Републички натпревар 2024

I година

1. Еден трговец набавил a производи од тип *А* и b производи од тип *Б*. Прво одлучил да ги продава производите од тип *А* по цена од 2000 денари за производ, со заработка од 250 денари од продаден производ, додека производите од тип *Б* да ги продава по принцип „два за 3000“ (два производи за 3000 денари), со заработка од 125 денари од продаден производ. Откако ја пресметал вкупната заработка што би ја добил ако ги продаде сите производи, заклучил дека истата таа вкупна заработка ќе ја добие и ако производите ги продава измешано по принцип „три за 5000“ (три производи за 5000 денари), независно од типот на производот. Одреди го односот на бројот на производи од тип *А* и бројот на производи од тип *Б* кои ги набавил трговецот. Заработката претставува разликата меѓу вкупниот приход од продажбата и вкупниот трошок од набавката на производите.

Решение. Трговецот купил a производи од тип *А* и b производи од тип *Б*, што значи вкупно $a+b$ производи. Според првиот начин на продажба, трговецот ќе има приход од $2000a$ денари од производите од типот *А* и $\frac{3000}{2}b=1500b$ денари од производите од типот *Б*, т.е. вкупниот приход ќе биде $2000a+1500b$. Заработката од производите од типот *А* ќе биде $250a$ денари, а од производите од типот *Б* изнесува $125b$ денари, што значи дека вкупната заработка е $250a+125b$ денари. Според тоа, трошокот на трговецот за набавка на производите е

$$2000a+1500b-(250a+125b)=1750a+1375b\ .$$

Според вториот начин на продажба,вкупниот приход на трговецот изнесува $\frac{5000}{3}(a+b)$ денари, па затоа заработката при овој начин на продажба ќе биде

$$\frac{5000}{3}(a+b)-(1750a+1375b)=-\frac{250}{3}a+\frac{875}{3}b\ .$$

Бидејќи влкупната заработка при двата начина на продажба е еднаква, добиваме $250a+125b=-\frac{250}{3}a+\frac{875}{3}b$, од каде наоѓаме $1000a=500b$, односно $a:b=1:2$.

2. Нека n е сложен број поголем од 4. Докажи дека n е делител на производот $(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$.

Решение. Нека n е сложен број поголем од 4. Тогаш n има барем еден прост делител. Разгледуваме два случаи.

Случај 1. $n=pm$ каде p е прост број и $m\neq p$, т.е. n не е квадрат на прост број. Јасно, $p\geq2$, $m>2$ и $p,m<n$. Затоа $p,m\in\{1,2,3,\ldots,n-2,n-1\}$ од каде следува дека $n=pm\mid(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$.

Случај 2. Нека $n = p^2$, каде p е прост број. Од $n > 4$, следува дека $p > 2$ и $p < n$. Според тоа, $2p < p \cdot p = p^2 = n$, па затоа $p, 2p \in \{1, 2, 3, ..., n-2, n-1\}$ од каде следува дека $2p^2 \mid (n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, т.е. $n = p^2 \mid (n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

3. Нека a, b, c се реални броеви кои не се сите еднакви на нула. Определи ги сите тројки реални броеви (x, y, z) за кои важи

$$ax + by + cz = 1,$$
$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) = 1.$$

Решение. Од првото равенство следува $(ax + by + cz)^2 = 1$, па затоа точно е равенството

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) = (ax + by + cz)^2,$$

кое е еквивалентно со равенството

$$(ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 = 0.$$

Збир на квадрати на реални броеви е еднаков на нула ако тие се еднакви на нула, па од последното равенство следува

$$ay - bx = bz - cy = cx - az = 0. \qquad (*)$$

а) Нека $a, b, c \neq 0$. Од (*) следува $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$, т.е. $x = ka,\ y = kb,\ z = kc$. Со замена во $ax + by + cz = 1$ добиваме $ka^2 + kb^2 + kc^2 = 1$, односно $k = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$. Според тоа, во овој случај решение е

$$x = \frac{a}{a^2+b^2+c^2},\ y = \frac{b}{a^2+b^2+c^2},\ z = \frac{c}{a^2+b^2+c^2}. \qquad (1)$$

