\pi}{2}=0 . \blacksquare$$

6.6. Пример. Ако $z+\frac{1}{z}=1$, пресметај $z^{158}+z^{152}+\frac{2}{z^{122}}$.

Решение. Од $z+\frac{1}{z}=1$ следува $z^2-z+1=0$, т.е.

$$z=\tfrac{1}{2}\pm i\tfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos(\pm\tfrac{\pi}{3})+i\sin(\pm\tfrac{\pi}{3}) .$$

Според тоа,

$$z^{158}+z^{152}+\tfrac{2}{z^{122}}=\cos\tfrac{158\pi}{3}\pm i\sin\tfrac{158\pi}{3}+\cos\tfrac{152\pi}{3}\pm i\sin\tfrac{158\pi}{3}-2(-\cos\tfrac{122\pi}{3}\pm i\sin\tfrac{122\pi}{3})$$

$$=\cos\tfrac{2\pi}{3}\pm i\sin\tfrac{2\pi}{3}+\cos\tfrac{2\pi}{3}\pm i\sin\tfrac{2\pi}{3}-2(-\cos\tfrac{2\pi}{3}\pm i\sin\tfrac{2\pi}{3})$$

$$=4\cos\tfrac{2\pi}{3}=-2 . \blacksquare$$

7. КОРЕНУВАЊЕ НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

7.1. Дефиниција. Нека е даден комплексен број $z\neq 0$ и природен број n. $n-$*ти корен* од z дефинираме како комплексен број w за кој важи

$$w^n=z . \qquad (1)$$

Притоа ја прифаќаме ознаката $w = \sqrt[n]{z}$.

Користејќи ја Моавровата формула

$$z^n = |z|^n (\cos(n \arg z) + i \sin(n \arg z))$$

и тригонометриските записи

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)) \text{ и } w = |w|(\cos(\arg w) + i \sin(\arg w))$$

добиваме

$$|w|^n (\cos n(\arg w) + i \sin n(\arg w)) = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$$

односно

$$|w|^n = |z| \quad \text{и} \quad n(\arg w) = \arg z + 2k\pi, \ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \qquad (2)$$

Според тоа,

$$|w| = \sqrt[n]{|z|} \ , \ \arg w = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

т.е.

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\arg z + 2k\pi}{n}) \ , \ k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \qquad (3)$$

Ако во формулата (3) ставиме $k = 0,1,2,...,n-1$ за w добиваме n различни вредности $w_0, w_1, ..., w_{n-1}$. Ставајќи $k = n$, заради периодичноста на тригонометриските функции повторно го добиваме бројот w_0 итн. Според тоа, $n-$ от корен од комплексниот број z, има точно n различни вредности, кои се добиваат од формулата (3) за $k = 0,1,2,...,n-1$.

7.2. Пример. Пресметај $\sqrt[3]{27i^5}$.

Решение. Од $i^5 = i^4 \cdot i = i = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}$ добиваме

$$\sqrt[3]{27i^5} = \sqrt[3]{27i} = \sqrt[3]{27(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2})} = 3(\cos\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} + i \sin\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3})$$

$$= 3(\cos\frac{(4k+1)\pi}{6} + i \sin\frac{(4k+1)\pi}{6}),$$

за $k = 0,1,2.$ ■

7.3. Пример. Докажи дека за секои комплексни броеви a и b важи

$$2(|a| + |b|) = |a + b - 2\sqrt{ab}| + |a + b + 2\sqrt{ab}|,$$

каде со $\sqrt{ab}$ е означен еден од двата корени на ab.

Решение. Од равенството

$$2\left(|a|+|b|\right)=2(|\sqrt{a}|^2+|\sqrt{b}|^2)$$

добиваме

$$\begin{aligned}2\left(|a|+|b|\right)&=|\sqrt{a}+\sqrt{b}|^2+|\sqrt{a}-\sqrt{b}|^2\\&=|(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2|+|(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2|\\&=|a+b+2\sqrt{ab}|+|a+b-2\sqrt{ab}|,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

7.4. Пример. Докажи дека за секои комплексни броеви a и b важи

$$|a+b|+|a-b|=|a+\sqrt{a^2-b^2}|+|a-\sqrt{a^2-b^2}|,$$

каде со $\sqrt{a^2-b^2}$ е означен еден од двата корени на a^2-b^2.

Решение. Од пример 3.16 добиваме

$$\begin{aligned}&(|a+\sqrt{a^2-b^2}|+|a-\sqrt{a^2-b^2}|)^2=\\&\quad=|a+\sqrt{a^2-b^2}|^2+|a-\sqrt{a^2-b^2}|^2+2|a+\sqrt{a^2-b^2}|\cdot|a-\sqrt{a^2-b^2}|\\&\quad=|a+\sqrt{a^2-b^2}|^2+|a-\sqrt{a^2-b^2}|^2+2|a^2-(a^2-b^2)|\\&\quad=2(|a^2|+|\sqrt{a^2-b^2}^2|)+2|b^2|=2(|a^2|+|b^2|)+2|a^2-b^2|\\&\quad=|a-b|^2+|a+b|^2+2|a-b|\cdot|a+b|=(|a-b|+|a+b|)^2\end{aligned}$$

односно

$$|a+b|+|a-b|=|a+\sqrt{a^2-b^2}|+|a-\sqrt{a^2-b^2}|.\ ■$$

7.5. Пример. Реши ја равенката

$$(x+i)^n+(x-i)^n=0,\ n\in\mathbf{N}, n>1.$$

Решение. Бидејќи $x\neq i$, дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(\tfrac{x+i}{x-i})^n=-1.$$

Според тоа,

$$\tfrac{x+i}{x-i}=\sqrt[n]{-1}=\sqrt[n]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\tfrac{\pi+2k\pi}{n}+i\sin\tfrac{\pi+2k\pi}{n},\ k=0,1,...,n-1.$$

Од последното равенка добиваме

$$\begin{aligned}&\tfrac{x+i}{x-i}-1=\cos\tfrac{\pi+2k\pi}{n}+i\sin\tfrac{\pi+2k\pi}{n}-1,\\&\tfrac{2i}{x-i}=2i\sin\tfrac{\pi+2k\pi}{2n}(\cos\tfrac{\pi+2k\pi}{2n}-\tfrac{1}{i}\sin\tfrac{\pi+2k\pi}{n}),\end{aligned}$$

$$x-i=\frac{1}{\sin\frac{\pi+2k\pi}{2n}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n})},$$

$$x-i=\frac{\cos\frac{\pi+2k\pi}{2n}-i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}}{\sin\frac{\pi+2k\pi}{2n}},$$

$$x-i=\operatorname{ctg}\frac{\pi+2k\pi}{2n}-i\,,$$

што значи

$$x=\operatorname{ctg}\frac{\pi+2k\pi}{2n}\,,\ k=0,1,\dots,n-1.\ \blacksquare$$

7.6. $n-$ **ти корени на единицата.** Во 7.1 зборувавме за коренување на комплексните броеви. Ако $z=1$, тогаш $\arg z=0$ и според (3) $n-$те различни корени на бројот 1 се зададени со

$$u_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ \ k=0,1,2,\dots,n-1. \tag{4}$$

Ако ставиме

$$u=u_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},$$

тогаш од Моавровата формула добиваме

$$u_k=u^k,\ \ k=0,1,\dots,n-1.$$

Да забележиме дека, во геометриска смисла, при $n\geq 3,$ точките во комплексната рамнина чии афикси се $n-$тите корени на единицата образуваат правилен $n-$аголник, впишан во единечната кружница и едно теме на $n-$аголникот се совпаѓа со точката чиј афикс е $z=1$.

7.8. Пример. Нека $S_p=\sum_{k=0}^{n-1}u_k^p$ е збирот на $p-$тите степени на $n-$ те корени на единицата, $n\in\mathbf{N}$. Докажете дека

$$S_p=\begin{cases}n, & \text{ако } n\mid p\\ 0, & \text{ако } n\nmid p.\end{cases}$$

Решение. Од

$$u_k=u^k,\ \ k=0,1,\dots,n-1$$

и

$$u=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},$$

добиваме

$$S_p = 1 + u^p + u^{2p} + \ldots + u^{(n-1)p}. \tag{5}$$

Ако $n \mid p$ и $\frac{p}{n} = m,$ тогаш

$$u^p = u^{mn} = (u^n)^m = 1^m = 1$$

и од (5) следува $S_p = n.$

Нека $n \nmid p.$ Притоа важи

$$u^{np} = (u^n)^p = 1^p = 1.$$

Од $n \nmid p$ следува

$$u^p - 1 \neq 0,$$

па затоа

$$S_p = 1 + u^p + u^{2p} + \ldots + u^{(n-1)p} = \frac{u^{np}-1}{u^p-1} = 0. \ \blacksquare$$

7.9. Пример. Ако $n = 2,3,\ldots$ докажи дека

а) $\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$, и

б) $\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$.

Решение. Равенката $z^n - 1 = 0$ има n решенија и тоа се $n-$те корени на единицата

$$u_k = u^k, \quad k = 0,1,\ldots,n-1 \text{ и } u = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Од пример 7.8 следува дека нивниот збир е еднаков на нула. Според тоа,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = 0,$$

т.е.

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i(\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n}) = -1.$$

Последното равенство е еквивалентно на равенствата а) и б) кои требаше да ги докажеме. ■

7.10. Дефиниција. Комплексниот број u го нарекуваме *примитивен* n-*ти корен на единицата*, ако $u^n = 1$ и ниеден понизок степен на u не е еднаков на 1.

7.11. Пример. Нека

$$u_k = u^k,\ k = 0,1,\dots,n-1$$

се n-те корени на единицата. Докажи дека u_k е примитивен n-ти корен на единицата ако и само ако n и k се заемно прости броеви.

Решение. Нека n и k се заемно прости броеви и да допуштиме дека за некој $r < n$ важи $u_k^r = 1.$ Од Моавровата формула имаме

$$1 = u_k^r = \cos\tfrac{2kr\pi}{n} + i\sin\tfrac{2kr\pi}{n}.$$

Од последното равенство имаме

$$\cos\tfrac{2kr\pi}{n} = 1,\ \ \sin\tfrac{2kr\pi}{n} = 0.$$

Според тоа, $\frac{kr}{n} \in \mathbf{Z}$ и како n и k се заемно прости добиваме $n \mid r,$ што не е можно бидејќи $r < n$. Значи, u_k е примитивен n-ти корен на единицата.

Обратно, нека u_k е примитивен n-ти корен на единицата. Да претпоставиме дека најголемиот заеднички делител на n и k е $d,$ $d > 1.$ Нека $k = k_1 d,$ $n = n_1 d.$ Тогаш

$$u_k^{n_1} = (u_1^k)^{n_1} = u_1^{n_1 k} = u_1^{k_1 d n_1} = u_1^{k_1 n} = (u_1^n)^{k_1} = 1^{k_1} = 1,$$

што противречи на примитивноста на u_k, бидејќи $n_1 < n.$ ■

8. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛЕН ЗАПИС НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

8.1. Во досегашните разгледувања ги презентиравме алгебарскиот и тригонометрискиот запис на комплексните броеви. Во овој дел ќе се задржиме на таканаречениот екпоненцијален запис на комплексните броеви.

Теорема. Нека функцијата $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ е дефинирана со

$$f(\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha \text{, за секој } \alpha \in \mathbf{R}.$$

Тогаш,

a) $f(0) = 1$ и $f(\alpha) \neq 0$, за секој $\alpha \in \mathbf{R}$.

b) $f(\alpha+\beta) = f(\alpha)f(\beta)$, за секои $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

c) $f(-\alpha) = \frac{1}{f(\alpha)}$, за секој $\alpha \in \mathbf{R}$

Доказ. a) Јасно, $f(0)=\cos 0+i\sin 0=1$. Нека постои $\alpha\in\mathbf{R}$, таков што $f(\alpha)=0$. Според тоа, постои $\alpha\in\mathbf{R}$, таков што $\cos\alpha+i\sin\alpha=0$, односно $\cos\alpha=\sin\alpha=0$, што противречи на основниот тригонометриски идентитет

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

b) За секои $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ важи

$$\begin{aligned} f(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\\ &= (\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)\\ &= f(\alpha)f(\beta). \end{aligned}$$

c) За секој $\alpha\in\mathbf{R}$ имаме

$$\begin{aligned} f(-\alpha) &= \cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)=\cos\alpha-i\sin\alpha\\ &= \tfrac{(\cos\alpha-i\sin\alpha)(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{\cos\alpha+i\sin\alpha}=\tfrac{1}{\cos\alpha+i\sin\alpha}=\tfrac{1}{f(\alpha)}\,. \blacksquare \end{aligned}$$

8.2. Во претходната теорема докажавме дека функцијата f ги задоволува вообичаените својства на експоненцијалната функција, па затоа природно е да ја воведеме ознаката $f(\alpha)=e^{i\alpha}$, за секој $\alpha\in\mathbf{R}$. При вакво означување својствата б) и в) од претходната теорема можеме да ги запишеме во обликот

$$e^{i\alpha}e^{i\beta}=e^{i(\alpha+\beta)} \tag{1}$$

$$e^{-i\alpha}=\tfrac{1}{e^{i\alpha}}\,. \tag{2}$$

Ако ги искористиме релациите (1) и (2) и принципот на математичка индукција, добиваме

$$(e^{i\alpha})^n=e^{in\alpha},\ \text{за}\ n=0,\pm1,\pm2,\dots. \tag{3}$$

8.3. Ојлерови формули. Од досега изнесеното следува дека секој комплексен број z, таков што $|z|=1$ и $\varphi=\arg z$ може да се запише во видот

$$z=\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}\,. \tag{4}$$

Притоа, $e^{2\pi i}=1, e^{\pi i}=-1, e^{\frac{\pi i}{2}}=i, e^{\frac{3\pi i}{2}}=-i$. Ако φ го замениме со $-\varphi$ добиваме

$$\cos\varphi-i\sin\varphi=e^{-i\varphi}\,. \tag{5}$$

Од релациите (4) и (5) ги добиваме познатите *Ојлерови формули*:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2}, \tag{6}$$

со чија помош тригонометриските функции $\cos$ и $\sin$ се изразуваат преку експоненцијалната функција.

Овде само ќе забележиме дека во теорема 1 ние не ја докажавме формулата (4), туку само дадовме "прифатливо" образложение на истата.

8.4. Од формулата (4) и тригонометрискиот запис на комплексен број следува дека секој комплексен број $z \neq 0$ може да се запише во видот

$$z = re^{i\varphi}, \tag{7}$$

каде $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$. Записот (7) на комплексниот број $z \neq 0$ го нарекуваме *експоненцијален запис* на z.

Ако ги искористиме формулите (1) и (2), тогаш за операциите множење и делење на комплексни броеви, запишани во експоненцијален запис, добиваме

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{8}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{9}$$

Сега нека $z = re^{i\varphi}$. Според (4) и (5) добиваме $\bar{z} = re^{-i\varphi}$. Значи, ако $\varphi = \arg z$, тогаш $-\varphi = \arg \bar{z}$.

8.5. Пример. Пресметај ги збировите:

а) $A = \cos x + \cos(x+\alpha) + \cos(x+2\alpha) + \ldots + \cos(x+n\alpha)$, и

b) $B = \sin x + \sin(x+\alpha) + \sin(x+2\alpha) + \ldots + \sin(x+n\alpha)$.

Решение. Земаме $S = A + iB$. Притоа имаме:

$$\begin{aligned} S &= e^{ix} + e^{i(x+\alpha)} + e^{i(x+2\alpha)} + \ldots + e^{i(x+n\alpha)} \\ &= e^{ix}(1 + e^{i\alpha} + e^{i2\alpha} + \ldots + e^{in\alpha}) \\ &= \frac{e^{ix}(e^{i(n+1)\alpha}-1)}{e^{i\alpha}-1}. \end{aligned}$$

Бидејќи $A = \operatorname{Re} S$ и $B = \operatorname{Im} S$, од последната формула можеме да ги пресметаме A и B. Ако ги поделиме броителот и именителот со $e^{i\frac{\alpha}{2}}$, тогаш според Ојлеровите формули именителот ќе биде еднаков на $2i\sin\frac{\alpha}{2}$, а броителот ќе биде еднаков на на

$$\cos(x+(n+\tfrac{1}{2})\alpha)-\cos(x-\tfrac{\alpha}{2})+i(\sin(x+(n+\tfrac{1}{2})\alpha)-\sin(x-\tfrac{\alpha}{2}))=$$
$$=2\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}(-\sin(x+\tfrac{n\alpha}{2})+i\cos(x+\tfrac{n\alpha}{2}).$$

Според тоа,

$$A=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos(x+\frac{n\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}} \text{ и } B=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin(x+\frac{n\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \blacksquare$$

8.6. Забелешка. Ако во пример 8.5 ставиме $x=0$, добиваме

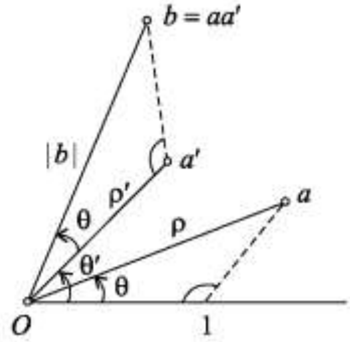
$$1+\cos\alpha+\cos2\alpha+...+\cos n\alpha=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos\frac{n+\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \text{ и}$$

$$\sin\alpha+\sin2\alpha+...+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n+\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \blacksquare$$

8.7. Нека со E ја означиме точката чиј афикс е 1. Да ги разгледаме точките A и A' чии афикси се

$$a=\rho e^{i\theta} \text{ и } a'=\rho' e^{i\theta'},$$

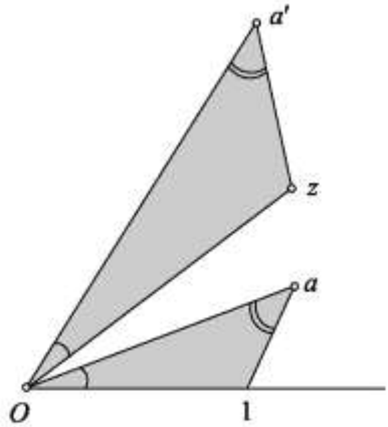
соодветно (цртеж десно). На производот $b=aa'$ соодветствува точка B, која ја добиваме како трето теме на триаголникот $OA'B$, ако овој триаголник го конструираме така што да биде сличен со триаголникот OEA.



Навистина, од сличноста на овие триаголници следува дека

$$\angle EOA=\angle A'OB,$$

односно $\arg b=\theta+\theta'$. Од исти причини точно е равенството $\rho:1=|b|:\rho'$, т.е. важи $b=\rho\rho'$, па затоа $b=aa'$.



Точката Z чиј афикс е комплексниот број $z=\frac{a'}{a}$ се добива со конструкција на триаголник OZA' кој е сличен на триаголникот OEA.

Навистина, од сличноста на овие триаголници следува дека $az=a'$, па затоа

$z=\frac{a'}{a}$, (цртеж лево).

Ако ја искористиме релацијата $a^n = a^{n-1}a$ и ги примениме постапките за конструкција на афиксите за производ и количник на два комплексни броја последователно можеме да ги конструираме точките

$...,A_{-3},A_{-2},A_{-1},E,A_1,A_2,A_3,...$

чии афикси се комплексните броеви

$...,a^{-3},a^{-2},a^{-1},a^0,a^1,a^2,a^3,...$,

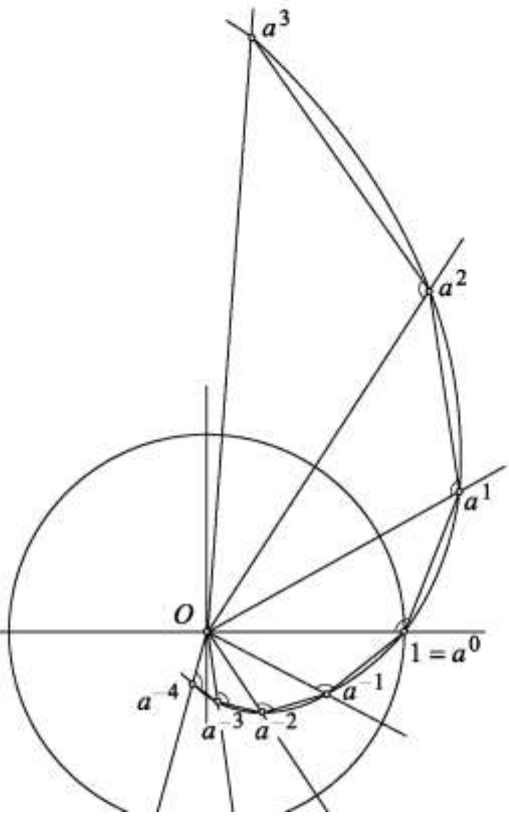
соодветно.

Нека $r>1$ и $0<\alpha<\pi$. Точките $A_2,A_3,...$ (цртеж десно), чии афикси се комплексните броеви $a^2,a^3,...$ се добиваат со последователно конструирање на сличните триаголници

$OEA_1,\ OA_1A_2,OA_2A_3,...$.

Ако со оваа постапка, но во обратна насока ги конструираме сличните триаголници

$OEA_1,OA_{-1}E,OA_{-2}A_{-1},OA_{-3}A_{-2},...$



ги добиваме точките

$A_{-1},A_{-2},A_{-3},...$

чии афикси се комплексните броеви

$$a^{-1},a^{-2},a^{-3},...\ .$$

Ако ставиме $\rho=r^n, \theta=n\alpha$ и од овие равенки го елиминираме n добиваме дека $\rho=r^{\frac{\theta}{\alpha}}$. Според тоа, сите степени a^n лежат на кривата која во поларни координати е дадена со претходната релација. Оваа крива во литературата е позната како *логаритамска* (*Бернулиева*) *спирала*.

Јасно, во претходните разгледувања модулите на степените растат или опаѓаат по геометриска, а аргументите по аритметичка прогресија.

Да забележиме дека, ако $r<1$ и $0<\alpha<\pi$, или $r>1$ и $-\pi<\alpha<0$, тогаш логаритамската спирала е во спротивна насока од спиралата дадена на горниот цртеж, и се обвиткува околу координатниот почеток додека θ расте. Меѓутоа, ако $r<1$ и $-\pi<\alpha<0$, тогаш логаритамската спирала го има истиот облик како на горниот цртеж.

9. МНОЖЕСТВОТО $\mathbf{C}^n$

9.1. Дефиниција. *Подредена* n*-торка* комплексни броеви ќе го нарекуваме записот $\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$, каде $a_i\in\mathbf{C}$, за $i=1,2,...,n$. Притоа ја прифаќаме ознаката $\mathbf{C}^n=\{(a_1,a_2,...,a_n)\,|\,a_i\in\mathbf{C}, i=1,2,...,n\}$.

9.2. Дефиниција. Нека $\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ и $\mathbf{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ се две подредени n-торки комплексни броеви, т.е. $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{C}^n$. *Збир* на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ја нарекуваме подредената n-торка $\mathbf{c}=(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n)$.

Притоа ја прифаќаме ознаката $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

9.3. Теорема. а) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$, за секои $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{C}^n$.

б) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, за секои $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbf{C}^n$.

в) Постои $\mathbf{o}\in\mathbf{C}^n$ таков што $\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{a}$, за секој $\mathbf{a}\in\mathbf{C}^n$.

г) За секој $\mathbf{a}\in\mathbf{C}^n$ постои $\mathbf{b}\in\mathbf{C}^n$ таков што $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{o}$.

Доказ. а) Нека $\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ и $\mathbf{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$. Ако го искористиме комутативниот закон на собирање на комплексни броеви, од дефиниција 9.2 следува

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n)=(b_1+a_1,b_2+a_2,...,b_n+a_n)=\mathbf{b}+\mathbf{a}.$$

б) Доказот е аналоген на доказот на тврдењето под а), со таа разлика што треба да се користи асоцијативниот закон за собирањето на комплексните броеви. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

в) За подредената n-торка $\mathbf{o}=(0,0,...,0)$ и за секој $\mathbf{a}\in\mathbf{C}^n$ важи

$$\mathbf{a}+\mathbf{o}=(a_1,a_2,...,a_n)+(0,0,...,0)=(a_1+0,a_2+0,...,a_n+0)=(a_1,a_2,...,a_n)=\mathbf{a}.$$

г) Нека е дадена подредената n-торка $\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$. Ставаме $\mathbf{b}=(-a_1,-a_2,...,-a_n)$. Тогаш,

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1-a_1,a_2-a_2,...,a_n-a_n)=(0,0,...,0)=\mathbf{o}.$$

Значи, за секој $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^n$ постои $\mathbf{b} \in \mathbf{C}^n$ таков што $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{o}$. Притоа подредената n-торка $\mathbf{b}$ ја нарекуваме спротивна на подредената n-торка $\mathbf{a}$ и ја означуваме со $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$. ■

9.4. Дефиниција. Нека $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ е подредена n-торка и $\lambda \in \mathbf{C}$. *Производ* на подредената n-торка $\mathbf{a}$ со комплексниот број λ ја нарекуваме подредената n-торка $\mathbf{c} = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n)$.

Притоа ја прифаќаме ознаката $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a}$.

9.5. Теорема. а) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$, за секои $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{C}^n$ и $\lambda \in \mathbf{C}$.

б) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}$, за секои $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ и $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^n$.

в) $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu \mathbf{a})$, за секои $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ и $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^n$.

г) $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ за секој $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^n$.

Доказ. а) Нека $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ и $\lambda \in \mathbf{C}$. Од дефиниција 9.4, со покоординатна примена на дистрибутивниот закон за операциите собирање и множење на комплексни броеви следува:

$$\begin{aligned}
\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \lambda((a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n)) \\
&= \lambda(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n) \\
&= (\lambda(a_1 + b_1), \lambda(a_2 + b_2), ..., \lambda(a_n + b_n)) \\
&= (\lambda a_1 + \lambda b_1, \lambda a_2 + \lambda b_2, ..., \lambda a_n + \lambda b_n) \\
&= (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n) + (\lambda b_1, \lambda b_2, ..., \lambda b_n) \\
&= \lambda(a_1, a_2, ..., a_n) + \lambda(b_1, b_2, ..., b_n)) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}.
\end{aligned}$$

Доказите на останатите тврдења се аналогни, при што е потребно да се искористат дистрибутивниот и асоцијативниот закон и фактот дека $1 \cdot z = z$, за секој $z \in \mathbf{C}$. ■

9.6. Дефиниција. *Скаларен (надворешен) производ* на подредените n-торки $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ го нарекуваме комплексниот број

$$f = a_1 \overline{b_1} + a_2 \overline{b_2} + ... + a_n \overline{b_n}.$$

Притоа ја прифаќаме ознаката $f = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

9.7. Теорема. а) $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \in \mathbf{R}^+$ за секој $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^n$.

б) $(\mathbf{a},\mathbf{b})=\overline{(\mathbf{b},\mathbf{a})}$, за секои $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{C}^n$.

в) $(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{c})+(\mathbf{b},\mathbf{c})$ за секои $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbf{C}^n$.

г) $(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{b})+(\mathbf{a},\mathbf{c})$ за секои $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbf{C}^n$.

д) $(\lambda\mathbf{a},\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a},\mathbf{b})$ и $(\mathbf{a},\lambda\mathbf{b})=\overline{\lambda}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ за секои $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{C}^n$ и $\lambda\in\mathbf{C}$.

Доказ. а) Нека $\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$. Тогаш

$$(\mathbf{a},\mathbf{a})=a_1\overline{a_1}+a_2\overline{a_2}+...+a_n\overline{a_n}=|a_1|^2+|a_2|^2+...+|a_n|^2\in\mathbf{R}^+ .$$

б) Од својствата на коњугиран комплексен број имаме

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=a_1\overline{b_1}+a_2\overline{b_2}+...+a_n\overline{b_n}=\overline{\overline{a_1}b_1+\overline{a_2}b_2+...+\overline{a_n}b_n}=\overline{(\mathbf{b},\mathbf{a})} .$$

Доказите на останатите тврдења непосредно следуваат од дефиницијата на скаларен производ, дистрибутивниот и асоцијативниот закон за операциите во множеството комплексни броеви и тврдењето под б). Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

9.8. Забелешка. Да забележиме дека збир на подредени n-торки и производ на подредена n-торка со број е подредена n-торка, а додека скаларниот производ на две подредени n-торки е комплексен број.

9.9. Дефинираме пресликување T од $\mathbf{C}^n$ во $\mathbf{C}^n$, со кое на подредената n-торка $\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ и ја придружуваме подредената n-торка

$$T\mathbf{a}=(a_2,a_3,...,a_n,a_1) .$$

По индукција наоѓаме $T^m\mathbf{a}=TT^{m-1}\mathbf{a}$, за $m\geq 2$. На пример,

$$T^2\mathbf{a}=T(a_2,a_3,...,a_n,a_1)=(a_3,a_4,...,a_n,a_1,a_2) .$$

Дефинираме пресликување T_1 од $\mathbf{C}^n$ во $\mathbf{C}^n$, со кое на подредената n-торка $\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ и ја придружуваме подредената n-торка $T_1\mathbf{a}=(a_n,a_1,...,a_{n-1})$. Очигледно, $T_1T\mathbf{a}=TT_1\mathbf{a}=\mathbf{a}$, за секој $\mathbf{a}\in\mathbf{C}^n$, т.е. пресликувањата T и T_1 се инверзни едно на друго. Според тоа, $T_1=T^{-1}$. Притоа, по индукција определуваме $T^{-m}\mathbf{a}=T^{-1}T^{-(m-1)}\mathbf{a}$, за $m\geq 2$.

9.10. Теорема. а) $T(\mathbf{a}+\mathbf{b})=T\mathbf{a}+T\mathbf{b}$ за секои $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{C}^n$.

б) $T(\lambda\mathbf{a})=\lambda T\mathbf{a}$ за секој $\lambda\in\mathbf{C}$ и секој $\mathbf{a}\in\mathbf{C}^n$.

в) Ако $\mathbf{a}=(\alpha,\alpha,...,\alpha)$, $\alpha\in\mathbf{C}$, тогаш $T\mathbf{a}=\mathbf{a}$.

г) $T^n\mathbf{a} = T^{-n}\mathbf{a} = \mathbf{a}$, за секој $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^n$, (поошто $T^{nk}\mathbf{a} = T^{-nk}\mathbf{a} = \mathbf{a}$ за секој $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^n$ и секој $k \in \mathbf{N}$).

д) $(T^m\mathbf{a}, T^s\mathbf{b}) = (T^{m+k}\mathbf{a}, T^{s+k}\mathbf{b})$ за секои $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{C}^n$ и секои $m, k, s \in \mathbf{N}$.

Доказ. а) Нека $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ се произволни елементи на $\mathbf{C}^n$. Тогаш,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= T((a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n)) \\ &= T(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n) \\ &= (a_2 + b_2, a_3 + b_3, ..., a_n + b_n, a_1 + b_1) \\ &= (a_2, a_3, ..., a_n, a_1) + (b_2, b_3, ..., b_n, b_1) \\ &= T\mathbf{a} + T\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Останатите тврдења се докажуваат аналогно, при што се користат дефиницијата на пресликувањето T и својствата на операциите во $\mathbf{C}^n$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

9.11. Последица. За секој $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^n$ важи

$$(T\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (T^2\mathbf{a}, T\mathbf{a}) = \dots .$$

Доказ. Непосредно следува од теорема 9.10. д). ■

II ГЛАВА
ТРАНСФОРМАЦИИ ВО ЕВКЛИДСКАТА РАМНИНА

Во оваа глава прво се разгледани некои елементарни трансформации на комплексната рамнина. Притоа посебно внимание е посветено на сличностите, при што се разгледани нивните групови својства, а исто така е дадена и класификација на истите. Понатаму, во одделни параграфи се разработени инверзијата и трансформацијата на Мобиус, која е најважна елементарна трансформација на комплексната рамнина.

1. РАВЕНКА НА ПРАВА. НОРМАЛНИ И ПАРАЛЕЛНИ ПРАВИ

1.1. Нека правата (p) не поминува низ координатниот почеток и нека точката A, со афикс a, е симетрична на координатниот почеток O во однос на правата (p). Тогаш, точката B, со афикс z, припаѓа на правата (p) ако и само ако $\overline{OB}=\overline{AB}$, т.е. $|z|=|z-a|$, односно

$$z\bar{z}=(z-a)(\bar{z}-\bar{a}).$$

Последното равенство можеме да го запишеме во видот

$$\bar{a}z+a\bar{z}=a\bar{a}. \tag{1}$$

Ако правата (p) минува низ координатниот почеток и точките A и A', со афикси a и a', соодветно, се заемно симетрични во однос на координатниот почеток O и во однос на (p), тогаш за произволна точка, со афикс z, од правата (p) важи $\overline{AB}=\overline{A'B}$, т.е. $|z+a|=|z-a|$, односно

$$(z+a)(\bar{z}+\bar{a})=(z-a)(\bar{z}-\bar{a}).$$

Последното равенство можеме да го запишеме во обликот

$$\bar{a}z+a\bar{z}=0. \tag{2}$$

Ако $a=re^{i\varphi}$, тогаш $\bar{a}=re^{-i\varphi}$, па ако равенките (1) и (2) ги поделиме со $\bar{a}$ ги добиваме равенките

$$z=\eta\bar{z}+a \tag{3}$$

и

$$z = \eta \bar{z}\,, \tag{4}$$

каде $\eta = -\frac{a}{\bar{a}} = -e^{2i\varphi}$. Бројот η го нарекуваме *комплексен аглов коефициент за правата* (p), а точка A ја нарекуваме *огледална точка на правата* (p). Очигледно секоја права (p), која не поминува низ координатниот почеток е определена со огледалната точка A, со афикс $a = re^{i\varphi}$, и комплексниот аглов коефициент $\eta = -e^{2i\varphi}$, а секоја права (p) која минува низ координатниот почеток еднозначно е определена со својот комплексен аглов коефициент. Лесно се докажува дека и во двата случаи аголот меѓу правата (p) и позитивниот дел на реалната оска е $\alpha = \varphi - \frac{\pi}{2}$.

Од досега изнесеното следува точноста на следната теорема.

Теорема. Ако A, со афикс a, е симетричната точка на координатниот почеток во однос на дадена права (p) која не минува низ координатниот почеток и ако φ е ориентираниот агол меѓу реалната оска и нормалата спуштена од координатниот почеток кон (p), тогаш (p) има равенка (3), каде $\eta = -e^{2i\varphi}$. Ако (p) минува низ координатниот почеток, тогаш нејзината равенка е дадена со (4). ■

1.2. Теорема. Правата (p) која минува низ две различни точки A и B со афикси z_0 и z_1, соодветно, има равенка

$$z - z_0 = \frac{z_1 - z_0}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}(\bar{z} - \overline{z_0}) \tag{5}$$

и комплексен аглов коефициент

$$\eta = \frac{z_1 - z_0}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}\,. \tag{6}$$

Доказ. Афиксите z_0 и z_1 на точките A и B ги заменуваме во равенката (3) и добиваме $z_0 = \eta \overline{z_0} + a$ и $z_1 = \eta \overline{z_1} + a$. Ако ги одземеме последните две равенки за комплексниот аглов коефициент наоѓаме $\eta = \frac{z_1 - z_0}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}$, т.е. важи равенството (6). Со замена во $z_0 = \eta \overline{z_0} + a$ добиваме

$$a = z_0 - \frac{z_1 - z_0}{\overline{z_1} - \overline{z_0}} \overline{z_0}\,,$$

па ако добиените вредности за η и a ги замениме во равенката (3) ја добиваме равенката (5). ■

1.3. Последица. Точките z_0, z_1 и z_2 се колинеарни ако и само ако

$$\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}=\frac{\overline{z_2}-\overline{z_0}}{\overline{z_1}-\overline{z_0}}. \tag{7}$$

Доказ. Според теорема 1.2 равенката на правата (p) која минува низ точките z_0 и z_1 е дадена со (5). Точките z_0, z_1 и z_2 се колинеарни ако и само ако z_2 ја задоволува равенката (5), што значи ако и само ако е исполнето равенството

$$z_2-z_0=\frac{z_1-z_0}{\overline{z_1}-\overline{z_0}}(\overline{z_2}-\overline{z_0}),$$

кое е еквивалентно на равенството (7). ■

1.4. Последица. Точките z_0, z_1 и z_2 се колинеарни ако и само ако $\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}$ е реален број.

Доказ. Непосредно следува од последица 1.3 и својствата на комплексните броеви. ■

1.5. Забелешка. Бидејќи $|\eta|=|\frac{z_1-z_0}{\overline{z_1}-\overline{z_0}}|$ равенката (5) можеме да ја запишеме во видот

$$z-z_0=\eta(\overline{z}-\overline{z_0}),\ |\eta|=1 \tag{8}$$

Обратно, секоја равенка од обликот (8) е равенка на права.

Навистина, од $|\eta|=1$ следува дека $\eta=e^{2i\varphi}$, за некој $\varphi\in[0,\pi)$. Ако сега ја составиме равенката на права која минува низ точките z_0 и $z_1=z_0+e^{i\varphi}$, ја добиваме равенката (8).

1.6. Забелешка. Според теорема 1.1 правата која минува низ точката $z_0\neq 0$ и координатниот почеток има равенка

$$z=\eta\overline{z},\ \eta=\frac{z_0}{\overline{z_0}}=e^{2i\varphi} \tag{9}$$

и истата ги содржи точките чии афикси се квадратните корени на комплексниот аглов коефициент η.

Навистина, ако во равенката (9) замениме една од двете вредности на квадратниот корен на η, добиваме $\eta\overline{\sqrt{\eta}} = \sqrt{\eta}^2\overline{\sqrt{\eta}} = \sqrt{\eta}\cdot|\sqrt{\eta}|^2 = \sqrt{\eta}$, т.е. точките чии афикси се $\sqrt{\eta}$ ја задоволуваат равенката (9).

1.7. Теорема. Ориентираниот агол φ меѓу правите (p) и (q) со комплексни аглови коефициенти $\eta_1 = -e^{2i\varphi_1}$ и $\eta_2 = -e^{2i\varphi_2}$, соодветно, е даден со формулата $e^{2i\varphi} = \frac{\eta_1}{\eta_2}$.

Доказ. Според теорема 1.1 правите (p') и (q'), нормални на (p) и (q), со позитивниот дел на реалната оска зафаќаат ориентирани агли φ_1 и φ_2, соодветно. Значи, ориентираниот агол меѓу овие прави е $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ и тој е еднаков на аголот меѓу правите (p) и (q), како агли со нормални краци. Сега тврдењето на теоремата следува од релацијата

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{-e^{2i\varphi_1}}{-e^{2i\varphi_2}} = e^{2i(\varphi_2-\varphi_1)} = e^{2i\varphi}. \ \blacksquare$$

1.8. Равенството $\varphi = 0$ е еквивалентно со равенството $\eta_1 = \eta_2$, а равенството $\varphi = \frac{\pi}{2}$ е еквивалентно со равенството $\eta_1 = -\eta_2$, па затоа е точна следнава последица.

Последица А. а) Две прави се паралелни ако и само ако имаат еднакви комплексни аглови коефициенти.

б) Две прави се заемно нормални ако и само ако имаат спротивни комплексни аглови коефициенти. ■

Последица Б. а) Нека точките $M_i, i = 1,2,3,4$ имаат афикси z_i, $i = 1,2,3,4$. Правите M_1M_2 и M_3M_4 се заемно номални ако и само ако $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4} \in i\mathbf{R}^*$, каде $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}\setminus\{0\}$.

б) Правите M_1M_2 и M_3M_2 се заемно нормални ако и само ако $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_3} \in i\mathbf{R}^*$.

Доказ. а) Комплексните аглови коефициенти на правите M_1M_2 и M_3M_4 се $\frac{z_1-z_2}{\overline{z_1}-\overline{z_2}}$ и $\frac{z_3-z_4}{\overline{z_3}-\overline{z_4}}$, соодветно. Според последица А правите M_1M_2

и M_3M_4 се нормални ако и само ако $\frac{z_1-z_2}{\overline{z_1}-\overline{z_2}}=-\frac{z_3-z_4}{\overline{z_3}-\overline{z_4}}$, што значи ако и само ако $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}=-\overline{\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}}$, односно ако и само ако $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}\in i\mathbf{R}^*$.

б) Непосредно следува од тврдењето под а). ■

Последица В. а) Правата (p') која минува низ точката M со афикс m и е паралелна на правата (p): $z=\eta\overline{z}+a$ има равенка $z-m=\eta(\overline{z}-\overline{m})$.

б) Правата (p') која минува низ точката M со афикс m и е нормална на правата (p): $z=\eta\overline{z}+a$ има равенка $z-m=-\eta(\overline{z}-\overline{m})$.

Доказ. Непосредно следува од забелешка 1.5 и последица А. ■

1.9. Пример. Во рамнината се дадени две различни точки A и B чии афикси се z_1 и z_2, соодветно. Одреди го афиксот p' на точката P', симетрична на точката P со афикс p, во однос на правата AB.

Решение. Низ точката P повлекуваме права l, нормална на правата AB и го наоѓаме пресекот P_1 на оваа права со правата AB. Сега $P_1(p_1)$ е средина на отсечката PP', т.е. $p_1=\frac{p+p'}{2}$, односно $p'=2p_1-p$ и точката P_1 е проекција на точката P врз правата AB.

Правата низ точките A и B има равенка

$$z-z_1=\frac{z_2-z_1}{\overline{z_2}-\overline{z_1}}(\overline{z}-\overline{z_1}). \tag{10}$$

Комплексниот аглов коефициент на правата l е $\eta_1=-\frac{z_2-z_1}{\overline{z_2}-\overline{z_1}}$, па затоа нејзината равенка е

$$z-p=-\frac{z_2-z_1}{\overline{z_2}-\overline{z_1}}(\overline{z}-\overline{p}). \tag{11}$$

Ако ги собереме равенките (10) и (11) го добиваме афиксот p_1 на точката P_1:

$$p_1=\frac{(\overline{p}-\overline{z_1})(z_2-z_1)+(\overline{z_2}-\overline{z_1})(p+z_1)}{2(\overline{z_2}-\overline{z_1})}. \tag{12}$$

Со замена од (12) во равенството $p'=2p_1-p$ за афиксот p' на P' наоѓаме:

$$p' = \frac{\overline{p}(z_2 - z_1) + \overline{z_2} z_1 - z_2 \overline{z_1}}{\overline{z_2} - \overline{z_1}} . \blacksquare$$

1.10. Пример. Најди го геометриското место на точки кои се еднакво оддалечени од две дадени точки A и B.

Решение. Нека афиксите на точките A и B се a и b соодветно, и нека точката M со афикс z припаѓа на бараното геометриско место. Тогаш од $\overline{MA} = \overline{MB}$ следува $|z-a|^2 = |z-b|^2$. Последната равенка е еквивалентна на равенката

$$z - \frac{a+b}{2} = -\frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}}(\overline{z} - \frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}) .$$

Според тоа, бараното геометриско место е права која минува низ средината на отсечката AB и е нормална на правата AB. $\blacksquare$

1.11. Пример. Нека е даден триаголник ABC и нека K и H се точки на страните AB и AC такви да $\overline{AK} = \frac{1}{p}\overline{AB}$ и $\overline{AH} = \frac{1}{p+1}\overline{AC}$, соодветно. Докажи дека за секој p, $p > 0$ правите KH минуваат низ една иста точка.

Решение. Нека афиксите на точките A, B, C, K, H се $0, b, c, k, h$, соодветно. Тогаш $k = \frac{b}{p}, h = \frac{c}{p+1}$. Според последица 1.4 точката M со афикс z припаѓа на правата KH ако и само ако $\frac{z-k}{h-k} = t \in \mathbf{R}$, од каде следува

$$z = \frac{1}{p}(b + \frac{t}{p+1}((c-b)p - b)) .$$

Ставајќи $t = p+1$ добиваме $z = c-b$, од каде што следува дека секоја права KH ја содржи точката X со афикс $c-b$. $\blacksquare$

2. РАСТОЈАНИЕ ОД ТОЧКА ДО ПРАВА

2.1. Лема. Равенката на права

$$z - z_0 = \frac{z_1 - z_0}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}(\overline{z} - \overline{z_0})$$

може да се запише во видот

$$Az + B\overline{z} + C = 0, \text{ каде } C \in \mathbf{R} \text{ и } B = \overline{A} \neq 0 . \qquad (1)$$

Обратно, секоја равенка од видот (1) е равенка на права.

Доказ. Нека е дадена равенката

$$z-z_0=\frac{z_1-z_0}{\overline{z_1}-\overline{z_0}}(\overline{z}-\overline{z_0})\,.$$

Имаме

$$z(\overline{z_1}-\overline{z_0})-\overline{z}(z_1-z_0)+\overline{z_0}z_1-z_0\overline{z_1}=0\,.$$

Ако последната равенка ја помножиме со i добиваме

$$i(\overline{z_1}-\overline{z_0})z-i(z_1-z_0)\overline{z}+i(\overline{z_0}z_1-z_0\overline{z_1})=0\,.$$

Земаме

$$A=i(\overline{z_1}-\overline{z_0}),\, B=-i(z_1-z_0),\, C=i(\overline{z_0}z_1-z_0\overline{z_1})$$

и за равенката на правата низ точките M и N со афикси z_0 и z_1 добиваме равенка од видот (1).

Обратно, нека е дадена равенката (1). Ако поделиме со A и ставиме $\eta=-\frac{B}{A},\, a=-\frac{C}{A}$, тогаш добиваме равенка од видот $z=\eta\overline{z}+a, |\eta|=1$ и според теорема 1.1 тое е равенка на права. ■

2.2. Дефиниција. Равенката (1) ја нарекуваме *автокоњугирана равенка на права*.

2.3. Нека е дадена права (p) со својата автокоњугирана равенка (1) и точка z_0. Ако равенката (1) ја запишеме во видот

$$z=-\frac{B}{A}\overline{z}-\frac{C}{A}\,,$$

тогаш комплексниот аглов коефициент на произволна права, нормална на (p), е $\eta'=\frac{B}{A}$. Значи, равенката на правата (q) која минува низ точката z_0 и е нормална на правата (p) е

$$z-z_0=\frac{B}{A}(\overline{z}-\overline{z_0})\,,$$

односно

$$Az-B\overline{z}-z_0A+\overline{z_0}B=0\,. \qquad (2)$$

Ако ги собереме равенките (1) и (2), тогаш за пресечната точка на правите (p) и (q), т.е. за проекцијата на точката z_0 врз правата (p) добиваме

$$2Az'=Az_0-B\overline{z_0}-C\,,$$

односно

$$z'=\frac{Az_0-B\overline{z_0}-C}{2A}\,.$$

Според тоа,

$$z_0 - z' = \frac{Az_0 + B\overline{z_0} + C}{2A},$$

па затоа *растојанието* од точката z_0 до правата (p), зададена со нејзината автокоњугирана равенка (1) е

$$d(z_0,(p)) = \frac{|Az_0 + B\overline{z_0} + C|}{|2A|}.$$

3. РАВЕНКА НА КРУЖНИЦА

3.1. Како што веќе рековме $|z - z_0| = R$ е равенка на кружница со центар во точката S, со афикс z_0, и радиус R. Во овој параграф подетално ќе се осврнеме на кружницата во комплексната рамнина.

3.2. Пример. Нека P_1 и P_2 се произволни точки во комплексната рамнина со афикси z_1 и z_2, соодветно. Докажи, дека кружницата опишана над отсечката P_1P_2, како над дијаметар има равенка

$$|2z - z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|. \qquad (1)$$

Решение. Бидејќи радиусот на кружницата опишана над P_1P_2, како над дијаметар, е $R = \frac{|z_1 - z_2|}{2}$, а нејзиниот центар P_0 е средина на отсечката P_1P_2, со афикс $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$, добиваме дека равенката на разгледуваната кружница е

$$|z - \frac{z_1 + z_2}{2}| = \frac{|z_1 - z_2|}{2}.$$

Ако последната равенка ја помножиме со 2 ја добиваме еквивалентната на неа равенка (1). ■

3.3. Пример. Нека A, B и C се три различни точки во рамнината. Најди го геометриското место на точки кои се еднакво оддалечени од точките A, B и C.

Решение. Нека афиксите на точките A, B и C се a, b и c, соодветно. Според пример 1.10 геометриското место на точки еднакво оддалечени од точките A и B, B и C, A и C, се симетралите на отсечките AB, BC и CA чии равенки се

$$z-\frac{a+b}{2}=-\frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}}(\overline{z}-\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}) \tag{2}$$

$$z-\frac{b+c}{2}=-\frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}}(\overline{z}-\frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}) \tag{3}$$

$$z-\frac{a+c}{2}=-\frac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}}(\overline{z}-\frac{\overline{a}+\overline{c}}{2}) \tag{4}$$

соодветно. Ќе разгледаме два сучаи.

а) Ако точките A, B и C се колинеарни, тогаш од последица 1.3 следува дека симетралите на отсечките AB, BC и CA имаат еднакви комплексни аглови коефициенти, а од последица 1.8 следува дека тие се паралелни. Но, точките A, B и C се различни, па затоа и средините на отсечките AB, BC и CA се различни, што значи дека не постои точка која ги задоволува условите на задачата.

б) Ако точките A, B и C не се колинеарни, тогаш симетралите на отсечките AB, BC и CA се сечат две по две. Ако од равенката (2) ја извадиме равенката (3) за афиксот o на пресечната точка O на симетралите на отсечките AB и BC добиваме

$$o=\frac{a\overline{a}(c-b)+b\overline{b}(a-c)+c\overline{c}(b-a)}{a\overline{b}+b\overline{c}+c\overline{a}-\overline{a}b-\overline{b}c-\overline{c}a}.$$

Со непосредна проверка се докажува дека точката O лежи на правата CA. Според тоа, бараното геометриско место е точката O со афикс o. ■

3.4. Забелешка. Во претходниот пример, всушност докажавме дека низ три неколинеарни точки A, B и C минува една и само една кружница со центар во точката O и радиус $R=|a-o|$, односно докажавме дека околу произволен триаголник може да се опише кружница чиј центар се наоѓа во пресекот на симетралите на неговите страни.

3.5. Пример. Докажи дека сите комплексни броеви за кои важи $|z-1|=2|z+1|$ припаѓаат на иста кружница. Најди ги центарот и радиусот на таа кружница.

Решение. Бидејќи, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, при што $z=x+iy$, од дадената равенка добиваме

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2\sqrt{(x+1)^2+y^2},$$

односно после средувањето се добива

$$(x+\tfrac{5}{3})^2+y^2=(\tfrac{4}{3})^2,$$

а тоа е кружница со центар во $(-\frac{5}{3},0)$ и радиус $\frac{4}{3}$. ■

3.6. Како што рековме равенката на кружницата со центар во точката z_0 и радиус R е $|z-z_0|=R$. Меѓутоа, од практични причини пожелно е да се знае видот на равенката на кружницата сличен на оној на автокоњугираната равенка на права. Ќе докажеме дека

$$z\bar{z}+\bar{A}z+A\bar{z}+B=0, B\in\mathbf{R}, A\in\mathbf{C}, |A|^2-B>0 \tag{5}$$

е равенка на кружница.

Навистина, ако земеме

$$z_0=-A \text{ и } R^2=z_0\overline{z_0}-B=|A|^2-B>0,$$

и ако замениме во равенката (5) ја добиваме равенката

$$z\bar{z}-z_0\bar{z}-z\overline{z_0}+z_0\overline{z_0}=R^2,$$

т.е. равенката $|z-z_0|=R$, која е равенка на кружница со центар во z_0 и радиус R. Според тоа, равенката (5) е равенка на кружница со центар во z_0 и радиус $R=\sqrt{|A|^2-B}$, која ја нарекуваме *автокоњугирана равенка на кружница*.

3.7. Забелешка. Во претходните изложувања докажавме дека стереографските проекции на права и кружница во проширената комплексна рамнина, т.е. нивната Риманова интерпретација, се кружници кои го содржат или не го содржат полот, соодветно. Ова е една од причините што правите и кружниците во проширената комплексна рамнина ќе ги нарекуваме кружници, а кружниците во комплексната рамнина ќе ги нарекуваме вистински кружници. Во следниот пример ќе дадеме уште еден аргумент кој ја поткрепува оваа терминологија.

3.8. Пример. (Аполониева кружница). Нека A и B се произволни точки во рамнината. Геометриското место на точката M со својство

$$\overline{MA}:\overline{MB}=k, (k>0, k\neq 1)$$

е кружница. Докажи!

Решение. Ќе го разгледаме случајот $k>1$. Поставуваме координатен систем xOy таков што $x-$оската се совпаѓа со правата AB, а координатниот почеток се совпаѓа со средината на отсечката AB. Имаме $A(a,0)$ и $B(-a,0)$, т.е. точките A и B имаат афикси $z_1 = a$ и $z_2 = -a$, соодветно. Ако точката M од разгледуваното геометриско место има афикс z, тогаш од условот на задачата следува дека $k = \frac{|z-a|}{|z+a|}$, односно

$$z\bar{z} + a\frac{k^2+1}{k^2-1}(z+\bar{z}) + a^2 = 0. \qquad (6)$$

Константите

$$A = a\frac{k^2+1}{k^2-1}, B = a^2$$

го задоволуваат условот $|A|^2 - B > 0$, па затоа (6) е равенка на кружница со центар и радиус

$$z_0 = -a\frac{k^2+1}{k^2-1},\ R = \sqrt{|A|^2 - B} = \frac{2ak}{k^2-1}.$$

Случајот $0 < k < 1$ се разгледува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

3.9. Заемен однос на права и кружница. Дадени се права (p) и кружница (K) чии равенки се $z - z_0 = \eta(\bar{z} - \overline{z_0})$ и $|z - z_1| = R$, соодветно. Во центарот на кружницата чиј афикс е z_1 повлекуваме права (p') нормална на правата (p). Нејзината равенка е $z - z_1 = -\eta(\bar{z} - \overline{z_1})$. Ако ги собереме равенките на правите (p) и (p') го добиваме афиксот на пресечната точка на овие две прави $z^* = \frac{\eta(\overline{z_1} - \overline{z_0}) + z_1 + z_0}{2}$. Според тоа, за растојанието од центарот на кружницата до правата (p) добиваме

$$d(z^*, z_0) = |z^* - z_0| = \frac{|\eta(\overline{z_1} - \overline{z_0}) + z_1 - z_0|}{2}.$$

Од досега изнесеното следува:

- ако $\frac{|\eta(\overline{z_1} - \overline{z_0}) + z_1 - z_0|}{2} = R$, тогаш правата (p) е тангента на кружницата (K) и допирната точка има афикс z^*;
- ако $\frac{|\eta(\overline{z_1} - \overline{z_0}) + z_1 - z_0|}{2} < R$, тогаш правата (p) и кружницата (K) се сечат во две точки; и
- ако $\frac{|\eta(\overline{z_1} - \overline{z_0}) + z_1 - z_0|}{2} > R$, тогаш правата (p) и кружницата (K) немаат заеднички точки.

3.10. Пример. Определи го заемниот однос на правата (p) и кружницата (K) чии равенки се $z=\overline{z}+3i$ и $|z+4-2i|=3$, соодветно.

Решение. Од равенката на правата (p) добиваме $z_0=\frac{3i}{2}$, а од равенката на кружницата (K) наоѓаме $z_1=-4+2i$ и $R=3$. Затоа

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\eta(\overline{z_1}-\overline{z_0})+z_1-z_0|}{2} \\ &= \frac{|(-4-2i+\frac{3i}{2})+(-4+2i-\frac{3i}{2}|}{2}, \\ &= \frac{|-8|}{2}=4>3=R \end{aligned}$$

што според 3.9 значи дека правата правата (p) и кружницата (K) немаат заеднички точки. ■

3.11. Пример. Нека е дадена кружница (K): $|z-z_0|=R$ и точка z_1 на неа. Состави равенката на тангентата на кружницата (K) која минува низ точката z_1.

Решение. Равенката на правата (p) која минува низ точките z_0 и z_1 гласи

$$z-z_0=\frac{z_1-z_0}{\overline{z_1}-\overline{z_0}}(\overline{z}-\overline{z_0}).$$

Според тоа, равенката на тангентата (p') на (K) повлечена во точката z_1 е

$$z-z_1=-\frac{z_1-z_0}{\overline{z_1}-\overline{z_0}}(\overline{z}-\overline{z_1}). \ ■$$

3.12. Забелешка. а) Ако (K): $|z|=1$ е единичната кружница и z_1 е точка на неа, тогаш равенката на тангентата на (K) повлечена во z_1 гласи

$$z+z_1^2\overline{z}=2z_1.$$

б) Ако A,B,C и D се точки од единичната кружница (K): $|z|=1$, со афикси a,b,c и d, соодветно, тогаш

$$\overline{a}=a^{-1},\overline{b}=b^{-1},\overline{c}=c^{-1} \text{ и } \overline{d}=d^{-1}.$$

Според последица 1.8 тетивите AB и CD се паралелни ако и само ако

$$(b-a)(\overline{d}-\overline{c})=(\overline{b}-\overline{a})(d-c),$$

што значи ако и само ако $ab=cd$. Аналогно се добива дека тетивите AB и CD се заемно нормални ако и само ако $ab+cd=0$.

Јасно, ако A и B се точки на единичната кружница со афикси a и b, соодветно, тогаш $\overline{a}=a^{-1}, \overline{b}=b^{-1}$, па затоа

$$\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}=\frac{a-b}{a^{-1}-b^{-1}}=-ab.$$

Понатаму, ако точката M со афикс m припаѓа на тетивата AB, тогаш од последица 1.3 следува

$$\frac{m-a}{b-a}=\frac{\overline{m}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}=\frac{\overline{m}-\overline{a}}{a-b}ab=-\frac{\overline{m}ab-b}{b-a},$$

од каде добиваме $\overline{m}=\frac{a+b-m}{ab}$.

в) Ако A,B,C и D се точки од единичната кружница (K): $|z|=1$, со афикси a,b,c и d, соодветно, и $AB\cap CD=\{S\}$. Равенките на правите AB и CD се $z+ab\overline{z}=a+b$ и $z+cd\overline{z}=c+d$, соодветно. Ако од последните две равенки го елиминираме $\overline{z}$, за афиксот s на пресечната точка S добиваме $s=\frac{(a+b)cd-(c+d)ab}{cd-ab}$.

г) Нека A и B, со афикси a и b, се точки од единичната кружница, такви што AB не е дијаметар. Според а) равенките на тангентите (t_A) и (t_B) се $z+a^2\overline{z}=2a$ и $z+b^2\overline{z}=2b$, соодветно. Ако од последните две равенки го елиминираме $\overline{z}$ за афиксот s на пресечната точка S добиваме $s=\frac{2ab}{a+b}$.

д) Нека правата (p) ја сече единечната кружница во точките A и B, со афикси a и b, и нека M, со афикс m, е произволна точка од рамнината. Лесно се докажува дека афиксот c на ортогоналната проекција C на точката M врз правата (p) е зададен со формулата $c=\frac{a+b+m-ab\overline{m}}{2}$.

4. ДИРЕКТНИ СЛИЧНОСТИ

4.1. Дефиниција. Пресликувањето $S:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ дефинирано со

$$w=S(z)=az+b,\ a,b\in\mathbf{C},\ a\neq 0 \tag{1}$$

го нарекуваме *директна сличност*.

4.2. Теорема. Множеството директни сличности $\boldsymbol{DS}$ во однос на операцијата композиција на пресликувања е некомутативна група.

Доказ. Ако $S_1, S_2 \in \boldsymbol{DS}$, тогаш

$$S_1(z) = az + b,\ a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0 \text{ и } S_2(z) = cz + d,\ c, d \in \mathbf{C}, d \neq 0 .$$

Според тоа,

$$S_1(S_2(z)) = S_1(cz + d) = a(cz + d) + b = (ac)z + (ad + b), \quad ac, ad + b \in \mathbf{C}, ac \neq 0$$

т.е. $S_1 \circ S_2 \in \boldsymbol{DS}$. Значи, множеството $\boldsymbol{DS}$ е затворено во однос на композицијата на пресликувања и во општ случај важи

$$S_1(S_2(z)) = (ac)z + (ad + b) \neq (ac)z + (bc + d) = S_2(S_1(z)) .$$

Нека $S_1, S_2, S_3 \in \boldsymbol{DS}$. Со непосредна проверка се докажува дека

$$S_1 \circ (S_2 \circ S_3)(z) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3)(z) ,$$

за секој $z \in \mathbf{C}$, па затоа

$$S_1 \circ (S_2 \circ S_3) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3) ,$$

т.е. важи асоцијативниот закон.

Пресликувањето $E(z) = z$, за секој $z \in \mathbf{C}$ припаѓа на $\boldsymbol{DS}$ и притоа $E \circ S = S \circ E = S$, за секој $S \in \boldsymbol{DS}$.

Нека $S(z) = az + b, a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0$ е произволна директна сличност. Пресликувањето определено со $S_1(z) = \frac{1}{a} z - \frac{b}{a}$ е директна сличност и притоа важи

$$S(S_1(z)) = S_1(S(z)), \text{ за секој } z \in \mathbf{C}, \text{ т.е. } S^{-1} = S_1 \in \boldsymbol{DS} . \ \blacksquare$$

4.3. Теорема. Секоја директна сличност е еднозначно определена со два пара придружени точки.

Доказ. Нека S е произволна директна сличност за која важи $S(z_1) = w_1$ и $S(z_2) = w_2$. Тогаш $S(z) = az + b,$ каде $a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0$ се непознати коефициенти кои треба да ги определиме. Според теорема 4.2 секоја директна сличност е биекција, па затоа од $z_1 \neq z_2$ следува $w_1 \neq w_1$. Со замена во $S(z) = az + b$ добиваме

$$\begin{cases} w_1 = az_1 + b \\ w_2 = az_2 + b \end{cases} \tag{2}$$

Решавајќи го системот (2) по непознати a и b добиваме

$$a = \frac{w_1 - w_2}{z_1 - z_2},\ b = \frac{z_1 w_2 - z_2 w_1}{z_1 - z_2} \text{ и } a \neq 0 ,$$

т.е. коефициентите a и b на директната сличност $S(z) = az + b$ се наполно определени со два пара придружени точки $(z_1, S(z_1))$ и $(z_2, S(z_2))$. $\blacksquare$

4.4. Теорема. а) Слика на права (p) при директна сличност е права (p').

б) Паралелни прави при директна сличност се пресликуваат во паралелни прави.

в) Нормални прави при директна сличност се пресликуваат во нормални прави.

Доказ. а) Нека е дадена директната сличност (1) и правата (p) со равенка $z=\eta\bar{z}+c$. Од (1) имаме $z=\frac{w-b}{a}$ и ако замениме во равенката на правата добиваме

$$w=(\frac{a}{\bar{a}}\eta)\bar{w}+ac+b-\frac{a\bar{b}}{\bar{a}}\eta.$$

Сега од $|\frac{a}{\bar{a}}\eta|=1$ следува дека слика на права (p) при директна сличност е права (p') чиј комплексен аглов коефициент е $\frac{a}{\bar{a}}\eta$.

Доказите на тврдењата под б) и в) непосредно следуваат од доказот на тврдењето под а) и последица 1.8 А. ■

4.5. Теорема. Слика на кружница (K) при директна сличност е кружница (K').

Доказ. Нека е дадена директната сличност (1) и кружница (K) чија равенка е $|z-c|=R$. Од (1) имаме $z=\frac{w-b}{a}$ и ако замениме во равенката на кружницата добиваме $|w-(ac+b)|=|a|R$, што значи дека сликата на кружницата (K) при дадената сличност (1) е кружница (K'), чиј центар има афикс $ac+b$ и истиот е слика на центарот на кружницата (K), а нејзиниот радиус е еднаков на $|a|R$. ■

4.6. Теорема. Ако A,B се произволни различни точки и A',B' се нивните слики при директната сличност (1) и ако $a=re^{i\varphi}$, тогаш $\overline{A'B'}=r\overline{AB}$ и правите AB и $A'B'$ формираат ориентиран агол φ.

Доказ. Нека z_1,z_2,w_1,w_2 се афиксите на точките A,B,A',B', соодветно. Тогаш $z_2-z_1=\overline{AB}e^{i\alpha}$ и $w_2-w_1=\overline{A'B'}e^{i\alpha_1}$, каде α и α_1 се аглите кои ги зафаќа реалната оска со векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$, соодветно. Од равенствата $w_1=az_1+b$ и $w_2=az_2+b$ го добиваме равенството

$$w_2 - w_1 = a(z_1 - z_2)\,,$$

т.е. равенството

$$\overline{A'B'}e^{i\alpha_1} = r\overline{AB}e^{i(\alpha+\varphi)}\,,$$

од што следува $\overline{A'B'} = r\overline{AB}$ и $\varphi = \alpha_1 - \alpha$. ■

Реалниот број r го нарекуваме *коефициент на директната сличност* (1), а аголот φ го нарекуваме *агол на директната сличност* (1).

4.7. Дефиниција. За две фигури ќе велиме дека се *директно слични* ако постои директна сличност која едната од нив ја пресликува во другата.

4.8. Последица. Ако ABC и $A'B'C'$ се директно слични триаголници, тогаш $\overline{A'B'}:\overline{A'C'} = \overline{AB}:\overline{AC}$ и $\angle A'B'C' = \angle ABC$.

Доказ. Непосредно следува од теорема 4.6. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

4.9. Теорема. Нека точките A, B, C, A', B', C' имаат афикси $z_1, z_2, z_3,$ $w_1, w_2, w_3,$ соодветно. Триаголниците ABC и $A'B'C'$ се директно слични ако и само ако

$$z_1(w_2 - w_3) + z_2(w_3 - w_1) + z_3(w_1 - w_2) = 0\,. \qquad (3)$$

Доказ. Триаголниците ABC и $A'B'C'$ се директно слични ако и само ако постои директна сличност (1) за која важи $w_i = az_i + b$, за $i = 1, 2, 3$. Од последните равенства ги добиваме равенствата

$$w_1 - w_2 = a(z_1 - z_2) \text{ и } w_1 - w_3 = a(z_1 - z_3)\,.$$

Ако ги поделиме овие две равенства го добиваме равенството

$$\frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \qquad (3')$$

кое е еквивалентно со равенството (3). ■

4.10. Забелешка. Условот (3), т.е. условот (3’) од претходната теорема е еквивалентен со условот

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Навистина, од условот (3’) и од својствата на детерминантите следува

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 - z_2 & z_1 - z_3 \\ w_1 - w_2 & w_1 - w_3 \end{vmatrix}$$

$$= (z_1 - z_2)(w_1 - w_3) - (z_1 - z_3)(w_1 - w_2) = 0.$$

4.11. Дефиниција. За точката z ќе велиме дека е *неподвижна за директната сличност* (1) ако го задоволува условот $z = az + b$.

Јасно, ако $a \neq 1$, тогаш директната сличност (1) има единствена неподвижна точка чиј афикс е $z_1 = \frac{b}{1-a}$, а ако $a = 1$, тогаш $b = 0$, т.е. директната сличност (1) е идентичното пресликување и сите точки од комплексната рамнина се неподвижни.

Точката C со афикс $c = \frac{b}{1-a}$ ја нарекуваме *центар на директната сличност* $S(z) = az + b$.

4.12. Нека правата $(p):\ z - z_0 = \eta(\overline{z} - \overline{z_0})$ е тангента на кружницата $(K):\ |z - z_1| = R$ и нека $w = S(z) = az + b,\ a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0$ е директна сличност. Од 3.9 следува дека

$$\frac{|\eta(\overline{z_1} - \overline{z_0}) + z_1 - z_0|}{2} = R \tag{4}$$

Според теорема 4.5 сликата на кружницата (K) е кружница (K') чија равенка е

$$|w - (az_1 + b)| = |a| R.$$

Понатаму, аналогно како во доказот на теорема 4.4 а) во равенката на правата (p) замениме $z = \frac{w-b}{a}$ добиваме дека сликата на правата (p) е права (p') чија равенка е

$$w - (az_0 + b) = \frac{\eta a}{\overline{a}}(\overline{w} - \overline{az_0 + b}).$$

Ако го искористиме равенството (4) добиваме дека за кружницата (K') и правата (p') важи

$$\frac{|\frac{\eta a}{\overline{a}}(\overline{az_1 + b} - \overline{az_0 + b}) + az_1 + b - (az_0 + b)|}{2} = \frac{|\frac{\eta a}{\overline{a}}\overline{a}(\overline{z_1} - \overline{z_0}) + a(z_1 - z_0)|}{2}$$

$$= |a| \frac{|\eta(\overline{z_1} - \overline{z_0}) + (z_1 - z_0)|}{2} = |a| R$$

па од 3.9 следува дека правата (p') е тангента на кружницата (K').

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема. Нека правата (p) е тангента на кружницата (K) и (p') и (K') се нивните слики при директната сличност (1). Тогаш правата (p') е тангента на кружницата (K'). ■

4.13. Пример. Даден е паралелограм $ABCD$. Над неговите страни CD и CB конструирани се слични и еднакво ориентирани триаголници (директно слични) CDE и FBC. Докажи дека и триаголникот FAE е сличен и еднакво ориентиран со триаголниците CDE и FBC.

Решение. Нека координатниот почеток е во пресекот на дијагоналите на паралелограмот. Тогаш $c=-a$ и $d=-b$. Триаголниците CDE и FBC се слични и еднакво ориентирани , па затоа од теорема 4.9 следува дека

$$\frac{c-b}{b-f}=\frac{e-d}{d-c},$$

од каде добиваме

$$f=\frac{be+c^2-bc-cd}{e-d}=\frac{be+a^2}{e+b}.$$

Имаме

$$f-a=\frac{(b-a)(e-a)}{e+b},\ c-d=c+b,$$

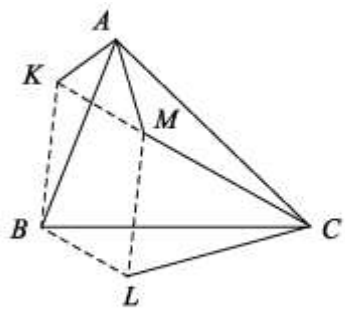
$$d-e=-(b+e) \text{ и } b-a=c-d,$$

па затоа

$$\frac{f-a}{a-e}=\frac{\frac{(b-a)(e-a)}{e+b}}{a-e}=\frac{b-a}{-(e+b)}=\frac{c-d}{d-e},$$

што според теорема 4.9 значи дека триаголниците FAE и CDE се директно слични. ■

Пример 4.14. Над страните AB, BC и CA на триаголникот ABC конструирани се меѓусебно слични триаголници ABK, BCL и ACM, при што првите два се од надворешната страна на триаголникот ABC, а третиот од иста страна на правата AC каде се наоѓа темето B, (види цртеж). Докажи дека четириаголникот $BLMK$ е паралелограм.



Решение. Триаголниците AKB и BLC се директно слични, па затоа $\frac{k-a}{b-a}=\frac{l-b}{c-b}$, т.е. $l=b+(k-a)\frac{c-b}{b-a}$. Триаголниицте AKB и AMC се директно слични, па затоа $\frac{k-a}{b-a}=\frac{m-a}{c-a}$, т.е. $m=a+(k-a)\frac{c-a}{b-a}$. Според тоа,

$$\overrightarrow{BL}=l-b=(k-a)\frac{c-b}{b-a} \text{ и}$$

$$\overrightarrow{KM}=m-k=a+(k-a)\frac{c-a}{b-a}-k=(k-a)(\frac{c-a}{b-a}-1)=(k-a)\frac{c-b}{b-a},$$

т.е. $\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{KM}$, што значи дека четириаголникот $BLMK$ е паралелограм. ■

5. ДВИЖЕЊА

5.1. Во претходнот параграф ги разгледавме директните сличности и докажавме неколку нивни својства. Во овој параграф ќе се осврнеме наедна важна класа на директни сличности и ќе дадеме класификација на овие директни сличности.

5.2. Дефиниција. Директната сличност $S(z)=az+b, |a|=1$ ја нарекуваме *движење*.

5.3. Теорема. Множеството движења $\boldsymbol{D}$ во однос на операцијата композиција на пресликувања е подгрупа од групата директни сличности $\boldsymbol{DS}$.

Доказ. Ако $S_1, S_2 \in \boldsymbol{D}$, тогаш

$$S_1(z)=az+b,\ \ S_2(z)=cz+d, |a|=|d|=1.$$

Според тоа,

$$S_1(S_2(z))=S_1(cz+d)=a(cz+d)+b=(ac)z+(ad+b), |ac|=1,$$

па затоа $S_1 \circ S_2 \in \boldsymbol{D}$. Значи множеството $\boldsymbol{D}$ е затворено во однос на композицијата на пресликувања.

Ако $S_1, S_2, S_3 \in \boldsymbol{D}$, тогаш $S_1, S_2, S_3 \in \boldsymbol{DS}$, па затоа

$$S_1 \circ (S_2 \circ S_3)=(S_1 \circ S_2) \circ S_3,$$

т.е. важи асоцијативниот закон.

Ако ставиме $a=1, b=0$ добиваме дека $1 \cdot z+0=E(z) \in \boldsymbol{D}$.

Нека $S(z)=az+b, |a|=1$ е произволно движење. Пресликувањето

$$S_1(z)=\frac{1}{a}z-\frac{b}{a},\ |\frac{1}{a}|=\frac{1}{|a|}=1$$

е движење и притоа важи

$$S(S_1(z)) = S_1(S(z)) = z \text{, за секој } z \in \mathbf{C} \text{, т.е. } S^{-1} = S_1 \in \boldsymbol{D} \text{. } \blacksquare$$

5.4. Дефиниција. Движењето $S(z) = z + b$ го нарекуваме *транслација* за вектор b, во ознака S_b.

5.5. Теорема. Транслација која не е идентичното пресликување нема неподвижни точки.

Доказ. Непосредно следува од 4.10. ■

5.6. Теорема. Множеството транслации $\boldsymbol{T}$ во однос на операцијата композиција на пресликувања е комутативна подгрупа од групата движења $\boldsymbol{D}$.

Доказ. Ако $S_1, S_2 \in \boldsymbol{T}$, тогаш $S_1(z) = z + b,\ S_2(z) = z + d$. Според тоа

$$S_1(S_2(z)) = S_1(z+d) = (z+d) + b = z + (d+b),$$

па затоа $S_1 \circ S_2 \in \boldsymbol{T}$. Значи множеството $\boldsymbol{T}$ е затворено во однос на композицијата на пресликувања.

Ако $S_1, S_2, S_3 \in \boldsymbol{T}$, тогаш $S_1, S_2, S_3 \in \boldsymbol{D}$, па затоа

$$S_1 \circ (S_2 \circ S_3) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3,$$

т.е. важи асоцијативниот закон.

Нека $S_1, S_2 \in \boldsymbol{T}$, тогаш $S_1(z) = z + b, S_2(z) = z + d$. Тогаш,

$$\begin{aligned} S_1(S_2(z)) &= S_1(z+d) = (z+d) + b = (z+b) + d \\ &= S_2(z+b) = S_2(S_1(z)), \end{aligned}$$

за секој $z \in \mathbf{C}$, т.е. важи комутативниот закон.

Ако ставиме $b = 0$ добиваме дека $1 \cdot z + 0 = E(z) \in \boldsymbol{T}$.

Нека $S(z) = z + b$ е транслација. Пресликувањето $S_1(z) = z - b$ е транслација и притоа важи

$$S(S_1(z)) = S_1(S(z)) = z \text{, за секој } z \in \mathbf{C} \text{, т.е. } S^{-1} = S_1 \in \boldsymbol{D} \text{. } \blacksquare$$

5.7. Дефиниција. Директната сличност со коефициент 1 и агол π ја нарекуваме *централна симетрија*.

За геометриската фигура $\mathbf{F}$ ќе велиме дека е *централно симетрична* ако постои централна симетрија S таква што $S(\mathbf{F}) = \mathbf{F}$.

Според тоа, $S(z) = az + b,\ a, b \in \mathbf{C},\ a \neq 0$ е централна симетрија ако $a = -1$, што значи дека централната симетрија има вид $S(z) = b - z$. Од 4.10

следува дека централната симетрија $S(z)=b-z$ има центар C со афикс $c=\frac{b}{2}$ и во случајов ја користиме и ознаката $S=S_C$. Во натамошните разгледувања множеството централни симетрии ќе го означуваме со $\boldsymbol{CS}$.

Нека $A(a)$ е произволна точка. Нејзината слика при централната симетрија $S(z)=b-z$ е точката $A'(b-a)$ и како центарот C на централната симетрија има афикс $c=\frac{b}{2}$ добиваме

$$\overrightarrow{AC}=\frac{b}{2}-a=(b-a)-\frac{b}{2}=\overrightarrow{CA'},$$

што значи дека центарот на симетрија C е средина на отсечката AA'.

5.8. Теорема. а) Композиција на две централни симетрии е транслација.

б) Композиција на централна симетрија и транслација е централна симетрија.

Доказ. а) Нека $S_1(z)=b-z$ и $S_2(z)=d-z$, $b,d\in\mathbf{C}$ се произволни централни симетрии. Тогаш,

$$S_1(S_2(z))=S_1(d-z)=b-(d-z)=z+(b-d),$$

што значи дека композицијата $S_1\circ S_2$ е транслација за вектор $b-d$.

б) Нека $S_1(z)=b-z$ и $S_2(z)=z+d$, $b,d\in\mathbf{C}$ се произволна централна симетрија и транслација, соодветно. Тогаш,

$$S_1(S_2(z))=S_1(z+d)=b-(z+d)=b-d-z$$

и

$$S_2(S_1(z))=S_2(b-z)=d+(b-z)=b+d-z,$$

т.е. $S_1\circ S_2$ и $S_2\circ S_1$ се централни симетрии со центри $\frac{b-d}{2}$ и $\frac{b+d}{2}$, соодветно. ■

5.9. Дефиниција. За пресликувањето $S:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ ќе велиме дека е *инволуторно* ако тоа е инверзибилно, т.е. постои S^{-1} и ако $S^{-1}=S$.

5.10. Теорема. Директната сличност, која не е идентитет, е инволуторна ако и само ако е централна симетрија.

Доказ. Од теорема 4.2 следува дека директната сличност е инволуторна ако и само ако

$$az+b=\frac{z-b}{a},$$

за секој $z \in \mathbf{C}$, односно ако и само ако $a = \frac{1}{a}$ и $b = -\frac{b}{a}$. Последните две равенства се исполнети ако и само ако $a = -1$, па затоа S е инволуторна ако и само ако е централна симетрија. ■

5.11. Последица. Множеството $\boldsymbol{T} \cup \boldsymbol{CS}$ во однос на операцијата композиција на пресликувања е некомутативна подгрупа од групата движења $\boldsymbol{D}$.

Доказ. Непосредно следува од теоремите 5.6 и 5.8. ■

5.12. Дефиниција. Движењето кое не е транслација го нарекуваме *ротација*.

Бидејќи за ротацијата $S(z) = az + b, |a| = 1$ важи $a \neq 1$ заклучуваме дека секоја ротација има центар C со афикс $c = \frac{b}{1-a}$. Ако ротацијата има центар C и агол α, тогаш ќе велиме дека тоа е ротација околу C за агол α и пишуваме $S = S_{C,\alpha}$. Во натамошните разгледувања множеството ротации ќе го означуваме со $\boldsymbol{R}$. Јасно, централните симетрии се ротации за агол π, па затоа $\boldsymbol{CS} \subset \boldsymbol{R}$.

