XVII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Десет години републички натпревари по математика ‘86-‘95
подготвена од Илија Јанев, Никола Петрески и Милчо Аврамоски

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Ако $3n = 3+3^2+3^3+\ldots+3^{1992}$, тогаш $2n+1=3^{1992}$. Докажи!

2. Една група работници може да заврши една работа за 12 дена, друга за 6 дена, а трета за 4 дена. Бројот на работниците во сите три групи е 30. По колку работници има во секоја група ?

3. Даден е полиномот $P(x,y)=x^2+y^2-xy-x-y+1$. Докажи дека за кои било реални броеви x и y важи $P(x,y)\geq 0$.

4. Нека во четириаголникот $ABCD$ точките M, N, P, Q, R, S се средини на отсечките AB, BC, CD, DA, AC и BD -соодветно. Докажи дека правите MP, NQ и RS се сечат во иста точка.

5. Во правоаголниот триаголник ABC симетралите на острите агли A и B ги сечат катетите во точките D и F - соодветно. Од точките D и F се повлечени нормали на хипотенузата AB, и истата ја сечат во точките M и N. Најди го аголот MCN.

XVII (92.VII.1)

Од $3n=3+3^2+3^3+\ldots+3^{1992}=3(1+3+3^2+\ldots+3^{1991})$ следува дека

$$n=1+3+3^2+\ldots+3^{1991}.$$

Понатаму имаме:

$$2n=3n-n=(3+3^2+\ldots+3^{1991}+3^{1992})-(1+3+3^2+\ldots+3^{1991})$$

$$2n=3^{1992}-1$$

$$2n+1=3^{1992}.$$

XVII (92.VII.2)

Бројот 2 е НЗД за броевите 12, 6 и 4. Затоа нека x работници ја завршуваат работата за 2 дена. Тогаш за 12 дена се потребни $\frac{x}{6}$ работници, т.е. во првата група има $\frac{x}{6}$ работници. Аналогно заклучуваме дека во втората група има $\frac{x}{3}$ работници, а во третата - $\frac{x}{2}$ работници. Нивниот збир е 30, па имаме:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=30$$

$$x\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=30$$

$$x\cdot\frac{1+2+3}{6}=30$$

$$x=30$$

Значи, сите работници ја завршуваат работата за 2 дена. Бројот на работниците во првата група е $\frac{x}{6}$ т.е. 5 работници, во втората група е 10 работници, а во третата 15 работници.

Забелешка. Дека сите работници ја завршуваат работата за 2 дена можеме да заклучиме и поинаку. Првата група за еден ден завршува $\frac{1}{12}$ од работата, втората $\frac{1}{6}$, а третата $\frac{1}{4}$. Ако сите работници ја завршуваат работата за y дена, тогаш за еден ден ќе завршат $\frac{1}{y}$ од работата. Оттука имаме:

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{1}{y}$$

$$\frac{1+2+3}{12}=\frac{1}{y},\ \frac{6}{12}=\frac{1}{y},\ y=2.$$

XVII (92.VII.3)

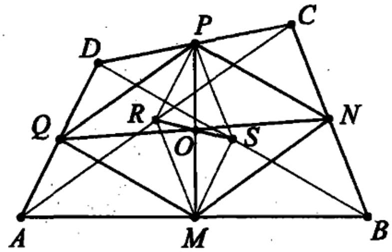
За да докажеме дека $P(x,y)\geq 0$ треба полиномот $P(x,y)$ да го претставиме како збир од биноми на квадрат. Имаме:

$$\begin{aligned}P(x,y)&=x^2+y^2-xy-x-y+1\\&=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+2)\\&=\frac{1}{2}[(x^2-2xy+y^2)+(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)]\\&=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2].\end{aligned}$$

Бидејќи $(x-y)^2\geq 0$, $(x-1)^2\geq 0$, $(y-1)^2\geq 0$ следува дека и $P(x,y)\geq 0$.

XVII (92.VII.4)

Нека точките M, N, P, Q, R и S се средини на отсечките AB, BC, CD, DA, AC и BD во четириаголникот $ABCD$ (црт. 1). Треба да докажеме дека правите MP, NQ и RS минуваат низ иста точка. За таа цел ќе покажеме дека четириаголниците $MNPQ$ и $MSPR$ се паралелограми, а потоа ќе го користиме својството дека дијагоналите во паралелограмот се преполовуваат.