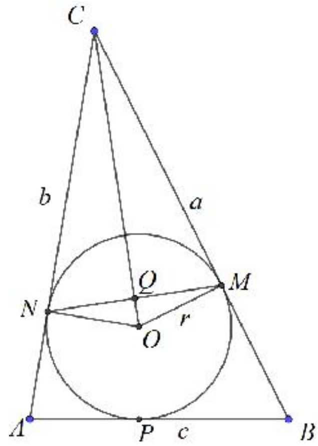
б) Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a, b \neq 0$ и $c = 0$. Тогаш од (*) следува $ay - bx = bz = az = 0$, од каде добиваме $z = 0$ и $y = \frac{bx}{a}$. Со замена во $ax + by + cz = 1$ добиваме $ax + \frac{b^2 x}{a} = 1$, од каде следува $x = \frac{a}{a^2+b^2}$ и затоа $y = \frac{b}{a^2+b^2}$, т.е. се добива решението (1) за $c = 0$.

в) Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \neq 0, b = 0$ и $c = 0$. Тогаш од (*) следува $ay = az = 0$, од каде добиваме $y = z = 0$. Со замена во $ax + by + cz = 1$ добиваме $ax = 1$, од каде $x = \frac{1}{a}$, т.е. се добива решението (1) за $b = c = 0$.

4. Во триаголник ABC со должини на страни a, b и c е впишана кружница со радиус r, која страните на триагоникот ABC ги допира во точките M, N и P.

Изрази ги должините на странати на триаголникот MNP преку a, b, c и r.

Решение. Нека O центарот на впишаната кружница и нека M, N и P се соодветно допирните точки на страните BC, CA и AB (види цртеж). Бидејќи CM е тангента на впишаната кружница, триаголникот COM е правоаголен. Нека $Q = MN \cap CO$. Понатаму, $\overline{MO} = \overline{NO} = r$ и $\overline{CN} = \overline{CM}$ (еднаквост на тангентните отсечки), па затоа четириаголникот $CMON$ е делтоид, односно $OC \perp MN$. Според тоа, триаголникот QOM е правоаголен. Сега, триаголниците COM и MOQ се правоаголни со заеднички агол, па затоа тие се слични. Од сличноста следува



$$\overline{MQ} : \overline{MO} = \overline{CM} : \overline{CO},$$

па како $\overline{MN} = 2\overline{MQ}$, добиваме $\overline{MN} = \frac{2\overline{MO}\cdot\overline{CM}}{\overline{CO}} = \frac{2\overline{CM}\cdot r}{\overline{CO}}$. Останува да ги определиме $\overline{CM}$ и $\overline{CO}$. Од $\overline{CN} = \overline{CM}$, $\overline{AN} = \overline{AP}$ и $\overline{BP} = \overline{BM}$ следува

$$\overline{CM} = \frac{\overline{CN}+\overline{CM}}{2} = \frac{b-\overline{AN}+a-\overline{BM}}{2} = \frac{a+b-(\overline{AN}+\overline{BM})}{2} = \frac{a+b-c}{2}.$$

Сега, од триаголникот MOC следува

$$\overline{CO} = \sqrt{\overline{MO}^2 + \overline{CM}^2} = \sqrt{r^2 + (\tfrac{a+b-c}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 + (a+b-c)^2},$$

па затоа

$$\overline{MN} = \frac{2\frac{a+b-c}{2}\cdot r}{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+(a+b-c)^2}} = \frac{2(a+b-c)\cdot r}{\sqrt{4r^2+(a+b-c)^2}}.$$

На потоплно аналоген начин се добива е

$$\overline{MP} = \frac{2(a+c-b)\cdot r}{\sqrt{4r^2+(a+c-b)^2}} \text{ и } \overline{NP} = \frac{2(b+c-a)\cdot r}{\sqrt{4r^2+(b+c-a)^2}}.$$

II година

1. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y = 5 + |x-1|. \end{cases}$$

Решение. Имаме $|x-1| \geq 0$, па затоа $y = 5 + |x-1| \geq 5$, од што следува $|y-5| = y-5$. Сега од првата равенка на системот добиваме $|x-1| + y - 5 = 1$, односно $|x-1| + y = 6$. Ако последната равенка ја собереме со втората равенка на системот, по средувањето добиваме $2y = 11$, т.е. $y = \frac{11}{2}$. Со замена во втората равенка на системот добиваме $\frac{11}{2}=5+|x-1|$, од каде наоѓаме $|x-1|=\frac{1}{2}$, па затоа $x-1=\pm\frac{1}{2}$, односно $x=\frac{1}{2}$ и $x=\frac{3}{2}$.