Нека $S(z) = az + b, |a| = 1,\ a \neq 1$ е ротација околу C за агол α. Тогаш, инверзното пресликување S^{-1} дефинирано со $S^{-1}(z) = \bar{a}z - \bar{a}b$ е ротација околу C за агол $-\alpha$.

5.13. Теорема. а) Композиција на две ротации е ротација или транслација.

б) Композиција на ротација и транслација е ротација.

Доказ. а) Нека

$$S_1(z) = az + b, |a| = 1,\ a \neq 1 \text{ и } S_2(z) = cz + d, |c| = 1,\ c \neq 1$$

се две ротации. Тогаш

$$S_1(S_2(z)) = S_1(cz + d) = a(cz + d) + b = (ac)z + (ad + b). \qquad (1)$$

Јасно, ако $ac = 1$, тогаш $S_1 \circ S_2$ е транслација, а ако $ac \neq 1$ таа е ротација околу точката C, чиј афикс е $\frac{ad+b}{1-ac}$, за агол $\alpha_1 + \alpha_2$ каде α_1 и α_2 се аглите на ротациите S_1 и S_2.

б) Нека

$$S_1(z) = z + b \text{ и } S_2(z) = cz + d, |c| = 1,\ c \neq 1$$

се произволна транслација и ротација соодветно. Тогаш, од

$$S_1(S_2(z)) = S_1(cz + d) = cz + (d + b)$$

следува дека $S_1 \circ S_2$ е ротација околу C чиј афикс е $\frac{d+b}{1-c}$ за агол α_2 на S_2. Понатаму, од

$$S_2(S_1(z)) = S_2(z+b) = cz + (d+bc)$$

следува дека $S_2 \circ S_1$ е ротација околу C' чиј афикс е $\frac{d+bc}{1-c}$ за агол α_2 на S_2. ■

5.14. Да ги разгледаме ротациите

$$S_1(z) = az + b, |a| = 1,\ a \neq 1 \text{ и } S_2(z) = cz + d,\ |c| = 1,\ c \neq 1.$$

Во доказот на теорема 5.13 видовме дека композицијата $S_1 \circ S_2$ е ротација или транслација во зависност од тоа дали $ac \neq 1$ или $ac = 1$, соодветно. Јасно, од

$$S_2(S_1(z)) = S_2(az+b) = c(az+b) + d = (ac)z + (bc+d), \tag{2}$$

следува дека $S_2 \circ S_1$ е исто така ротација или транслација, во зависност од тоа дали $ac \neq 1$ или $ac = 1$. Логично се поставува прашањето: дали и при кои услови S_1 и S_2 комутираат, т.е. важи

$$S_2(S_1(z)) = S_1(S_2(z)), \text{ за секој } z \in \mathbf{C}. \tag{3}$$

Ако од (1) и (2) замениме во (3), после средувањето добиваме дека S_1 и S_2 комутираат ако и само ако $ad + b = bc + d$, што значи ако и само ако $\frac{b}{1-a} = \frac{d}{1-c}$. Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема. Две ротации комутираат ако и само ако имаат исти центри. ■

5.15. Да ги разгледаме ротациите околу ист центар. Нека

$$S_1(z) = az + b,\ |a| = 1,\ a \neq 1 \text{ и } S_2(z) = cz + d,\ |c| = 1,\ c \neq 1,$$

се такви да $\frac{b}{1-a} = \frac{d}{1-c}$, тогаш

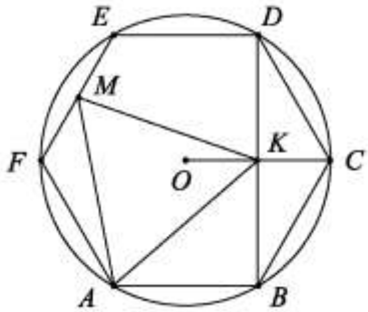
$$S_2(S_1(z)) = (ac)z + (bc+d),\ a \neq 1,\ c \neq 1,\ |a| = 1 \text{ и } |c| = 1.$$

Јасно, $|ac| = 1$. Ако $ac = 1$, тогаш од $|c| = 1$ следува $c\bar{c} = 1$, па затоа $a = \bar{c} = \frac{1}{c}$. Со замена во $\frac{b}{1-a} = \frac{d}{1-c}$ добиваме $bc + d = 0$, што значи дека $S_2(S_1(z)) = z = E(z)$. Ако $ac \neq 1$, тогаш условот $\frac{b}{1-a} = \frac{d}{1-c}$ е еквивалентен на $\frac{bc+d}{1-ac} = \frac{d}{1-c}$, што значи дека композицијата $S_2 \circ S_1$ е ротација со ист центар како и ротациите S_1 и S_2. Конечно, ако се земе предвид дека идентичното пресликување можеме да го сфатиме како ротација околу произволен центар, од претходните разгледувања и од теорема 5.14 следува точноста на следнава теорема.

Теорема. Множеството ротации околу ист центар во однос на операцијата композиција на пресликувања е комутативна подгрупа на групата движења $\boldsymbol{D}$. ■

5.16. Пример. Нека $ABCDEF$ е правилен шестаголник, K е средина на дијагоналата BD, M е средина на страната EF. Докажи дека ΔAMK е рамностран.

Решение. Нека шестаголникот $ABCDEF$ е впишан во единичната кружница. Тогаш можеме да земеме дека афиксите на темињата C, D, E, F, A, B се $1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{3}}$, соодветно, (види цртеж). Понатаму, афиксите на точките K и M се



$$k = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{5\pi}{3}}}{2} = \frac{1}{2} \text{ и}$$

$$m = \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\pi}}{2} = -\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4},$$

соодветно. Понатаму, од

$$\begin{aligned}(k-a)e^{i\frac{\pi}{3}} + a &= (\tfrac{1}{2} - e^{i\frac{4\pi}{3}})e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ &= \tfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{5\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ &= -\tfrac{3}{4} + i\tfrac{\sqrt{3}}{4} = m,\end{aligned}$$

т.е. $(k-a)e^{i\frac{\pi}{3}} = m - a$ следува дека во ΔAMK страната MA се добива од страната AK со ротација околу темето A за агол $\frac{\pi}{3}$, што значи дека ΔAMK е рамностран. ■

5.17. Пример. Дадени се точкита $M_k, k = 1, 2, 3, 4$ со афикси z_k, $k = 1, 2, 3, 4$, соодветно. Докажи дека

$$z_2 - z_1 = \pm i(z_4 - z_3) \tag{1}$$

ако и само ако

$$\overline{M_1M_2} = \overline{M_3M_4} \text{ и } M_1M_2 \perp M_3M_4 \tag{2}$$

Решение. Од условот (1) имаме $|z_2 - z_1| = |z_4 - z_3|$, што значи дека $\overline{M_1M_2} = \overline{M_3M_4}$. Исто така

$$z_2 - z_1 = \pm i(z_4 - z_3) = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}(z_4 - z_3),$$

што значи дека бројот $z_2 - z_1$ се добива со ротација на бројот $z_4 - z_3$ околу координатниот почеток за агол $\pm\frac{\pi}{2}$. Тоа значи $M_1M_2 \perp M_3M_4$. Според тоа, условот (2) следува од условот (1).

Обратно, од

$$\overline{M_1M_2} = |z_2 - z_1|,\ \overline{M_3M_4} = |z_4 - z_3| \text{ и } \overline{M_1M_2} = \overline{M_3M_4}$$

следува $z_2 - z_1 = re^{it}, \quad z_4 - z_3 = re^{is}$, па затоа

$$z_2 - z_1 = e^{i(t-s)}(z_4 - z_3). \tag{3}$$

Сега од втората релација во (2) следува дека

$$t - s = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Со замена во (3) добиваме $z_2 - z_1 = \pm i(z_4 - z_3)$. Според тоа, условот (1) следува од условот (2). ■

6. ХОМОТЕТИЈА

6.1. Дефиниција. Директната сличност со агол 0 или π, која не е транслација ја нарекуваме *хомотетија*.

Според тоа, директната сличност $S(z) = az + b, a,b \in \mathbf{C}, a \neq 0$ е хомотетија ако и само ако $a \in \mathbf{R}\setminus\{0,1\}$. Под коефициент на хомотетијата ќе го подразбираме реалниот број $a, (a \neq 0,1)$, а не комплексен број a како кај општите директни сличности. Јасно, централните симетрии се хомотетии со коефициент -1. Од теорема 4.2 следува дека инверзното пресликување на хомотетија со коефициент a е хомотетија со коефициент $\frac{1}{a}$. Во натамошните разгледувања множеството хомотетии ќе го означуваме со $\boldsymbol{H}$.

6.2. Теорема. а) Композиција на две хомотетии е хомотетија или транслација.

б) Композиција на хомотетија и транслација е хомотетија.

Доказ. а) Нека

$$S_1(z) = a_1 z + b_1,\ a_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$$

и

$$S_2(z) = a_2 z + b_2,\ a_2 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$$

се две хомотетии. Тогаш,

$$S_2(S_1(z)) = a_1 a_2 z + a_2 b_1 + b_2 .$$

Јасно, ако $a_1 a_2 = 1$, тогаш $S_2 \circ S_1$ е транслација за вектор $a_2 b_1 + b_2$, а ако $a_1 a_2 \neq 1$, тогаш $S_2 \circ S_1$ е хомотетија со центар C чиј афикс е $\frac{a_2 b_1 + b_2}{1 - a_1 a_2}$ и коефициент $a_1 a_2$.

б) Нека се дадени хомотетијата

$$S_1(z) = a_1 z + b_1,\ a_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$$

и транслацијата $S_2(z) = z + b_2$. Од

$$S_2(S_1(z)) = a_1 z + b_1 + b_2,\ a_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$$

следува дека $S_2 \circ S_1$ е хомотетија со центар C чиј афикс е $\frac{b_1 + b_2}{1 - a_1}$ и коефициент a_1. Од

$$S_1(S_2(z)) = a_1 z + b_1 + a_1 b_2,\ a_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$$

следува дека $S_1 \circ S_2$ е хомотетија со центар C чиј афикс е $\frac{a_1 b_2 + b_1}{1 - a_1}$ и коефициент a_1. ■

6.3. Последица. Множеството $\boldsymbol{T} \cup \boldsymbol{H}$ во однос на операцијата композиција на пресликувања е некомутативна подгрупа од групата директни сличности $\boldsymbol{DS}$.

Доказ. Непосредно следува од дефиниција 6.1 и теоремите 4.2, 5.6 и 6.2. ■

6.4. Теорема. Било кои две хомотетии и нивната композиција, ако таа не е транслација, имаат колинеарни центри.

Доказ. а) Нека

$$S_1(z) = a_1 z + b_1,\ a_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\} \text{ и } S_2(z) = a_2 z + b_2,\ a_2 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$$

се две хомотетии чии центри се C_1 и C_2, со афикси

$$c_1 = \frac{b_1}{1 - a_1} \text{ и } c_2 = \frac{b_2}{1 - a_2},$$

соодветно, и нека композицијата

$$S_2(S_1(z)) = a_1a_2z + a_2b_1 + b_2$$

е хомотетија со центар C чиј афикс е $\frac{a_2b_1+b_2}{1-a_1a_2}$. Тогаш,

$$\frac{c_2-c}{c_1-c} = \frac{\frac{b_2}{1-a_2} - \frac{a_2b_1+b_2}{1-a_1a_2}}{\frac{b_1}{1-a_1} - \frac{a_2b_1+b_2}{1-a_1a_2}} = \frac{a_1a_2-a_2}{1-a_2}$$

е реален број, што според последица 1.4 значи дека точките C_1, C_2 и C се колинеарни. ■

6.5. Теорема. Директната сличност $S(z) = az + b$ правата (p) ја пресликува во паралелна права (p') ако и само ако таа е хомотетија или транслација.

Доказ. Ако правата (p) има комплексен аглов коефициент η, тогаш нејзината слика (p') при директната сличност $S(z) = az + b$ има комплексен аглов коефициент $\eta\frac{a}{\bar{a}}$. Правите (p) и (p') се паралелни ако и само ако $\eta\frac{a}{\bar{a}} = \eta$, т.е. ако и само ако $a = \bar{a}$, што значи ако и само ако $a \in \mathbf{R}$. Значи, директната сличност $S(z) = az + b$ правата (p) ја пресликува во паралелна права (p') ако и само ако таа е хомотетија или транслација. ■

6.6. Да ги разгледаме кружниците (K_1) и (K_2) чии равенки се $|z - c_1| = R_1$ и $|z - c_2| = R_2$, соодветно.

Ако $R_1 \neq R_2$, тогаш пресликувањето $S: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ дефинирано со

$$w = S(z) = \frac{R_2}{R_1}z + \frac{R_1c_2 - R_2c_1}{R_1} \qquad (1)$$

е хомотетија со коефициент $\frac{R_2}{R_1}$ и центар $\frac{R_1c_2-R_2c_1}{R_1-R_2}$. Од (1) наоѓаме

$$z = \frac{R_1w - R_1c_2 + R_2c_1}{R_2}$$

и ако замениме во равенката на кружницата (K_1) ја добиваме равенката

$$\left|\frac{R_1w - R_1c_2 + R_2c_1}{R_2} - c_1\right| = R_1,$$

која е еквивалентна на равенката на кружницата (K_2). Да забележиме дека за $R_1 = R_2$ пресликувањето (1) е транслација за вектор $c_2 - c_1$ и истото кружницата (K_1) ја пресликува во кружницата (K_2).

Аналогно се докажува дека пресликувањето $S:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ дефинирано со

$$w=S(z)=-\frac{R_2}{R_1}z+\frac{R_1c_2+R_2c_1}{R_1} \tag{2}$$

е хомотетија со коефициент $-\frac{R_2}{R_1}$ и центар $\frac{R_1c_2+R_2c_1}{R_1+R_2}$, и дека истото кружницата (K_1) ја пресликува во кружницата (K_2).

Од досега изнесеното следува дека точноста на следната теорема.

Теорема. Кои било две кружници се хомотетични, т.е. постои хомотетија која едната ја пресликува во другата. ■

6.7. Пример. Нека B и C се точки од дадена кружница, кои не лежат на еден дијаметар, и тангентите на таа кружница во овие точки се сечат во точката A. Нека P е произволна точка од кружницата. Со $A_1, B_1,\ C_1$ да ги означиме подножјата на нормалите спуштени од точката P кон правите BC, CA, AB, соодветно. Докажи, дека $\overline{PA}_1^2=\overline{PB}_1\cdot\overline{PC}_1$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека дадената кружница е единечна и дека афиксот на точката P е 1 (зошто?).

Нека афиксите на точките B и C се b и c, соодветно. Тогаш, од забелешка 3.12 г) и д) за афиксите на точките A и A_1 имаме

$$a=\frac{2bc}{b+c} \text{ и } a_1=\frac{b+c+1-bc}{2},$$

соодветно. За да го определиме афиксот b_1 на точката B_1 ќе искористиме дека таа лежи на правата AC и дека PB_1 е нормална на AC. Имаме,

$$\frac{b_1-c}{a-c}=\frac{\overline{b}_1-\overline{c}}{\overline{a}-\overline{c}} \text{ и } \frac{b_1-1}{a-c}=-\frac{\overline{b}_1-1}{\overline{a}-\overline{c}}.$$

Ако во последните две равенки замениме за a, после средувањето добиваме:

$$\begin{cases} b_1+\overline{b}_1c^2=2c \\ b_1-\overline{b}_1c^2=1-c^2 \end{cases}$$

од што следува $b_1=\frac{1+2c-c^2}{2}$. Аналогно наоѓаме $c_1=\frac{1+2b-b^2}{2}$. Според тоа,

$$\overline{PA}_1^2=|1-a_1|^2=\tfrac{1}{4}|bc-b-c+1|^2=\tfrac{1}{2}|b-1|^2\cdot\tfrac{1}{2}|c-1|^2$$
$$=|1-b_1|\cdot|1-c_1|=\overline{PB}_1\cdot\overline{PC}_1. \ ■$$

6.8. Според теорема 5.5 и кометарот во дефиниција 4.11 директната сличност која не е идентитет или транслација има единствена неподвижна точка и тоа е центарот на директната сличност. За правата $(p):\ z=\eta\bar{z}+c$ ќе велиме дека е *неподвижна* за директната сличност S ако $S(p)=p$, т.е. ако директната сличност ја пресликува правата (p) во самата себе. За кружницата $(K):\ |z-c|=R$ ќе велиме дека е *неподвижна* за директната сличност S ако $S(K)=K$.

6.9. Од теорема 4.5 следува дека сликата на кружницата $(K):|z-c|=R$ при директната сличност $w=S(z)=az+b$ е кружница $(K'):$ $|z-(ac+b)|=R\cdot|a|$. Според тоа, кружницата (K) е неподвижна при директната сличност ако и само ако $|a|=1$ и $c=\frac{b}{1-a}$, што значи ако и само ако S е движење кое не е транслација и центарот на кружницата се совпаѓа со центарот на движењето.

Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема. а) Директната сличност има неподвижна кружница ако и само ако таа е движење кое не е транслација.

б) За движењето кое не транслација единствени неподвижни кружници се кружниците чии центри се совпаѓаат со центарот на движењето. ■

6.10. Од теорема 4.4 следува дека сликата на правата $(p):\ z=\eta\bar{z}+c$ при директната сличност $w=S(z)=az+b$ е права (p'):

$$w=(\tfrac{a}{\bar{a}}\eta)\bar{w}+b+ac-\tfrac{a}{\bar{a}}\bar{b}\eta\,.$$

Според тоа, правата (p) е неподвижна при директната сличност S ако и само ако

$$\tfrac{a}{\bar{a}}\eta=\eta \ \text{ и } \ b+ac-\tfrac{a}{\bar{a}}\bar{b}\eta=c\,,$$

т.е. ако и само ако $a\in\mathbf{R}$ и

$$b+ac-\bar{b}\eta=c\,.$$

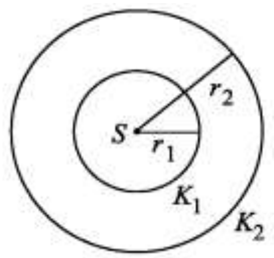
Од досега изнесеното следува дека правата $(p):\ z=\eta\bar{z}+c$ е неподвижна за директната сличност ако и само ако $a=1$ и $b=\bar{b}\eta$ или $a\neq 1$ и $\frac{b}{2}=\eta\frac{\bar{b}}{2}+c$, т.е. ако и само ако S е транслација и правата (p) е паралелна со векторот на транслација или S е хомотетија и правата (p) минува низ нејзиниот центар.

Со тоа ја докажавме следната теорема.

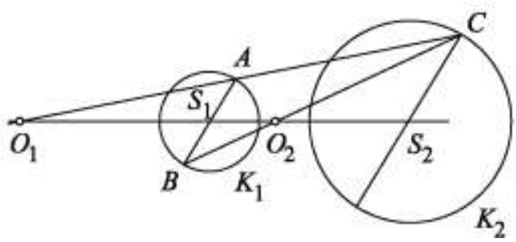
Теорема. Директната сличност има неподвижна права ако и само ако таа е:

а) транслација и во овој случај неподвижни се сите прави кои се паралелни со векторот на транслација,

б) хомотетија и во овој случај неподвижни се сите прави кои минуваат низ нејзиниот центар. ■



6.11. Забелешка. Од доказот на теорема 6.6 следува дека две концентрични кружници имаат само еден центар на сличност кој се совпаѓа со центарот на кружниците (цртеж десно), а неконцентрични кружници може да имаат или еден или два центри на сличност, во зависност од тоа дали нивните радиуси се еднакви или не, соодветно. Во случај кога неконцентричните кружници имаат различни радиуси центарот на сличност на хомотетијата (1) го нарекуваме *надворешен центар на сличност*, а центарот на хомотетијата (2) го нарекуваме *внатрешен центар на сличност* (цртеж долу).



6.12. Забелешка. Според теорема 6.5 секоја хомотетија произволна права ја пресликува во права паралелна на неа. Ова ни овозможува геометриски да го конструираме центарот на сличност на хомотетијата во случај кога имаме неконцентрични кружници (K_1) и (K_2). Низ центарот S_1 повлекуваме дијаметар AB на кружницата (K_1) и низ центарот S_2 повлекуваме радиус S_2C паралелен со дијаметар AB (vidi цртеж). Ако $R_1 \neq R_2$, тогаш правите AC и BC ја сечат правата S_1S_2 во точките O_1 и O_2, кои се надворешен и внатрешен центар на сличност на разгледуваните хомотетии, соодветно. Ако, пак $R_1 = R_2$, тогаш правата

AC ќе биде паралелна на правата S_1S_2, а правата BC ќе ја сече правата S_1S_2 во внатрешниот центар на сличност.

Да забележиме дека, ако t е заедничка тангента на кружниците (K_1) и (K_2), тогаш ако $R_1 = R_2$, таа е паралелна со правата S_1S_2, а ако $R_1 \neq R_2$, таа минува низ еден од центрите на сличност (зошто?). Според тоа, ако $R_1 \neq R_2$, тогаш за да ги конструирале заедничките тангенти на (K_1) и (K_2), треба да ги најдеме нивните центри на сличност и од нив да ги повлечеме тангентите на една од кружниците.

6.13. Да ги разгледаме кружниците $(K_i), i=1,2,3$ чии равенки се

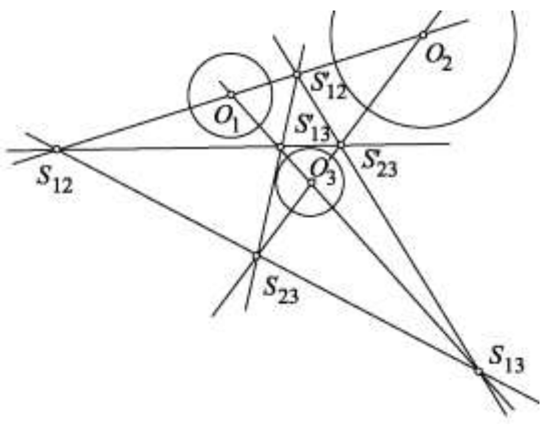
$$|z-c_i|=R_i, i=1,2,3,$$

соодветно и $R_i \neq R_j$, за $i \neq j$, а нивните центри не се колинеарни (цртеж долу). Од доказот на теорема 6.6 следува дека

$$\frac{R_1c_2-R_2c_1}{R_1-R_2}, \frac{R_2c_3-R_3c_2}{R_2-R_3} \text{ и } \frac{R_1c_3-R_3c_1}{R_1-R_3}$$

се афиксите на центрите на хомотетиите S_{12}, S_{23} и S_{13} кои ја пресликуваат (K_1) во (K_2), (K_2) во (K_3), и (K_1) во (K_3), соодветно. Притоа

$$\frac{\frac{R_1c_3-R_3c_1}{R_1-R_3}-\frac{R_1c_2-R_2c_1}{R_1-R_2}}{\frac{R_2c_3-R_3c_2}{R_2-R_3}-\frac{R_1c_2-R_2c_1}{R_1-R_2}} = \frac{R_1(R_2-R_3)}{R_2(R_1-R_3)} \in \mathbf{R}$$

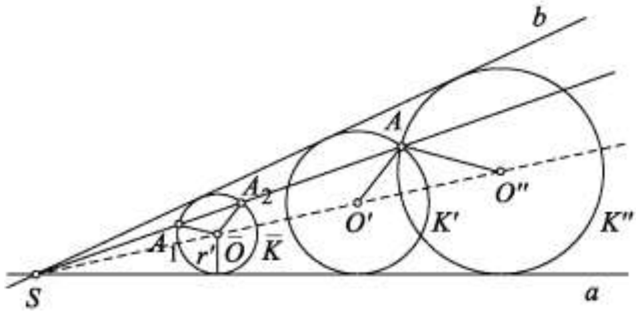


па од последица 1.4 следува дека точките S_{12}, S_{23} и S_{13} се колинеарни. Аналогно се докажува дека:

- точките S_{12}, S'_{23}, S'_{13} се колинеарни,
- точките S'_{12}, S'_{23}, S_{13} се колинеарни, и
- точките S'_{12}, S_{23}, S'_{13} се колинеарни. Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема. Ако центрите на кружниците $(K_i), i=1,2,3$ се неколинеарни и нивните радиуси се меѓусебно различни, тогаш нивните центри на хомотетија $S_{12}, S_{23}, S_{13}, S_{12}^{'}, S_{23}^{'}, S_{13}^{'}$ лежат на четири прави, така што на секоја од нив лежат по три центри на хомотетија. ■

6.14. Пример. Да се конструира кружница, која што минува низ дадена точка и допира две дадени прави.



Решение. Нека се дадени правите (a) и (b) и точката A. Ќе го разгледаме само случајот кога правите (a) и (b) се сечат, а точката A не лежи на ниедна од правите (a) и (b) и не лежи на симетралите на аглите што ги образуваат правите (a) и (b) (види цртеж). Останатите случаи ги оставаме на читателот за вежба.

Нека $S=(a)\cap(b)$ и нека $K(O,r)$ е бараната кружница. Бидејќи (K) ги допира правите (a) и (b), нејзиниот центар O лежи на симетралата (s) на оној агол образуван од правите (a) и (b) во кој лежи точката A. Ако H е хомотетија со центар во S и произволен коефициент, тогаш $\mathrm{H}(a)=a$, $\mathrm{H}(b)=b$, а $\mathrm{H}(K)=\overline{K}$ ќе биде кружница што ги допира правите (a) и (b). Значи за да ја конструираме кружницата (K), најпрво конструираме произволна кружница $(\overline{K})$ која ги допира правите (a) и (b). Нека A_1 и A_2 се пресечните точки на кружницата $(\overline{K})$ со правата SA. Ако H_1 и H_2 се хомотетии со центар во S и коефициенти $\overline{OA}:\overline{OA_1}$ и $\overline{OA}:\overline{OA_2}$, соодветно, тогаш $\mathrm{H}_1(A_1)=A$ и $\mathrm{H}_2(A_2)=A$. Значи, кружниците $\mathrm{H}_1(\overline{K})=K'$ и $\mathrm{H}_2(\overline{K})=K''$ ќе минуваат низ точката A и ќе ги допираат правите (a) и (b). Нивните центри ќе бидат $\mathrm{H}_1(\overline{O})=O'$ и $\mathrm{H}_2(\overline{O})=O''$. Според тоа, треба да повлечеме прави паралелни со правите OA_1 и OA_2 и во пресеците со правата (s) ќе ги добиеме точките O' и O''.

Од претходните разгледувања следува дека задачата има две решенија. ■

7. ИНДИРЕКТНИ СЛИЧНОСТИ

7.1. Дефиниција. Пресликувањето $S:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ дефинирано со

$$S(z)=a\bar{z}+b,\ a,b\in\mathbf{C},\ a\neq 0 \qquad (1)$$

го нарекуваме *индиректна сличност*. Во натамошните разгледувања множеството индиректни сличности ќе го означуваме со $\boldsymbol{IS}$.

7.2. Теорема. Индиректната сличност $S:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ дефинирана со (1) е биекција и нејзиното инверзно пресликување $S^{-1}:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ е дефинирано со

$$S^{-1}(z)=\frac{1}{\bar{a}}\bar{z}-\frac{\bar{b}}{\bar{a}},\ a,b\in\mathbf{C},\ a\neq 0\,, \qquad (2)$$

при што важи $S^{-1}\in\boldsymbol{IS}$.

Доказ. Ако $S(z_1)=S(z_2)$, тогаш

$$a\bar{z}_1+b=a\bar{z}_2+b\,,$$

од што следува $z_1=z_2$, т.е. S е инјекција. Ако $w\in\mathbf{C}$, тогаш за $z=\frac{\bar{w}-\bar{b}}{\bar{a}}$ важи

$$S(z)=S(\tfrac{\bar{w}-\bar{b}}{\bar{a}})=a\,\tfrac{w-b}{a}+b=w$$

т.е. S е сурјекција, па значи тоа е биекција.

Пресликувањето $S_1(z)=\frac{1}{\bar{a}}\bar{z}-\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$ е индиректна сличност и притоа важи $S(S_1(z))=S_1(S(z))=z$, што значи $S^{-1}=S_1\in\boldsymbol{IS}$. ■

7.3. Теорема. Композиција на две индиректни сличности е директна сличност, а композицвија на директна и индиректна сличност е индиректна сличност.

Доказ. Ако $S_1,S_2\in\boldsymbol{IS}$, тогаш

$$S_1(z)=a\bar{z}+b,\ a,b\in\mathbf{C},\ a\neq 0 \text{ и } S_2(z)=c\bar{z}+d,\ c,d\in\mathbf{C},\ c\neq 0\,.$$

Според тоа,

$$S_1(S_2(z))=S_1(c\bar{z}+d)=a\overline{(c\bar{z}+d)}+b=(a\bar{c})z+(a\bar{d}+b),$$

каде $a\bar{c},a\bar{d}+b\in\mathbf{C},\ a\bar{c}\neq 0$, т.е. $S_1\circ S_2\in\boldsymbol{DS}$.

Значи, композиција на две индиректни сличности е директна сличност.

Ако $S_1\in\boldsymbol{DS}$ и $S_2\in\boldsymbol{IS}$, тогаш

$$S_1(z)=az+b,\ a,b\in\mathbf{C},\ a\neq 0 \text{ и } S_2(z)=c\bar{z}+d,\ c,d\in\mathbf{C},\ c\neq 0\,.$$

Според тоа,

$$S_1(S_2(z)) = S_1(c\overline{z} + d) = a(c\overline{z} + d) + b = (ac)\overline{z} + (ad + b),$$

каде $ac, ad + b \in \mathbf{C}, ac \neq 0$, т.е. $S_1 \circ S_2 \in \boldsymbol{IS}$. Аналогно се докажува дека $S_2 \circ S_1 \in \boldsymbol{IS}$.

Значи, композиција на индиректна и директна сличност е индиректна сличност. ■

7.4. Директните и индиректните сличности со едно име ќе ги нарекуваме сличности. Во натамошните разгледувања множеството сличности ќе го означуваме со $\boldsymbol{S}$. Со непосредна проверка се докажува дека за сличностите во однос на операцијата композиција на пресликувања важи асоцијативниот закон. Од претходно кажаното и од теоремите 4.2, 7.2 и 7.3 следува точноста на следнава теорема.

Теорема. Моножеството сличности $\boldsymbol{S}$ во однос на операцијата композиција на пресликувања е некомутативна група. ■

7.5. Теорема. Секоја индиректна сличност еднозначно е определена со два пара придружени точки.

Доказ. Нека S е произволна индиректна сличност за која важи $S(z_1) = w_1$ и $S(z_2) = w_2$. Тогаш, $S(z) = a\overline{z} + b,$ каде $a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0$ се непознати коефициенти кои треба да ги определиме. Според теорема 7.2 секоја индиректна сличност е биекција, па затоа од $z_1 \neq z_2$ следува $w_1 \neq w_2$. Со замена во $S(z) = a\overline{z} + b$ добиваме

$$\begin{cases} w_1 = a\overline{z}_1 + b \\ w_2 = a\overline{z}_2 + b \end{cases} \tag{3}$$

Решавајќи го системот (3) по непознати a и b наоѓаме

$$a = \frac{w_1 - w_2}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2},\ b = \frac{\overline{z}_1 w_2 - \overline{z}_2 w_1}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2} \text{ и } a \neq 0,$$

т.е. коефициентите на индиректната сличност се наполно определени со два пара придружени точки $(z_1, S(z_1))$ и $(z_2, S(z_2))$. ■

7.6. Теорема. Слика на права (p) при индиректна сличност е права (p').

Доказ. Нека $S_1(z)=a\overline{z}+b,\ a,b\in\mathbf{C},\ a\neq 0$ е индиректна сличност и (p): $z=\eta\overline{z}+c$ е дадена права. Имаме, $z=\frac{\overline{w}-\overline{b}}{\overline{a}}$ и ако замениме во равенката на правата (p) добиваме дека таа се пресликува во права (p') чија равенка е

$$w=(\tfrac{a}{\overline{a}}\overline{\eta})\overline{w}+(b-ac\overline{\eta}-\tfrac{a\overline{b}}{\overline{a}}\overline{\eta})\ .\ \blacksquare$$

7.7. Теорема. Слика на кружница (K) при индиректна сличност е кружница (K').

Доказ. Нека $S_1(z)=a\overline{z}+b,\ a,b\in\mathbf{C},\ a\neq 0$ е индиректна сличност и (K): $|z-c|=R$ е дадена кружница. Имаме, $z=\frac{\overline{w}-\overline{b}}{\overline{a}}$ и ако замениме во равенката на кружницата (K) добиваме дека таа се пресликува во кружница (K') чија равенка е

$$|w-(b+a\overline{c}|=R\cdot|a|\ .\ \blacksquare$$

7.8. Теорема. Ако A,B се произволни различни точки и A',B' се нивните слики при индиректната сличност (1) и ако $a=re^{i\varphi}$, тогаш $\overline{A'B'}=r\overline{AB}$, а ако α и α_1 се ориентираните агли меѓу реалната оска и правите AB и $A'B'$, тогаш $\alpha+\alpha_1=\varphi$.

Доказ. Нека z_1,z_2,w_1,w_2 се афиксите на точките A,B,A',B', соодветно. Тогаш,

$$z_2-z_1=\overline{AB}\cdot e^{i\alpha}$$

и

$$w_2-w_1=\overline{A'B'}\cdot e^{i\alpha_1},$$

каде α и α_1 се аглите кои ги зафаќа реалната оска со векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$, соодветно. Од равенствата $w_1=a\overline{z}_1+b$ и $w_2=a\overline{z}_2+b$ го добиваме равенството

$$w_2-w_1=a\overline{(z_2-z_1)},$$

т.е. равенството

$$\overline{A'B'}\cdot e^{i\alpha_1}=r\overline{AB}\cdot e^{i(\varphi-\alpha)},$$

од што следува $\overline{A'B'}=r\overline{AB}$ и $\alpha+\alpha_1=\varphi$. $\blacksquare$

7.9. Дефиниција. За две фигури ќе велиме дека се *индиректно слични* ако постои индиректна сличност која едната од нив ја пресликува на другата.

Реалниот број r од претходната теорема го нарекуваме *коефициент на индиректната сличност* (1).

7.10. Последица. Ако ABC и $A'B'C'$ се индиректно слични триаголници, тогаш

$$\overline{A'B'}:\overline{A'C'}=\overline{AB}:\overline{AC} \text{ и } \angle A'B'C'=-\angle ABC .$$

Доказ. Непосредно следува од теорема 7.8. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

7.11. Теорема. Нека точките A,B,C,A',B',C' имаат афикси $z_1,z_2,$ z_3,w_1,w_2,w_3, соодветно. Триаголниците ABC и $A'B'C'$ се индиректно слични ако и само ако

$$z_1(\overline{w_2}-\overline{w_3})+z_2(\overline{w_3}-\overline{w_1})+z_3(\overline{w_1}-\overline{w_2})=0 . \tag{4}$$

Доказ. Триаголниците ABC и $A'B'C'$ се индиректно слични ако и само ако постои индиректна сличност од видот (1) за која важи

$$w_i=a\overline{z_i}+b, \text{ за } i=1,2,3 .$$

Од последните равенства ги добиваме равенствата

$$w_1-w_2=a\overline{(z_1-z_2)} \text{ и } w_1-w_3=a\overline{(z_1-z_3)} .$$

Ако ги поделиме последните две равенства го добиваме равенството

$$\tfrac{w_1-w_2}{w_1-w_3}=\overline{\tfrac{z_1-z_2}{z_1-z_3}} ,$$

кое е еквивалентно со равенството (4). ■

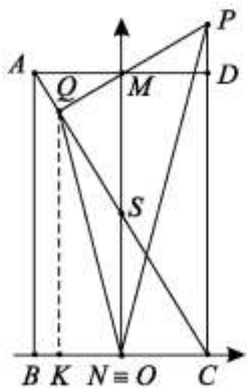
7.12. Пример. Во правоаголник $ABCD$ точката M е средина на страната AD, N е средина на страната BC. На продолжението на страната DC преку точката D дадена е точка P. Со Q да го означиме пресекот на правите PM и AC. Докажи дека $\angle QMN=\angle MNP$.

Решение. Нека координатниот почеток е во точката N и $B(-x), C(x), D(x+iy), A(-x+iy)$ и $P(x+iy)$. Тогаш $M(iy)$ и равенката на правата PM е $z(x-ip+iy)-\overline{z}(x+ip-iy)-2ixy=0$, т.е.

$$z-\overline{z}\tfrac{x+ip-iy}{x-ip+iy}-\tfrac{2ixy}{x-ip+iy}=0 . \tag{*}$$

Нека $S(\frac{iy}{2})$ е пресекот на правите MN и AC. Тогаш правите AC и AS се совпаѓаат, па равенката на правата AC е $z(x+\frac{iy}{2})-\bar{z}(x-\frac{iy}{2})-ixy=0$, т.е.

$$z-\bar{z}\frac{2x-iy}{2x+iy}-\frac{2ixy}{2x+iy}=0. \qquad (**)$$



Бидејќи $Q=AC\cap PM$, од (*) и (**) за афиксот на точката Q добиваме

$$\bar{q}=\frac{xy}{y+2p}+i\frac{yp}{y+2p}, \text{ т.е. } q=\frac{xy}{y+2p}-i\frac{yp}{y+2p}.$$

Понатаму, ако со K ја означиме проекцијата на точката Q врз $x-$оската тогаш нејзиниот афикс е $k=\frac{xy}{y+2p}$. За да го докажеме тврдењето на задачата доволно е да докажеме дека триаголникот CPN е индиректно сличен со триаголникот KQN, што според теорема 7.11 значи дека доволно е да го провериме равенството

$$\frac{x+ip-x}{0-x}=\frac{\frac{xy}{y+2p}+i\frac{yp}{y+2p}-\frac{xy}{y+2p}}{0-\frac{xy}{y+2p}},$$

кое очигледно е исполнето. ■

7.12. Дефиниција. Индиректната сличност со коефициент $|a|=1$ ја нарекуваме *индиректна изометрија*. Движењата и индиректните изометрии со едно име ќе ги нарекуваме *изометрии*.

Во натамошните разгледувања множеството индиректни изометрии ќе го означуваме со $\boldsymbol{II}$, а множеството изометрии со $\boldsymbol{I}$. Во врска со изометриите од претходните разгледувања непосредно следува точноста на следната теорема, чиј доказ го оставаме на читателот за вежба.

Теорема. Множеството изометрии $\boldsymbol{I}$ во однос на операцијата композиција на пресликувања е некомутативна група. ■

7.13. Теорема. Индиректната сличност е инволуторна ако и само ако е *осна симетрија*.

Доказ. Нека индиректната сличност $S:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ е инволуторна. Тогаш $S(z)=S^{-1}(z)$, за секој $z\in\mathbf{C}$, па затоа

$$a\bar{z}+b=\frac{1}{\bar{a}}\bar{z}-\frac{\bar{b}}{\bar{a}}, \text{ за секој } z\in\mathbf{C}.$$

Од последното равенство добиваме $|a|=1$ и $\frac{b}{\bar{b}}=-a$. Според тоа, равенката $z=a\bar{z}+b$ е равенка на права. Да ги разгледаме точката z и нејзината слика $w=S(z)$. За овие две точки важи $w=a\bar{z}+b$, па од пример 1.9 следува дека тие се симетрични во однос на правата $z=a\bar{z}+b$, т.е. $S:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ е осна симетрија.

Обратното тврдење непосредно следува од пример 1.9. ■

7.14. Точката z е *неподвижна за индиректната сличност* (1) ако и само ако $z=a\bar{z}+b$. Според тоа, $\bar{z}=\bar{a}z+\bar{b}$ и со замена во претходната равенка добиваме

$$z(1-a\bar{a})=a\bar{b}+b. \tag{5}$$

Можни се следните три случаи.

1) Ако $a\bar{a}\neq 1$, тогаш (1) не е изометрија и има една неподвижна точка z за која од (5) добиваме $z=\frac{a\bar{b}+b}{1-a\bar{a}}$.
2) Ако $a\bar{a}=1$ и $a\bar{b}+b\neq 0$, тогаш (1) е индиректна изометрија, но не е осна симетрија и нема неподвижни точки.
3) Ако $a\bar{a}=1$ и $a\bar{b}+b=0$, тогаш $|a|=1$ и $\frac{b}{\bar{b}}=-a$, па од доказот на теорема 7.13 следува дека (1) е осна симетрија и како $z=a\bar{z}+b$ добиваме дека точката z лежи на оската на симетријата.

Од претходно изнесеното следува точноста на следната теорема.

Теорема. Индиректната сличност која не е изометрија има единствена неподвижна точка $z=\frac{a\bar{b}+b}{1-a\bar{a}}$. Ако индиректната изометрија не е осна симетрија, тогаш таа нема неподвижни точки, а за осната симетрија единствени неподвижни точки се точките од оската на симетријата. ■

7.15. Дефиниција. Ако индиректната сличност (1) не е изометрија, тогаш неподвижната точка $\frac{a\bar{b}+b}{1-a\bar{a}}$ ја нарекуваме *центар на индиректната сличност.*

7.16. Дефиниција. За правата (p): $z=\eta\overline{z}+c$ ќе велиме дека е *неподвижна* за индиректната сличност (1) ако $S(p)=p$, т.е. ако индиректната сличност ја пресликува правата (p) во самата себе. За кружницата (K): $|z-c|=R$ ќе велиме дека е *неподвижна* за индиректната сличност (1) ако $S(K)=K$.

7.17. Теорема. а) Ако индиректната сличност (1) е осна симетрија, тогаш оската на симетрија и правите кои се нормални на неа се единствените неподвижни прави за (1).

б) Ако индиректната сличност (1) е осна симетрија, тогаш кружниците чии центри лежат на оската на симетрија се единствените неподвижни кружници за (1).

Доказ. а) Нека (1) е осна симетрија со оска (p): $z=a\overline{z}+b$, $|a|=1$ и $\frac{b}{\overline{b}}=-a$ и нека (q): $z=\eta\overline{z}+c$ е произволна права. Од $w=a\overline{z}+b$, наоѓаме $z=\frac{\overline{w}-\overline{b}}{\overline{a}}$. Ако замениме во равенката на (q) добиваме

$$\frac{\overline{w}-\overline{b}}{\overline{a}}=\eta\frac{w-b}{a}+c$$

односно

$$w=\frac{a}{\eta\overline{a}}\overline{w}+\frac{b}{\eta\overline{a}}+b-\frac{c}{\eta\overline{a}}.$$

Правата (q) е неподвижна за осната симетрија (1) ако и само ако

$$\frac{a}{\eta\overline{a}}=\eta \text{ и } \frac{b}{\eta\overline{a}}+b-\frac{c}{\eta\overline{a}}=c.$$

Од $\frac{a}{\eta\overline{a}}=\eta$ и $|a|=1$ следува $\eta=\pm a$. Ако $\eta=a$, тогаш од

$$\frac{b}{\eta\overline{a}}+b-\frac{c}{\eta\overline{a}}=c$$

следува $b=c$. Ако $\eta=-a$, тогаш равенството

$$\frac{b}{\eta\overline{a}}+b-\frac{c}{\eta\overline{a}}=c$$

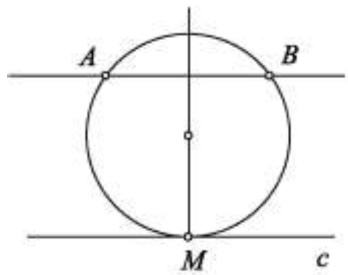
е исполнето за секој $c\in\mathbf{C}$ и $(q)\perp(p)$.

б) Нека (1) е осна симетрија со оска (p): $z=a\overline{z}+b$, $|a|=1$ и $\frac{b}{\overline{b}}=-a$ и нека (K): $|z-c|=R$ е произволна кружница. Од $w=a\overline{z}+b$ наоѓаме $z=\frac{\overline{w}-\overline{b}}{\overline{a}}$. Ако замениме во равенката на (K) добиваме $|w-(b+a\overline{c})|=R$.

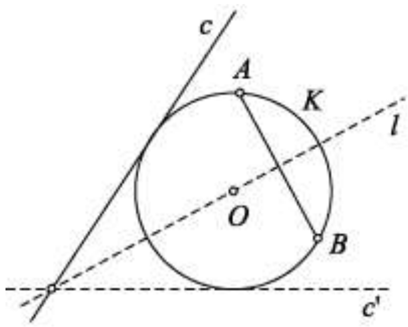
Кружницата (K) е неподвижна за осната симетрија (1) ако и само ако $c = a\bar{c} + b$, што значи ако и само ако нејзиниот центар лежи на оската на симетријата. ■

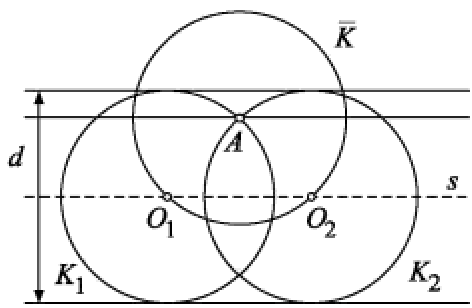
7.18. Пример. Да се конструира кружница, која што минува низ две дадени точки и допира дадена права.

Решение. Нека се дадени точките A и B и правата (c). Очигледно, ако точките A и B лежат во различни полурамнини во однос на правата (c) или и двете лежат на правата (c), тогаш задачата нема решение. Ако $A \in (c)$ и $B \notin (c)$, тогаш задачата има единствено решение. Центарот O на бараната кружница ќе лежи на симетралата на отсечката AB и на правата (p) која што минува низ A и е нормална на (c). Ако точките A и B лежат во иста полурамнина во однос на правата (c) и правата AB е паралелна со правата (c), тогаш задачата има две решенија. Едното решение е кружницата низ точките A, B и M, каде што M е пресечната точка на симетралата на отсечката AB со правата (c), а другото е правата AB, (цртеж десно).



Нека точките A и B лежат во иста полурамнина во однос на правата (c) и правата AB не е паралелна со правата (c) (цртеж долу лево). Бидејќи бараната кружница $K(O,R)$ минува низ точките A и B нејзиниот центар ќе лежи на симетралата (l) на отсечката AB. Нека σ_l е осна симетрија со оска на симетрија (l). Од претходната теорема следува дека $\sigma_l(K) = K$. Бидејќи правата (c) е тангента на кружницата $K(O,R)$, од последица 7.10 следува дека $\sigma_l(c) = c'$ е тангента на $K(O,R)$. Ако правите





(c) и (c') не се паралелни, тогаш задачата се сведува на пример 6.14.

Ако правите (c) и (c') се паралелни, тогаш точката A лежи меѓу нив. Нека d е растојанието меѓу правите (c) и (c'). Кружницата $\overline{K}(A,\frac{d}{2})$ ја сече симетралата (s) во точки O_1 и O_2. Бараните кружници се $K_1(O_1,\frac{d}{2})$ и $K_2(O_2,\frac{d}{2})$, (цртеж горе десно). ■

7.19. Природно е да се запрашаме, дали постојат фиксни прави за индиректна сличност која не е осна симетрија, т.е. кога $|a|\neq 1$.

Според теорема 7.6 сликата на правата (p): $z=\eta\overline{z}+c$ при индиректната сличност (1) е права (p') чија равенка е

$$w=(\frac{a}{\overline{a}}\overline{\eta})\overline{w}+(b-ac\overline{\eta}-\frac{a\overline{b}}{\overline{a}}\overline{\eta}).$$

Правите (p) и (p') се совпаѓаат ако и само ако

$$\frac{a}{\overline{a}}\overline{\eta}=\eta \text{ и } b-ac\overline{\eta}-\frac{a\overline{b}}{\overline{a}}\overline{\eta}=c.$$

Од последните две равенства добиваме $\eta^2=\frac{a}{\overline{a}}=\frac{a^2}{|a|^2}$, т.е. $\eta_1=\frac{a}{|a|}$, $\eta_2=-\frac{a}{|a|}$ и $c_1=\frac{b\overline{a}-\overline{b}|a|}{\overline{a}(1+|a|)}$, $c_2=\frac{b\overline{a}+\overline{b}|a|}{\overline{a}(1-|a|)}$, соодветно. Значи, индиректната сличност која не е изометрија има две фиксни прави (p_1) и (p_2) чии равенки се

$$z=\frac{a}{|a|}\overline{z}+\frac{b\overline{a}-\overline{b}|a|}{\overline{a}(1+|a|)} \text{ и } z=-\frac{a}{|a|}\overline{z}+\frac{b\overline{a}+\overline{b}|a|}{\overline{a}(1-|a|)},$$

соодветно. Од последица 1.8. А б) следува дека правите (p_1) и (p_2) се заемно нормални. Бидејќи

$$\frac{a}{|a|}\overline{(\frac{a\overline{b}+b}{1-a\overline{a}})}+\frac{b\overline{a}-\overline{b}|a|}{\overline{a}(1+|a|)}=\frac{a}{|a|}\frac{b\overline{a}+\overline{b}}{1-|a|^2}+\frac{b\overline{a}-\overline{b}|a|}{\overline{a}(1+|a|)}=\frac{|a|(b\overline{a}+\overline{b})+(b\overline{a}-\overline{b}|a|)(1-|a|)}{\overline{a}(1-|a|^2)}$$
$$=\frac{b\overline{a}+\overline{b}a\overline{a}}{\overline{a}(1-|a|^2)}=\frac{b+\overline{b}a}{1-|a|^2}$$

добиваме дека центарот $\frac{b+\overline{b}a}{1-|a|^2}$ на индиректната сличност (1), која не е изометрија, припаѓа на правата (p_1). Аналогно,

$$-\frac{a}{|a|}\overline{(\frac{a\overline{b}+b}{1-a\overline{a}})}+\frac{b\overline{a}+\overline{b}|a|}{\overline{a}(1-|a|)}=-\frac{a}{|a|}\frac{b\overline{a}+\overline{b}}{1-|a|^2}+\frac{b\overline{a}+\overline{b}|a|}{\overline{a}(1-|a|)}=\frac{-|a|(b\overline{a}+\overline{b})+(b\overline{a}+\overline{b}|a|)(1+|a|)}{\overline{a}(1-|a|^2)}$$
$$=\frac{b\overline{a}+\overline{b}a\overline{a}}{\overline{a}(1-|a|^2)}=\frac{b+\overline{b}a}{1-|a|^2}$$

т.е. центарот $\frac{b+\bar{b}a}{1-|a|^2}$ на индиректната сличност (1), која не е изометрија припаѓа на правата (p_2).

Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема. Индиректната сличност (1), која не е изометрија, има две заемно нормални фиксни прави кои минуваат низ центарот на сличност. ■

7.20. Дефиниција Нека (1) е индиректна сличност која не е изометрија. Правите (p_1) и (p_2) чии равенки се

$$z=\frac{a}{|a|}\bar{z}+\frac{b\bar{a}-\bar{b}|a|}{\bar{a}(1+|a|)} \text{ и } z=-\frac{a}{|a|}\bar{z}+\frac{b\bar{a}+\bar{b}|a|}{\bar{a}(1-|a|)},$$

соодветно, ги нарекуваме *оски на индиректната сличност* (1).

Јасно, според теорема 7.19 оските се единствените фиксни прави на индиректната сличност која не е изометрија.

8. ИНВЕРЗИЈА

8.1. Нека $m\in\mathbf{R}$, $m>0$ и $a\in\mathbf{C}$ и нека пресликувањето $I:\mathbf{C}\setminus\{a\}\to\mathbf{C}\setminus\{a\}$ е определено со

$$I(z)=a+\frac{m}{\bar{z}-\bar{a}}. \qquad (1)$$

i) Ако $I(z_1)=I(z_2)$, тогаш од

$$a+\frac{m}{\bar{z}_1-\bar{a}}=a+\frac{m}{\bar{z}_2-\bar{a}}$$

следува $z_1=z_2$, т.е. I е инјекција.

ii) За $w\in\mathbf{C}\setminus\{a\}$, постои $z=a+\frac{m}{\bar{w}-\bar{a}}$ таков што $I(z)=w$, т.е. I е сурјекција.

Сега, од *i*) и *ii*) следува дека I е биекција.

Дефиниција. Пресликувањето

$$I:\mathbf{C}\setminus\{a\}\to\mathbf{C}\setminus\{a\}$$

дефинирано со (1) го нарекуваме *инверзија со центар во* a и *коефициент* $\sqrt{m}$.

8.2. За инверзијата (1) точката z е неподвижна ако и само ако и исполнето равенството

$$z = a + \frac{m}{\overline{z}-\overline{a}},$$

што значи ако и само ако

$$|z-a| = \sqrt{m}.$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема. Точката z е неподвижна за инверзијата (1) ако и само ако припаѓа на кружницата $|z-a| = \sqrt{m}$. ■

8.3. Дефиниција. Кружницата $(K_0): |z-a| = \sqrt{m}$, ја нарекуваме *кружница на инверзијата* (1).

8.4. Теорема. Инверзијата е инволуторно пресликување.

Доказ. Нека инверзијата е дефинирана со (1). Тогаш, за секој $z \in \mathbf{C}$ важи

$$I(I(z)) = I\left(a + \frac{m}{\overline{z}-\overline{a}}\right) = a + \frac{m}{\overline{a+\frac{m}{\overline{z}-\overline{a}}} - \overline{a}} = z = E(z)$$

т.е. $I^2 = E$ и како I е биекција имаме $I = I^{-1}$, т.е. инверзијата е инволуторна. ■

8.5. Нека O е центар на инверзијата (1), A е произволна точка од рамнината, различна од O, и $\mathrm{I}(A) = A'$. Афиксите на точките O, A и A' нека се a, z и $z*$, соодветно. Притоа важи

$$z*-a = a + \frac{m}{\overline{z}-\overline{a}} - a = \frac{m}{\overline{z}-\overline{a}} = \frac{m}{|z-a|^2}(z-a).$$

Од последното равенство следува дека

$$\arg(z*-a) = \arg(z-a)$$

и

$$|z*-a| \cdot |z-a| = m.$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема. а) Секоја точка A различна од центарот O на инверзијата (1), со инверзијата се пресликува во точка A' која лежи на полуправата OA и таква што

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=m. \qquad (2)$$

б) Точките A и A', со афикси z и z^*, соодветно се инверзни во однос на кружницата $|z-a|=\sqrt{m}$ ако и само $(z^*-a)(\bar{z}-\bar{a})=m$. ■

8.6. Теорема. Секоја внатрешна точка на кружницата на инверзијата се пресликува во надворешна точка, и обратно.

Доказ. Ако A е внатрешна точка на кружницата на инверзија $K_0(O,\sqrt{m})$ и $\mathrm{I}(A)=A'$, тогаш $\overline{OA}<\sqrt{m}$ и од (2) следува дека $\overline{OA'}>\sqrt{m}$, што значи дека A' е надворешна точка за K_0.

Обратното тврдење се докажува аналогно. ■

8.7. Да видиме како ќе ја конструираме сликата A' на произволна точка A при инверзијата (1). Нека A, со афикс z_0, е внатрешна точка на кружницата на инверзија $K_0(O,\sqrt{m})$. Тогаш,

$$|z_0-a|^2<m.$$

Равенката на правата OA е

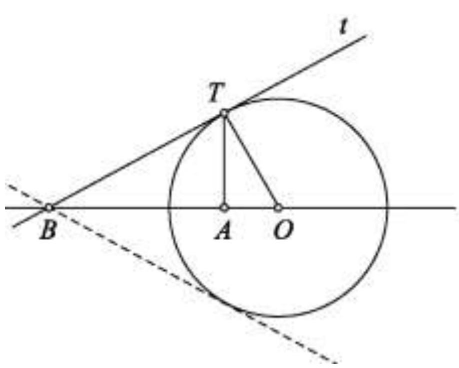
$$z-a=\frac{z_0-a}{\bar{z}_0-\bar{a}}(\bar{z}-\bar{a}).$$

Во точката A повлекуваме права (q) нормална на правата OA. Нејзината равенка е

$$z-z_0=-\frac{z_0-a}{\bar{z}_0-\bar{a}}(\bar{z}-\bar{z}_0).$$

Пресечните точки на правата (q) и кружницата $K_0(O,\sqrt{m})$ ги наоѓаме како решенија на системот

$$\begin{cases} z-z_0=-\dfrac{z_0-a}{\bar{z}_0-\bar{a}}(\bar{z}-\bar{z}_0) \\ |z-a|=\sqrt{m} \end{cases}$$



Една од нив е точката T чиј афикс е

$$z_1=z_0+i\frac{\sqrt{m-|z_0-a|^2}}{|z_0-a|}(z_0-a).$$

Во точката T повлекуваме тангента (t) на кружницата $K_0(O,\sqrt{m})$, чија равенка гласи

$$z - z_1 = -\frac{z_1 - a}{\overline{z_1} - \overline{a}}(\overline{z} - \overline{z_1}) .$$

Наоѓаме пресек на правите (t) и OA и ја добиваме точката B чиј афикс е

$$z = a + \frac{m}{\overline{z_0} - \overline{a}} .$$

Значи, $\mathrm{I}(A) = B = A'$.

Нека A е надворешна точка на кружницата $K_0(O, \sqrt{m})$. Според теорема 8.4 имаме $\mathrm{I}^2 = E$, од што следува следната конструкција на точката $\mathrm{I}(A) = A'$. Низ точката A ја повлекуваме тангентата (t) на K_0 и ортогоналната проекција од допирната точка T на (t) и K_0 врз правата OA ќе биде точката $\mathrm{I}(A) = A'$.

8.8. Нека точките A и B имаат афикси c и b. Афиксите на нивните слики при инверзијата (1) се

$$c' = a + \frac{m}{\overline{c} - \overline{a}} \text{ и } b' = a + \frac{m}{\overline{b} - \overline{a}} ,$$

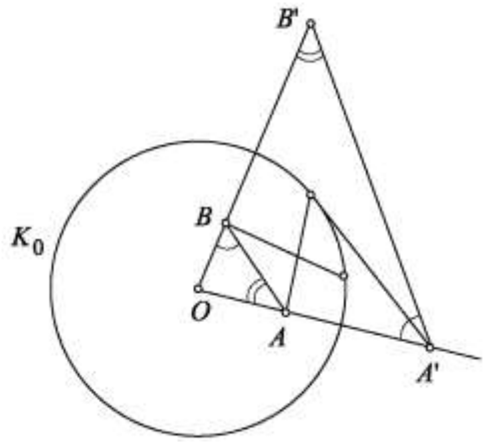
соодветно. Комплексните аглови коефициенти на правите OA, OB, AB, OA', OB' и $A'B'$ се

$$\eta_1 = \frac{c-a}{\overline{c}-\overline{a}}, \eta_2 = \frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}}, \eta_3 = \frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}},$$

$$\eta_4 = \eta_1, \ \eta_5 = \eta_2,$$

$$\eta_6 = \frac{(b-a)(c-a)(\overline{b}-\overline{c})}{(\overline{b}-\overline{a})(\overline{c}-\overline{a})(b-c)}$$

соодветно. Од $\frac{\eta_2}{\eta_3} = \frac{\eta_6}{\eta_4}$ и $\frac{\eta_1}{\eta_3} = \frac{\eta_6}{\eta_5}$ и од теорема 1.7 следува дека (цртеж десно):



$$\angle OBA = \angle B'A'O \text{ и } \angle OAB = \angle A'B'O .$$

Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема. Нека O е центар на инверзијата (1), A и B се произволни точки и A' и B' се нивни слики при инверзијата (1). Тогаш,

$$\angle OBA = \angle B'A'O \text{ и } \angle OAB = \angle A'B'O . \ \blacksquare$$

8.9. Правата (p) чија автокоњугирана равенка е

$$Az+B\bar{z}+C=0, C\in\mathbf{R}, B=\bar{A}$$

со инверзијата (1) се пресликува во крива чија равенка е

$$Aa+B\bar{a}+C+\frac{Am}{\bar{w}-\bar{a}}+\frac{Bm}{w-a}=0. \qquad (3)$$

Можни се два случаи:

i) Ако $Aa+B\bar{a}+C=0$, т.е. правата минува низ центарот на инверзијата, тогаш од (3) следува дека сликата на (p) е права чија равенка е

$$Aw+B\bar{w}+C=0, C\in\mathbf{R}, B=\bar{A},$$

а тоа е правата (p).

ii) Ако $Aa+B\bar{a}+C\neq 0$, т.е. правата не минува низ центарот на инверзијата, тогаш од (3) следува дека сликата на (p) е кружница чија равенка е

$$w\bar{w}+\bar{A}_1 w+A_1\bar{w}+B_1=0,$$

каде

$$A_1=\frac{Bm}{Aa+B\bar{a}+C}-a, B_1=a\bar{a}-\frac{Aam+Bm\bar{a}}{Aa+B\bar{a}+C}.$$

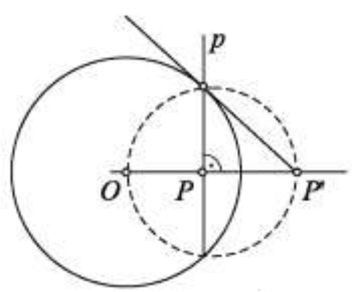
Со непосредна проверка добиваме дека $a\bar{a}+\bar{A}_1 a+A_1\bar{a}+B_1=0$, што значи дека сликата на правата (p) која не минува низ центарот на инверзијата (1) е кружница која минува низ центарот на инверзјата.

Од досега изнесеното непосредно следува точноста на следната теорема.

Теорема. Секоја права што минува низ центарот O на инверзијата I се пресликува во самата себе, а секоја права која не минува низ O се пресликува во кружница која што минува низ O. ■

8.10. Ако правата (p) не минува низ центарот на инверзијата O, тогаш од доказот на теорема 8.9 следува дека центарот O_1 на кружницата во која се пресликува има афикс

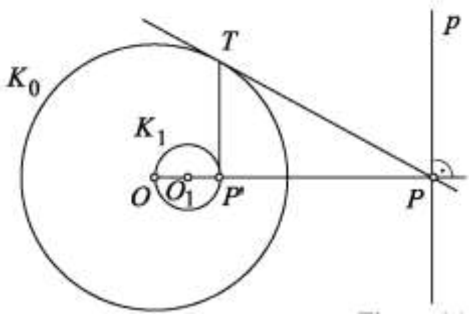
$$z_1=-A_1=a-\frac{Bm}{Aa+B\bar{a}+C}.$$



Нека P е ортогоналната проекција на центарот O врз правата (p). Според 2.3 афиксот на точката P е

$$z_0=\frac{Aa-B\bar{a}-C}{2A},$$

па затоа афиксот на нејзината слика $P' = \mathrm{I}(P)$ ќе биде



$$z^* = a - \frac{2Bm}{Aa + B\bar{a} + C}.$$

Од

$$\frac{z^* + a}{2} = a - \frac{Bm}{Aa + B\bar{a} + C} = z_1$$

заклучуваме дека O_1 е средина на OP'.

Од досега изнесеното ја имаме следната конструкција на кружницата $\mathrm{I}(p)$ кога правата (p) не минува низ центарот O на инверзијата I. Ја определуваме ортогоналната проекција P на центарот на инверзијата O врз правата (p) и наоѓаме $P' = \mathrm{I}(P)$, (види цртежи). Конструираме кружница со дијаметар OP', со што ја добиваме кружницата $\mathrm{I}(p)$.

8.11. Пример. Дадени се правите (p) и (q). Дали постои инверзија I таква што $\mathrm{I}(p) = q$?

Решение. Според теорема 8.9 таква инверзија постои ако и само ако правите (p) и (q) се совпаѓаат. Притоа, за секоја инверзија чиј центар припаѓа на (p) и произволен коефициент важи $\mathrm{I}(p) = q$. ■

8.12. Теорема. Ако кружницата K_1 минува низ центарот O на инверзијата I, тогаш $\mathrm{I}(K_1)$ е права што не минува низ O.

Доказ. Непосредно следува од теоремите 8.4 и 8.9. ■

8.13. Пример. Дадени се права (p) и кружница $K_1(O_1, R)$. Дали постои инверзија I таква што $\mathrm{I}(p) = K_1$?

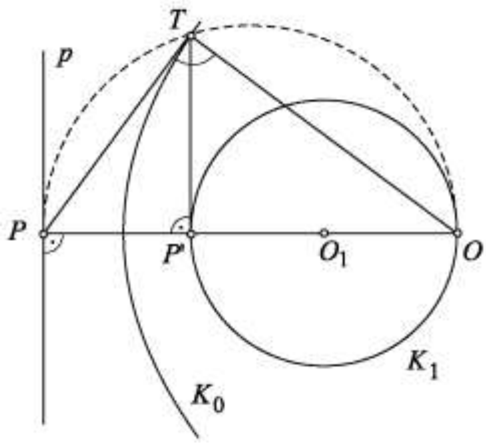
Решение. Според теорема 8.9 ако бараната инверзија I постои, тогаш нејзиниот центар O лежи на кружницата $K_1(O_1, R)$ и правата OO_1 е нормална на правата (p).

Можни се следните три случаи.

i) Правата (p) и кружницата K_1 се сечат во точките M и N. Од центарот O_1 на кружницата K_1 повлекуваме права (q) нормална на правата (p) и во пресекот на (q) и K_1 ги наоѓаме точките O и O'. Од дискусијата во 8.10 следува дека инверзиите I и I_1 определени со кружниците $K(O,\overline{OM})$ и $K'(O',\overline{O'M})$ ги задоволуваат условите на задачата.

ii) Правата (p) и кружницата K_1 се допираат во точката M. Од центарот O_1 на кружницата K_1 повлекуваме права (q) нормална на правата (p) и во пресекот на (q) и K_1 ја наоѓаме другата пресечна точка O. Од дискусијата во 8.10 следува дека инверзијата I определена со кружницата $K(O,\overline{OM})$ ги задоволува условите на задачата.

iii) Правата (p) и кружницата K_1 немаат заеднички точки. Од центарот O_1 на кружницата K_1 повлекуваме права (q) нормална на правата (p) и во пресекот на (q) и (p) ја наоѓаме точката P, а во пресекот на (q) и K_1 ги наоѓаме точките O и P', така што P' е меѓу O_1 и P, (цртеж десно). Над OP, како над дијаметар конструираме кружница, во P' повлекуваме права нормална на OP и во нивниот пресек наоѓаме точка T. Од дискусијата во 8.10 следува дека инверзијата I определена со кружницата $K(O,\overline{OT})$ ги задоволува условите на задачата. ■



8.14. Останува да видиме во што ќе се пресликува кружницата $K_1(O_1,R)$ при инверзија I ако K_1 не минува низ центарот O на I.

Нека е дадена кружницата $K_1: |z-b|=R$, која не минува низ центарот на инверзијата (1), т.е. $|a-b|\neq R$. Ако во равенката на кружницата K_1 замениме

$$z=a+\frac{m}{\overline{w-a}}$$

после еквивалентни трансформации добиваме дека кружницата K_1 се пресликува во кружница $\mathrm{I}(K_1)$ чија равенка е

$$w\overline{w}+\overline{A}_1 w+A_1\overline{w}+B_1=0\,,$$

каде

$$A_1 = \frac{m(b-a)}{R^2-|b-a|^2} - a, \quad B_1 = |a|^2 - \frac{m^2+ma(\overline{b}-\overline{a})+m\overline{a}(b-a)}{R^2-|b-a|^2}$$

Со непосредна проверка добиваме дека

$$a\overline{a} + \overline{A_1}a + A_1\overline{a} + B_1 \neq 0,$$

од што следува точноста на следната теорема.

Теорема. Ако кружницата K_1 не минува низ центарот O на инверзијата I, тогаш $\mathrm{I}(K_1)$ е кружница која што не минува низ O. ■

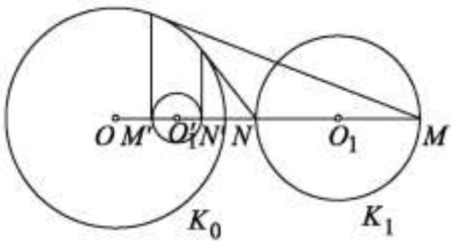
8.15. Ако кружницата K_1 не минува низ центарот на инверзијата O, тогаш од доказот на теорема 8.14 следува дека центарот $O_1^{'}$ на кружницата $\mathrm{I}(K_1)$ има афикс

$$z_1 = -A_1 = a - \frac{m(b-a)}{R^2-|b-a|^2}.$$

За афиксите z_1, a и b на точките $O_1^{'}, O$ и O_1 важи

$$\frac{z_1-a}{b-a} = \frac{m}{|b-a|^2-R^2} \in \mathbf{R},$$

што според последица 1.4 значи дека тие се колинеарни. Но, правата OO_1 е фиксна за инверзијата I, па затоа од дискусијата во 8.5 заклучуваме дека дијаметарот на K_1 кој лежи на оваа права се пресликува во дијаметар на $\mathrm{I}(K_1)$ кој лежи на OO_1.



Од досега изнесеното следува следната конструкција на кружницата $\mathrm{I}(K_1)$ кога кружницата K_1 не минува низ центарот O на инверзијата I. Ја повлекуваме правата OO_1, ги определуваме пресечните точки M, N на K_1 и OO_1 и наоѓаме $M' = \mathrm{I}(M)$ и $N' = \mathrm{I}(N)$. Конструираме кружница над $M'N'$ како над дијаметар, со што ја добиваме кружницата $\mathrm{I}(K_1)$, (цртеж горе).

8.16. Пример. Дадени се кружниците $K_1(O_1, R)$ и $K_2(O_2, R)$. Дали постои инверзија I таква што $\mathrm{I}(K_1) = K_2$?

Решение. Нека равенките на кружниците K_1 и K_2 се $|z-c_1|=R_1$ и $|z-c_2|=R_2$, соодветно. Ќе разгледаме пет случаи.

i) Ако $c_1=c_2$, т.е. кружниците се концентрични, тогаш пресликувањето

$$\mathrm{I}(z)=c_1+\frac{R_1R_2}{\overline{z}-\overline{c}_1}$$

е инверзија таква што $\mathrm{I}(K_1)=K_2$. Јасно, c_1 е центарот на инверзијата, R_1R_2 е коефициентот на инверзијата. Кружницата на инверзија можеме да ја конструираме ако низ центарот повлечеме произволна полуправа и искористиме дека пресечните точки со кружниците K_1 и K_2 се инверзибилни.

ii) Ако $c_1\neq c_2$, $R_1\neq R_2$ и $|c_1-c_2|\neq|R_1-R_2|$, тогаш пресликувањето

$$\mathrm{I}(z)=\frac{c_1R_2-c_2R_1}{R_2-R_1}+\frac{\frac{R_1R_2|(R_2-R_1)^2-|c_1-c_2|^2|}{(R_2-R_1)^2}}{\overline{z}-\frac{\overline{c}_1R_2-\overline{c}_2R_1}{R_2-R_1}}$$

е инверзија таква што $\mathrm{I}(K_1)=K_2$. Забележуваме дека центарот на инверзијата се совпаѓа со надворешниот центар на хомотетија, точка 6.6, кој можеме да го конструираме на начин опишан во забелешка 6.7. За да ја конструираме кружницата на инверзија потребно е да постапиме како во пример 8.13.

iii) Ако $c_1\neq c_2$, $R_1\neq R_2$ и $|c_1-c_2|=|R_1-R_2|$, тогаш пресликувањето

$$\mathrm{I}(z)=\frac{c_1R_2+c_2R_1}{R_2+R_1}+\frac{\frac{R_1R_2|(R_2+R_1)^2-|c_1-c_2|^2|}{(R_2+R_1)^2}}{\overline{z}-\frac{\overline{c}_1R_2+\overline{c}_2R_1}{R_2+R_1}}$$

е инверзија таква што $\mathrm{I}(K_1)=K_2$. Забележуваме дека центарот на инверзијата се совпаѓа со внатрешниот центар на хомотетија, точка 6.6, кој можеме да го конструираме на начин опишан во забелешка 6.7. За да ја конструираме кружницата на инверзија потребно е да постапиме како во пример 8.13.

iv) Ако $c_1\neq c_2$, $R_1=R_2=R$ и $|c_1-c_2|<2R$, тогаш пресликувањето

$$\mathrm{I}(z)=\frac{c_1+c_2}{2}+\frac{R^2-\frac{|c_1-c_2|^2|}{4}}{\overline{z}-\frac{\overline{c}_1+\overline{c}_2}{2}}$$

е инверзија таква што $\mathrm{I}(K_1)=K_2$. Забележуваме дека центарот на инверзијата е средина на отсечката O_1O_2, а пресечните точки на кружниците K_1 и

K_2 се неподвижни, што значи повторно можеме да ја конструираме кружницата на инверзија.

v) Ако $c_1 \neq c_2$, $R_1 = R_2 = R$ и $|c_1 - c_2| > 2R$, тогаш од теорема 8.4 следува дека не постои инверзија со саканото својство. ■

8.17. Од тоа што инверзијата е биекција следува точноста на следната теорема.

Теорема. Ако две прави, односно права и кружница, односно две кружници немаат заеднички точки или се допираат или се сечат во две точки, тогаш и нивните слики при инверзија I немаат заеднички точки или се допираат или се сечат во две точки, соодветно. ■

8.18. Дефиниција. Нека правата (p) и кружницата K се сечат во точките M и N. Ако во точката M повлечеме тангента (t) на кружницата K и со α го означиме помалиот агол меѓу правите (p) и (t), тогаш ќе велиме дека кружницата K и правата (p) *се сечат под агол* α.

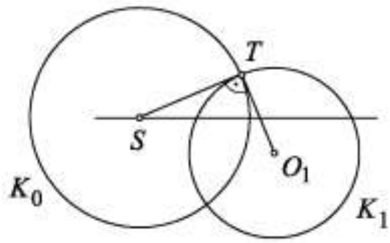
Нека кружниците K и K^* се сечат во точките M и N. Ако во точката M повлечеме тангенти (t_1) и (t_2) на кружниците K и K^* и со α го означиме помалиот агол меѓу правите (t_1) и (t_2) тогаш ќе велиме дека кружниците K и K^* *се сечат под агол* α.

За кружницата K ќе велиме дека ортогонално ја сече кружницата K^* ако K и K^* се сечат под агол од $\frac{\pi}{2}$. K и K^* се *ортогонални*.

Во теорема 8.2 докажавме дека неподвижни точки при инверзијата I со кружница K_0 се само точките од K_0, што значи дека кружницата K_0 е точкасто неподвижна за I. Од теорема 8.8 следува дека не постои точкасто неподвижна права за I, но секоја права која минува низ центарот на инверзијата е неподвижна за I. Се поставува прашање дали постојат и други кружници, различни од K_0, кои се неподвижни при инверзијата I.

Од теорема 8.6 следува дека ако таква кружница $K_1 : |z-b| = R$ постои, тогаш таа мора да ја сече кружницата на инверзија K_0, па затоа таа ќе има две неподвижни точки. Едната од овие точки да ја означиме со T и нека нејзиниот афикс е z_1 (цртеж долу). Сега, од доказот на теорема 8.14 следува дека $K_1 : |z-b| = R$ е неподвижна за инверзијата (1) ако и само ако

$b = a - \frac{m(b-a)}{R^2 - |b-a|^2}$, односно ако и само ако $m + R^2 = |b-a|^2$. Последното равенство е еквивалентно на равенството



$$\frac{z_1 - a}{\overline{z_1} - \overline{a}} = -\frac{z_1 - b}{\overline{z_1} - \overline{b}},$$

па затоа K_1 е неподвижна за инверзијата (1) ако и само ако тангентите на K_1 и K_0 повлечени во точката T се заемно нормални.

Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема. Кружницата K_1, различна од K_0 е неподвижна за инверзијата I ако и само ако K_1 ортогонално ја сече K_0. ■

8.19. Теорема. Агол меѓу две прави, меѓу права и кружница или меѓу две кружници се запазува при секоја инверзија.

Доказ. Нека инверзијата е дадена со (1) и нека (p) и (q) се две прави чии автокоњугирани равенки се

$$Az + B\overline{z} + C = 0, B = \overline{A}, C \in \mathbf{R} \text{ и } A_1 z + B_1 \overline{z} + C_1 = 0, B_1 = \overline{A}_1, C_1 \in \mathbf{R}$$

соодветно. Можни се следните случаи.

i) Правите (p) и (q) минуваат низ центарот на инверзијата. Од доказот на теорема 8.9 следува дека (p) и (q) се неподвижни, па затоа аголот меѓу нив се запазува.

ii) Една од правите, на пример (p), минува низ центарот на инверзијата, а другата, во случајот (q), не минува низ центарот на инверзијата. Од доказот на теорема 8.9 следува дека правата (p) е неподвижна, а правата (q) се пресликува во кружница

$$\mathrm{I}(q) : \left| z - a + \frac{B_1 m}{A_1 a + B_1 \overline{a} + C_1} \right| = \frac{m|A_1|}{|A_1 a + B_1 \overline{a} + C_1|}.$$

Притоа правата (p) и кружницата $\mathrm{I}(q)$ се сечат во центарот на инверзијата чиј афикс е a. Равенката на тангентата (q_1) на кружницата $\mathrm{I}(q)$ повлечена во точката a е

$$A_1 z + B_1 \overline{z} + C_1 - aA_1 - \overline{a}B_1 = 0.$$

Непосредно се проверува дека за комплексните аглови коефициенти η_1, η_2, η_3 на правите (p), (q), (q_1) важи

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}=\frac{\eta_1}{\eta_3}.$$

Сега тврдењето на теоремата следува од теорема 1.7.

iii) Правите (p) и (q) не минуваат низ центарот на инверзијата. Од доказот на теорема 8.9 следува дека сликите на правите (p) и (q) се кружници чии равенки се

$$|\,z-a+\frac{Bm}{Aa+B\overline{a}+C}\,|=\frac{m|A|}{|Aa+B\overline{a}+C|} \text{ и } |\,z-a+\frac{B_1m}{A_1a+B_1\overline{a}+C_1}\,|=\frac{m|A_1|}{|A_1a+B_1\overline{a}+C_1|},$$

и кружниците $\mathrm{I}(p)$ и $\mathrm{I}(q)$ се сечат во центарот на инверзијата чиј афикс е a. Равенките на тангентите (p_1) и (q_1) на кружниците $\mathrm{I}(p)$ и $\mathrm{I}(q)$ повлечена во точката a се

$$Az+B\overline{z}+C-aA-\overline{a}B=0 \text{ и } A_1z+B_1\overline{z}+C_1-aA_1-\overline{a}B_1=0,$$

соодветно. Непосредно се проверува дека за комплексните аглови коефициенти $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ на правите (p), (q), (p_1), (q_1) важи

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}=\frac{\eta_3}{\eta_4}.$$

Сега тврдењето на теоремата следува од теорема 1.7.

Останатиот дел од теоремата се докажува аналогно, при што покрај теорема 8.9 се користат и теоремите 8.12 и 8.14. ■

8.20. Пример. Нека правата (p) и кружницата $K(O,R)$ немаат заеднички точки. Докажи дека постои инверзија I таква што $\mathrm{I}(p)$ и $\mathrm{I}(K)$ се две концентрични кружници.

Решение. Низ центарот O на кружницата K повлекуваме права (q) нормална на правата (p) и нека $P=(p)\cap(q)$, направи цртеж. Нека T е произволна точка од K, која не припаѓа на (q), и S е една од пресечните точки на кружницата $K_1(P,\overline{PT})$ со правата (q).

Земаме инверзија I со центар во S и произволен коефициент. Според теоремите 8.9 и 8.14 сликите $\mathrm{I}(p)$ и $\mathrm{I}(K)$ се кружници. Да ги определиме нивните центри.