Црт. 1

Отсечката MN е средна линија во ΔABC, па следува:

(1) $$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC} \text{ и } MN \| AC.$$

Отсечката PQ е средна линија во ΔADC, па следува:

(2) $$\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AC} \text{ и } PQ \| AC.$$

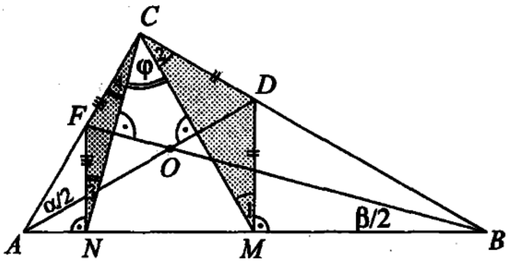
Од (1) и (2) следува дека $\overline{MN} = \overline{PQ}$ и $MN \| PQ$, т.е. дека четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм (според признакот: четириаголникот на кој две спротивни страни му се еднакви и паралелни е паралелограм). Неговите дијагонали MP и NQ се преполовуваат од пресечната точка O, т.е. $\overline{NO} = \overline{OQ}$ и $\overline{MO} = \overline{OP}$.

На сличен начин, користејќи дека MS е средна линија во ΔABD, а PR средна линија во ΔACD, заклучуваме дека $\overline{MS} = \overline{RP}$ и $MS \| RP$, т.е. дека четириаголникот $MSPR$ е паралелограм. Неговите дијагонали MP и RS се преполовуваат. Бидејќи O е средина на MP, ќе следува дека и RS е преполовена од точката O, т.е. и RS минува низ точката O. Со тоа докажавме дека правите MP, NQ и RS минуваат низ иста точка.

XVII (92.VII.5)

Нека правоаголниот ΔABC ги исполнува условите на задачата. Треба да го одредиме аголот $\varphi = \measuredangle MCN$ (црт. 2). Бидејќи D е точка од симетралата на аголот α, следува дека $\overline{DC} = \overline{DM}$, т.е. ΔMCD е рамнокрак, па оттука:

$\measuredangle 1 = \measuredangle 2.$



Црт. 2

Но, $\measuredangle MDB = 90° - \beta = \alpha$ е надворешен агол за ΔMCD и е еднаков на збирот од двата внатрешни, со него несоседни агли, т.е.

(1) $\qquad \measuredangle 1 = \measuredangle 2 = \alpha, \quad \measuredangle 2 = \frac{\alpha}{2}.$

На сличен начин од $\overline{FN} = \overline{FC}$ заклучуваме дека $\measuredangle 3 = \measuredangle 4$, а бидејќи $\measuredangle NFA = =\beta$ е надворешен агол за ΔNCF добиваме дека:

(2) $$\measuredangle 4 = \frac{\beta}{2}.$$

Тогаш за бараниот агол φ имаме:

$$\varphi = 90° - (\measuredangle 2 + \measuredangle 4) = 90° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 90° - 45° = 45°.$$

Значи, $\measuredangle MCN = 45°$.

Забелешка. Воочи дека $AD \perp CM$ и $BF \perp CN$, т.е. аглите AOB *i* φ се со заемно нормални краци, а потоа искористи го равенството:

$$\measuredangle AOB + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180°, \quad \text{т.е.} \quad \measuredangle AOB = 135°.$$

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Во една месарница се донесени 100 глави живина: гуски, кокошки и пилиња - со вкупна маса од 100 kg. Секоја гуска има 10 kg, секоја кокошка 3 kg, а секое пиле 0,5 kg. Колку биле гуски, колку кокошки и колку пилиња?

2. Најди четирицифрен број, кој е еднаков на квадратот од бројот, кој е образуван од неговите последни две цифри земени по ред.

3. Основата на права четириаголна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е трапез, со основи $\overline{AB} = 24\ cm$ и $\overline{CD} = 16\ cm$, и краци $\overline{BC} = 9\ cm$ и $\overline{AD} = 7\ cm$. Колкав е волуменот на призмата, ако дијагоналата BD_1 на призмата со дијагоналата BD на основата образуваат агол од $45°$.