Конечно, системот има две решенија и тоа: $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{11}{2}$ и $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{11}{2}$.

2. Нека a,b,c се реални броеви такви што $ac\neq bc$. Докажи, дека ако равенките $x^2+ax+bc=0$ и $x^2+bx+ca=0$ имаат заеднички корен, тогаш равенката $x^2+cx+ab=0$ има реални корени.

Решение. Од $ac\neq bc$ следува $(a-b)c\neq 0$, па затоа $c\neq 0$ и $a-b\neq 0$, односно $a\neq b$. Нека x_1 и x_2 се корени на $x^2+ax+bc=0$, а x_1 и x_3 се корени на $x^2+bx+ca=0$. Од Виетовите правила следува

$$x_1+x_2=-a,\ x_1x_2=bc,\ x_1+x_3=-b,\ x_1x_3=ca.$$

Од првото и третото равенство следува $x_2-x_3=b-a$, а од второто и четвртото следува $x_1(x_2-x_3)=(b-a)c$. Според тоа, $x_1(b-a)=(b-a)c$ и како $a-b\neq 0$ добиваме $x_1=c$. Сега, од $x_1x_2=bc$ и $x_1x_3=ca$ следува $cx_2=bc$ и $cx_3=ca$, па како $c\neq 0$ добиваме $x_2=b$ и $x_3=a$. Но, $x_1+x_2=-a$, па затоа $c+b=-a$, односно $a+b=-c$, што значи дека a и b се решенија на $x^2+cx+ab=0$, т.е. оваа равенка има реални корени.

3. Нека m,n,k се природни броеви и нека $\frac{m\sqrt{5}+n}{n\sqrt{5}+k}$ е рационаен број. Докажи дека $m+n+k$ е делител на $m^2+n^2+k^2$.

Решение. Имаме:

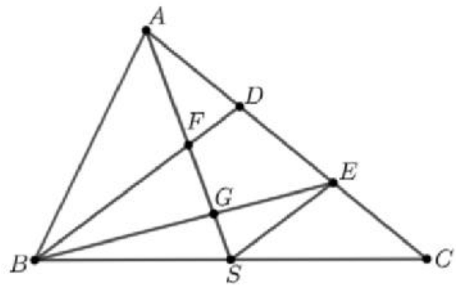
$$\frac{m\sqrt{5}+n}{n\sqrt{5}+k}=\frac{(m\sqrt{5}+n)(n\sqrt{5}-k)}{(n\sqrt{5}+k)(n\sqrt{5}-k)}=\frac{5mn-nk}{5n^2-k^2}+\frac{n^2-mk}{5n^2-k^2}\sqrt{5}.$$

Бидејќи $\frac{m\sqrt{5}+n}{n\sqrt{5}+k}$ е рационален број, добиваме дека $\frac{n^2-mk}{5n^2-k^2}=0$, од каде следува $n^2-mk=0$, т.е. $n^2=mk$. Сега, добиваме

$$\begin{aligned}m^2+n^2+k^2&=(m+n+k)^2-2(mn+nk+km)\\&=(m+n+k)^2-2(mn+nk+n^2)\\&=(m+n+k)^2-2n(m+n+k)\\&=(m+n+k)(m+n+k-2n)\\&=(m+n+k)(m-n+k),\end{aligned}$$

што значи дека $m+n+k$ е делител на $m^2+n^2+k^2$.

4. Даден е триаголник ABC со плоштина P. Точките D и E ја делат страната AC на три еднакви дела и притоа D е поблиску до A. Тежишната линија полечена од темето A ги сече отсечките BD и BE соодветно во точките F и G. Изрази ја плоштината на триаголникот BGF преку P.