Правата (p) ортогонално ги сече правата (q) и кружницата K_1, па од теорема 8.19 следува дека $\mathrm{I}(p)$ ортогонално ги сече $\mathrm{I}(q)$ и $\mathrm{I}(K_1)$. Од теорема 8.9 следува дека $\mathrm{I}(q)=q$, а од теорема 8.12 следува дека $\mathrm{I}(K_1)$ е права. Бидејќи правите (q) и $\mathrm{I}(K_1)$ ортогонално ја сечат кружницата $\mathrm{I}(p)$

нејзиниот центар O'' се наоѓа во пресекот на овие прави. Значи, $O''=(q)\cap \mathrm{I}(K_1)$.

Кружницата K ортогонално ги сече правата (q) и кружницата K_1, па од теорема 8.19 следува дека $\mathrm{I}(K)$ ортогонално ги сече $\mathrm{I}(q)$ и $\mathrm{I}(K_1)$, што значи дека $\mathrm{I}(K)$ ортогонално ги сече (q) и $\mathrm{I}(K_1)$. Според тоа, за центарот O' на кружницата $\mathrm{I}(K)$ важи $O'=(q)\cap \mathrm{I}(K_1)$.

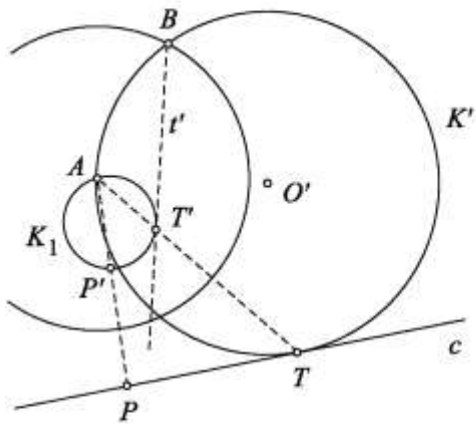
Конечно, $O'\equiv O''$, што значи дека $\mathrm{I}(p)$ и $\mathrm{I}(K)$ се две концентрични кружници. ■

8.21. Следната задача претходно ја решивме со помош на хомотетија, пример 7.18. Овде истата задача ќе ја решиме со помош на инверзија.

Пример. Да се конструира кружница, којашто минува низ две дадени точки и допира дадена права.

Решение. Нека се дадени точките A и B и правата c. Претпоставуваме дека точките A и B лежат во иста полурамнина во однос на правата c и дека правата AB не е паралелна со правата c.

Нека I е инверзија со центар во A и коефициент $\overline{AB}^2$. Тогаш, $\mathrm{I}(B)=B$ и $\mathrm{I}(c)$ е кружница K_1 која што минува низ точката A. Бараната кружница K минува низ точката A, па затоа $\mathrm{I}(K)$ ќе биде права која минува низ точката B и ја допира кружницата K_1, т.е. тоа ќе биде тангентата на кружницата K_1 повлечена од точката B. Од досега изнесеното ја имаме следната конструкција (види цртеж):



- Избираме инверзија I со центар во A и коефициент $\overline{AB}^2$.
- Констрираме кружница $K_1=\mathrm{I}(c)$
- Од точката B повлекуваме тангенти (t') и (t'') на кружницата K_1.
- Бараните кружници се кружниците $K'=\mathrm{I}(t')$ и $K''=\mathrm{I}(t'')$. ■

9. ТРАНСФОРМАЦИЈА НА МОБИУС

9.1 Дефиниција. Пресликувањето од видот

$$S(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ ad-bc\neq 0, \tag{1}$$

каде a,b,c,d се комплексни броеви го нарекуваме *трансформација на Мобиус.*

Трансформацијата на Мобиус е определена за секој $z\neq -\frac{d}{c},\infty$. Ако $c=0$, тогаш таа е определна за секој конечен z. Оваа трансформација, при $c\neq 0$, можеме да ја доопределиме ставајќи

$$S(-\tfrac{d}{c})=\infty \text{ и } S(\infty)=\tfrac{a}{c}. \tag{2}$$

Ако $c=0$, тогаш доволно е да ставиме $S(\infty)=\infty$. Притоа $S:\mathbf{C}_\infty\to\mathbf{C}_\infty$ е добро дефинирано пресликување.

Да забележиме дека условот $ad-bc\neq 0$ е еквивалентен со $S(z)$ е инјекција (провери!).

9.2. Пример. Определи ја сликата на единичната кружница $|z|=1$ со трансформацијата

$$w=u\frac{z-v}{\overline{v}z-1},\ u,v\in\mathbf{C} \text{ и } |v|\neq 1.$$

Решение. Од

$$w\overline{w}=u\overline{u}\frac{z\overline{z}-v\overline{z}-z\overline{v}+v\overline{v}}{v\overline{v}z\overline{z}+\overline{z}v-z\overline{v}+1}$$

за $z\overline{z}=1$ добиваме $w\overline{w}=u\overline{u}$, што значи дека единичната кружница се пресликува во кружницата $|w|=|u|$. ■

9.3. Теорема. Трансформацијата на Мобиус дефинирана со (1) и (2) е биекција од $\mathbf{C}_\infty$ во $\mathbf{C}_\infty$.

Доказ. Нека S е трансформација на Мобиус дефинирана со (1) и (2).

Ако $w\in\mathbf{C}$ и $w\neq\frac{a}{c}$, тогаш од $w=\frac{az+b}{cz+d}$ добиваме $z=\frac{dw-b}{-cw+a}$. Значи, при $w\neq\frac{a}{c},\infty$ постои $z=\frac{dw-b}{-cw+a}$ таков што $S(z)=w$.

Ако $w=\infty$, тогаш $S(-\frac{d}{c})=\infty$, а ако $w=\frac{a}{c}$, тогаш $S(\infty)=\frac{a}{c}$. Според тоа, S е сурјекција. Но, S е и инјекција, па затоа S е биекција.

Од досега изнесеното следува дека пресликувањето $S^{-1}: \mathbf{C}_\infty \to \mathbf{C}_\infty$ дефинирано со

$$S^{-1}(z) = \tfrac{dz-b}{-cz+a}, \text{ ако } z \neq \tfrac{a}{c} \text{ и } S^{-1}(\infty) = -\tfrac{d}{c}, \ S^{-1}(\tfrac{a}{c}) = \infty$$

е добро дефинирано пресликување, за кое важи

$$S(S^{-1}(z)) = S^{-1}(S(z)) = z\,.$$

Конечно, S^{-1} е инверзното пресликување на S и како

$$ad-(-b)(-c) = ad-bc \neq 0$$

добиваме дека тоа е трансформација на Мобиус. ■

9.4. Теорема. Фамилијата $\boldsymbol{M}$ од сите трансформации на Мобиус е група, ако во својство на групова операција јаземеме композицијата на пресликувања.

Доказ. Нека

$$S_1(z) = \tfrac{az+b}{cz+d}, ad-bc \neq 0 \text{ и } S_2(z) = \tfrac{ez+f}{gz+h}, eh-fg \neq 0$$

се две трансформации на Мобиус. Имаме:

$$S(z) = (S_1 \circ S_2)(z) = S_1(S_2(z)) = S_1(\tfrac{ez+f}{gz+h}) = \frac{a\frac{ez+f}{gz+h}+b}{c\frac{ez+f}{gz+h}+d} = \frac{(ae+gb)z+(af+bh)}{(ce+gd)z+(cf+dh)}$$

и

$$(ae+gb)(cf+dh)-(af+bh)(ce+gd) = (ad-vc)(eh-fg) \neq 0,$$

што значи дека пресликувањето $S = S_1 \circ S_2$ е трансформација на Мобиус т.е. $(\boldsymbol{M},\circ)$ е групоид.

а) *Асоцијативност*. За секои $S_1, S_2, S_3 \in \boldsymbol{M}$ важи

$$S_1 \circ (S_2 \circ S_3) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3\,. \tag{3}$$

Имено, и двете страни во (3) се еднакви на трансформацијата на Мобиус $S_1(S_2(S_3(z)))$. Според тоа, $(\boldsymbol{M},\circ)$ е полугрупа.

б) *Егзистенција на единица.* Очигледно идентичното пресликување $E(z) = z$ е трансформација на Мобиус, што значи дека е единица во полугрупата $(\boldsymbol{M},\circ)$.

в) Според теорема 9.3 секој елемент на $(\boldsymbol{M},\circ)$ е инверзибилен, па значи $(\boldsymbol{M},\circ)$ е група. ■

9.5. Забелешка. Групата $(\boldsymbol{M},\circ)$ не е комутативна. Навистина, за

$$S_1(z) = z + a, a \neq 0 \text{ и } S_2(z) = \frac{1}{z}$$

важи

$$S_1(S_2(z)) = \frac{1}{z} + a \text{ и } S_2(S_1(z)) = \frac{1}{z+a} \text{, т.е. } S_1 \circ S_2 \neq S_2 \circ S_1.$$

9.6. Теорема. Ако S е трансформација на Мобиус, тогаш S е композиција на елементарни трансформации на комплексната рамнина.

Доказ. Нека

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0$$

е произволна трансформација на Мобиус.

Ако $c = 0$, тогаш

$$S(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d},$$

па затоа при

$$S_1(z) = \frac{a}{d} z \text{ и } S_2(z) = z + \frac{b}{d}$$

добиваме $S = S_2 \circ S_1$, т.е. S е композиција на елементарни трансформации.

Ако $c \neq 0$, тогаш ставаме

$$S_1(z) = z + \frac{d}{c}, S_2(z) = \frac{1}{z}, S_3(z) = \frac{bc-ad}{c} z, S_4(z) = z + \frac{a}{c}$$

и добиваме дека $S = S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$, што значи дека и во овој случај S е композиција на елементарни трансформации. ■

9.7. Пример. Со трансформацијата $w = \frac{i-z}{i+z}$ најди ја сликата на:

а) реалната оска,

б) кружницата $|z| = 1$

Решение. Дадената трансформација можеме да ја запишеме во видот $w = -1 + \frac{2i}{i+z}$.

а) Реалната оска има равенка $z - \overline{z} = 0$ и истата со трансформацијата $w_1 = z + i$ ја пресликуваме во правата $w_1 - \overline{w_1} = 2i$. Потоа, со трансформацијата $w_2 = \frac{1}{w_1}$ правата $w_1 - \overline{w_1} = 2i$ ја пресликуваме во кружницата $|w_2 + \frac{i}{2}| = \frac{1}{2}$. Со трансформацијата $w_3 = 2iw_2$ кружницата $|w_2 + \frac{i}{2}| = \frac{1}{2}$ ја пресликуваме во кружницата $|w_3 - 1| = 1$. Конечно, со трансформацијата $w = -1 + w_3$ кружницата $|w_3 - 1| = 1$ ја пресликуваме во кружницата $|w| = 1$, што значи дека со дадената трансформација реалната оска се пресликува во кружницата $|w|=1$.

б) Со транслацијата $w_1 = z+i$ кружницата $|z|=1$ ја пресликуваме во кружницата $|w_1 - i|=1$. Потоа, со трансформацијата $w_2 = \frac{1}{w_1}$ кружницата $|w_1 - i|=1$ ја пресликуваме во правата $w_2 - \overline{w_2} = -i$. Со трансформацијата $w_3 = 2iw_2$ правата $w_2 - \overline{w_2} = -i$ ја пресликуваме во правата $w_3 + \overline{w_3} = 2$. Конечно, со трансформацијата $w = -1 + w_3$ правата $w_3 + \overline{w_3} = 2$ ја пресликуваме во правата $w + \overline{w} = 0$. Значи, дадената трансформација на Мобиус ја пресликува кружницата $|z|=1$ во правата $w + \overline{w} = 0$. ■

9.8. Нека е дадена трансформацијата на Мобиус (1). Пресликувањето $S_1(z) = -\frac{d}{c} + \frac{1}{\overline{z+\frac{d}{c}}}$ е инверзија во однос на кружницата $|z+\frac{d}{c}|=1$, а пресликувањето $S_2(z) = p\overline{z} + q$, каде $p = \frac{bc-ad}{c^2}, q = \frac{bc-ad}{c^2}\frac{\overline{d}}{\overline{c}} + \frac{a}{c}$ е идиректна сличност. Понатаму, од

$$S_2(S_1(z)) = S_2\left(-\frac{d}{c} + \frac{1}{\overline{z+\frac{d}{c}}}\right) = \frac{bc-ad}{c^2}\cdot\overline{\left(-\frac{d}{c} + \frac{1}{\overline{z+\frac{d}{c}}}\right)} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{\overline{d}}{\overline{c}} + \frac{a}{c}$$

$$= \frac{bc-ad}{c^2}\cdot\left(-\frac{\overline{d}}{\overline{c}} + \frac{1}{z+\frac{d}{c}}\right) + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{\overline{d}}{\overline{c}} + \frac{a}{c}$$

$$= -\frac{bc-ad}{c^2}\frac{\overline{d}}{\overline{c}} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{\overline{d}}{\overline{c}} + \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c}$$

$$= \frac{bc-ad+a(cz+d)}{c(cz+d)} = \frac{az+b}{cz+d},$$

следува точноста на следнава теорема.

Теорема. Трансформацијата на Мобиус (1) може да се претстави како композиција $S = S_2 \circ S_1$ на инверзија $S_1(z) = -\frac{d}{c} + \frac{1}{\overline{z+\frac{d}{c}}}$ во однос на кружницата $|z+\frac{d}{c}|=1$ и индиректната сличност $S_2(z) = p\overline{z} + q$, каде $p = \frac{bc-ad}{c^2}, q = \frac{bc-ad}{c^2}\frac{\overline{d}}{\overline{c}} + \frac{a}{c}$. ■

10. ГЕОМЕТРИСКИ СВОЈСТВА НА ТРАНСФОРМАЦИЈАТА НА МОБИУС

10.1. Теорема (кругово својство). Произволна трансформација на Мобиус ја пресликува секоја кружница од $\mathbf{C}_\infty$ во кружница од $\mathbf{C}_\infty$.

Доказ. Според теорема 9.6 секоја трансформација на Мобиус е композиција на елементарни трансформации на комплексната рамнина и притоа елементарната трансформација $S_2(z)=\frac{1}{z}$ од доказот на теорема 9.6 е композиција на инверзија $I(z)=\frac{1}{\bar{z}}$ и осна симетрија $S(z)=\bar{z}$. Сега тврдењето на теоремата непосредно следува од претходно докажаните својства на елементарните трансформации на комплексната рамнина. ■

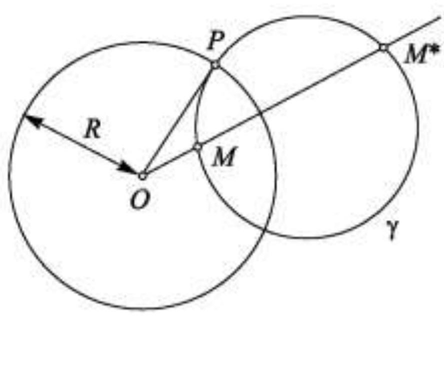
10.2. Користејќи ги својствата на елементарните трансформации на комплексната рамнина, аналогно на доказот на теорема 8.19, може да се докаже дека следната важна теорема.

Теорема. Произволна трансформација на Мобиус го запазува аголот меѓу кружниците во проширената комплексна рамнина $\mathbf{C}_\infty$. ■

10.3. Дефиниција. Нека е дадена кружницата $K(O,R)$. За точките M и M^* ќе велиме дека се *симетрични во однос на кружницата* K, ако $\mathrm{I}(M)=M^*$, каде I е инверзијата определена со кружницата K.

10.4. Пред да се осврнеме на својството на симетричните точки во однос на кружница поврзано со трансформацијата на Мобиус ќе ја разгледаме следната лема, која ги карактеризира симетричните точки M и M^* во однос на кружницата $K(O,R)$.

Лема. Точките M и M^* се симетрични во однос на кружницата $K(O,R)$ ако и само ако секоја кружница γ која минува низ овие точки ортогонално ја сече кружницата $K(O,R)$.



Доказ. Нека точките M и M^* се симетрични во однос на кружницата

$K(O,R)$ (цртеж горе).

Да разгледаме кружница γ која минува низ точките M и M^* и $K \cap \gamma = \{P\}$. Според теорема 8.14 кружницата γ со инверзијата I, определена со кружницата K, се пресликува во кружница γ_1, која минува низ точките M, M^* и P. Според тоа, кружниците γ и γ_1 се совпаѓаат, т.е. кружницата γ е неподвижна за инверзијата I. Сега тврдењето непосредно следува од теорема 8.18.

Обратно, нека секоја кружница γ која минува низ точките M и M^* ортогонално ја сече кружницата K. Од теорема 8.18 следува дека кружницата γ е неподвижна за инверзијата I, определена со кружницата K. Тогаш, правата (во проширената комплексна рамнина ја сметаме за кружница) која минува низ точките M и M^* исто така ортогонално ја сече кружницата K, т.е. правата минува низ центарот O на кружницата K. Но, γ е неподвижна за инверзијата I, па затоа $\mathrm{I}(M) = M^*$, т.е. точките M и M^* се симетрични во однос на кружницата K. ■

10.4. Теорема. При трансформацијата на Мобиус пар точки симетрични во однос на кружница се пресликуваат во пар точки симетрични во однос на сликата на таа кружница.

Доказ. Нека точките z и z^* се симетрични во однос на кружницата K и нека $w = S(z)$ е произволна трансформација на Мобиус. Согласно со теорема 10.1 сликата $K^\sim$ на кружницата K е кружница. Треба да докажеме дека точките w и w^* се симетрични во однос на $K^\sim$. Според лема 10.4 доволно е да докажеме дека секоја кружница $\gamma^\sim$, која минува низ точките w и w^*, ја сече $K^\sim$ под прав агол.

Инверзната слика на кружницата $\gamma^\sim$ при трансформацијата на Мобиус $w = S(z)$ е кружница која минува низ точките z и z^*. Оваа кружница ја сече кружницата K под прав агол. Според тоа, $\gamma^\sim$ исто така се сече со $K^\sim$ под прав агол, бидејќи според теорема 10.2 трансформацијата на Мобиус го запазува аголот меѓу пресечните кружници во секоја точка на проширената комплексна рамнина. ■

10.5. Во овој дел ќе докажеме една важна теорема во врска со трансформацијата на Мобиус.

Теорема. Трансформацијата на Мобиус $S:\mathbf{C}_\infty \to \mathbf{C}_\infty$ го пресликува единечниот круг $|z|\le 1$ на единечниот круг $|w|\le 1$ ако и само ако

$$w = S(z) = e^{i\varphi}\frac{z-v}{1-\bar{v}z}, \quad v\in\mathbf{C}, 0\le\varphi<2\pi, |v|<1. \tag{1}$$

Доказ. Нека $z\in\mathbf{C}, |z|\le 1$. Имаме:

$$|w|^2 = w\bar{w} = e^{i\varphi}\frac{z-v}{1-\bar{v}z}e^{-i\varphi}\frac{\bar{z}-\bar{v}}{1-\bar{z}v} = \frac{|z-v|^2}{|1-\bar{v}z|^2}\le 1,$$

т.е. трансформацијата на Мобиус од облик (1) го пресликува единечниот круг $|z|\le 1$ на единечниот круг $|w|\le 1$.

Обратно, нека трансформацијата на Мобиус $S:\mathbf{C}_\infty \to \mathbf{C}_\infty$ го пресликува единечниот круг $|z|\le 1$ на единечниот круг $|w|\le 1$ и нека претпоставиме дека некоја точка $v, v\ne 0, |v|<1$ се пресликува во точката $w=0$. Точката симетрична на нулата во однос на кружницата $|w|=1$ е бесконечно оддалечената точка. Од теорема 10.4 следува дека $w=\infty$ кога $z=\frac{1}{\bar{v}}$, па затоа бараната трансформација на Мобиус ќе биде од облик

$$w = k\frac{z-v}{z-\frac{1}{\bar{v}}},$$

каде k е некоја константа. Последната формула ќе ја запишеме во видот

$$w = -k\bar{v}\frac{z-v}{1-\bar{v}z} = k'\frac{z-v}{1-\bar{v}z}. \tag{2}$$

Бидејќи $\bar{z}=\frac{1}{z}$ кога $|z|=1$ добиваме дека

$$|1-\bar{v}z| = |\tfrac{1}{z}-\bar{v}| = |\bar{z}-\bar{v}| = |z-v|.$$

Но, кружницата $|z|=1$ се пресликува во кружницата $|w|=1$, па затоа $|k'|=1$, т.е. $k'=e^{i\varphi}$, за некој $0\le\varphi<2\pi$, т.е. формулата (2) го прима обликот на формулата (1). Јасно, формулата (2) важи и кога $v=0$. ■

10.6. Дефиниција. За точката z ќе велиме дека е *неподвижна* точка на трансформацијата на Мобиус $S(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ ако $z=S(z)$, т.е. $z=\frac{az+b}{cz+d}$.

Јасно, z е неподвижна точка за трансформацијата на Мобиус $S(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ ако

$$cz^2+(d-a)z-b=0. \tag{3}$$

Ако $c\ne 0$, тогаш неподвижните точки се

$$z_{1/2} = \frac{a-d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}. \tag{4}$$

Ако $c = 0$, тогаш неподвижните точки се $z_1 = \frac{b}{d-a}$ и $z_2 = \infty$. Ако пак $b = c = 0$ и $a = d$, тогаш трансформацијата на Мобиус е идентичното пресликување $S(z) = z$ и затоа сите точки на $\mathbf{C}_\infty$ се неподвижни.

Според (4), ако $(a-d)^2 + 4bc = 0$, тогаш $z_1 = z_2$, што значи дека имаме двојна неподвижна точка. При $c = 0$, од условот за двојна точка следува $a = d$ и во овој случај добиваме дека $z = \infty$ е двојна неподвижна точка за транслацијата $S(z) = z + \frac{b}{d}$.

10.7. Коментар. Во дефиницијата на трансформацијата на Мобиус

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \ \ ad - bc \neq 0,$$

фигурираат четири комплексни броеви a, b, c и d. Меѓутоа, еден од броевите c или d е различен од 0, а затоа ако броителот и именителот ги поделиме со овој број добиваме дека во дефиницијата на трансформацијата на Мобиус ќе фигурираат три коефициенти. Затоа природно е да се очекува, дека со сликите на три дадени точки е определена единствена трансформација на Мобиус. Следната теорема ја потврдува нашата претпоставка.

10.8. Теорема. Постои единствена трансформација на Мобиус S, која точките

$$z_1, z_2, z_3, (z_i \neq z_j, i \neq j)$$

ги пресликува во точките $w_1, w_2, w_3, (w_i \neq w_j, i \neq j)$, соодветно.

Доказ. *Егзистенција***.** Пресликувањата S_1 и S_2 дефинирани со

$$S_1(z) = \frac{(z-z_1)(z_3-z_2)}{(z-z_2)(z_3-z_1)} \text{ и } S_1(w) = \frac{(w-w_1)(w_3-w_2)}{(w-w_2)(w_3-w_1)}, \tag{5}$$

ги пресликуваат точките z_1, z_2, z_3 од рамнината z и точките w_1, w_2, w_3 од рамнината w, соодветно во точките $0, \infty, 1$ од рамнината ς. Конечно, пресликувањето

$$S = S_2^{-1} \circ S_1 \tag{6}$$

кое е определено од рамнината z на рамнината w, $S(z) = w$, со

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} = \frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} \tag{7}$$

е трансформација на Мобиус, која ги пресликува точките z_1, z_2, z_3 во точките w_1, w_2, w_3, соодветно.

*Единственост***.** Нека $\lambda, \lambda(z_i) = w_i, i = 1,2,3$ е произволна трансформација на Мобиус. Да го разгледаме пресликувањето

$$\mu = S_2 \circ \lambda \circ S_1^{-1},$$

каде S_1 и S_2 се пресликувањата определени со (5). Јасно, μ е трансформација на Мобиус за која точките $0, \infty, 1$ се неподвижни. Од условот $\mu(\infty) = \infty$ следува дека $\mu(\varsigma) = \alpha\varsigma + \beta$. Од условот $\mu(0) = 0$ следува $\beta = 0$, а од условот $\mu(1) = 1$ следува дека $\alpha = 1$. Според тоа, $\mu(\varsigma) = \varsigma$ т.е.

$$S_2 \circ \lambda \circ S_1^{-1} = E\,.$$

Бидејќи $(\boldsymbol{M}, \circ)$ е група добиваме $\lambda = S_2^{-1} \circ S_1$ т.е. $\lambda = S$. ■

10.9. Забелешка. Секоја од точките z_i и w_i во релацијата (7) се појавува двапати, еднаш во броител и еднаш во именител. Лесно се докажува дека релацијата останува во сила кога една од точките z_i или w_i (или една z_i и и една w_i) е бесконечната точка. Тогаш потребно е броителот и именителот на дропката, каде се јавува оваа точка да се замени со 1. На пример, ако $z_2 = w_1 = \infty$, тогаш формулата прима облик

$$\frac{z-z_1}{1} \cdot \frac{1}{z_3-z_1} = \frac{1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{1}\,.$$

Според тоа, теорема 10.8 останува во сила за сите точки на проширената комплексна рамнина $\mathbf{C}_\infty$.

10.10. Последица. Постои единствена трансформација на Мобиус S, која точките $z_1, z_2, z_3, z_4, (z_i \neq z_j, i \neq j)$ ги пресликува во точките w_1, w_2, w_3, w_4 $(w_i \neq w_j, i \neq j)$ ако и само ако

$$\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} = \frac{w_4-w_1}{w_4-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}\,. \tag{7'}$$

Доказ. Нека е исполнето равенството (7') и нека S е трансформација на Мобиус која точките $z_1, z_2, z_3, (z_i \neq z_j, i \neq j)$ ги пресликува во точките $w_1, w_2, w_3, (w_i \neq w_j, i \neq j)$, соодветно. Тогаш таа е зададена со (7), па затоа

$$\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} = \frac{S(z_4)-w_1}{S(z_4)-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}\,,$$

од каде следува

$$\frac{S(z_4)-w_1}{S(z_4)-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{w_4-w_1}{w_4-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1},$$

т.е. $S(z_4)=w_4$.

Ако постои трансформација на Мобиус со наведените својства тогаш таа ги прселикува точките $z_1,z_2,z_3,(z_i\neq z_j, i\neq j)$ во точките $w_1,w_2,$ $w_3,(w_i\neq w_j, i\neq j)$, па затоа таа е од видот (7), при што $S(z_4)=w_4$, па затоа важи (7'). ■

10.11. Забелешка. Од теоремите 10.8 и 10.1 следува дека секоја кружница K во $\mathbf{C}_\infty$ може да се преслика во некоја кружница K^* во $\mathbf{C}_\infty$. Притоа доволно е да се пресликаат било кои три точки на K во било кои три точки на K^*.

10.12. Пример. Определи ја трансфомацијата на Мобиус која ги пресликува точките $-1, i, 1+i$ соодветно во точките

а) $0, 2i, 1-i$; б) $i, \infty, 1$.

Решение. Ако ги искористиме теорема 10.8 и забелешка 10.9 за бараните трансформации на Мобиус добиваме

а) $w=\frac{-2i(z+1)}{-4z-1-5i}$,

б) $w=\frac{(1+2i)z+6-3i}{5(z-i)}$. ■

10.13. Забелешка. Од доказот на теорема 10.8 следува дека трансформацијата на Мобиус S може да има најмногу две неподвижни точки z_1,z_2 т.е. такви точки што $S(z_1)=z_1$ и $S(z_2)=z_2$, кога $S\neq E$. Трансформацијата на Мобиус која има две неподвижни точки z_1,z_2 се определува со формулите

$$\frac{w-z_1}{w-z_2}=A\frac{z-z_1}{z-z_2},\quad z_1,z_2\neq\infty \tag{8}$$

или

$$w-z_1=A_1(z-z_1),\quad z_2=\infty, \tag{9}$$

а коефициентите A и A_1 се дадени со релациите

$$A=\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\cdot\frac{w_3-z_1}{w_3-z_2},\quad A=\frac{w_3-z_1}{w_3-z_2}, \tag{10}$$

и не зависат од изборот на z_3 при услов $w_3 = \frac{az_3+b}{cz_3+d}$. Коефициентите A и A_1 лесно се изразуваат преку a,b,c и d, ако заедно со (10) земеме дека $w_3 = \frac{b}{d}$ кога $z_3 = 0$.

10.14. На крајот од овој параграф ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема. Множеството трансформации на Мобиус $\boldsymbol{F}$ кои го пресликуваат единечниот круг $|z|\le 1$ на единечниот круг $|w|\le 1$ е подгрупа од групата трансформации на Мобиус.

Доказ. Нека $S_1, S_2 \in \boldsymbol{F}$. Тогаш, од теорема 10.5 имаме

$$S_1(z) = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, |a|<1$$

и

$$S_2(z) = e^{i\beta} \frac{z-b}{1-\bar{b}z}, |b|<1,$$

па затоа

$$S_1(S_2(z)) = e^{i(\alpha-\beta)} \frac{\overline{e^{i\beta}+a\bar{b}}}{e^{i\beta}+a\bar{b}} \frac{z-\frac{e^{i\beta}b+a}{e^{i\beta}+a\bar{b}}}{1-(\overline{\frac{e^{i\beta}b+a}{e^{i\beta}+a\bar{b}}})z},$$

каде

$$\left|\frac{e^{i\beta}b+a}{e^{i\beta}+a\bar{b}}\right| = \left|\frac{\bar{b}+\bar{a}e^{i\beta}}{1+\bar{a}e^{i\beta}b}\right| < 1$$

и

$$\left|e^{i(\alpha-\beta)} \frac{\overline{e^{i\beta}+a\bar{b}}}{e^{i\beta}+a\bar{b}}\right| = 1.$$

Сега повторно од теорема 10.5 следува дека $S_1 \circ S_2 \in \boldsymbol{F}$. Значи, множеството $\boldsymbol{F}$ е затворено во однос на композицијата на пресликувања.

Нека $S_1, S_2, S_3 \in \boldsymbol{F}$. Тогаш, $S_1, S_2, S_3 \in \boldsymbol{M}$, па затоа

$$S_1 \circ (S_2 \circ S_3) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3$$

т.е. важи асоцијативниот закон.

Ако во теорема 10.5 ставиме $v = 0$ и $\varphi = 0$ добиваме дека

$$\boldsymbol{F} \ni E(z) = z = e^{i\cdot 0} \frac{z-0}{1-z\cdot\bar{0}}.$$

Нека $S \in \boldsymbol{F}$. Тогаш,

$$S(z) = e^{i\varphi} \frac{z-v}{1-\bar{v}z}, |v|<1.$$

Да ја разгледаме трансформацијата

$$S_1(z)=e^{i(-\varphi)}\,\frac{z-(-ve^{i\varphi})}{1-\overline{(-ve^{i\varphi})}z},\ |-ve^{i\varphi}|<1\,.$$

Јасно, $S_1\in \boldsymbol{F}$ и притоа важи

$$S(S_1(z))=S_1(S(z))\text{, т.е. } S^{-1}=S_1\in \boldsymbol{F}\,.\ \blacksquare$$

III ГЛАВА
ГЕОМЕТРИЈА НА КРУЖНИЦА И ТРИАГОЛНИК

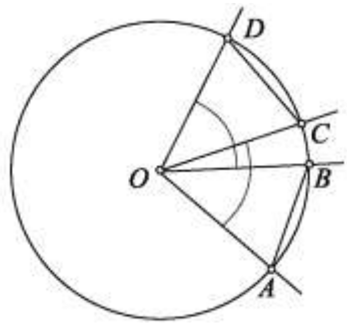
1. ЦЕНТРАЛЕН И ПЕРИФЕРЕН АГОЛ НА КРУЖНИЦА

1.1. Дефиниција. Агол, чиешто теме се совпаѓа со центарот на дадена кружница K го нарекуваме *централен агол*.

1.2. Теорема. Ако два централни агли во една кружница се еднакви, тогаш се еднакви и нивните соодветни кружни лаци.

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека кружницата K е единична. Нека $\angle AOB = \angle COD$ (види цртеж) и афиксите на точките A, B, C и D се a, b, c и d, соодветно. Имаме

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \text{ т.е. } \frac{c}{a} = \frac{d}{b}.$$



Од

$$S(a) = \frac{c}{a}a = c \text{ и } S(b) = \frac{c}{a}b = \frac{d}{b}b = d$$

следува дека со пресликувањето $S(z) = \frac{c}{a}z$, кое е ротација за $\angle AOC$, точката A се пресликува во точката C, а точката B се пресликува во точката D, па затоа лакот AB се пресликува во лакот CD. ■

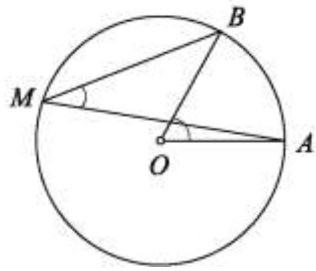
1.3. На сличен начин може да се докаже обратната теорема на теорема 1.2. Доказот го оставаме на читателот за вежба.

Теорема. Ако два кружни лака во една кружница се еднакви, тогаш се еднакви и нивните соодветни централни агли. ■

1.4. Дефиниција. Агол, чиешто теме припаѓа на дадена кружница K, а неговите краци ја сечат таа кружница, го нарекуваме *периферен агол.*

1.5. Теорема. Периферниот агол е еднаков на половина од централниот агол над ист кружен лак.

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека кружницата K е единична. Да разгледаме лак AB каде точките A и B имаат афикси 1 и $e^{i\varphi}$, $\varphi \in (0,\pi)$. Тогаш $\angle AOB = \varphi$. Нека точката M припаѓа на комплементарниот лак на кружницата, т.е. таа има афикс $e^{i\theta}$, $\theta \in (\varphi, 2\pi)$. Тогаш



$$\angle AMB = \arg \frac{e^{i\varphi} - e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \arg \frac{e^{i\frac{\varphi}{2}}(e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{i(\theta - \frac{\varphi}{2})})}{-2ie^{i\frac{\theta}{2}} \sin\frac{\theta}{2}} = \arg \frac{e^{i\frac{\varphi}{2}}(e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\varphi}{2})} - e^{-i(\frac{\theta}{2} - \frac{\varphi}{2})})}{2i \sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \arg e^{i\frac{\varphi}{2}} \frac{\sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\varphi}{2})}{\sin\frac{\theta}{2}} = \arg e^{i\frac{\varphi}{2}} = \frac{\varphi}{2}$$

т.е. $\angle AMB = \frac{\angle AOB}{2}$. ■

1.6. Последица. Сите периферни агли над ист лак во дадена кружница се меѓусебно еднакви.

Доказ. Непосредно следува од теорема 1.5. ■

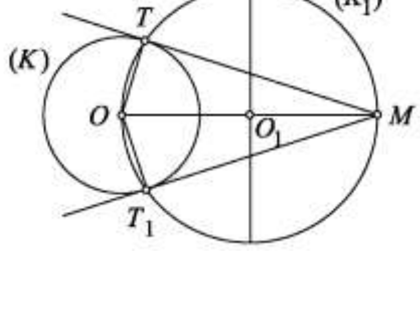
1.7. Последица (теорема на Талес). Секој периферен агол на дијаметарот на кружницата е прав агол.

Доказ. Непосредно следува од теорема 1.5. ■

1.8. Забелешка. Во точка II 8.7 при конструкцијата на сликата на произволна точка при инверзијата повлековме тангента на кружница од точка која е надворешна за таа кружница. Да забележиме дека ефективната конструкција на тангентата следува од теоремата на Талес.

Нека е дадена кружница $K(O,R)$ и точка M која е надворешна за K. Тангентата од M на K ја конструираме со следната постапка (види цртеж).

а) Ја конструираме средината O_1 на отсечката OM,



б) Конструираме кружница $K_1(O_1, \overline{MO}_1)$,

в) наоѓаме $K \cap K_1 = \{T, T_1\}$ и

г) ги повлекуваме правите MT и MT_1.

1.9. Отсечките MT и MT_1 од претходната постапка ги нарекуваме *тангентни отсечки* на кружницата $K(O,R)$ повлечени од точката M. За тангентните отсечки важи следната теорема.

Теорема. Нека M е надворешна точка за кружницата $K(O,R)$. Ако MT и MT_1 се тангентните отсечки повлечени од точката M на кружницата K, тогаш $\overline{MT} = \overline{MT}_1$.

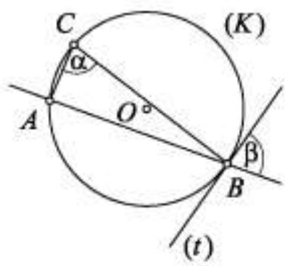
Доказ. Без ограничување на општоста можеме да земе дека кружницата K е единична (зошто?). Нека афиксите на точките T и T_1 се t и t_1, соодветно. Правите MT и MT_1 се тангенти, па според забелешка II 3.13 нивните равенки се

$$z + t^2\overline{z} = 2t \text{ и } z + t_1^2\overline{z} = 2t_1$$

и афиксот на точката M е $m = \frac{2tt_1}{t+t_1}$. Конечно,

$$\overline{MT} = |m - t| = \left|\frac{2tt_1}{t+t_1} - t\right| = \left|\frac{t(t_1-t)}{t+t_1}\right| = \left|\frac{t_1(t-t_1)}{t+t_1}\right| = \left|\frac{2tt_1}{t+t_1} - t_1\right| = |m - t_1| = \overline{MT}_1. \ \blacksquare$$

1.10. Теорема. Аголот меѓу тетивата AB и тангентата на кружницата (t) повлечена во една од точките A или B е еднаков на периферискиот агол над тетивата AB.



Доказ. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека кружницата $K(O,R)$ е единечна. Нека афиксите на точките A и B се a и b, соодветно. Равенката на тангентата (t) повлечена во точката B е

$$z = -b^2\overline{z} + 2b,$$

а равенката на правата AB е

$$z = -ab\overline{z} + a + b.$$

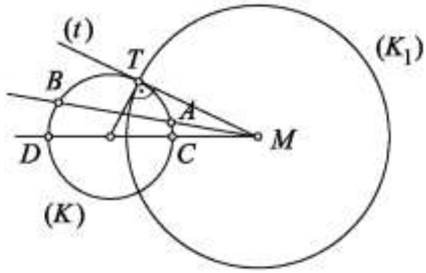
Според тоа, за аголот β меѓу правата AB и тангентата (t) важи $e^{2i\beta} = \frac{b}{a}$. Од доказот на теорема II 1.4 за периферискиот агол α имаме

$$e^{2i\alpha} = \frac{b}{a} = e^{2i\beta},$$

што значи $\alpha = \beta$. ■

2. СТЕПЕН НА ТОЧКА ВО ОДНОС НА КРУЖНИЦА

2.1. Нека е дадена кружница $K(O,R)$ и произволна точка M во рамнината. Низ M повлекуваме произволна права (p) која ја сече кружницата K во точките A и B. Ќе докажеме дека производот $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ не зависи од изборот на правата (p) низ точката M.



Ако точката M лежи на кружницата K, тогаш M е една од точките A или B. Затоа еден од броевите $\overline{MA}$ или $\overline{MB}$ е еднаков на нула, што значи дека $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$.

Нека точката M е надворешна за кружницата K (цртеж горе) и (t) е една од тангентите на K повлечени од M, а T е допирната точка. Кружницата $K_1(M, \overline{MT})$ ортогонално ја сече кружницата K, па затоа K е неподвижна при инверзијата дефинирана со кружницата K_1. Од дефиницијата на инверзија имаме

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MD} \cdot \overline{MC} = (\overline{MO} - R)(\overline{MO} + R) = \overline{MO}^2 - R^2.$$

Во овој случај, од својствата на инверзијата (теорема 8.5) имаме

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MT}^2.$$

Нека точката M е внатрешна за кружницата K и нека (p) е произволна права која минува низ M. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека центарот на кружницата се совпаѓа со координатниот почеток. Тогаш, ако m е афиксот на точката M равенката на правата (p) е $z - m = \eta(\overline{z} - \overline{m})$, а равенката на кружницата е $z\overline{z} = R^2$. Од равенката на правата (p) го изразуваме $\overline{z}$, го заменуваме во равенката на кружницата и ја добиваме квадратната равенка

$$\overline{\eta}z^2 + (\overline{m} - \overline{\eta}m)z - R^2 = 0$$

чии решенија

$$z_{1/2} = \frac{-\overline{m}+\overline{\eta}m \pm \sqrt{(\overline{m}-\overline{\eta}m)^2 + 4\overline{\eta}R^2}}{2\overline{\eta}}$$

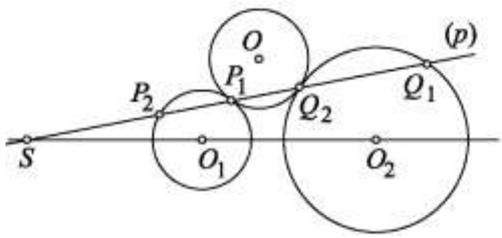
се афиксите на пресечните точки A и B на правата и кружницата. Според тоа,

$$\begin{aligned}\overline{MA}\cdot\overline{MB} &= |m - z_1|\cdot|m - z_2| \\ &= |m\overline{m} - R^2| = R^2 - \overline{MO}^2.\end{aligned}$$

Од произволноста на правата (p) следува дека производот $\overline{MA}\cdot\overline{MB}$ не зависи од изборот на правата (p) низ точката M.

Од досега изнесеното следува дека производот $\overline{MA}\cdot\overline{MB}$ не зависи од изборот на правата (p) низ точката M, туку зависи само од радиусот R на кружницата K и од растојанието $d = \overline{MO}$ од точката M до центарот O на кружницата K. Бројот $d^2 - R^2$ го нарекуваме *степен на точката* M во однос на кружницата K. Јасно, ако M лежи на K, тогаш степенот е 0, ако M е надворешна за K, тогаш степенот е позитивен и ако M е внатрешна за K, тогаш степенот е негативен.

2.2. Дефиниција. Нека $K_1(O_1, R_1)$ и $K_2(O_2, R_2)$ се дадени кружници и H е хомотетија со центар во S таква, што $\mathrm{H}(K_1) = K_2$. Ако (p) е права низ S која ги сече кружниците K_1 и K_2 во точките P_1, P_2 и Q_1, Q_2 соодветно и ако $\mathrm{H}(P_1) = Q_1$, $\mathrm{H}(P_2) = Q_2$, тогаш за точките P_1 и Q_2 (P_2 и Q_1) ќе велиме дека се *антихомотетични* (види цртеж).



Ако кружницата K ги допира кружниците K_1 и K_2 и двете од надвор или и двете од внатре, тогаш ќе велиме дека K *ги допира* K_1 *и* K_2 *на ист начин*, а ако едната ја допира од надвор, а другата од внатре, тогаш ќе велиме дека *ги допира на различен начин*.

2.3. Лема. Производот на растојанијата од центарот на хомотетија на две кружници до две антихомотетични точки е константен.

Доказ. Нека S е надворешниот центар на хомотетија H на кружниците $K_1(O_1,R_1)$ и $K_2(O_2,R_2)$, ($R_1 \neq R_2$) и нека точките P_1 и Q_2 (P_2 и Q_1) се антихомотетични (цртеж горе). Тогаш, коефициентот на хомотетија е

$$a = \frac{\overline{SQ_1}}{\overline{SP_1}} = \frac{\overline{SQ_2}}{\overline{SP_2}}$$

па ќе имаме

$$\overline{SP_1} \cdot \overline{SQ_2} = \overline{SP_1} \cdot \overline{SP_2} \cdot \frac{\overline{SQ_2}}{\overline{SP_2}} = \overline{SP_1} \cdot \overline{SP_2} \cdot a = \text{const}$$

бидејќи $\overline{SP_1} \cdot \overline{SP_2}$ е степенот на точката S во однос на кружницата K_1. ■

2.4. Лема. Нека $K(O,R)$ е кружница која ги допира кружниците $K_1(O_1,R_1)$ и $K_2(O_2,R_2)$. Тогаш,

а) ако K ги допира K_1 и K_2 на ист начин, тогаш допирните точки на K со K_1 и K_2 се антихомотетични во однос на надворешниот центар на сличност S на K_1 и K_2,

б) ако K ги допира K_1 и K_2 на различен начин, тогаш допирните точки на K со K_1 и K_2 се антихомотетични во однос на внатрешниот центар на сличност S на K_1 и K_2.

Доказ. б) Нека кружницата K ги допира кружниците K_1 и K_2 соодветно во точките P_1 и Q_2 на различен начин (цртеж долу) и нека афиксите на точките O, O_1, O_2, P_1 и Q_2 се $c, c_1, c_2,$ p и q, соодветно. Тогаш афискот на внатрешниот центар на хомотетија е

$$s = \frac{R_1c_2+R_2c_1}{R_1+R_2}.$$

Точките O, O_1, P_1 се колинеарни и важи $\overline{O_1P_1} = R_1$ па затоа се исполнети равенствата

$$p - c_1 = \frac{c_1 - c}{\overline{c_1} - \overline{c}}(\overline{p} - \overline{c_1})$$

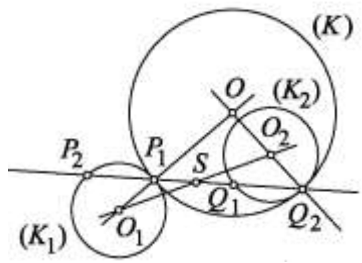
и

$$(p - c_1)(\overline{p} - \overline{c_1}) = R_1^2$$

од кои за добиваме

$$(p - c_1)^2 = \frac{c_1 - c}{\overline{c_1} - \overline{c}} R_1^2,$$

т.е.



$$(p-c_1)^2=\frac{(c_1-c)^2}{|c_1-c|^2}R_1^2\,.$$

Според тоа, за афиксот p на точката P_1 имаме

$$p=c_1-\frac{c_1-c}{|c_1-c|}R_1=c_1-\frac{c_1-c}{R+R_1}R_1\,.$$

Аналогно за афиксот q на точката Q_2 имаме

$$q=c_2+\frac{c_2-c}{|c_2-c|}R_2=c_2+\frac{c_2-c}{R-R_2}R_2\,.$$

Конечно,

$$\frac{s-p}{s-q}=-\frac{R_1(R-R_2)}{R_2(R+R_1)}\in\mathbf{R}\,,$$

т.е. точките S,P_1 и Q_2 се колинеарни, од што следува дека точките P_1 и Q_2 се антихомотетични.

Тврдењето под а) се докажува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

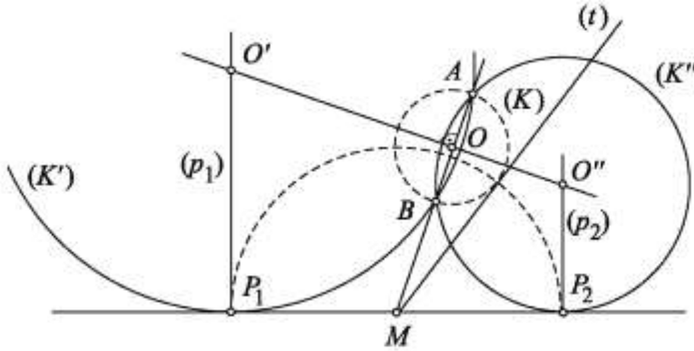
2.5. Лема. Секој центар на хомотетија на кружниците $K_1(O_1,R_1)$ и $K_2(O_2,R_2)$ има ист степен во однос на секоја кружница што ги допира кружниците K_1 и K_2.

Доказ. Според лема 2.4, ако допирните точки на K со K_1 и K_2 се P_1 и Q_2 соодветно, тогаш P_1 и Q_2 се антихомотетични точки (види ги претходните два цртежи). Ако S е центарот на хомотетија, тогаш според лема 2.3 производот $\overline{SP}_1\cdot\overline{SQ}_2$ е константен, а тоа е степенот на точката S во однос на кружницата K. ■

2.6. Пример. Конструирај кружница која минува низ точките A и B и ја допира правата (c).

Решение. Ќе го рагледаме најопштиот случај кога точките A и B лежат во иста полурамнина во однос на правата (c) и кога правите (c) и AB не се паралелни (цртеж долу).

Степенот на точката $M=AB\cap(c)$ во однос на произволна кружница што минува низ A и B е $\overline{MA}\cdot\overline{MB}$. Ако $K(O,\frac{\overline{AB}}{2})$ и ако (t) е тангента на (K) повлечена од M, тогаш $\overline{MT}^2$ е степенот на M во однос на (K), па затоа тоа е и степенот на M во однос на бараната кружница. Тоа значи дека пресечните точки P_1 и P_2 на правата (c) со кружницата $(M,\overline{MT})$ ќе бидат допирни точки на правата (c) со кружници што минуваат низ точките A и B. Ако (p_1) и (p_2) се прави нормални на (c) во точките P_1 и P_2 соодветно и ако (s) е симетралата на отсечката AB, тогаш $(p_1)\cap(s)=O'$ и $(p_2)\cap(s)=O''$ се центрите на бараните кружници. Јасно, задачата има две решенија. ■



3. РАДИКАЛНА ОСКА И РАДИКАЛЕН ЦЕНТАР

3.1. Нека се дадени две кружници $K'(O',R')$ и $K''(O'',R'')$. Да го определиме геомерискотo место на точки Γ кои имаат ист степен на кружниците (K') и (K'').

Нека афиксите на центрите O' и O'' се c_1 и c_2 соодветно. Јасно, $M\in\Gamma$ ако и само ако

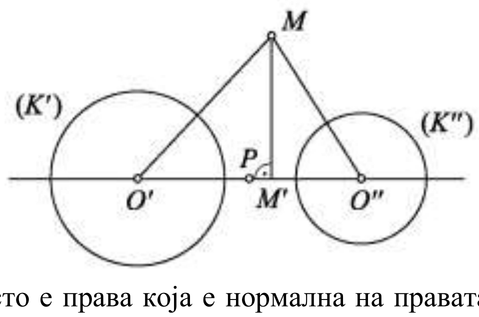
$$\overline{MO'}^2-R'^2=\overline{MO''}^2-R''^2,$$

што значи ако и само ако

$$|z-c_1|^2-R'^2=|z-c_2|^2-R''^2.$$

Последното равенство е еквивалентно на равенството

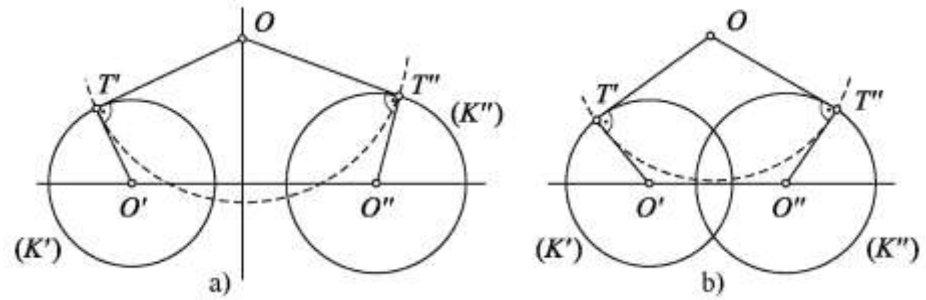
$$z=-\frac{c_2-c_1}{\overline{c_2}-\overline{c_1}}\overline{z}+\frac{|c_2|^2-|c_1|^2+R'^2-R''^2}{\overline{c_2}-\overline{c_1}}.$$



Конечно, бараното геометриско место е права која е нормална на правата $O'O''$ (види цртеж). Оваа права ќе ја нарекуваме *радикална оска* на кружниците K_1 и K_2.

3.2. Лема. Радикалната оска на две кружници што немаат заеднички точки и делот на радикалната оска на две кружници што се сечат, а е надворешен за нив, е геометриско место на центрите на кружниците кои-што ортогонално ги сечат дадените кружници.

Доказ. Ако $K(O,R)$ ортогонално ги сече кружниците $K'(O',R')$ и $K''(O'',R'')$, тогаш тангентите од O до (K') и (K'') се еднакви, т.е. O има ист степен во однос на (K') и (K''). Значи, O лежи на радикалната оска на (K') и (K''), цртеж долу.



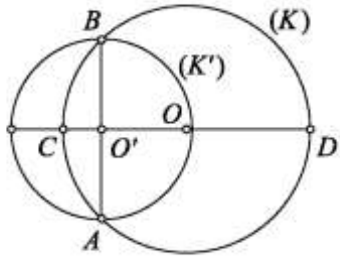
Нека $K(O,R)$ е кружница чиј центар лежи на радикалната оска на кружниците (K') и (K'') и

$$R=\overline{T'O}=\overline{T''O}.$$

Бидејќи OT' и OT'' се тангенти на (K') и (K''), соодветно, следува дека (K) и (K'), односно (K) и (K'') се сечат под прав агол, т.е. (K) ортогонално ги сече (K') и (K''). ■

3.3. Дефиниција. За кружницата $K(O,R)$ ќе велиме дека *ја преполовува* кружницата $K'(O',R')$, ако (K) ја сече (K') во две дијаметрално спротивни точки.

Да забележиме дека, ако кружницата $K(O,R)$ ја сече кружницата $K'(O',R')$ во дијаметрално спротивните точки A и B (цртеж десно), тогаш од степенот на точката O' во однос на кружницата $K(O,R)$ имаме

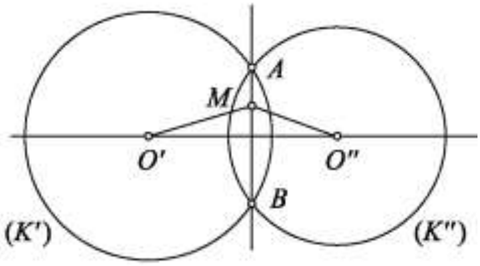


$$\overline{O'C}\cdot\overline{O'D}=\overline{O_1A}^2$$

па затоа при ознака $d=\overline{O'O}$ добиваме

$$(R-d)(R+d)=R'^2,\text{ т.е. } R^2=R'^2+d^2.$$

3.4. Лема. Внатрешниот дел од радикалната оска на кружниците $K'(O',R')$ и $K''(O'',R'')$ што се сечат е геометриското место на центрите на кружниците, секоја од кои кружниците (K') и (K'') ја половат.



Доказ. Јасно, ако M е центар на кружница која е половена од две дадени кружници (K') и (K''), тогаш M мора да биде внатрешна точка за кружниците (K') и (K'') (цртеж десно), па таква кружница ќе постои само ако (K') и (K'') се сечат. Сега, од коментарот после дефиниција 3.3 следува

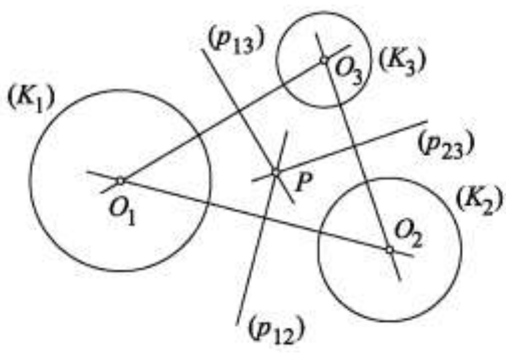
$$R^2 = R'^2 - d'^2 \text{ и } R^2 = R''^2 - d''^2,$$

па затоа

$$R'^2 - d'^2 = R''^2 - d''^2,$$

што значи дека точката M има ист степен во однос на кружниците (K') и (K''), т.е. M лежи на внатрешниот дел на радикалната оска на (K') и (K''). ■

3.5. Нека се дадени три кружници $K_i(O_i, R_i)$, $i = 1,2,3$. Ќе го определиме геометриското место точки во рамнината кои имаат ист степен во однос на трите кружници. Со p_{12}, p_{23}, p_{13} да ги означиме радикалните оски на (K_1) и (K_2), (K_2) и (K_3), (K_3) и (K_1), соодветно. Значи, ако постои точка P која има ист степен во однос на (K_1), (K_2) и (K_3), тогаш таа мора да припаѓа на радикалните оски (p_{12}) и (p_{23}). Можни се два случаи.

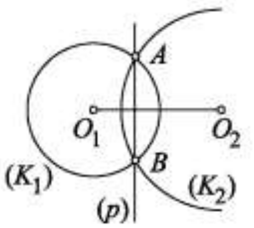


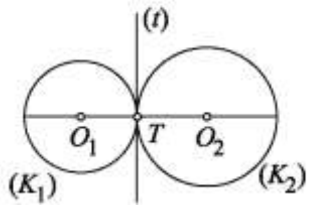
а) Ако центрите O_i, $i = 1,2,3$ на кружниците не се колинеарни (цртеж десно), тогаш радикалните оски (p_{12}) и (p_{23}) се сечат. Точката $P = (p_{12}) \cap (p_{23})$ ќе има ист степен во однос на кружниците (K_i), $i = 1,$ $2,3$ па затоа радикалната оска

(p_{13}) ќе минува низ P која има ист степен во однос на кружниците (K_i), $i=1,2,3$ и оваа точка ја нарекуваме *радикален центар* на (K_i), $i=1,2,3$.

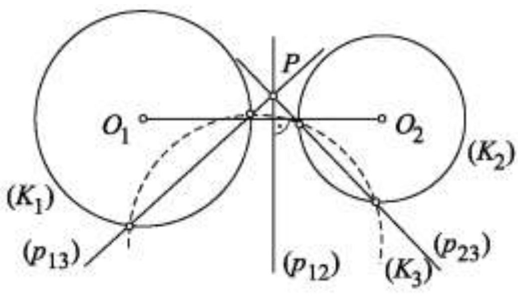
б) Ако центрите O_i, $i=1,2,3$ на кружниците се колинеарни, тогаш радикалните оски се меѓусебно паралелни и, притоа, или се сите три различни или се совпаѓаат. Во првиот случај не постои точка со бараното својство, а во вториот случај бараното геометриско место е права.

3.6. Од претходно изнесеното следува ефективната конструкција на радикалната оска на две кружници. Имено, ако кружниците (K_1) и (K_2) се сечат во точките A и B, тогаш радикалната оска е правата AB (цртеж долу лево), а ако кружниците се допираат во точка T, тогаш радикалната оска е заедничката тангента на (K_1) и (K_2) во T (цртеж долу десно).

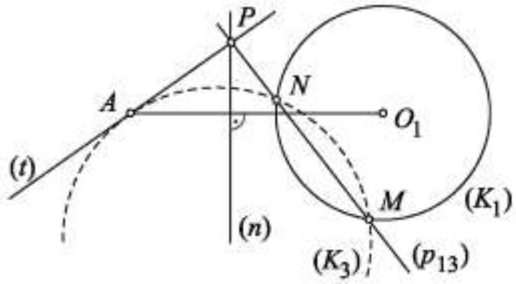




Ако кружниците (K_1) и (K_2) не се сечат, тогаш конструираме произволна кружница (K_3) која ги сече (K_1) и (K_2). Пресечната точка на радикалните оски (p_{13}) и (p_{23}) е радикалниот центар P на кружниците (K_i), $i=1,2,3$, па затоа радикалната оска (p_{12}) е правата која минува низ P и е нормална на правата O_1O_2 (цртеж десно).



3.7. Забелешка. Да забележиме дека може да зборуваме и за радикална оска на кружница и точка, а исто така и за радикална оска на две точки. Јасно, радикалната оска на две точки A и B е симетралата на отсечката AB. Што се однесува до радикалната оска на точка A и кружница (K_1), ако $A\in(K_1)$, тогаш тоа е тангентата во точката A, а ако точката A лежи надвор од кружницата, тогаш радикалната оска ја конструираме со помош на радикалниот центар на A, (K_1) и кружница (K_3) која минува низ точката A и ја сече кружницата (K_1) (цртеж десно). Имено, радикалната оска на A и (K_3) ќе биде тангентата (t) на (K_3) во A, а радикалната оска (p_{13}) ќе минува низ пресечните точки M и N. Сега радикалниот центар P ќе биде пресекот на (t) и (p_{13}), па затоа бараната радикална оска на A и (K_1) ќе биде нормалата (n) повлечена од P на AO_1.



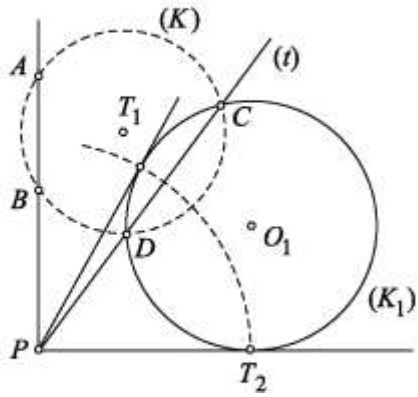
Аналогно можеме да зборуваме за радикален центар на точка и две кружници, за радикален центар на две точки и кружница и за радикален центар на три точки. Јасно, радикалниот центар на три неколинеарни точки A, B и C е центар на кружницата која минува низ точките A, B и C.

3.8. Лема. Ако $K_i(O_i, R_i)$, $i = 1,2,3$ се три кружници кои не минуваат низ една иста точка и центрите не им се колинеарни, тогаш постои единствена кружница којашто или сите три ги сече ортогонално или, пак, сите три ја преполовуваат.

Доказ. Нека P е радикален центар на кружниците $K_i(O_i, R_i)$, $i = 1,2,3$. Тогаш, точката P е или внатрешна за сите три кружници или, пак, е надворешна. Во првиот случај степенот на кружницата е $-m^2$ и кружницата $K(P, m)$ ги преполовува кружниците $K_i(O_i, R_i)$, $i = 1,2,3$, а во вториот случај степенот е m^2 и кружницата $K(P, m)$ ортогонално ги сече кружниците $K_i(O_i, R_i)$, $i = 1,2,3$. ■

3.9. Пример. Конструирај кружница која минува низ точките A и B и ја допира кружницата (K_1).

Решение. Низ точките A и B повлекуваме произволна кружница (K), којашто кружницата (K_1) ја сече во точките C и D (цртеж десно). Тогаш



радикалната оска на (K) и (K_1) е правата CD, а радикалната оска на (K) и бараната кружница (K^*) е правата AB. Значи, пресечната точка P на правите AB и CD, ако постои, е радикалниот центар на (K), (K^*) и (K_1), од каде што следува дека радикалната оска на (K_1) и (K^*) ќе биде тангентата на (K_1) повлечена од P.

Според тоа, ако повлечеме тангенти (t_1) и (t_2) од P кон (K_1), тогаш допирните точки T_1 и T_2 ќе бидат допирните точки на бараните кружници со (K_1). Задачата може да има најмногу две решенија. ■

4. ПРАМЕН И СНОП КРУЖНИЦИ

4.1. Нека се дадени кружниците $K_1(O_1,R_1)$ и $K_2(O_2,R_2)$ и нека правата (p) е нивна радикална оска. Множеството кружници такви, што за било кои две од нив правата (p) е радикална оска и правата (p), разгледувана како кружница, го нарекуваме *прамен кружници*. За правата (p) ќе велиме дека е радикална оска на праменот.

Според 3.1 центрите на сите кружници од праменот ќе лежат на правата O_1O_2 која е нормална на правата (p) и која ја нарекуваме *централна права на праменот.*

4.2. Јасно секој прамен е зададен со две кружници, но од следните разгледувања ќе следува дека секој прамен кружници е наполно определен и со радикалната оска и една кружница. Нека M е произволна точка од рамнината. Ако M лежи на радикалната оска, тогаш јасно постои кружница која минува низ M. Нека M не лежи на радикалната оска. Како и во 3.5 ќе разгледаме три случаи.

а) Ако кружниците (K_1) и (K_2) се сечат во точките A и B, тогаш низ точките M, A и B минува единствена кружница (K_0). Лесно се гледа дека оваа кружница припаѓа на праменот определен со кружниците (K_1) и (K_2).

б) Ако кружниците (K_1) и (K_2) се допираат во точка A, тогаш кружница $K_0(O,\overline{OA})$, O е пресекот на симетралата на отсечката AM и централната права на праменот, припаѓа на праменот определен со (K_1) и (K_2).

в) Нека кружниците (K_1) и (K_2) не се сечат, m е афиксот на точката M и T, со афикс t, е произволна точка од радикалната оска. Постои единствена точка M_1 чиј афикс е

$$m_1 = t + \frac{|t-o_1|^2 - R_1^2}{|m-t|^2}(m-t).$$

Од

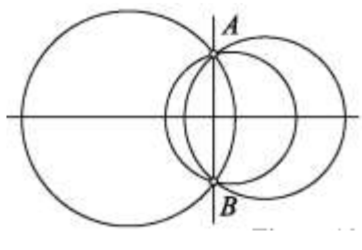
$$\overline{TM} \cdot \overline{TM}_1 = |m-t| \cdot |t + \frac{|t-o_1|^2 - R_1^2}{|m-t|^2}(m-t) - t| = |t-o_1|^2 - R_1^2 = \overline{TO}_1^2 - R_1^2,$$

следува дека кружницата $K_0(O, \overline{OM})$, O е пресекот на симетралата на отсечката MM_1 и централната права на праменот, припаѓа на праменот определен со (K_1) и (K_2).

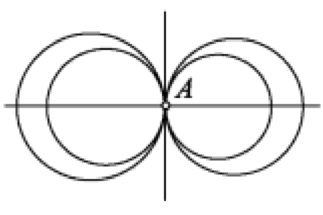
Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема. Низ секоја точка од рамнината минува единствена кружница која што припаѓа на даден прамен. ■

4.3. Нека праменот Π е зададен со радикалната оска (p) и кружницата (K_0). Од доказот на теорема 4.2 следува дека во зависност од заемната положба на (p) и (K_0) постојат три вида прамени. Имено,

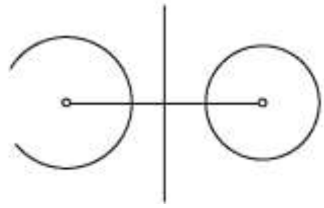


а) Ако (p) и (K_0) се сечат во точките A и B (цртеж десно), тогаш и секоја кружница K од Π ќе ја сече радикалната оска во точките A и B и, обратно, секоја кружница што минува низ A и B ќе припаѓа на праменот Π. Значи, праменот се состои од сите кружници што минуваат низ точките A и B. Во овој случај велиме дека праменот Π има *две базни точки* или дека е *хиперболичен прамен*.



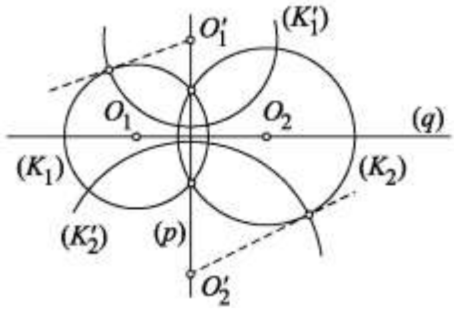
б) Ако (p) и (K_0) се допираат во точката A (цртеж лево), тогаш и секоја кружница (K) од Π ќе ја допира радикалната оска во точката A и, обратно, секоја кружница што ја допира (p) во A ќе припаѓа на праменот Π. Значи, праменот се состои од сите кружници што ја допираат (p) во точката A. Во овој случај велиме дека праменот Π има *една базна точка* или дека е *параболичен прамен*.

в) Ако (p) и (K_0) немаат заеднички точки (цртеж десно), тогаш и секоја друга кружница од Π нема заеднички точки со (p) и уште повеќе, било кои две кружници од Π немаат заеднички точки. Во овој случај велиме дека имаме прамен *без базни точки* или дека е *елиптичен прамен.*



4.4. Лема. Множеството кружници Π_1 од сите кружници ортогонални на кружниците од праменот Π е прамен кружници.

Доказ. Нека $K_i(O_i, R_i),\ i=1,2$ се две произволни кружници од праменот Π со радикална оска (p) и централна права (q), а $K_i^{'}(O_i^{'}, R_i^{'})$, $i=1,2$ се две произволни кружници од множеството Π_1 (цртеж десно). Бидејќи кружниците $K_i^{'}(O_i^{'}, R_i^{'})$, $i=1,2$ се ортогонални на кружниците $K_i(O_i, R_i),\ i=1,2$ следува дека нивните центри $O_i^{'}$, $i=1,2$ лежат на радикалната оска (p) на $K_i(O_i, R_i),\ i=1,2$. Од друга страна, точките O_i, $i=1,2$ имаат ист степен во однос на $K_i^{'}(O_i^{'}, R_i^{'})$, $i=1,2$, што значи дека (q) е радикална оска на $K_i^{'}(O_i^{'}, R_i^{'})$, $i=1,2$. Сега тврдењето следува од произволноста на кружниците $K_i^{'}(O_i^{'}, R_i^{'})$, $i=1,2$. ■

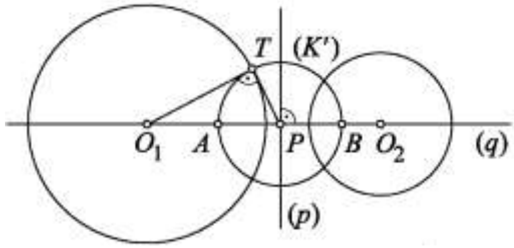


4.5. Дефиниција. Ако секоја кружница од праменот Π е ортогонална на праменот Π_1, тогаш за прамените Π и Π_1 ќе велиме дека се *коњугирани.*

4.6. Лема. а) Ако едниот од два коњугирани прамени е елиптичен, тогаш другиот е хиперболичен и обратно.

б) Ако едниот од два коњугирани прамени е параболичен, тогаш таков е и другиот.

Доказ. а) Нека Π е елиптичен прамен со радикална оска (p) и централна права (q) (види цртеж). Пресечната точка P на (p) и (q) е надворешна за кружниците од Π, па затоа е центар на кружница (K') од коњугираниот прамен Π_1. Бидејќи (K') ја сече радикалната оска (q) на праменот Π_1 во точки A и B, добиваме дека праменот Π_1 е хиперболичен.



Обратно, нека Π_1 е хиперболичен пармен со радикална оска (q) и централна права (p). Кружницата од Π_1 со центар во точката $P=(p)\cap(q)$ ја сече радикалната оска (q) во точките A и B. Ако $K_1(O_1,R_1)$ е произволна кружница од Π, а T пресечната точка на (K_1) и (K'), тогаш имаме $\overline{O_1T}<\overline{O_1P}$, па (K_1) не ја сече радикалната оска (p) на Π. Значи, праменот Π е елиптичен.

б) Тврдењето непосредно следува од дефиницијата на параболичен прамен. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

4.7. Пример. Даден е прамен Π со радикална оска (p) и кружница $K_1(O_1,R_1)$. Конструирај кружница $K(O,R)$ која припаѓа на праменот Π и допира дадена кружница $K_2(O_2,R_2)$.

Решение. Нека (p_{12}) е радикалната оска на кружниците (K_1) и (K_2). Бидејќи бараната кружница (K) припаѓа на праменот Π, радикалната оска на (K_1) и (K) ќе биде правата (p). Значи, радикалниот центар на $(K),(K_1)$ и (K_2) е точката $P=(p)\cap(p_{12})$, па радикалната оска на (K) и (K_2) ќе биде тангентата на (K_2) што минува низ точката P. Сега ги конструираме тангентите на (K_2) низ P, ако такви постојат, и потоа ја конструираме бараната кружница (K) чиј центар лежи на нормалата на тангентата во допирната точка со (K_2) и се наоѓа централната права на праменот определен со (K_1) и (p). ■

4.8. Пример. Даден е прамен Π со радикална оска (p) и кружница $K_1(O_1, R_1)$. Конструирај кружница $K(O, R)$ која припаѓа на праменот Π и допира дадена права (a) различна од (p).

Решение. Ако (a) е паралелна на (p), тогаш задачата се сведува на конструкција на кружница која припаѓа на праменот Π и минува низ точката $(a) \cap (q)$, каде (q) е централната права на праменот Π.

Затоа, да претпоставиме дека правата (a) ја сече правата (p) и нека M е пресечната точка. Тангентното растојание од M до (K_1) е исто со тангентното растојание од M до бараната кружница (K), па затоа кружницата (K) ја допира правата (a) во точка P таква, што $\overline{MP} = \overline{MT}$, каде T е допирната точка на тангентата повлечена од M до (K_1). Сега центарот на (K) е во пресекот на нормалата на (a) во точката P и централната права (q) на праменот Π. ■

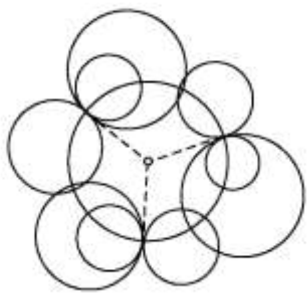
4.9. Дефиниција. Множеството од сите кружници такви што било кои три од нив имаат ист радикален центар P и сите прави низ точката P го нарекуваме *сноп кружници*. Точката P ја нарекуваме *радикален центар на снопот*, а степенот на точката P во однос на произволна кружница од снопот го нарекуваме *степен на снопот*.

4.10. Секој сноп кружници Γ е определен со

- центарот и степенот,
- центарот и една кружница,
- степенот и две кружници, или
- три кружници.

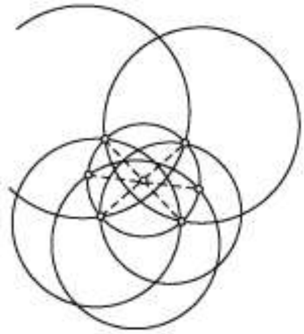
Во зависност од заемната положба на центарот во однос на кружниците од снопот Γ, можеме да разликуваме три видови снопови, и тоа:

а) Ако степенот е $m^2 > 0$, тогаш центарот P е надворешна точка за секоја кружница од снопот Γ и според лема 13.8 кружницата $K(P, m)$ ортогонално ги сече сите кружници на Γ. Според тоа, Γ се состои од сите кружници и прави кои ортогонално ја сечат кружницата $K(P, m)$ (цртеж десно).



б) Ако степенот е $m^2 = 0$, тогаш снопот Γ

се состои од сите кружници и прави коишто минуваат низ центарот P.



в) Ако степенот е $m^2 < 0$, тогаш центарот P е внатрешна точка за секоја кружница од снопот Γ и според лема 13.8 сече сите кружници на Γ ја половат кружницата $K(P,m)$. Според тоа, Γ се состои од сите кружници и прави кои кружницата $K(P,m)$ ја сечат во дијаметрално спротивни точки (цртеж десно).

4.11. Забелешка. Понекогаш под сноп кружници се подразбира и множеството од сите кружници чии центри лежат на дадена права (p) и сите прави нормални на (p), т.е. множеството од сите кружници и прави кои ортогонално ја сечат правата (p) и овој сноп е од првиот тип, бидејќи како што рековме правата во проширената комплексна рамнина можеме да ја поистоветиме со кружница.

4.12. Лема. Пресек на два снопа кружници е прамен кружници или прамен прави.

Доказ. Нека Γ_1 и Γ_2 се два снопа кружници со центри P и Q и степени m и n, соодветно. Ако $P \not\equiv Q$, тогаш $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ е прамен кружници со радикална оска PQ, а ако $P \equiv Q \equiv O$, тогаш е праменот прави со центар во O. Ќе разгледаме три случаи кога $P \not\equiv Q$.

а) Ако $m = n = 0$, тогаш Γ_1 и Γ_2 се множествата од сите кружници коишто минуваат низ P и Q, соодветно, па затоа $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ е множеството од сите кружници коишто минуваат низ точките P и Q, т.е. тоа е хиперболичен прамен кружници.

б) Ако $m > 0$ и $n > 0$, тогаш $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ е множеството од сите кружници коишто ортогонално ги сечат кружниците $K(P,\sqrt{m})$ и $K*(Q,\sqrt{n})$. Според лема 4.4 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ е прамен кружници.

в) Ако $m = 0$ и $n > 0$, тогаш $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ е множеството од сите кружници коишто минуваат низ точката P и кои ортогонално ја сечат кружницата $K*(Q,\sqrt{n})$, а тоа е прамен кружници со најмалку една базна точка, т.е. тоа е хиперболичен или параболичен прамен во зависност од тоа дали $P \notin K^*(Q,\sqrt{n})$ или $P \in K^*(Q,\sqrt{n})$.

Останатите случаи ги оставаме на читателот за вежба. ■

5. ОРТОЦЕНТАР И ТЕЖИШТЕ НА ТРИАГОЛНИК

5.1. Да го разгледаме ΔABC, чии темиња A,B и C имаат афикси a,b и c, соодветно. Во пример II 3.3 докажавме дека

$$o = \frac{a\bar{a}(c-b)+b\bar{b}(a-c)+c\bar{c}(b-a)}{\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}}$$

е афиксот на центарот O на кружницата опишана околу ΔABC. Јасно, радиусот на опишаната кружница околу ΔABC е $R = |a-o|$. Пресликувањето $S:\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ определено со $S(z) = \frac{1}{R}(z-o)$ е директна сличност која ΔABC го пресликува во $\Delta A'B'C'$. Според последица 4.8 имаме

$$\overline{A'B'} : \overline{A'C'} = \overline{AB} : \overline{AC} \text{ и } \angle A'B'C' = \angle ABC .$$

Нека a',b',c' се афиксите на темињата A',B',C', соодветно и нека t е еден од трите корени на комплексниот број $\overline{a'b'c'}$. Пресликувањето $S_1:\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ определено со $S_1(z) = tz$ е движење кое $\Delta A'B'C'$ го пресликува во $\Delta A''B''C''$. Притоа, ако a'',b'',c'' се афиксите на A'',B'',C'', соодветно, тогаш

$$a''b''c'' = t^3 a'b'c' = 1$$

и според последица 4.8 имаме

$$\overline{A''B''} : \overline{A''C''} = \overline{A'B'} : \overline{A'C'} \text{ и } \angle A'B'C' = \angle A''B''C'' .$$

Од досега изнесеното следува дека при проучувањето на триаголникот, без ограничување на општоста, можеме да сметаме дека неговите темиња A,B и C чии афикси се a,b и c, соодветно, лежат на единечната кружница околу координатниот почеток O. Притоа важи $|a|=|b|=|c|=1$. Исто така, можеме да сметаме дека координатниот систем е избран така, што $abc = 1$.

Во натамошните разгледувања, освен ако не е поинаку кажано, ќе сметаме дека ΔABC е впишан во единечната кружница со центар во координатниот почеток O и дека за афиксите a,b и c на неговите темиња A,B и C важи $abc=1$.

5.2. Да го разгледаме ΔABC чии темиња A,B и C имаат афикси a,b и c, соодветно. Според теорема 1.2 равенките на правите AB,BC и CA се дадени со

$$z+ab\overline{z}=a+b,\ z+bc\overline{z}=b+c,\ z+ca\overline{z}=c+a, \qquad (1)$$

соодветно, т.е. нивните комплексни аглови коефициенти се $-ab,-bc$ и $-ca$, соодветно. Според последица 1.8 правите низ C,A и B, нормални на AB,BC и CA имаат равенки

$$cz-\overline{z}=c^2-ab,\ az-\overline{z}=a^2-bc,\ bz-\overline{z}=b^2-ca, \qquad (2)$$

соодветно. Правите чии равенки се дадени со (2) ги нарекуваме *висини* на ΔABC, повлечени во темињата C,A и B, соодветно.

Слично, равенките на симетралите на страните AB,BC и CA се дадени со

$$z-ab\overline{z}=0,\ z-bc\overline{z}=0,\ z-ca\overline{z}=0, \qquad (3)$$

соодветно.

Од $a\neq b$ следува дека системот равенки

$$\begin{cases} az-\overline{z}=a^2-bc \\ bz-\overline{z}=b^2-ca \end{cases}$$

има решение $h=a+b+c$. Со непосредна проверка можеме да се убедиме дека комплексниот број h ја задоволува и равенката на висината повлечена во темето C.

Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема. Висините во ΔABC се сечат во точка H чиј афикс е

$$h=a+b+c. \blacksquare$$

5.3. Дефиниција. Точката H од теорема 5.2 ја нарекуваме *ортоцентар* на ΔABC.

5.4. Забелешка. а) За ΔABC чии темиња A,B и C имаат афикси a,b и c, соодветно и кој не е впишан во единична кружница со центар во кординатниот почеток може да се докаже дека за афиксите h и o на ортоцентарот H и центарот на опишаната кружница O, соодветно важи

$$h+2o=a+b+c.$$

б) Да го разгледаме ΔOXY чие едно теме е координатниот почеток, а темињата X и Y имаат афикси x и y, соодветно. Тогаш за афиксот o на центарот O_1 на опишаната кружница околу ΔOXY имаме

$$o=\frac{0\bar{0}(y-x)+x\bar{x}(0-y)+y\bar{y}(x-0)}{\begin{vmatrix}0 & \bar{0} & 1\\ x & \bar{x} & 1\\ y & \bar{y} & 1\end{vmatrix}}=\frac{y\bar{y}x-x\bar{x}y}{x\bar{y}-\bar{x}y}=\frac{xy(\bar{y}-\bar{x})}{x\bar{y}-\bar{x}y}.$$

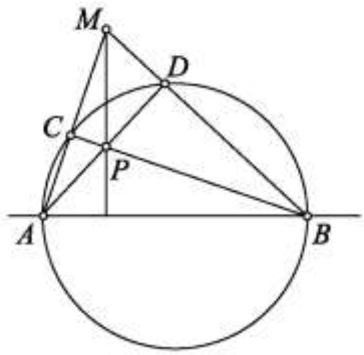
Понатаму, за афиксот h на ортоцентарот H на ΔOXY добиваме

$$h=0+x+y-2o=x+y-2\frac{xy(\bar{y}-\bar{x})}{x\bar{y}-\bar{x}y}=\frac{x^2\bar{y}-x\bar{x}y+y\bar{y}x-y^2\bar{x}-2y\bar{y}x+2x\bar{x}y}{x\bar{y}-\bar{x}y}$$

$$=\frac{x^2\bar{y}-y^2\bar{x}-y\bar{y}x+x\bar{x}y}{x\bar{y}-\bar{x}y}=\frac{x\bar{y}(x-y)+y\bar{x}(x-y)}{x\bar{y}-\bar{x}y}=\frac{(x-y)(x\bar{y}+y\bar{x})}{x\bar{y}-\bar{x}y}.$$

5.5. Пример. Од точка M која не се наоѓа на кружницата $K(O,R)$, повлечи права нормална на дијаметарот на кружницата.

Решение. Ја поврзуваме точката M со краевите на дијаметарот A и B. Тогаш, правите AM и BM ја сечат кружницата $K(O,R)$ во точките C и D, соодветно. Согласно со последица 1.7 правите AD и BC се висини на триаголникот чии страни лежат на правите AC и BD. Сега од теорема 5.2 следува дека правата MP е бараната нормала повлечена од точката M на дијаметарот AB (цртеж десно). ■



5.5. Пример. Ако H и O се ортоцентарот и центарот на кружницата опишана околу ΔABC, соодветно, тогаш

$$\overline{OH}^2=9R^2-(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BC}^2),$$

каде R е должината на радиусот на опишаната кружница. Докажи!

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека ΔABC е впишан во кружница со центар во координатниот почеток и радиус R. Ако темињата A, B и C имаат афикси a, b и c, тогаш $|a|=|b|=|c|$ $=R$ и од забелешка 15.4 следува:

$$\begin{aligned}\overline{OH}^2 &= |a+b+c|^2 = (a+b+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})\\ &= a\overline{a}+b\overline{b}+c\overline{c}+a\overline{b}+\overline{a}b+b\overline{c}+\overline{b}c+c\overline{a}+\overline{c}a\\ &= 3(a\overline{a}+b\overline{b}+c\overline{c})-(|a-b|^2+|b-c|^2+|c-a|^2)\\ &= 9R^2-(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BC}^2),\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

5.6. Теорема. Ако H е ортоцентарот на ΔABC и A_4, B_4, C_4 се точките симетрични на H во однос на правите BC, CA, AB, соодветно, тогаш точките A_4, B_4, C_4 лежат на кружницата опишана околу ΔABC.

Доказ. Од пример II 1.9 и теорема 5.2 следува дека афиксите на точките A_4, B_4, C_4 симетрични на точката H во однос на правите BC, CA, AB се $-b^2c^2, -c^2a^2, -a^2b^2$, соодветно. Од

$$|a|=|b|=|c|=1$$

следува дека

$$|-b^2c^2|=|-c^2a^2|=|-a^2b^2|=1,$$

т.е. точките A_4, B_4, C_4 лежат на кружницата опишана околу ΔABC. ■

5.7. Последица. Проекциите A_2, B_2, C_2 на темињата A, B, C врз страните BC, CA, AB на ΔABC имаат афикси $\frac{h-b^2c^2}{2}, \frac{h-c^2a^2}{2}, \frac{h-a^2b^2}{2}$, соодветно.

Доказ. Според теорема 5.6 точките A_2, B_2, C_2 се средини на отсечките HA_4, HB_4, HC_4, соодветно. Сега тврдењето следува од фактот дека афиксот на ортоцентарот H е h, а афиксите на точките A_4, B_4, C_4 соодветно се $-b^2c^2,\ -c^2a^2,\ -a^2b^2$. ■

5.8. Нека е даден ΔABC чии темиња A, B, C се со афикси a, b, c, соодветно. Афиксите на средините A_1, B_1, C_1 на страните BC, CA, AB се $\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}$, соодветно, што значи дека равенките на правите AA_1, BB_1, CC_1 се

$$z-a=\frac{b+c-2a}{\overline{b}+\overline{c}-2\overline{a}}(\overline{z}-\overline{a}),\quad z-b=\frac{c+a-2b}{\overline{c}+\overline{a}-2\overline{b}}(\overline{z}-\overline{b}),\quad z-c=\frac{a+b-2c}{\overline{a}+\overline{b}-2\overline{c}}(\overline{z}-\overline{c}),\qquad (4)$$

Системот равенки

$$\begin{cases} z-a=\frac{b+c-2a}{\overline{b}+\overline{c}-2\overline{a}}(\overline{z}-\overline{a}) \\ z-b=\frac{c+a-2b}{\overline{c}+\overline{a}-2\overline{b}}(\overline{z}-\overline{b}) \end{cases}$$

има решение

$$t=\frac{a+b+c}{3}.$$

Со непосредна проверка со покажува дека комплексниот број t ја задоволува и равенката на правата CC_1. Точката чиј афикс е комплексниот број t да ја означиме со T. Понатаму имаме

$$\begin{aligned}\overline{AT}&=|\tfrac{a+b+c}{3}-a|=|\tfrac{b+c-2a}{3}|=2|\tfrac{b+c-2a}{6}| \\ &=2|\tfrac{b+c}{2}-\tfrac{a+b+c}{3}|=2\overline{A_1T}\end{aligned}.$$

Аналогно се докажува дека

$$\overline{BT}=2\overline{B_1T} \text{ и } \overline{CT}=2\overline{C_1T}.$$

Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема. Ако A_1,B_1,C_1 се средините на страните BC,CA,AB на ΔABC, тогаш правите AA_1,BB_1,CC_1 се сечат во точка T чиј афикс е $t=\frac{a+b+c}{3}$ и точката T ги дели отсечките AA_1,BB_1,CC_1 во однос $2:1$. ■

5.9. Дефиниција. Точката T од теорема 5.8 ја нарекуваме *тежиште* на ΔABC, а правите AA_1,BB_1,CC_1 негови *тежишни линии*.

5.10. Пример А. Нека е даден четириаголник $ABCD$ и нека T_a, T_b,T_c,T_d се тежиштата на триаголниците BCD,ACD,BAD,ABC, соодветно. Докажи дека отсечките AT_a,BT_b,CT_c,DT_d се сечат во една точка, која секоја од нив ја дели во однос 3:1 гледајќи од темињата на четириаголникот.

Решение. Од теорема 15.8 следува

$$t_a=\frac{b+c+d}{3}, t_b=\frac{a+c+d}{3}, t_c=\frac{a+b+d}{3} \text{ и } t_d=\frac{a+b+c}{3}.$$

Со A',B',C',D' да ги означиме точките кои ги делат отсечките AT_a,BT_b, CT_c,DT_d во однос 3:1 гледајќи од темињата на четириаголникот, соодветно. Од I 4.2. следува $a'=b'=c'=d'=\frac{a+b+c+d}{4}$, што значи дека AT_a,

BT_b, CT_c, DT_d се сечат во една точка T со афикс $t = \frac{a+b+c+d}{4}$, која секоја од нив ја дели во однос 3:1 гледајќи од темињата на четириаголникот. ■

Коментар. Точката T од претходниот пример ја нарекуваме *тежиште на четириаголникот* $ABCD$. Примерот А укажува како можеме да дефинираме тежиште на петаголник. Имено, ги разгледуваме отсечките кои поврзуваат теме на петаголникот со тежиштето на четрираголникот формиран од останатите четири темиња на петаголникот и така добиваме пет отсечки кои се сечат во една точка T, која ја нарекуваме *теме на петаголникот*. Лесно се покажува дека ако афиксите на темињата на петаголникот $ABCDE$ се a', b', c', d', e', соодветно, тогаш афиксот t на неговото тежиште T е $t = \frac{a+b+c+d+e}{5}$. На сличен начин се дефинира тежиште T на $n-$аголник $A_1A_2...A_n$ и се докажува дека неговиот афикс е $t = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$, каде $a_i, i = 1,2,...,n$ се афиксите на темињата $A_i, i = 1,2,...,n$, соодветно.

Пример Б. Нека S е центар на опишаната кружница, а H е ортоцентар на ΔABC. Понатаму, нека точката Q е таква да S е средина на отсечката HQ и нека T_1, T_2 и T_3 се тежиштата на $\Delta BCQ, \Delta CAQ$ и ΔABQ, соодветно. Докажи дека

$$\overline{AT}_1 = \overline{BT}_2 = \overline{CT}_3 = \frac{4}{3}R,$$

каде R е радиусот на опишаната кружница на ΔABC.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека опишаната кружница околу ΔABC е единична, односно дека $o = 0$ и $|a| = |b| = |c| = 1$. Имаме $h = a + b + c$ и $o = \frac{h+q}{2}$, па затоа $q = -h = -a - b - c$. Понатаму, $t_1 = \frac{b+c+q}{3} = -\frac{a}{3}$ и слично добиваме дека $t_2 = -\frac{b}{3}$, $t_3 = -\frac{c}{3}$. Сега имаме

$$\overline{AT}_1 = |a - t_1| = |a + \frac{a}{3}| = |\frac{4a}{3}| = \frac{4}{3} = \frac{4}{3}R, \ \overline{BT}_2 = \overline{CT}_3 = \frac{4}{3} = \frac{4}{3}R,$$

што и требаше да се докаже. ■

5.11. Теорема (Лајбниц). Ако T е тежиште на ΔABC и P е произволна точка од рамнината на триаголникот, тогаш

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 3\overline{PT}^2 + \overline{TA}^2 + \overline{TB}^2 + \overline{TC}^2.$$

Доказ. Нека темињата A,B,C имаат афикси a,b,c, соодветно, и нека афиксот на точката P е p. Од теорема 5.8 имаме

$$\begin{aligned}3\overline{PT}^2+\overline{TA}^2+\overline{TB}^2+\overline{TC}^2&=3\left|\tfrac{a+b+c-3p}{3}\right|^2+\left|\tfrac{b+c-2a}{3}\right|^2+\left|\tfrac{a+c-2b}{3}\right|^2+\left|\tfrac{a+b-2c}{3}\right|^2\\&=3p\overline{p}+a\overline{a}+b\overline{b}+c\overline{c}-p\overline{a}-\overline{p}a-p\overline{b}-\overline{p}b-p\overline{c}-\overline{p}c\\&=|p-a|^2+|p-b|^2+|p-c|^2=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

5.12. Пример. Ако T е тежиштето на ΔABC, тогаш

$$\overline{TA}^2+\overline{TB}^2+\overline{TC}^2=\tfrac{1}{3}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2).$$

Докажи!

Решение. Доволно е во равенството од теорема 5.11 последователно да земеме $P\equiv A$, $P\equiv B$ и $P\equiv C$ и да ги собереме добиените равенства. ■

5.13. Нека е даден ΔABC и да ја разгледаме хомотетијата

$$w=-\tfrac{1}{2}z+\tfrac{h}{2}. \qquad (5)$$

Од равенството $z=-\frac{1}{2}z+\frac{h}{2}$ следува $z=\frac{h}{3}$, т.е. центарот на хомотетијата (5) е тежиштето T на ΔABC. Точката A со хомотетијата (5) се пресликува во точка чиј афикс е

$$-\tfrac{a}{2}+\tfrac{h}{2}=\tfrac{b+c}{2},$$

што значи таа се пресликува во средината A_1 на страната BC. Аналогно се докажува дека точките B и C се пресликуваат во средините B_1 и C_1 на страните AC и AB, соодветно. Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема. Ако T е тежиштето на ΔABC и A_1, B_1 и C_1 се средините на страните BC, AC и AB, соодветно, тогаш хомотетијата со центар во T и коефициент $-\frac{1}{2}$ го пресликува ΔABC во $\Delta A_1B_1C_1$. ■

5.14. Последица. Ако A_1, B_1 и C_1 се средините на страните BC, AC и AB на ΔABC, тогаш

$$A_1B_1 \parallel AB, \quad B_1C_1 \parallel BC, \quad C_1A_1 \parallel CA,$$
$$2\overline{A_1B_1}=\overline{AB}, \quad 2\overline{B_1C_1}=\overline{BC}, \quad 2\overline{C_1A_1}=\overline{CA}.$$

Доказ. Од теоремите 5.13 и II 6.5 следува дека

$$A_1B_1 \parallel AB,\ B_1C_1 \parallel BC,\ C_1A_1 \parallel CA,$$

а од теоремите 5.12 и 4.6 дека $2\overline{A_1B_1} = \overline{AB}, \quad 2\overline{B_1C_1} = \overline{BC}, \quad 2\overline{C_1A_1} = \overline{CA}$. ■

5.15. Дефиниција. Нека A_1, B_1 и C_1 се средините на страните BC, AC и AB, соодветно, на ΔABC. Отсечките A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 ги нарекуваме *средни линии* на страните AB, BC, CA, соодветно.

5.16. Забелешка. Во последица 5.14 докажавме дека средните линии на триаголникот се паралелни на соодветните страни и дека должината на секоја од нив е еднаква на половината од должината на соодветната страна.

6. ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК

6.1. За ΔABC ќе велиме дека е *правоаголен* ако неговиот ортоцентар H се совпаѓа со едно од темињата A, B или C. Според тоа, ΔABC е правоаголен ако и само ако $|h|=1$, т.е. ако и само ако

$$(a+b+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) = 1.$$

Последното равенство е еквивалентно со равенството

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

од што следува дека ΔABC е правоаголен ако и само ако или $a+b=0$ или $b+c=0$ или $c+a=0$. Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема. Триаголникот ABC е правоаголен ако и само ако или $a+b=0$ или $b+c=0$ или $c+a=0$. ♦

6.2. Последица. Триаголникот ABC е правоаголен ако и само ако една од страните AB, BC или CA е дијаметар на кружницата опишана околу него.

Доказ. Непосредно следува од теорема 6.1. ■

Страната на правоаголниот триаголник ABC која е дијаметар на кружницата опишана околу него ја нарекуваме *хипотенуза*, а другите две страни ги нарекуваме *катети* на ΔABC.

6.3. Теорема (Питагора). За секој правоаголен триаголник квадратот од должината на хипотенузата е еднаков на збирот на квадратите од должините на катетите.

Доказ. Нека AB е хипотенуза за правоаголниот триаголник ABC. Според теорема 16.1 имаме $a+b=0$ т.е. $b=-a$, па затоа

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2+\overline{BC}^2 &= |c-a|^2+|c-b|^2\\ &= |c-a|^2+|c+a|^2\\ &= (c-a)(\overline{c}-\overline{a})+(c-a)(\overline{c}+\overline{a})\\ &= 2|c|^2+2|a|^2=4|b|^2\\ &= |2b|^2=|b-a|^2=\overline{AB}^2,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

6.4. Пример. Ако хипотенузата на правоаголниот триаголник ја поделиме на три еднакви делови и точките на поделба ги поврземе со темето на правиот агол, тогаш збирот на квадратите на страните на така добиениот среден триаголник е еднаков на $\frac{2}{3}$ од квадратот на хипотенузата. Докажи!

Решение. Без ограничување на општоста може да земеме дека ABC е правоаголен триаголник со прав агол при темето C, кој е впишан во единечната кружница. Нека афиксите на темињата A,B,C се a,b,c соодветно. Ако D и E се точки од хипотенузата AB такви што

$$\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EB},$$

тогаш нивните афикси се $\frac{2a+b}{3}$ и $\frac{a+2b}{3}$, соодветно. Според теорема 6.1 имаме

$$\begin{aligned}\overline{CD}^2+\overline{DE}^2+\overline{EC}^2 &= \left|\tfrac{2a+b-3c}{3}\right|^2+\left|\tfrac{b-a}{3}\right|^2+\left|\tfrac{a+2b-3c}{3}\right|^2\\ &= \left|\tfrac{a-3c}{3}\right|^2+\left|\tfrac{2a}{3}\right|^2+\left|\tfrac{a+3c}{3}\right|^2\\ &= \tfrac{2a\overline{a}+6c\overline{c}}{3}=\tfrac{2}{3}(|a|^2+3|c|^2)\\ &= \tfrac{2}{3}(|a|^2+3|a|^2)=\tfrac{2}{3}|2a|^2\\ &= \tfrac{2}{3}|b-a|^2=\tfrac{2}{3}\overline{AB}^2,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

7. ОЈЛЕРОВА ПРАВА И ОЈЛЕРОВА КРУЖНИЦА

7.1. Теорема. Центарот O на опишаната кружница, тежиштето T и ортоцентарот H на ΔABC лежат на една права и притоа $\overline{OH} = 3\overline{OT}$.

Доказ. За афиксите h и t на ортоцентарот H и тежиштето T имаме

$$h = a + b + c = 3\tfrac{a+b+c}{3} = 3t\,,$$

што значи дека O,T и H се колинеарни и притоа важи $\overline{OH} = 3\overline{OT}$. ■

7.2. Дефиниција. Правата на која лежат центарот O на опишаната кружница, тежиштето T и ортоцентарот H на ΔABC ја нарекуваме *Ојлерова права* за ΔABC.

7.3. Пример. Ако T и O се тежиштето и центарот на опишаната кружница околу ΔABC, соодветно, тогаш

$$\overline{OT}^2 = R^2 - \tfrac{1}{9}(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2)\,,$$

каде R е должината на радиусот на кружницата опишана околу ΔABC.

Решение. Според теорема 7.1 имаме $\overline{OH}^2 = 9\overline{OT}^2$. Сега тврдењето непосредно следува од пример 5.5. ■

7.4. Според теорема II 2.2 равенката на Ојлеровата права OH е $z = \frac{h}{\overline{h}}\overline{z}$, што значи дека нејзиниот комплексен аглов коефициент е $\frac{h}{\overline{h}}$. Со t_1, t_2, t_3 и t_4 да ги означиме комплексните аглови коефициенти на правите BC, CA, AB и Ојлеровата права на ΔABC. Имаме,

$$t_1 = -bc,\; t_2 = -ca,\; t_3 = -ab \text{ и } t_4 = \frac{h}{\overline{h}}\,,$$

па затоа

$$\begin{aligned} t_1t_2 + t_1t_3 + t_1t_4 + t_2t_3 + t_2t_4 + t_4t_4 &= (t_1 + t_2 + t_3)t_4 + t_2t_3 + t_1t_3 + t_1t_2 \\ &= -(bc + ca + ab)\frac{h}{\overline{h}} + abc(a + b + c) \\ &= -\overline{h}\frac{h}{\overline{h}} + 1 \cdot h = 0 \end{aligned}$$

При секое движење комплексните аглови коефициенти на правите се множат со иста константа, па затоа ако равенството

$$t_1t_2 + t_1t_3 + t_1t_4 + t_2t_3 + t_2t_4 + t_4t_4 = 0 \qquad (1)$$

важи за ΔABC кој е впишан во единечна кружница со центар во координатниот почеток O, при што за афиксите a,b,c на неговите темиња A,B,C важи $abc=1$, тогаш тоа важи и за секој триаголник. Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема. За комплексните аглови коефициенти t_1,t_2,t_3 и t_4 на страните и Ојлеровата права на произволен триаголник важи равенството (1). ■

7.5. Теорема. Ако H е ортоцентарот на ΔABC, A_1,B_1,C_1 се средините на страните BC,CA,AB, соодветно, A_2,B_2,C_2 се подножните точки на висините и A_3,B_3,C_3 се средините на отсечките AH,BH,CH, тогаш точките A_1,B_1,C_1, A_2,B_2,C_2, A_3,B_3,C_3 лежат на една кружница.

Доказ. Средините A_1,B_1,C_1 на страните BC,CA,AB имаат афикси $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$, $\frac{a+b}{2}$. Според последица 5.7 подножните точки A_2,B_2,C_2 на висините имаат афикси $\frac{h-b^2c^2}{2},\frac{h-a^2c^2}{2},\frac{h-b^2a^2}{2}$, а како A_3,B_3,C_3 се средини на отсечките $AH,BH,\ CH$ добиваме дека нивните афикси се $\frac{a+h}{2},\frac{b+h}{2},\frac{c+h}{2}$.

Од пример II 3.3 следува дека центарот O_9 на кружницата опишана околу $\Delta A_1B_1C_1$ има афикс

$$\varepsilon=\frac{a+b+c}{2}=\frac{h}{2},$$

а нејзиниот радиус е

$$R_1=|\varepsilon-\frac{a+b}{2}|=\frac{1}{2}.$$

Со непосредна проверка со покажува дека точките A_2,B_2,C_2, A_3,B_3,C_3 лежат на кружницата со центар во O_9 и радиус $R_1=\frac{1}{2}$, што значи дека точките A_1,B_1,C_1, A_2,B_2,C_2, A_3,B_3,C_3 лежат на една кружница. ■

7.6. Дефиниција. Кружницата со центар во точката O_9 и радиус $R_1=\overline{O_9A_1}$, ја нарекуваме *Ојлерова кружница*, а точката O_9 ја нарекуваме *Ојлерова точка* за ΔABC.

7.7. Забелешка. Јасно, за секој ΔABC Ојлеровата точка е средина на отсечката OH, т.е. таа лежи на Ојлеровата права, а радиусот на Ојлеровата кружница е еднаков на $\frac{R}{2}$, каде R е радиусот на кружницата опишана околу ΔABC.

7.8. Нека L, M, N се точките со афикси

$$l = b + c, m = c + a, n = a + b,$$

соодветно. Тогаш, отсечките BC и OL имаат заедничка средина A_1, па затоа точката L е симетрична на центарот O на опишаната кружница околу ΔABC во однос на A_1, т.е. во однос на правата BC. Бидејќи

$$\frac{a+l}{2} = \frac{b+m}{2} = \frac{c+n}{2} = \frac{h}{2}$$

добиваме дека отсечките AL, BM, CL, HO имаат заедничка средина, а тоа е Ојлеровата точка O_9. Од равенствата

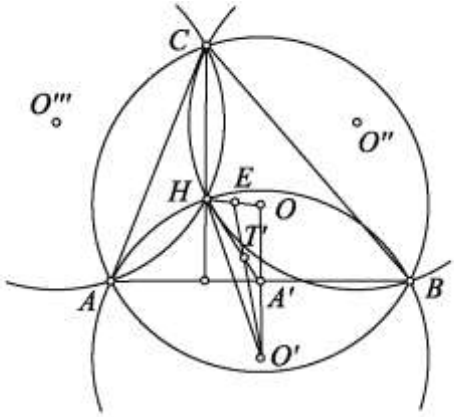
$$h = l + a, b = l - c, c = l - b$$

и фактот дека $|a| = |b| = |c| = 1$, заклучуваме дека точките H, B, C лежат на кружницата со центар во L и радиус 1. Слично, H, C, A лежат на кружницата со центар во M и радиус 1, а H, B, A лежат на кружницата со центар во N и радиус 1. Заради симетричниста во однос на точката O_9 следува точноста на останатите тврдења во следнава теорема.

Теорема. Ако L, M, N се симетричните точки на центарот O на опишаната кружница околу ΔABC во однос на правите BC, CA, AB, соодветно, а H е ортоцентарот на ΔABC, тогаш четириаголниците $ABCH$ и $LMNO$ се симетрични во однос на Ојлеровата точка O_9. Триаголниците $ABC, BCH, CAH, ABH, LMN, MNO, NLO, LMO$ имаат последователно ортоцентри H, A, B, C, O, L, M, N и опишани кружници со еднакви радиуси и центри во точките O, L, M, N, H, A, B, C, соодветно. ■

7.9. Пример. Нека H е ортоцентарот на ΔABC. Докажи дека Ојлеровите прави на триаголниците ABC, ABH, BCH и CAH се сечат во една точка.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека ΔABC е впишан во единичната кружница. Ортоцентарот H на триаголникот има афикс $h = a + b + c$. Точката O' со афикс $o' = a + b$ е симетрична на центарот O на впишаната кружница во однос на правата AB. Понатаму,



$\overline{O'A} = |a+b-a| = |a| = 1$,

$\overline{O'B} = |a+b-b| = |b| = 1$ и

$\overline{O'H} = |a+b+c-a-b| = |c| = 1$,

па затоа O' е центарот на кружницата опишана околу ΔABH. Аналогно, точките O'' и O''' со афикси $o'' = b+c$ и $o''' = a+c$ се центри на опишаните кружници околу триаголниците BCH и ACH, соодветно. Ако T' е тежиштето на триаголникот ABH, тогаш неговиот афикс е

$$t' = \frac{a+b+(a+b+c)}{3} = \frac{2a+2b+c}{3}.$$

Ојлеровите прави на триаголниците ABH и ABC се правите $T'O'$ и OH, соодветно. Од $t' = \frac{(a+b)+(a+b+c)+0}{3}$ следува дека T' е тежиште на $\Delta HOO'$, па затоа правата $T'O'$ ја сече отсечката OH во точка E со афикс $e = \frac{a+b+c}{2}$. Значи, точката E е пресек на Ојлеровите прави на триаголниците ABH и ABC.

На потполно ист начин се докажува дека точката E е пресек на Ојлеровите прави на триаголниците BCH и ABC, односно на триаголниците CAH и ABC, што значи дека дека Ојлеровите прави на триаголниците ABC, ABH, BCH и CAH се сечат во една точка. ■

8. ТЕОРЕМА НА МЕНЕЛАЈ

8.1. Ако $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се колинеарни вектори, тогаш постои реален број λ таков, што $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD}$. Во натамошните разгледувања за реалниот број формално ќе ја прифатиме ознаката $\lambda = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$.

Бидејќи равенството $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD}$ е еквивалентно на равенството $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{AB}$ имаме $\frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{\lambda}$.

8.2. Дефиниција. Нека страната AB на ΔABC лежи на правата (p). Точката P ја нарекуваме *точка на Менелај* за страната AB ако $P\in(p)$ и $P\not\equiv A,B$. Аналогно се дефинираат точките на Менелај за страните BC и CA на ΔABC.

8.3. Теорема (Менелај). Нека D,E и F се точки на Менелај за страните BC,CA и AB на произволен ΔABC, соодветно. Точките D,E и F се колинеарни ако и само ако

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}=-1. \tag{1}$$

Доказ 1. Нека D,E и F се точки на Менелај за страните BC,CA и AB, чии афикси се p,q и r, соодветно. Ако

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}=\lambda,\ \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}=\mu,\ \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}=\nu,$$

тогаш за афиксите p,q и r на точките D,E и F добиваме

$$p=\frac{b+\lambda c}{1+\lambda},\quad q=\frac{c+\mu a}{1+\mu},\quad r=\frac{a+\nu b}{1+\nu}. \tag{2}$$

Точките D,E и F се колинеарни ако и само ако

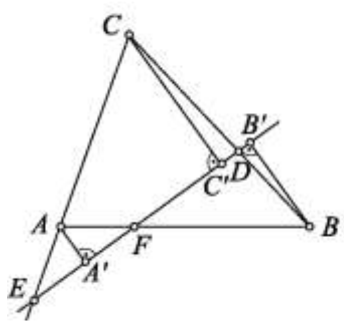
$$\frac{p-q}{\bar p-\bar q}=\frac{r-q}{\bar r-\bar q}.$$

Ако во последното равенство од (2) ги замениме вредностите за p,q и r и добиеното равенство го помножиме со $(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)$, после средувањето добиваме

$$(1+\lambda\mu\nu)(a\bar b+b\bar c+c\bar a-b\bar a-c\bar b-a\bar c)=0. \tag{3}$$

Значи, точките D,E и F се колинеарни ако и само ако е исполнето равенството (3). Конечно, точките D,E и F се колинеарни ако и само ако $1+\lambda\mu\nu=0$ (зошто?), односно ако и само ако е исполнет условот (1).

Доказ 2. Нека е исполнет условот (1), т.е. $\mu=-\frac{1}{\lambda\nu}$. Тогаш



$$p=\frac{b+\lambda c}{1+\lambda},\ r=\frac{a+\nu b}{1+\nu}\ \text{ и }\ q=\frac{\lambda\nu c-a}{\lambda\nu-1},$$

па затоа

$$\overrightarrow{DF}=\frac{(1+\lambda)a+(\lambda\nu-1)b-\lambda(1+\nu)c}{(1+\nu)(1+\lambda)},$$

$$\overrightarrow{DE}=\frac{(1+\lambda)a+(\lambda\nu-1)b-\lambda(1+\nu)c}{(1-\lambda\nu)(1+\lambda)},$$

што значи $\frac{\overrightarrow{DE}}{\overrightarrow{DF}}=\frac{1+\lambda}{1-\lambda\nu}\in\mathbf{R}$, бидејќи при $1-\lambda\nu=0$ добиваме $FD\parallel AC$, што противречи на конечноста на точката E. Значи, $DE\parallel DF$, од каде следува дека точките D,E и F се колинеарни.

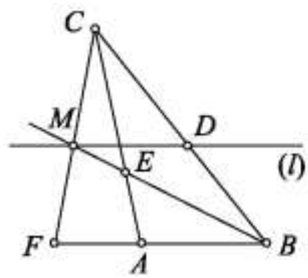
Нека точките D,E и F се колинеарни и нека проекциите на точките A,B,C врз правата ED се точките A',B',C', соодветно (види цртеж). Тогаш триаголниците $BB'D$ и $CC'D$ се директно слични, па затоа

$$\frac{b'-b}{p-b}=\frac{c'-c}{p-c}, \text{ т.е. } \frac{b'-b}{c'-c}=\frac{p-b}{p-c}.$$

Аналогно, од директната сличност на триаголниците $AA'E$ и $CC'E$ следува $\frac{a'-a}{c'-c}=\frac{q-a}{q-c}$ и од директната сличност на триаголниците $AA'F$ и $BB'F$ следува $\frac{b'-b}{a'-a}=\frac{r-b}{r-a}$. Конечно,

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}=\frac{b-p}{p-c}\cdot\frac{c-q}{q-a}\cdot\frac{a-r}{r-b}=(-\frac{b'-b}{c'-c})(-\frac{c'-c}{a'-a})(-\frac{a'-a}{b'-b})-1. \blacksquare$$

8.4. Пример. Даден е ΔABC и точки D и E на страните BC и CA, соодветно, такви, што $\overline{BD}=\overline{CE}=\overline{AB}$. Низ точката D повлекуваме права (l) паралелна на AB. Ако $M=(l)\cap BE$ и $F=CM\cap AB$, тогаш $\overline{AB}^3=\overline{AE}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{CD}$. Докажи!



Решение. Да го разгледаме ΔACF (цртеж десно). Точките E,M и B се точки на Менелај за страните AC,CF и AF, соодветно и по услов се колинеарни. Од теоремата на Менелај имаме

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BF}}\cdot\frac{\overrightarrow{FM}}{\overrightarrow{MC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}=-1,$$

од што следува

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}\cdot\frac{\overline{FM}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1.$$

Бидејќи $DM\parallel BF$ добиваме $\frac{\overline{FM}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$. Ако замениме во претходното равенство добиваме

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$$

и како $\overline{BD}=\overline{CE}=\overline{AB}$ добиваме $\overline{AB}^3=\overline{AE}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{CD}$. $\blacksquare$

9. ТЕОРЕМИ НА ДЕЗАРГ И ПАСКАЛ

9.1. Во овој дел, користејќи ја теоремата на Менелај, ќе ја докажеме теоремата на Дезарг која претставува фундаментален резултат во проективната геометрија. Исто така, ќе ја докажеме и теоремата на Паскал за шестаголник впишан во кружница.

Дефиниција. Триаголниците ABC и $A'B'C'$ ги нарекуваме *кополарни* ако правите AA', BB' и CC' се сечат во една точка.

Триаголниците ABC и $A'B'C'$ ги нарекуваме *коосни* ако пресечните точки на правите BC и $B'C'$, CA и $C'A'$, AB и $A'B'$ лежат на една права.

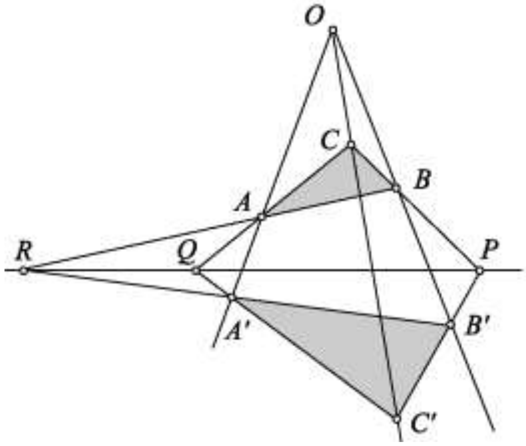
9.2. Теорема (Дезарг). Триаголниците ABC и $A'B'C'$ се кополарни ако и само ако се коосни.

Доказ. Нека триаголниците ABC и $A'B'C'$ се кополарни и нека правите AA', BB' и CC' се сечат во точката O. Со P, Q, R да ги означиме пресеците на правите BC и $B'C'$, CA и $C'A'$, AB и $A'B'$ соодветно (цртеж долу). Од теоремата на Менелај, применета на триаголниците BCO, CAO и AOB следува

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{C'O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{B'B}} = -1,$$

$$\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{A'O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OC'}}{\overrightarrow{C'C}} = -1$$

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{B'O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{A'A}} = -1$$



Ако ги помножиме горните равенства добиваме

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$$

и од што заради теоремата на Менелај заклучуваме дека точките P, Q и R се колинеарни. Значи, триаголниците ABC и $A'B'C'$ се коосни.

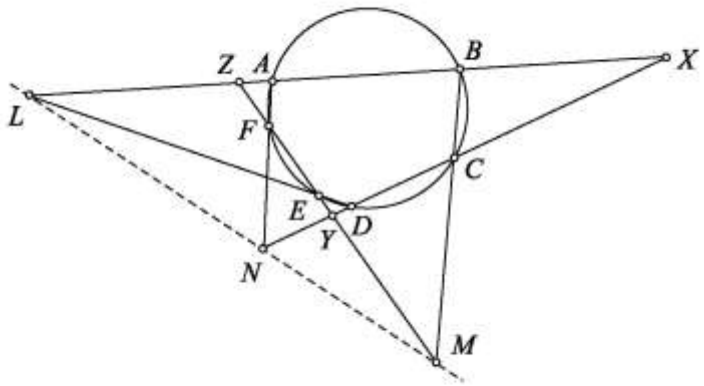
Обратно, нека претпоставиме дека P, Q и R се колинеарни и нека правите AA' и BB' се сечат во точката O. Сега триаголниците AQA' и BPB' се кополарни, па затоа се коосни. Според тоа, точките O, C и C' се колинеарни, што значи коосните триаголници се кополарни. ■

9.3. Теорема (Паскал). Нека шестаголникот $ABCDEF$, чии спротивни страни не се колинеарни е впишан во кружница. Со L,M,N да ги означиме пресечните точки на трите парови спротивни страни AB и ED, BC и EF, FA и CD, соодветно. Тогаш, точките L,M,N се колинеарни.

Доказ 1. Нека X,Y,Z се пресечните точки на AB и CD, CD и EF, EF и AB, соодветно (цртеж долу). Точките $D,E,L; F,A,N; B,C,M$ се точките на Менелај за ΔXYZ, па од теоремата на Менелај добиваме

$$\frac{\overrightarrow{XL}}{\overrightarrow{LZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZE}}{\overrightarrow{EY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YD}}{\overrightarrow{DX}}=-1,\qquad \frac{\overrightarrow{XA}}{\overrightarrow{AZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZF}}{\overrightarrow{FY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YN}}{\overrightarrow{NX}}=-1,\qquad \frac{\overrightarrow{XB}}{\overrightarrow{BZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZM}}{\overrightarrow{MY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YC}}{\overrightarrow{CX}}=-1.$$

Ако ги помножиме горните равенства добиваме



$$\left(\frac{\overrightarrow{XL}}{\overrightarrow{LZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZM}}{\overrightarrow{MY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YN}}{\overrightarrow{NX}}\right)\cdot\frac{\overrightarrow{ZE}}{\overrightarrow{EY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YD}}{\overrightarrow{DX}}\cdot\frac{\overrightarrow{XA}}{\overrightarrow{AZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZF}}{\overrightarrow{FY}}\cdot\frac{\overrightarrow{XB}}{\overrightarrow{BZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{YC}}{\overrightarrow{CX}}=-1. \qquad (1)$$

Понатаму, ако се искористи степенот на точките X,Y,Z во однос на кружницата, тогаш од геометриската интерпретација на комплексните броеви следува следува

$$\overrightarrow{ZE}\cdot\overrightarrow{ZY}=\overrightarrow{AZ}\cdot\overrightarrow{BZ},\ \overrightarrow{EY}\cdot\overrightarrow{FY}=\overrightarrow{YD}\cdot\overrightarrow{YC},\ \overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{DX}=\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB}.$$

Ако замениме во (1) добиваме

$$\frac{\overrightarrow{XL}}{\overrightarrow{LZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZM}}{\overrightarrow{MY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YN}}{\overrightarrow{NX}}=-1,$$

што според теоремата на Менелај значи дека точките L,M и N се колинеарни.

Доказ 2. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека шестаголникот $ABCDEF$ е впишан во единичната кружница. За афиксите l,m,n на точките $L=AB\cap DE$, $M=BC\cap FE$ и $N=CD\cap AF$ имаме

$$\overline{l}=\frac{a+b-(d+e)}{ab-de},\ \overline{m}=\frac{b+c-(e+f)}{bc-ef}\ \text{ и }\ \overline{n}=\frac{c+d-(f+a)}{cd-fa}.$$

Понатаму,

$$\bar{l}-\bar{m}=\frac{(b-e)(bc-cd+de-ef+fa-ab)}{(ab-de)(bc-ef)} \text{ и } \bar{m}-\bar{n}=\frac{(c-f)(cd-de+ef-fa+ab-bc)}{(bc-ef)(cd-fa)},$$

па затоа

$$\frac{\bar{l}-\bar{m}}{\bar{m}-\bar{n}}=\frac{(b-e)(cd-fa)}{(f-c)(ab-de)}.$$

Конечно, ако искористиме дека за секоја точка од единичната кружница важи $\bar{x}=\frac{1}{x}$, од својствата на комплексните броеви добиваме

$$\overline{\frac{l-m}{m-n}}=\overline{\frac{(b-e)(cd-fa)}{(f-c)(ab-de)}}=\frac{(\frac{1}{b}-\frac{1}{e})(\frac{1}{cd}-\frac{1}{fa})}{(\frac{1}{f}-\frac{1}{c})(\frac{1}{ab}-\frac{1}{de})}=\frac{(e-b)(fa-cd)}{(c-f)(de-ab)}=\frac{\bar{l}-\bar{m}}{\bar{m}-\bar{n}},$$

што значи дека $\frac{l-m}{m-n}$ е реален број, па од последица 1.4 следува дека точките L,M и N се колинеарни. ■

10. ТРИАГОЛНИ КООРДИНАТИ

10.1. Лема. Ако за комплексните броеви a,b и c важи

$$\lambda a+\mu b+\nu c=0 \tag{1}$$

каде

$$\lambda+\mu+\nu=0 \tag{2}$$

и λ,μ,ν се реални броеви различни од нула, тогаш точките A,B и C чии афиски се a,b и c, соодветно, се колинеарни и обратно.

Доказ. Навистина, од (1) и (2) следува

$$c=\frac{a+\frac{\mu}{\lambda}b}{1+\frac{\mu}{\lambda}}, \tag{3}$$

т.е. точката C ја дели отсечката AB во однос $\frac{\mu}{\lambda}$, што значи дека точките точките A,B и C се колинеарни.

Обратно, ако точките A,B и C лежат на иста права и ако точката C ја дели отсечката AB во однос $\frac{\mu}{\lambda}$, тогаш од (3) при

$$\nu=-(\lambda+\mu)$$

ги добиваме равенствата (1) и (2). ■

10.2. Забелешка. Од (2) следува дека броевите λ,μ и ν не можат да бидат со ист знак, т.е. еден од нив мора да има спротивен знак од останатите два. Точката на која во (1) соодветствува овој број се наоѓа меѓу останатите две точки.

Така, на пример, од равенството

$$3a-b-2c=0$$

според лема 10.1 добиваме дека точката чиј афикс е комплексниот број a се наоѓа меѓу точките чии афикси се комплексните броеви b и c.

10.3. Лема. Нека A,B и C, со афикси a,b и c, соодветно, се три неколинеарни точки во рамнината. Тогаш, на секоја точка во рамнината D, со афикс d, еднозначно и соодветствуваат три реални броеви λ,μ и ν такви, што

$$\lambda a+\mu b+\nu c=d \tag{4}$$

каде

$$\lambda+\mu+\nu=1 \tag{5}$$

Доказ. Да ја поврземе точката D, на пример, со точката A и со D' да го означиме пресекот на правите AD и BC. Тогаш, точката D ја дели отсечката AD' во однос $\alpha:\lambda=\overline{DD'}:\overline{DA}$, при што броевите α и λ можеме секогаш да ги избереме така, што $\alpha+\lambda=1$. Од лема 20.1 следува

$$-d+\lambda a+\alpha d'=0 \text{ и } -1+\lambda+\alpha=0 \tag{6}$$

Понатаму, точката D' ја дели отсечката BC во однос

$$\nu:\mu=\overline{CD'}:\overline{D'B}$$

и овие броеви можеме да ги избереме така, што

$$\nu+\mu=\alpha.$$

Од лема 10.1 имаме

$$-\alpha d'+\mu b+\nu c=0 \text{ и } -\alpha+\mu+\nu=0. \tag{7}$$

Сега равенствата (4) и (5) непосредно следуваат од равенствата (6) и (7).

Обратно, за μ и ν постои единствена точка D' на правата BC чиј афикс е определен со

$$d'=\tfrac{\mu b+\nu c}{\mu+\nu}.$$

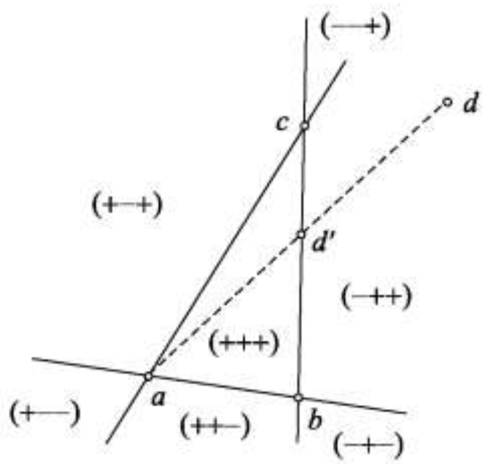
Сега на правата AD' постои единствена точка D таква, што

$$d=\tfrac{\lambda a+(\mu+\nu)d'}{\lambda+\mu+\nu}=\lambda a+\mu b+\nu c,$$

$$\lambda+\mu+\nu=1,$$

што значи со (4) и (5) во рамнината е определена единствена точка D. ■

10.4. Забелешка. Со броевите λ, μ и ν положбата на точката D е еднозначно определена во однос на ΔABC. Затоа подредената тројка (λ, μ, ν) ја нарекуваме *триаголни координати* на точката D во однос на ΔABC. Од (5) следува дека сите три броја λ, μ и ν не можат да бидат негативни и положбата на точката D во однос на ΔABC е определена со знаците на броевите λ, μ и ν (цртеж десно).



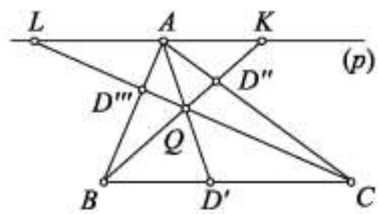
11. ТЕОРЕМИ НА ЧЕВА И ВАН ОБЕЛ

11.1. Теорема (Чева). Нека D', D'' и D''' лежат на страните BC, AC и AB на ΔABC или на нивните продолженија, соодветно. Правите AD', BD'' и CD''' се сечат во една точка ако и само ако е исполнето равенството

$$\frac{\overrightarrow{BD'}}{\overrightarrow{D'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CD''}}{\overrightarrow{D''A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AD'''}}{\overrightarrow{D'''B}} = 1. \qquad (1)$$

Доказ. Нека правите AD', BD'' и CD''' се сечат во точката Q и нека (p) е права која минува низ точката A и е паралелна со правата BC. Нека $BD'' \cap (p) = \{K\}$ и $CD''' \cap (p) = \{L\}$. Триаголникот $D'QB$ е директно сличен со триаголникот AQK, па затоа $\frac{q-d'}{b-d'} = \frac{q-a}{k-a}$. Триаголникот $D'CQ$ е директно сличен со триаголникот ALQ, па затоа $\frac{c-d'}{q-d'} = \frac{l-a}{q-a}$. Од последните две равенства добиваме

$$\frac{b-d'}{c-d'} = \frac{k-a}{l-a}. \qquad (2)$$



Понатаму, триаголникот $CD''B$ е директно сличен со триаголникот $AD''K$, па затоа точно е равенството $\frac{d''-c}{b-c} = \frac{d''-a}{k-a}$, кое е квивалентно со равенството

$$\frac{d''-c}{d''-a}=\frac{b-c}{k-a}\,, \tag{3}$$

и триаголникот BCD''' е директно сличен со триаголникот ALD''', па затоа точно е равенството $\frac{c-b}{d'''-b}=\frac{l-a}{d'''-a}$, кое е еквивалентно со равенството

$$\frac{d'''-a}{d'''-b}=\frac{l-a}{c-b}\,. \tag{4}$$

Конечно, од равенствата (2), (3) и (4) следува

$$\frac{\overrightarrow{BD'}}{\overrightarrow{D'C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CD''}}{\overrightarrow{D''A}}\cdot\frac{\overrightarrow{AD'''}}{\overrightarrow{D'''B}}=\frac{d'-b}{c-d'}\cdot\frac{d''-c}{a-d''}\cdot\frac{d'''-a}{b-d'''}=(-\frac{k-a}{l-a})(-\frac{b-c}{k-a})(-\frac{l-a}{c-b})=1\,,$$

т.е. точно е равенството (1).

Од друга страна, ако $BD''\cap CD'''=\{Q\}$ и $AQ\cap BC=\{A'\}$, тогаш од претходно докажаното ќе следува $\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CD''}}{\overrightarrow{D''A}}\cdot\frac{\overrightarrow{AD'''}}{\overrightarrow{D'''B}}=1$ и како по претпоставка важи $\frac{\overrightarrow{BD'}}{\overrightarrow{D'C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CD''}}{\overrightarrow{D''A}}\cdot\frac{\overrightarrow{AD'''}}{\overrightarrow{D'''B}}=1$ добиваме $\frac{\overrightarrow{BD'}}{\overrightarrow{D'C}}=\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}}$, од каде следува дека точките A' и D' се совпаѓаат, т.е. $Q\in AD'$. ■

11.2. Забелешка. Од теоремата на Чева непосредно следува дека тежишните линии на ΔABC се сечат во една точка. Имено, ако A_1, B_1 и C_1 се средините на страните BC, CA и AB соодветно, тогаш $\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{CB_1}=\overrightarrow{B_1A}$ и $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{C_1B}$, па затоа

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}=1,$$

што според теоремата на Чева значи дека тежишните линии AA_1, BB_1 и CC_1 се сечат во една точка.

11.3. Дефиниција. Отсечките (правите) AD', BD'' и CD''' од теорема 11.1 ги нарекуваме *отсечки (прави) на Чева* за ΔABC .

11.4. Теорема. Правите кои ги поврзуваат средините на страните на триаголникот со средините на соодветните отсечки на Чева се сечат во една точка.

Доказ. Нека во ΔABC (цртеж долу) AD, BE и CF се произволни прави кои се сечат во точката M ; A', B' и C' се средини на страните BC, CA и AB соодветно и P, K и L се средини на на отсечките AD, BE и CF соодветно. Од теоремата на Чева за правите AD, BE и CF имаме

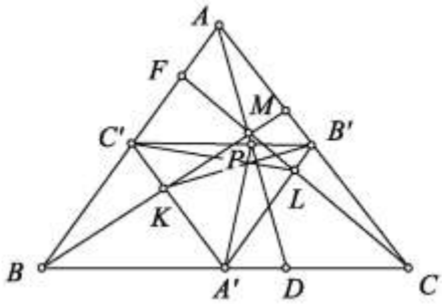
$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}\cdot\frac{\overline{BF}}{\overline{FA}}=1,$$

па затоа

$$\frac{\frac{\overline{AE}}{2}}{\frac{\overline{EC}}{2}}\cdot\frac{\frac{\overline{CD}}{2}}{\frac{\overline{DB}}{2}}\cdot\frac{\frac{\overline{BF}}{2}}{\frac{\overline{FA}}{2}}=1$$

односно

$$\frac{\overline{C'K}}{\overline{KA'}}\cdot\frac{\overline{B'P}}{\overline{PC'}}\cdot\frac{\overline{A'L}}{\overline{LB'}}=1.$$



Конечно, од теоремата на Чева, применета на $\Delta A'B'C'$ добиваме дека правите $A'P,\ B'K$ и $C'L$ се сечат во една точка. ■

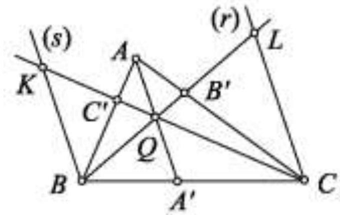
11.5. Последица. Правите кои ги поврзуваат средините на страните на триаголникот со средините на неговите висини се сечат во една точка.

Доказ. Непосредно следува од теоремите 5.1 и 11.4. ■

11.6. Теорема (Ван Обел). Ако $A',\ B',C'$ се соодветно точки на страните BC,CA,AB на триаголникот ABC такви да правите AA',BB',CC' се сечат во точката Q , тогаш

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QA'}}=\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}+\frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C}}.$$

Доказ. Нека афиксите на точките се означени со соодветните мали букви. Нека (r) е правата која минува низ точката C и е паралелна со правата AA', а (s) е правата која минува низ точката B и е паралелна со правата AA' и нека уште $(r)\cap BB'=\{L\}$ и $(s)\cap CC'=\{K\}$.



Триаголникот AQC' е директно сличен со триаголникот BKC', па затоа $\frac{q-a}{c'-a}=\frac{k-b}{c'-b}$, односно $\frac{c'-a}{c'-b}=\frac{q-a}{k-b}$. Понатаму, триаголникот $CB'L$ е директно сличен со триаголникот $AB'Q$, па затоа $\frac{b'-c}{l-c}=\frac{b'-a}{q-a}$, односно $\frac{b'-a}{b'-c}=\frac{q-a}{l-c}$; триаголникот BKC е директно сличен со триаголникот $A'QC$, па затоа $\frac{k-b}{c-b}=\frac{q-a'}{c-a'}$, т.е. $\frac{c-a'}{c-b}=\frac{q-a'}{k-b}$ и триаголникот CLB е директно сличен со триаголникот $A'QB$, па затоа $\frac{l-c}{b-c}=\frac{q-a'}{b-a'}$, т.е. $\frac{b-a'}{b-c}=\frac{q-a'}{l-c}$. Сега

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}+\frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C}}=\frac{|c'-a|}{|b-c'|}+\frac{|b'-a|}{|b'-c|}=\frac{|q-a|}{|k-b|}+\frac{|q-a|}{|l-c|}=|q-a|\left(\frac{1}{|k-b|}+\frac{1}{|l-c|}\right)$$

$$=|q-a|\left(\frac{1}{|q-a'|}\frac{|c-a'|}{|c-b|}+\frac{1}{|q-a'|}\frac{|b-a'|}{|b-c|}\right)=\frac{|q-a|}{|q-a'|}\frac{|c-a'|+|b-a'|}{|b-c|}$$

$$=\frac{|q-a|}{|q-a'|}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{QA'}}. \ \blacksquare$$

11.7. Коментар. Во теоремата на Ван Обел правите AA', BB', CC' се сечат во точката Q, па од теоремата на Чева следува $\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}=1$, што значи дека постојат релани боеви m,n,p такви да $\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}=\frac{p}{n}$, $\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}=\frac{m}{p}$, $\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}=\frac{n}{m}$. Тогаш афиксот на точката A' е даден со $a'=\frac{nb+pc}{n+p}$ и од теоремата на Ван Обел следува $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QA'}}=\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}+\frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C}}=\frac{n}{m}+\frac{p}{m}=\frac{n+p}{m}$, од каде добиваме дека афиксот на точката Q е

$$q=\frac{ma+(n+p)a'}{m+n+p}=\frac{ma+nb+pc}{m+n+p}. \tag{5}$$

11.8. Теорема. Ако A', B', C' се соодветно точки на страните BC, CA, AB на триаголникот ABC такви да $\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}=\frac{p}{n}$, $\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}=\frac{m}{p}$, $\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}=\frac{n}{m}$. Тогаш правите AA', BB', CC' се сечат во точката Q чиј афикс е даден со (5).

Доказ. Од $\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}=\frac{p}{n}$, $\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}=\frac{m}{p}$ и $\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}=\frac{n}{m}$, следува дека $a'=\frac{nb+pc}{n+p}$, $b'=\frac{pc+ma}{p+m}$ и $c'=\frac{ma+nb}{m+n}$. Јасно, првиот дел од тврдењето следува од теоремата на Чева. Ќе покажеме дека точката Q чиј афикс е даден со (5) лежи на правата AA'. Имаме

$$\frac{q-a}{a'-a}=\frac{\frac{ma+nb+pc}{m+n+p}-a}{\frac{nb+pc}{n+p}-a}=\frac{n+p}{m+n+p}\cdot\frac{nb+pc-(n+p)a}{nb+pc-(n+p)a}=\frac{n+p}{m+n+p}\in\mathbf{R},$$

што според последица 1.4 значи дека точките A,Q и A' се колинеарни. Аналогно се докажува дека точките B,Q,B' се колинеарни и дека точките C,Q,C' се колинеарни. $\blacksquare$

11.9. Последната теорема може да се искористи за наоѓање на афиксите на некои значајни точки на триаголникот, како што се тежиштето, центарот на впишаната кружница, точката на Жергон (за која покасно ќе стане збор) и слично. На пример, за средините A', B', C' на страните BC, CA, AB на триаголникот важи $\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}=1$, $\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}=1$, $\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}=1$, т.е. $m=n=p=1$, па затоа од теорема 11.8 следува дека тежините линии се сечат во точка T со афикс $t=\frac{a+b+c}{3}$. ■

12. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

12.1. Нека е даден ΔABC и нека афиксите на темињата A, B, C се a, b, c соодветно. Низ темињата B и C повлекуваме права, чија автокоњугирана равенка е

$$\overline{i(c-b)}z - i(c-b)\overline{z} + i(c\overline{b}-\overline{c}b)=0\,. \qquad (1)$$

Растојанието од точката A до правата (1), т.е. должината на висината на ΔABC повлечена од темето A, е

$$h_{BC}=\frac{|\overline{i(c-b)}a-i(c-b)\overline{a}+i(c\overline{b}-\overline{c}b)|}{2|c-b|},$$

односно

$$h_{BC}=\frac{|-(\overline{c}-\overline{b})a+(c-b)\overline{a}-c\overline{b}+\overline{c}b|}{2|c-b|}.$$

Според тоа плоштината на ΔABC е

$$P_{\Delta ABC}=\frac{\overline{BC}\cdot h_{BC}}{2}=\frac{|-(\overline{c}-\overline{b})a+(c-b)\overline{a}-c\overline{b}+\overline{c}b|}{4}\,. \qquad (2)$$

Бидејќи за произволни комплексни броеви u и v бројот $u\overline{v}-v\overline{u}$ е имагинарен број равенството (2) го добива обликот

$$P_{\Delta ABC}=\pm i\,\frac{-(\overline{c}-\overline{b})a+(c-b)\overline{a}-c\overline{b}+\overline{c}b}{4},$$

односно

$$P_{\Delta ABC}=\pm\frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1\\ b & \overline{b} & 1\\ c & \overline{c} & 1\end{vmatrix}. \qquad (3)$$

12.2. Дефиниција. Нека е даден ΔABC и нека афиксите на темињата A, B, C се a, b, c соодветно. Ќе велиме дека ΔABC е *позитивно ори-*

ентиран во однос на разгледуваниот координатен систем, ако неговата плоштина пресметана според формулата (3) се добива со множење со $+i$, а дека е *негативно ориентиран* ако плоштината пресметана според формулата (3) се добива со множење со $-i$.

12.3. Забелешка. Ако ΔABC е правоаголен, со прав агол во темето C, тогаш за афиксите на темињата A и B важи $b=-a$, па затоа од (3) за неговата плоштина добиваме $P_{\Delta ABC}=\frac{|c\overline{a}-\overline{c}a|}{2}$.

12.4. Забелешка. Афиксот p' на точката P', симетрична на точката P со афикс p, во однос на правата која минува низ точки со афикси a и b, можеме да го определиме од условот

$$\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ m & \overline{m} & 1 \end{vmatrix}=0,$$

каде $m=\frac{p+p'}{2}$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

12.5. Дефиниција. За $n-$аголникот $A_1A_2...A_n$ ќе велиме дека е *позитивно ориентиран* ако е позитивно ориентиран $\Delta A_1A_2A_3$.

За $n-$аголникот $A_1A_2...A_n$ ќе велиме дека е *негативно ориентиран* ако е негативно ориентиран $\Delta A_1A_2A_3$.

12.6. Теорема. Ако $A_1A_2...A_n$ е конвексен многуаголник чии темиња $A_1,A_2,...,A_n$ имаат афикси $a_1,a_2,...,a_n$ соодветно и S е неговата плоштина, тогаш $S=\pm\frac{1}{2}\operatorname{Im}(T\mathbf{a},\mathbf{a})$, каде $\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ и T е пресликувањето од параграф I 9.

Доказ. Плоштината на многуаголникот ќе ја пресметаме како збир на плоштините на $\Delta A_1A_2A_3, \Delta A_1A_3A_4,..., \Delta A_1A_{n-2}A_{n-1}$ и $\Delta A_1A_{n-1}A_n$. Притоа, овие триаголници се истоветно ориентирани, па затоа

$$S=\pm\frac{i\begin{vmatrix} a_1 & \overline{a_1} & 1 \\ a_2 & \overline{a_2} & 1 \\ a_3 & \overline{a_3} & 1 \end{vmatrix}}{4}\pm\frac{i\begin{vmatrix} a_1 & \overline{a_1} & 1 \\ a_3 & \overline{a_3} & 1 \\ a_4 & \overline{a_4} & 1 \end{vmatrix}}{4}\pm\frac{i\begin{vmatrix} a_1 & \overline{a_1} & 1 \\ a_4 & \overline{a_4} & 1 \\ a_5 & \overline{a_5} & 1 \end{vmatrix}}{4}\pm...\pm\frac{i\begin{vmatrix} a_1 & \overline{a_1} & 1 \\ a_{n-2} & \overline{a_{n-2}} & 1 \\ a_{n-1} & \overline{a_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}}{4}\pm\frac{i\begin{vmatrix} a_1 & \overline{a_1} & 1 \\ a_{n-1} & \overline{a_{n-1}} & 1 \\ a_n & \overline{a_n} & 1 \end{vmatrix}}{4}$$

$$=\pm\tfrac{i}{4}(a_1\overline{a_2}-a_2\overline{a_1}+a_2\overline{a_3}-a_3\overline{a_2}+a_3\overline{a_4}-a_4\overline{a_3}+...+a_n\overline{a_1}-a_1\overline{a_n})$$
$$=\pm\tfrac{i}{4}(2i\operatorname{Im}a_1\overline{a_2}+2i\operatorname{Im}a_2\overline{a_3}+2i\operatorname{Im}a_3\overline{a_4}+...+2i\operatorname{Im}a_n\overline{a_1})$$
$$=\pm\tfrac{i}{4}2i\operatorname{Im}(a_1\overline{a_2}+a_2\overline{a_3}+a_3\overline{a_4}+...+a_n\overline{a_1})$$
$$=\pm\tfrac{1}{2}\operatorname{Im}(\mathbf{a},T\mathbf{a})=\pm\tfrac{1}{2}\operatorname{Im}(T\mathbf{a},\mathbf{a})\,.\ \blacksquare$$

12.7. Забелешка. Формулата за пресметување на плоштина на конвексен многуаголник, дадена во претходната теорема, важи и кога многуаголникот не е конвексен.

12.8. Пример. Даден е конвексен петаголник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Ако последователно ги поврземе средините на неговите страни добиваме нов петаголник. Продолжувајќи ја постапката добиваме низа петаголници и нека $S_0,S_1,S_2,...$ се нивните плоштини. Докажи, дека

$$16S_{n+2}-12S_{n+1}+S_n=0\,.$$

Решение. Доволно е да докажеме дека

$$16S_2-12S_1+S_0=0 \qquad (4)$$

За таа цел да ги пресметаме S_1 и S_2. Имаме,

$$\pm 8S_1=\operatorname{Im}(T\mathbf{a}+T^2\mathbf{a},\mathbf{a}+T\mathbf{a})=2\operatorname{Im}(T\mathbf{a},\mathbf{a})+\operatorname{Im}(T^2\mathbf{a},\mathbf{a}) \text{ и}$$

$$\pm 2S_2=\operatorname{Im}(T(\tfrac{\mathbf{a}+2T\mathbf{a}+T^2\mathbf{a}}{4}),\tfrac{\mathbf{a}+2T\mathbf{a}+T^2\mathbf{a}}{4})\,,$$

т.е.

$$\pm 32S_2=5\operatorname{Im}(T\mathbf{a},\mathbf{a})+3\operatorname{Im}(T^2\mathbf{a},\mathbf{a})\,.$$

Ако го елиминираме $\operatorname{Im}(T^2\mathbf{a},\mathbf{a})$ и искористиме дека $\pm S_0=\operatorname{Im}(T\mathbf{a},\mathbf{a})$ го добиваме равенството (5). ■

12.9. Пример. Докажи, дека ако непарните темињата на еден $n-$ аголник ги транслатираме за ист вектор, тогаш плоштината на новодобиениот $n-$ аголник е еднаква на плоштината на дадениот $n-$ аголник.

Решение. Нека со $\mathbf{a}$ ја означиме подредената $n-$ка од афиксите на темињата на $n-$ аголникот. Плоштината на $n-$ аголникот е

$$S=\pm\tfrac{1}{2}\operatorname{Im}(T\mathbf{a},\mathbf{a})\,,$$

а за плоштината на новодобиениот $n-$ аголник наоѓаме

$$S' = \pm\tfrac{1}{2}\operatorname{Im}(T(\mathbf{a}+\mathbf{h}),\mathbf{a}+\mathbf{h})$$

каде што $\mathbf{h}$ е подредената $n-$торка од вид

$$\mathbf{h} = (\alpha,0,\alpha,0,...,\alpha,0) \text{ или } \mathbf{h} = (\alpha,0,\alpha,0,...,\alpha)\,,\ \alpha \in \mathbf{C}\,,$$

во зависност дали n е парен или непарен број соодветно.

Добиваме

$$\pm 2S' = \operatorname{Im}(T(\mathbf{a}+\mathbf{h}),\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \operatorname{Im}\{(T\mathbf{a},\mathbf{a}) + (T\mathbf{a},\mathbf{h}) + (T\mathbf{h},\mathbf{a}) + (T\mathbf{h},\mathbf{h})\}\,.$$

Од

$$\overline{(T\mathbf{a},\mathbf{h})} = (\mathbf{a},T\mathbf{h}) = (T\mathbf{a},T^2\mathbf{h}) = (T\mathbf{a},\mathbf{h})$$

добиваме

$$\operatorname{Im}\{(T\mathbf{a},\mathbf{h}) + (\mathbf{a},T\mathbf{h})\} = 0$$

и ако $(T\mathbf{h},\mathbf{h}) = 0$ имаме

$$\pm 2S' = \operatorname{Im}(T(\mathbf{a}+\mathbf{h}),\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \operatorname{Im}(T\mathbf{a},\mathbf{a}) = \pm 2S\,.$$

Според тоа, $S = S'$, што и требаше да се докаже. ■

12.10. Да го разгледаме ΔABC, чии темиња A, B и C имаат афикси a, b и c, соодветно. Во пример II 3.3 докажавме дека

$$o = \frac{a\overline{a}(c-b)+b\overline{b}(a-c)+c\overline{c}(b-a)}{\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}}$$

е афиксот на центарот O на кружницата опишана околу ΔABC. Јасно, радиусот на опишаната кружница околу ΔABC е $R = |a-o|$. Според тоа, за радиусот на опишаната кружница околу ΔABC иаме

$$R = |o-a| = \frac{|a-b|\cdot|b-c|\cdot|a-c|}{\left|\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}\right|}$$

и како

$$\overline{AB} = |a-b|,\ \overline{BC} = |b-c|,\ \overline{CA} = |c-a|\,,$$

од 12.1 следува формулата

$$R = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}}{4P_{\Delta ABC}}\,.$$

12.11. Теорема. Односот на плоштините на два слични триаголници е еднаков со односот на квадратите на нивните соодветни страни.

Доказ. Нека триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$, чии афикси на темињата се a,b,c и a_1,b_1,c_1 соодветно, се слични. Можни се два случаи.

а) Постои директна сличност $S(z)=dz+e$ која ΔABC го преслику-ва во $\Delta A_1B_1C_1$ и притоа имаме

$$P_{\Delta A_1B_1C_1}=\frac{\left|\begin{vmatrix} a_1 & \overline{a_1} & 1\\ b_1 & \overline{b_1} & 1\\ c_1 & \overline{c_1} & 1\end{vmatrix}\right|}{4}=\frac{\left|\begin{vmatrix} da+e & \overline{da+e} & 1\\ db+e & \overline{db+e} & 1\\ dc+e & \overline{dc+e} & 1\end{vmatrix}\right|}{4}=|d|^2=\frac{\left|\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1\\ b & \overline{b} & 1\\ c & \overline{c} & 1\end{vmatrix}\right|}{4}=|d|^2\ P_{\Delta ABC}\,.$$

б) Постои индиректна сличност $S(z)=\overline{d}z+e$ која ΔABC го пресликува во $\Delta A_1B_1C_1$. Аналогно како под а) се докажува дека

$$P_{\Delta A_1B_1C_1}=|d|^2\ P_{\Delta ABC}\,.$$

Сега тврдењето на теоремата следува од теоремите 4.6 и 7.8. ■

12.12. Последица. Односот на плоштините на два слични $n-$аголници е еднаков со односот на квадратите на нивните содветни страни.

Доказ. Непосредно следува од теоремите 12.6 и 12.11. ■

13. ВПИШАНА И ПРИПИШАНИ КРУЖНИЦИ НА ТРИАГОЛНИК

13.1. Да го разгледаме ΔABC чии темиња A,B и C имаат афикси a,b и c, соодветно. Во лема 10.4 докажавме дека секоја точка D со афикс d еднозначно е определена со реалните броеви λ,μ,ν такви, што

$$\lambda a+\mu b+\nu c=d \tag{1}$$

каде

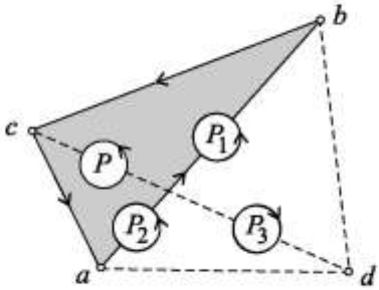
$$\lambda+\mu+\nu=1. \tag{2}$$

Со P,P_1,P_2,P_3 ги означуваме плоштините на триаголниците ABC, DBC, DAC и DBA, земени со соодветен предзнак според ориентацијата на триаголниците (цртеж долу). Од (1) и (2) и коњугираната равенка на (1) го добиваме системот:

$$\begin{cases}\lambda+\mu+\nu=1\\ \lambda a+\mu b+\nu c=d\\ \lambda\overline{a}+\mu\overline{b}+\nu\overline{c}=\overline{d}\end{cases}$$

чие решение е

$$\lambda = \frac{P_1}{P}, \quad \mu = \frac{P_2}{P}, \quad \nu = \frac{P_3}{P}. \qquad (3)$$



Со тоа ја докажавме следната лема.

Лема. Броевите λ, μ и ν кои според формулите (1) и (2) ја определуваат положбата на точката D во однос на ΔABC се пропорционални со плоштините P_1, P_2 и P_3, т.е. тие се определени со релацијата (3). ■

13.2. Нека е дадена точка I, со афикс z и нека растојанијата од точката I до страните BC, CA и AB на ΔABC се r_1, r_2 и r_3 соодветно. Од лемите 13.1 и 10.4 следува дека

$$r_1 = \frac{2\lambda P}{|b-c|}, \quad r_2 = \frac{2\mu P}{|c-a|}, \quad r_3 = \frac{2\nu P}{|a-b|}, \qquad (4)$$

при што броевите λ, μ и ν се еднозначно определени. Јасно, ако

$$\lambda = \frac{|b-c|}{|a-b|+|b-c|+|c-a|}, \quad \mu = \frac{|c-a|}{|a-b|+|b-c|+|c-a|}, \quad \nu = \frac{|a-b|}{|a-b|+|b-c|+|c-a|},$$

тогаш

$$r_1 = r_2 = r_3 = r = \frac{2P}{|a-b|+|b-c|+|c-a|}$$

и за афиксот на точката I добиваме

$$z = \frac{|b-c|\cdot a+|c-a|\cdot b+|a-b|\cdot c}{|a-b|+|b-c|+|c-a|}. \qquad (5)$$

Бидејќи броевите λ, μ и ν се позитивни, од забелешка 10.4 следува дека точката I се наоѓа во внатрешноста на ΔABC. Со тоа ја докажавме следната лема.

Лема. За секој триаголник, во неговата внатрешност постои единствена точка која е на исто растојание од неговите страни. ■

13.3. Забелешка. Јасно, кружницата со центар во I чиј афикс е даден со (5) и радиус

$$r = \frac{2P}{|a-b|+|b-c|+|c-a|}$$

ги допира страните на ΔABC, т.е. таа е впишана во ΔABC.

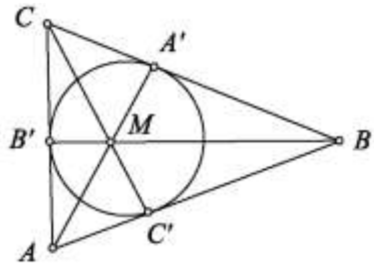
13.4. Нека A',B',C' се допирните точки на кружницата $K(I,r)$ со страните BC,CA,AB на ΔABC. Тогаш, од степенот на точките A,B,C на кружницата $K(I,r)$ имаме

$$\overline{AC'}=\overline{AB'},\ \overline{BC'}=\overline{BA'},\ \overline{CA'}=\overline{CB'}$$

па затоа

$$\frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{B'C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CA'}}{\overrightarrow{A'B}}\cdot\frac{\overrightarrow{BC'}}{\overrightarrow{C'A}}=1.$$

Сега од теоремата на Чева следува дека правите AA',BB' и CC' се сечат во една точка M (цртеж десно). Со тоа ја докажавме следнава лема.



Лема. Правите кои ги поврзуваат темињата A,B,C на ΔABC со допирните точки A',B',C' на страните со впишаната кружница $K(I,r)$ се сечат во една точка M, која ја нарекуваме *точка на Жергон* за ΔABC. ■

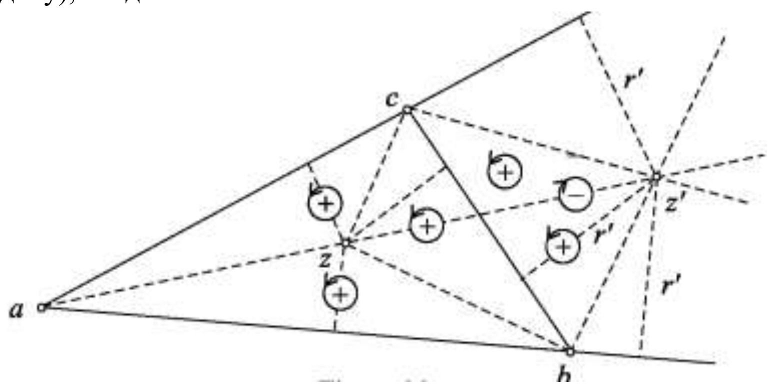
13.5. Забелешка. Аналогно се докажува дека постојат три кружници кои се припишани на ΔABC. Нивните центри имаат афикси

$$z'=\frac{-|b-c|\cdot a+|c-a|\cdot b+|a-b|\cdot c}{-|a-b|+|b-c|+|c-a|},\ z''=\frac{|b-c|\cdot a-|c-a|\cdot b+|a-b|\cdot c}{|a-b|-|b-c|+|c-a|},\ z=\frac{|b-c|\cdot a+|c-a|\cdot b-|a-b|\cdot c}{|a-b|+|b-c|-|c-a|},$$

а радиусите им се

$$r'=\frac{2P}{-|a-b|+|b-c|+|c-a|},\ r''=\frac{2P}{|a-b|-|b-c|+|c-a|},\ r'''=\frac{2P}{|a-b|+|b-c|-|c-a|},$$

(цртеж долу), соодветно.



13.6. Лема. Правите кои ги поврзуваат темињата A,B,C на ΔABC со допирните точки K,F,L на страните со припишаните кружници се сечат во една точка N која ја нарекуваме *точка на Нагел* за ΔABC.

Доказ. Најпрво ќе докажеме дека

$$\overline{BF'} = \overline{BM} = \frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}{2}$$

(цртеж десно). Имаме

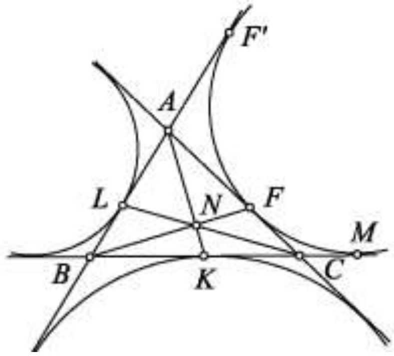
$$\overline{BF'} = \overline{BA} + \overline{AF'} = \overline{BA} + \overline{AF}$$

и

$$\overline{BM} = \overline{BC} + \overline{CM} = \overline{BC} + \overline{CF}\,.$$

Ако ги собереме последните две равенства и искористиме дека

$$\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{CF}$$



го добиваме бараното равенство. Според тоа,

$$\overline{AF} = \overline{AF'} = \overline{BF'} - \overline{BA} = \frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}{2} - \overline{BA} = \frac{-\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}{2}.$$

Аналогно се докажува

$$\overline{CK} = \overline{LA} = \frac{\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{CA}}{2},\ \overline{BL} = \overline{FC} = \frac{\overline{AB}-\overline{BC}+\overline{CA}}{2},\ \overline{KB} = \frac{-\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}{2}.$$

Сега тврдењето на лемата следува од теоремата на Чева, бидејќи

$$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CK}}{\overrightarrow{KB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BL}}{\overrightarrow{LA}} = 1.\ \blacksquare$$

13.7. Забелешка. Јасно, правите AI, BI и CI се симетралите на внатрешните агли на ΔABC и нивните равенки се

$$z-a = \frac{|c-a|\cdot(b-a)+|a-b|\cdot(c-a)}{|c-a|\cdot(\overline{b}-\overline{a})+|a-b|\cdot(\overline{c}-\overline{a})}(\overline{z}-\overline{a}),$$

$$z-b = \frac{|b-c|\cdot(a-b)+|a-b|\cdot(c-b)}{|b-c|\cdot(\overline{a}-\overline{b})+|a-b|\cdot(\overline{c}-\overline{b})}(\overline{z}-\overline{b}) \text{ и}$$

$$z-c = \frac{|b-c|\cdot(a-c)+|c-a|\cdot(b-c)}{|b-c|\cdot(\overline{a}-\overline{c})+|c-a|\cdot(\overline{b}-\overline{c})}(\overline{z}-\overline{c}),$$

соодветно. Аналогно можат да се определат и симетралите на надворешните агли на ΔABC.

13.8. Нека A_1 е пресечната точка на симетралата AI со страната BC. Нејзиниот афикс е $a_1 = \frac{b+\lambda c}{1+\lambda}$. Бидејќи точките A, I и A_1 се колинеарни, од последица II 1.3 следува

$$\frac{|c-a|\cdot(b-a)+|a-b|\cdot(c-a)}{|c-a|\cdot(\overline{b}-\overline{a})+|a-b|\cdot(\overline{c}-\overline{a})} = \frac{b-a+\lambda(c-a)}{\overline{b}-\overline{a}+\lambda(\overline{c}-\overline{a})}.$$

Последното равенство е еквивалентно на равенството

$$(\lambda-\frac{|a-b|}{|c-a|})(\frac{\overline{c-a}}{c-a}-\frac{\overline{b-a}}{b-a})=0$$

и како точките A,B и C не се колинеарни добиваме $\lambda=\frac{|a-b|}{|c-a|}$, т.е. афиксот на точката A_1 е

$$a_1=\frac{|c-a|\cdot b+|a-b|\cdot c}{|c-a|+|a-b|}.$$

Аналогно за афиксите на пресечните точки B_1 и C_1 на симетралите BI и CI со страните AC и AB добиваме

$$b_1=\frac{|b-c|\cdot a+|a-b|\cdot c}{|b-c|+|a-b|} \text{ и } c_1=\frac{|c-a|\cdot b+|b-c|\cdot a}{|c-a|+|b-c|},$$

соодветно.

Од досега изнесеното следува дека

$$\overline{BA_1}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{CA}+\overline{AB}},\ \overline{CA_1}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{\overline{CA}+\overline{AB}} \tag{6}$$

односно

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}. \tag{7}$$

Со тоа ја докажавме следната лема.