4. Во правоаголен триаголник, во кој едната катета е два пати поголема од другата, повлечена е висината CD на хипотенузата AB. Докажи дека едниот од деловите на кои висината ја дели хипотенузата е четири пати поголем од другиот.

5. Правоаголен триаголник има катети 60 cm и 80 cm. Точките M и N се средини на тие катети. Кружницата со дијаметар MN ја сече хипотенузата на триаголникот во точките P и Q. Пресметај ја должината на отсечката PQ.

XVII (92.VIII.1)

Нека x е бројот на гуските, y бројот на кокошките, а z бројот на пилињата ($x,y,z\in\mathbb{N}$), тогаш:

$$\begin{cases}10x+3y+0{,}5z=100\\ x+y+z=100\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}20x+6y+z=200\\ x+y+z=100\end{cases}$$

Ако од првата равенка ја одземеме втората, ќе добиеме:

$$19x+5y=100$$

$$y=\frac{100-19x}{5}=20-3x-\frac{4x}{5}$$

За y да биде природен број треба $4x$ да е делив со 5. Но, бројот на гуските не може да биде поголем од 9 (зошто?), па заклучуваме дека $x=5$. Тогаш $y=20-15-\frac{4\cdot 5}{5}=1$, а $z=100-5-1=94$.

Значи, имало 5 гуски, 1 кокошка и 94 пилиња.

XVII (92.VIII.2)

Нека $\overline{abcd}$ е четирицифрен број кој е еднаков на квадратот на својот двоцифрен завршеток, т.е.

$$\overline{abcd} = \overline{cd}^2.$$

Доколку $x = \overline{ab}$, $y = \overline{cd}$, тогаш добиваме:

$$\overline{xy} = y^2$$
$$100x + y = y^2$$
$$100x = y^2 - y$$
$$100x = y(y-1).$$

Од последното равенство заклучуваме дека производот $y(y-1)$ е делив со 100 ($y < 100$, бидејќи y е двоцифрен број). Значи, еден од последователните броеви y или $y-1$ е делив со 4, а другиот со 25.

1^0 Нека $y = 25$, тогаш $y-1 = 24$ е делив со 4, па имаме:

$$100x = 25 \cdot 24, \quad x = 6.$$

Оваа можност отпаѓа, бидејќи x е двоцифрен број.

2^0 Ако $y-1 = 25$, тогаш $y = 26$ - не е делив со 4.

3^0 Ако $y = 50$, тогаш $y-1 = 49$ - не е делив со 4.

4^0 Ако $y-1 = 50$, тогаш $y = 51$ - не е делив со 4.

5^0 Ако $y = 75$, тогаш $y-1 = 74$ - не е делив со 4.

6^0 Ако $y-1 = 75$, тогаш $y = 76$ - е делив со 4, па имаме:

$$100x = 76 \cdot 75$$
$$x = 57.$$

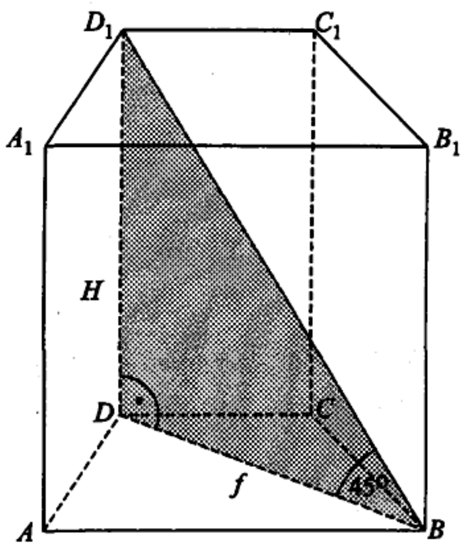
Според тоа, бараниот четирицифрен број е 5776. Навистина $5776 = 76^2$.