Решение. Нека S е средината на страната BC. Тогаш SE е средна линија на триаголникот BCD, па затоа $SE \parallel BD$ и $\overline{BD} = 2\overline{SE}$. Сега, $SE \parallel FD$ и како D е средина на AE добиваме дека FD е средна линија на триаголникот ASE. Затоа F е средина на AS и $\overline{SE} = 2\overline{FD}$. Значи, $\overline{BD} = 4\overline{FD}$, па затоа $\overline{BF} = 3\overline{FD} = \frac{3}{2}\overline{SE}$. Од $SE \parallel BD$ следува дека триаголниците BGF и EGS се слични и важи $\frac{\overline{FG}}{\overline{SG}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{ES}} = \frac{3}{2}$. Сега $\frac{\overline{AS}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{AF}+\overline{FG}+\overline{GS}}{\overline{FG}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AS}}{\overline{FG}} + 1 + \frac{2}{3}$, од каде следува $\frac{1}{2}\frac{\overline{AS}}{\overline{FG}} = \frac{5}{3}$, т.е. $\frac{\overline{FG}}{\overline{AS}} = \frac{3}{10}$. Конечно, ако h е висината во триаголникот BGF повлечена од темето B, добиваме

$$P_{BGF} = \frac{\overline{FG} \cdot h}{2} = \frac{\frac{3}{10}\overline{AS} \cdot h}{2} = \frac{3}{10}P_{ABS} = \frac{3}{10} \cdot \frac{P}{2} = \frac{3}{20}P .$$

III година

1. Во множеството реални броеви реши ја неравенката

$$\log_2^2(-\log_2 x) + \log_2(\log_2^2 x) \le 8 . \qquad (1)$$

Решение. За дефиниционата област на неравенката добиваме

$$\begin{cases} x > 0, \\ \log_2 x < 0, \\ \log_2^2 x \ne 0, \end{cases}$$

од каде следува $0 < x < 1$. Воведуваме смена $v = -\log_2 x$, па затоа $\log_2^2 x = v^2$ и неравенката (1) го добива обликот $\log_2^2 v + \log_2 v^2 \le 8$. Но, $x \in (0,1)$, па затоа $v = -\log_2 x > 0$, што значи дека последната неравенка е еквивалентна со неравенката

$$\log_2^2 v + 2\log_2 v - 8 \le 0 . \qquad (2)$$

Воведуваме смена $t = \log_2 v$ и неравенката (2) го добива обликот $t^2 + 2t - 8 \le 0$. Решението на последната неравенка е $-4 \le t \le 2$, па затоа $-4 \le \log_2 v \le 2$, од каде добиваме $2^{-4} \le v \le 2^2$. Но, $v = -\log_2 x$, па затоа важи $2^{-4} \le -\log_2 x \le 2^2$. Од $-\log_2 x \le 2^2$ следува $\log_2 x \ge -2^2$, односно $x \ge 2^{-2^2}$, а од $2^{-4} \le -\log_2 x$ следува $-2^{-4} \ge \log_2 x$, односно $x \le 2^{-2^{-4}}$.

Конечно, решение на (1) е интервалот $[2^{-2^2}, 2^{-2^{-4}}] \subset [0,1]$.

2. Нека α, β, γ се агли во триаголник такви што $\alpha \le \beta \le \gamma$. Определи ги аглите во триаголникот ако

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \tfrac{3-\sqrt{3}}{8} \text{ и } \sin 2\alpha + \sin 2\beta = \tfrac{3}{2}.$$

Решение. Од формулите за збир и производ, за дадените равенства добиваме

$$(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))\sin\gamma = \tfrac{3-\sqrt{3}}{4} \text{ и } \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \tfrac{3}{4}.$$

Бидејќи α, β, γ се агли на триаголник имаме

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(180^\circ - \gamma) = \sin\gamma \text{ и } \cos(\alpha+\beta) = \cos(180^\circ - \gamma) = -\cos\gamma,$$

па равенствата го добиваат видот

$$\cos(\alpha-\beta)\sin\gamma - \cos\gamma\sin\gamma = \tfrac{3-\sqrt{3}}{4} \text{ и } \sin\gamma\cos(\alpha-\beta) = \tfrac{3}{4}.$$