Лема. Ако A_1 е пресечната точка на симетралата AI на внатрешниот агол при темето A на ΔABC и страната BC, тогаш се исполнети равенствата (6) и (7). ■

13.9. Забелешка. Јасно, аналогните равенства на равенството (6) важат и за симетралите BI и CI на внатрешните агли при темињата B и C на ΔABC. Притоа, ако B_1 и C_1 се пресечните точки на симетралите со страните CA и AB соодветно, тогаш

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{CB_1}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \text{ и } \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}.$$

13.10. Теорема (Ојлер). Нека O и I се центрите на опишаната и впишаната кружница на ΔABC, а R и r се нивните радиуси, соодветно. Тогаш,

$$\overline{OI}^2=R^2-2Rr.$$

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека центарот на опишаната кружница се совпаѓа со координатниот почеток. Ако a,b,c

се афиксите на темињата на ΔABC, тогаш $|a|=|b|=|c|=R$ и од доказот на лема 13.2 за афиксот на центарот на впишаната кружница добиваме

$$z=\frac{|b-c|\cdot a+|c-a|\cdot b+|a-b|\cdot c}{|a-b|+|b-c|+|c-a|}.$$

Според тоа,

$$\overline{OI}^2=\frac{(|b-c|\cdot a+|c-a|\cdot b+|a-b|\cdot c)(|b-c|\cdot\overline{a}+|c-a|\cdot\overline{b}+|a-b|\cdot\overline{c})}{(|a-b|+|b-c|+|c-a|)^2}.$$

Сега тврдењето на лемата непосредно следува од операциите со комплексни броеви, формулата за радиусот на опишаната кружница дадена во 12.10 и формулата за радиусот на впишаната кружница дадена во забелешка 13.3. ■

13.11. Забелешка. Аналогно како во теорема 13.10 може да се докаже дека $\overline{OI'}^2=R^2+2Rr'$, каде I' и r' се центарот и радиусот на припишана кружница на ΔABC, а O и R се центарот и радиусот на впишаната кружница во ΔABC.

13.12. Забелешка. Нека единичниот круг е впишан во ΔABC чии темиња A,B,C имаат афикси a,b,c, соодветно и нека ги допира страните BC,CA,AB во точките P,Q,R со афикси p,q,r, соодветно. Тогаш, од според забелешка II 3.12 г) имаме

$$a=\frac{2qr}{q+r},\ b=\frac{2rp}{r+p}\ \text{ и }\ c=\frac{2pq}{p+q}.$$

Понатаму, од пример II 3.3 следува дека центарот на опишаната кружница околу ΔABC има афикс

$$o=\frac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(r+p)},$$

а од забелешка 5.4 следува дека ортоцентарот на ΔABC има афикс

$$h=\frac{2(p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2+pqr(p+q+r))}{(p+q)(q+r)(r+p)}.$$

13.13. На крајот од овој дел да забележиме дека може да се докаже следнава теорема.

Теорема. Нека ΔABC чии темиња A,B и C имаат афикси $a,\ b$ и c, соодветно, е впишан во единичната кружница. Тогаш постојат комплексни броеви u,v,w такви да $a=u^2,\ b=v^2,\ c=w^2$, а средините на кружните лаци AB, BC, CA кои не ги содржат точките C, A, B се точки со афикси $-uv, -vw, -wu$, соодветно. Притоа, афиксот на центарот L на впишаната кружница во ΔABC е $l = -(uv + vw + wu)$. ■

13.14. Пример. Нека L е центарот на впишаната кружница во ΔABC, а правите AL, BL, CL ја сечат опишаната кружница на ΔABC во точките A_1, B_1, C_1, соодветно. Ако R е радиусот на опишаната, а r радиусот на впишаната кружница на ΔABC докажи дека:

а) $\frac{\overline{LA_1} \cdot \overline{LC_1}}{\overline{LB}} = R$, б) $\frac{\overline{LA} \cdot \overline{LB}}{\overline{LC_1}} = 2r$, в) $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{2r}{R}$.

Решение. Нека опишаната кружница околу ΔABC е единична и нека u, v, w се комплексните броеви од теорема 13.13. Според истата теорема имаме $l = -(uv + vw + wu)$ и $a = u^2$, $b = v^2$, $c = w^2$, а средините на кружните лаци AB, BC, CA кои не ги содржат точките C, A, B се точки со афикси $-uv, -vw, -wu$, соодветно. Понатаму, од

$$\frac{l-(-vw)}{\overline{l}-\overline{(-vw)}} = \frac{-uv-uw}{-\frac{1}{uv}-\frac{1}{uw}} = vwu^2 \text{ и } \frac{a-(-vw)}{\overline{a}-\overline{(-vw)}} = \frac{u^2+vw}{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{vw}} = u^2vw$$

следува дека точките со афикси a, l и $-vw$ се колинеарни, што значи дека точката A_1 има афикс $a_1 = -vw$. Слично, афиските на точките B_1 и C_1 се $b_1 = -uw$ и $c_1 = -uv$, соодветно.

а) Тврдењето следува од равенството

$$\frac{\overline{LA_1} \cdot \overline{LC_1}}{\overline{LB}} = \frac{|l-a_1| \cdot |l-c_1|}{|l-b|} = \frac{|u(v+w)| \cdot |w(u+v)|}{|uv+uw+vw+v^2|} = \frac{|v+w| \cdot |u+v|}{|(u+v)(w+v)|} = 1 = R.$$

б) Ако z е афиксот на допирната точка на впишаната кружница и страната BC, тогаш z е афиксот на подножната точка на нормалата спуштена од точката L кон страната BC, па затоа нејзиниот афикс е

$$z = \frac{1}{2}(b + c + l - bc\overline{l})$$

и затоа

$$r = |l - z| = \frac{1}{2} \left| \frac{(u+v)(v+w)(w+u)}{u} \right| = \frac{1}{2} |(u+v)(v+w)(w+u)|.$$

Според тоа,

$$\frac{\overline{LA} \cdot \overline{LB}}{\overline{LC_1}} = \frac{|(u+v)(u+w)| \cdot |(u+v)(v+w)|}{|w(u+v)|}$$

$$= |(u+v)(v+w)(w+u)| = 2r.$$

в) За плоштините на триаголниците имаме

$$P_{\Delta ABC}=\pm\frac{i}{4}\begin{vmatrix} u^2 & 1/u^2 & 1\\ v^2 & 1/v^2 & 1\\ w^2 & 1/w^2 & 1\end{vmatrix}$$

и

$$P_{\Delta A_1B_1C_1}=\pm\frac{i}{4uvw}\begin{vmatrix} vw & u & 1\\ uw & v & 1\\ uv & w & 1\end{vmatrix},$$

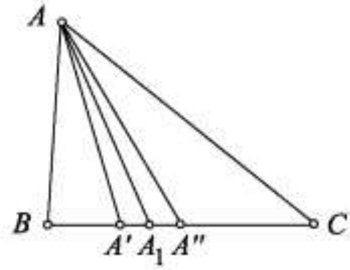
па затоа

$$\begin{aligned}|\tfrac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}}| &= |\tfrac{u^4w^2+w^4v^2+v^4u^2-v^4w^2-u^4v^2-w^4u^2}{v^2w+vu^2+uw^2-uv^2-vw^2-wu^2}|\\ &=|\tfrac{(v^2-u^2)(v^2u^2+w^4-w^2u^2-w^2v^2)}{(u-v)(uv+w^2-wu-wv)}|\\ &=|\tfrac{(u-v)(u+v)[(uv+w^2)^2-(wu+wv)^2]}{(u-v)(uv+w^2-wu-wv)}|\\ &=|\tfrac{(u-v)(u+v)(uv+w^2-wu-wv)(uv+w^2+wu+wv)}{(u-v)(uv+w^2-wu-wv)}|\\ &=|(u+v)(uv+w^2+wu+wv)|\\ &=|(u+v)(v+w)(w+u)|=\tfrac{2r}{R},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

14. ТЕОРЕМА НА СТЈУАРТ

14.1. Нека a,b,c се афиксите на темињата A,B,C на ΔABC и нека точката D лежи на страната BC (црт. десно). Тогаш, афиксот на точката D е $d=\frac{b+\lambda c}{1+\lambda}$, за некој $\lambda\in(0,1)$. Според тоа,



$$\overline{AB}=|b-a|,\ \overline{AC}=|c-a|,\ \overline{BC}=|b-c|,$$

$$\overline{BD}=\tfrac{\lambda|b-c|}{1+\lambda},\ \overline{CD}=\tfrac{|b-c|}{1+\lambda},\ \overline{AD}=\tfrac{|b-a+\lambda(c-a)|}{1+\lambda}$$

па затоа

$$\overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} + \overline{AB}^2 \cdot \overline{CD} - \overline{BC} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{BD} = \frac{|b-c|}{1+\lambda}(\lambda |c-a|^2 + |b-a|^2 - \frac{\lambda}{1+\lambda}|b-c|^2)$$

$$= |b-c| \frac{\lambda^2(c-a)(\bar{c}-\bar{a}) + (b-a)(\bar{b}-\bar{a}) + \lambda(c-a)(\bar{c}-\bar{a}) + \lambda(b-a)(\bar{b}-\bar{a}) - \lambda(b-c)(\bar{b}-\bar{c})}{(1+\lambda)^2}$$

$$= |b-c| \frac{\lambda^2(c-a)(\bar{c}-\bar{a}) + (b-a)(\bar{b}-\bar{a}) + \lambda(c-a)(\bar{b}-\bar{a}) + \lambda(b-a)(\bar{c}-\bar{a})}{(1+\lambda)^2}$$

$$= |b-c| \frac{|b-a+\lambda(c-a)|^2}{(1+\lambda)^2} = \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC}.$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема (Стјуарт). Ако на страната BC на ΔABC е избрана точка D, која лежи меѓу точките B и C, тогаш точно е равенството

$$\overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} + \overline{AB}^2 \cdot \overline{CD} - \overline{BC} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{BD} = \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC}. \ \blacksquare \qquad (1)$$

14.2. Пример. Нека m_A, m_B, m_C се должините на тежишните линии на ΔABC повлечени од темињата A, B, C соодветно. Докажете дека

$$m_A^2 = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}{2} - \frac{\overline{BC}^2}{4}, \quad m_B^2 = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{BA}^2}{2} - \frac{\overline{AC}^2}{4}, \quad m_C^2 = \frac{\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2}{2} - \frac{\overline{AB}^2}{4}. \qquad (2)$$

Решение. Ќе го докажеме само првото равенство во (2). Останатите две равенства се докажуваат аналогно.

Нека A' е средината на страната BC. Бидејќи

$$\overline{CA'} = \overline{BA'} = \frac{\overline{BC}}{2} \text{ и } m_A = \overline{AA'},$$

од теоремата на Стјуарт го добиваме равенството

$$m_A^2 \cdot \overline{BC} = \overline{AC}^2 \cdot \frac{\overline{BC}}{2} + \overline{AB}^2 \cdot \frac{\overline{BC}}{2} - \overline{BC} \cdot \frac{\overline{BC}}{2} \cdot \frac{\overline{BC}}{2}$$

и ако скратиме со $\overline{BC}$ го добиваме равенството

$$m_A^2 = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}{2} - \frac{\overline{BC}^2}{4}. \ \blacksquare$$

14.3. Пример. Должините на тежишните линии на ΔABC се $m_A = 9cm$, $m_B = 12cm$ и $m_C = 15cm$. Пресметајте ги должините на неговите страни.

Решение. Од равенствата (2) со помош на должните на тежишните линии можеме да ги изразиме длжините на страните на ΔABC. Имаме:

$$\overline{AB}^2 = \frac{8(m_A^2 + m_b^2) - 4m_C^2}{9}, \quad \overline{BC}^2 = \frac{8(m_B^2 + m_C^2) - 4m_A^2}{9}, \quad \overline{CA}^2 = \frac{8(m_C^2 + m_A^2) - 4m_B^2}{9}. \qquad (3)$$

Сега од равенството (3) добиваме

$$\overline{AB}=10cm, \overline{BC}=2\sqrt{73}cm \text{ и } CA=4\sqrt{13}cm\ .\ \blacksquare$$

14.4. Пример. Изразете ги должините на симетралите на внатрешните агли на ΔABC со помош на должините на неговите страни.

Решение. Нека D е пресечната точка на симетралата l_A на аголот при темето A со страната BC. Во лема 13.8 докажавме дека

$$\overline{BD}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{CA}+\overline{AB}} \text{ и } \overline{CD}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{\overline{CA}+\overline{AB}}\ .$$

Сега од теоремата на Стјуарт следува

$$l_A^2=\overline{AB}\cdot\overline{AC}(1-\frac{\overline{BC}^2}{(\overline{AB}+\overline{AC})^2}\ .$$

Аналогно се докажува дека

$$l_B^2=\overline{AB}\cdot\overline{BC}(1-\frac{\overline{AC}^2}{(\overline{AB}+\overline{BC})^2} \text{ и } l_C^2=\overline{AC}\cdot\overline{BC}(1-\frac{\overline{AB}^2}{(\overline{AC}+\overline{BC})^2}\ .\ \blacksquare$$

14.5. Дефиниција. Правата симетрична на тежишната линија во однос на симетралата на аголот повлечена од исто теме ја нарекуваме *симедијана*.

14.6. Нека AA_1, AA' и AA'' се симетралата на аголот, тежишната линија и симедијаната во ΔABC, повлечени од темето A. Равенките на тежишната линија и симетралата на аголот се

$$z-a=\frac{b+c-2a}{\overline{b}+\overline{c}-2\overline{a}}(\overline{z}-\overline{a}) \text{ и } z-a=\frac{|c-a|(b-a)+|a-b|(c-a)}{|c-a|(\overline{b}-\overline{a})+|a-b|(\overline{c}-\overline{a})}(\overline{z}-\overline{a})\ ,$$

соодветно.

Индиректната сличност

$$S(z)=\frac{|c-a|(b-a)+|a-b|(c-a)}{|c-a|(\overline{b}-\overline{a})+|a-b|(\overline{c}-\overline{a})}(\overline{z}-\overline{a})+a \tag{4}$$

е осна симетрија и оската на симетрија е симетралата на аголот при темето A. Со непосредни пресметувања наоѓаме дека правата чија равенка е

$$z-a=\frac{|c-a|^2(b-a)+|a-b|^2(c-a)}{|c-a|^2(\overline{b}-\overline{a})+|a-b|^2(\overline{c}-\overline{a})}(\overline{z}-\overline{a}) \tag{5}$$

е слика на тежишната линија при осната симетрија (4). Според тоа, (5) е равенката на симедијаната повлечена од темето A. Пресечната точка A'' на симедијаната и страната BC има афикс $a''=\frac{b+\lambda c}{1+\lambda}$. Но, точката A'' лежи на правата (5), па затоа е исполнето равенството

$$\frac{|c-a|^2(b-a)+|a-b|^2(c-a)}{|c-a|^2(\overline{b}-\overline{a})+|a-b|^2(\overline{c}-\overline{a})}=\frac{b-a+\lambda(c-a)}{\overline{b}-\overline{a}+\lambda(\overline{c}-\overline{a})}$$

кое е еквивалентно на равенството

$$(\lambda-\frac{|a-b|^2}{|c-a|^2})(\frac{c-a}{\overline{c}-\overline{a}}-\frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}})=0$$

и како точките A, B и C не се колинеарни добиваме $\lambda=\frac{|a-b|^2}{|c-a|^2}$, т.е. афиксот на точката A'' е

$$a''=\frac{|c-a|^2 b+|a-b|^2 c}{|c-a|^2+|a-b|^2}.$$

Аналогно за пресечните точки B'' и C'' на останатите симедијани со страните AC и AB добиваме

$$b''=\frac{|b-c|^2 a+|a-b|^2 c}{|b-c|^2+|a-b|^2} \text{ и } c''=\frac{|c-a|^2 b+|b-c|^2 a}{|c-a|^2+|b-c|^2},$$

соодветно.

Од досега изнесеното следува

$$\overline{BA''}=\frac{\overline{AB}^2\cdot\overline{BC}}{\overline{AB}^2+\overline{CA}^2} \text{ и } \overline{CA''}=\frac{\overline{AC}^2\cdot\overline{BC}}{\overline{AB}^2+\overline{CA}^2} \tag{6}$$

па затоа

$$\frac{\overline{BA''}}{\overline{CA''}}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{CA}^2}. \tag{7}$$

Со тоа ја докажавме следната лема

Лема. Ако A'' е пресечната точка на симедијаната соодветна на темето A на ΔABC со страната BC, тогаш се исполнети равенствата (6) и (7). ■

14.7. Последица. Симедијаните AA'', BB'' и CC'' на ΔABC се сечат во една точка.

Доказ. Непосредно следува од лема 14.6 и теоремата на Чева. ■

14.8. Пример. Изразете ги должините на симедијаните на ΔABC со помош на должините на страните.

Решение. Ако ги искористиме равенствата (6), тогаш од теоремата на Стјуарт за должината на симедијаната AA'' добиваме

$$\overline{A''A}^2=\overline{AC}^2\cdot\overline{AB}^2(2-\frac{\overline{BC}^2}{(\overline{AC}^2+\overline{AB}^2)^2}).$$

Аналогно за должините на симедијаните BB'' и CC'' имаме

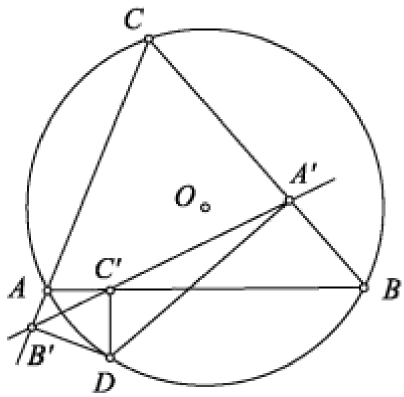
$$\overline{B''B}^2 = \overline{BC}^2 \cdot \overline{AB}^2 \left(2 - \frac{\overline{AC}^2}{(\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2)^2}\right)$$

и

$$\overline{C''C}^2 = \overline{AC}^2 \cdot \overline{BC}^2 \left(2 - \frac{\overline{AB}^2}{(\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2)^2}\right). \blacksquare$$

15. СИМСОНОВА ПРАВА

15.1. Теорема (Симсон). Нека D е произволна точка на кружницата опишана околу ΔABC. Тогаш подножните точки на нормалите спуштени од точката D на страните на ΔABC се колинеарни.



Доказ. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека ΔABC е впишан во единичната кружница. Нека a', b', c' се афиксите на подножните точки A', B', C' на нормалите спуштени од точката D на страните BC, CA и AB, соодветно (види цртеж). Ако искористиме дека

$$\overline{a} = \frac{1}{a}, \overline{b} = \frac{1}{b}, \overline{c} = \frac{1}{c} \text{ и } \overline{d} = \frac{1}{d},$$

тогаш од пример 1.9 имаме

$$a' = \frac{1}{2}(b + c + d - \frac{bc}{d}), \ b' = \frac{1}{2}(c + a + d - \frac{ac}{d}) \text{ и } c' = \frac{1}{2}(a + b + d - \frac{ab}{d}).$$

Според тоа,

$$\frac{\overline{a'} - \overline{c'}}{\overline{b'} - \overline{c'}} = \frac{\overline{b+c+d-\frac{bc}{d}-(a+b+d-\frac{ab}{d})}}{\overline{c+a+d-\frac{ac}{d}-(a+b+d-\frac{ab}{d})}} = \frac{\overline{(c-a)(d-b)}}{\overline{(c-b)(d-a)}} = \frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)}$$

$$= \frac{(c-a)(b-d)}{(c-b)(d-a)} = \frac{b+c+d-\frac{bc}{d}-(a+b+d-\frac{ab}{d})}{c+a+d-\frac{ac}{d}-(a+b+d-\frac{ab}{d})} = \frac{a'-c'}{b'-c'},$$

па од последица 1.4 следува дека точките A', B', C' се колинеарни. ■

15.2. Дефиниција. Правата на која лежат точките A', B', C' од теорема 15.1 ја нарекуваме *Симсонова права* за точката D во однос на ΔABC.

15.3. Ќе ја изведеме равенката на Симпсоновата права за точката D во однос на ΔABC. Ако Z е произволна точка од Симпсоновата права, тогаш точките Z, A', C' се колинеарни, па затоа $\frac{z-c'}{a'-c'} = \frac{\overline{z}-\overline{c'}}{\overline{a'}-\overline{c'}}$, од каде за равенката на Симпсоновата права добиваме

$$z - \overline{z}\frac{a'-c'}{\overline{a'}-\overline{c'}} + \frac{a'\overline{c'}-c'\overline{a'}}{\overline{a'}-\overline{c'}} = 0.$$

Понатаму, од доказот на теорема 15.1 имаме

$$a'-c' = \tfrac{1}{2}(c-a)(1-\tfrac{b}{d}),\ \overline{a'}-\overline{c'} = \tfrac{1}{2ac}(a-c)(1-\tfrac{d}{b}),$$

па затоа $\frac{a'-c'}{\overline{a'}-\overline{c'}} = \frac{acb}{d}$. За да го определиме слободниот член $m = \frac{a'\overline{c'}-c'\overline{a'}}{\overline{a'}-\overline{c'}}$ ќе искористиме дека точката B' припаѓа на Симпсоновата права, т.е. дека

$$\tfrac{1}{2}(c+a+d-\tfrac{ac}{d}) - \tfrac{1}{2}(\overline{c}+\overline{a}+\overline{d}-\overline{\tfrac{ac}{d}})\tfrac{acb}{d} + m = 0$$

од каде наоѓаме

$$m = \tfrac{abc}{2d}(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}) - \tfrac{1}{2}(a+b+c+d)$$

па затоа равенката на Симпсоновата права за точката D во однос на ΔABC е

$$z - \overline{z}\tfrac{acb}{d} + \tfrac{abc}{2d}(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}) - \tfrac{1}{2}(a+b+c+d) = 0. \qquad (1)$$

15.4. Пример. Нека точките A, B, C, D лежат на една кружница. Докажи дека пресекот X на Симсоновата права за точката A во однос на ΔBCD и Симсоновата права за точката B во однос на ΔACD лежи на правата која минува низ точката C и ортоцентарот H на ΔABD.

Решение. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен, па можеме да земеме дека тој е впишан во единичната кружница. Нека a', a'', a''' се афиксите на подножните точки A', A'', A''' на нормалите спуштени од точката A на правите BC, CD, DB, соодветно, а b', b'', b''' се афиксите на подножните точки B', B'', B''' на нормалите спуштени од точката B на правите AC, CD, DA, соодветно. Имаме

$$a' = \tfrac{1}{2}(a+b+c-\tfrac{bc}{a}),\ a'' = \tfrac{1}{2}(a+b+d-\tfrac{bd}{a}),\ a''' = \tfrac{1}{2}(a+c+d-\tfrac{cd}{a}),$$

$$b' = \tfrac{1}{2}(b+a+c-\tfrac{ac}{b}),\ b'' = \tfrac{1}{2}(b+c+d-\tfrac{cd}{b}),\ a''' = \tfrac{1}{2}(b+d+a-\tfrac{ad}{b}).$$

Равенката на Симсоновата права за точката A е: $z-a'=\frac{a''-a'}{\overline{a''}-\overline{a'}}(\overline{z}-\overline{a'})$, т.е.

$$z-a'=\frac{bcd}{a}(\overline{z}-\overline{a'}), \qquad (2)$$

а равенката на Симсоновата права за точката B е: $z-b'=\frac{b''-b'}{\overline{b''}-\overline{b'}}(\overline{z}-\overline{b'})$, т.е.

$$z-b'=\frac{acd}{b}(\overline{z}-\overline{b'}). \qquad (3)$$

Решавајќи го системот составен од равенките (2) и (3) го добиваме афиксот x на пресечната точка X. Имаме

$$x=\frac{1}{2}(a+b+c+d).$$

Понатаму, афиксот на ортоцентарот H на ΔABD е $h=a+c+d$ и како

$$\frac{h-c}{\overline{h}-\overline{c}}=\frac{a+b+d-c}{\overline{a}+\overline{b}+\overline{d}-\overline{c}}=\frac{a+b+c+d-2c}{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}-2\overline{c}}=\frac{\frac{1}{2}(a+b+c+d)-c}{\frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d})-\overline{c}}=\frac{x-c}{\overline{x}-\overline{c}},$$

од последица II 1.3 следува дека точките C,H и X се колинеарни. ■

15.5. Пример. Со $l(N,PQR)$ да ја означиме Симсоновата права за точката N во однос на ΔPQR. Нека точките A,B,C,D лежат на иста кружница. Докажи дека правите $l(A,BCD), l(B,ACD), l(C,ABD), l(D,ABC)$ се сечат во една точка.

Решение. Ќе земеме дека точките A,B,C,D лежат на единичната кружница. Според пример 15.4 правите $l(A,BCD)$ и $l(B,ACD)$ се сечат во точката X со афикс $x=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$. Изразот на десната страна во последното равенство е симетричен во однос на афиксите a,b,c,d на точките A,B,C,D, па затоа точката X е пресечна точка на Симсоновите прави $l(A,BCD), l(B,ACD), l(C,ABD), l(D,ABC)$. ■

15.6. Пример. Нека $l(P,ABC)$ и $l(Q,ABC)$ се Симпсоновите прави за точките P и Q во однос на ΔABC и O е центарот на опишаната кружница околу ΔABC. Докажи дека $\angle(l(P,ABC),l(Q,ABC))=\frac{1}{2}\angle POQ$.

Решение. Ќе земеме дека ΔABC е впишан во единечната кружница. Од 24.3 следува дека равенките на правите $l(P,ABC)$ и $l(Q,ABC)$ се

$$z-\overline{z}\frac{acb}{p}+\frac{abc}{2p}(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{p})-\frac{1}{2}(a+b+c+p)=0 \text{ и}$$

$$z-\overline{z}\frac{acb}{q}+\frac{abc}{2q}(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{q})-\frac{1}{2}(a+b+c+q)=0,$$

соодветно. Комплексните аглови коефициенти на правите $l(P, ABC)$ и $l(Q, ABC)$ се $\eta = \frac{acb}{p}$ и $\eta' = \frac{acb}{q}$, соодветно. Според теорема II 1.7 ориентираниот агол φ меѓу правите $l(P, ABC)$ и $l(Q, ABC)$ е даден со формулата $e^{2i\varphi} = \frac{\eta}{\eta'} = \frac{q}{p}$, што според I 8.7 значи $\angle(l(P, ABC), l(Q, ABC)) = \frac{1}{2}\angle POQ$. ■

16. ТЕОРЕМА НА ПТОЛОМЕЈ

16.1. Лема. Ако z_j, $j = 1,2,3,4$ се афикси на последователни темиња на тетивен четириаголник, тогаш

$$\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)} > 0 \tag{1}$$

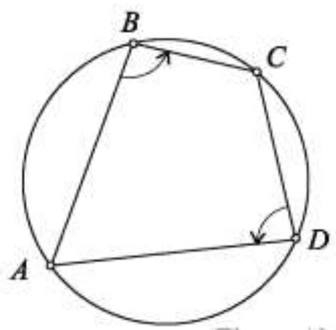
Доказ. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека центарот на опишаната кружница се совпаѓа со координатниот почеток, а радиусот на кружницата е r. Тогаш, $z_j = re^{i\varphi_j}$, $j = 1,2,3,4$. Исто така, можеме да претпоставиме дека последователноста на темињата е еквивалентна со условот

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4 < \varphi_1 + 2\pi. \tag{2}$$

При направените претпоставки важи:

$$\begin{aligned}
\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)} &= \frac{(e^{i\varphi_1}-e^{i\varphi_2})(e^{i\varphi_3}-e^{i\varphi_4})}{(e^{i\varphi_1}-e^{i\varphi_4})(e^{i\varphi_2}-e^{i\varphi_3})} \\
&= \frac{(e^{i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}-e^{-i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}})(e^{i\frac{\varphi_3-\varphi_4}{2}}-e^{-i\frac{\varphi_3-\varphi_4}{2}})}{(e^{i\frac{\varphi_1-\varphi_4}{2}}-e^{-i\frac{\varphi_1-\varphi_4}{2}})(e^{i\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}}-e^{-i\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}})} \\
&= \frac{\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_3-\varphi_4}{2}}{\sin\frac{\varphi_1-\varphi_4}{2}\sin\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}} > 0
\end{aligned}$$

бидејќи според (2), секоја вредност под знакот на синусот е од интервалот $(-\pi, 0)$. Со тоа е докажано неравенството (1). ■



16.2. Теорема (Птоломеј). Производот на должините на дијагоналите на тетивен четириаголник е еднаков на збирот од производите на должините на спротивните страни.

Доказ. Нека $z_j,\ j=1,2,3,4$ се афикси на темиња A,B,C,D на тетивниот четириаголник $ABCD$. Тврдењето на теоремата е еквивалентно на равенството $\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}$, т.е. на равенството

$$|z_1-z_3|\cdot|z_2-z_4|=|z_1-z_2|\cdot|z_3-z_4|+|z_1-z_4|\cdot|z_2-z_3|. \tag{3}$$

Според лема 26.1 имаме

$$\begin{aligned}|(z_1-z_2)(z_3-z_4)|+|(z_1-z_4)(z_2-z_3)|&=|(z_1-z_2)(z_3-z_4)+(z_1-z_4)(z_2-z_3)|\\&=|-z_1z_4-z_2z_3+z_1z_2+z_3z_4|\\&=|(z_1-z_3)(z_2-z_4)|,\end{aligned}$$

што значи дека е исполнето равенството (3). ■

16.3. Теорема. Ако за комплексните броеви p,q,r,s важи $\frac{(p-s)(r-q)}{(p-q)(r-s)}\in\mathbf{R}$, тогаш тие се афикси на последователни темиња P,Q,R,S на тетивен четириаголник (*коциклични*) или се колинеарни.

Доказ. Во проширената комплексна рамнина точките Q,R,S определуваат кружница (K). Трансформацијата на Мобиус определена со $f(q)=\infty,\ \ f(r)=1,\ f(s)=0$ ја пресликува кружницата (K) на реалната оска, па според теорема II 10.8 таа е зададена со $f(z)=\frac{(z-s)(r-q)}{(z-q)(r-s)}$. Точката P припаѓа на кружницата (K) ако и само ако нејзината слика припажа на реалната оска, т.е. ако и само ако $f(p)=\frac{(p-s)(r-q)}{(p-q)(r-s)}\in\mathbf{R}$. ■

16.4. Пример. Во кружница е впишан рамностран триаголник ABC. Произволна точка M припаѓа на лакот BC на кој не му припаѓа точката M. Докажи дека $\overline{BM}+\overline{CM}=\overline{AM}$.

Решение. Од теоремата на Птоломеј, применета на тетивниот четириаголник $ABMC$ добиваме

$$\overline{BM}\cdot\overline{CA}+\overline{CM}\cdot\overline{AB}=\overline{BC}\cdot\overline{AM}. \tag{4}$$

Но, триаголник ABC е рамностран, што значи $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$, па од (4) добиваме

$$\overline{BM}\cdot\overline{AB}+\overline{CM}\cdot\overline{AB}=\overline{AB}\cdot\overline{AM}$$

и ако последното равенство го поделиме со $\overline{AB}$ го добиваме бараното равенство. ■

16.5. Пример. Дадени се кружниците k_1, k_2, k_3, k_4 такви да $k_1 \cap k_2 = \{A_1, B_1\}$, $k_2 \cap k_3 = \{A_2, B_2\}$, $k_3 \cap k_4 = \{A_3, B_3\}$ и $k_4 \cap k_1 = \{A_4, B_4\}$. Ако точките A_1, A_2, A_3, A_4 се концициклични (лежат на иста кружница) или колинеарни, тогаш и точките B_1, B_2, B_3, B_4 се концициклични или колинеарни. Докажи!

Решение. Точките

$$A_1, B_1, A_2, B_2;\ A_2, B_2, A_3, B_3;\ A_3, B_3, A_4, B_4 \text{ и } A_4, B_4, A_1, B_1$$

се концициклични, па од лема 25.1 следува дека броевите

$$\frac{(a_1-a_2)(b_2-b_1)}{(a_1-b_1)(b_2-a_2)},\ \frac{(a_2-a_3)(b_3-b_2)}{(a_2-b_2)(b_3-a_3)},\ \frac{(a_3-a_4)(b_4-b_3)}{(a_3-b_3)(b_4-a_4)},\ \frac{(a_4-a_1)(b_1-b_4)}{(a_4-b_4)(b_1-a_1)}$$

се реални. Производот на првиот и третиот број, поделен со производот на вториот и четвртиот број во (1) е еднаков на

$$\frac{(a_1-a_2)(a_3-a_4)}{(a_2-a_3)(a_4-a_1)}\frac{(b_2-b_1)(b_4-b_3)}{(b_3-b_2)(b_1-b_4)}$$

и тој е реален број. Според условот на задачата точките A_1, A_2, A_3, A_4 се концициклични, па од лема 16.1 следува дека $\frac{(a_1-a_2)(a_3-a_4)}{(a_2-a_3)(a_4-a_1)}$ е реален број. Но, тоа значи дека бројот $\frac{(b_2-b_1)(b_4-b_3)}{(b_3-b_2)(b_1-b_4)}$ е реален, па од теорема 16.3 следува дека точките B_1, B_2, B_3, B_4 се концициклични или колинеарни. ■

16.6. Лема (неравенство на Птоломеј). За произволни точки A, B, C, D во рамнината точно е неравенството

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \geq \overline{AC} \cdot \overline{BD}. \qquad (5)$$

Доказ. Нека a, b, c, d се афиксите на темињата A, B, C, D соодветно. Тогаш

$$(a-b)(c-d) + (b-c)(a-d) = (a-c)(b-d)$$

и ако го искористиме неравенството на триаголник го добиваме неравенството

$$|(a-b)(c-d)| + |(b-c)(a-d)| \geq |(a-c)(b-d)|,$$

кое всушност е неравенството (5) запишано со помош на афиксите на темињата на четириаголникот $ABCD$. ■

17. СКАЛАРЕН ПРОИЗВОД

17.1. Нека се дадени комплексните броеви $a=|a|e^{i\alpha}$ и $b=|b|e^{i\beta}$. Тогаш

$$\overline{a}b=|a|e^{-i\alpha}|b|e^{i\beta}=|a|\cdot|b|e^{i(\beta-\alpha)}=|a|\cdot|b|(\cos(\beta-\alpha)+i\sin(\beta-\alpha)),$$

па затоа

$$|a|\cdot|b|\cos(\beta-\alpha)=\mathrm{Re}\,\overline{a}b \text{ и } |a|\cdot|b|\sin(\beta-\alpha)=\mathrm{Im}\,\overline{a}b.$$

Понатаму, комплексните броеви a и b соодветствуваат на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ со почетни точки во координатниот почеток и крајни точки во точките A и B чии афикси се a и b. Притоа, скаларниот производ меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се дефинира со $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$ и како $\angle(\vec{a},\vec{b})=\pm(\beta-\alpha)$ добиваме дека за скаларниот производ меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (комплексните броеви a и b) важи $\vec{a}\vec{b}=\mathrm{Re}\,\overline{a}b$ ($a\bullet b=\mathrm{Re}\,\overline{a}b$). Доказите на следниве својства на скаларниот производ се елементарни, па затоа истите ги препуштаме на читателот за вежба.

Теорема. Точни се следниве тврдења:

1) $a\bullet a=|a|^2$, за секој $a\in\mathbf{C}$,
2) $a\bullet b=b\bullet a$, за секои $a,b\in\mathbf{C}$,
3) $a\bullet(b+c)=a\bullet b+a\bullet c$, за секои $a,b,c\in\mathbf{C}$,
4) $(ka)\bullet b=k(a\bullet b)=a\bullet(kb)$, за секои $a,b\in\mathbf{C}$ и за секој $k\in\mathbf{R}$,
5) $(ac)\bullet(bc)=|c|^2\,a\bullet b$, за секои $a,b,c\in\mathbf{C}$, и
6) $a\bullet b=0$ ако и само ако $OA\perp OB$. ■

17.2. Лема. Нека A,B,C,D се четири различни точки, со афикси a,b,c,d, соодветно. Тогаш $AB\perp CD$ ако и само ако $(b-a)\bullet(d-c)=0$.

Доказ. Комплексните броеви $b-a$ и $d-c$ соодветствуваат на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Сега тврдењето непосредно следува од тврдењето 6) во претходната теорема. ■

17.3. Пример. Нека O е центар на опишаната кружница на ΔABC, C' е средина на страната AB и T е неговото тежиште. Докажи дека $OT\perp CC'$ ако и само ако $\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AB}^2$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека триаголникот е впишан во единичната кружница. Тогаш $OT \perp CC'$ ако и само ако

$$t\bullet(c'-c)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\tfrac{a+b+c}{3}\bullet(\tfrac{a+b}{2}-c)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$(a+b+c)\bullet(a+b-2c)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$|a|^2+|b|^2-2|c|^2+2a\bullet b-a\bullet c-b\bullet c=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$2a\bullet b-a\bullet c-b\bullet c=0\,.$$

Освен тоа,

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}^2 &=|c-b|^2+|a-c|^2-2|a-b|^2\\ &=(c-b)\bullet(c-b)+(a-c)\bullet(a-c)-2(a-b)\bullet(a-b)\\ &=2|c|^2-|a|^2-|b|^2+4a\bullet b-2a\bullet c-2b\bullet c\\ &=2(2a\bullet b-a\bullet c-b\bullet c).\end{aligned}$$

Значи, $OT \perp CC'$ ако и само ако $2a\bullet b-a\bullet c-b\bullet c=0$ ако и само ако

$$\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AB}^2\,.\ \blacksquare$$

17.4. Теорема (Аполониј). Нека M е точка на страната BC на триаголникот ABC таква да $\overline{BM}:\overline{MC}=m:n$. Тогаш

$$n\overline{AB}^2+m\overline{AC}^2=m\overline{CM}^2+n\overline{BM}^2+(m+n)\overline{AM}^2\,.$$

Доказ. Нека со a,b,c,z ги означиме афикcите на точките $A,B,\ C,M$, соодветно. Тогаш $z=\frac{nb+mc}{m+n}$, па затоа

$$\overline{AB}^2=|b-a|^2=(b-a)\bullet(b-a)=|a|^2-2a\bullet b+|b|^2,$$

$$\overline{AC}^2=|c-a|^2=(c-a)\bullet(c-a)=|a|^2-2a\bullet c+|c|^2,$$

$$\overline{CM}^2=\frac{n^2}{(m+n)^2}|b-c|^2=\frac{n^2}{(m+n)^2}(|b|^2-2b\bullet c+|c|^2),$$

$$\overline{BM}^2=\frac{m^2}{(m+n)^2}|b-c|^2=\frac{m^2}{(m+n)^2}(|b|^2-2b\bullet c+|c|^2),$$

$$\overline{AM}^2=|a|^2+\frac{n^2}{(m+n)^2}|b|^2+\frac{m^2}{(m+n)^2}|c|^2+\frac{2mn}{(m+n)^2}b\bullet c-\frac{2n}{m+n}a\bullet b-\frac{2m}{m+n}a\bullet c.$$

Според тоа,

$$m\overline{CM}^2 + n\overline{BM}^2 + (m+n)\overline{AM}^2 = \tfrac{mn}{m+n}|b|^2 + \tfrac{mn}{m+n}|c|^2 - 2\tfrac{mn}{m+n}b\bullet c$$
$$+ (m+n)|a|^2 + \tfrac{n^2}{m+n}|b|^2 + \tfrac{m^2}{m+n}|c|^2$$
$$+ \tfrac{2mn}{m+n}b\bullet c - 2na\bullet b - 2ma\bullet c$$
$$= m(|a|^2 - 2a\bullet c + |c|^2) + n(|a|^2 - 2a\bullet b + |b|^2)$$
$$= n\overline{AB}^2 + m\overline{AC}^2 \,. \blacksquare$$

17.5. Да ги разгледаме различните точки $A_i, i = 1,2,...,n$ во рамнината со афикси $a_i, i = 1,2,...,n$ и нека $k_i, i = 1,2,...,n$ се броеви различни од нула, такви да $k_1 + k_2 + ... + k_n = k \neq 0$. *Барицентар* или *тежиште на системот* составен од точките $A_i, i = 1,2,...,n$ со *тежини* $k_i, i = 1,2,...,n$ ја нарекуваме точката T со афикс $t = \frac{k_1a_1 + k_2a_2 + ... + k_na_n}{k_1 + k_2 + ... + k_n}$. Ако $k_i = 1, i = 1,2, ..., n$, тогаш точката T ја нарекуваме *еквибарицентар* или *тежиште* на множеството точки $A_i, i = 1,2,...,n$.

17.6. Теорема (Лагранж). Нека се дадени точки $A_i, i = 1,2,...,n$ и тежини $k_i, i = 1,2,...,n$, различни од нула, такви да $k_1 + k_2 + ... + k_n = k \neq 0$. Ако T е барицентарот на системот составен од точките $A_i, i = 1,2,...,n$ и тежини $k_i, i = 1,2,...,n$, тогаш за секој точка M со афикс z важи

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \overline{MA}_i^2 = k\overline{MT}^2 + \sum_{i=1}^{n} k_i \overline{TA}_i^2 \,. \tag{1}$$

Доказ. Имаме:

$$\overline{MA}_i^2 = ((t-z) + (a_i - t))\bullet((t-z) + (a_i - t)) = |t-z|^2 + |a_i - t|^2 + 2(a_i - t)\bullet(t-z),$$

па затоа

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \overline{MA}_i^2 = |t-z|^2 \sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{i=1}^{n} k_i |a_i - t|^2 + 2(t-z)\bullet \sum_{i=1}^{n} k_i(a_i - t)$$
$$= k\overline{MT}^2 + \sum_{i=1}^{n} k_i \overline{TA}_i^2 + 2(t-z)\bullet(\sum_{i=1}^{n} k_i a_i - t\sum_{i=1}^{n} k_i)$$
$$= k\overline{MT}^2 + \sum_{i=1}^{n} k_i \overline{TA}_i^2 + 2(t-z)\bullet 0 = k\overline{MT}^2 + \sum_{i=1}^{n} k_i \overline{TA}_i^2,$$

т.е. точно е равенството (1). ■

17.7. Последица (Лајбниц). Нека се дадени точките $A_i, i=1,2,...,n$ и нека T е нивно тежиште. Тогаш за секоја точка M од рамнината важи

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{MA}_i^2 = n\overline{MT}^2 + \sum_{i=1}^{n} \overline{TA}_i^2 . \tag{2}$$

Доказ. Равенството (2) непосредно следува од равенството (1) за $k_i = 1, i=1,2,...,n$. ■

17.8. Коментар. а) Ако точките $A_i, i=1,2,...,n$ лежат на кружница со центар во O и радиус R и ако за точката M го земеме центарот на кружницата, ја добиваме формулата

$$nR^2 = n\overline{OT}^2 + \sum_{i=1}^{n} \overline{TA}_i^2 .$$

б) Ако $A_i, i=1,2,...,n$ се темиња на правилен $n-$аголник вписан во кружницата $|z|=R$, тогаш неговото тежиште ќе биде координатниот почеток (зошто?). Сега од теоремата на Лајбниц ќе следува

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{MA}_i^2 = n\overline{MO}^2 + nR^2 ,$$

и ако точката M лежи на кружницата опишана околу овој многуаголник, тогаш од претходната формула ќе следува

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{MA}_i^2 = nR^2 + nR^2 = 2nR^2 .$$

IV ГЛАВА
РЕШЕНИ ПРИМЕРИ И ЗАДАЧИ
ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. РЕШЕНИ ПРИМЕРИ КОН ПРВА ГЛАВА

1. Без да преминуваш во тригонометриски облик најди го множеството на вторите корени на комплексниот број $z = a + ib.$ Посебно пресметај

$$\sqrt[4]{-7+24i}.$$

Решение. Од $(x+iy)^2 = a+ib$ го добиваме системот равенки

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b,$$

од што следува

$$x+iy = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right).$$

Четвртите корени од $-7+24i$ се $2+i, -2-i, 1-2i, -1+2i.$ ■

2. Одреди го множеството точки z во комплексната рамнина за кои постои реален број c таков што $z = \frac{c-i}{2c-i}$.

Решение. Нека е $z = x+iy$. Од $z = \frac{c-i}{2c-i}$ имаме

$$c = \frac{zi-i}{2z-1} = \frac{-y+(x-1)i}{2x-1+2iy} \cdot \frac{2x-1-2iy}{2x-1-2iy} = \frac{(1-2x)y+2(x-1)y+((x-1)(2x-1)+2y^2)\,i}{(2x-1)^2+4y^2}$$

Сега $(2x-1)^2 + 4y^2 \neq 0$, па $x \neq \frac{1}{2}$ и $y \neq 0$. Освен тоа, треба

$$(x-1)(2x-1) + 2y^2 = 0\text{, т.е. } (x-\tfrac{3}{4})^2 + y^2 = \tfrac{1}{16}$$

Значи, бараното множество точки е

$$S = \{z = x+iy \mid (x-\tfrac{3}{4})^2 + y^2 = \tfrac{1}{16}, (x,y) \neq (\tfrac{1}{2},0)\}$$
$$= \{z \mid |z-a| = \tfrac{1}{4}, a = \tfrac{3}{4}, z \neq \tfrac{1}{2}\}\text{ . ■}$$

3. Нека a,b,c се комплексни броеви такви да $|a|=|b|=|c|=1$. Докажи дека

$$|ab+bc+ca| = |a+b+c|.$$

Решение. Од условот на задачата имаме $a\overline{a}=b\overline{b}=c\overline{c}=1$, па затоа $\overline{a}=\frac{1}{a}, \overline{b}=\frac{1}{b}, \overline{c}=\frac{1}{c}$. Според тоа,

$$|ab+bc+ca|=|abc(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})|=|a|\cdot|b|\cdot|c|\cdot|\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}|$$

$$=|\overline{a+b+c}|=|a+b+c|. \blacksquare$$

4. Ако z и w се комплексни броеви такви што $\operatorname{Re} z>0$ и $\operatorname{Re} w>0$, тогаш $|\frac{z-w}{\overline{z}+w}|<1$. Докажи!

Решение. *I начин.* Нека $z=x+iy,\quad w=a+ib$. Тогаш:

$$|\frac{z-w}{\overline{z}+w}|=\frac{|z-w|}{|\overline{z}+w|}=\frac{|(x-a)+(y-b)i|}{|(x+a)+(-y+b)i|}=\frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}{\sqrt{(x+a)^2+(b-y)^2}}.$$

Ако $x>0$ и $a>0$, тогаш $(x-a)^2<(x+a)^2$, а $(y-b)^2=(b-y)^2$, па затоа подкоренoвата величина на броителот е секогаш помала од онаа на именителот, т.е. дропката е помала од 1, со што тврдењето е докажано.

II начин. Од $\operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Re} w>0$ и од својствата на комплексните броеви имаме

$$\begin{aligned}|z-w|^2-|\overline{z}+w|^2&=(z-w)(\overline{z}-\overline{w})-(\overline{z}+w)(z+\overline{w})\\&=z\overline{z}-\overline{z}w-z\overline{w}+\overline{w}w-z\overline{z}-\overline{z}\overline{w}-zw-w\overline{w}\\&=-[z(w+\overline{w})+\overline{z}(w+\overline{w})]\\&=-(w+\overline{w})(z+\overline{z})=-4\operatorname{Re} z\cdot\operatorname{Re} w<0,\end{aligned}$$

т.е. $|z-w|^2<|\overline{z}+w|^2$, од што следува $|\frac{z-w}{\overline{z}+w}|<1$. $\blacksquare$

5. Докажи го неравенството

$$\sqrt{(a_1+a_2+...+a_n)^2+(b_1+b_2+...+b_n)^2}\leq\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2}$$

каде $a_i, b_i\in\mathbf{R}$, за $i=1,2,...,n$

Решение. Да ги разгледаме комплексните броеви $z_i=a_i+ib_i$, за $i=1,2,...,n$. Со замена во неравенството

$$|z_1+z_2+...+z_n|\leq|z_1|+|z_2|+...+|z_n|$$

го добиваме бараното неравенство. $\blacksquare$

5. Најди ја најмалата вредност на изразот $|z-\frac{1}{z}|$, $z\in\mathbf{C}$, ако $|z|=2$.

Решение. Ако е $|z|=2$, тогаш

$$|z-\frac{1}{z}|=|\frac{z^2-1}{z}|=\frac{|z^2-1|}{|z|}=\frac{|z^2-1|}{2}\geq\frac{|z^2|-1}{2}=\frac{|z|^2-1}{2}=\frac{3}{2},$$

Од досега изнесеното следува дека бараната минимална вредност е еднаква на $\frac{3}{2}$ и дека истата се достигнува ако $z^2=4$, т.е. $z=\pm 2$. ■

6. Одреди го и претстави го во комплексната рамнина множеството

$$\{z=\frac{3t+i}{t-i}:t\in\mathbf{R}\}.$$

Решение. Нека

$$z=\frac{3t+i}{t-i}=\frac{3t^2-1}{t^2+1}+i\frac{4t}{t^2+1}=x+iy.$$

Со елиминација на параметарот t од равенките

$$x=\frac{3t^2-1}{t^2+1},\quad y=\frac{4t}{t^2+1}$$

добиваме $t=\frac{y}{3-x}$, односно

$$(x-1)^2+y^2=4,\ x\neq 3.$$

Бараното множество е кружница со радиус 2 и центар во точката (1,0), без точката (3,0). ■

7. Реши ја равенката

$$2(1+i)z^2-4(2-i)z-5-3i=0.$$

Решение. Со решавање на квадратната равенка по z наоѓаме

$$z=\frac{4(2-i)\pm\sqrt{16(2-i)^2+8(1+i)(5+3i)}}{4(1+i)},$$

од каде добиваме $z_1=\frac{4-i}{1+i}=\frac{3-5i}{2}$ и $z_2=\frac{-i}{1+i}=-\frac{1+i}{2}$. ■

8. Најди ги сите комплексни броеви z за кои важи

$$|z|=\frac{1}{|z|}=|z-1|.$$

Решение. Прво да забележиме дека дадените изрази се дефинирани за $z\neq 0$. Од $|z|=\frac{1}{|z|}$, следува $|z|=1$, а од $|z|=|z-1|$, следува $|z-1|=1$. Ако $z=x+iy$, тогаш од овие услови добиваме

$$x^2+y^2=1 \text{ и } (x-1)^2+y^2=1,$$

односно $x^2=(x-1)^2$, па $x=\frac{1}{2}$, а $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Конечно, решенија на дадената равенка се: $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. ■

9. Во множеството комплексни броеви реши ја равенката

$$(x-3)^4+(x-4)^4=(2x-7)^4.$$

Решение. Воведуваме смена $y=x-\frac{7}{2}$ и дадената равенка ја запишуваме во видот

$$112y^4-24y^2-1=0,$$

од каде $y^2=\frac{1}{4}$ и $y^2=-\frac{1}{28}$, односно

$$y\in\{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},i\sqrt{\frac{1}{28}},-i\sqrt{\frac{1}{28}}\},$$

па затоа

$$x\in\{3,4,\frac{7}{2}+i\sqrt{\frac{1}{28}},\frac{7}{2}-i\sqrt{\frac{1}{28}}\}. \blacksquare$$

10. Најди ги сите природни броеви n, такви што бројот $z=(\frac{3+i}{2-i})^n$ е реален.

Решение. Бидејќи

$$z=(\frac{3+i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i})^n=(1+i)^n,$$

следува дека $z^2=(2i)^n$, па бројот z е реален ако и само ако $z^2\geq 0$, а тоа е точно ако и само ако n е делив со 4. ■

11. Даден е комплексен број u. Најди ги сите комплексни броеви z, такви да бројот $a=\frac{u-\bar{u}z}{1-z}$ е реален.

Решение. Бројот a е реален ако и само ако $a=\bar{a}$. Оттука следува дека $\frac{u-\bar{u}z}{1-z}$ е реален ако и само ако $\frac{u-\bar{u}z}{1-z}=\frac{\bar{u}-\bar{z}u}{1-\bar{z}}$, т.е. ако и само ако

$$(\bar{u}-u)(1-z\bar{z})=0.$$

Според тоа, ако u е реален број, тогаш решение е секој комплексен број $z\neq 1$, а ако u не е реален број, тогаш решение е секој комплексен број

$z \neq 1$ за кој важи $z\bar{z}=1$, т.е. решение е секој комплексен број z таков да $|z|=1, z \neq 1$. ■

12. Нека $a_1,...,a_n$ се дадени комплексни броеви, такви што

$$|a_1| = ... = |a_n| = 1 \text{ и } a_1 + a_2 + ... + a_n = 0.$$

Докажи дека за секој комплексен број z важи

$$|a_1 - z| + |a_2 - z| + ... + |a_n - z| \geq n.$$

Решение. Бидејќи $|a_i| = |\overline{a_i}|$, за секој $i = 1,2,...,n$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a_i} = 0$, добиваме

$$n = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{a_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{a_i} - z\sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} = \sum_{i=1}^{n} (a_i \overline{a_i} - z\overline{a_i})$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} (a_i - z)\overline{a_i} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - z| \cdot |a_i| = \sum_{i=1}^{n} |a_i - z|. \ ■$$

13. Дадени се комплексните броеви $z_1, z_2, ..., z_{2n+1}$ такви да $|z_i| = 1$ и $\operatorname{Im} z_i \geq 0$, за $i = 1,2,...,2n+1$. Докажи дека

$$\left| \sum_{i=1}^{2n+1} z_i \right| \geq 1.$$

Решение. Неравенството ќе го докажеме со помош на математичка индукција. Јасно, неравенството важи за $n = 0$. Нека претпоставиме дека тоа важи за секои $2n-1$ комплексни броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

Нека $z_1, z_2, ..., z_{2n+1}$ се комплексни броеви кои ги задоволуваат условите на задачата. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$\arg z_1 \leq \arg z_2 \leq ... \leq \arg z_{2n+1}.$$

Во комплексната рамнина поставуваме нов координатен систем така да имагинарната оска е симетрала на $\measuredangle z_1 O z_2$, а реалната оска да минува низ точката $O(0,0)$. Во новиот координатен систем точките да ги означиме со

$$z_k = x_k + iy_k, \ k = 1,2,...,2n+1.$$

Имаме,

$$y_k \geq 0 \text{ и } x_1 = -x_{2n+1}, y_1 = y_{2n+1},$$

па затоа од претходно изнесеното и од индуктивната претпоставка следува:

$$|\sum_{i=1}^{2n+1} z_i| = (x_1+x_2+...+x_{2n}+x_{2n+1})^2 + (y_1+y_2+...+y_{2n}+y_{2n+1})^2$$
$$= (x_2+...+x_{2n})^2 + (y_1+y_2+...+y_{2n}+y_{2n+1})^2$$
$$\geq (x_2+...+x_{2n})^2 + (y_2+...+y_{2n})^2$$
$$= |z_2+...+z_{2n}|^2 \geq 1.$$

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека секој непарен број комплексни броеви кои ги задоволуваат условите на задачата. ■

14. Нека $a_0, a_1, ..., a_n$ се комплексни броеви такви што ако $z \in \mathbf{C}$, $|z| \leq 1$, тогаш

$$|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0| \leq 1.$$

Докажи дека

$$|a_k| \leq 1 \text{ и } |a_0 + a_1 + ... + a_n - (n+1)a_k| \leq n,$$

за секој $k = 0, 1, 2, ..., n$.

Решение. Нека

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

и w_i, $i = 0, 1, ..., n$ се ($n+1$)-те корени на единицата. Но, $\sum_{i=0}^{n} w_i^k = 0$, ако k не се дели со $n+1$ и $\sum_{i=0}^{n} w_i^k = n+1$ ако k се дели со $n+1$, од што следува

$$\sum_{i=0}^{n} w_i^k P(w_i) = (n+1)a_{n-k}, \text{ за секој } k \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Според тоа,

$$(n+1)|a_{n-k}| = |\sum_{i=0}^{n} w_i^k P(w_i)| \leq \sum_{i=0}^{n} |w_i^k P(w_i)| = \sum_{i=0}^{n} |P(w_i)| \leq \underbrace{1+1+...+1}_{n+1 \text{ пати}} = n+1,$$

од што следува $|a_{n-k}| \leq 1$, за секој $k \in \{0, 1, ..., n\}$.

За вториот дел од тврдењето имаме

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^k P(w_i) = \sum_{i=0}^{n} w_i^k P(w_i) - P(1) = (n+1)a_{n-k} - \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{и}$$

$$|\sum_{i=1}^{n} w_i^k P(w_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |w_i^k P(w_i)| = \sum_{i=1}^{n} |P(w_i)| \leq n$$

па затоа

$$|(n+1)a_{n-k}-\sum_{i=1}^{n}a_i|\leq n \text{, за секој } k\in\{0,1,...,n\}. \ ■$$

15. Нека n е природен број. Докажи дека полиномот

$$P(z)=z^{n+1}-z^n-1$$

има корен w таков што $|w|=1$ ако и само ако $6|(n+2)$.

Решение. Нека $|w|=1$ и $w^{n+1}-w^n-1=0$. Тогаш $w^n(w-1)=1$ и како $|w|=1$ добиваме дека $|w-1|=1$. Според тоа, w е еден од пресеците на кружниците $|z|=1$ и $|z-1|=1$, па значи $w=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$. Освен тоа, $w-1=\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3}=w^2$. Конечно,

$$1=w^n(w-1)=w^{n+2}=\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\pm i\sin\frac{(n+2)\pi}{3},$$

што значи $\frac{(n+2)\pi}{3}=2k\pi,$ за некој $k\in\mathbf{N}$, па затоа $n+2=6k,$ за некој $k\in\mathbf{N}$, т.е. $6|(n+2)$.

Обратно, ако $6|(n+2)$, т.е. $n+2=6k,$ за некој $k\in\mathbf{N}$, тогаш за $w=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$ важи $|w|=1$, $w^2=w-1$ и $w^{n+2}=1$, па затоа

$$w^{n+1}-w^n-1=w^n(w-1)-1=w^nw^2-1=w^{n+2}-1=0. \ ■$$

16. Нека се $z_1,z_2,...,z_n$ произволни комплексни броеви. Докажи дека може да се изберат природни броеви $i_1,....,i_k$ такви што $1\leq i_1<...<i_k\leq n$ и

$$|z_{i_1}+z_{i_2}+...+z_{i_k}|\geq\frac{2}{4\sqrt{2}}(|z_1|+|z_2|+...+|z_n|).$$

Решение. Нека $z_j=x_j+iy_j$, $x_j,y_j\in\mathbf{R}$, $j=1,...,n$. Да означиме

$$S_1=\{j\,|\,x_j\geq 0,y_j\geq 0\},S_2=\{j\,|\,x_j<0,y_j\geq 0\},$$

$$S_3=\{j\,|\,x_j<0,y_j<0\},S_4=\{j\,|\,x_j\geq 0,y_j<0\}.$$

Тогаш,

$$\sum_{j=1}^{n}|z_j|=\sum_{j=1}^{4}\sum_{j\in S_k}|z_j|$$

па од принципот на Дирихле следува дека за некој $k\in\{1,2,3,4\}$ важи неравенството

$$\sum_{j\in S_k} |z_j| \geq \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

За тој број k добиваме

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{j=1}^{n}|z_j| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j\in S_k}|z_j| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j\in S_k}|x_j+iy_j| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j\in S_k}(|x_j|+|y_j|)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\sum_{j\in S_k} x_j| + |\sum_{j\in S_k} y_j|)$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2}(|\sum_{j\in S_k} x_j|^2 + |\sum_{j\in S_k} y_j|^2)} = |\sum_{j\in S_k} z_j|. \ \blacksquare$$

17. Нека $z_1, z_2, ..., z_n$ се комплексни броеви такви да

$$|z_1|+|z_2|+...+|z_n|=1.$$

Докажи дека постои множество $S \subseteq \{z_1, z_2, ..., z_n\}$ такво што

$$|\sum_{z_i\in S} z_i| \geq \frac{1}{6}.$$

Решение. Нека $z_k = x_k + y_k$, $k = 1,2,...,n$. Тогаш

$$1 = \sum_{k=1}^{n}|z_k| = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k^2+y_k^2} \leq \sum_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|)$$

$$= \sum_{x_k\geq 0}|x_k| + \sum_{x_k<0}|x_k| + \sum_{y_k\geq 0}|y_k| + \sum_{y_k<0}|y_k|.$$

Од принципот на Дирихле следува дека најмалку една од четирите суми на десната страна е поголема или еднаква на $\frac{1}{4}$. Нека претпоставиме дека $\sum_{x_k<0}|x_k| \geq \frac{1}{4}$. Добиваме

$$|\sum_{x_k<0} z_i| \geq |\sum_{x_k<0} x_k| = \sum_{x_k<0}|x_k| \geq \frac{1}{4} > \frac{1}{6}. \ \blacksquare$$

18. Нека a,b,c се произволни комплексни броеви и $w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Докажи дека

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a+bw+cw^2)(a+bw^2+cw).$$

Решение. Непосредно се проверува дека

$$w^3 = 1,\ w^4 = w,\ w+w^2 = -1,$$

па затоа

$$\begin{aligned}
(a+b+c)(a+bw+cw^2)(a+bw^2+cw) &= \\
&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+w(ab+bc+ca)+w^2(ab+bc+ca)) \\
&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+(w+w^2)(ab+bc+ca)) \\
&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca))=a^3+b^3+c^3-3abc,
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

19. Нека се a и b позитивни реални броеви. Одреди го минимумот на изразот $|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}|$, ако се x и y комплексни броеви такви што $|x|=a,\quad |y|=b$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}|^2 &= \frac{x+y}{1+x\overline{y}}\cdot\frac{\overline{x}+\overline{y}}{1+\overline{x}y}=\frac{|x|^2+|y|^2+2\operatorname{Re}x\overline{y}}{1+|x\overline{y}|^2+2\operatorname{Re}x\overline{y}} \\
&=1+\frac{|x|^2+|y|^2-1-|x\overline{y}|^2}{1+|x\overline{y}|^2+2\operatorname{Re}x\overline{y}}=1-\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{1+|x\overline{y}|^2+2\operatorname{Re}x\overline{y}},
\end{aligned}$$

при што

$$\min\{\operatorname{Re}x\overline{y}:|x|=a,|y|=b\}=-ab,$$
$$\max\{\operatorname{Re}x\overline{y}:|x|=a,|y|=b\}=ab.$$

Ако е барем еден од броевите a и b еднаков на 1, тогаш

$$\min_{|x|=a,|y|=b}|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}|=1$$

Ако броевите a и b се и двата помали или и двата поголеми од 1, тогаш

$$\min_{|x|=a,|y|=b}|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}|=\sqrt{1-\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{1+a^2b^2-2ab}}=|\frac{a-b}{1-ab}|$$

Ако еден од броевите a и b е помал од 1, а другиот е поголем од 1, тогаш

$$\min_{|x|=a,|y|=b}|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}|=\sqrt{1-\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{1+a^2b^2+2ab}}=|\frac{a+b}{1+ab}|.\ ■$$

20. Пресметај $z=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^8}$.

Решение. Броевите

$$z_1=\sqrt{3}+1 \text{ и } z_2=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

ќе ги претставиме со помош на Ојлеровите формули. Имаме

$$r_1 = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2\,,\ r_1 = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2\,,$$
$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}\,,\ \varphi_2 = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}\,,$$

па затоа $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ и $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$. Според тоа,

$$z = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^8} = \frac{(2e^{i\frac{\pi}{4}})^{10}}{(2e^{i\frac{\pi}{6}})^8} = \frac{2^{10}e^{i\frac{10\pi}{4}}}{2^8 e^{i\frac{8\pi}{6}}}$$
$$= \frac{2^2 e^{i\frac{5\pi}{2}}}{e^{i\frac{4\pi}{3}}} = 4e^{i(\frac{5\pi}{2}-\frac{4\pi}{3})} = 4e^{i\frac{7\pi}{6}}$$
$$= 4(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = 4(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = -2\sqrt{3} - 2i. \blacksquare$$

21. Нека z_1, z_2, z_3 се различни комплексни броеви со еднакви модули. Ако броевите $z_1 + z_2 z_3$, $z_2 + z_3 z_1$ и $z_3 + z_1 z_2$ се реални, тогаш важи равенството $z_1 z_2 z_3 = 1$. Докажи!

Решение. Да ставиме $z_k = r(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$, $k = 1,2,3$. Со непосредни пресметувања добиваме

$$z_1 z_2 z_3 = r^3(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3)$$
$$= r^3(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

каде $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$. Од условот на задачата имаме

$$\sin\varphi_k + r\sin(\varphi - \varphi_k) = 0,\quad k = 1,2,3,$$

односно

$$\sin\varphi_k(1 - r\cos\varphi) + \cos\varphi_k \cdot r\sin\varphi = 0,\quad k = 1,2,3.$$

Да претпоставиме дека $1 - r\cos\varphi \neq 0$. Тогаш

$$\operatorname{tg}\varphi_k = \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi - 1}, k = 1,2,3,$$

што не е можно бидејќи $\varphi_k \in [0, 2\pi)$ и меѓусебно се различни.

Затоа $1 - r\cos\varphi = 0$ и $\sin\varphi = 0$, па е $\cos\varphi = 1$, $r = 1$. Конечно,

$$z_1 z_2 z_3 = r^3(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 1.\ \blacksquare$$

22. Која е најголемата вредност на $|z|$ ако се знае дека комплексниот број z го задоволува условот $|z + \frac{1}{z}| = 1$?

Решение. Нека $z = re^{i\varphi}$, каде $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Имаме

$$
\begin{aligned}
|z+\tfrac{1}{z}|^2 &= (re^{i\varphi}+\tfrac{1}{r}e^{-i\varphi})(re^{-i\varphi}+\tfrac{1}{r}e^{i\varphi}) \\
&= r^2+\tfrac{1}{r^2}+e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}=r^2+\tfrac{1}{r^2}+2\cos 2\varphi.
\end{aligned}
$$

Од равенката

$$r^2+\tfrac{1}{r^2}+2\cos 2\varphi=1$$

следува

$$r^2=\frac{-2\cos 2\varphi+1\pm\sqrt{\left(2\cos 2\varphi-1\right)^2-4}}{2}.$$

Од овде следува дека r^2, што значи и r ќе биде максимален ако $\cos 2\varphi=-1$. Тогаш

$$r_{\max}=\sqrt{\frac{-2(-1)+1+\sqrt{\left(2(-1)-1\right)^2-4}}{2}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \ \blacksquare$$

23. Докажи, дека од $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ следува $z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos m\theta$.

Решение. Од равенката $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ следува $z^2-2z\cos\theta+1=0$. Решавајќи ја последната квадратна равенка, добиваме $z=\cos\theta\pm i\sin\theta$. Сега, $\frac{1}{z}=\cos\theta\mp i\sin\theta$. Според тоа,

$$z^m=\cos m\theta\pm i\sin m\theta \ \text{ и } \ \frac{1}{z^m}=\cos\theta\mp i\sin m\theta.$$

Ако ги собереме последните две равенства добиваме

$$z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos m\theta. \ \blacksquare$$

24. Нека $t\in\mathbf{R}$ и $z=\frac{1+it}{1-it}$. Докажи дека

$$z^n+\overline{z^n}=2\cos(2n\operatorname{arctg}t).$$

Решение. Имаме $z=\frac{1+it}{1-it}=\frac{1-t^2}{1+t^2}-i\frac{2t}{1+t^2}$. Ако $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, т.е. $x=2\operatorname{arctg}t$, тогаш $\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ и $\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$, па затоа

$$
\begin{aligned}
z^n+\overline{z^n} &= (\cos x+i\sin x)^n+(\cos x-i\sin x)^n \\
&= \cos nx-i\sin nx+conx-i\sin nx \\
&= 2\cos nx=2\cos(2n\operatorname{arctg}t). \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

25. Реши ја равенката:

$$\frac{iz^6+8}{8i-z^6}=\sqrt{3}\,.$$

Решение. Ако $8i-z^6=0$, тогаш дропката на левата страна од равенката не е дефинирана. Ако $8i-z^6\neq 0$, т.е. $z^6\neq 8i$, тогаш двете страни на равенката ги множиме со $8i-z^6$ и после групирањето на членовите пред z на левата страна, а останатие членови на десната страна ја добиваме равенката

$$z^6(\sqrt{3}+i)=-8+8\sqrt{3}i\,.$$

Според тоа,

$$z^6=\frac{-8+8\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}=\frac{(-8+8\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{8(-1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{4}=8i\,.$$

Но, претходно видовме дека $z^6\neq 8i$, па затоа добиваме дека дадената равенка нема решенија. ■

26. Во множеството комплексни броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^4+6x^2y^2+y^4=5 \\ x^3y+xy^3=1 \end{cases}$$

Решение. Дадениот систем е еквивалентен со системот кај кој втората равенка е помножена со 4, односно со системот

$$\begin{cases} x^4+6x^2y^2+y^4=5 \\ 4x^3y+4xy^3=4 \end{cases}$$

па и со системот кој се состои од збирот на овие две равенки и разликата на овие две равенки, односно со

$$\begin{cases} (x+y)^4=9 \\ (x-y)^4=1 \end{cases}$$

Од овие равенки добиваме

$$x=\frac{\alpha\cdot\sqrt{3}+\beta}{2},\ y=\frac{\alpha\cdot\sqrt{3}-\beta}{2},\ \alpha,\beta\in\{1,-1,i,-i\}\,,$$

односно 16 решенија. Потребно е да се согледа уште дека ова се различни решенија. Имено, ако

$$\frac{\alpha_1\cdot\sqrt{3}+\beta_1}{2}=\frac{\alpha_2\cdot\sqrt{3}+\beta_2}{2}\,,$$

тогаш

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\sqrt{3} = (\beta_2 - \beta_1),$$

па $\alpha_1 = \alpha_2$, што значи дека $\beta_1 = \beta_2$, т.е. тоа е исто решение, бидејќи во спротивно $\sqrt{3}$ не може да се запише во облик $r + is$, каде $r, s \in \mathbf{Q}$, затоа што $\sqrt{3}$ е ирационален број. ♦

27. Во множеството комплексни броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} z^{19}w^{25} = 1, \\ z^5 w^7 = 1, \\ z^4 + w^4 = 2. \end{cases}$$

Решение. Со кубирање на втората равенка на системот добиваме $z^{15}w^{21} = 1$. Од $z^{19}w^{25} = 1$ и $z^{15}w^{21} = 1$ следува $z^4 w^4 = 1$. Но, $z^4 + w^4 = 2$, па од Виетовите формули следува дека z^4 и w^4 се решенија на квадратната равенка $t^2 - 2t + 1 = 0$, т.е. $z^4 = 1$ и $w^4 = 1$. Понатаму, од $z^5 w^8 = w$ следува $zz^4(w^4)^2 = w$, т.е. $z = w$. Конечно, решенија на дадениот систем можат да бидат само подредените парови $(1,1), (-1,-1), (i,i), (-i,-i)$. Со непосредна проверка се покажува дека овие подредени парови навистина се решенија на дадениот систем. ■

28. Ако $w_0, w_1, ..., w_{n-1}$ се $n-$тите корени на единицата, пресметај ги збировите:

а) $\sum_{k=1}^{n} k w_{k-1}$ б) $\sum_{k=1}^{n} k^2 w_{k-1}$ в) $\sum_{k=1}^{n} k^3 w_{k-1}$

Упатство. а) $n-$те корени на единицата ќе ги запишеме во облик $w_k = w^{k-1}$, каде $w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Бараниот збир го запишуваме во обликот

$$S = \sum_{k=1}^{n} k w_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k w^{k-1}$$

Бидејќи $1 - w \neq 0$, точни се равенствата

$$S = \frac{S - Sw}{1-w} = \frac{1+2w+3w^2+...+nw^{n-1}-w-2w^2-3w^3-...-nw^n}{1-w}$$

$$= \frac{1+w+...+w^{n-1}-nw^n}{1-w} = \frac{\frac{1-w^n}{1-w}-nw^n}{1-w} = \frac{1-(n+1)w^n+nw^{n+1}}{(1-w)^2}.$$

Конечно, бараниот збир може да се пресмета ако замениме за

$$w=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

и ја искористиме Моавровата формула.

Во задачите под б) и в) постапи аналогно како во задачата под а). ■

29. Пресметај ги збировите:

а) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cos\frac{2k\pi}{n}$ б) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\sin\frac{2k\pi}{n}$

Упатство. Стави

$$A=\sum_{k=1}^{n} k\cos\frac{2k\pi}{n},\, B=\sum_{k=1}^{n} k\sin\frac{2k\pi}{n}$$

и пресметај $S=1+A+iB$. Потоа, примени ја задача 28 а) и определи

$$A=\operatorname{Re}(S-1) \text{ и } B=\operatorname{Im}(S-1)\,. ■$$

30. Докажи, дека

а) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k+1)\alpha = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n+2}{2}\alpha$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \sin(k+1)\alpha = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n+2}{2}\alpha$.

Упатство. Стави $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ и искористи ја биномната формула за $(1+z)^n$. ■

31. Докажи, дека

$$s=\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}\,.$$

Решение. Прво да забележиме, дека од $z=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}$ следува

$$z^n=-1,\ z^{2n}=1\,. \tag{1}$$

Нека $w=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Тогаш $\overline{w}=\cos\varphi-i\sin\varphi=\frac{1}{w}$, па затоа

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}(w+\frac{1}{w})=\frac{w^2+1}{2w},\ \sin\varphi=\frac{1}{2i}(w-\frac{1}{w})=\frac{w^2-1}{2iw}\,.$$

Понатаму, од Моавровата формула следува

$$w^k=\cos k\varphi+i\sin k\varphi \text{ и } \overline{w}^k=\cos k\varphi-i\sin k\varphi=\frac{1}{w^k}\,,$$

па затоа

$$\cos k\varphi = \frac{w^{2k}+1}{2w^k}, \ \sin k\varphi = \frac{w^{2k}-1}{2iw^k}. \tag{2}$$

Нека $z=\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$. Во (2) ставаме $k=1,2,3$ и ако го искористиме (1) добиваме дека

$$s=\frac{z^2+1}{2z}-\frac{z^4+1}{2z^2}+\frac{z^6+1}{2z^3}=\frac{(z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1)+z^3}{2z^3}=\frac{\frac{z^7+1}{z+1}+z^3}{2z^3}=\frac{z^3}{2z^3}=\frac{1}{2}. \ \blacksquare$$

32. Пресметај

$$p=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}.$$

Решение. Нека е $z=\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$. Тогаш од формулите (2) и (1) во задача 31 следува

$$\cos\frac{\pi}{7}=\frac{z^2+1}{2z}, \cos\frac{2\pi}{7}=\frac{z^4+1}{2z^2}, \cos\frac{3\pi}{7}=\frac{z^6+1}{2z^3},$$

па затоа

$$\begin{aligned}p&=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{(z^2+1)(z^4+1)(z^6+1)}{8z^6}\\&=\frac{z^{12}+z^{10}+z^8+2z^6+z^4+z^2+1}{8z^6}=\frac{-z^5-z^3-z+z^6+z^4+z^2+1+z^6}{8z^6}\\&=\frac{z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1+z^6}{8z^6}=\frac{\frac{z^7+1}{z+1}+z^6}{8z^6}=\frac{1}{8}. \ \blacksquare\end{aligned}$$

33. Нека се α,β и γ аглите на произволен триаголник. Докажи, дека

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1.$$

Решение. Со S да ја означиме левата страна на идентитетот и нека $z=\cos\alpha+i\sin\alpha, w=\cos\beta+i\sin\beta$. Тогаш од тригонометрискиот запис на комплексен број следува $zw=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$, па од равенствата (2) во задача 31 добиваме

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma&=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2(\pi-(\alpha+\beta))\\&=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)\\&=(\frac{z^2+1}{2z})^2+(\frac{w^2+1}{2w})^2+(\frac{z^2w^2+1}{2zw})^2\\&=\frac{w^2z^4+z^2w^4+6z^2w^2+z^2+w^2+z^4w^4+1}{4z^2w^2},\end{aligned}$$

и

$$2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = -2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = -2\frac{z^2+1}{2z}\frac{w^2+1}{2w}\frac{z^2w^2+1}{2zw}$$
$$= \frac{-w^2z^4 - z^2w^4 - 2z^2w^2 - z^2 - w^2 - z^4w^4}{4z^2w^2}.$$

Конечно, добиваме $S = \frac{4z^2w^2}{4z^2w^2} = 1$. ■

34. Реши ја равенката
$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

Решение. Ако искористиме дека
$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2},$$
дадената равенка ја трансформираме во видот
$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x) = 1,$$
т.е. во видот
$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = -1.$$
Земаме $z = \cos x + i\sin x$ и ако го искористиме равенството (2) во задача 31 добиваме
$$\frac{z^4+1}{2z^2} + \frac{z^8+1}{2z^4} + \frac{z^{12}+1}{2z^6} = -1,$$
од каде последователно наоѓаме
$$(1 + z^2 + z^4 + {}^6 + z^8 + z^{10} + z^{12}) + z^6 = 0,$$
$$\frac{z^{14}-1}{z^2-1} + z^6 = 0,$$
$$(z^8-1)(z^6+1) = 0.$$
Притоа го искористивме фактот дека $z^2 \neq 1$, бидејќи $x = 0$ и $x = \pi$ не се решенија на дадената равенка. Од $(z^8-1)(z^6-1) = 0$ следува $z^6 + 1 = 0$ или $z^2 + 1 = 0$ или $z^4 + 1 = 0$. Понатаму, од $z^6 + 1 = 0$ следува дека $\cos 6x = -1$, т.е $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbf{Z}$.

Слично се добиваат и останатите решенија
$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z} \text{ и } x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}. \ ■$$

35. Докажи го идентитетот
$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x,$$

за $n \in \mathbf{N}, x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k},\ k = 0,1,2,...,n, \lambda \in \mathbf{Z}$

Решение. Нека $z = \cos x + i\sin x$. Од равенството (2) во задача 31 следува

$$\operatorname{tg} k\varphi = \frac{w^{2k}-1}{i(w^{2k}+1)},\ \operatorname{ctg} k\varphi = \frac{i(w^{2k}-1)}{w^{2k}-1}. \tag{1}$$

Понатаму, од (1) за $n = 2^s$ имаме

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin 2^s x} &= \frac{2iz^{2^s}}{z^{2^{s+1}}-1} = i\frac{z^{2^{s+1}}+2z^{2^s}+1-z^{2^{s+1}}-1}{z^{2^{s+1}}-1} = i\frac{(z^{2^s}+1)^2-(z^{2^{s+1}}+1)}{z^{2^{s+1}}-1}\\ &= i\frac{z^{2^s}+1}{z^{2^s}-1} - i\frac{z^{2^{s+1}}+1}{z^{2^{s+1}}-1} = \operatorname{ctg} 2^{s-1}x - \operatorname{ctg} 2^s x.\end{aligned} \tag{2}$$

Конечно, ако во (2) последователно ставиме $s = 1,2,4,...,2^n$ и ги собереме добиените равенства наоѓаме

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + ... + \frac{1}{\sin 2^n x} &= (\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x) + (\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 4x) + ... + (\operatorname{ctg} 2^{n-1}x - \operatorname{ctg} 2^n x)\\ &= \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

36. Нека се α, β и γ аглите на произволен триаголник. Докажи, дека триаголникот е правоаголен ако и само ако

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1.$$

Упатство. Претходно докажи дека за произволен триаголник важи

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \ ■$$

37. Пресметај го збирот:

$$S_n = 1 + 2\cos x + 2^2\cos 2x + ... + 2^n \cos nx.$$

Решение. Нека

$$T_n = i(\sin x + 2^2 \sin 2x + ... + 2^n \sin nx) \text{ и } z = 2(\cos x + i\sin x).$$

Тогаш

$$\begin{aligned}S_n + T_n &= 1 + 2(\cos x + i\sin x) + 2^2(\cos 2x + i\sin 2x) + ... + 2^n(\cos nx + i\sin nx)\\ &= 1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \frac{2^{n+1}[\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x]-1}{2(\cos x - i\sin x)},\end{aligned}$$

па затоа

$$S_n = \operatorname{Re}\left[\frac{2^{n+1}[\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x]-1}{2(\cos x - i\sin x)}\right] = \frac{2^{n+2}\cos nx - 2^{n+1}\cos(n+1)x - 2\cos x + 1}{5-4\cos x}. \ ■$$

38. Нека се $a_1, a_2, ..., a_n$ реални броеви такви што за секој реален број x важи

$$1 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + ... + a_n \cos nx \geq 0. \qquad (1)$$

Докажи, дека

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \leq n. \qquad (2)$$

Решение. Нека земеме $\varphi = \frac{2\pi}{n+1}$. Тогаш за $z = e^{i\varphi}$ добиваме

$$1 + z^k + z^{2k} + ... + z^{nk} = \frac{1 - z^{(n+1)k}}{1 - z^k} = \frac{1 - \cos\frac{2(n+1)k\pi}{n+1} - i\sin\frac{2(n+1)k\pi}{n+1}}{1 - \cos\frac{2k\pi}{n+1} - i\sin\frac{2k\pi}{n+1}} = 0,$$

за $k = 1, 2, ..., n$, од што следува

$$1 + \cos k\varphi + \cos 2k\varphi + ... + \cos nk\varphi = 0, \qquad (3)$$

за $k = 1, 2, ..., n$. Ако во неравенството (1) последователно ставиме

$$x = \varphi,\ x = 2\varphi,\ ...,\ x = n\varphi,$$

добиваме n неравенства, од кои после собирањето со помош на равенствата (3) го добиваме неравенството $n - a_1 - a_2 - ... - a_n \geq 0$, кое е еквивалентно со неравенството (2). ■

2. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА КОН ПРВА ГЛАВА

1. Пресметај

а) $i^n, n \in \mathbf{Z}$, б) $(1+i)^n + (1-i)^n, n \in \mathbf{N}$, и

в) $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^n, n \in \mathbf{N}$.