XVII (92.VIII.3)

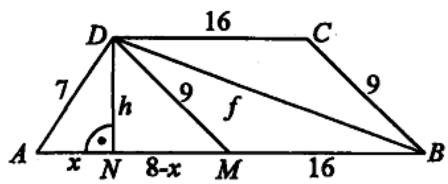
Нека призмата $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ги исполнува условите на задачата (црт. 3). Да ја пресметаме првин плоштината на основата, т.е. плоштината на трапезот $ABCD$. Треба да ја одредиме висината на трапезот. Повлекуваме $DM \parallel BC$ (црт. 4). Четириаголникот $MBCD$ е паралелограм, па имаме $\overline{DM} = \overline{BC} = 9$, $\overline{MB} = \overline{DC} = 16$; тогаш $\overline{AM} = 24 - 16 = 8$. Ако $\overline{AN} = x$, тогаш $\overline{NM} = 8 - x$. Применувајќи ја Питагоровата теорема за триаголниците AND и MND, добиваме:

$$h^2 = 49 - x^2,\ h^2 = 81 - (8-x)^2$$
$$49 - x^2 = 81 - 64 + 16x - x^2$$
$$32 = 16x,\ x = 2.$$

Тогаш $h^2 = 49 - 4 = 45$, $h = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$.



Црт. 3



Црт. 4

Плоштината на основата е:

$$B = \frac{24+16}{2} \cdot 3\sqrt{5} = 60\sqrt{5}.$$

Од рамнокракиот правоаголен $\Delta\ BDD_1$ следува $H = f$. Значи, треба да ја најдеме дијагоналата f на трапезот $ABCD$. Ја применуваме Питагоровата теорема за $\Delta\ NBD$ (црт. 4):

$$f^2 = h^2 + (24 - x)^2 = 45 + 484 = 529$$

$$f = \sqrt{529} = 23. \text{ Значи } H = 23.$$

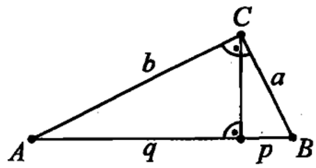
Конечно, за волуменот на призмата добиваме:

$$V = B \cdot H = 60\sqrt{5} \cdot 23 = 1380\sqrt{5}.$$

Значи, волуменот на призмата е $1380\sqrt{5}\ cm^3$ или приближно $3087{,}774\ cm^3$.

XVII (92.VIII.4)

Нека во правоаголниот триаголник ABC важи $b = 2a$. Треба да покажеме дека $q = 4p$ (црт. 5). Од Евклидовите формули имаме:



Црт. 5

$$a^2 = c \cdot p, \quad b^2 = c \cdot q.$$

Тогаш:

$$b^2 : a^2 = cq : cp$$

$$4a^2 : a^2 = q : p$$

$$4:1 = q:p, \quad q = 4p.$$

XVII (92.VIII.5)

Нека кружницата k со дијаметар MN ја сече хипотенузата AB на правоаголниот $\Delta\ ABC$ во точките P и Q (црт. 6). Треба да ја одредиме должината на отсечката PQ.

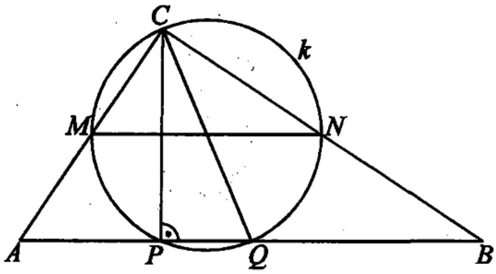
За хипотенузата AB наоѓаме:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 60^2 + 80^2 = 10000,$$

$$\overline{AB} = \sqrt{10000} = 100.$$

Бидејќи MN е средна линија во ΔABC, следува $\overline{MN} = 50$. Кружницата k минува низ темето C, бидејќи $\measuredangle MCN = 90^0$.

Симетричната точка P на точката C во однос на правата MN лежи на хипотенузата и на кружницата k, па значи $\Delta\ CPQ$ е правоаголен. Но, тогаш CQ е дијаметар на кружницата и затоа $\overline{CQ} = \overline{MN} = 50$, а CP е висина на ΔABC, па имаме:



Црт. 6

$$\overline{AB} \cdot \overline{CP} = \overline{AC} \cdot \overline{BC}, \qquad \overline{CP} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{60 \cdot 80}{100} = 48.$$

Од правоаголниот $\Delta\ PQC$ имаме:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{CQ}^2 - \overline{CP}^2 = 50^2 - 48^2 = 196,$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{196} = 14.$$

Значи, должината на отсечката PQ е 14 *cm*.