Сега $\cos\gamma\sin\gamma = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, од каде добиваме $\sin 2\gamma = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Бидејќи $0 < 2\gamma < 360^\circ$, важи $\gamma = 120^\circ$ или $\gamma = 150^\circ$. Ако $\gamma = 120^\circ$, тогаш $\alpha + \beta = 60^\circ$ и $\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}$, па затоа $\alpha + \beta = 60^\circ$ и $\alpha - \beta = -30^\circ$ (бидејќи $\alpha \le \beta$). Оттука следува $\alpha = 15^\circ$ и $\beta = 45^\circ$. Ако $\gamma = 150^\circ$, тогаш $\alpha + \beta = 30^\circ$ и $\cos(\alpha - \beta) = \frac{3}{2}$, што не е можно. Значи, аглите на триаголникот се $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 45^\circ$ и $\gamma = 120^\circ$.

3. Определи ја најмалата можна вредност на изразот

$$\log_{x_1}(x_2 - \tfrac{1}{4}) + \log_{x_2}(x_3 - \tfrac{1}{4}) + \ldots + \log_{x_n}(x_1 - \tfrac{1}{4}),$$

каде $x_1, x_1, \ldots, x_n \in (\frac{1}{4}, 1)$.

Решение. Од $(x - \frac{1}{2})^2 \ge 0$ следува $x - \frac{1}{4} \le x^2$. Понатаму, функцијата $\log_{x_k} x$ монотоно опаѓа за $0 < x_k < 1$, па затоа важи

$$\log_{x_k}(x_{k+1} - \tfrac{1}{4}) \ge \log_{x_k} x_{k+1}^2 = 2\log_{x_k} x_{k+1},$$

при што $x_{n+1} = x_1$. Сега, од горното неравенство и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\sum_{k=1}^{n} \log_{x_k}(x_{k+1} - \tfrac{1}{4}) \ge 2\sum_{k=1}^{n} \log_{x_k} x_{k+1} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\log x_{k+1}}{\log x_k} \ge 2n \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{\log x_{k+1}}{\log x_k}} = 2n.$$

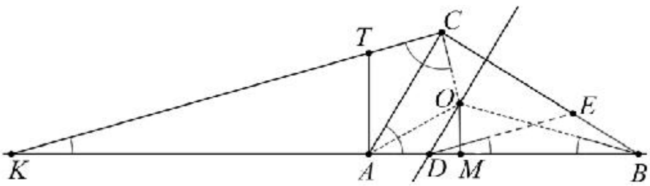
За $x_1 = x_1 = ... = x_n = \frac{1}{2}$ имаме

$$\sum_{k=1}^{n} \log_{x_k} (x_{k+1} - \tfrac{1}{4}) = \sum_{k=1}^{n} \log_{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{4} = 2n\,,$$

што значи дека најмалата можна вредност на дадениот израз е $2n$.

4. Даден е триаголникот ABC со $\measuredangle BAC = 60^\circ$. Нека O е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC и нека D е точка на страната AB таква што DO е паралелна со AC. Нека E е точка на страната BC таква што $3\overline{BE} = \overline{BC}$. Докажи дека $\measuredangle BDE = \frac{1}{2}\measuredangle ABC$.

Решение. Нека K е точка на правата AB таква што $\measuredangle CKB = \frac{1}{2}\measuredangle ABC = \frac{1}{2}$ и A е меѓу B и K. Од $+¥ = 120^\circ$ следува $\frac{}{2} + \frac{¥}{2} = 60^\circ$. Јасно, $\measuredangle ACK = \frac{¥}{2}$. Нека T е точка на страната CK таква што $AT \perp AK$ и M е точка на страната AB таква што $OM \perp AB$. Бидејќи O е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC полуправати AO и CO се симетрали на агли на триагилникот. Од $\measuredangle CAT = 30^\circ = \measuredangle CAO$ и $\measuredangle OCA = \measuredangle ACT = \frac{¥}{2}$ следува дека триаголниците ACT и ACO се складни (признак АСА). Од оваа складност и од тоа што триаголникот AOM е половина од рамностран триаголник следува $\overline{TA} = \overline{AO} = 2\overline{OM}$.