2. Пресметај:

$$\frac{(1+i)^{2000}}{(1-i)^{2000} - (1+i)^{2000}}.$$

3. Најди го модулот на комплексниот број

$$\frac{x^2 - y^2 + 2xyi}{xy\sqrt{2} + i\sqrt{x^4 + y^4}}.$$

4. Нека $A=\{z_1, z_2,..., z_{1996}\}$ е множество од комплексни броеви и нека за секој $i=1,2,...,1996$ е исполнето равенството $A=\{z_1z_i, z_2z_i,..., z_{1996}z_i\}$.

a) Докажи дека за секој $i=1,2,...,1996$ важи $|z_i|=1$.

b) Докажи дека од $z\in A$ следува $\overline{z}\in A$.

5. Во множеството комплексни броеви дефинираме операција * на следниов начин: $z*z_1 = zz_1 + i(z+z_1)-(1+i)$. Докажи дека операцијата * е комутативна и асоцијативна. Најди го *неутралниот елемент* e, т.е. таков $e\in\mathbf{C}$ за кој важи $e*z=z*e=z$ за секој $z\in\mathbf{C}$. Докажи дека постои само еден комплексен број кој нема инверзен ($z'\in\mathbf{C}$ е *инверзен елемент* на $z\in\mathbf{C}$ ако $zz'=z'z=e$).

6. Докажи дека

$$|b_0|^2+|b_1|^2+|b_2|^2=3(a_0^2+a_1^2+a_2^2),$$

каде

$$b_k = a_0 + a_1w^k + a_2w^k, \text{ за } k=0,1,2;\ a_0,a_1,a_2\in\mathbf{R} \text{ и } w=-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

7. Докажи дека од $x+iy=(s+it)^n$, $x, ys,t\in\mathbf{R}$ следува

$$(x^2+y^2)=(s^2+t^2)^n$$

8. Графички претстави го множеството комплексни броеви z за кои $|\frac{z-3}{z+3}|=2$.

9. Реши ги равенките:

а) $|z|+z=4-i$, и   б) $|z+i|+|z-i|=2$.

10. Нека $a_1,a_2...,a_n$ се дадени комплексни броеви, такви што

$$|a_1|=...=|a_n|=r.$$

Со T_n^s го означуваме збирот од сите производи од s попарно различни броеви. На пример,

$$T_n^2 = a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_1a_n + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n.$$

Докажи дека,

$$\frac{|T_n^{n-s}|}{|T_n^s|} = r^s,\ s = 1,2,3,\dots,n-1 .$$

11. Нека сите корени на полиномот

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

лежат на кружницата $|z| = r$. Докажи дека

$$|a_{n-i}| = r^i |a_i|,\ i = 0,1,2,\dots,n .$$

12. Докажи, дека:

а) Ако $|\alpha| < 1$, тогаш $|\frac{z-\alpha}{1-z\alpha}| \le 1$ ако и само ако $|z| < 1$.

б) Ако $|\alpha| > 1$, тогаш $|\frac{z-\alpha}{1-z\alpha}| \ge 1$ ако и само ако $|z| < 1$.

13. Претстави ги во тригонометриски облик комплексните броеви

а) $-\sqrt{2}$, б) $-1+i$, в) $2-i\sqrt{3}$

г) $1+\cos\alpha + i\sin\alpha$, и д) $\sin\alpha + i\left(1+\cos\alpha\right)$.

14. Пресметај $(1+w)^n$, ако $n \in \mathbf{Z}$ и $w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

15. Пресметај

а) $\sqrt{2i}$, б) $\sqrt{-8i}$, в) $\sqrt{4+3i}$,

г) $\sqrt[3]{-1+i}$, и д) $\sqrt[4]{-2\sqrt{3}-2i}$.

16. Докажи, дека

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}} = \sqrt{6} .$$

17. Докажи, дека ако $(\frac{a+i}{a-i})^n = 1$, тогаш $a = \operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}$, $k = 0,1,2,\dots,n-1$.

18. Нека $n \in \mathbf{N}$. Реши ги равенките:

а) $(x+1)^n - (x-1)^n = 0$,

б) $(x+5i)^n - (x-5i)^n = 0$,

в) $(x+3i)^n + i(x-3i)^n = 0$,

г) $(\frac{i-x}{i+x})^n = \frac{\text{ctg}\alpha+i}{\text{ctg}\alpha\text{-}i}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, и

д) $(x+\alpha i)^n + (\cos\theta + i\sin\theta)(x-\alpha i)^n = 0,\, \theta \neq 2k\pi,\, \alpha \neq 0,\, \alpha,\theta \in \mathbf{R}$.

19. Докажи, дека:

а) $\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + ... + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$, и

б) $\cos\frac{2\pi}{11} + \cos\frac{4\pi}{11} + ... + \cos\frac{10\pi}{11} = -\frac{1}{2}$.

20. Пресметај ги збировите:

а) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ...$, и

б) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + ...$.

21. Пресметај го збирот:

$$1 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + ... + C_n^{4k} + ...$$

22. Докажи го равенството:

$$1 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + ... = \frac{2}{3}(2^{n-1} + \cos\frac{\pi n}{3}) .$$

23. Докажи, дека за $m = 2,3,4,...$ важи:

$$\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{2\pi}{m}\sin\frac{3\pi}{m}...\sin\frac{(m-1)\pi}{m} = \frac{m}{2^{m-1}} .$$

24. Докажи го равенството:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos^n\frac{\pi k}{n} = \frac{n}{2^{n-1}} .$$

25. Нека

$$F_n = a^n \sin nA + b^n \sin nB + c^n \sin nC ,$$

каде $a,b,c,A,B,C \in \mathbf{R}$ и $A+B+C = 2k\pi$, за некој $k \in \mathbf{Z}$. Докажи, дека од $F_1 = F_2 = 0$ следува $F_n = 0$ за секој $n \in \mathbf{N}$.

26. Нека $x \neq 2k\pi$, $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$ и $n \in \mathbf{N}$. Пресметај го збирот

$$1 + 2\cos x + 3\cos 2x + 4\cos 3x + ... + (n+1)\cos nx .$$

27. Нека $x, y \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$. Пресметај ги збировите:

а) $\cos x + \cos(x+2y) + ... + \cos(x+2ny)$, и

б) $\sin x + \sin(x+2y) + ... + \sin(x+2ky)$.

28. Знаејќи дека $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ пресметај $\cos\frac{\pi}{12}$.

29. Знаејќи дека $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ докажи, дека

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{24} = \sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{3} - 2.$$

30. Докажи, дека:

а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$,

б) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$,

в) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5} = -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$,

г) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5} = -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$

31. Пресметај:

а) $\sin\frac{\pi}{21}\sin\frac{8\pi}{21}\sin\frac{\pi}{7}$,

б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}$,

в) $\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{2\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{4\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}\sin\frac{6\pi}{14}$.

32. Докажи ги идентитетите:

а) $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$, и

б) $\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$.

33. Докажи ги идентитетите:

а) $\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$, и

б) $\sin 5x = \sin x(16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1)$.

34. Комплексниот број a го нарекуваме *алгебарски*, ако е корен на полином

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} + a_n$$

со целобројни коефициенти. Броевите кои не се алгебарски ги нарекуваме *трансцедентни*. На пример, броевите π и e се трансцедентни. Меѓутоа, постојат броеви, како што се $e\pi$ и $e+\pi$ за кои не се знае дали се алгебарски или се трансцедентни.
Докажи, дека броевите

а) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ и б) $\sqrt[3]{4}-2i$

се алгебарски.

35. Реши ја равенката:

$$x^n - nax^{n-1} - C_n^2 a^2 x^{n-2} - C_n^3 a^3 x^{n-3} \ldots - a^n = 0, a \neq 0.$$

36. Нека $n \geq 2$ е природен број. Најди ги сите решенија x_0 на равенката $x^n - x^{n-2} - x + 2 = 0$ такви што $|x_0| = 1$.

37. Реши ја по x равенката:

$$\cos a + C_n^1 x \cos(a+b) + C_n^2 x^2 \cos(a+2b) + \ldots + C_n^n x^n \cos(a+nb) = 0.$$

38. Реши ги равенките:

а) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$, и

б) $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = 6$.

39. Нека $f(x,y)$ е рационална функција со реални коефициенти. Ако функцијата f е *симетрична*, т.е. ако $f(x,y) = f(y,x)$, тогаш $f(a,\overline{a}) \in \mathbf{R}$, за секој $a \in \mathbf{C}$. Докажи!

40. Со $[t]$ да го означиме најголемиот цел број кој не е поголем од t. Нека $z = x + iy$. Докажи дека:

а) $\mathrm{Re}\, z^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k} y^{2k}$,

б) $\mathrm{Im}\, z^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k+1} x^{n-2k-1} y^{2k+1}$,

в) $\mathrm{Re}\, z^n + \mathrm{Im}\, z^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{[k/2]} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

Како гласи соодветниот израз за $\operatorname{Re} z^n - \operatorname{Im} z^n$?

41. Докажи дека сите нули на полиномот:

а) $\operatorname{Re}(x+i)^n$,

б) $\operatorname{Im}(x+i)^n$,

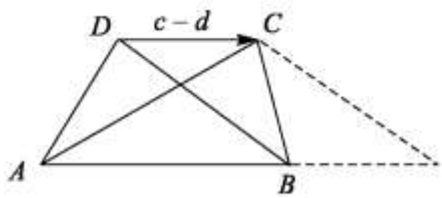
в) $\operatorname{Re}(x+i)^n \pm \operatorname{Im}(x+i)^n$

се реални и определи ги.

3. РЕШЕНИ ПРИМЕРИ КОН ВТОРА И ТРЕТА ГЛАВА

1. Конструирај трапез, ако му се познати основите и дијагоналите.

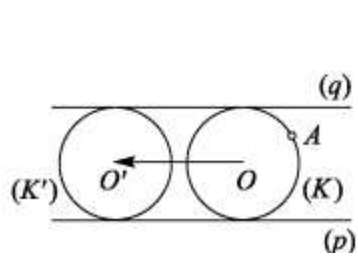
Решение. Нека претпоставиме дека задачата е решена и нека $ABCD$ е бараниот трапез (цртеж десно). Ако афиксите на точките A, B, C, D се a, b, c, d соодветно, тогаш $\overrightarrow{DC} = c - d$. Да ја разгледаме транслацијата



$$S(z) = z + c - d$$

и нека точката B_1 е слика на точката B при оваа транслација. Понатаму, бидејќи $S(d) = d + c - d = c$ добиваме дека точката C е слика на точката D при оваа транслација, па затоа $\overline{CB_1} = \overline{DB}$. Според тоа, за AB_1C познати се сите три страни: $\overline{AB_1} = \overline{AB} + \overline{DC}$, $\overline{AC}$ и $\overline{CB_1} = \overline{DB}$, па тој може да се конструира. Бидејќи е позната основата $\overline{AB}$ може да се најде и точката B и на крајот, имаме точката D е инверзна слика на точката C. ■

2. Конструирај кружница која минува низ дадена точка и допира две паралелни прави.



Решение. Нека претпоставиме дека задачата е решена (цртеж десно). Ако a е вектор паралелен на правата (p), тогаш транслацијата $S(z)=z+a$ кружницата (K) ја пресликува во кружница (K'), којашто пак ги допира правите (p) и (q), но не минува низ точката A. Значи, треба да конструираме произволна кружница (K') којашто ги допира правите (p) и (q) и со помош на транслација истата ја пресликуваме во бараната кружница.

Бројот на решенијата зависи од заемната положба на точката A и правите (p) и (q). Имено:

- ако точката A е меѓу правите (p) и (q), тогаш задачата има две решенија,
- ако точката A лежи на некоја од правите, тогаш задачата има едно решение, и
- во друг случај задачата нема решение. ■

3. Дадени се кружниците $K'(o',R')$ и $K''(o'',R'')$ и правата (p). Да се конструира права (q) паралелна со (p), така што кружниците (K') и (K'') да отсечуваат на неа еднакви отсечки.

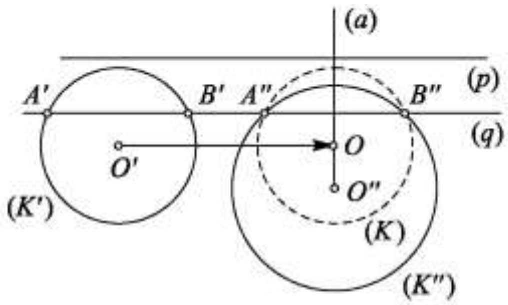
Решение. Да претпоставиме дека задачата е решена (види цртеж). Да повлечеме права (a) нормална на (p) и права $O'O$ нормална на (a), т.е. паралелна со (p). Тогаш имаме

$$\overrightarrow{A'A''}=\overrightarrow{B'B''}=\overrightarrow{O'O}.$$

Според тоа ако

$$S(z)=z+o-o'$$

е транслација за вектор $\overrightarrow{O'O}$, тогаш $S(a')=a''$, $S(b')=b''$ и $S(o')=o$, а кружницата (K') се пресликува во кружница $K(o,|o-a''|)$ и притоа $A''(a'')$ и $B''(b'')$ се пресечни точки на кружниците (K) и (K'').



Дали задачата ќе има решение зависи од тоа дали кружниците (K') и (K) ќе се сечат. Според тоа, задачата има решение и тоа:

- ако $|R''-R'|\le|o''-o|=\overline{OO''}\le R'+R''$, тогаш задачата има единствено решение,
- ако $|R''-R'|>|o''-o|=\overline{OO''}$ или $|o''-o|=\overline{OO''}>R'+R''$, тогаш задачата нема решение. ■

4. Нека A, B се две дадени точки и нека $S = u - z$ е централна симетрија. Ако $S(A) = A'$ и $S(B) = B'$, тогаш $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$. Докажи!

Решение. Нека афиксите на точките A, B се a, b, соодветно. За афиксите на точките A', B' добиваме $a' = S(a) = u - a$ и $b' = S(b) = u - b$. Според тоа,

$$b' - a' = u - b - (u - a) = a - b,$$

што значи дека $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$. ■

5. Ако O' и O'' се центри на симетрија на фигурата $\mathbf{F}$, докажи дека и $O = S_{O''}(O')$ е, исто така, центар на симетрија на фигурата $\mathbf{F}$.

Решение. Нека афиксите на O' и O'' се $\frac{o'}{2}$ и $\frac{o''}{2}$, соодветно, и нека $A(a)$ е произволна точка од фигурата $\mathbf{F}$. Тогаш афиксот на точката O е

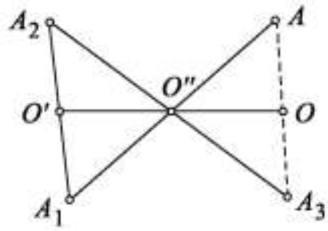
$$o = S_{O''}(\tfrac{o'}{2}) = o'' - \tfrac{o'}{2}.$$

Од условот следува дека точките A_1, A_2, A_3 чии афикси се

$a_1 = S_{O''}(a) = o'' - a,$

$a_2 = S_{O'}(a_1) = o' - (o'' - a) = o' - o'' + a,$

$a_3 = S_{O''}(a_2) = o'' - (o' - o'' + a) = 2o'' - o' - a,$



припаѓаат на фигурата $\mathbf{F}$. Конечно, од произволноста на точката A и од равенството

$$S_O(a) = 2o'' - o' - a = a_3$$

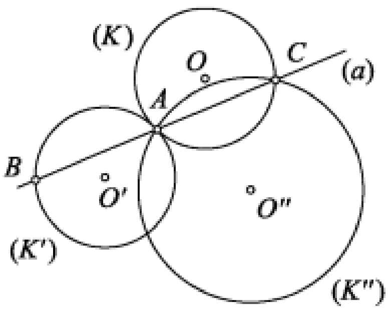
следува дека точката $O = S_{O''}(O')$ е, исто така, центар на симетрија на фигурата $\mathbf{F}$ (цртеж десно). ■

6. Дадени се прави (p) и (q) и точка A. Низ точката A да се повлече права (a), така што A да биде средина на отсечката MN, каде што $M = (a) \cap (p)$ и $N = (a) \cap (q)$.

Упатство. Разгледај централна симетрија со центар во точката A. ■

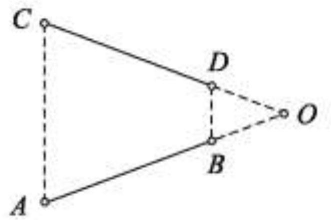
7. Нека кружниците $K'(O', R')$ и $K''(O'', R'')$ се сечат во точката A. Низ точката A да се повлече права (a) на која кружниците отсекуваат еднакви отсечки.

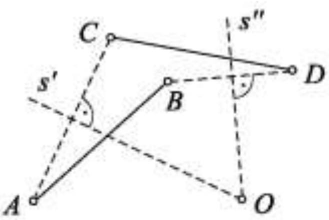
Решение. Нека претпоставиме дека задачата е решена е нека (a) е бараната права (цртеж десно). Бидејќи $\overline{AB}=\overline{AC}$, точката A е средина на отсечката BC, што значи дека $C=S_A(B)$. Точката $B\in(K')$, па точката $C=S_A(B)$ ќе лежи на кружницата $(K)=S_A(K')$. Значи, $C\in(K)\cap(K'')$.



Задачата има единствено решение. ■

8. Дадени се четири точки A,B,C,D, така што $\overline{AB}=\overline{CD},$ но $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{CD}$. Докажи дека постои ротација S таква што $S(A)=C, S(B)=D$!



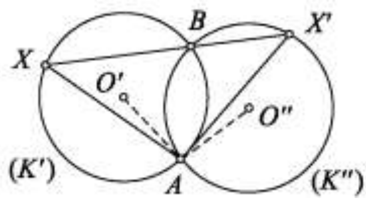


Колку такви ротации постојат?

Упатство. Одделно разгледај го случајот кога правата AC е паралелна со правата BD, цртеж горе и случајот кога правата AC не е паралелна со правата BD, цртеж лево. ■

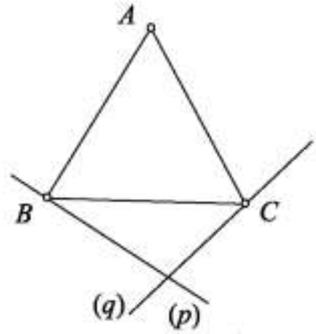
9. Нека кружниците (K') и (K'') се со еднакви радиуси и нека се сечат во точките A и B. Докажи дека постои ротација S со центар во точката A, така што $S(K')=K''$. Притоа, ако $X\in(K')$ и $S(X)=X'$, тогаш правата XX' минува низ точката B.

Решение. Бидејќи $r'=r''$ правата AB е симетрала на отсечката $O'O''$, па значи A е центар на ротација $S_{A,\alpha}$ таква што $S_{A,\alpha}(K')=K''$, каде $\alpha=\measuredangle O'AO''$. Нека $X\in(K')$ е произволна точка и $X'=XB\cap(K'')$, цртеж десно. Бидејќи $\measuredangle AXB$ и $\measuredangle AX'B$ се периферниски агли над еднакви лаци следува дека тие се еднакви, па затоа $\overline{AX}=\overline{AX'}$. Ако $S_{A,\alpha}(X)=X^*$, добиваме дека $\overline{AX}=\overline{AX^*}$ и $X^*\in(K'')$, па затоа $X'=X^*$.

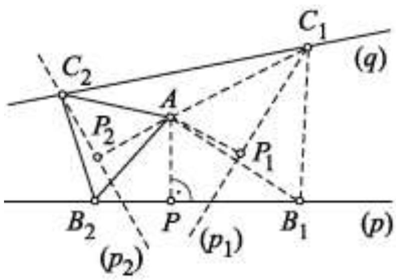


Конечно, за произволна точка $X \in (K')$, точките X, B и $S_{A,\alpha}(X)$ се колинеарни. ■

10. Дадени се прави (p) и (q) и точка A. Конструирај рамностран триаголник ABC, така што $B \in (p)$ и $C \in (q)$.

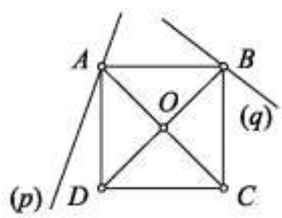


Решение. Да претпоставиме дека задачата е решена и ABC е бараниот триаголник, цртеж десно. Бидејќи триаголникот ABC е рамностран, добиваме дека $\overline{AB} = \overline{AC}$ и $\measuredangle BAC = 60^0$. Значи, ако $S_{A,60^0}(B) = C$ или $S_{A,-60^0}(B) = C$. Точката B лежи на правата (p), па затоа точката $S_{A,60^0}(B) = C$ лежи на правата $S_{A,60^0}(p)$. Од друга страна C лежи и на правата (q), па затоа $C = (q) \cap S_{A,60^0}(p)$. Аналогно важи за ротацијата $S_{A,-60^0}$.



Нека $S_{A,60^0}(p) = (p_1)$ и $S_{A,-60^0}(p) = (p_2)$. Ако $C_1 = (q) \cap (p_1)$, $C_2 = (q) \cap (p_2)$, $S_{A,-60^0}(C_1) = B_1$ и $S_{A,60^0}(C_2) = B_2$, Тогаш AB_1C_1 и AB_2C_2 се бараните триаголници, цртеж лево. Притоа, барем една од правите $S_{A,60^0}(p)$ и $S_{A,-60^0}(p)$ ја сече правата (q), што значи дека задачата секогаш има барем едно решение. ■

11. Дадени се прави (p) и (q) и точка O. Конструирај квадрат $ABCD$ со центар во точката O, така што две соседни темиња да лежат на правите (p) и (q), соодветно.



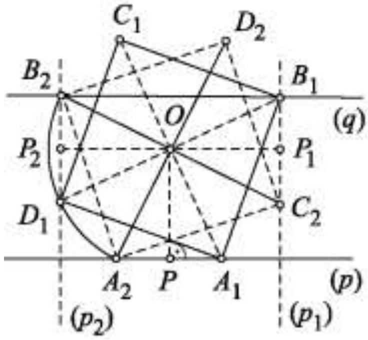
Решение. Да претпоставиме дека задачата е решена и нека $ABCD$ е бараниот квадрат, цртеж 65. Имаме $\measuredangle AOB = -90^0$, па затоа $S_{O,-90^0}(A) = B$. Понатаму, од $A \in (p)$, ќе следува $B \in (q) \cap$

$S_{O,-90^0}(p)$.

Да ги разгледаме ротациите $S_{O,90^0}$ и $S_{O,-90^0}$. Имаме

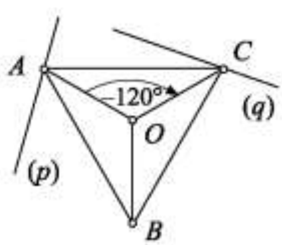
$$(p_1)=S_{O,90^0}(p),\ (p_2)=S_{O,-90^0}(p),$$
$$B_1=(p_1)\cap(q), B_2=(p_2)\cap(q),$$
$$A_1=S_{O,-90^0}(B_1),\ A_2=S_{O,90^0}(B_2).$$

Тогаш бараните квадрати се квадратите со страни A_1B_1 и A_2B_2, соодветно.

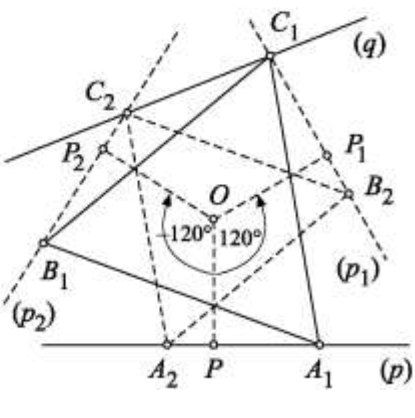


Да забележиме дека задачата може да има или две решенија или ниедно решение. Имено, ако правите (p) и (q) се заемно нормални, тогаш правите (p_1) и (p_2) се паралелни со правата (q) и задачата нема решение, а ако правите (p) и (q) не се заемно нормални, тогаш задачата има точно две решенија. ■

12. Дадени се прави (p) и (q) и точка O. Конструирај рамностран триаголник ABC со центар во точката O, така да две негови темиња лежат на правите (p) и (q), соодветно.



Решение. Да претпоставиме дека задачата е решена и ABC е бараниот триаголник. Бидејќи $\measuredangle AOC=-120^0$, добиваме $S_{O,-120^0}(A)=C$, па затоа $C=S_{O,-120^0}(p)\cap(q)$, цртеж десно.



Да ги разгледаме ротациите $S_{O,120^0}$ и $S_{O,-120^0}$. Имаме

$$(p_1)=S_{O,120^0}(p),\ (p_2)=S_{O,-120^0}(p),$$
$$C_1=(p_1)\cap(q),\ C_2=(p_2)\cap(q),$$
$$A_1=S_{O,-120^0}(C_1),\ A_2=S_{O,120^0}(C_2).$$

Тогаш бараните триаголници се со страни A_1C_1 и A_2C_2, соодветно (цртеж лево).

Задачата може да има две, едно или ниедно решение. ■

13. Нека $S(z)=az+b$, $a\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$ е хомотетија и M е произволна точка. Докажи дека центарот на хомотетијата C, точката M и нејзината слика N се колинеарни точки.

Решение. Нека афиксот на точката M е z. Тогаш афиксите на центарот на хомотетијата C и точката N се $c=\frac{b}{1-a}$ и $w=az+b$. Тогаш,

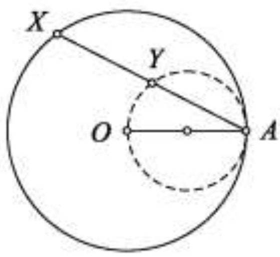
$$\frac{\overline{w}-\overline{z}}{\overline{c}-\overline{z}}=\frac{a\overline{z}+\overline{b}-\overline{z}}{\frac{\overline{b}}{1-a}-\overline{z}}=\frac{\overline{b}+(a-1)\overline{z}}{\overline{b}+(a-1)\overline{z}}(1-a)=1-a=\frac{b+(a-1)z}{b+(a-1)z}(1-a)=\frac{az+b-z}{\frac{b}{1-a}-z}=\frac{w-z}{c-z},$$

па од последица 1.4 следува дека точките C,M и N се колинеарни. ■

14. Дадени се кружница $K(O,r)$ и точка A на неа. Најди го геометриското место на средините на тетивите повлечени на кружницата (K) од точката A.

Решение. Нека AX е произволна тетива на кружницата $K(O,r)$ и нека Y е нејзината средина, цртеж 69. Ако афиксите на точките A, X и Y се a, z и w, соодветно, тогаш од условот на задачата следува дека

$$w=\frac{1}{2}(z+a)=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}a,$$

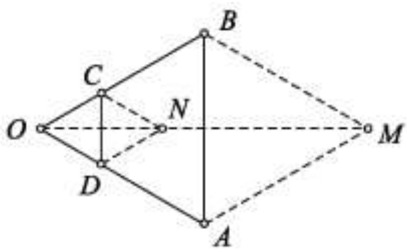


што значи дека бараното геометриско место е слика на кружницата (K) со сличноста

$$S(z)=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}a,$$

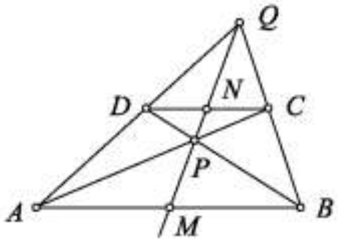
која има коефициент $\frac{1}{2}$ и центар $c=\frac{\frac{1}{2}a}{1-\frac{1}{2}}=a$. Конечно, бараното геометриско место е слика на кружницата (K) при хомотетијата со центар во точката A и коефициент $\frac{1}{2}$, т.е. тоа е кружницата со дијаметар OA. ■

15. Над основите AB и DC од трапезот $ABCD$ на иста страна од нив, конструирани се рамнострани триаголници ABM и DCN. Докажи дека правата MN минува низ пресечната точка O од продолженијата на краците.



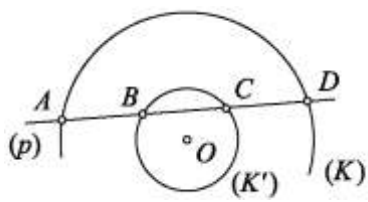
Упатство. Докажете дека хомотетијата со центар во точката O и коефициент $\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}}$ ја пресликува точката N во точката M, (види цртеж), а потоа искористете ја задача 13. ■

16. Нека $ABCD$ е трапез со основи AB и CD и нека M е средина на AB, N е средина на CD, P е пресекот на дијагоналите и Q е пресекот на продолженијата на краците. Докажи дека точките M, N, P и Q се колинеарни.



Упатство. Докажете дека постои хомотетија H со центар во Q и коефициент $\frac{\overline{DC}}{\overline{AB}}$ таква што $\mathrm{H}(A)=D$ и $\mathrm{H}(B)=C$, потоа заклучете дека $\mathrm{H}(M)=N$, цртеж 71, и искористете ја задача 45. Докажете дека постои хомотетија H_1 со центар во P и коефициент $-\frac{\overline{DC}}{\overline{AB}}$ таква што $\mathrm{H}_1(A)=C$ и $\mathrm{H}_1(B)=D$, потоа заклучете дека $\mathrm{H}(M)=N$, цртеж горе, и искористете ги својствата на хомотетијата. ■

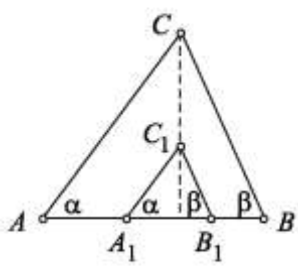
17. Дадени се два концентрични кружници $K(O,R)$ и $K'(O',R')$, $R>R'$. Повлечи права (p) која ги сече кружниците последователно во точки A,B,C и D, така што $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$.



Решение. Нека претпоставиме дека задачата е решена и нека (p) е бараната права, цртеж десно. Тогаш $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{1}{3}$, па затоа при хомотетија H со центар во A и коефициент $\frac{1}{3}$ точката D ќе се пресликува во точката B, што значи дека точката B ќе лежи на кружницата $\mathrm{H}(K)$. Значи, $B\in \mathrm{H}(K)\cap(K')$.

Конечно, ако фиксираме една точка A од кружницата (K) и земеме $B\in \mathrm{H}(K)\cap(K')$, тогаш бараната права е $(p)=AB$, направи цртеж. ■

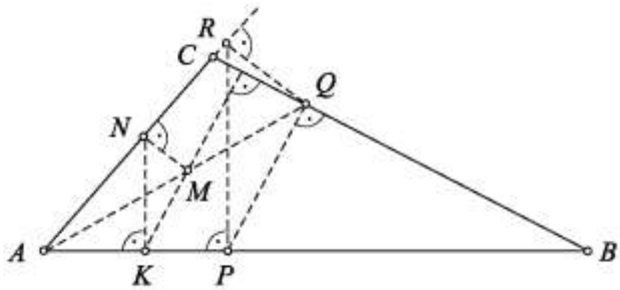
18. Конструирај триаголник ABC ако се дадени α, β и h_c.



Решение. Да претпоставиме дека задачата е решена и дека ABC е бараниот триаголник, види цртеж. Ако $A_1B_1C_1$ е произволен триаголник со агли α и β, тогаш триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се хомотетични со центар на хомотетија во точката D и коефициент $\frac{h_c}{C_1D}$. Значи, бараниот триаголник може да се конструира ако земеме произволен триаголник $A_1B_1C_1$ со агли α и β и истиот го пресликаме со хомотетија Н со центар во точката D и коефициент $\frac{h_c}{C_1D}$. ■

19. Во триаголникот ABC впиши триаголник PQR чии страни се нормални на страните на триаголникот ABC.

Упатство. Земете произволна точка K на страната AB, а потоа конструирајте го триаголникот KMN така да $NK \perp AB, MN \perp AC$. Потоа повлечете права AM и определете ја точката $Q = AM \cap BC$. Сега, бараниот триаголник PQR е слика на триаголникот KMN при хомотетија Н со центар во точката A и коефициент $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AM}}$, види цртеж. ■



20. Докажи дека ако две кружници се допираат, тогаш нивните центри се колинеарни со нивната допирна точка.

Упатство. За кружниците чии равенки се $|z|=1$ и $|z-a|=R$ најдете го афиксот c на нивната допирна точка и докажете дека точките чии афикси се $0, a$ и c се колинеарни. ■

21. Дадени се точките A и B и нека A' е точка на правата OB, B' е точка на правата OA и Z е точка од правата AB. Конструирај ја точката Z' која ја дели отсечката $A'B'$ во ист однос во кој точката Z ја дели отсечката AB.

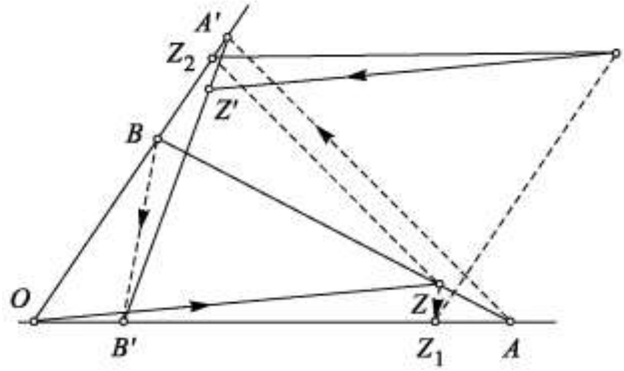
Решение. Со a, a', b, b', z да ги означиме афиксите на точките A, B, A', B', Z, соодветно. Ако $\frac{\overline{BZ}}{\overline{ZA}} = \lambda$, тогаш

$$b - z = \lambda(z - a) \qquad (1)$$

и треба да го најдеме афиксот z' на точката Z така да важи

$$b' - z' = \lambda(z' - a'). \quad (2)$$

Со Z_1 да го означиме пресекот на правата OA со правата која минува низ точката Z



и е паралелна со правата BB', а со Z_2 да го означиме пресекот на правата OB со правата која минува низ точката Z и е паралелна со правата AA'. Тогаш од сличноста на триаголниците AZZ_1 и ABB', односно од сличноста на триаголниците BZZ_2 и BBA' следува

$$b' - z_1 = \lambda(z_1 - a) \text{ и } b - z_2 = \lambda(z_2 - a'). \qquad (3)$$

Со елиминација на a и b, од (1) и (3) добиваме

$$b' - (z_1 + z_2 - z) = \lambda[(z_1 + z_2 - z) - a'],$$

па од (2) следува дека

$$z' = z_1 + z_2 - z.$$

Оттука, точката Z' се добива со конструкцијата прикажана на цртежот. ■

22. Докажи дека збирот на внатрешните агли на триаголникот е π.

Решение. Нека a, b, c се афиксите на темињата A, B, C на триаголникот. Тогаш

$$\angle CBA = \arg\frac{a-b}{c-b}, \angle BAC = \arg\frac{c-a}{b-a}, \angle ACB = \arg\frac{b-c}{a-c}.$$

Бидејќи секој од внатрешните агли на триаголникот е строго помал од π, добиваме дека нивниот збир е строго помал од 3π, па затоа

$$\begin{aligned}\angle CBA + \angle BAC + \angle ACB &= \arg\frac{a-b}{c-b} + \arg\frac{c-a}{b-a} + \arg\frac{b-c}{a-c} \\ &= \arg\frac{a-b}{c-b}\frac{c-a}{b-a}\frac{b-c}{a-c} = \arg(-1) = \pi,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

23. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник и нека точките T_a, T_b, T_c, T_d се тежиштата на триаголниците BCD, ACD, BAD, ABC, соодветно. Докажи дека средните линии на четириаголците $ABCD$ и $T_aT_bT_cT_d$ се сечат во иста точка.

Решение. Според пример I 4.2. Б) средните линии MP и NQ на четириаголникот $ABCD$ се сечат во точка T со афикс $t=\frac{a+b+c+d}{4}$, која според пример 15.10 А) е тежиште на четириаголлникот $ABCD$. Аналогно, средните линии на четириаголникот $T_aT_bT_cT_d$ се сечат во неговото тежиште, кое има афикс

$$t'=\frac{t_a+t_b+t_c+t_d}{4}=\frac{\frac{b+c+d}{3}+\frac{a+c+d}{3}+\frac{a+b+d}{3}+\frac{a+b+c}{3}}{4}=\frac{a+b+c+d}{4}.$$

Конечно, од $t=t'$ следува тврдењето на задачата. ■

24. а) Во комплексната рамнина дадени се две темиња на рамностран триаголник. Определи го третото теме.

б) Најди ја точката z_3 која со точките $z_1=2+2i$ и $z_2=3+i$ формира рамностран триаголник.

Решение. а) Нека се дадени точките A и B со афикси a и b. Задачата има две решенија C и C': ΔABC е позитивно ориентиран и $\Delta ABC'$ е негативно ориентиран. Притоа, точката C ја добиваме кога векторот $\overrightarrow{AB}$ го ротираме околу точката A за агол $\frac{\pi}{3}$, а C' ја добиваме кога векторот $\overrightarrow{AB}$ го ротираме околу точката A за агол $-\frac{\pi}{3}$. Затоа

$$c=a+(b-a)e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ и } c'=a+(b-a)e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

б) Од решението под а) имаме:

$$z_3'=z_1+(z_2-z_1)e^{i\frac{\pi}{3}}=2+2i+(1-i)e^{i\frac{\pi}{3}}=2+2i+(1-i)\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{5+\sqrt{3}}{2}+i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3''=z_1+(z_2-z_1)e^{-i\frac{\pi}{3}}=2+2i+(1-i)e^{-i\frac{\pi}{3}}=2+2i+(1-i)\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{5-\sqrt{3}}{2}+i\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$ ■

25. Даден е рамностран ΔABC и афиксот на a на темето A. Најди го афиксот на темето B ако во координатниот почеток се наоѓа:

а) темето C,

б) тежиштето T на ΔABC,

в) подножјето A_1 на висината спуштена од темето A на страната BC.

Решение. а) Имаме $c=0$. Ако ΔABC е позитивно ориентиран, тогаш точката B ја добиваме со ротација на точката A за агол $\frac{\pi}{3}$ околу точката C и притоа

$$b=ae^{i\frac{\pi}{3}}=a\frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Ако ΔABC е негативно ориентиран, тогаш точката B' ја добиваме со ротација на точката A за агол $-\frac{\pi}{3}$ околу точката C и притоа

$$b'=ae^{-i\frac{\pi}{3}}=a\frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

б) Имаме $t=0$. Ако ΔABC е позитивно ориентиран, тогаш точката B ја добиваме со ротација на точката A за агол $\frac{2\pi}{3}$ околу точката T и притоа $b=ae^{i\frac{2\pi}{3}}=a\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Ако ΔABC е негативно ориентиран, тогаш точката B' ја добиваме со ротација на точката A за агол $-\frac{2\pi}{3}$ околу точката C и притоа $b'=ae^{-i\frac{2\pi}{3}}=a\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

в) Имаме $a_1=0$. Бидејќи $\overline{A_1A}=\overline{A_1B}\sqrt{3}$, за да ја добиеме точката B ја ротираме точката A околу точката A_1 за агол $\frac{\pi}{2}$ ако ΔABC е позитивно ориентиран, односно $-\frac{\pi}{2}$ ако ΔABC е негативно ориентиран и во двата случаја добиениот резултат го делиме со $\sqrt{3}$. Значи, задачата има две решенија: $b=\frac{ai}{\sqrt{3}}$ и $b'=\frac{-ai}{\sqrt{3}}$. ■

26. Ако a,b,c се афикси на темиња на рамностран триаголник, тогаш $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$. Докажи!

Решение. Со t да го означиме афиксот на тежиштето на рамностраниот триаголник, чии темиња имаат афикси a,b,c, и нека $u=e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Тогаш $b=t+(a-t)u$ и $c=t+(a-t)u^2$. Равенството $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ е еквивалентно со равенството

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0. \qquad (1)$$

Ќе го докажеме равенството (1). Имаме

$$\begin{aligned}(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 &=[(1-u)^2+(u-u^2)^2+(u^2-1)^2](a-t)^2\\ &=[1+u^2+(u+1)^2](1-u)^2(a-t)^2\\ &=2(1+u+u^2)(1-u)^2(a-t)^2\\ &=2(1-u^3)(1-u)(a-t)^2\\ &=2(1-e^{2i\pi})(1-u)(a-t)^2\end{aligned}$$

$$=2(1-1)(1-u)(a-t)^2=0. \ \blacksquare$$

27. Ако се a,b и c комплексни броеви за кои важи равенството $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$, тогаш или $a=b=c$ или a,b и c се афикси на темиња на рамностран триаголник. Докажи!

Решение. Равенството $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ е еквивалентно на равенството $(b-c)^2=(c-a)(a-b)$, па затоа

$$|b-c|^2=|c-a|\cdot|a-b|.$$

Аналогно се докажува дека

$$|c-a|^2=|a-b|\cdot|b-c| \text{ и } |a-b|^2=|b-c|\cdot|c-a|.$$

Ако последните три равенства ги помножиме со $|b-c|$, $|c-a|$ и $|a-b|$, соодветно го добиваме равенствата

$$|a-b|^3=|b-c|^3=|c-a|^3=|a-b|\cdot|b-c|\cdot|c-a|,$$

од каде следува равенството $|a-b|=|b-c|=|c-a|$, што значи дека или $a=b=c$ или a,b и c се афикси на темиња на рамностран триаголник. ■

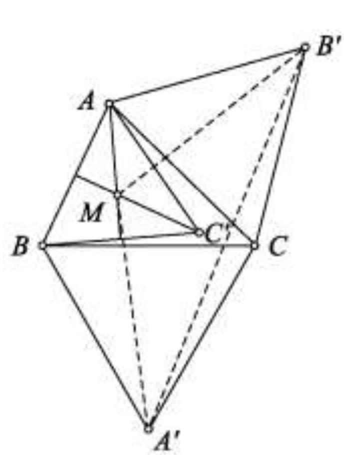
Коментар. Тврдењата во задачите 24 и 25 можеме да ги искажеме со едно тврдење:

Триаголникот ABC, каде a,b,c се афиксите на темињата е рамностран ако и само ако $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$.

Навистина, триаголникот ABC е рамностан ако и само ако е директно сличен со триаголникот BCA, односно ако и само ако $\alpha=\beta, \beta=\gamma$, $\gamma=\alpha \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$, што значи ако и само ако

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b & c & a \end{vmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca. \ \blacksquare$$



28. На страните на триаголникот ABC конструирани се рамнострани триаголници $A'BC$, $B'AC$ на надворешната страна и $C'AB$ на внатрешната страна. Ако M е центарот на триаголникот $C'AB$, докажи дека триаголникот $A'B'M$ е рамнокрак и дека $\angle A'MB'=\frac{2\pi}{3}$.

Решение. Нека афиксите на темињата A,B,C се a,b,c, соодветно. Тогаш од условот на задачата имаме

$$a'=\frac{b-ce^{i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{\pi}{3}}},\ b'=\frac{c-ae^{i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}\ \text{ и }\ c'=\frac{b-ae^{i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}=be^{i\frac{\pi}{3}}-ae^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Според тоа,

$$m=\frac{a+b+c'}{3}=\frac{1}{3}a(1-e^{i\frac{2\pi}{3}})+\frac{1}{3}b(1+e^{i\frac{\pi}{3}})=\frac{a+b}{2}+i\frac{b-a}{6}\sqrt{3}.$$

Конечно,

$$\begin{aligned}(a'-m)e^{i\frac{2\pi}{3}}+m&=a'e^{i\frac{2\pi}{3}}+m(1-e^{i\frac{2\pi}{3}})\\&=\frac{b-ce^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}e^{i\frac{2\pi}{3}}+(\frac{a+b}{2}+i\frac{b-a}{6}\sqrt{3})(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})\\&=-b+ce^{i\frac{\pi}{3}}+\frac{3a+3b+b-a}{4}+i\frac{b-a-a-b}{4}\sqrt{3}\\&=ce^{i\frac{\pi}{3}}-a(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=ce^{i\frac{\pi}{3}}-ae^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{c-ae^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}=b',\end{aligned}$$

од што следува тврдењето на задачата. ■

29. Даден е триаголник $A_1A_2A_3$ и точка P_0 во неговата рамнина. Нека $A_s=A_{s-3},\ s\geq 4$. Конструираме низа точки $P_1,P_2,P_3,...$ така да со ротација околу точката A_{k+1} за агол $-\frac{2\pi}{3}$ точката P_k се пресликува во точката P_{k+1}. Докажи дека, ако $P_{2013}=P_0$, тогаш триаголникот $A_1A_2A_3$ е рамностран.

Решение. Имаме

$$S_{A_1,-\frac{2\pi}{3}}(p_0)=p_1,\ S_{A_2,-\frac{2\pi}{3}}(p_1)=p_2,...,S_{A_{2013},-\frac{2\pi}{3}}(p_{2012})=p_0,$$

па затоа

$$(S_{A_{2013},-\frac{2\pi}{3}}\circ S_{A_{2012},-\frac{2\pi}{3}}\circ...\circ S_{A_2,-\frac{2\pi}{3}}\circ S_{A_1,-\frac{2\pi}{3}})(p_0)=p_0.$$

Понатаму, $3(-\frac{2\pi}{3})=-2\pi$, па од теорема 5.13 следува дека

$$S_{A_3,-\frac{2\pi}{3}}\circ S_{A_2,-\frac{2\pi}{3}}\circ S_{A_1,-\frac{2\pi}{3}}=S_v, \tag{1}$$

каде S_v е транслација за некој вектор v. Но,

$$S_{A_{2013},-\frac{2\pi}{3}}\circ S_{A_{2012},-\frac{2\pi}{3}}\circ...\circ S_{A_2,-\frac{2\pi}{3}}\circ S_{A_1,-\frac{2\pi}{3}}=(S_v)^{671}=S_{671v}=S_w,$$

т.е. $S_w(p_0)=p_0$, што значи дека дека S_w е транслација која има неподвижна точка. Сега од теорема 5.5. следува дека S_w е идентитет, т.е. $w=0$, па затоа $v=0$, што според (1) значи дека $S_{A_2,-\frac{2\pi}{3}} \circ S_{A_1,-\frac{2\pi}{3}} = S_{A_3,\frac{2\pi}{3}}$. Точките A_1 и A_2 се неподвижни за ротациите $S_{A_1,-\frac{2\pi}{3}}$ и $S_{A_2,-\frac{2\pi}{3}}$, па затоа

$$S_{A_1,-\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z+(1-e^{-i\frac{2\pi}{3}})a_1 \text{ и } S_{A_2,-\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z+(1-e^{-i\frac{2\pi}{3}})a_2,$$

што според теорема 5.13 значи дека за афиксот a_3 на центарот на ротацијата $S_{A_3,\frac{2\pi}{3}}$ точно е равенството

$$a_3 = \frac{e^{-i\frac{2\pi}{3}}(1-e^{-i\frac{2\pi}{3}})a_2+(1-e^{-i\frac{2\pi}{3}})a_1}{1-e^{-i\frac{2\pi}{3}}e^{-i\frac{2\pi}{3}}}, \text{ т.е. } a_3(1+e^{-i\frac{2\pi}{3}}) = e^{-i\frac{2\pi}{3}}a_2+a_1.$$

Последното равенство е еквивалентно со равенството

$$a_1-a_3=(a_2-a_3)e^{i\frac{\pi}{3}},$$

од кое следува дека триаголникот $A_1A_2A_3$ е рамностран. ■

30. Најди ги точките c и d, кои заедно со точките $a=1+i$ и $b=2+3i$ формираат квадрат во рамнината Oxy, така да a и b се две негови соседни темиња и една од двете темиња да лежи во вториот квадрант.

Одговор. $c=4i$ и $d=-1+2i$. ■

31. Точките $a=1+i$ и $c=-1+i\sqrt{3}$ се спротивни темиња на квадрат. Најди ги другите две темиња на тој квадрат.

Решение. Афиксот на центарот на квадратот е $o=i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, па затоа

$$b=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{3+\sqrt{3}}{2} \text{ и } d=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}. \ ■$$

32. Комплексните броеви $a=1+i$ и $b=2+2i$ се соседни темиња на квадрат. Најди ги другите две темиња c и d.

Одговор. Задачата има две решенија:

$$c'=1+3i, d'=2i \text{ и } c''=3+i, d''=2. \ ■$$

33. Даден е квадрат $ABCD$ и a е афикс на точката A. Најди ги афиксите b,c,d на точките B,C,D ако координатниот почеток се наоѓа во:

а) темето B,

б) темето C,

в) центарот на квадратот.

Решение. а) Имаме две решенија и во двата случаја $b=0$.

Ако квадратот е позитивно ориентиран, тогаш точката C ја добиваме со ротација на точката A за агол $-\frac{\pi}{2}$ околу точката B, па затоа $c'=-ia$. Сега, од $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ добиваме $d'-a=c'-b$, па затоа $d'=a+c'=(1-i)a$.

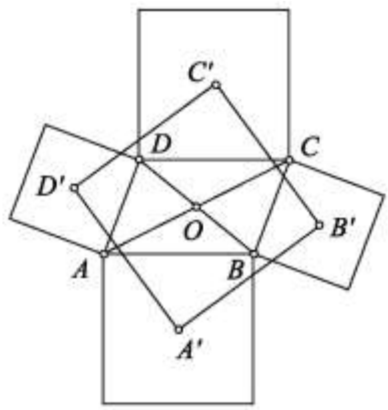
Ако квадратот е негативно ориентиран, тогаш точката C ја добиваме со ротација на точката A за агол $\frac{\pi}{2}$ околу точката B, па затоа $c''=ia$ и имаме $d''=a+c''=(1+i)a$.

б) Имаме две решенија и во двата случаја $c=0$, па бидејќи центарот O на квадратот е средина на дијагоналата за неговиот афиксот добиваме $o=\frac{a}{2}$. Ако квадратот е позитивно ориентиран точката B се добива со ротација на A околу O за агол $\frac{\pi}{2}$, а D со ротација за агол $-\frac{\pi}{2}$, па затоа $b=\frac{a}{2}+i\frac{a}{2}$ и $d=\frac{a}{2}-i\frac{a}{2}$. Ако квадратот $ABCD$ е негативно ориентиран, тогаш b и d само ќе ги заменат местата.

в) За да ги добиеме B,C,D ја ротираме точката A околу O за $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ соодветно, па затоа $b=ia, c=-a, d=-ia$. ■

34. Над страните на паралелограмот $ABCD$ од надворешната страна се конструирани квадрати. Докажи дека нивните центри образуваат квадрат.

Решение. Нека пресекот на дијагоналите на квадратот $ABCD$ се наоѓа во координатниот почеток и со a,b,c,d да ги означиме афиксите на точките $A,B,$ C,D, соодветно, а со A',B',C',D' центрите на конструираните квадрат, чии афиски се a',b',c',d', соодветно (види цртеж). Тогаш $c=-a, d=-b$, па затоа



$$(a-a')e^{-i\frac{\pi}{2}}+a'=b \text{, т.е. } a'=\frac{b+ai}{1+i}.$$

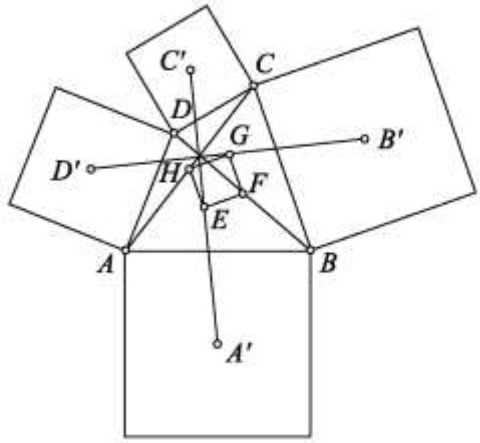
Слично, $b'=\frac{c+bi}{1+i}$, $c'=\frac{d+ci}{1+i}$ и $d'=\frac{a+di}{1+i}$, па затоа $b'=\frac{-a+bi}{1+i}$, $c'=\frac{-b-ai}{1+i}$, $d'=\frac{a-bi}{1+i}$. Конечно, од

$$b'-a'=\frac{-(a+b)+(b-a)i}{1+i}=d'-c' \text{ и}$$

$$c'-b'=\frac{a-b-(b+a)i}{1+i}=i\frac{-(a+b)+(b-a)i}{1+i}=i(b'-a'),$$

следува дека четириаголникот $A'B'C'D'$ е квадрат. ■

35. Над страните на четириаголникот $ABCD$ од надворешните страни се конструирани квадрати. Ако A', B', C' и D' се центрите на квадратите над страните AB, BC, CD и DA, соодветно, E е средина на $A'C'$, F е средина на BD, G е средина на $B'D'$ и H е средина на AC докажи дека четириаголникот $EFGH$ е квадрат.



Решение. Нека афиксите на точките ги означиме со соодветните мали букви. Од својствата на ротацијата и од условот на задачата следува

$$a'=\frac{a-bi}{1-i}, b'=\frac{b-ci}{1-i}, c'=\frac{c-di}{1-i}, d'=\frac{d-ai}{1-i}.$$

Понатаму,

$$e=\frac{a'+c'}{2}=\frac{a+c-(b+d)i}{2(1-i)}, g=\frac{b'+d'}{2}=\frac{b+d-(a+c)i}{2(1-i)}, f=\frac{b+d}{2}, h=\frac{a+c}{2}.$$

Според тоа,

$$f-e=\frac{b+d}{2}-\frac{a+c-(b+d)i}{2(1-i)}=\frac{b+d}{2(1-i)}-\frac{a+c}{2(1-i)},$$

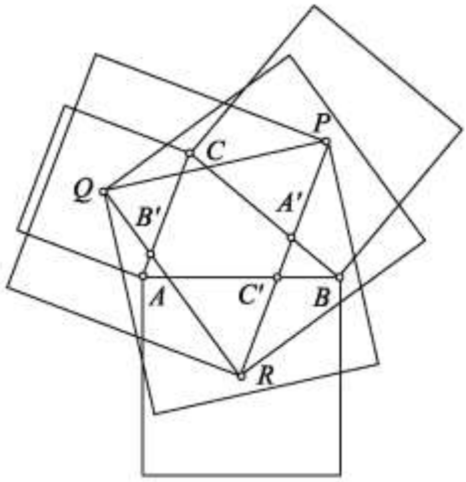
$$g-h=\frac{b+d-(a+c)i}{2(1-i)}-\frac{a+c}{2}=\frac{b+d}{2(1-i)}-\frac{a+c}{2(1-i)}, \text{ и}$$

$$g-f=\frac{b+d-(a+c)i}{2(1-i)}-\frac{b+d}{2}=(\frac{b+d}{2(1-i)}-\frac{a+c}{2(1-i)})=i(f-e),$$

од каде следува дека четириаголникот $EFGH$ е квадрат. ■

36. Над страните ABC од надворешната страна се конструирани квадрати чии центри се P,Q,R. Над страните на триаголникот PQR од внатрешната страна се конструирани квадрати чии центри се A',B',C'. Докажи дека точките A',B',C' се средини на страните на квадратот ABC.

Решение. Нека афиксите на точките ги означиме со соодветните мали букви и нека A', B', C' се центрите на квадратите конструирани над страните QR, RP, PQ, соодветно (види цртеж). Тогаш, од условот на задачата и од својствата на ротацијата следува



$$p = \frac{b-ci}{1-i}, q = \frac{c-ai}{1-i}, r = \frac{a-bi}{1-i}, \qquad (1)$$

$$a' = \frac{r-qi}{1-i}, b' = \frac{p-ri}{1-i}, c' = \frac{q-pi}{1-i}. \quad (2)$$

Ако во (2) замениме за p, q, r од (1) добиваме

$$a' = \frac{b+c}{2}, b' = \frac{c+a}{2}, c' = \frac{a+b}{2},$$

што и требаше да се докаже. ■

37. Нека a, b се комплексни броеви кои не се реални и кои ги задоволуваат условите $|a-b| = 2$ и $ab = 1$. Докажи дека четириаголникот $ABCD$ чии темиња имаат афикси $-1, a, 1, b$, соодветно е рамнокрак трапез.

Решение. Бидејќи $\overline{AC} = |1-(-1)| = 2 = |b-a| = \overline{BD}$ доволно е да докажеме дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен. Но,

$$\frac{[b-(-1)](1-a)}{[1-(-1)](b-a)} = \frac{1-a+b-ab}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2(b-a)} = \frac{1}{2} \in \mathbf{R},$$

па од забелешка 3.6 б) следува дека точките $-1, a, 1, b$ лежат на една кружница и не припаѓаат на една права, бидејќи во тој случај тоа мора да е реалната оска, што не е можно. Значи, четириаголникот $ABCD$ е рамнокрак трапез. ■

38. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник и H_A, H_B, H_C и H_D се ортоцентрите на триаголниците BCD, CDA, DAB и ABC, соодветно. Докажи дека четириаголниците $ABCD$ и $H_AH_BH_CH_D$ се складни.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека кружницата опишана околу четириаголникот $ABCD$ е единечна. Имаме,

$$h_a = b+c+d, h_b = c+d+a, h_c = d+a+b, h_d = a+b+c.$$

За да докажеме дека четириаголниците $ABCD$ и $H_AH_BH_CH_D$ се складни, доволно е да докажеме дека за секои $x,y\in\{a,b,c,d\}$ важи

$$|x-y|=|h_x-h_y|,$$

(зошто?), што лесно се проверува. Навистина, на пример

$$|h_a-h_b|=|b+c+d-(c+d+a)|=|b-a|=|a-b|. \blacksquare$$

39. Нека се a,b,c комплексни броеви за кои важи

$$a+b+c=0 \text{ и } |a|=|b|=|c|,$$

тогаш a,b,c се темиња на рамностран триаголник. Докажи!

Решение. Имаме

$$|a-b|^2=(a-b)(\overline{a}-\overline{b})=a\overline{a}-a\overline{b}-b\overline{a}+b\overline{b}=4-a\overline{a}-a\overline{b}-b\overline{a}-b\overline{b}$$

$$=4-(a+b)(\overline{a}+\overline{b})=4-|a+b|^2=4-|-c|^2=4-|c|^2=3.$$

Според тоа, $|a-b|=\sqrt{3}$. На сличен начин се докажува дека $|b-c|=\sqrt{3}$ и $|c-a|=\sqrt{3}$, што значи дека a,b,c се темиња на рамностран триаголник. ■

40. Нека комплексните броеви a,b,c имаат еднакви модули и нека се афикси на темиња на рамностран триаголник. Докажи, дека комплексните броеви ab,bc,ca исто така се афикси на темиња на рамностран триаголник.

Решение. Нека важи $|a|=|b|=|c|=r$ и $|a-b|=|b-c|=|c-a|=x$. Тогаш

$$|ab-bc|=|b|\cdot|a-c|=xr,$$
$$|bc-ca|=|c|\cdot|b-a|=xr,$$
$$|ca-ab|=|a|\cdot|c-b|=xr,$$

од што следува дека ab,bc,ca се афикси на темиња на рамностран триаголник. ■

41. Над страните BC,CA и AB на ΔABC, од надворешната страна се конструирани квадратите $BCDE,CAFG$ и $ABHI$. Нека се $GCDQ$ и $EBHP$ паралелограми. Докажи дека ΔAPQ е рамнокрак правоаголен.

Решение. Да забележиме дека точката h се добива со ротација на точката a околу точката b за агол $\frac{\pi}{2}$ во позитивна насока, што значи дека

$$h=a+(b-a)e^{i\frac{\pi}{2}}=(1-i)a+ib.$$

Слично, $d=(1-i)b+ic$ и $g=(1-i)c+ia$. Четириаголникот $BCDE$ е квадрат, па затоа средините на страните CE и BD се совпаѓаат, од што следува дека $d+b=e+c$, од што следува дека $e=(1+i)b-ic$. Аналогно, $g=(1+i)c-ia$. Понатаму, четириаголниците $BEPH$ и $CGQD$ се паралелограми, па затоа $p+b=e+h$ и $c+q=g+d$, односно $p=ia+b-ic$ и $q=-ia+ib+c$. Конечно, со ротација на точката p околу точката a за агол $\frac{\pi}{2}$ добиваме

$$a+(p-a)e^{i\frac{\pi}{2}}=a+i(ia+b-ic-a)=a-a+ib+c-ia=-ia+ib+c=q.$$

Конечно, точката Q се добива со ротација на точката P околу точката A за агол $\frac{\pi}{2}$, па затоа ΔAPQ е рамнокрак правоаголен. ■

42. Над страните BC, CD, DA на конвексен четириаголник $ABCD$, од надворешната страна, конструирани се рамнострани триаголници BCB_1, CDC_1, DAD_1. Ако точките P, Q и R се средини на страните B_1C_1, C_1D_1 и AB, соодветно, докажи дека триаголникот PQR е рамностран.

Решение. Точките B_1, C_1, D_1 се добиваат со ротација на точките B, C, D околу точките C, D, A за агол $\frac{\pi}{3}$ во позитивна насока, соодветно. Оттука, ако земеме $\varepsilon=e^{i\frac{\pi}{3}}$ имаме

$$b_1=c+(b-c)\varepsilon,\ c_1=d+(c-d)\varepsilon,\ d_1=a+(d-a)\varepsilon.$$

Понатаму, бидејќи P е средина на B_1C_1 имаме

$$p=\frac{b_1+c_1}{2}=\frac{b\varepsilon+c+(1-\varepsilon)d}{2}.$$

Слично добиваме

$$q=\frac{c\varepsilon+d+(1-\varepsilon)a}{2}$$

и јасно

$$r=\frac{a+b}{2}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} r+(p-r)\varepsilon &= \frac{a+b}{2}+\left(\frac{b\varepsilon+c+(1-\varepsilon)d}{2}-\frac{a+b}{2}\right)\varepsilon \\ &= \frac{c\varepsilon+a(1-\varepsilon)+d(\varepsilon-\varepsilon^2)+b(1-\varepsilon+\varepsilon^2)}{2} \\ &= \frac{c\varepsilon+d+(1-\varepsilon)a}{2}=q \end{aligned}$$

бидејќи $\varepsilon^2-\varepsilon+1=0$, (зошто?). Според тоа, точката Q се добива со ротација на точката P околу точката R, од што следува дека триаголникот PQR е рамностран. ■

43. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков да $\overline{AC}=\overline{BD}$. Над страните на четириагоникот однадвор се конструирани рамнострани триаголници. Нека се O_1,O_2,O_3,O_4 центрите на триаголниците коструирани над страните AB,BC,CD,DA, соодветно. Докажи дека правите O_1O_3 и O_2O_4 се заемно нормални.

Решение. Бидејќи точката A се добива со ротација на точката B околу точката O_1 за агол $\frac{2\pi}{3}$ во позитивна насока, при ознака $\varepsilon=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ добиваме $a=o_1+(b-o_1)\varepsilon$, т.е. $o_1=\frac{a-b\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Аналогно, $o_2=\frac{b-c\varepsilon}{1-\varepsilon}$, $o_3=\frac{c-d\varepsilon}{1-\varepsilon}$ и $o_4=\frac{d-a\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Понатаму, за да докажеме дека $O_1O_3\perp O_2O_4$ доволно е да докажеме дека $\frac{o_1-o_3}{\overline{o_1}-\overline{o_3}}=-\frac{o_2-o_4}{\overline{o_2}-\overline{o_4}}$, т.е. доволно е да докажеме дека

$$\frac{a-c-(b-d)\varepsilon}{\overline{a}-\overline{c}-(\overline{b}-\overline{d})\overline{\varepsilon}}=-\frac{b-d-(c-a)\varepsilon}{\overline{b}-\overline{d}-(\overline{c}-\overline{a})\overline{\varepsilon}}.$$

Во точноста на последното равенство можеме непосредно да се увериме ако искористиме дека $\varepsilon\overline{\varepsilon}=1$, т.е. $\overline{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}$ и

$$(a-c)\overline{(a-c)}=|a-c|^2=|b-d|^2=(b-d)\overline{(b-d)}.$$ ■

44. Нека M и N се различни точки во рамнината на ΔABC такви да

$$\overline{AM}:\overline{BM}:\overline{CM}=\overline{AN}:\overline{BN}:\overline{CN}.$$

Докажи дека правата MN минува низ центарот на опишаната кружница околу ΔABC.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека опишаната кружница околу ΔABC е единична. Тогаш $o=0$ и $\overline{a}=\frac{1}{a}$, $\overline{b}=\frac{1}{b}$ и $\overline{c}=\frac{1}{c}$. Пропорцијата $\overline{AM}:\overline{BM}=\overline{AN}:\overline{BN}$ ја запишуваме во облик

$$1=\frac{|a-m|\cdot|b-n|}{|a-n|\cdot|b-m|},$$

па затоа

$$1=\frac{|a-m|^2|b-n|^2}{|a-n|^2|b-m|^2}=\frac{(a-m)(\overline{a}-\overline{m})(b-n)(\overline{b}-\overline{n})}{(a-n)(\overline{a}-\overline{n})(b-m)(\overline{b}-\overline{m})}. \tag{1}$$

Понатаму,

$$(a-m)(\overline{a}-\overline{m})(b-n)(\overline{b}-\overline{n})=(1-\tfrac{m}{a}-a\overline{m}+m\overline{m})(1-\tfrac{n}{b}-b\overline{n}+n\overline{n})\,,$$

$$(a-n)(\overline{a}-\overline{n})(b-m)(\overline{b}-\overline{m})=(1-\tfrac{n}{a}-a\overline{n}+n\overline{n})(1-\tfrac{m}{b}-b\overline{m}+m\overline{m})$$

и ако замениме во (1) го добиваме равенството

$$(1-\tfrac{m}{a}-a\overline{m}+m\overline{m})(1-\tfrac{n}{b}-b\overline{n}+n\overline{n})=(1-\tfrac{n}{a}-a\overline{n}+n\overline{n})(1-\tfrac{m}{b}-b\overline{m}+m\overline{m})$$

Од кое после средувањето и кратењето со $a-b$ добиваме

$$\frac{m}{ab}-\overline{m}-\frac{n}{ab}+\frac{(a+b)\overline{m}n}{ab}-\frac{m\overline{m}n}{ab}+\overline{n}-\frac{(a+b)m\overline{n}}{ab}+m\overline{m}\overline{n}+\frac{mn\overline{n}}{ab}-\overline{m}n\overline{n}=0\,. \qquad (2)$$

Аналогно од пропорцијата $\overline{AM}:\overline{CM}=\overline{AN}:\overline{CN}$, при што во (2) b го заменуваме со c, заради симетрија го добиваме равенството

$$\frac{m}{ac}-\overline{m}-\frac{n}{ac}+\frac{(a+c)\overline{m}n}{ac}-\frac{m\overline{m}n}{ac}+\overline{n}-\frac{(a+c)m\overline{n}}{ac}+m\overline{m}\overline{n}+\frac{mn\overline{n}}{ac}-\overline{m}n\overline{n}=0\,. \qquad (3)$$

Со одземање на (3) од (2), после средувањето и делење на добиеното равенство со $b-c$ го добиваме равенството

$$-\frac{m}{abc}+\frac{n}{abc}-\frac{\overline{m}n}{bc}+\frac{m\overline{m}n}{abc}+\frac{m\overline{n}}{bc}-\frac{mn\overline{n}}{abc}=0\,. \qquad (4)$$

Понатаму, заради симетрија повторувајќи ја постапката за пропорциите $\overline{AM}:\overline{BM}=\overline{AN}:\overline{BN}$ и $\overline{BM}:\overline{CM}=\overline{BN}:\overline{CN}$ се добива равенството

$$-\frac{m}{abc}+\frac{n}{abc}-\frac{\overline{m}n}{ac}+\frac{m\overline{m}n}{abc}+\frac{m\overline{n}}{ac}-\frac{mn\overline{n}}{abc}=0\,. \qquad (5)$$

Конечно, ако го одземеме (5) од (4), а потоа добиеното равенство го поделиме со $\frac{1}{ac}-\frac{1}{bc}$ го добиваме равенството $\overline{m}n-\overline{n}m=0$, кое е квивалентно со равенството

$$\frac{m-o}{\overline{m}-\overline{o}}=\frac{n-o}{\overline{n}-\overline{o}}\,,$$

од што следува дека точките M,N и O се колинеарни. ■

45. Четириагоникот $ABCD$ е впишан во кружница, при што AC е дијаметар. Правите AB и CD се сечат во точката M, а тангентите на кружницата конструирани во точките B и D се сечат во точката N. Докажи дека $MN\perp AC$.

Решение. Нека четириаголникот $ABCD$ е впишан во единичната кружница. Бидејќи AC е дијаметар имаме $c=-a$. Понатаму, од забелешка 3.13 следува дека афиксот на точката M е

$$m=\frac{(a+b)cd-(c+d)ab}{cd-ab}=\frac{2bd+ad-ab}{d+b}$$

и афиксот на точката N е $n=\frac{2bd}{b+d}$. Понатаму, од $\overline{a}=\frac{1}{a}$, $\overline{b}=\frac{1}{b}$ и $\overline{d}=\frac{1}{d}$ добиваме

$$m-n=\frac{a(d-b)}{b+d} \text{ и } \overline{m}-\overline{n}=\frac{\overline{a}(\overline{d}-\overline{b})}{\overline{b}+\overline{d}}=\frac{b-d}{a(b+d)},$$

што значи

$$\frac{m-n}{\overline{m}-\overline{n}}=a^2.$$

Но,

$$\frac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}}=-\frac{2a}{2\overline{a}}=-a^2,$$

па затоа за комплексните аглови коефициенти на правите MN и AC важи

$$\frac{m-n}{\overline{m}-\overline{n}}=a^2=-\frac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}},$$

што значи дека $MN\perp AC$. ■

46. Нека H е ортоцентар на ΔABC и точката P нека припаѓа на неговата опишана кружница. Нека E е подножјето на висината BH, четириаголниците $PAQB$ и $PARC$ се паралелграми и нека AQ и HR се сечат во точката X. Докажи дека правите EX и AP се паралелни.

Решение. Без ограничување на општоста дека крижницата опишана околу ΔABC е единична. Од теорема 15.2 имаме $h=a+b+c$, а од решението на пример 1.9 добиваме дека афиксот на точката E е даден со $e=\frac{1}{2}(a+b+c-\frac{ac}{b})$. Понатаму, четириаголникот $PAQB$ е паралелограм, па затоа средините на отсечките PQ и AB се совпаѓаат, т.е. $q=a+b-p$. Аналогно, бидејќи четириаголникот $PARC$ е паралелограм имаме $r=a+c-p$. Но, точките A,Q,X се колинеарни, па затоа

$$\frac{x-a}{\overline{x}-\overline{a}}=\frac{a-q}{\overline{a}-\overline{q}}=\frac{p-b}{\overline{p}-\overline{b}}=-pb \text{, т.е. } \overline{x}=\frac{pb+a^2-ax}{abp}.$$

Аналогно, точките H,R,X се колинеарни, па затоа

$$\frac{x-h}{\overline{x}-\overline{h}}=\frac{h-r}{\overline{h}-\overline{r}}=\frac{p+b}{\overline{p}+\overline{b}}=pb \text{, т.е. } \overline{x}=\frac{x-a-b-c+p+\frac{bp}{a}+\frac{bp}{c}}{ab}.$$

Со изедначување на добиените равенства за $\overline{x}$ добиваме

$$x=\frac{1}{2}(2a+b+c-p-\frac{bp}{c}).$$

Конечно, за да докажеме дека правите EX и AP се паралелни доволно е да докажеме дека

$$\frac{e-x}{\overline{e}-\overline{x}}=\frac{a-p}{\overline{a}-\overline{p}}=-ap,$$

што непосредно се проверува ако се земеме предвид дека

$$e-x=\tfrac{1}{2}(p+\tfrac{bp}{c}-a-\tfrac{ac}{b})=\tfrac{(b+c)(bp-ac)}{2bc}.\ \blacksquare$$

47. Даден е тетивен четириагоник $ABCD$. Точките P и Q се симетрични на точката C во однос на правите AB и AD, соодветно. Докажи дека правата PQ минува низ ортоцентарот на триаголникот ABD.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека четириаголникот $ABCD$ е впишан во единичната кружница. Според решението на пример 1.9 за афиксите на точките P и Q добиваме

$$p=a+b-\tfrac{ab}{c},\ q=a+d-\tfrac{ad}{c}. \tag{1}$$

Од теорема 15.2 следува дека ортоцентарот на ΔABD има афикс $h=a+b+d$, па затоа од (1) следува

$$\frac{p-h}{\overline{p}-\overline{h}}=\frac{a+b-\frac{ab}{c}-a-b-d}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{c}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{d}}=\frac{abd}{c}=\frac{a+d-\frac{ad}{c}-a-b-d}{\frac{1}{a}+\frac{1}{d}-\frac{c}{ad}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{d}}=\frac{q-h}{\overline{q}-\overline{h}},$$

што значи дека правата PQ минува низ ортоцентарот на триаголникот ABD. $\blacksquare$

48. Нека е даден ΔABC, H е неговиот ортоцентар, O е центарот на опишаната кружница и R е радиусот на опишаната кружница. Нека точката D е симетрична на точката A во однос на правата BC, точката E е симетрична на точката B во однос на правата CA и точката F е симетрична на точката C во однос на правата AB. Докажи дека точките D,E и F се колинеарни ако и само ако $\overline{OH}=2R$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека триаголникот е впишан во единичната кружница. Тогаш $o=0$, $R=1$ и од теорема 15.2 имаме $h=a+b+c$ и Според пример 1.9 за афиксите на точките D,E и F имаме

$$d=b+c-\tfrac{bc}{a},\ e=a+c-\tfrac{ac}{b},\ f=a+b-\tfrac{ab}{c}. \tag{1}$$

Понатаму, точките D,E и F се колинеарни ако и само

$$\frac{d-e}{\overline{d}-\overline{e}}=\frac{f-e}{\overline{f}-\overline{e}}. \tag{2}$$

Ако од (1) замениме во (2), по средувањето на добиваме точките D,E и F се колинеарни ако и само ако

$$(c-a)(abc-a^2b-ab^2-a^2c-ac^2-b^2c-bc^2)=0,$$

и како $c-a\neq 0$ добиваме дека точките D,E и F се колинеарни ако и само ако

$$abc-a^2b-ab^2-a^2c-ac^2-b^2c-bc^2=0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2b+ab^2+abc+a^2c+ac^2+abc+b^2c+bc^2+abc}{abc}=4 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\frac{ab(a+b+c)+ac(a+b+c)+bc(a+b+c)}{abc}=4 \qquad \Leftrightarrow$$

$$(a+b+c)(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})=4 \quad \Leftrightarrow \quad (a+b+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})=4 \quad \Leftrightarrow$$

$$|h-o|^2=h\overline{h}=4R^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{OH}=2R. \ ■$$

49. Даден е ΔABC. Тангентата во темето A на кружницата опишана околу ΔABC ја сече средната линија на триаголникот паралелна со BC во точка A_1. Аналогно се дефинираат точките B_1 и C_1. Докажи дека точките A_1, B_1 и C_1 се колинеарни и дека правата која ги содржи овие точки е нормална на Ојлеровата права за ΔABC.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека ΔABC е впишан во единичната кружница. Тогаш $h=a+b+c$ и според 17.4 Ојлеровата права има равенка $z=\frac{h}{\overline{h}}\overline{z}$. Понатаму, Ако точките A',B',C' се средините на страните BC,CA,AB соодветно, тогаш нивните афикси се

$$a'=\frac{b+c}{2}, b'=\frac{c+a}{2}, c'=\frac{a+b}{2}.$$

Според тоа, равенката на средната линија $B'C'$ паралелна со BC е

$$z-\frac{c+a}{2}=-bc(\overline{z}-\frac{a+c}{2ac}), \tag{1}$$

а равенката на тангентата повлечена во темето A е

$$z+a^2\overline{z}=2a\ . \tag{2}$$

Од (2) имаме $\overline{z}=\frac{2a-z}{a^2}$ и со замена во (1) ја добиваме равенката

$$z-\frac{c+a}{2}=-bc(\frac{2a-z}{a^2}-\frac{a+c}{2ac}),$$

чие решение $a_1=\frac{a^2(a+b+c)-3abc}{2(a^2-bc)}$ е афиксот на точката A_1. Симетрично,

$$b_1=\frac{b^2(a+b+c)-3abc}{2(b^2-ca)} \text{ и } c_1=\frac{c^2(a+b+c)-3abc}{2(c^2-ab)}.$$

Понатаму,

$$a_1 - b_1 = \frac{a^2(a+b+c)-3abc}{2(a^2-bc)} - \frac{b^2(a+b+c)-3abc}{2(b^2-ca)} = -\frac{c(a-b)^3(a+b+c)}{2(a^2-bc)(b^2-ca)}$$

и лесно се проверува дека

$$\frac{a_1-b_1}{\overline{a_1}-\overline{b_1}} = -\frac{(a+b+c)abc}{ab+bc+ca} = -\frac{h}{\overline{h}},$$

што значи дека правата A_1B_1 е нормална на Ојлеровата права. Симетрично, правата B_1C_1 е нормална на Ојлеровата права, од што следува дека точките A_1, B_1 и C_1 се колинеарни. ■

50. Нека H е ортоцентарот на ΔABC. Докажи дека Ојлеровите кружници на триаголниците ABC, ABH, BCH, CAH се совпаѓаат.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека ΔABC е впишан во единичната кружница. Центарот на Ојлеровата кружница на ΔABC е во точката E со афикс $e = \frac{a+b+c}{2}$. Од решението на пример 17.9 следува дека кружниците опишани околу триаголниците ABC и ABH имаат еднакви радиуси и дека точката O' со афикс $o' = a+b$ е центар на кружницата опишана околу траиголникот ABH. Од $CH \perp AB$ и $BC \perp AH$ следува дека C е ортоцентар на триаголникот ABH. Ако со E' го означиме центарот на Ојлеровата кружница на триаголникот ABH, а со $H'(h')$ неговиот ортоцентар, добиваме $h' = c$ и E' е средина на на отсечката $O'H'$, т.е. на $O'C$, па затоа таа има афикс $e' = \frac{(a+b)+c}{2} = e$, што значи дека точките E и E' се совпаѓаат. Но, радиусот на Ојлеровата кружница е еднаков на половина од радисуот на опишаната кружница, па од претходно изнесеното следува дека Ојлеровите кружници на триаголниците ABC и ABH.

На потполно ист начин се докажува дека Ојлеровите крушници на триаголниците ABC и BCH, односно на триаголниците ABC и CAH се совпаѓаат.

Конечно, од претходно изнесеното следува дека Ојлеровите кружници на триаголниците ABC, ABH, BCH, CAH се совпаѓаат. ■

51. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник. Докажи дека

а) Ојлеровите кружници за триаголниците ABC, BCD, CDA, DAB се сечат во една точка.

б) Центрите на Ојлеровите кружници на траиголниците $ABC, BCD,$ CDA, DAB се темиња на тетивен четириаголник.

Решение. а) Без ограничување на општоста можеме да земеме дека четириаголникот $ABCD$ е впишан во единичната кружница. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен, па затоа центрите на опишаните кружници околу триаголниците ABC, BCD, CDA, DAB се совпаѓаат. Ако со E_1, E_2, E_3, E_4 ги означиме центрите на Ојлеровите кружници на триаголниците $ABC, BCD,$ CDA, DAB, тогаш тие ќе имаат афикси $e_1 = \frac{a+b+c}{2}, e_2 = \frac{b+c+d}{2}, e_3 = \frac{c+d+a}{2},$ $e_4 = \frac{d+a+b}{2}$, соодветно. Ако со H_1, H_2, H_3, H_4 ги означиме ортоцентрите на триаголниците ABC, BCD, CDA, DAB, тогаш тие ќе имаат афикси $h_1 = a+b+c, h_2 = b+c+d, h_3 = c+d+a,\ \ h_4 = d+a+b$, соодветно. Точката E со афикс $e = \frac{a+b+c+d}{2}$ е средина на отсечките DH_1, AH_2, BH_3, CH_4 и притоа важи

$$|e-e_1| = \left|\frac{a+b+c+d}{2} - \frac{a+b+c}{2}\right| = \left|\frac{d}{2}\right| = \frac{1}{2},$$
$$|e-e_2| = \left|\frac{a+b+c+d}{2} - \frac{b+c+d}{2}\right| = \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2},$$
$$|e-e_3| = \left|\frac{a+b+c+d}{2} - \frac{c+d+a}{2}\right| = \left|\frac{b}{2}\right| = \frac{1}{2},$$
$$|e-e_4| = \left|\frac{a+b+c+d}{2} - \frac{d+a+b}{2}\right| = \left|\frac{c}{2}\right| = \frac{1}{2},$$

што значи дека таа припаѓа на Ојлеровите кружници на триаголниците $ABC, BCD,\ CDA, DAB$.

б) Непосредно следува од равенствата

$$|e-e_1| = |e-e_2| = |e-e_3| = |e-e_4| = \frac{1}{2}. \ \blacksquare$$

52. Нека AA_1, BB_1 и CC_1 се висини на ΔABC и нека $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Нека M е средина на BC, H е ортоцентар на ΔABC и D е пресек на BC и B_1C_1. Докажи дека $DH \perp AM$.

Решение. Нека кружницата опишана околу ΔABC е единична. Од условот на задачата имаме $b_1 = \frac{1}{2}(a+b+c-\frac{ac}{b})$ и $c_1 = \frac{1}{2}(a+b+c-\frac{ab}{c})$, $m = \frac{b+c}{2}$ и $h = a+b+c$. Равенката на правата BC е $z-b = \frac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}}(\overline{z}-\overline{b})$, т.е.

$$z-b = -bc\overline{z}+c. \qquad (1)$$

Равенката на правата B_1C_1 е $z-b_1 = \frac{c_1-b_1}{\overline{c_1}-\overline{b_1}}(\overline{z}-\overline{b_1})$, т.е.

$$z-b_1=-a^2(\bar{z}-\bar{b}_1)\,. \qquad (2)$$

Од (1) имаме $\bar{z}=\frac{c+b-z}{bc}$ и со замена во (2), после средувањето за афиксот на точката d добиваме

$$d=\frac{a^2b+a^2c+ab^2+ac^2-b^2c-bc^2-2abc}{2(a^2-bc)}\,.$$

Конечно, за да докажеме дека $DH\perp AM$ доволно е да провериме дека

$$\frac{d-h}{\bar{d}-\bar{h}}=-\frac{m-a}{\bar{m}-\bar{a}}\,,$$

каде $d-h=\frac{(b+c-2a)(ab+bc+ca+a^2)}{2(a^2-bc)}$ и $m-a=\frac{b+c-2a}{2}$.Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

53. Нека ABC е остроаголен триаголник таков да $\overline{BC}>\overline{CA}$ и нека O е центарот на опишаната кружница, H е ортоцентарот и F е подножјето на висината CH . Ако нормалата од F на OF и страната CA се сечат во точката P , докажи дека $\measuredangle FHP=\measuredangle BAC$.

Решение. Ќе земеме дека опишаната кружница околу ΔABC е единична. За афиксот на точката F имаме $f=\frac{1}{2}(a+b+c-\frac{ab}{c})$. Правата CA има равенка $z-a=\frac{c-a}{\bar{c}-\bar{a}}(\bar{z}-\bar{a})$, т.е. $z+ac\bar{z}=a+c$, а нормалата од F на OF има равенка $z-f=-\frac{f}{\bar{f}}(\bar{z}-\bar{f})$. Решавајќи го системот составен од последните две равенки за афиксот на точката P добиваме

$$p=f\,\frac{2ac\bar{f}-(a+c)}{ac\bar{f}-f}=\frac{(a+b+c-\frac{ab}{c})c^2}{b^2+c^2}\,.$$

Нека $\measuredangle PHF=\varphi$ и $\measuredangle BAC=\alpha$. Тогаш $\frac{f-h}{\bar{f}-\bar{h}}=\frac{p-h}{\bar{p}-\bar{h}}e^{2i\varphi}$ и $\frac{c-a}{\bar{c}-\bar{a}}=\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}e^{2i\alpha}$, т.е. $e^{2i\varphi}=\frac{(f-h)(\bar{p}-\bar{h})}{(\bar{f}-\bar{h})p-h}$ и $e^{2i\alpha}=\frac{(c-a)(\bar{b}-\bar{a})}{(\bar{c}-\bar{a})(b-a)}=\frac{c}{b}$. Тогаш од

$$p-h=-b\,\frac{ab+bc+ca+c^2}{b^2+c^2}\,,\ \ \bar{p}-\bar{h}=-c\,\frac{ab+bc+ca+c^2}{ab(b^2+c^2)}\,,$$

$$f-h=\frac{ab+bc+ca+c^2}{2c}\ \text{ и }\ \bar{f}-\bar{h}=\frac{ab+bc+ca+c^2}{abc}$$

добиваме $e^{2i\varphi}=\frac{c}{b}=e^{2i\alpha}$, од што следува дека $\varphi=\alpha$ или $\alpha=\varphi+\pi$. Но, ΔABC е остроаголен, па не е можно $\alpha=\varphi+\pi$, што значи $\varphi=\alpha$, т.е. $\measuredangle FHP=\measuredangle BAC$. ■

54. Ако Симпсоновата права $l(P,ABC)$ минува низ точката Q која е дијаметрално спротивна на точката P, тогаш таа минува и низ тежиштето на ΔABC. Докажи!

Решение. Ќе земеме дека ΔABC е впишан во единичната кружница. Според условот на задачата правата $l(P,ABC)$ ја содржи точката Q со афикс $q=-p$. Понатаму, според пример 24.4 правата $l(P,ABC)$ ја содржи точката O_p со афикс $o_p=\frac{a+b+c+p}{2}$, а тежиштето T на ΔABC има афикс $t=\frac{a+b+c}{3}$. Според тоа,

$$\frac{t-q}{o_p-q}=\frac{\frac{a+b+c}{3}+p}{\frac{a+b+c+p}{2}+p}=\frac{2}{3}\frac{a+b+c+3p}{a+b+c+3p}=\frac{2}{3},$$

па од последица 1.4 следува дека точките Q, T и O_p се колинеарни, што значи дека точката T припаѓа на правата $l(P,ABC)$. ■

55. Докажи дека Симпсоновата права на произволна точка P која припаѓа на кружницата опишна околу ΔABC ја преполовува отсечката PH каде H е ортоцентарот на ΔABC.

Решение. Ќе земеме дека ΔABC е впишан во единичната кружница. Ортоцентарот H на ΔABC има афикс $h=a+b+c$, па затоа средината Q на отсечката PH има афикс $q=\frac{a+b+c+p}{2}$, кој очигледно ја задоволува равенката

$$z-\overline{z}\frac{acb}{p}+\frac{abc}{2p}(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{p})-\frac{1}{2}(a+b+c+p)=0$$

на Симпсоновата права $l(P,ABC)$, што значи дека $l(P,ABC)$ ја преполовува отсечката PH. ■

56. Нека е даден ΔABC и нека точката D припаѓа на кружницата опишана околу ΔABC. Најди го геометриското место на пресечните точки на Симсоновите прави $l(A,BCD), l(B,ACD), l(C,ABD), l(D,ABC)$ кога точката D се движи по опишаната кружница околу ΔABC.

Решение. Ќе земеме дека ΔABC е впишан во единичната кружница. Ако a,b,c,d се афиксите на точките A,B,C,D, соодветно, тогаш пресечната точка на правите $l(A,BCD), l(B,ACD), l(C,ABD),$ $l(D,ABC)$ има афикс $x=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$. Значи, бараното геометриско место на точки е множеството од сите точки $x=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$, кога d се движи по кругот. Тоа всушност е круг со радиус $\frac{1}{2}$ и центар $\frac{a+b+c}{2}$, односно тоа е кругот со центар во средината на отсечката која ги поврзува ортоцентрот на ΔABC и центарот на неговата опишана кружница и радиус еднаков на полвината на радиусот на опишаната кружница. ■

57. Нека ΔABC е таков да $\overline{AB}\neq\overline{AC}$ и нека D е пресечната точка на тангентата на опишаната кружница на ΔABC во точката A и правата BC. Ако E и F се точки на симетралите на отсечките AB и AC, соодветно, такви да правите BE и CF се нормални на правата BC, докажи дека точките D,E и F се колинеарни.

Решение. Ќе земеме дека ΔABC е впишан во единичната кружница. Равенката на правата BC е

$$z-b=\frac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}}(\overline{z}-\overline{b}),\text{ т.е. } z+bc\overline{z}=b+c,$$

а равенката на тангентата на кружницата во точката A е $z+a^2\overline{z}=2a$. Решавајќи го системот составен од последните две равенки за афиксот d на пресечната точка на правата BC и тангентата на кружницата во точката A наоѓаме

$$d=\frac{a^2(b+c)-2abc}{a^2-bc}.$$

Точката E лежи на симетралата на отсечката AB, па затоа $OE\perp AB$, од што следува дека $\frac{e-o}{\overline{e}-\overline{o}}=-\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}$, односно $\overline{e}=\frac{e}{ab}$. Понатаму, од $BE\perp BC$ следува дека $\frac{e-b}{\overline{e}-\overline{b}}=-\frac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}}$, па затоа $\overline{e}=\frac{c+e-b}{bc}$. Имаме $\frac{e}{ab}=\frac{c+e-b}{bc}$, па е $e=\frac{a(c-b)}{c-a}$. На потполно ист начин наоѓаме $f=\frac{a(b-c)}{b-a}$.

Конечно, од

$$d-f=\frac{a^2(b+c)-2abc}{a^2-bc}-\frac{a(b-c)}{b-a}=\frac{ab(a-c)(b+c-2a)}{(a^2-bc)(b-a)} \text{ и}$$

$$d-e=\frac{a^2(b+c)-2abc}{a^2-bc}-\frac{a(c-b)}{c-a}=\frac{ac(a-b)(b+c-2a)}{(a^2-bc)(c-a)}$$

следува

$$\frac{\overline{d}-\overline{f}}{\overline{d}-\overline{e}}=\frac{\overline{b}(\overline{a}-\overline{c})^2}{\overline{c}(\overline{a}-\overline{b})^2}=\frac{a^2b^2c(c-a)^2}{c^2a^2b(b-a)^2}=\frac{b(a-c)^2}{c(a-b)^2}=\frac{d-f}{d-e},$$

што значи дека точките D,E и F се колинеарни. ■

58. (теорема на Брокар). Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник. Правите AB и CD се сечат во точката E, правите AD и BC се сечат во точката F и правите AC и BD се сечат во точката G. Докажи дека центарот O на опишаната кружница околу четириаголникот е ортоцентар на ΔEFG.

Решение. Нека претпоставиме дека $ABCD$ е впишан во единичната кружница. Според забелешка 3.13 в) за афиксите на точките E, F и G добиваме

$$e=\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd},\ f=\frac{ad(b+c)-bc(a+d)}{ad-bc},\ g=\frac{ac(b+d)-bd(a+c)}{ac-bd}. \quad (1)$$

За да докажеме дека O е ортоцентар на ΔEFG доволно е да докажеме дека $OF\perp EG$ и $OG\perp EF$. Од (1) лесно се гледа дека

$$\frac{f-o}{\overline{f}-\overline{o}}=\frac{ad(b+c)-bc(a+d)}{a+d-(b+c)}, \quad (2)$$

$$e-g=\frac{(a-d)(b-c)[(b+c)ad-(a+d)bc]}{(ab-cd)(ac-bd)} \quad (3)$$

$$\overline{e}-\overline{g}=\frac{(a-d)(b-c)(b+c-(a+d))}{(ab-cd)(ac-bd)}. \quad (4)$$

Сега од (2), (3) и (4) следува

$$\frac{e-g}{\overline{e}-\overline{g}}=\frac{\frac{(a-d)(b-c)[(b+c)ad-(a+d)bc]}{(ab-cd)(ac-bd)}}{\frac{(a-d)(b-c)(b+c-(a+d))}{(ab-cd)(ac-bd)}}=\frac{(b+c)ad-(a+d)bc}{b+c-(a+d)}=-\frac{ad(b+c)-bc(a+d)}{a+d-(b+c)}=-\frac{f-o}{\overline{f}-\overline{o}},$$

што значи дека $OF\perp EG$. Заради симетрија заклучуваме дека важи $OG\perp EF$, што значи дека O е ортоцентар на ΔEFG. ■

59. Нека ABC е рамнокрак триаголник, $\overline{AB}=\overline{AC}$. Нека P е точка на продолжението на страната BC и нека X и Y се точки на страните AB и AC, соодветно такви да $PX\parallel AC, PY\parallel AB$. Ако T е средината на лакот BC, докажи дека $PT\perp XY$.

Решение. Нека опишаната кружница околу ΔABC е единична и нека $a=1$. Тогаш $c=\overline{b}$ и $t=-1$. Понатаму, бидејќи P е на правата BC за нејзиниот афикс p важи $\overline{p}=b+\frac{1}{b}-p$. Понатаму, бидејќи X е точка на страната AB имаме $\overline{x}=\frac{1+b-x}{b}$, а како $PX\parallel AC$ добиваме $\overline{x}=\overline{p}+bp-bx$. Од последните три равенки добиваме $x=\frac{b(p+1)}{b+1}$. Аналогно, $\overline{y}=\frac{1+c-y}{c}$ и $\overline{y}=\overline{p}+cp-cy$, па затоа $y=\frac{p+1}{b+1}$. Конечно, од

$$\frac{x-y}{\overline{x}-\overline{y}}=\frac{\frac{(p+1)(b-1)}{b+1}}{-\frac{(\overline{p}+1)(b-1)}{b+1}}=-\frac{p+1}{\overline{p}+1}=-\frac{p-t}{\overline{p}-\overline{t}},$$

следува $PT\perp XY$. ■

60. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник и нека K,L,M,N се средините на страните AB,BC,CD,DA, соодветно. Докажи дека ортоцентрите на триаголниците AKN, BKL, CLM, DMN формираат паралелограм.

Решение. Нека опишаната кружница околу четириаголникот е единична. За афиксите на точките K,L,M,N имаме

$$k=\frac{a+b}{2},\ l=\frac{b+c}{2},\ m=\frac{c+d}{2},\ n=\frac{d+a}{2}.$$

Да го определиме афиксот h_1 на ортоцентарот H_1 на триаголникот AKN. Имаме $KH_1\perp AN$, $NH_1\perp AK$, па затоа

$$\frac{k-h_1}{\overline{k}-\overline{h_1}}=-\frac{a-n}{\overline{a}-\overline{n}}=-\frac{a-d}{\overline{a}-\overline{d}}=ad \ \text{ и } \ \frac{n-h_1}{\overline{n}-\overline{h_1}}=-\frac{a-k}{\overline{a}-\overline{k}}=-\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}=ab,$$

односно

$$\overline{h_1}=\frac{\overline{k}ad-k+h_1}{ad} \ \text{ и } \ \overline{h_1}=\frac{\overline{n}ab-n+h_1}{ab},$$

од каде добиваме

$$h_1=\frac{2a+b+d}{2}.$$

На потполно аналоген начин за афиксите на ортоцентрите на триаголниците BKL, CLM, DMN добиваме

$$h_2=\frac{2b+c+a}{2},\ h_3=\frac{2c+b+d}{2},\ h_4=\frac{2d+a+c}{2},$$

соодветно. Конечно, од $\frac{h_1+h_3}{2}=a+b+c+d=\frac{h_2+h_4}{2}$, добиваме дека средините на дијагоналите на четириаголникот се совпаѓаат, што значи дека тој е паралелограм. ■

61. Впишаната кружница со центар O во ΔABC ги допира страните AB, BC,CA во точките M,K,E. Ако $P=MK\cap AC$, тогаш $OP\perp BE$. Докажи!

Решение. Нека впишаната кружница во ΔABC е единична. Тогаш според забелешка 3.13 г) имаме

$$a=\frac{2em}{e+m} \ \text{ и } \ b=\frac{2mk}{m+k}.$$

Бидејќи точката P припаѓа на тетивата MK добиваме дека P,M,K се колинеарни, па затоа за нивните афикси важи

$$\overline{p}=\frac{m+k-p}{mk}.$$

Понатаму, точката P припаѓа на правата AC и како оваа права ја допира кружницата во точката E добиваме дека $PE\perp OE$, па затоа важи

$$\frac{e-p}{\overline{e}-\overline{p}}=-\frac{e-o}{\overline{e}-\overline{o}}=-e^2, \text{ т.е. } \overline{p}=\frac{2e-p}{e^2}.$$

Ако ги изедначиме двата добиени изрази за $\overline{p}$, после средувањето за афиксот на точката P добиваме

$$p=\frac{(m+k)e^2-2mke}{e^2-mk}.$$

Конечно, лесно се проверува дека за афиксите o,p,b,e на точките O,P,B,E важи

$$\frac{p-o}{\overline{p}-\overline{o}}=-\frac{e-b}{\overline{e}-\overline{b}},$$

(проверете!), што значи дека $OP\perp BE$. ■

62. Кружница со центар O е впишана во четириаголник $ABCD$ и ги допира страните AB,BC,CD,DA во точките K,L,M,N соодветно. Правите KL и MN се сечат во точка S. Докажи дека $OS\perp BD$.

Решение. Нека впишаната кружница е единечна. Тогаш од забелешка 13.3 следува дека

$$a=\frac{2nk}{n+k},\ b=\frac{2kl}{k+l},\ c=\frac{2lm}{l+m},\ d=\frac{2mn}{m+n},\ s=\frac{kl(m+n)-mn(k+l)}{kl-mn}.$$

Понатаму,

$$\overline{s}=\frac{\overline{kl(m+n)-mn(k+l)}}{\overline{kl-mn}}=\frac{k+l-(m+n)}{kl-mn},$$

$$b-d=\frac{2kl(m+n)-2mn(k+l)}{(k+l)(m+n)} \text{ и}$$

$$\overline{b}-\overline{d}=\frac{2(m+n)-2(k+l)}{(k+l)(m+n)}$$

а затоа

$$\frac{s-o}{\overline{s}-\overline{o}}=\frac{\frac{kl(m+n)-mn(k+l)}{kl-mn}}{\frac{k+l-(m+n)}{kl-mn}}=-\frac{kl(m+n)-mn(k+l)}{(m+n)-(k+l)}=-\frac{\frac{2kl(m+n)-2mn(k+l)}{(k+l)(m+n)}}{\frac{2(m+n)-2(k+l)}{(k+l)(m+n)}}=-\frac{b-d}{\overline{b}-\overline{d}},$$

што значи дека $OS\perp BD$. ■

63. Нека ABC е остроаголен триаголник, чија впишана кружница ги допира страните AB и AC во точките Q и R, соодветно. Нека X и Y се пресечните точки на симетралите на аглите $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle ABC$ со правата QR, содветно и нека Z е средина на страната BC. Докажи дека триаголникот XYZ е рамностран ако и само ако $\measuredangle BAC = \frac{\pi}{3}$.

Решение. Земаме дека впишаната кружница во триаголникот е единична. Нека P допирната точка на правата BC и впишаната кружница. Тогаш

$$a = \frac{2qr}{q+r}, b = \frac{2pr}{p+r}, c = \frac{2pq}{p+q} \text{ и } z = \frac{b+c}{2} = \frac{pr}{p+r} + \frac{pq}{p+q}.$$

Бидејќи симетралата на $\measuredangle ACB$ минува низ центарот на впишаната кружница, добиваме дека точките B, O и X се колинеарни, па затоа за афиксот x на точката X важи $x = \alpha c = \alpha \frac{2pq}{p+q}$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Слично, за афиксот y на точката Y добиваме $y = \beta \frac{2pr}{p+r}$, $\beta \in \mathbf{R}$. Понатаму, вредностите на константите α и β ги определуваме од условите $X, Y \in QR$, односно од колинеарноста на точките X, Q, R и колинеарноста на точките Y, Q, R. Имаме

$$\frac{q-r}{\overline{q}-\overline{r}} = \frac{x-r}{\overline{x}-\overline{r}} \text{ и } \frac{q-r}{\overline{q}-\overline{r}} = \frac{y-q}{\overline{y}-\overline{q}},$$

од каде со непосредни пресметувања добиваме

$$\alpha = \frac{(p+q)(q+r)}{2q(p+r)} \text{ и } \beta = \frac{(p+r)(q+r)}{2r(p+q)},$$

па затоа

$$x = \frac{p(q+r)}{p+r} \text{ и } y = \frac{p(q+r)}{p+q}.$$

Треба да докажеме дека

$$\measuredangle BAC = \frac{\pi}{3} \text{ ако и само ако } \Delta XYZ \text{ е рамностран.}$$

Првиот услов е еквивалентен на $\measuredangle QOR = \frac{2\pi}{3}$, т.е. со $q = re^{i\frac{2\pi}{3}}$. Вториот услов е еквивалентен со $y - z = (x - z)e^{i\frac{\pi}{3}}$. Имаме

$$y - z = \frac{p(q+r)}{p+q} - \left(\frac{pr}{p+r} + \frac{pq}{p+q}\right) = \frac{pr(r-q)}{(p+q)(p+r)},$$

$$x - z = \frac{p(q+r)}{p+r} - \left(\frac{pr}{p+r} + \frac{pq}{p+q}\right) = \frac{pq(q-r)}{(p+q)(p+r)}.$$

Според тоа,

$$y - z = (x - z)e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{pr(r-q)}{(p+q)(p+r)} = \frac{pq(q-r)}{(p+q)(p+r)} e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \Leftrightarrow$$

$$r=-qe^{i\frac{\pi}{3}} \qquad \Leftrightarrow \qquad q=re^{i\frac{2\pi}{3}},$$

При што последната еквиваленција следува ако претпоследното равенство го помножиме со $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ и земеме предвид дека $e^{i\pi}=-1$. ■

64. (теорема на Њутн). Даден е тангентен четириаголник $ABCD$. Нека M и N се средините на дијагоналите AC и BD и S е центар на впишаната кружница. Докажи дека точките M,N и S се колинеарни.

Решение. Нека четириаголникот е впишан во единична кружница и нека P,Q,R,S се допирните точки на страните AB,BC,CD,DA, соодветно. Тогаш $a=\frac{2ps}{p+s}$, $b=\frac{2pq}{p+q}$, $c=\frac{2qr}{q+r}$, $d=\frac{2rs}{r+s}$, па затоа

$$m=\frac{a+c}{2}=\frac{pqs+prs+pqr+qrs}{(p+s)(q+r)},\ \overline{m}=\frac{p+q+r+s}{(p+s)(q+r)},$$

$$n=\frac{b+d}{2}=\frac{pqr+pqs+prs+qrs}{(p+q)(r+s)},\ \overline{n}=\frac{p+q+r+s}{(p+q)(r+s)}.$$

Според тоа,

$$\frac{m-o}{\overline{m}-\overline{o}}=\frac{pqr+pqs+prs+qrs}{p+q+r+s}=\frac{n-o}{\overline{n}-\overline{o}},$$

што значи дека точките M,N и S се колинеарни. ■

65. Нека $ABCD$ е четириаголник и нека неговата впишана кружница ги допира страните AB,BC,CD,DA во точките M,N,P,Q, соодветно. Докажи дека правите AC,BD,MP,NQ се *конкурентни* (се сечат во една точка).

Решение. Нека впишаната кружница во четириаголникот $ABCD$ е единична. Имаме:

$$b=\frac{2mn}{m+n},\ d=\frac{2pq}{p+q}.$$

Ако $X=MP\cap NQ$, тогаш

$$x=\frac{mp(n+q)-nq(m+p)}{mp-nq}.$$

Имаме

$$b-d=2\frac{mn(p+q)-pq(m+n)}{(m+n)(p+q)}, \qquad \overline{b}-\overline{d}=2\frac{p+q-(m+n)}{(m+n)(p+q)},$$

$$b-x=\frac{(m-n)[mn(p+q)-pq(m+n)]}{(m+n)(mp-nq)}, \qquad \overline{b}-\overline{x}=\frac{(m-n)[p+q-(m+n)]}{(m+n)(mp-nq)},$$

па затоа

$$\frac{\overline{b}-\overline{x}}{b-x}=\frac{mn(p+q)-pq(m+n)}{p+q-(m+n)}=\frac{2\frac{mn(p+q)-pq(m+n)}{(m+n)(p+q)}}{2\frac{p+q-(m+n)}{(m+n)(p+q)}}=\frac{\overline{b}-\overline{d}}{b-d},$$

што значи дека точката X лежи на правата BD. Понатаму, заради симетрија заклучуваме дека X припаѓа и на правата AC, што значи дека правите AC, BD, MP, NQ се конкурентни. ■

66. Вписаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните BC, CA, AB во точките D, E, F, соодветно, а точките X, Y, Z се средини на страните EF, FD, DE, соодветно. Докажи дека центарот на вписаната кружница припаѓа на правата определена со центрите на опишаните кружници околу триаголниците XYZ и ABC.

Решение. Нека вписаната кружница во ΔABC е единична. Според забелешка 22.13 за афиксот o на центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC имаме

$$o=\frac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)}.$$

Понатаму, афиксите на точките X, Y, Z се

$$x=\frac{e+f}{2},\ y=\frac{d+f}{2},\ z=\frac{d+e}{2},$$

па од забелешка 3.4 и пример 3.3 б) следува дека афиксот o' на центарот на опишаната кружница околу ΔXYZ е:

$$o'=\frac{x\overline{x}(z-y)+y\overline{y}(x-z)+z\overline{z}(y-x)}{x\overline{y}+y\overline{z}+z\overline{x}-\overline{x}y-\overline{y}z-\overline{z}x}=\frac{d+e+f}{2}.$$

Имаме:

$$o-i=\frac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)},\qquad \overline{o}-\overline{i}=\frac{2(de+ef+fd)}{(d+e)(e+f)(f+d)},$$

$$o'-i=\frac{d+e+f}{2},\qquad \overline{o'}-\overline{i}=\frac{de+ef+fd}{2def},$$

па затоа

$$\frac{o-i}{\overline{o}-\overline{i}}=\frac{def(d+e+f)}{de+ef+fe}=\frac{o'-i}{\overline{o'}-\overline{i}},$$

што значи дека точките I, O, O' се колинеарни, што и требаше да се докаже. ■

67. Вписаната кружница со центар I во триаголникот ABC ги допира страните BC, CA, AB во точките D, E, F, соодветно. Нека $AI \cap EF = K$, $ED \cap KC = N$ и $DF \cap KB = M$. Докажи дека $MN \parallel BC$.

Решение. Нека триаголникот ABC е впишан во единичната кружница. Тогаш

$$a=\frac{2fe}{f+e},\ b=\frac{2fd}{f+d} \text{ и } c=\frac{2ed}{e+d}.$$

Понатаму, средината на отсечката EF има афикс $\frac{e+f}{2}$ и како

$$\frac{a-o}{\overline{a}-\overline{o}}=\frac{\frac{2ef}{e+f}}{\frac{2\overline{ef}}{\overline{e}+\overline{f}}}=ef=\frac{\frac{f+e}{2}-o}{\frac{\overline{f}+\overline{e}}{2}-\overline{o}}$$

добиваме дека $k=\frac{e+f}{2}$. Понатаму, равенките на правите DF и KB се

$$z-d=\frac{d-f}{\overline{d}-\overline{f}}(\overline{z}-\overline{d}) \text{ и } z-k=\frac{k-b}{\overline{k}-\overline{b}}(\overline{z}-\overline{k}), \tag{1}$$

соодветно, и ако замениме за $k=\frac{e+f}{2}$ и $b=\frac{2fd}{f+d}$, решавајќи го системот (1) за афиксот на точката M добиваме

$$m=\frac{4ef^2d+efd^2-e^2d^2-e^2f^2-2f^2d^2-f^3e}{6efd-e^2d-ed^2-ef^2-e^2f-d^2f-df^2}.$$

Равенките на правите ED и KC се

$$z-d=\frac{d-e}{\overline{d}-\overline{e}}(\overline{z}-\overline{d}) \text{ и } z-k=\frac{k-c}{\overline{k}-\overline{c}}(\overline{z}-\overline{k}), \tag{2}$$

соодветно, и ако замениме за $k=\frac{e+f}{2}$ и $c=\frac{2ed}{e+d}$, решавајќи го системот (2) за афиксот на точката N добиваме

$$n=\frac{4e^2fd+efd^2-f^2d^2-e^2f^2-2e^2d^2-e^3f}{6efd-e^2d-ed^2-ef^2-e^2f-d^2f-df^2}.$$

Конечно, сега доволно е да докажеме дека $MN\perp ID$, односно дека

$$\frac{m-n}{\overline{m}-\overline{n}}=\frac{d-o}{\overline{d}-\overline{o}}=-d^2.$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

68. Даден е ΔABC, со ортоцентар H, центар на опишана кружница O, центар на впишана кружница I и допирна точка K на страната BC со впишаната кружница во ΔABC. Ако $IO\parallel BC$, тогаш $AO\parallel HK$. Докажи!

Решение. Нека впишаната кружница во ΔABC е единична и нека истата ги допира страните BC, CA, AB во точките K, L, M, соодветно. Според забелешка 22.13 имаме

$$o=\frac{2klm(k+l+m)}{(k+l)(l+m)(m+k)} \text{ и } h=\frac{2(k^2l^2+l^2m^2+m^2k^2+klm(k+l+m))}{(k+l)(l+m)(m+k)}.$$

Понатаму, од $IO \parallel BC$ следува дека $IO \perp KL$, па затоа

$$\frac{o-i}{\overline{o}-\overline{i}} = -\frac{k-i}{\overline{k}-\overline{i}} = -k^2$$

и со замена o и $\overline{o}$, после средувањето добиваме

$$klm(k+l+m) + k^2(kl+lk+mk) = 0\,. \tag{1}$$

Ќе докажеме дека ако е исполнет условот (1), тогаш $AO \parallel HK$. За афиксот на точката A имаме $a = \frac{2ml}{m+l}$, па затоа

$$a - o = \frac{2ml}{m+l} - \frac{2klm(k+l+m)}{(k+l)(l+m)(m+k)} = \frac{2m^2l^2}{(k+l)(l+m)(m+k)} \text{ и } \overline{a} - \overline{o} = \frac{2k^2}{(k+l)(l+m)(m+k)}\,.$$

Од друга страна, ако го искористиме условот (1) добиваме

$$h - k = \frac{(kl+lm+mk)^2[(k+l+m)^2+k^2]}{(k+l+m)^2(k+l)(l+m)(m+k)} \text{ и } \overline{h} - \overline{k} = \frac{(k+l+m)^2+k^2}{(k+l)(l+m)(m+k)}\,.$$

Според тоа,

$$\frac{h-k}{\overline{h}-\overline{k}} = \frac{(kl+lm+mk)^2}{(k+l+m)^2} = \text{(според (1))=}\frac{m^2l^2}{k^2} = \frac{a-o}{\overline{a}-\overline{o}}\,,$$

па затоа $AO \parallel HK$. ■

69. Нека се AH_1, BH_2, CH_3 се висини на остроаголниот ΔABC. Кружницата впишана во ΔABC ги допира страните BC, CA, AB во точките T_1, T_2, T_3, соодветно. Нека правите l_1, l_2, l_3 се симетрични на правите H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 во однос на правите T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2, соодветно. Докажи дека правите l_1, l_2, l_3 формираат триаголник чии темиња припаѓаат на кружницата впишана во ΔABC.

Решение. Нека вписаната кружница во ΔABC е единична. Имаме $c = \frac{2t_1t_2}{t_1+t_2}$. Да го определиме афиксот h_3 на точката H_3. Од условите $H_3T_3 \perp T_3I$ и $H_3C \parallel T_3I$ имаме

$$\frac{h_3-t}{\overline{h_3}-\overline{t_3}} = -\frac{t_3-o}{\overline{t_3}-\overline{o}} = -t_3^2 \text{ и } \frac{h_3-c}{\overline{h_3}-\overline{c}} = \frac{t_3-o}{\overline{t_3}-\overline{o}} = t_3^2\,.$$

Решавајќи го системот составен од последните две равенки добиваме

$$h_3 = \frac{1}{2}(2t_3 + c - \overline{c}t_3^2) = t_3 + \frac{t_1t_2-t_3^2}{t_1+t_2}\,.$$

На потполно ист начин добиваме $h_2 = t_2 + \frac{t_1t_3-t_2^2}{t_1+t_3}$. Понатаму, за да ја определиме правата l_1 симетрична на H_2H_3 во однос на правата T_2T_3 доволно е да ги определиме точките P_2 и P_3 симетрични на точките H_2 и H_3 во однос на правата T_2T_3, соодветно. Равенката на правата T_2T_3 е

$$z-t_2=\frac{t_3-t_2}{\overline{t_3}-\overline{t_2}}(\overline{z}-\overline{t_2}).$$

Според пример 1.9 афиксот на точката P_2 е

$$p_2=\frac{\overline{h_2}(t_2-t_3)+\overline{t_2}t_3-t_2\overline{t_3}}{\overline{t_2}-\overline{t_3}}=\frac{t_1(t_2^2+t_3^2)}{t_2(t_1+t_3)}.$$

Аналогно добиваме дека афиксот на точката P_3 и

$$p_3=\frac{\overline{h_3}(t_2-t_3)+\overline{t_2}t_3-t_2\overline{t_3}}{\overline{t_2}-\overline{t_3}}=\frac{t_1(t_2^2+t_3^2)}{t_3(t_1+t_2)}.$$

Понатаму,

$$p_2-p_3=\frac{t_1(t_2^2+t_3^2)}{t_2(t_1+t_3)}-\frac{t_1(t_2^2+t_3^2)}{t_3(t_1+t_2)}=\frac{t_1^2(t_2^2+t_3^2)(t_3-t_2)}{t_2t_3(t_1+t_2)(t_1+t_3)},$$

па затоа равенката на правата l_1 е

$$z-p_2=\frac{p_2-p_3}{\overline{p_2}-\overline{p_3}}(\overline{z}-\overline{p_2}),$$

т.е.

$$z-\frac{t_1(t_2^2+t_3^2)}{t_2(t_1+t_3)}=-t_1^2(\overline{z}-\frac{t_2^2+t_3^2}{t_2t_3(t_1+t_3)}). \tag{1}$$

Аналогно добиваме, дека равенката на правата l_2 симетрична на правата H_3H_1 во однос на правата T_3T_1 е

$$z-\frac{t_2(t_3^2+t_1^2)}{t_3(t_2+t_1)}=-t_2^2(\overline{z}-\frac{t_3^2+t_1^2}{t_3t_1(t_2+t_1)}). \tag{2}$$

Решавајќи го системот составен од равенките (1) и (2) добиваме дека пресечната точка на правите l_1 и l_2 има афикс $m_1=\frac{t_1t_2}{t_3}$. Аналогно добиваме дека пресечната точка на l_2 и l_3 има афикс $m_2=\frac{t_2t_3}{t_1}$ и пресечната точка на l_3 и l_1 има афиск $m_3=\frac{t_3t_1}{t_2}$. Конечно тврдењето следува од фактот дека $|m_1|=|m_2|=|m_3|=1$. Проверете! ■

70. Нека се O и R центарот и радисуот на опишаната кружница околу ΔABC, а Z и r центарот и радиусот на впишаната кружница во ΔABC, соодветно. Ако K е тежиштето на триаголникот формиран од допирните точки на впишаната кружница и страните на ΔABC докажи дека $Z \in OK$ и дека $\overline{OZ} : \overline{ZK} = \frac{3R}{r}$.

Решение. Нека впишаната кружница во ΔABC е единична и нека d, e, f се афиксите на нејзините допирни точки со страните BC, CA, AB соодветно. Според забелешка 22.13 имаме $o = \frac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)}$, а според теорема 15.8 имаме $k = \frac{d+e+f}{3}$. Според тоа,

$$\frac{o-z}{\overline{o}-\overline{z}} = \frac{\frac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)}-0}{\frac{2(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)}-0} = def = \frac{\frac{d+e+f}{3}-0}{\frac{d+e+f}{3def}-0} = \frac{k-z}{\overline{k}-\overline{z}}$$

па затоа точките K, Z и O се колинеарни. Понатаму,

$$\frac{\overline{OZ}}{\overline{ZK}} = \frac{|o-z|}{|z-k|} = \frac{\left|\frac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)}\right|}{\left|\frac{d+e+f}{3}\right|} = \frac{3}{\frac{1}{2}|(d+e)(e+f)(f+d)|} = \frac{3R}{r},$$

што и требаше да се докаже. ■

71. Нека P е пресекот на дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$ во кој $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BD}$ и нека се O и I центрите на опишаната и впишаната кружница на ΔABP, соодветно. Докажи дека ако $O \neq I$, тогаш $OI \perp CD$.

Решение. Нека ΔABP е вписан во единичната кружница и нека u, v, w се комплексните броеви од теорема 22.14, при што $a = u^2$, $b = v^2$, $p = w^2$. Тогаш, според истата теорема $i = -uv - vw - wu$. Но, $\overline{AB} = \overline{AC}$, па затоа при ознака $\alpha = \measuredangle CAB$ имаме

$$c - a = e^{i\alpha}(b-a), \tag{1}$$

(направи цртеж). Понатаму, точките A, C и P се колинеарни, па затоа $\alpha = \measuredangle CAB = \measuredangle PAB$, што значи

$$\frac{-vw-u^2}{\overline{-vw}-\overline{u^2}} = e^{2i\frac{\alpha}{2}} \frac{v^2-u^2}{\overline{v^2}-\overline{u^2}}, \text{ т.е. } e^{i\alpha} = -\frac{w}{v}$$

и ако замениме во (1) добиваме

$$c - u^2 = -\frac{w}{v}(v^2 - u^2),$$

т.е.

$$c = \frac{u^2w + u^2v - v^2w}{v}. \tag{2}$$

Аналогно се добива дека

$$d=\frac{v^2w+v^2u-u^2w}{u}. \qquad (3)$$

Конечно, од (2) и (3) следува

$$c-d=\frac{(u^2-v^2)(uv+vw+wu)}{uv},$$

па затоа

$$\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}=-\frac{uv+vw+wu}{u+v+w}uvw=\frac{i-o}{\overline{i}-\overline{o}},$$

што значи дека $OI\perp CD$. ■

72. Нека I е центарот на впишаната кружница во ΔABC, $\overline{AB}\neq\overline{AC}$. Точката O_1 е симетрична на центарот O на опишаната кружница на ΔABC во однос на правата BC. Докажи дека точките A, I и O_1 се колинеарни ако и само ако $\measuredangle BAC=60^0$.

Решение. Нека опишаната кружница околу ΔABC е единична. Според теорема 22.14 постојат комплексни броеви u, v, w такви да

$$a=u^2,\ b=v^2,\ c=w^2 \text{ и } i=-uv-vw-wu.$$

Според пример 1.9 афиксот на точката O_1

$$o_1=\frac{\overline{0}(b-c)+\overline{b}c-b\overline{c}}{\overline{b}-\overline{c}}=b+c=v^2+w^2.$$

Понатаму, точките A, I и O_1 се колинеарни ако и само ако

$$\frac{a-o_1}{\overline{a}-\overline{o_1}}=\frac{a-i}{\overline{a}-\overline{i}},$$

т.е. ако и само ако

$$\frac{v^2+w^2-u^2}{\overline{v^2+u^2}-\overline{u^2}}=\frac{u^2+uv+vw+wu}{\overline{u^2}+\overline{uv+vw+wu}} \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{v^2+w^2-u^2}{u^2(v^2+w^2)-v^2w^2}u^2v^2w^2=\frac{u(u+v+w)+vw}{vw+uw+uv+u^2}u^2vw \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{v^2+w^2-u^2}{u^2(v^2+w^2)-v^2w^2}vw=1 \quad\Leftrightarrow$$

$$wv^3+v^2w+vw^3-vwu^2-u^2v^2-u^2w^2=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$(wv-u^2)(vw+v^2+w^2)=0.$$

Значи, точките A, I и O_1 се колинеарни ако и само ако или $u^2=vw$ или $vw+v^2+w^2=0$. Ако $u^2=vw$, тогаш

$$\frac{u^2-o}{\overline{u^2}-\overline{o}}=u^4=v^2w^2=\frac{o-(-vw)}{\overline{o}-\overline{(-vw)}},$$

што значи дека точките A,O и O_1 се колинеарни, па затоа $\overline{AB}\neq\overline{AC}$, што е противречност. Според тоа, точките A,O и O_1 се колинеарни ако и само ако

$$vw+v^2+w^2=0,$$

т.е.

$$(v+w)^2=vw,$$

па затоа

$$|v+w|^2=|vw|=1 \quad\Leftrightarrow\quad |vw+w^2|=|vw|=1 \quad\Leftrightarrow\quad |w^2-(-vw)|=|o-(-vw)|,$$

т.е. ако и само ако триаголникот чии темиња имаат афикси $w^2,-vw,o$ е рамностран, што значи ако и само ако $\measuredangle BOC=120^0$, односно ако и само ако $\measuredangle BAC=60^0$. ■

73. Даден е ΔABC. Нека се A_1,B_1,C_1 се средините на страните $BC,$ CA,AB, соодветно, P,Q,R се допирните точки на страните BC,CA,AB со впишаната кружница k, P_1,Q_1,R_1 се средините на лаците QR,RP,PQ на кои точките P,Q,R ја делат k и P_2,Q_2,R_2 се средините на лаците QPR,RPQ,PRQ, соодветно. Докажи дека правите A_1P_1,B_1Q_1 и C_1R_1, како и правите A_1P_2,B_1Q_2 и C_1R_2 се сечат во една точка.

Упатство. Нека впишаната кружница е единична. Според теорема 22.14 постојат комплексни броеви u,v,w такви да

$$p=u^2,q=v^2,r=w^2 \text{ и } p_1=-vw,q_1=-wu,r_1=-uv.$$

Точките P_2,Q_2,R_2 се симетрични во однос на центарот на k на точките P_1,Q_1,R_1, па затоа

$$p_2=vw,q_2=wu,r_2=uv.$$

Понатаму,

$$a=\frac{2v^2w^2}{v^2+w^2},b=\frac{2w^2u^2}{w^2+u^2},c=\frac{2u^2v^2}{u^2+v^2},$$

па затоа

$$a_1=\frac{w^2u^2}{w^2+u^2}+\frac{u^2v^2}{u^2+v^2},b=\frac{v^2w^2}{v^2+w^2}+\frac{u^2v^2}{u^2+v^2},c=\frac{w^2u^2}{w^2+u^2}+\frac{v^2w^2}{v^2+w^2}.$$

Сега искористи дека равенките на правите A_1P_1,B_1Q_1 се

$$z-a_1=\frac{a_1-p_1}{\overline{a_1}-\overline{p_1}}(\overline{z}-\overline{a_1}) \text{ и } z-b_1=\frac{b_1-q_1}{\overline{b_1}-\overline{q_1}}(\overline{z}-\overline{b_1}),$$

определи го афиксот n на пресечната точка и провери дали истиот ја задоволува равенката на правата C_1R_1.

За да го докажеш второто дел од тврдењето постапи аналогно. ■

74. Во надворешноста на ΔABC конструирани се квадрати $ABB'B''$, $ACC'C''$ и $BCXY$. Нека точката P е центар на квадратот $BCXY$. Докажи дека правите CB'', BC'' и AP се сечат во една точка.

Решение. Нека точката A е координатниот почеток, т.е. $a=0$. Имаме

$$c''-a=e^{i\pi/2}(c-a), \text{ т.е. } c''=ic.$$

Слично,

$$b''=-ib,\ x-c=e^{i\pi/2}(b-c), \text{ т.е. } x=(1-i)c+ib$$

и како P е средина на BX добиваме

$$p=\frac{1+i}{2}b+\frac{1-i}{2}c.$$

Равенките на правите BC'' и AP се

$$z-b=\frac{b-c''}{\overline{b}-\overline{c''}}(\overline{z}-\overline{b}) \tag{1}$$

$$z-a=\frac{a-p}{\overline{a}-\overline{p}}(\overline{z}-\overline{a}) \tag{2}$$

и со решавање на системот составен од равенките (1) и (2) за афиксот на пресечната точка Q на правите BC'' и AP добиваме

$$q=\frac{(\overline{b}c+b\overline{c})[(1+i)b+(1-i)c]}{(b-ic)(\overline{b}+i\overline{c})}.$$

Равенката на правата $B''C$ е

$$z-b''=\frac{b''-c}{\overline{b''}-\overline{c}}(\overline{z}-\overline{b''}) \tag{3}$$

и и со решавање на системот составен од равенките (2) и (3) за афиксот на пресечната точка Q' на правите $B''C$ и AP добиваме

$$q'=\frac{(\overline{b}c+b\overline{c})[(1+i)b+(1-i)c]}{(b-ic)(\overline{b}+i\overline{c})}.$$

Конечно, тврдењето на задачата следува од равенството $q'=q$. ■

75. Даден е четириаголник $ABCD$, O е пресек на неговите дијагонали, M е средина на страната AB и N е средина на страната CD. Докажи, дека $OM\perp CD$ и $ON\perp AB$, тогаш $ABCD$ е тетивен четириаголник.

Решение. Нека пресекот на дијагоналите е координатниот почеток, т.е. $o=0$. Точките A,O и C се колинеарни и точките B,O и D се колинеарни, па затоа $a\overline{c}=c\overline{a}$ и $b\overline{d}=d\overline{b}$. Понатаму, $m=\frac{a+b}{2}$ и $n=\frac{c+d}{2}$. Од $OM\perp CD$ и $ON\perp AB$ следува

$$\frac{\frac{c+d}{2}-o}{\overline{\frac{c+d}{2}}-\overline{o}}=-\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} \text{ и } \frac{\frac{a+b}{2}-o}{\overline{\frac{a+b}{2}}-\overline{o}}=-\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}},$$

односно

$$c=\frac{da(\overline{a}b-2\overline{b}b+a\overline{b})}{b(\overline{a}b-2\overline{a}a+a\overline{b})} \text{ и } c=\frac{da(\overline{a}b+2\overline{b}b+a\overline{b})}{b(\overline{a}b+2\overline{a}a+a\overline{b})},$$

од каде следува

$$(\overline{a}b+a\overline{b})(a\overline{a}-b\overline{b})=0. \tag{1}$$

Треба да докажеме дека условот (1) е доволен за да точките A,B,C,D лежат на една кружница, што според забелешка 25.3 значи дека условот (1) е доволен за да $\frac{(c-d)(b-a)}{(b-d)(c-a)}\in\mathbf{R}$, односно

$$\frac{(c-d)(b-a)}{(\overline{c}-\overline{d})(\overline{b}-\overline{a})}=\frac{(b-d)(c-a)}{(\overline{b}-\overline{d})(\overline{c}-\overline{a})} \tag{2}$$

Точките B,O и D се колинеарни, па затоа $\frac{b-d}{\overline{b}-\overline{d}}=\frac{b}{\overline{b}}$ и точките A,O и C се колинеарни па затоа $\frac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}}=\frac{a}{\overline{a}}$. Ако $\overline{a}b+a\overline{b}=0$, тогаш

$$c-d=d\,\frac{2ab(\overline{a}-\overline{b})}{b(\overline{a}b-2\overline{a}a+a\overline{b})},$$

а ако $a\overline{a}-b\overline{b}=0$, тогаш

$$c-d=\frac{d(a-b)(\overline{a}b+a\overline{b})}{b(\overline{a}b-2\overline{a}a+a\overline{b})}.$$

Со непосредна проверка се уверуваме дека и во двата случја е исполнет условот (2), што значи дека точките A,B,C,D лежат на иста кружница. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

76. Нека F е точка на основата AB на трапезот $ABCD$, таква да $\overline{DF}=\overline{CF}$, $E=AC\cap BD$ и O_1 и O_2 се центрите на опишаните кружници околу триаголниците ADF и FBC, соодветно. Докажи дека $FE\perp O_1O_2$.

Решение. Нека координатниот почеток е во точката F, т.е. $f=o$ и нека $d=\overline{c}$. Од $CD\,||\,AF$ следува

$$\frac{a-f}{\overline{a}-\overline{f}}=\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}=-1,$$

т.е. $\overline{a}=-a$ и слично $\overline{b}=-b$. Понатаму, од претходно изнесеното и од пример 3.3 следува

$$o_1=\frac{ad(\overline{d}-\overline{a})}{a\overline{d}-\overline{a}d}=\frac{\overline{c}(a+c)}{c+\overline{c}} \text{ и } o_2=\frac{cb(\overline{c}-\overline{b})}{b\overline{c}-\overline{b}c}=\frac{c(\overline{c}+b)}{c+\overline{c}}.$$

Равенките на правите AC и BD се

$$z-a=\frac{c-a}{\overline{c}-\overline{a}}(\overline{z}-\overline{a}) \text{ и } z-b=\frac{d-b}{\overline{d}-\overline{b}}(\overline{z}-\overline{b}).$$

Решение на системот составен од последните две равенки е сфиксот на точката E, па затоа

$$e=\frac{a\overline{c}-bc}{a+\overline{c}-b-c}.$$

Конечно,

$$o_1-o_2=\frac{\overline{c}a-cb}{c+\overline{c}}$$

и со непосредна проверка добиваме дека важи

$$\frac{o_1-o_2}{\overline{o_1}-\overline{o_2}}=-\frac{e-f}{\overline{e}-\overline{f}},$$

од што следува дека $FE\perp O_1O_2$. ■

77. Нека дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката O и нека T_1 и T_2 се тежиштата на триаголниците AOD и BOC, а H_1 и H_2 се ортоцентрите на триаголниците AOD и BOC, соодветно. Докажи, дека $T_1T_2\perp H_1H_2$.

Решение. Нека точката O е координатниот почеток. Тогаш за афиксите на ортоцентрите H_1 и H_2 и тежиштата T_1 и T_2 имаме

$$h_1=\frac{(a-b)(\overline{a}b+a\overline{b})}{a\overline{b}-\overline{a}b},\ h_2=\frac{(c-d)(\overline{c}d+c\overline{d})}{c\overline{d}-\overline{c}d},\ t_1=\frac{a+d}{3} \text{ и } t_2=\frac{b+c}{3}.$$

Точките A,C и O се колинеарни и точките B,D и O се колинеарни, па затоа $\overline{c}=\frac{c\overline{a}}{a}$ и $\overline{d}=\frac{d\overline{b}}{b}$, односно

$$h_2=\frac{(c-d)(\overline{b}a+b\overline{a})}{a\overline{b}-\overline{a}b}.$$

Понатаму,

$$h_1-h_2=\frac{(a+d-b-c)(\overline{a}b+a\overline{b})}{a\overline{b}-\overline{a}b},\ t_1-t_2=\frac{a+d-b-c}{3}$$

и со непосредна проверка добиваме дека

$$\frac{t_1-t_2}{\overline{t_1}-\overline{t_2}}=-\frac{h_1-h_2}{\overline{h_1}-\overline{h_2}},$$

од што следува дека $T_1T_2 \perp H_1H_2$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

78. Нека тангентите на кружницата Γ во точките A и B се сечат во точката C. Кружницата Γ_1 која поминува низ точката C и ја допира правата AB во точката B и ја сече Γ во точката M. Докажи, дека правата AM ја преполовува отсечката BC.

Решение. Нека Γ е единичната кружница. Тогаш $c=\frac{2ab}{a+b}$. Нека O_1 е центарот на кружницата Γ_1. Тогаш $O_1B \perp AB$, па затоа

$$\frac{o_1-b}{\overline{o_1}-\overline{b}}=-\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}=ab,$$

од каде добиваме $\overline{o_1}=\frac{o_1+a-b}{ab}$. Понатаму, $|o_1-b|=|o_1-c|$, па со квадрирање наоѓаме

$$(o_1-b)(\overline{o_1}-\overline{b})=(o_1-c)(\overline{o_1}-\overline{c}), \text{ т.е. } \overline{o_1}=\frac{o_1}{b^2}-\frac{a-b}{b(a+b)}.$$

Значи,

$$\frac{o_1+a-b}{ab}=\frac{o_1}{b^2}-\frac{a-b}{b(a+b)}, \text{ т.е. } o_1=\frac{ab}{a+b}+b.$$

Точката M лежи на единичната кружница Γ, па затоа $\overline{m}=\frac{1}{m}$ и како припаѓа и на кружницата со центар во точката O_1 и радиус O_1B добиваме

$$|o_1-b|=|o_1-m|, \text{ т.е. } \overline{o_1}m^2-(\frac{o_1}{b}+\overline{o_1}b)m+o_1=0.$$

Решенија на последната квадратна равенка се m и b, па затоа од Виетовите формули следува

$$b+m=\frac{o_1}{\overline{o_1}b}+b, \text{ т.е. } m=b\frac{2a+b}{a+2b}.$$

Понатаму, афиксот на средината на отсечката BC е $\frac{b+c}{2}$. Конечно, за докажеме дека правата AM ја преполовува отсечката BC доволно е да докажеме

$$\frac{a-\frac{b+c}{2}}{\overline{a}-\frac{\overline{b+c}}{2}}=\frac{a-m}{\overline{a}-\overline{m}}=-am,$$

што лесно се проверува. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

79. Дадена е кружница Γ и нејзин дијаметар AB. Нека P е произволна точка од кружницата Γ различна од A и B. Проекцијата на точката P на AB е точката Q. Кружницата со центар во P и радиус PQ ја сече Γ во точките C и D. Пресекот на правите CD и PQ е точка E. Нека F е средината на AQ, а G е подножјето на нормалата од F на CD. Докажи дека точките A, G и P се колинеарни и

$$\overline{EP} = \overline{EQ} = \overline{EG}.$$

Решение. Нека кружницата Γ е единична и нека $b = 1$. Тогаш $a = -1$ и како $P \in \Gamma$ добиваме $\overline{p} = \frac{1}{p}$. Понатаму, за афиксот на точката Q имаме $q = \frac{1}{2}(p + \frac{1}{p})$, а за афиксот на точката F имаме

$$f = \frac{\frac{1}{2}(p+\frac{1}{p})-1}{2} = \frac{(p-1)^2}{4p}. \qquad (1)$$

Точката C лежи на кружницата со центар во P и радиус PQ, па затоа $|p-q| = |p-c|$, од каде добиваме

$$(p-q)(\overline{p}-\overline{q}) = (p-c)(\overline{p}-\overline{c}). \qquad (2)$$

Но, $C \in \Gamma$, па затоа $\overline{c} = \frac{1}{c}$ и како

$$p - q = \frac{1}{2}(p - \frac{1}{p})$$

со замена во (2) добиваме

$$4pc^2 - (p^4 + 6p^2 + 1)c + 4p^3 = 0. \qquad (3)$$

Равенката (3) е квадратна по c и како точката D ги задоволува истите услови кои ги користевме за наоѓање на точката C, добиваме дека d е второто решение на (3). Сега од Виетовите правила добиваме

$$c + d = \frac{p^4+6p^2+1}{4p^3}, \; cd = p^2.$$

Точката G припаѓа на тетивата CD, па затоа C, D, G се колинеарни, од што добиваме $\overline{g} = \frac{c+d-g}{cd}$, а како $FG \perp CD$ имаме

$$\frac{g-f}{\overline{g}-\overline{f}} = -\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}} = cd = p^2.$$

Решавајќи го системот составен од последните две равенки, при што за f заменуваме од (1), добиваме

$$g = \frac{p^3+3p^2-p+1}{4p}.$$

За да докажеме дека точките A,G и P се колинеарни доволно е да докажеме дека

$$\frac{g-a}{\overline{g}-\overline{a}}=-\frac{a-p}{\overline{a}-\overline{p}}=p\,.$$

Последното лесно се проверува ако се земе предвид дека

$$g-a=\frac{p^3+3p^2+3p+1}{4p} \text{ и } \overline{g}-\overline{a}=\frac{p^3+3p^2+3p+1}{4p^2}\,.$$

Точката E лежи на тетивата CD, па затоа C,D и E се колинеарни, т.е. $\overline{e}=\frac{c+d-e}{cd}$. Од $PE\perp AB$ следува

$$\frac{e-p}{\overline{e}-\overline{p}}=-\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}=-1\text{, т.е. } \overline{e}=p+\frac{1}{p}-e\,.$$

Значи,

$$p+\frac{1}{p}-e=\overline{e}=\frac{c+d-e}{cd}\,,$$

па затоа

$$e=\frac{3p^2+1}{4p}\,.$$

Сега

$$e-p=\frac{3p^2+1}{4p}-p=\frac{1-p^2}{4p}\,,\ e-q=\frac{p^2-1}{4p} \text{ и } e-g=\frac{p-p^3}{4p}$$

и како $|\,p\,|=1$, добиваме

$$|\,e-p\,|=|\,e-q\,|=|\,e-g\,|\text{, т.е. } \overline{EP}=\overline{EQ}=\overline{EG}\,.\ ■$$

80. Нека H е ортоцентарот на ΔABC. Тангентите од A на кружницата со дијаметар BC ја допираат кружницата во точки P и Q. Докажи дека точките P,Q и H се колинеарни.

Решение. Нека кружницата над дијаметарот BC е единечна и нека $b=-1$. Тогаш $c=1$ и координатниот почеток е средина на отсечката BC. Точката P лежи на единичната кружница, па затоа $\overline{p}=\frac{1}{p}$ и како $PA\perp PO$ добиваме

$$\frac{a-p}{\overline{a}-\overline{p}}=-\frac{p-o}{\overline{p}-\overline{o}}=-p^2\,,$$

од што следува

$$\overline{a}p^2-2p+a=0\,. \qquad (1)$$

Равенката (1) е квадратна по p и како точката Q ги задоволува истите услови кои ги користевме за наоѓање на точката P добиваме дека q е второто решение на (1). Сега од Виетовите правила добиваме

$$p+q=\frac{2}{a},\ \ pq=\frac{\overline{a}}{a}.$$

Нека точката H' е пресекот на нормалата спуштена од A на страната BC со правата PQ. Точките P,Q и H' се колинеарни, па затоа

$$\overline{h'}=\frac{p+q-h'}{pq}, \text{ т.е. } \overline{h'}=\frac{2-\overline{a}h'}{\overline{a}}.$$

Но, $AH'\perp BC$, па затоа

$$\frac{a-h'}{\overline{a}-\overline{h'}}=-\frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}}=-1,$$

што значи дека $\overline{h'}=a+\overline{a}-h'$. Според тоа,

$$a+\overline{a}-h'=\overline{h'}=\frac{2-\overline{a}h'}{\overline{a}},$$

од каде наоѓаме

$$h'=\frac{a\overline{a}+a^2-2}{a-\overline{a}}.$$

Ќе докажеме дека $h=h'$, од што ќе следува тврдењето на задачата. За таа цел доволно е да докажеме дека $CH'\perp AB$, односно да докажеме дека

$$\frac{c-h'}{\overline{c}-\overline{h'}}=-\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}},$$

(зошто?). Во точноста на последното равенство се уверуваме со непосредна проверка ако искористиме дека

$$h'-c=h'-1=\frac{a\overline{a}+a^2-2-a+\overline{a}}{a-\overline{a}}=\frac{(a+1)(a+\overline{a}-2)}{a-\overline{a}} \text{ и } a-b=a+1.$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

81. Нека P е точка на продолжението на дијагоналата AC на правоаголникот $ABCD$ преку точката C, таква да $\measuredangle BPD=\measuredangle CBP$. Најди го односот $\overline{PB}:\overline{PC}$.

Решение. Нека пресекот на дијагоналите O на правоаголникот е координатниот почеток и нека правата AB е паралелна на реалната оска. Тогаш $a+c=0, b+d=0, c=\overline{b}$ и $d=\overline{a}$. Понатаму, точките P,A,O се колинеарни, па затоа

$$\frac{p}{\overline{p}}=\frac{a}{\overline{a}}, \text{ т.е. } \overline{p}=-\frac{b}{a}p.$$

Нека $\measuredangle DPB=\measuredangle PBC=\varphi$. Тогаш

$$\frac{d-p}{\overline{d}-\overline{p}}=e^{2i\varphi}\frac{b-p}{\overline{b}-\overline{p}} \text{ и } \frac{p-b}{\overline{p}-\overline{b}}=e^{2i\varphi}\frac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}},$$

и ако ги помножиме последните две равенства, добиеното равенство го изразиме преку a и b добиваме

$$\frac{p+b}{bp+a^2}=\frac{a(p+b)^2}{(bp-a^2)^2}.$$

Понатаму, ако претходното равенство го запишеме во облик на полином по p добиваме

$$(b-a)[bp^3+(a^2+3ab+b^2)p^2-a(a^2+3ab+b^2)p-a^3b]=0,$$

т.е.

$$bp^3+(a^2+3ab+b^2)p^2-a(a^2+3ab+b^2)p-a^3b=0. \qquad (1)$$

Но, за точката A важи $\measuredangle DAB=\measuredangle ABC=\frac{\pi}{2}$, па затоа една точка која го задоволува условот на задачата е и точката A, што значи дека a е една нула на полиномот на левата страна во (1), од што следува дека тој се дели со $p-a$ и p е нула на добиениот количник (зошто?), т.е.важи

$$bp^2+(a^2+4ab+b^2)p+a^2b=0. \qquad (2)$$

Конечно, ако го искористиме условот (2) имаме

$$\frac{\overline{PB}^2}{\overline{PC}^2}=\frac{|p-b|^2}{|p-c|^2}=\frac{(p-b)(\overline{p}-\overline{b})}{(p-c)(\overline{p}-\overline{c})}=\frac{(p-b)(-\frac{b}{a}p+a)}{(p+a)(-\frac{b}{a}p-b)}$$
$$=\frac{bp^2-(a^2+b^2)p+a^2b}{bp^2+2abp+a^2b}=\frac{-2(a^2+4ab+b^2)p}{-(a^2+2ab+b^2)p}=2$$

од што следува $\overline{PB}:\overline{PC}=\sqrt{2}$. ■

82. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналата BD не е симетрала ниту на $\measuredangle ABC$ ниту на $\measuredangle CDA$. Точката P се наоѓа во внатрешноста на $ABCD$ и е таква да $\measuredangle PBC=\measuredangle DBA$ и $\measuredangle PDC=\measuredangle BDA$. Докажи дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен ако и само ако $\overline{AP}=\overline{CP}$.

Решение. Нека четириаголник $ABCD$ е тетивен и нека е опишаната кружница е единична. Ако $\measuredangle PBC=\measuredangle ABD=\varphi$ и $\measuredangle PDC=\measuredangle BDA=\theta$, тогаш

$$\frac{d-b}{\overline{d}-\overline{b}}=e^{2i\varphi}\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}},\ \frac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}}=e^{2i\varphi}\frac{p-b}{\overline{p}-\overline{b}},\ \frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}=e^{2i\theta}\frac{p-d}{\overline{p}-\overline{d}},\ \frac{b-d}{\overline{b}-\overline{d}}=e^{2i\theta}\frac{a-d}{\overline{a}-\overline{d}}$$

и како $\overline{a}=\frac{1}{a},\overline{b}=\frac{1}{b},\overline{c}=\frac{1}{c},\overline{d}=\frac{1}{d}$ од првото равенство добиваме $e^{2i\varphi}=\frac{a}{d}$, а од четвртото $e^{2i\theta}=\frac{b}{a}$. Со замена во второто и третото равенство добиваме

$$\frac{a}{d}\frac{p-b}{\overline{p}-\overline{b}}=-bc \text{ и } \frac{b}{a}\frac{p-d}{\overline{p}-\overline{d}}=-cd ,$$

од каде наоѓаме

$$p=\frac{ac+bd}{b+d} .$$

Понатаму,

$$a-p=\frac{ab+ad-ac-bd}{b+d}, \ \overline{a}-\overline{p}=\frac{bc+cd-ac-bd}{ac(b+d)},$$

$$c-p=\frac{bc+bd-ac-bd}{b+d}, \ \overline{c}-\overline{p}=\frac{ab+ad-ac-bd}{ac(b+d)},$$

па затоа

$$\overline{AP}^2=|a-p|^2=(a-p)(\overline{a}-\overline{p})=\frac{ab+ad-ac-bd}{b+d}\cdot\frac{bc+cd-ac-bd}{ac(b+d)}$$

$$=\frac{bc+bd-ac-bd}{b+d}\cdot\frac{ab+ad-ac-bd}{ac(b+d)}=(c-p)(\overline{c}-\overline{p})=|c-p|^2=\overline{CP}^2,$$

т.е. $\overline{AP}=\overline{CP}$.

Нека $\overline{AP}=\overline{CP}$, т.е.

$$|a-p|=|c-p| \qquad (*)$$

и да претпоставиме дека опишната кружница околу триаголникот ABC е единична, што значи дека $\overline{a}=\frac{1}{a}, \overline{b}=\frac{1}{b}, \overline{c}=\frac{1}{c}$. Од условот (*), после квадрирање и средувањето добиваме

$$a\overline{p}+\frac{p}{a}=c\overline{p}+\frac{p}{c},$$

односно

$$(a-c)(\overline{p}-\frac{p}{ac})=0 ,$$

од што следува $\overline{p}=\frac{p}{ac}$. Со D' да го означиме пресекот на страната CD и единичната кружница. Тогаш

$$\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}=\frac{c-d'}{\overline{c}-\overline{d'}}=-cd',$$

па затоа

$$\overline{d}=\frac{c+d'-d}{cd'} .$$

Од условот на задачата имаме

$$\measuredangle CBP=\measuredangle DBA=\varphi \text{ и } \measuredangle PDC=\measuredangle ADB=\theta ,$$

па затоа

$$\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}=e^{2i\varphi}\frac{d-b}{\overline{d}-\overline{b}}, \ \frac{p-b}{\overline{p}-\overline{b}}=e^{2i\varphi}\frac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}}, \ \frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}=e^{2i\theta}\frac{p-d}{\overline{p}-\overline{d}}, \ \frac{b-d}{\overline{b}-\overline{d}}=e^{2i\theta}\frac{a-d}{\overline{a}-\overline{d}} . \qquad (1)$$

Од првите две равенства во (1) добиваме

$$\frac{p-b}{\bar p-\bar b}\frac{d-b}{\bar d-\bar b}=\frac{a-b}{\bar a-\bar b}\frac{c-b}{\bar c-\bar b}=ab^2c\,,$$

и ако замениме за $\bar d$ и $\bar p$, после средувањето наоѓаме

$$p=c\frac{bdd'+acd'-abd'-abc+abd-b^2d'}{cd'd-b^2d'+b^2d-b^2c}\,. \tag{2}$$

Сега, од третото и четвртото равенство во (1) и од $\frac{c-d}{\bar c-\bar d}=-cd'$ имаме

$$-cd'\frac{a-d}{\bar a-\bar d}=\frac{p-d}{\bar p-\bar d}\frac{b-d}{\bar b-\bar d}\,. \tag{3}$$

Ако во последното равенство замениме за p и $\bar p$, тогаш после средувањето на добиваме полином од $P(d)$, кој очигледно е од најмногу четврт степен. Со споредување на коефицинтите пред d^4 добиваме дека полиномот $P(d)$ е точно од трет степен. Јасно, две негови нули се a и b. Ќе докажеме дека третата негова нула е d', од што ќе следува дека $d=d'$, т.е. четириаголникот $ABCD$ е тетивен. Навистина ако $d=d'$, тогаш

$$\frac{a-d}{\bar a-\bar d}=-ad'\,,\ \frac{b-d}{\bar b-\bar d}=-bd' \text{ и } \frac{p-d}{\bar p-\bar d}=\frac{p-d'}{pd'-ac}acd'\,,$$

па затоа равенството (3) е еквивалентно на равенството $p=\frac{ac+bd'}{d'+b}$, кое очигледно е исполнето и истото се добива ако во (2) ставиме $d=d'$. ■

83. Од иста страна на отсечката PQ конструирани се три триаголници KPQ,QLP и PQM такви да $\measuredangle QPM=\measuredangle PQL=\alpha$, $\measuredangle PQM=\measuredangle QPK=\beta$ и $\measuredangle PQK=\measuredangle QPL=\gamma$ при што $\alpha<\beta<\gamma$ и $\alpha+\beta+\gamma=180^0$. Докажи дека триаголникот KLM е сличен и еднакво ориентиран со триаголниците KPQ, QLP и PQM .

Решение. Нека $p=0$ и $q=1$. Од $\measuredangle MPQ=\alpha$ имаме

$$\frac{m-p}{\bar m-\bar p}=e^{2i\alpha}\frac{q-p}{\bar q-\bar p}\,,$$

па е $\frac{m}{\bar m}=e^{2i\alpha}$. Потоа, од $\measuredangle PQM=\beta$ имаме

$$e^{2i\beta}\frac{m-q}{\bar m-\bar q}=\frac{p-q}{\bar p-\bar q}\,,$$

па затоа $e^{2i\beta}\frac{m-1}{\bar m-1}=1$. Ако земеме предвид дека $e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)}=1$, тогаш решавајќи го системот

$$\begin{cases} e^{2i\alpha} = \frac{m}{\overline{m}} \\ e^{2i\beta}\frac{m-1}{\overline{m}-1} = 1 \end{cases}$$

добиваме

$$m = \frac{e^{2i(\alpha+\gamma)}-1}{e^{2i\gamma}-1}.$$

Аналогно добиваме

$$l = \frac{e^{2i(\beta+\gamma)}-1}{e^{2i\beta}-1} \text{ и } k = \frac{e^{2i(\alpha+\beta)}-1}{e^{2i\alpha}-1}.$$

Според теорема 4.9 за да докажеме дека KLM е сличен и еднакво ориентиран со триаголникот KPQ доволно е да докажеме дека

$$\frac{k-l}{l-m} = \frac{k-p}{p-q} = -k,$$

во што можеме да се убедиме со непосредна проверка. Конечно, бидејќи триаголниците KPQ, QLP и PQM се слични и еднакво ориентирани добиваме дека сите четири триаголници се слични и еднакво ориентирани. ■

84. Докажи дека плоштината на триаголникот чии темиња се подножјата на нормалите спуштени од произволно теме на тетивен петаголник на неговите страни не зависи од изборот на темето на петаголникот.

Решение. Нека кружницата опишана околу петаголникот $ABCDE$ е единична и нека се X,Y,Z подножјата на нормалите спуштени од темето A на страните BC, CD, DE, соодветно. Тогаш

$$x = \tfrac{1}{2}(a+b+c-\tfrac{bc}{a}),\ y = \tfrac{1}{2}(a+c+d-\tfrac{cd}{a}) \text{ и } z = \tfrac{1}{2}(a+d+e-\tfrac{ed}{a}),$$

па затоа

$$P_{\Delta XYZ} = \pm\frac{i}{4}\begin{vmatrix} x & \overline{x} & 1 \\ y & \overline{y} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{i}{16}\begin{vmatrix} a+b+c-\frac{ab}{a} & \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}-\frac{\overline{bc}}{\overline{a}} & 1 \\ a+c+d-\frac{cd}{a} & \overline{a}+\overline{c}+\overline{d}-\frac{\overline{cd}}{\overline{a}} & 1 \\ a+e+d-\frac{ed}{a} & \overline{a}+\overline{e}+\overline{d}-\frac{\overline{ed}}{\overline{a}} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \pm\frac{i}{16}\begin{vmatrix} a+b+c-\frac{ab}{a} & \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}-\frac{\overline{bc}}{\overline{a}} & 1 \\ \frac{(a-c)(d-b)}{a} & \frac{\overline{(a-c)(d-b)}}{\overline{a}} & 0 \\ \frac{(e-c)(a-d)}{a} & \frac{\overline{(e-c)(a-d)}}{\overline{a}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\pm\frac{i}{16}\begin{vmatrix} a+b+c-\frac{ab}{a} & \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}-\frac{\overline{bc}}{\overline{a}} & 1 \\ \frac{(a-c)(d-b)}{a} & \frac{(a-c)(d-b)}{bcd} & 0 \\ \frac{(e-c)(a-d)}{a} & \frac{(e-c)(a-d)}{ced} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\pm\frac{i(a-c)(d-b)(e-c)(a-d)}{16}\begin{vmatrix} a+b+c-\frac{ab}{a} & \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}-\frac{\overline{bc}}{\overline{a}} & 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{bcd} & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{ced} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\pm\frac{i(a-c)(d-b)(e-c)(a-d)}{16}\left(\frac{1}{aced}-\frac{1}{abcd}\right)$$

$$=\pm\frac{i(a-c)(c-e)(e-b)(b-d)(a-d)}{16abcde},$$

што значи дека плоштината е еднаква на шестнаесеттина од производот на дијагоналите на петаголникот, па затоа истата не зависи од изборот на темето на петаголникот. ■

85. Точките A_1, B_1, C_1 се избрани на висините на ΔABC спуштени од темињата A, B, C, соодветно и H е ортоцентар на ΔABC. Ако

$$P_{\Delta ABC_1}+P_{\Delta BCA_1}+P_{\Delta CAB_1}=P_{\Delta ABC}, \tag{1}$$

докажи дека четириаголникот $A_1B_1C_1H$ е тетивен.

Решение. Нека опишаната кружница околу ΔABC е единична. Нека A' е подножјето на нормалата спуштена од темето A на страната BC. Тогаш

$$P_{\Delta BCA_1}=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{A_1A'}=\frac{|b-c|\cdot|a_1-a'|}{2} \text{ и } P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AA'}=\frac{|b-c|\cdot|a-a'|}{2},$$

па затоа

$$\frac{P_{\Delta BCA_1}}{P_{\Delta ABC}}=\frac{|a_1-a'|}{|a-a'|}=\frac{|a-a'|-|a-a_1|}{|a-a'|}=1-\frac{|a-a_1|}{|a-a'|}=1-\frac{a-a_1}{a-a'},$$

што значи дека равенството (1) се сведува на равенството

$$\frac{a-a_1}{a-a'}+\frac{b-b_1}{b-b'}+\frac{c-c_1}{c-c'}=2. \tag{2}$$

Понатаму,

$$a'=\frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{bc}{a}\right),$$

па затоа

$$a-a'=\frac{(a-b)(a-c)}{2a}.$$

Аналогно,

$$b-b'=\frac{(b-c)(b-a)}{2b},\ c-c'=\frac{(c-a)(c-b)}{2c},$$

па ако замениме во (2) после средувањето добиваме дека овој услов е еквивалентен на условот

$$aa_1(b-c)+bb_1(c-a)+cc_1(a-b)=0. \qquad (3)$$

Според забелешка 25.3 за да докажеме дека четириаголникот $A_1B_1C_1H$ е тетивен доволно е да докажеме дека

$$\frac{a_1-c_1}{\overline{a_1}-\overline{c_1}}\frac{b_1-h}{\overline{b_1}-\overline{h}}=\frac{b_1-c_1}{\overline{b_1}-\overline{c_1}}\frac{a_1-h}{\overline{a_1}-\overline{h}}. \qquad (4)$$

Точката H е ортоцентар на ΔABC, па затоа $h=a+b+c$ и како $A_1H\perp BC$ имаме $\frac{a_1-h}{\overline{a_1}-\overline{h}}=-\frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}}=bc$ и слично $\frac{b_1-h}{\overline{b_1}-\overline{h}}=ac$. Понатаму, бидејќи $A_1A\perp BC$ добиваме $\frac{a_1-a}{\overline{a_1}-\overline{a}}=bc$, па затоа $\overline{a_1}=\frac{bc+aa_1-a^2}{bc}$ и слично добиваме $\overline{b_1}=\frac{ac+bb_1-b^2}{ac}$ и $\overline{c_1}=\frac{ab+cc_1-c^2}{ab}$. Конечно, ако ги искористиме дебиените равенства и условот (4), непосредно проверуваме дека е точно равенството (4), што значи дека четириаголникот $A_1B_1C_1H$ е тетивен. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

86. Подножјата на висините спуштени од темињата A,B и C во ΔABC се D,E и F, соодветно. Правата низ D паралелна со EF ги сече правите AC и AB во точките Q и R, соодветно. Правата EF ја сече правата BC во точката P. Докажи дека кружницата опишана околу ΔPQR ја содржи средината на страната BC.

Решение. Нека опишаната кружница околу ΔABC е единична. Имаме $d=\frac{1}{2}(a+b+c-\frac{bc}{a})$, $e=\frac{1}{2}(a+b+c-\frac{ac}{b})$, $f=\frac{1}{2}(a+b+c-\frac{bc}{a})$ и $a_1=\frac{b+c}{2}$, каде A_1 е средината на BC. Бидејќи Q е на AC имаме $\overline{q}=\frac{a+c-q}{ac}$. Но, $QD\parallel EF$, па затоа

$$\frac{q-d}{\overline{q}-\overline{d}}=\frac{e-f}{\overline{e}-\overline{f}}=-a^2.$$

Решавајќи го системот составен од последните две равенки добиваме

$$q=\frac{a^3+a^2b+abc-b^2c}{2ab}.$$

На потполно ист начин наоѓаме

$$r=\frac{a^3+a^2c+abc-bc^2}{2ac}.$$

Понатаму, $P\in BC$, па затоа

$$\overline{p}=\frac{b+c-p}{bc}$$

и како $P\in EF$ добиваме

$$\frac{p-e}{\overline{p}-\overline{e}}=\frac{e-f}{\overline{e}-\overline{f}}=-a^2.$$

Решавајќи го системот составен од последните две равенки наоѓаме

$$p=\frac{b+c}{2}+\frac{a(b-c)^2}{2(a^2-bc)}.$$

Треба да докажеме дека точките P,Q,R и A_1 се коциклични, што според забелешка 25.3 значи дека треба да го докажеме равенството

$$\frac{p-a_1}{\overline{p}-\overline{a_1}}\frac{\overline{q}-\overline{r}}{q-r}=\frac{q-a_1}{\overline{q}-\overline{a_1}}\frac{\overline{p}-\overline{r}}{p-r},$$

за што е доволно да искористиме дека

$$q-r=\frac{a(c-b)(a^2+bc)}{2abc},\ p-r=\frac{(a^2-c^2)(b^2c+abc-a^3-a^2c)}{2ac(a^2-bc)},$$

$$q-a_1=\frac{a^3+a^2b-b^2c-ab^2}{2ab}\ \text{и}\ p-a_1=\frac{a(b-c)^2}{2(a^2-bc)}.$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

87. Во рамнината се дадени две кружници Γ_1 и Γ_2. Нека A е нивна заедничка точка. По кружниците Γ_1 и Γ_2, со константни брзини, се движат точките M_1 и M_2, соодветно. Тие минуваат низ точката A во исто време. Докажи дека постои неподвижна точка P која во секој момент е еднакво оддалечена од точките M_1 и M_2.