Понатаму, триаголниците KAT и BMO се правоаголни и $\measuredangle AKT = \measuredangle MBO = \frac{}{2}$ и затоа тие се слични, што значи $\frac{\overline{BM}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{TA}} = \frac{1}{2}$, односно $\overline{AK} = 2\overline{BM}$. Но, $DO \,||\, AC$ па затоа $\measuredangle MDO = \measuredangle BAC = 60^\circ$, што значи дека триаголникот OMD е половина од рамностран триаголник, од каде следува $\overline{OD} = 2\overline{MD}$. Исто така важи $\measuredangle MOD = 30^\circ$, што значи дека $\measuredangle AOD = 30^\circ = \measuredangle OAD$, т.е. триаголникот OAD е рамнокрак, па затоа $\overline{AD} = \overline{OD} = 2\overline{MD}$. Според тоа,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DK}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DA}+\overline{AK}} = \frac{\overline{BD}}{2\overline{MD}+2\overline{BM}} = \frac{\overline{BD}}{2(\overline{MD}+\overline{BM})} = \frac{\overline{BD}}{2\overline{BD}} = \frac{1}{2}\,.$$

Значи, $\frac{\overline{BD}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BD}+\overline{DK}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BD}+2\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{3\overline{BD}} = \frac{1}{3}$. Но, според условот димаме $\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{1}{3}$ и затоа $DE \,||\, KC$, од каде следува $\measuredangle BDE = \frac{1}{2} \quad = \frac{1}{2}\measuredangle ABC$.

IV година

1. Даден е полинм со целобројни коефициенти кој за некои 9 различни цели броеви има вредност 2026. Докажи дека полиномот нема целобројни нули.

Решение. Нека за полиномот $P(x)$ со целобројни коефцииенти важи

$$P(a_1)=P(a_2)=...=P(a_9)=2026\,,$$

за некои различни цели броеви $a_1,a_2,...,a_9$. Нека претпоставиме дека постои цел број d таков што $P(d)=0$. Понатаму, за секој полином P со целобројни коефициенти и различни цели броеви x и y важи $x-y\,|\,P(x)-P(y)$. Оттука следува дека

$$\begin{aligned}&a_1-d\,|\,P(a_1)-P(d)=2026,\\&a_2-d\,|\,P(a_2)-P(d)=2026,\\&...\\&a_9-d\,|\,P(a_9)-P(d)=2026,\end{aligned}$$

што значи дека бројот 2026 има девет различни целобројни делители a_i-d, за $i=1,2,...,9$. Меѓутоа $2026=2\cdot 1013=1\cdot 2026$, што значи дека единствени целобројни делители на бројот 2026 се $\pm1,\pm2,\pm1013,\pm2026$, и нив ги има осум, што е противречност. Конечно од добиената противречност следува дека не постои цел број d таков што $P(d)=0$, што и требаше да се докаже.

2. Множеството точки $S=\{(x,y)\,|\quad |x|+|x-y|+|x+y|\le m\}$ кое се наоѓа во координатната рамнина xOy дефинира област чија плоштина е еднаква на 15. Определи го m.

Решение. Имаме

$$f(-x,y)=|-x|+|-x-y|+|-x+y|=|x|+|x-y|+|x+y|=f(x,y)\,,$$

и

$$f(x,-y)=|x|+|x-(-y)|+|x+(-y)|=|x|+|x+y|+|x-y|=f(x,y)\,,$$

што значи дека областа определена со множеството S е симетрична во однос на координатните оски. Оттука доволно е да ја определиме вредноста на m за која плоштината на областа во првиот квадрант е еднаква на $\frac{15}{4}$.

Во натамошните разгледувања ќе сметаме дека $x,y\ge 0$. Ако $x\ge y$, тогаш

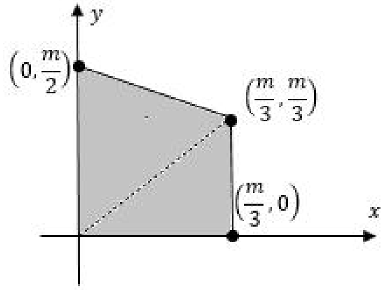
$$|x|+|x-y|+|x+y|=x+x-y+x+y=3x\,.$$

Ако $x\le y$, тогаш

$$|x|+|x-y|+|x+y|=x-x+y+x+y=x+2y\,.$$

Оттука следува дека за фиксирано m областа е определена со координатните оски и со правите $3x=m$ и $x+2y=m$.

Според тоа, бараната област е трапез чии темиња се координатниот почеток $(0,0)$, потоа за $x=0$ имаме $y=\frac{m}{2}$, односно точката $(0,\frac{m}{2})$, за $y=0$ имаме $x=\frac{m}{3}$, т.е. точката $(\frac{m}{3},0)$ и пресекот на правите $3x=m$ и $x+2y=m$, т.е. точката $(\frac{m}{3},\frac{m}{3})$, види цртеж.



Плоштината на областа е $P=\frac{\frac{m}{2}+\frac{m}{3}}{2}\cdot\frac{m}{3}=\frac{5m^2}{36}$.

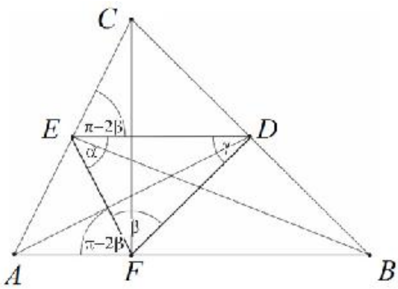
Според тоа, $\frac{5m^2}{36}=\frac{15}{4}$, од каде добиваме $m^2=27$, односно $m=3\sqrt{3}$.

3. Даден е триаголник ABC. На страните AB,BC,CA редоследно се земени точки F,D,E такви што CF,AD,BE се соодветно висина, тежишна линија и симетрала на $\measuredangle ABC$. Ако важи $\measuredangle FDE=\measuredangle ACB, \measuredangle DEF=\measuredangle BAC, \measuredangle EFD=\measuredangle ABC$, докажи дека триаголникот ABC е рамностран.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на триаголникот:

$\overline{AB}=c, \overline{BC}=a, \overline{CA}=b,$

$\measuredangle BAC=\sim, \measuredangle CAB=\quad, \measuredangle BCA=¥.$



Триаголникот BFC е правоаголен и FD е тежишна линија повлечена кон хипотенузата, па затоа $\overline{FD}=\overline{CD}=\overline{BD}=\frac{a}{2}$. Значи, триаголникот FBD е рамнокрак, па затоа важи $\measuredangle BFD=\measuredangle CAB=\quad$. Според условот $\measuredangle DEF=\quad$, па затоа $\measuredangle AFE=®-2\quad$. Исто така важи $\measuredangle FEA=®-(®-2\quad+\sim)=2\quad-\sim$, $\measuredangle DEC=®-(2\quad-\sim+\sim)=®-2\quad$.

Понатаму, според условот на задачата триаголникот EFD е сличен со триаголникот ABC и како $\overline{FD}=\frac{a}{2}$ коефициентот на сличност е $\frac{1}{2}$, па затоа важи $\overline{FE}=\frac{c}{2}$ и $\overline{DE}=\frac{b}{2}$. Сега, од синусната теорема применета на триаголникот DEC добиваме

$$\frac{\frac{b}{2}}{\sin ¥}=\frac{\overline{CD}}{\sin(®-2\quad)}=\frac{\frac{a}{2}}{\sin 2\quad}=\frac{\frac{a}{2}}{2\sin\quad\cos\quad}.$$

Од последното равенство и синусната теорема применета на триаголникот ABC следува

$$\cos\quad=\frac{a\sin ¥}{2b\sin\quad}=\frac{ac}{2b^2}. \qquad (1)$$

Понатаму, BE е симетрала на агол, па од теоремата за симетралата на аголот следува

$$\frac{a}{c}=\frac{\overline{EC}}{\overline{AE}}=\frac{b-\overline{AE}}{\overline{AE}}\text{, т.е. }\overline{AE}=\frac{bc}{a+c}\ .$$