Решение. Нека B и C се центрите на бружниците Γ_1 и Γ_2 и нека BC е реалната оска. Ако точките M_1 и M_2 се движат во иста насока, тогаш

$$m_1-b=(a-b)e^{i\varphi}\ \text{и}\ m_2-c=(a-c)e^{i\varphi}.$$

Егзистенцијата на точка P со саканото својство последователно е еквивалентна на условите

$$|p-m_1|=|p-m_2|,\ (p-m_1)(\overline{p}-\overline{m_1})=(p-m_2)(\overline{p}-\overline{m_2}),$$

$$\overline{p}=\frac{m_1\overline{m_1}-m_2\overline{m_2}-p(\overline{m_1}-\overline{m_2})}{m_1-m_2}. \tag{1}$$

Означуваме $e^{i\varphi}=z$ и акоземеме предвид дека $\overline{b}=b$, $\overline{c}=c$ и $\overline{z}=\frac{1}{z}$, добиваме дека условот (1) е еквивалентен на условот

$$(b+c-a-\overline{p})z^2-[2(b+c)-a-\overline{a}-p-\overline{p}]z+b+c-\overline{a}-p=0, \quad (2)$$

што значи дека полиномот по z на десната страна на (2) мора да е идентички еднаков на нула. Но, тоа значи дека сите негови коефициенти мора да се еднакви на нула. Од слободниот коефициент наоѓаме $p=b+c-\overline{a}$ и јасно притоа коефициентите пред линеарниот и квадратниот член се еднакви на нула (провери!).

На потполно идентичен начин постапуваме во случај кога точките M_1 и M_2 се движат во спротивни насоки. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

88. Даден е квадрат $ABCD$ и кружница Γ со дијаметар AB. Нека P е произволна точка на страната CD, M и N соодветно се пресеците на отсечките AP и BP со Γ различни од A и B, а Q е пресекот на правите DM и CN. Докажи дека $Q\in\Gamma$ и дека $\overline{AQ}:\overline{BQ}=\overline{DP}:\overline{CP}$.

Решение. Нека Γ е единичната кружница и нека $a=-1$. Тогаш $b=1$, $c=1+2i$ и $d=-1+2i$. Понатаму, точките A,P,M се колинеарни, па затоа

$$\frac{a-p}{\overline{a}-\overline{p}}=\frac{a-m}{\overline{a}-\overline{m}}=-am=m,$$

од каде добиваме

$$\overline{p}=\frac{p+1-m}{m}.$$

Но, точките C,D,P се колинеарни, па затоа

$$\frac{c-p}{\overline{c}-\overline{p}}=\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}=1,$$

па затоа $\overline{p}=p-4i$. Значи,

$$\frac{p+1-m}{m}=\overline{p}=p-4i\text{, т.е. } p=\frac{4im}{m-1}-1.$$

Слично, точките B,N,P се колинеарни и затоа

$$\frac{b-p}{\overline{b}-\overline{p}}=\frac{b-n}{\overline{b}-\overline{n}}=-n,$$

односно

$$n=-\frac{b-p}{\overline{b}-\overline{p}}=\frac{m(1-2i)-1}{1+2i-m}.$$

Нека $Q'=\Gamma\cap DM$. Значи,

$$q'\overline{q'}=1 \text{ и } \frac{d-m}{\overline{d}-\overline{m}}=\frac{q'-m}{\overline{q'}-\overline{m}}=-q'm,$$

па затоа

$$q'=-\frac{m+1-2i}{m(1+2i)+1}.$$

Понатаму,

$$\frac{q'-c}{\overline{q'}-\overline{c}}=q'\frac{q'-c}{1-q'\overline{c}}=\frac{m+1-2i}{m(1+2i)+1}\cdot\frac{m(1-2i)-1}{1+2i-m}=-nq'=\frac{q'-n}{\overline{q'}-\overline{n}},$$

што значи дека точките Q',C,N се колинеарни, од што следува дека $Q'=CN\cap DM=Q$.

Равенството $\overline{AQ}:\overline{BQ}=\overline{DP}:\overline{CP}$ е еквивалентно со равенството

$$|q-a|\cdot|p-c|=|d-p|\cdot|b-q|,$$

во чија точност се уверуваме со непосредна проверка ако земеме дека

$$|q-a|=|\frac{m+1-2i}{m(1+2i)+1}+1|=2|\frac{m+1}{m(1+2i)+1}|,\ |p-c|=|\frac{4im}{m-1}-1-1-2i|=2|\frac{m(i-1)+1+i}{m-1}|,$$

$$|d-p|=|-1+2i-\frac{4im}{m-1}+1|=2|\frac{m+1}{m-1}|,\ |b-q|=|1+\frac{m+1-2i}{m(1+2i)+1}|=2|\frac{m(1+i)+1-i}{m(1+2i)+1}|$$

и искористиме дека

$$i[m(1+i)+1-i]=m(i-1)+i+1.\ \blacksquare$$

89. Нека е даден ΔABC. Кружница која минува низ B и C повторно ги сече страните AB и AC во точките C' и B' соодветно. Докажи дека правите BB',CC' и HH' се конкурентни, каде H и H' се ортоцентрите на триаголниците ABC и $A'B'C'$, соодветно.

Решение. Нека кружницата опишана околу четириаголникот $BCB'C'$ е единична. Пресечната точка X меѓу правите BB' и CC' има афикс

$$x=\frac{bb'(c+c')-cc'(b+b')}{bb'-cc'}.$$

Понатаму, бидејќи $BH\perp CB'$ и $CH\perp BC'$ добиваме

$$\frac{b-h}{\overline{b}-\overline{h}}=-\frac{b'-c}{\overline{b'}-\overline{c}}=-bc' \text{ и } \frac{c-h}{\overline{c}-\overline{h}}=-\frac{b-c'}{\overline{b}-\overline{c'}}=bc',$$

од каде наоѓаме

$$\overline{h}=\frac{bh-b^2+cb'}{bb'c} \text{ и } \overline{h}=\frac{ch-c^2+bc'}{bc'c},$$

па затоа

$$\frac{bh-b^2+cb'}{bb'c}=\overline{h}=\frac{ch-c^2+bc'}{bc'c}, \text{ т.е. } h=\frac{b'c'(b-c)+b^2c'-b'c^2}{bc'-cb'}.$$

Аналогно наоѓаме

$$h'=\frac{bc(b'-c')+b'^2c-bc'^2}{b'c-c'b}.$$

Конечно, за да го докажеме тврдењето доволно е да докажеме дека точките H,H',X се колинеарни, т.е. да докажеме дека

$$\frac{h-h'}{\overline{h}-\overline{h'}}=\frac{h-x}{\overline{h}-\overline{x}},$$

во што можеме да се увериме со непосредна проверка ако земеме предвид дека

$$h-h'=\frac{(b+b'-c-c')(bc'+cb')}{bc'-cb'} \text{ и } h-x=\frac{b'c'(b^2-c^2)(b'+b-c'-c)}{(bc'-cb')(bb'-cc')}.$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

90. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник таков да

$$\measuredangle B+\measuredangle D+\measuredangle F=360^0 \text{ и } \overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{EF}=\overline{BC}\cdot\overline{DE}\cdot\overline{FA}.$$

Докажи дека

$$\overline{BC}\cdot\overline{AE}\cdot\overline{FD}=\overline{CA}\cdot\overline{EF}\cdot\overline{DB}.$$

Решение. Нека $\measuredangle A=\alpha, \measuredangle B=\beta, \measuredangle C=\gamma, \measuredangle D=\delta, \measuredangle E=\varepsilon, \measuredangle F=\varphi$. Имаме

$$\frac{c-b}{|c-b|}=e^{i\beta}\frac{a-b}{|a-b|},\ \frac{e-d}{|e-d|}=e^{i\delta}\frac{c-d}{|c-d|},\ \frac{a-f}{|a-f|}=e^{i\varphi}\frac{e-f}{|e-f|}.$$

Ако ги помножиме последните три равенства и земеме предвид дека

$$\beta+\delta+\varphi=360^0 \text{ и } |a-b|\cdot|c-d|\cdot|e-f|=|b-c|\cdot|d-e|\cdot|f-a|$$

добиваме

$$(c-b)(e-d)(a-f)=(a-b)(c-d)(e-f).$$

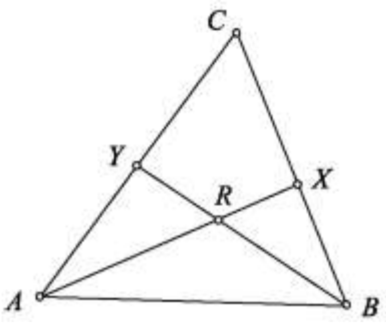
Оттука лесно се заклучува дека

$$(b-c)(a-e)(f-d)=(c-a)(e-f)(d-b),$$

па ако во последното равенство земеме модул го добиваме бараното равенство. ■

91. Даден е ΔABC и точки X и Y на страните BC и CA, соодветно. Нека $R=AX\cap BY$ и $\frac{\overrightarrow{AY}}{\overrightarrow{YP}}=p, \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RX}}=q$, каде $0<p<q$. Пресметај го односот $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}$.

Решение. Да го разгледаме ΔAXC. Точките B,R и Y се точки на Менелеј за страните CX, AX и AC, соодветно и по услов се колинеарни (види цртеж). Според теоремата на Менелај имаме



$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RX}} \cdot \frac{\overrightarrow{XB}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} = -1.$$

Значи,

$$\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{XB}} = \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RX}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} = -\frac{q}{p}$$

и како $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BX} + \overrightarrow{XC}$ и $\overrightarrow{XB} = -\overrightarrow{BX}$ со замена во последното равенство добиваме

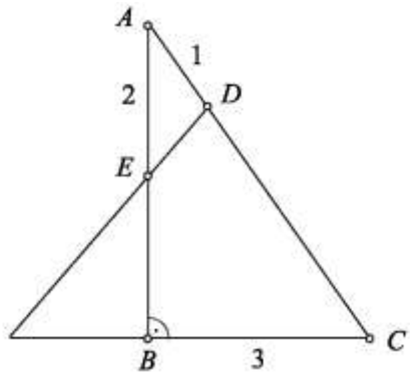
$$\frac{\overrightarrow{BX} + \overrightarrow{XC}}{\overrightarrow{BX}} = \frac{q}{p}$$

односно

$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} = \frac{p}{q-p}. \blacksquare$$

92. Даден е правоаголен ΔABC со прав агол во темето B и страни $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 3$. Точката E е средина на страната AB, а точката D лежи на страната AC и $\overline{DA} = 1$. Нека $F = DE \cap BC$. Најди ја должината на отсечката BF.

Решение. Да го разгледаме ΔABC (цртеж десно). Точките D, E и F се точки на Менелај за страните CA, AB и BC, соодветно и по услов се колинеарни. Од теоремата на Менелај имаме



$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = 1. \qquad (1)$$

Од условот на задачата наоѓаме

$$\overline{FC} = \overline{FB} + \overline{CB} = \overline{FB} + 3,$$

$$\overline{DA} = 1 \text{ и } \overline{AE} = \overline{EB} = 2.$$

Понатаму, од Питагоровата теорема следува $\overline{CA} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2} = 5$. Според тоа, $\overline{CD} = \overline{CA} - \overline{DA} = 4$ и ако замениме во (2) после средувањето наоѓаме $\overline{FB} = 1$. $\blacksquare$

93. Нека $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ е правилен седумаголник. Докажи

$$\frac{1}{\overline{A_0A_1}} = \frac{1}{\overline{A_0A_2}} + \frac{1}{\overline{A_0A_3}}. \qquad (1)$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека правилниот седумаголник е впишан во единичната кружница и дека темето A_0 има афикс (1,0). Тоа значи дека афиксите на темињата $A_k, k=0,1,2,3,4,5,6$ се $a_k = w^k$, $k=0,1,2,3,4,5,6$, соодветно, каде $w=e^{i\frac{2\pi}{7}}$. Понатаму, од својствата на правилем седумаголник добиваме дека ако точката A_1 ја ротираме околу точката A_0 за агол $\frac{2\pi}{7}$ и точката A_2 ја ротираме околу точката A_0 за агол $\frac{2\pi}{14}$ добиваме точки кои се колинеарни со точките A_0 и A_3. Ставаме $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{14}}$, $w=\varepsilon^2$ и добиваме

$$a_1^{'} = 1+(a_1-1)w \text{ и } a_2^{'} = 1+(a_1-1)\varepsilon .$$

Сега за да го докажеме равенството (1) доволно е да докажеме дека

$$\frac{1}{a_1^{'}-1} = \frac{1}{a_2^{'}-1} + \frac{1}{a_3-1},$$

(зошто?). Последното равенство е еквивалентно на равенството

$$\frac{1}{\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)} = \frac{1}{\varepsilon(\varepsilon^4-1)} + \frac{1}{\varepsilon^6-1},$$

од кое после средувањето го добиваме равенството

$$\varepsilon^6+\varepsilon^4+\varepsilon^2+1 = \varepsilon^5+\varepsilon^3+\varepsilon .$$

Но,

$$\varepsilon^5 = -\varepsilon^{12}, \varepsilon^3 = -\varepsilon^{10}, \varepsilon = -\varepsilon^8,$$

па затоа последното равенство е еквивалентно на равенството

$$\varepsilon^{12}+\varepsilon^{10}+\varepsilon^8+\varepsilon^6+\varepsilon^4+\varepsilon^2+1=0,$$

т.е. на равенството

$$w^6+w^5+w^4+w^3+w^2+w+1=0,$$

кое очигледно важи бидејќи $w^7=1$. ■

94. Нека $A_0A_1...A_{13}A_{14}$ е правилен петнаесетаголник. Докажи

$$\frac{1}{\overline{A_0A_1}} = \frac{1}{\overline{A_0A_2}} + \frac{1}{\overline{A_0A_4}} + \frac{1}{\overline{A_0A_7}}. \quad (1)$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме $a_k = w^k$, $k=0,1,2,...,14$, каде $w=e^{i\frac{2\pi}{15}}$. Понатаму, со ротација на точките A_1, A_2, A_4 околу точката A_0 за агли $\frac{6\pi}{15}, \frac{5\pi}{15}, \frac{3\pi}{15}$, соодветно, добиваме точки со афикси $a_1^{'}, a_2^{'}, a_4^{'}$ кои се колинеарни со точките A_0 и A_7. Затоа, за да го докажеме равенството (1) доволно да докажеме дека

$$\frac{1}{a_1^{'}-1} = \frac{1}{a_2^{'}-1} + \frac{1}{a_4^{'}-1} + \frac{1}{a_7-1}\,. \qquad (2)$$

Ставаме

$$\varepsilon = e^{i\frac{\pi}{15}},\ w = \varepsilon^2,\ \varepsilon^{30} = 1$$

и добиваме

$$a_1^{'} = 1 + (a_1 - 1)\varepsilon^6,\ a_2^{'} = 1 + (a_2 - 1)\varepsilon^5 \text{ и } a_4^{'} = 1 + (a_4 - 1)\varepsilon^3,$$

што значи дека равенството (2) е еквивалентно на равенството

$$\frac{1}{\varepsilon^6(\varepsilon^2-1)} = \frac{1}{\varepsilon^5(\varepsilon^4-1)} + \frac{1}{\varepsilon^3(\varepsilon^8-1)} - \frac{\varepsilon^{16}}{\varepsilon^{16}-1}\,.$$

Ако последното равенство го помножиме со $\varepsilon^2 - 1 \neq 0$, после средувањето го добиваме еквивалентното равенство

$$\varepsilon^{14} + \varepsilon^{12} + \varepsilon^{10} + \varepsilon^8 + \varepsilon^6 + \varepsilon^4 + \varepsilon^2 + 1 = \varepsilon(\varepsilon^{12} + \varepsilon^8 + \varepsilon^4 + 1) + \varepsilon^3(\varepsilon^8 + 1) - \varepsilon^{22}. \quad (3)$$

Но, $\varepsilon^{15} = e^{i\pi} = -1 = -\varepsilon^{30}$, па затоа $\varepsilon^{15-k} = -\varepsilon^{30-k}$, од што добиваме дека

$$\varepsilon^{13} = -\varepsilon^{28}, \varepsilon^9 = -\varepsilon^{24}, \varepsilon^5 = -\varepsilon^{20}, \varepsilon = -\varepsilon^{16}, \varepsilon^{11} = -\varepsilon^{26}, \varepsilon^3 = -\varepsilon^{18},$$

па затоа равенството (3) е еквивалентно на равенството

$$\varepsilon^{28} + \varepsilon^{26} + \varepsilon^{24} + \varepsilon^{22} + \varepsilon^{20} + \varepsilon^{18} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^{14} + \varepsilon^{12} + \varepsilon^{10} + \varepsilon^8 + \varepsilon^6 + \varepsilon^4 + \varepsilon^2 + 1 = 0,$$

кое е очигледно точно, бидејќи левата страна на последното равенство е еднаква на $\frac{\varepsilon^{30}-1}{\varepsilon^2-1} = 0$. ■

95. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен и точките A', B', C', D' се тежишта на триаголниците BCD, ACD, BAD, ABC, соодветно. Докажи дека четириаголникот $A'B'C'D'$ исто така е тетивен.

Решение. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен, па затоа $\frac{c-b}{a-b} \cdot \frac{a-d}{c-d} \in \mathbf{R}^*$.

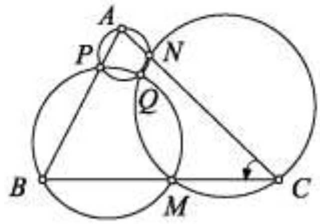
Понатаму, $a' = \frac{b+c+d}{3}, b' = \frac{a+c+d}{3}, c' = \frac{a+b+d}{3}, d' = \frac{a+b+c}{3}$, па затоа

$$\frac{c'-b'}{a'-b'} \cdot \frac{a'-d'}{c'-d'} = \frac{\frac{b-c}{3}}{\frac{b-a}{3}} \cdot \frac{\frac{d-a}{3}}{\frac{d-c}{3}} = \frac{c-b}{a-b} \cdot \frac{a-d}{c-d} \in \mathbf{R}^*,$$

од што следува дека четириаголникот $A'B'C'D'$ е тетивен. ■

96. Даден е триаголник ABC и на страните AB, BC, CA избрани се произволни точки P, N, M. Докажи дека кружниците опишани околу триаголниците APN, BMP, CNM се сечат во една точка.

Решение. Нека Q е втората пресечна точка на кружниците опишани околу триаголниците APN и BMP (види цртеж). Точките A,P,Q,N лежат на иста кружница, па затоа $\frac{q-p}{a-p}\cdot\frac{a-n}{q-n}\in\mathbf{R}^*$, а од исти причини и $\frac{q-m}{b-m}\cdot\frac{b-p}{q-p}\in\mathbf{R}^*$. Според тоа,



$$\frac{q-m}{q-n}\cdot\frac{a-n}{a-p}\cdot\frac{b-p}{b-m}=\frac{q-p}{a-p}\cdot\frac{a-n}{q-n}\cdot\frac{q-m}{b-m}\cdot\frac{b-p}{q-p}\in\mathbf{R}^*,$$

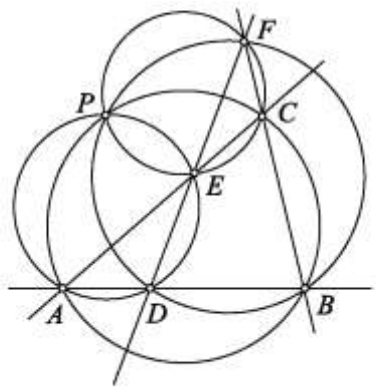
од каде добиваме дека $\frac{q-m}{q-n}\cdot\frac{n-c}{m-c}\cdot\frac{m-c}{n-c}\cdot\frac{n-a}{p-a}\cdot\frac{p-b}{m-b}\in\mathbf{R}^*$. Но,

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{m-c}{n-c}\cdot\frac{n-a}{p-a}\cdot\frac{p-b}{m-b}\right)&=\arg\frac{m-c}{n-c}+\arg\frac{n-a}{p-a}+\arg\frac{p-b}{m-b}\\&=\angle MCN+\angle NAP+\angle PBM\\&=\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB=\pi,\end{aligned}$$

па затоа $\frac{m-c}{n-c}\cdot\frac{n-a}{p-a}\cdot\frac{p-b}{m-b}\in\mathbf{R}^*$, што значи дека $\frac{q-m}{q-n}\cdot\frac{n-c}{m-c}\in\mathbf{R}^*$, т.е. точките Q,M,N,C лежат на иста кружница. Конечно, кружниците опишани околу триаголниците APN,BMP,CNM се сечат во една точката Q. ■

97. Четири прави се сечат така да формираат четири триаголници. Докажи дека четирите кружници опишани околу овие триаголници имаат заедничка точка.

Решение. Од условот на задачата следува дека три од дадените прави не се конкурентни. Пресечните точки меѓу правите да ги означиме со A,B,C,D,E,F, види цртеж. Нека кружниците опишани околу триаголниците ABC и EFC се сечат во точката P. Ќе докажеме дека точките E,P,A,D се конциклични. Имаме,



$$\frac{p-a}{b-a}\cdot\frac{b-c}{p-c},\frac{c-f}{e-f}\cdot\frac{e-p}{c-p}\in\mathbf{R}^*,\qquad(1)$$

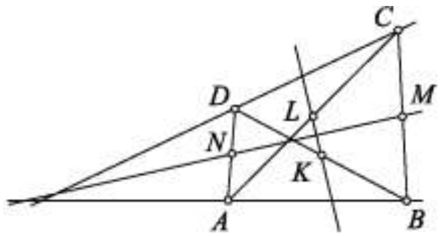
и со делење овие два броја имаме $\frac{p-a}{b-a}\cdot\frac{b-c}{e-p}\cdot\frac{e-f}{c-f}\in\mathbf{R}^*$. Понатаму, точките E,F,D се колинеарни, а исто и точките B,A,D па затоа $\frac{e-f}{e-d}=t\in\mathbf{R}^*$ и $\frac{b-a}{d-a}=t'\in\mathbf{R}^*$. Ако од последните две равенства замениме во (1) добиваме $\frac{a-p}{e-p}\cdot\frac{e-d}{a-d}\cdot\frac{b-c}{f-c}\cdot\frac{t}{t'}\in\mathbf{R}^*$. Бидејќи точките B,C,F се колинеарни важи $\frac{b-c}{f-c}\in\mathbf{R}^*$, па затоа $\frac{a-p}{e-p}\cdot\frac{e-d}{a-d}\in\mathbf{R}^*$, што значи дека точките A,D,E,P се конциклични. Аналогно се докажува дека точките B,D,F,P се конциклични, што значи дека четирите кружници ја содржат точката P. ■

98. Во конвексен четириаголник $ABCD$ страните AB и CD се еднакви.

а) Докажи дека правите AB и CD формираат еднакви агли со правата која ги поврзува средините на страните AD и BC.

б) Докажи дека правите AB и CD формираат еднакви агли со правата која ги поврзува средините на дијагоналите AC и BD.

Решение. а) Нека афиксите на точките A,B,C,D се $0,r,c,d$ каде $r\in\mathbf{R}^+$, $c,d\in\mathbf{C}$. Точките N и M се средини на AD и BC, соодветно, па затоа $n=\frac{d}{2}$ и $m=\frac{r+c}{2}$. Според тоа,



$$(b-a)\bullet(m-n)=r\bullet\frac{r+c-d}{2}=\frac{r^2}{2}+\frac{r\bullet(c-d)}{2}$$

па затоа од $|c-d|=r$ следува

$$(c-d)\bullet(m-n)=(c-d)\bullet\frac{r+c-d}{2}=\frac{r\bullet(c-d)}{2}+\frac{|c-d|^2}{2}=\frac{r\bullet(c-d)}{2}+\frac{r^2}{2}=(b-a)\bullet(m-n)$$

и како $|c-d|=|b-a|=r$ од претходно изнесеното следува дека

$$\angle(AB,NM)=\angle(NM,DC).$$

б) Нека L и K се средините на AC и BD, соодветно. Тогаш $l=\frac{c}{2}$ и $k=\frac{r+d}{2}$. Сега,

$$(k-l)\bullet(m-n)=\frac{r+d-c}{2}\bullet\frac{r+c-d}{2}=\frac{r^2}{4}+\frac{(c-d)\bullet(d-c)}{4}=\frac{r^2}{4}-\frac{|c-d|^2}{4}=0,$$

па затоа $KL\perp MN$, што заедно со тврдењето под а) дава

$$\angle(AB,KL)=\angle(KL,DC).\ ■$$

99. Во остроаголен триаголник ABC со ортоцентар H важи $\overline{HC}=\overline{AB}$. Најди го аголот при темето C.

Решение. Нека триаголникот е впишан во единичната кружница. Тогаш $h = a + b + c$ и затоа важи $\overline{HC} = |a + b|$ и $\overline{AB} = |a - b|$. Според тоа,

$$|a + b|^2 = |a - b|^2 \text{, т.е. } (a + b)\bullet(a + b) = (a - b)\bullet(a - b),$$

па затоа $a\bullet b = 0$, што значи дека $OA \perp OB$, т.е. $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$. Но, триаголникот ABC е остроаголен, па како периферискиот агол е половина од централниот добиваме $\angle ACB = \frac{\pi}{4}$. ■

100. Во конвексен четириаголник $ABCD$ точките P и Q се средини на дијагоналите AC и BD, соодветно. Докажи дека

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{PQ}^2 .$$

Решение. Точките P и Q се средини на дијагоналите AC и BD, па затоа $p = \frac{a+c}{2}$ и $q = \frac{b+d}{2}$. Понатаму

$$\overline{AB}^2 = |b - a|^2 = (b - a)\bullet(b - a) = |a|^2 - 2a\bullet b + |b|^2, \quad \overline{BC}^2 = |b|^2 - 2b\bullet c + |c|^2,$$

$$\overline{CD}^2 = |c|^2 - 2c\bullet d + |d|^2, \quad \overline{DA}^2 = |d|^2 - 2d\bullet a + |a|^2,$$

$$\overline{AC}^2 = |a|^2 - 2a\bullet c + |c|^2, \quad \overline{BD}^2 = |b|^2 - 2b\bullet d + |d|^2,$$

$$\begin{aligned}4\overline{PQ}^2 &= 4(q - p)\bullet(q - p) = (b + d - a - c)\bullet(b + d - a - c)\\ &= |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 + 2a\bullet c + 2b\bullet d - 2a\bullet b - 2b\bullet c - 2c\bullet d - 2a\bullet d,\end{aligned}$$

па затоа

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 &= 2|a|^2 + 2|b|^2 + 2|c|^2 + 2|d|^2 -\\ &\quad - 2a\bullet b - 2b\bullet c - 2c\bullet d - 2a\bullet d\\ &= \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{PQ}^2,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

101. Нека H е ортоцентар на остроаголниот триаголник ABC. Кружницата со центар во средината на отсечката BC и која ја содржи H ја сече правата BC во точките A_1 и A_2. Аналогно, кружницата со центар во средината на правата CA и која ја содржи H ја сече CA во точките B_1 и B_2, а кружницата со центар во средината на AB и која ја содржи H ја сече правата во точките C_1 и C_2. Докажи дека точките A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на иста кружница.

Решение. Нека триаголникот е впишан во единичната кружница, A_0 е средина на отсечката BC и нека афиксите на точките A, B, C, A_0, A_1, A_2, H се $a, b, c, a_0, a_1, a_2, h$. Тогаш $h = a + b + c,\ a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1$ и $a_0 = \frac{b+c}{2}$.
Сега од правоаголните триаголници OA_1A_0 и A_2OA_0 следува

$$\begin{aligned}\overline{OA}_1^{\,2} = \overline{OA}_2^{\,2} &= \overline{OA}_0^{\,2} + \overline{A_0A}_1^{\,2} = \overline{OA}_0^{\,2} + \overline{A_0H}^{\,2}\\ &= \tfrac{b+c}{2}\cdot\overline{\tfrac{b+c}{2}} + (a+b+c-\tfrac{b+c}{2})\overline{(a+b+c-\tfrac{b+c}{2})}\\ &= a\bar{a} + \tfrac{b\bar{b}}{2} + \tfrac{c\bar{c}}{2} + \tfrac{a\bar{b}+\bar{a}b+b\bar{c}+\bar{c}b+c\bar{a}+\bar{c}a}{2}\\ &= 2 + \tfrac{a\bar{b}+\bar{a}b+b\bar{c}+\bar{c}b+c\bar{a}+\bar{c}a}{2}.\end{aligned}$$

Последниот израз е симетричен по a, b, c, па со циклична замена на променливите се добива $\overline{OA}_1^{\,2} = \overline{OA}_2^{\,2} = \overline{OB}_1^{\,2} = \overline{OB}_2^{\,2} = \overline{OC}_1^{\,2} = \overline{OC}_2^{\,2}$, што значи дека точките $A_1, A_2,\ B_1, B_2,\ C_1, C_2$ лежат на иста кружница. ■

102. Нека I е центар на впишаната кружница, а Γ е опишаната кружница околу ΔABC. Нека правата AI ја сече Γ во точките A и D. Нека E е точка од лакот BDC, а F точка од отсечката BC така да важи $\measuredangle BAF = \measuredangle CAE < \frac{1}{2}\measuredangle BAC$. Нека G е средина на отсечката IF. Докажи дека пресекот на правите DG и EI припаѓа на Γ.

Решение. Нека ΔABC е впишан во единичната кружница. Според теорема 13.3 постојат комплексни броеви a, b, c такви да точките A, B, C имаат афикси a^2, b^2, c^2, соодветно, а средините на лаците BC, CA, AB на кои не им припаѓаат точките A, B, C имаат афикси $-bc, -ca, -ab$, соодветно и центарот I на впишаната кружница има афикс $s = -ab - bc - ca$, што значи дека I е ортоцентарот на триаголникот чии темиња се средините на лаците BC, CA, AB на кои не им припаѓаат точките A, B, C.
Без ограничување на општоста можеме да земеме дека точките B и C се симетрични во однос на реалната оска. Нека F' е пресечната точка на AF со Γ, различна од A и нека на точките D, E, F, F', I имаат афикси d, e, f, f', s, соодветно. Тогаш $|a| = |b| = |c| = 1,\ c = \bar{b}, d = -1,\ f' = \frac{b^2c^2}{e} = \frac{1}{e}$ и $s = -1 - a(b + \bar{b})$. Бидејќи точката F е пресек на правите AF и BC добиваме дека

$$\frac{f-b^2}{\bar{f}-\bar{b}^2}=\frac{b^2-\bar{b}^2}{\bar{b}^2-b^2}=-1 \quad \text{и} \quad \frac{f-a^2}{\bar{f}-\bar{a}^2}=\frac{a^2-\frac{1}{e}}{\bar{b}^2-\frac{1}{\bar{e}}}=-\frac{a^2}{e},$$

од каде следува $f+\bar{f}=b^2+\bar{b}^2$ и $f+\frac{a^2}{e}\bar{f}=a^2+\frac{1}{e}$, па затоа

$$f(a^2-e)=a^2(b^2+\bar{b}^2)-a^2e-1.$$

Нека y е афиксот на пресекот на IE и Γ (различен од E), а x е афиксот на пресекот на DG и Γ (различен од D). Тогаш $\bar{x}=\frac{1}{x}$, $\bar{y}=\frac{1}{y}$, па е

$$-ye=\frac{y-e}{\bar{y}-\bar{e}}=\frac{s-e}{\bar{s}-\bar{e}}, \text{ т.е. } y=\frac{s-e}{1-e\bar{s}}.$$

Понатаму, од

$$-a(b+\bar{b})=1+s,\ a^2\bar{s}=-a^2-a^2\frac{b+\bar{b}}{a}=1-a^2+s,\ \overline{a^2-e}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{e}=-\frac{a^2-e}{a^2e},$$

$$\begin{aligned}(f+s+2)(a^2-e)&=a^2(b^2+\bar{b}^2)-a^2e-1+2a^2+sa^2-es-2e\\&=a^2(b+\bar{b})^2-1+a^2(s-e)-2e-es\\&=(1+s)^2-1-2e-es+a^2(s-e)=(s-e)(2+s+a^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{(f+s+2)(a^2-e)}=\overline{(s-e)(2+s+a^2)}&=-\frac{1-e\bar{s}}{e}\cdot\frac{2a^2+a^2\bar{s}+1}{a^2}\\&=-\frac{1-e\bar{s}}{e}\cdot\frac{2a^2+1-a^2+s+1}{a^2}=-\frac{(1-e\bar{s})(2+s+a^2)}{a^2e},\end{aligned}$$

следува

$$\begin{aligned}x&=\frac{1+x}{1+\bar{x}}=\frac{g+1}{\bar{g}+1}=\frac{\frac{f+s}{2}+1}{\overline{\frac{f+g}{2}}+1}=\frac{f+s+2}{\overline{f+s+2}}=\frac{(f+s+2)\overline{(a^2-e)}}{\overline{(f+s+2)(a^2-e)}}=-\frac{1}{a^2e}\cdot\frac{(f+s+2)(a^2-e)}{\overline{(f+s+2)(a^2-e)}}\\&=-\frac{1}{a^2e}\cdot\frac{(s-e)(2+s+a^2)}{-\frac{(1-e\bar{s})(2+s+a^2)}{a^2e}}=\frac{s-e}{1-e\bar{s}}=y,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

103. Нека P е точка во внатрешноста на триаголникот ABC и нека правите AP, BP, CP по втор пат ја сечат кружницата Γ опишана околу триаголникот ABC во точките K, L, M, соодветно. Тангентата на кружницата Γ во точката C ја сече правата AB во точка S. Нека $\overline{SC}=\overline{SP}$. Докажи дека $\overline{MK}=\overline{ML}$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека триаголникот ABC е впишан во единичната кружница и дека точката C

има афикс 1. Ако на точките им соодветствуваат афикси означени со истите мали букви, тогаш $|a|=|b|=|k|=|l|=|m|=1=c$, $\frac{a-p}{\overline{a}-\overline{p}}=\frac{a-k}{\overline{a}-\overline{k}}=-ak$, па затоа $k=\frac{p-a}{1-a\overline{p}}$ и симетрично $l=\frac{p-b}{1-b\overline{p}}, m=\frac{p-1}{1-\overline{p}}$. Точката S се наожа во пресекот на правата AB и тангентата на Γ во C, па затоа $s+\overline{s}=2$ и $s+ab\overline{s}=a+b$, од каде наоѓаме $s=\frac{a+b-2ab}{1-ab}$. Нека T е средината на PC, т.е. $t=\frac{p+1}{2}$. Според условот на задачата $\overline{SC}=\overline{SP}$, па значи T е подножјето на нормалата од S на PC, т.е. на MC, од каде следува $\frac{t-1}{\overline{t}-1}=\frac{m-1}{\overline{m}-1}=-m$ и $\frac{t-s}{\overline{t}-\overline{s}}=-\frac{m-1}{\overline{m}-1}=m$, односно $p+1=2t=m+1+s-m\overline{s}$, т.е. $p=m+s-m\overline{s}=m+s-m(2-s)=s-m+ms$. Од $\frac{p-1}{1-\overline{p}}=m=\frac{p-s}{s-1}$ следува $p-s=sp-p-s+1+(p-s)\overline{p}$, т.е. $\overline{p}=\frac{2p-sp-1}{p-s}$. Имаме

$$m=\frac{p-s}{s-1}=\frac{p-\frac{a+b-2ab}{1-ab}}{\frac{a+b-2ab}{1-ab}-1}=\frac{(1-ab)p-a-b+2ab}{a+b-2ab-1+ab}=-\frac{(1-ab)p-a-b+2ab}{(1-a)(1-b)},$$

$$\begin{aligned}k&=\frac{p-a}{1-a\cdot\frac{2p-sp-1}{p-s}}=\frac{(p-a)(p-s)}{p-2ap+a+(ap-1)s}=\frac{(p-a)(p-\frac{a+b-2ab}{1-ab})}{p-2ap+a+(ap-1)\cdot\frac{a+b-2ab}{1-ab}}\\&=\frac{(p-a)[(1-ab)p-a-b+2ab]}{p-2ap+a-abp+2a^2bp-a^2b+a^2p+abp-2a^2bp-a-b+2ab}\\&=\frac{(p-a)[(1-ab)p-a-b+2ab]}{p-2ap+a^2p-a^2b-b+2ab}=\frac{(p-a)[(1-ab)p-a-b+2ab]}{p(1-a)^2-b(1-a)^2}\\&=\frac{(p-a)[(1-ab)p-a-b+2ab]}{(p-b)(1-a)^2}\end{aligned}$$

и симетрично

$$l=\frac{(p-b)[(1-ab)p-a-b+2ab]}{(p-a)(1-b)^2},$$

па е $m^2=kl$, од каде следува тврдењето на задачата. ■

104. Нека ABC е разностран остроаголен триаголник таков да $\overline{AC}>\overline{BC}$, O е центарот на опишаната кружница, H е ортоцентарот и F е подножјето на висината на триаголникот спуштена од темето C. Нека P е точка од правата AB, различна од A, таква да $\overline{AF}=\overline{PF}$, а M е средината на отсечката AC. Нека X е пресечната точка на правите PH и BC, Y е пресечната точка на правите OM и FX, а Z е пресечната точка на правите OF и AC. Докажи дека точките F, M, Y и Z лежат на иста кружница.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека триаголникот ABC е впишан во единичната кружница. Нека афиксите на точките A, B, C, H, F, P, X се a, b, c, h, f, p, x, соодветно. Важи $h = a+b+c$ и $|a|=|b|=|c|=1$.

Бидејќи F припаѓа на AB, а CF е нормална на AB добиваме $\frac{f-a}{\overline{f}-\overline{a}} = \frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}} = -ab = -\frac{f-c}{\overline{f}-\overline{c}}$, т.е. $f + ab\overline{f} = a+b$ и $f - ab\overline{f} = c - ab\overline{c}$, па затоа $f = \frac{a+b+c-ab\overline{c}}{2}$. Од $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FP}$ следува $p = 2f - a = b + c - ab\overline{c}$. Точката X припаѓа на BC, па затоа $\frac{x-b}{\overline{x}-\overline{b}} = \frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}} = -bc$, т.е. $\overline{x} = \frac{b+c-x}{bc}$. Но, X припаѓа и на PH, па затоа $\frac{p-x}{\overline{p}-\overline{x}} = \frac{p-h}{\overline{p}-\overline{h}} = \frac{b+c-ab\overline{c}-a-b-c}{\overline{b}-\overline{c}-\overline{a}\overline{b}c-\overline{a}-\overline{b}-\overline{c}} = -\frac{a\overline{c}(b+c)}{-\overline{a}\overline{b}(c+b)} = \frac{a^2b}{c}$, од каде добиваме $p - x = \frac{a^2b}{c}(\overline{b}+\overline{c}-\overline{a}\overline{b}c - \frac{b+c-x}{bc}) = \frac{-ac^2+a^2x}{c^2}$, т.е. $x = \frac{c^2p+ac^2}{a^2+c^2} = \frac{2fc^2}{a^2+c^2}$. Доволно е да докажеме дека $OF \perp FX$, што е еквивалентно на $\frac{f-0}{\overline{f}-0} = -\frac{f-x}{\overline{f}-\overline{x}}$, т.е. $x\overline{f} + \overline{x}f = 2|f|^2$, што е точно бидејќи

$$x\overline{f} + \overline{x}f = \frac{2fc^2}{a^2+c^2}\overline{f} + \frac{2\overline{f}\,\overline{c}^2}{\overline{a}^2+\overline{c}^2} f = 2|f|^2\left(\frac{c^2}{a^2+c^2} + \frac{a^2}{a^2+c^2}\right) = 2|f|^2 . \blacksquare$$

105. Нека ΔABC не е рамнокрак и нека AD, BF и CF се неговите симетрали на агли ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$). Нека K_a, K_b, K_c се точки на впишаната кружница на ΔABC такви да DK_a, EK_b, FK_c се тангенти на впишаната кружница и $K_a \notin BC, K_b \notin AC, K_c \notin AB$. Нека A_1, B_1, C_1 се средини на страните BC, CA, AB, соодветно. Докажи дека правите A_1K_a, B_1K_b, C_1K_c се сечат на впишаната кружница на ΔABC.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека впишаната кружница на ΔABC е единичната и дека таа ги допира страните BC, CA, AB во точките A', B', C', соодветно. Нека S е центарот на впишаната кружница, кој има афикс 0. Ако афиксите на точките ги означиме со соодветните мали букци, тогаш имаме $|a'|=|b'|=|c'|=1$ и $a = \frac{2b'c'}{b'+c'}, b = \frac{2a'c'}{a'+c'}, c = \frac{2a'b'}{a'+b'}$, па затоа $a_1 = \frac{b+c}{2} = \frac{a'^2b'+a'^2c'+2a'b'c'}{(a'+b')(a'+c')}$. Бидејќи

DK_a е тангента на впишаната кружница добиваме $\measuredangle ASK_a = \measuredangle A'SA$ и како $|k_a|=1$, следува дека $\frac{k_a}{a} = \overline{(\frac{a'}{a})}$, па затоа $k_a = \frac{1}{a'} \cdot \frac{a}{\overline{a}} = \frac{b'c'}{a'}$. За пресечната точка X на впишаната кружница и правата A_1K_a важи $|x|=1$ и $\frac{x-k_a}{a_1-k_a} = \overline{(\frac{x-k_a}{a_1-k_a})}$, односно $\overline{(a_1-k_a)}(x-k_a) = (\frac{1}{x} - \frac{1}{k_a})(a_1-k_a)$, па како $x \neq k_a$, следува дека $\overline{a_1-k_a} = -\frac{1}{xk_a}(a_1-k_a)$. Од

$$a_1 - k_a = \frac{a'^2 b' + a'^2 c' + 2a'b'c'}{(a'+b')(a'+c')} - \frac{b'c'}{a'} = \frac{(a'^2 - b'c')(a'b'+a'c'+b'c')}{a'(a'+b')(a'+c')}$$ и

$$\overline{a_1 - k_a} = \frac{\frac{b'c'-a'^2}{a'^2 b'c'} \cdot \frac{a'+b'+c'}{a'b'c'}}{\frac{(a'+b')(a'+c')}{a'^3 b'c'}} = \frac{(b'c'-a'^2)(a'+b'+c')}{b'c'(a'+b')(a'+c')},$$

и $a'^2 \neq b'c'$, бидејќи ΔABC не е рамнокрак, следува

$$x = -\frac{1}{k_a} \cdot \frac{a_1-k_a}{\overline{a_1-k_a}} = \frac{a'b'+b'c'+c'a'}{a'+b'+c'}.$$

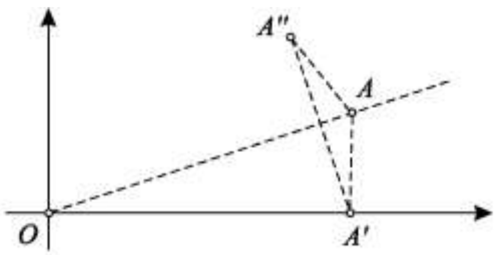
Бидејќи добиениот израз е симетричен по a', b', c', следува дека правите B_1K_b и C_1K_c ја сечат впишаната кружница во точката X. ■

4. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА КОН ВТОРА И ТРЕТА ГЛАВА

1. Каква е меѓусебната положба на точките A и B со афикси a и b, соодветно, ако

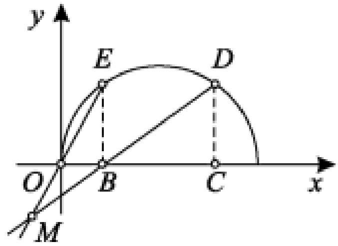
а) $\mathrm{Re}\, ab = 0$, б) $\mathrm{Im}\, ab = 0$,

в) $\mathrm{Re}\, a\overline{b} = 0$, в) $\mathrm{Im}\, a\overline{b} = 0$.



2. Нека A' е проекцијата на точката A на реалната оска. Најди ја точката A'' која е симетрична на точката A' во однос на правата OA (цртеж лево).

3. Над $\overline{OA}=1$ (цртеж десно) повлечена е полукружница. Од точките B и C такви што $\overline{OB}=\frac{1}{4}$ и $\overline{OC}=\frac{3}{4}$ подигнати се нормали на $x-$оската и E и D се пресечните точки на овие нормали со полукружницата. Најди го комплексниот број кој е афикс на пресечната точка M на правите OE и BD.



4. Нека е дадена точката C со афикс $c=2e^{\frac{\pi}{6}}$. Најди ги афиксите a и b на точките A и B кои се симетрични во однос на правата OC, се наоѓаат на растојание 1 од точката C и за кои важи:

а) $|a-b|=2$, б) $|a-b|=\sqrt{2}$.

5. Дадени се точките A, B, C и Z со афикси $a, b=a+e^{i\alpha}, c=a+e^{i\beta}$ и z, соодветно. Најди го растојанието на симетричните точки Z' и Z'' на точката Z во однос на правите AB и AC.

6. Ќе велиме дека отсечката AB се гледа под агол α од точката M ако $\measuredangle AMB=\alpha$. Нека се дадени точките A и B со афикси a и b, соодветно. Докажи дека точката W која лежи на симетралата на отсечката AB и од која оваа отсечка се гледа под агол α има афикс $w=\frac{ae^{i\alpha}-b}{e^{i\alpha}-1}$.

7. Во рамнокрак трапез квадратот на дијагоналата е еднаков на збирот на квадратот на работ и производот на должините на неговите основи. Докажи!

8. Нека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм и нека N е пресечната точка на полуправата AD и кружницата опишана околу триаголникот ABC. Докажи дека $\overline{AD}\cdot\overline{AM}=\overline{AC}^2-\overline{AB}^2$.

9. Кружницата (K) е опишана околу правилен петаголник $ABCDE$. Нека M е точка од лакот AE. Докажи дека

$$\overline{MA}+\overline{MC}+\overline{ME}=\overline{MB}+\overline{MD}.$$

10. Конструирај трапез, ако му се познати сите негови страни.

11. Дадени се кружниците $K'(o',R')$ и $K''(o'',R'')$ и отсечката AB. Да се конструира отсечка CD паралелна и еднаква на AB, така што $C\in(K')$ и $D\in(K'')$.

12. Дадени се права (p), кружница (K) и отсечка AB. Да се конструира отсечка CD паралелна и еднаква на AB, така што $C\in(K)$ и $D\in(p)$.

13. Дадени се правите (p) и (q) и отсечката AB. Да се конструира отсечка CD паралелна и еднаква на AB, така што $C\in(p)$ и $D\in(q)$.

14. Нека A,B,C,D се четири дадени точки и нека

$$S_A(D)=D_1,\quad S_B(D_1)=D_2,\ S_C(D_2)=D_3,$$
$$S_A(D_3)=D_4,\ S_B(D_4)=D_5,\ S_C(D_5)=D_6.$$

Докажи дека $D=D_6$!

15. Дадени се точките $O_i, i=1,2,3,4$ и отсечката A_0B_0. Нека $S_i,\ \ i=1,$ $2,3,4$ е централна симетрија со центар $O_i, i=1,2,3,4$ и нека

$$A_iB_i=S_i(A_{i-1}B_{i-1}), i=1,2,3,4.$$

Докажи дека $\overline{A_0A}_4=\overline{B_0B}_4$.

16. Дали фигурата $\mathbf{F}=\{A,B,C\}$ може да има центар на симетрија?

17. Во кој случај фигура составена од две полуправи е централно симетрична?

18. Дадени се кружниците $K'(O',R')$ и $K''(O'',R'')$. Во кој случај фигурата составена од кружниците (K') и (K'') е централно симетрична?

19. Ако една фигура $\mathbf{F}$ е централно симетрична, тогаш таа има или само еден центар на симетрија или, пак, бесконечно многу центри на симетрија. Докажи!

20. Дадени се кружници $K'(O',R')$ и $K''(O'',R'')$ и точка A. Низ точката A да се повлече права (a), така што A да биде средина на отсечката MN, каде што $M\in(a)\cap(K')$ и $N\in(a)\cap(K'')$.

21. На кружницата (K) се дадени четири точки $ABCD$, а на тетивата CD една точка M. На кружницата (K) да се најде точка X, така што правите AX и BX да отсечуваат на тетивата CD отсечка ST чија средина е точката M.

22. Дадена е ротација $S_{C,\alpha}$, $\alpha \neq 0, \pi$. Дали постојат прави кои се неподвижни за оваа ротација?

23. Дадена е ротација $S_{C,\alpha}$. Докажи дека кружницата $K(O,R)$ е неподвижна ако и само ако $O \equiv C$.

24. Дадени се правите (p) и (q). Во кој случај постои ротација $S_{C,\alpha}$, таква што $S_{C,\alpha}(p) = q$.

25. Дадени се кружници $K(O,R)$ и $K'(O',R')$. Во кој случај постои ротација $S_{C,\alpha}$, таква што $S_{C,\alpha}(K) = K'$.

26. Дадени се две кружници (K') и (K'') и точка A. Конструирај рамностран триаголник ABC, така што $B \in (K')$ и $C \in (K'')$.

27. Дадени се три паралелни прави $(p), (q)$ и (r). Конструирај рамностран триаголник ABC, така што $A \in (p), B \in (q), C \in (r)$.

28. Дадени се три концентрични кружници $(K'), (K'')$ и (K'''). Конструирај рамностран триаголник ABC, така што $A \in (K')$, $B \in (K'')$, $C \in (K''')$.

29. Дадени се права (p), кружница (K) и точка O. Конструирај рамностран триаголник ABC со центар O, така што две негови темиња да лежат на (p) и (K), соодветно.

30. Дадени се две кружници (K), (K') и точка O. Конструирај рамностран триаголник ABC со центар O, така што две негови темиња да лежат на (K) и (K'), соодветно.

31. Во триаголникот ABC впиши ромб со остар агол $\alpha = 60^0$, така што две негови соседни темиња да лежат на страната AB, а другите две соодветно на страните BC и AC.

32. Во кружницата $K(O,R)$ впиши триаголник ABC, сличен на даден триаголник PQR.

33. Дадени се прави $(p),(q)$ кои се сечат и кружница (K). Конструирај кружница што ги допира правите (p) и (q) и кружницата (K).

34. Нека H и H_1 се хомотетии со ист центар O и коефициенти a и a_1. Докажи дека $\mathrm{H} \circ \mathrm{H}_1$ е хомотетија и дека важи $\mathrm{H} \circ \mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_1 \circ \mathrm{H}$.

35. а) Докажи дека композиција на централна симетрија и хомотетија со коефициент $a \neq -1$ е хомотетија.
б) Докажи дека композиција на хомотетија со коефициент $a \neq -1$ и централна симетрија е хомотетија.

36. Докажи дека композиција на ротација за агол $\alpha \neq 0^0, 180^0$ и хомотетија е сличност која не е хомотетија.

37. Докажи дека композиција на две осни симетрии е или транслација или ротација.

38. Докажи дека секоја транслација може да се претстави како композиција на две осни симетрии.

39. Докажи дека секоја ротација може да се претстави како композиција на две осни симетрии.

40. Нека $(a,),(b)$ и (c) се три паралелни прави. Докажи дека композицијата на осните симетрии σ_a, σ_b и σ_c е осна симетрија.

41. Докажи дека композиција на осна симетрија и хомотетија е сличност која не е хомотетија.

42. Докажи дека не постои друга сличност освен: движење, хомотетија, композиција на ротација и хомотетија, композиција на осна симетрија и хомотетија.

43. Ако z_1, z_2, z_3 и z_4 се различни точки од произволна кружница, тогаш нивниот двоаразмер е реален број. Докажи!

44. Најди го множеството точки z кои со трансформацијата на Мобиус $w=\frac{z+2i}{2iz-1}$ се пресликува на множеството $\{w \mid |w|=1\}$.

45. Најди трансформација на Мобиус која полурамнината $\{z \mid \operatorname{Im} z>0\}$ ќе ја преслика во кругот $\{z \mid |z|<1\}$ така што точката $z=i$ ќе се преслика во точката $w=0$ и точката $z=\infty$ ќе се преслика во точката $w=-1$.

46. Најди услов при кој трансформацијата на Мобиус $w=\frac{az+b}{cz+d}$ го пресликува кругот $\{z \mid |z|<1\}$ во полурамнината $\{z \mid \operatorname{Im} z>0\}$.

47. Определи ја трансформацијата на Мобиус која точките $0,-i,-1$ ги пресликува во точките $i,1,0$, соодветно.

48. Определи ја трансформацијата на Мобиус која точките $i,-i,1$ ги пресликува во точките $0,1,\infty$, соодветно.

49. Докажи дека кои било три точки од една кружница не се колинеарни.

50. Дадени се тетиви AB и CD во една кружница при што $\overline{AC}=\overline{BD}$. Докажи дека или $AB \| CD$ или $AD \| BC$.

51. Во остроаголен триаголник ABC, B' и C' се подножја на висините спуштени од темињата B и C, соодветно. Кружницата со дијаметар AB ја сече правата CC' во точките M и N, а кружницата со дијаметар AC ја сече правата BB' во точките P и Q. Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ е тетивен.

52. Нека $ABCD$ е четириаголник за кој внатрешните агли во темињата A, B и C се еднакви. Докажи дека точката D, центарот на опишаната кружница и ортоцентарот на триаголникот ABC се колинеарни.

53. Во кружница k е впишан шестаголник $ABCDEF$, при што страните AB, CD и EF се еднакви на радиусот на кружницата k. Докажи дека средините на останатите три страни се темиња на рамностран триаголник.

54. Во надворешноста на ΔABC конструирани се рамнокраки триаголници BCD, CAE и ABF со основи BC, CA и AB, соодветно. Докажи дека нормалите спуштени од точките A, B и C на правите EF, FD и DE, соодветно, се конкурентни.

55. Нека четириаголникот $ABCD$ е тетивен и нека E и F се подножјата на нормалите спуштени од пресекот на дијагоналите на страните AB и CD, соодветно. Докажи дека правата EF е нормална на правата која минува низ средините на страните AD и BC.

56. Докажи дека средините на висините на триаголникот се колинеарни ако и само ако триаголникот е правоаголен.

57. Подножјата на висините на остроаголниот ΔABC се точките A', B' и C'. Ако A'', B'' и C'' се допирните точки на кружницата впишана во $\Delta A'B'C'$, докажи дека Ојлеровите прави на ΔABC и $\Delta A''B''C''$ се совпаѓаат.

58. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник кај кој дијагоналите AC и BD се нормални и нека $E = AC \cap BD$. Докажи дека точките симетрични на точката E во однос на правите AB, BC, CD и DA формираат тетивен четириаголник.

59. Нека AK, BL, CM се висините на триаголникот ABC, H е негов ортоцентар и P е средината на отсечката AH. Ако $BH \cap MK = S$ и $LP \cap AM = S$, докажи дека $TS \perp BC$.

60. Нека AD, BE, CF се висините на триаголникот ABC. За секој $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$, нека се A', B', C' такви да $\overline{AA'} = k\overline{AD}, \overline{BB'} = k\overline{BE}, \overline{CC'} = k\overline{CF}$.

Најди ги сите k такви да за секој нерамнокрак триаголник ABC триаголниците ABC и $A'B'C'$ се слични.

61. Даден е ΔABC и точки D, E, F на неговите висини BC, CA, AB, соодветно, такви да

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = \frac{1-k}{k},\ k \in \mathbf{R}.$$

Најди го геометриското место на точки на центрите на опишаните кружници околу DEF за $k \in \mathbf{R}$.

62. Нека се H' и H'' подножјата на нормалите спуштени од ортоцентарот H на ΔABC на симетралата на надворешниот, односно внатрешниот агол во темето C. Докажи дека правата $H'H''$ ја содржи средината на страната AB.

63. Даден е остроаголен триаголник ABC и точка D во неговата внатрешност, таква да $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB + 90^0$ и $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}$. Најди

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}.$$

64. На кружница k од точка A (која се наоѓа во надворешноста на k) конструирани се тангентите AM и AN и секанта која ја сече кружницата во точките K и L. Нека l е произволна права паралелна со AM и нека KM и LM ја сечат правата l во точките P и Q, соодветно. Докажи дека правата MN ја преполовува отсечката PQ.

65. На страните BC, CA и AB на триаголникот ABC дадени се редоследно точки D, E и F такви да $\overline{BD} = \overline{CE} = \overline{AF}$. Докажи дека триаголниците ABC и DEF имаат ист центар на опишана кружница ако и само ако триаголникот ABC е рамностран.

66. Нека е даден тетивен четириаголник $ABCD$. Докажи дека центрите на впишаните кружници на триаголниците ABC, BCD, CDA, DAB се темиња на правоаголник.

67. Нека I е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC и нека се D и E средините на страните AC и AB, соодветно. Нека

$AB\cap DI=S$ и $AC\cap EI=Q$. Докажи дека $\overline{AP}\cdot\overline{AQ}=\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ ако и само ако $\measuredangle CAB=60^0$.

68. Нека M е внатрешна точка на квадратот $ABCD$ и A',B',C',D' се пресечните точки на правите AM,BM,CM,DM со кружницата опишана околу квадратот $ABCD$, соодветно. Докажи дека

$$\overline{A'B'}\cdot\overline{C'D'}=\overline{A'D'}\cdot\overline{B'C'}.$$

69. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник и нека $F=AC\cap BD$ и $E=AD\cap BC$. Ако M и N се средините на страните AB и CD, соодветно, докажи дека $\frac{\overline{MN}}{\overline{EF}}=\frac{1}{2}\left|\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}-\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}\right|$.

70. Точките A',B',C' се симетрични на точките A,B,C во однос на страните BC,CA,AB, соодветно. Каков треба да биде триаголникот ABC, за да триаголникот $A'B'C'$ биде рамностран?

71. Нека точката O е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC, а R е нејзиниот радиус. Впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните BC,CA,AB во точките A',B',C', соодветно и има радиус r. Нека правите определени со средините на отсечките AB' и AC', BA' и BC', CA' и CB' се сечат во точките C'',A'' и B''. Докажи дека центарот на опишаната кружница околу триаголникот $A''B''C''$ е точката O и дека неговиот радиус е еднаков на $R+\frac{r}{2}$.

72. Нека трапезот $ABCD$, $AB\parallel CD$, $\overline{AB}>\overline{CD}$, не е рамнокрак и нека е опишан околу кружница со центар во точката I, која ја допира страната CD во точката E. Нека M е средина на страната AB и нека MI и CD се сечат во точката F. Докажи дека $\overline{DE}=\overline{FC}$ ако и само ако $\overline{AB}=2\overline{CD}$.

73. Даден е тетивен шестаголник $ABCDEF$ таков да $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{EF}$ и дијагоналите AD,BE и CF се конкурентни. Ако $p=AD\cap CE$, докажи дека $\frac{\overline{CP}}{\overline{PE}}=(\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}})^2$.

74. Даден е триаголник ABC. Точките A', B', C' се средини на лаците BC, CA, AB, кои не ги содржат точките A, B, C, соодветно. Правите $A'B', B'C', C'A'$ ги делат страните на триаголникот на шест делови. Докажи дека “средните” делови се еднакви ако и само ако триаголникот ABC е рамностран.

75. Нека во ΔABC важи $\measuredangle ABC = 60^0$ и нека правата IF е паралелна на страната AC, каде I е центар на впишаната кружница, а точката F лежи на страната AB. Точката P припаѓа на страната BC и $3\overline{BP} = \overline{BC}$. Докажи дека $\measuredangle BFP = \frac{1}{2}\measuredangle ABC$.

76. Аголот во темето A е најмал во ΔABC. Точките B и C ја делат опишаната кружница на два лака. Нека U е внатрешна точка на лакот меѓу B и C кој не ја содржи A. Симетралите на отсечките AB и AC ја сечат правата AU во точките V и W, соодветно. Правите BV и BW се сечат во точката T. Докажи дека $\overline{AU} = \overline{TB} + \overline{TC}$.

77. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков да AB не е паралелна со CD и AD не е паралелна со BC. Точките P, Q, R, S се избрани на страните AB, BC, CD, DA, редоследно, така да четириаголникот $PQRS$ е паралелограм. Најди го геометриското место на пресеците на дијагоналите на сите вакви четириаголници $PQRS$.

78. Впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните BC, CA, AB во точките E, F, G, соодветно. Нека AA', BB', CC' се отсечоците на симетралите на внатрешните агли на триаголникот ABC. Нека се K_A, K_B, K_C допирните точки на вторите тангенти на впишаната кружница повлечени од точките A', B', C', соодветно. Нека се P, Q, R средините на страните BC, CA, AB, соодветно. Докажи дека правите PK_A, QK_B, RK_C се сечат на кружницата впишана во триаголникот ABC.

79. Нека AD, BE, CF се висините на триаголникот ABC, а A', B', C' се точки на нив, соодветно, такви да $\frac{\overline{AA'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{CF}} = k$. Најди ги сите вредности на k за кои триаголниците ABC и $A'B'C'$ се слични.

80. **(Теорема на Гаус).** Ако правата l ги сече правите, кои ги содржат страните BC, CA, AB на триаголникот ABC во точките A', B', C', соодветно. Докажи дека средините на отсечките AA', BB', CC' колинеарни.

81. Даден е триаголник ABC и точка T. Нека P и Q се подножјата на нормалите повлечени од T на правите AB и AC, соодветно, и нека R и S се подножјата на нормалите повлечени од A на правите TC и TB, соодветно. Докажи дека пресекот на правите PR и QS лежи на правата BC.

82. Нека $PQRS$ е тетивен четириаголник таков да правите PQ и RS не се паралелни. Ги разгледуваме множеството од сите кружници кои минуваат низ P и Q и множеството од сите кружници кои минуваат низ R и S. Најди го множеството од сите допирни точки меѓу кружниците од овие две множества.

83. Дадена е кружница k и точка P надвор од неа. Променлива права s која ја содржи точката P ја сече кружницата во точките A и B. Нека M и N се средините на лаците определени со точките A и B и нека C е точка на отсечката AB таква да $\overline{PC}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$. Докажи дека аголот $\measuredangle MCN$ не зависи од изборот на правата s.

84. Кружниците k_1 и k_2 се допираат во точката M и радиусот на k_1 е поголем од радиусот на k_2. Нека A е произволна точка на k_2 која не лежи на правата која ги поврзува центрите на кружниците. B и C се точки од k_1 такви да AB и AC се негови тангенти. Правите BM и CM повторно ја сечат k_2 во точки E и F, соодветно, а точката D е пресек на тангентата на k_2 во A и правата EF. Докажи дека геометриското место на точката D, кога A се движи по k_2 е права.

85. Во рамнината се дадени кружници k_1 и k_2 кои се сечат во точките A и B. Тангентите на k_1 во A и B се сечат во точката K. Нека M е произволна точка на кружницата k_1 и нека

$$MA \cap k_2 = \{A, P\},\ MK \cap k_1 = \{M, C\} \text{ и } CA \cap k_2 = \{A, Q\}.$$

Докажи дека средината на отсечката PQ лежи на правата MC и дека PQ минува низ фиксна точка кога M се движи по кружницата k_1.

86. Нека ABC е триаголник таков да $\measuredangle ACB = 2\measuredangle ABC$ и нека D е точка на отсечката BC таква да $\overline{CD} = 2\overline{BD}$. Отсечката AD е продолжена преку точката D до точка E така да важи $\overline{AD} = \overline{DE}$. Докажи дека

$$\measuredangle ECB + 180^0 = 2\measuredangle EBC .$$

87. Даден е триаголник $A_1A_2A_3$ и права p која минува низ точка P и ги сече страните A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 во точки X_1, X_2, X_3, соодветно. Нека A_iP ја сече кружницата опишана околу $A_1A_2A_3$ во точката R_i, за $i = 1,2,3$. Докажи дека правите X_1R_1, X_2R_2, X_3R_3 се сечат во точка која припаѓа на опишаната кружница околу триаголникот $A_1A_2A_3$.

88. Две кружници со различни радиуси се сечат во точките A и B. Заедничките тангенти на овие кружници се MN и ST. Докажи дека ортоцентрите на триаголниците AMN, BMN, AST, BST се темиња на правоаголник.

89. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Правите AD и BC се сечат во точката E, при што C е меѓу B и E. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката F. Нека M е средината на CD и нека $N \neq M$ е точка на кружницата опишана околу триаголникот ABM таква да $\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}$. Докажи дека точките E, F и N се колинеарни.

90. Дијаметарот на кружницата k се наоѓа на правата l. Нека C и D се точки на k. Тангентите на k во точките C и D редоследно ја сечат правата l во точки B и A такви да центарот на кружницата е меѓу B и A. Нека $E = AC \cap BD$ и F е подножјето на нормалата повлечена од E кон l. Докажи дека EF е симетрала на $\measuredangle CFD$.

91. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник чии страни BC и AD се еднакви и не се паралелни. Нека E и F се внатрешни точки на страните BC и AD, соодветно, такви да $\overline{BE} = \overline{DF}$. Правите AC и BD се сечат во точката P, правите BD и EF се сечат во точката Q и правите EF и AC се сечат во точката R. Да ги разгледаме триаголниците PQR кои се добиваат за сите точки E и F. Докажи дека опишаните кружници на овие триаголници имаат заедничка точка, различна од P.

92. Нека O е внатрешна точка на остроаголниот ΔABC. Кружниците со центри низ средините на ΔABC, кои минуваат низ точката O, меѓусебно се сечат во точките K, L, M, различни од O. Докажи дека O е центар на впишаната кружница во ΔKLM ако и само ако O е центар на опишната кружница околу ΔABC.

93. Нека M и N се точки во внатрешноста на ΔABC такви да важи $\measuredangle MAB = \measuredangle NAC$ и $\measuredangle MBA = \measuredangle NBC$. Докажи дека

$$\frac{\overline{AM}\cdot\overline{AN}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}+\frac{\overline{BM}\cdot\overline{BN}}{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}+\frac{\overline{CM}\cdot\overline{CN}}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}=1.$$

94. Нека ΔABC е таков да $\measuredangle A = 90^0$ и $\measuredangle B < \measuredangle C$. Тангентата во точката A на неговата опишана кружница Γ ја сече правата BC во точка D. Нека E е слика на точка A при осна симетрија во однос на правата BC, X е подножје на нормалата од A на BE и Y е средина на отсечката AX. Нека правата BY ја сече Γ уште во точката Z. Докажи дека правата BD е тангента на опишаната кружница околу ΔADZ.

95. Даден е ΔABC и на неговите страни точки $A_1 \in BC, B_1 \in AC, C_1 \in AB$ такви да ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ се слични. Докажи дека ако ортоцентрите или центрите на впишаните кружници на ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ се совпаѓаат, тогаш ΔABC е рамностран.

96. Нека се дадени точките A, B и C. Најди го геометриското место на точката D за кое важи

$$\overline{DA}\cdot\overline{DB}\cdot\overline{AB}+\overline{DB}\cdot\overline{DC}\cdot\overline{BC}+\overline{DC}\cdot\overline{DA}\cdot\overline{CA}=\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}.$$

97. Докажи дека должината на страната на правилен деветаголник е еднаква на разликата на должините на неговата најголема и најмала дијагонала.

98. Докажи дека кај правилен $n-$аголник впишан во кружница со радиус r производот на сите страни и дијагонали е еднаков на $n^{\frac{n}{2}}r^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

99. На кружницата опишана околу правилен $2n-$аголник $A_1A_2...A_{2n}$ земена е произволна точка P. Докажи дека збирот на квадратите на растојанијата од точката P до темињата со парни индекси е еднаков на збирот на квадратите на растојанијата од точката P до темињата со непарни индекси.

100. Нека $A_0A_1A_2...A_{2n}$ е правилен многуаголник, P е точка од помалиот лак A_0A_{2n} на опишаната кружница и m е цел број, $0 \le m < n$. Докажи дека

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{PA}_{2k}^{2m+1} = \sum_{k=1}^{n} \overline{PA}_{2k-1}^{2m+1}.$$

101. Нека $A_0A_1...A_{n-1}$ е правилен $n-$аголник впишан во кружница со радиус r. Докажи дека за произволна точка P која лежи на опишаната кружница и природен број $m < n$ точно е равенството

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{PA_k}^{2m} = \binom{2m}{m} nr^{2m}.$$

102. Нека $h_1, h_2, ..., h_n$ се растојанијата од произволна точка P на помалиот лак A_0A_{n-1} на кружницата опишана околу правилен многуаголник $A_0A_1...A_{n-1}$ до правите $A_0A_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}A_0$. Докажи дека

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + ... + \frac{1}{h_{n-1}} = \frac{1}{h_n}.$$

103. Даден е правилен $n-$аголник $A_1A_2...A_n$ и точка P на помалиот лак A_1A_n. Нека со d_k го означиме растојанието од точката P до A_k. Докажи дека

$$\frac{1}{d_1d_2} + \frac{1}{d_2d_3} + ... + \frac{1}{d_{n-1}d_n} = \frac{1}{d_1d_n}.$$

104. Нека P е произволна точка на кружницата опишана околу правилен $2n-$аголник $A_1A_2...A_{2n}$. Ако $p_1, p_2, ..., p_{2n}$ се растојанијата од точката P до правите кои ги содржат страните $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{2n}A_1$, соодветно. Докажи дека $p_1p_3...p_{2n-1} = p_2p_4...p_{2n}$.

105. Нека n е прост број и нека H_1 е конвексен $n-$аголник. Многуаголниците $H_2, H_3, ..., H_n$ се конструираат рекурзивно: темињата на многуаголникот H_{k+1} се добиваат од темињата на многуаголикот H_k со симетрија низ $k-$тото сосоедно теме во позитивна насока. Докажи дека многуаголниците H_1 и H_n се слични.

106. Нека $A_0, A_1, ..., A_{2k}$ се последователни точки на кружница, кои ја делат на $2k+1$ еднакви лаци. Точката A_0 е поврзана со тетиви со сите останати точки. Овие $2k$ тетиви го делат кругот на $2k+1$ делови. Овие делови наизменично се обоени со бела и црна боја, така да бројот на белите делови е за еден поголем од бројот на црните делови. Докажи дека црната површина има поголема плоштина од белата површина.

107. Темињата на правилен $n-$аголник се обоени со неколку бои (секое теме со една боја) така да темињата обоени со иста боја формираат правилен многуаголник. Докажи дека меѓу овие многуаголници постојат два слични.

108. Нека точките A, B, C, D и E се такви да $ABCD$ е паралелограм, а $BCED$ тетивен четириаголник. Нека l е права која ја содржи точката A и ја сече отсечката DC во внатрешна точка F, а правата BC во точката C. Ако $\overline{EF} = \overline{EG} = \overline{EC}$, тогаш l е симетрала на аголот DAB. Докажи!

109. Нека H е ортоцентарот на остроаголниот триаголник ABC. Кружницата со центар во средината на отсечката BC и која ја содржи точката H ја сече правата BC во точките A_1 и A_2. Аналогно кружницата со центар во средината на отсечката CA и која ја содржи точката H ја сече правата CA во точките B_1 и B_2, а кружнивата цо центар во средината на отсечката AB и која ја содржи точката H ја сече правата AB во точките C_1 и C_2. Докажи дека точките A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2 припаѓаат на иста кружница.

110. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков да $\overline{BA} \neq \overline{BC}$ и k_1 и k_2 се впишаните кружници во триаголниците ABC и ADC, соодветно. Нека постои кружница k која го допира продолжението на страната BA кај точката A и продолжението на страната BC кај точката C, а која истовремено ги допира и правите AD и CD. Докажи дека заедничките надворешни тангенти на кружниците k_1 и k_2 се сечат на кружницата k.

111. Нека O е центар на опишаната кружница на триаголникот ABC, точките P и Q се внатрешни за отсечките CA и AB, соодветно, точките K, L и M се средини на отсечките BP, CQ и PQ, соодветно и Γ е кружницата која ги содржи точките K, L и M. Ако правата PQ е тангента на кружницата Γ, докажи дека $\overline{OP} = \overline{OQ}$.

112. Нека I е центарот на впишаната кружница, а Γ е опишаната кружница на ΔABC. Нека правата AI ја сече Γ во точките A и D. Нека E е точка од лакот BDC, а F е точка од отсечката BC така да

$$\measuredangle BAF = \measuredangle CAE < \tfrac{1}{2}\measuredangle BAC.$$

Нека G е средина на отсечката IF. Докажи дека пресекот на правите DG и EI лежи на кружницата Γ.

113. Нека P е точка во внатрешноста на ΔABC и правите AP, BP и CP ја сечат опишаната кружница Γ на ΔABC по втор пат во точките K, L и M, соодветно. Тангентата на кружницата Γ во точката C ја сече правата AB во точката S. Нека $\overline{SC} = \overline{SP}$. Докажи дека $\overline{MK} = \overline{ML}$.

114. Нека ABC е остроаголен триаголник и нека Γ е неговата опишана кружница. Нека правата l е произволна тангента на кружницата Γ и нека l_a, l_b и l_c се прави симетрични со l во однос на правите BC, CA и AB, соодветно. Докажи дека опишаната кружница на триаголникот определен со правите l_a, l_b и l_c ја допира кружницата Γ.

115. Нека ABC е разностран остроаголен триаголник во кој $\overline{AC} > \overline{BC}$. Нека O е центарот на опишаната кружница, H е ортоцентарот, а F

подножјето на висината спуштена од темето C во триаголникот. Нека P е точка која припаѓа на правата AB, различна од A, така да $\overline{AF}=\overline{PF}$, а M е средината на отсешката AC. Нека X е пресечната точка на правите PH и BC, Y е пресечната точка на правите OM и FX, а Z е пресечната точка на правите OF и AC. Докажи дека точките F,M,Y и Z лежат на иста кружница.

116. Во ΔABC, M и N се точки на страните AB и AC, соодветно, такви да правата MN е паралелна на страната BC. Нека P е пресекот на правите BN и CM. Кружниците опишани околу ΔBMP и ΔCNP се сечат во две различни точки P и Q. Докажи дека $\measuredangle BAQ=\measuredangle CAP$.

117. Нека ΔABC не е рамнокрак. Нека AD, BE, CF се симетралите на аглите на овој триаголник ($D\in BC, E\in AC, F\in AB$). Нека K_a, K_b, K_c се точки на впишаната кружница на ΔABC такви да се DK_a, EK_b, FK_c тангенти на впишаната кружница и $K_a\notin BC, K_b\notin AC$, $K_c\notin AB$. Нека се A_1, B_1, C_1 средините на страните BC, CA, AB. Докажи дека правите A_1K_a, B_1K_b, C_1K_c се сечат на впишаната кружница на ΔABC.

118. Нека ΔABC не е рамнокрак и k е впишаната кружница со центар S. Кружницата k ги допира страните BC, CA, AB во точките P, Q, R, соодветно. Правата QR ја сече правата BC во точката M. Нека кружница која ги содржи точките B и C ја допира k во точка N. Опишаната кружница околу триаголникот MNP ја сече правата AP во точка L, различна од P. Докажи дека точките S, L и M се колинеарни.

119. Во остроаголен ΔABC точката M е средина на страната BC, а точките D, E, F се подножја на висините од темињата A, B, C, соодветно. Нека H е ортоцентарот на ΔABC, S е средината на отсечката AH, а G е пресекот на отсечките FE и AH. Ако N е пресекот на тежишната линија AH и опишаната кружница околу ΔBCH, докажи дека $\measuredangle HMA=\measuredangle GNS$.

120. Во ΔABC точките M и N припаѓаат на страните AB и AC, соодветно, така да правата MN е паралелна на страната BC. Нека P е пресек на правите BN и CM. Кружниците опишани околу ΔBMP и ΔCNP се сечат во две различни точки P и Q. Докажи дека $\measuredangle BAQ = \measuredangle CAP$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alfors, L. V.: Complex analysis, second edition, New-York-St. Louis-San Francisco-Toronto-London-Sydney, 1966
2. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene (drugo izdanje), Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
3. Ašić, M. i dr.: Međunarodne matematičke olimpijade, DM Srbije, Beograd, 1986
4. Conway, J. B.: Functions of One Complex Variable, Springer-Werlag, New-York-Haidelberg-Berlin, 1987
5. Đurković, R.: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DM Srbije, Beograd, 1991
6. Engel, A.: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997
7. Govedarica, V.: Matematička takmičenja u Republici Srpskoj, Zavod za udžbenike I nastavna sredstva, Istočno Sarajevo, 2007
8. Kadelburg, Z., Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematike, DMS, Beograd, 1990
9. Mateljević, M.: Kompleksne funkcije 1 & 2, DMS, Beograd, 2006
10. Mitrinović, D. S.: Kompleksna analiza, zbornik zadataka i problema, Naučna knjiga, Beograd, 1972
11. Mitrović, M.; Ognjanović, S.; Veljković, M.; Petković, Lj.; Lazarević, N.: Geometrija za I razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
12. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjih škola, DMS, Beograd, 1991
13. Pavković, B.; Veljan, D.: Elementarna matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
14. Spiegel, A. M.: Theory and problems of complex variabbles, McGraw-Hill Book Co., Singapore, 1981
15. Бойваленков, П.; Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
16. Јанковић, З.; Каделбург, З.; Младеновић, П.: Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
17. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
18. Кендеров, П., Табов, Й.: Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990

19. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2012 године, ДМ Србије, 2012
20. Мадески, Ж.; Самарџиски, А.; Целакоски, Н.: Збирка задачи по геометрија, Просветно дело, Скопје, 1981
21. Малчески, Р.: Основи на математичка анализа, Ун. Св. Кирил и Методиј, Скопје, 2001
22. Малчески, Р.: Теорема на Менелај, Сигма 43, Скопје, 1999
23. Малчески, Р.; Малчески, А.: Пресликувања во рамнина преку комплексни броеви I – IV, Сигма 49-52, Скопје, 2000/01
24. Моденов, П. Ц.: Задачи по геометрии, Наука, Москва, 1979
25. Рудин, У.: Основи на математическая анализ, Наука и изкуство, София, 1973
26. Самарџиски, А.: Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј, ПМФ, Скопје, 1988
27. Сидоров, Ю. В.; Федорюк, М. В.; Шабунин, М. И.: Лекции по тории функций комплексного переменного, Наука, Москва, 1989
28. Тонов, И. К.; Сидеров, П. Н.: Приложение на комплексните числа в геометрията, Наука, София, 1981
29. Тренчевски, К.; Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000
30. Шабат, Б. В.: Введение в комплексный анализ, часть I, Наука, Москва, 1976