Сега, од синусната теорема применета на триаголникот AEF, добиваме

$$\frac{\frac{c}{2}}{\sin\sim}=\frac{\frac{bc}{a+c}}{\sin(®-2\ \ )}=\frac{\frac{bc}{a+c}}{\sin 2}=\frac{\frac{bc}{a+c}}{2\sin\ \ \cos}\ .$$

Од последното равенство и од синусната теорема за триаголникот ABC следува

$$\cos\ \ =\frac{a}{a+c}\ . \qquad (2)$$

Сега од (1) и (2) добиваме $\frac{ac}{2b^2}=\frac{a}{a+c}$, односно $2b^2=ac+c^2$. Од косинусната теорема за триаголникот ABC и од (2) следува

$$c^2+a^2-b^2=2ac\cos$$
$$c^2+a^2-b^2=\frac{2ca^2}{a+c},$$
$$(a+c)(c^2+a^2-b^2)=2ca^2,$$
$$(a+c)(c^2-ac+2a^2)=4ca^2,$$
$$2a^3-3a^2c+c^3=0,$$
$$(a-c)^2(2a+c)=0,$$

па затоа $a=c$. Со замена во $2b^2=ac+c^2$, добиваме $2b^2=2c^2$, т.е. $b=c$, што значи дека триаголникот е рамностран.

4. Дадена е бесконечна низа природни броеви a_n, $n\geq 1$ таква што за секој $n\geq 1$ важи

$$a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{\text{NZD}(a_n,a_{n+1})}\ .$$

Определи ги сите вредности на a_1 и a_2 за кои постои природен број M таков што $a_n<M$ за секој n.

Решение. Нека $d_n=\text{NZD}(a_n,a_{n+1})$. Тогаш $d_n a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$, што значи дека за $n\geq 2$ важи $d_{n-1}a_{n+1}=a_{n-1}+a_n$. Од $d_n\mid a_n$ и $d_n\mid a_{n+1}$, следува дека $d_n\mid a_{n-1}$. Но, ова заедно со $d_n\mid a_n$ дава $d_n\mid \text{NZD}(a_n,a_{n-1})=d_{n-1}$, па затоа важи $d_n\leq d_{n-1}$. Според тоа, d_n е нерастечка низа природни броеви, од што следува дека по некој индекс N низата мора да е константна, односно $d_n=d$, за секој $n\geq N$.

Ако $d=1$, за $n\geq N$, добиваме $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}>a_{n+1}$, па затоа по определен индекс низата строго расте, па не може да е ограничена, т.е. не постои број M кој е поголем од сите членови на низата.

Ако $d\geq 3$, тогаш за $n\geq N$ добиваме $a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{d}<\frac{a_n+a_{n+1}}{2}\leq \max(a_n,a_{n+1})$. Ова повлекува $a_{n+3}<\max(a_{n+2},a_{n+1})\leq \max(a_n,a_{n+1})$, т.е.

$$\max(a_{n+2},a_{n+3})<\max(a_n,a_{n+1})\ .$$

Последното не е можно, бидејќи добиваме бесконечна строго опаѓачка низа природни броеви, а таква не постои.

Останува $d=2$. Значи, за $n\ge N$ имаме

$$a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2} \Leftrightarrow a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{a_n-a_{n+1}}{2}.$$

Ако ставиме $b_{n+1}=a_{n+1}-a_n$, добиваме

$$b_{n+2}=-\frac{b_{n+1}}{2}=...=(-\frac{1}{2})^{n-N+1}b_{N+1}.$$

Очигледно за доволно големо n ова не е можно, освен ако $b_{n+1}=0$, односно $a_N=a_{N+1}$. Но, од $\text{NZD}(a_N,a_{N+1})=2$ добиваме $a_N=a_{N+1}=2$. Да го определиме a_{N-1}. Имаме $2=\frac{2+a_{N-1}}{\text{NZD}(2,a_{N-1})}$. Ако $\text{NZD}(2,a_{N-1})=1$, тогаш $a_{N-1}=0$, што не е можно. Значи, $\text{NZD}(2,a_{N-1})=2$ и тогаш $a_{N-1}=2$. Продолжувајќи ја постапката добиваме $a_1=a_2=2$.