МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 11 (2024), 9 – 28
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-11.html

НЕРАСКИНЛИВАТА ВРСКА МЕЃУ МАТЕМАТИКАТА, ПРИРОДАТА И УМЕТНОСТА

Методија Јанчески [1]

Викторија Илиеска [2]

Анкица Спасова [3]

1. ВОВЕД

Постојат бројни математички поими и области кои често ги среќаваме во природата и уметноста: кругови, шестаголници, полиедри, фрактали, симетрија, броевите π и e, златен пресек, Фибоначиеви броеви многу други. Во овој труд акцентот е ставен на златниот пресек и Фибоначиевите броеви.

Златен пресек го нарекуваме ирационалниот број $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803\ldots$. Еден е од ретките броеви, покрај броевите π и e, кој побудува висок интерес уште од античко време кај математичарите, физичарите, филозофите, архитектите, уметниците и музичарите. Некои го нарекуваат и златна средина, златен рез, божествена пропорција, Фибоначиев број и Фидиева средина. Златниот пресек вообичаено го означуваме со буквата τ. Постојат примери во литературата кога наместо со τ, тој се означува со буквата ϕ, во чест на еден од првите изучувачи на неговите својства – познатиот скулптор Фидиј, кој живеел и творел во Атина, во тоа време раководена од старогрчкиот државник, говорник и војсководач Перикле. Сепак, многу почесто во литературата со ϕ се означува бројот $1/\tau$ или бројот $-1/\tau$.

2. ИСТОРИЈА НА ЗЛАТНИОТ ПРЕСЕК

Маркус Витрувиус Полио, познат како Витрувиј, бил римски архитект, инженер и уметник кој творел во првиот век. Познат е по тоа што директно ги вклучил питагорејските принципи во своите дизајни. Во трактатот De architectura, преведен како „Десетте книги на архитектурата“, Витрувиј ја опишал „перфектната пропорција“ во архитектурата и скулптурата како онаа што се заснова на стабилност, корисност и убавина. Инспириран од трите грчки архитектонски редови, дорски, јонски и коринтски, Витрувиј верувал дека истата шема на пропорции во овие редови може да се примени и при цртањето на човечкото тело – водејќи до Витрувијанскиот човек на Леонардо да Винчи, [4].

Фактот дека геометриски конструкции може да се откријат во дизајнот на разни дела кои датираат од античко време само ја потврдува тезата дека врската меѓу геометријата, естетиката и симболиката е античка. Се чини дека отсекогаш луѓето перцепирале геометриски форми, не само во однос на нивната практична корист, туку и во однос на естетските квалитети кои ги поседуваат, [4].

Први посериозни проучувања во врска со златниот пресек спровеле тројца познати ренесансни сликари – Италијанците Пјеро дела Франческа, Леонардо да Винчи и германецот Албрехт Дирер. Тие истовремено биле и надарени математичари Најактивен математичар на ова славно трио уметници бил Пјеро дела Франческа. Голем дел од неговото творештво бил инкорпориран (за некои автори плагиран) во книгите кои ги објавил контроверзниот италијански математичар Лука Пачиоли (1445-1519). Познато е дека првата позната книга посветена на златниот пресек е Пачиолиевата „Божествена пропорција“ („Divina proportione“) објавена во 1509 година. Илустрациите во оваа книга биле изработени од Леонардо да Винчи, [1].

Златниот пресек и Фибоначиевите броеви сѐ до 19-тиот век се сметани за геометриски и математички проблеми. Германскиот психолог Адолф Цајзинг (1810–1876), чиј научен интерес е насочен кон математиката и филозифијата, прв почнал да го истражува изразувањето на овие феномени во различни области на природата и уметноста. Во 1854 година, Цајзинг го објавува делото „Нова доктрина за пропорциите на човечкото тело“, во која тој смета дека златниот пресек се појавил во целосна реализација во човечка форма. Откако дошол до заклучок дека одделните слики, делови од човековата анатомија, како и одредени примери на класичната скулптура се подредени според принципот на златниот пресек, Цајзинг е творецот на теоријата дека златниот пресек претставува израз на убавина и комплетност и во природата и во уметноста и дека целиот универзум е изграден во склад со таа пропорција. Овој научник е најзаслужен тезата за златниот пресек како божествен, космички и метафизички закон да стане општо прифатена, [6].

Во едно од најобемните дела во оваа област под наслов „Златниот пресек“, објавено (постхумно) во 1884 година, Адолф Цајзинг го потврдува присуството на златниот пресек (златниот правоаголник) во споменикот Партенон изграден на ридот Акропол во Атина. Ова негово тврдење се повторува во бројни дела на други автори. Сепак постојат и автори, кои ги оспоруваат резултатите на Цајзинг, меѓу кои се вбројуваат Милутин Борисављевиќ (српски архитект и естетичар кој докторирал на Сорбона), Џорџ Марковски (математичар од Универзитетот во Мејн и автор на трудот „Заблуди за златниот пресек“) и Кристин Флон (автор на „Светскиот атлас на архитектурата“ од 1984 година), [1].

Друг познат научник кој го проучувал златниот пресек е германскиот математичар, астроном и астролог, Јоханес Кеплер (1571 – 1630). Кеплер се смета за клучна фигура во астрономската револуција во 17-тиот век. Во писмото што во 1608 година го пишува до својот колега професор од Лајпциг, Кеплер информира дека ја открил врската меѓу броевите на Фибоначи и златниот пресек. Со други зборови, Кеплер открил дека односот на последователните броеви на Фибоначи конвергира кон златниот пресек. Всушност, тој открил уште едно интересно својство на броевите на Фибоначи: дека квадратот на кој било член се разликува најмногу за 1 од производот на двата негови соседни членови во низата. Кеплер верувал дека златниот пресек му послужил на Бог како основна алатка за создавањето на универзумот. Тој исто така бил свесен за присуството на златниот пресек и броевите на Фибоначи во распоредот на цветовите кај растенијата, [1].

3. ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ЗЛАТНИОТ ПРЕСЕК

Во следните две задачи ќе разгледаме примери на пресметувањето на златниот пресек.

Задача 1. Да се најдат броеви x кои го имаат својството да се разликуваат од реципрочната вредност за 1, [3]:

$$x = \frac{1}{x} + 1 \quad \to \quad x^2 - x - 1 = 0\,.$$

Позитивното решение на оваа квадратна равенка е всушност златниот пресек: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989... = \tau$. Лесно може да се провери дека важи и следново равенство:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\tau} = 0{,}618033989... = \tau - 1\,.$$

Задача 2. Уште во 15-тиот век, математичарот Лука Пачиоли го изложил проблемот со делење на отсечка на два дела така што должината на помалиот дел се однесува спрема должината на поголемиот дел како што должината на поголемиот дел се однесува со должината на целата отсечка, [3].

Нека отсечката има единична должина. Ја делиме на два дела со должини x (поголемиот дел) и 1-x (помалиот дел). Според условите на задачата имаме:

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1} \quad \to \quad x^2 + x - 1 = 0\,.$$

Бидејќи x и $1–x$ како должини на отсечки се ненегативни, го разгледуваме само позитивното решение на оваа равенка:

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = ... = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \tau\,.$$

Решението е всушност реципрочна вредност на златниот пресек.

Лесно може да се докаже дека важат следниве равенства [5], [7]:

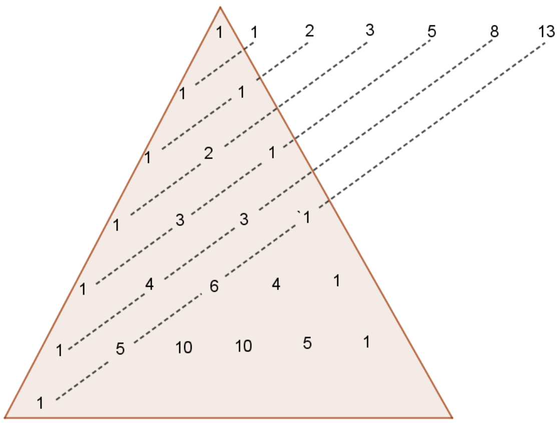
$$\tau = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} \qquad\qquad \tau = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

4. ВРСКИ МЕЃУ ЗЛАТНИОТ ПРЕСЕК, ФИБОНАЧИЕВИТЕ БРОЕВИ И ПАСКАЛОВИОТ ТРИАГОЛНИК.

Да ја разгледаме низата на Фибоначи. Најзината рекурентна релација е зададена со: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2$, при почетни услови $F_0 = F_1 = 1$. Првите членови на оваа низа се: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... Ќе ја анализираме низата од односите на последователните членови на првичната низа: $\frac{F_1}{F_2}, \frac{F_2}{F_1}, \frac{F_3}{F_2}, \frac{F_4}{F_3}, \ldots$, т. е. $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \ldots$. Ако ги прикажеме овие дропки како децимални броеви заокружени на три децимални места, ја добиваме низата: 1, 2, 1,5, 1,667, 1,6, 1,625, 1,615, 1,619, 1,618. Очигледно низата наизменично осцилира околу бројот 1,618, односно τ. Да напомeнеме дека врз конвергенцијата не влијаат различните почетни услови на рекурентната релација, [3].

И покрај очигледната конвергенција на низата на Фибоначи кон вредноста на златниот пресек, самиот Фибоначи не пишувал за златниот пресек. Дури по четири века, Кеплер експлицитно ја изразил врската меѓу Фибоначиевите броеви и златниот пресек, [4]. Во 1653 година, францускиот математичар Блез Паскал (1623–1662), визуелно го опишал алгебарското проширување на биномните коефициенти преку триаголник што во негова чест е наречен Паскалов триаголник.

Паскаловиот триаголник започнува со 1 при врвот, а секој нареден ред започнува со 1 и завршува со 1. Секој друг биномен коефициент се добива како збир на двата биномни коефициенти кои се наоѓаат лево и десно од него во редот над тековниот ред.



Цртеж 1. Врската меѓу Паскаловиот триаголник и Фибоначиевите броеви.

На Цртеж 1 е прикажано дека Фибоначиевите броеви се добиваат како збир на биномните коефициенти кои се наоѓаат на испрекинатите дијагонални паралелни линии, [6].

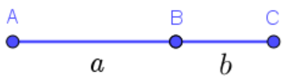
Златниот пресек има врска со Паскаловиот триаголник, односно со биномните коефициенти. Имено, може да се покаже дека важат следниве равенства:

$$\begin{aligned} \tau^n &= 1\cdot\tau^n \\ &= 1\cdot\tau^{n-1} + 1\cdot\tau^{n-2} \\ &= 1\cdot\tau^{n-2} + 2\cdot\tau^{n-3} + 1\cdot\tau^{n-4} \\ &= 1\cdot\tau^{n-3} + 3\cdot\tau^{n-4} + 3\cdot\tau^{n-5} + 1\cdot\tau^{n-6} \\ &= \cdots \end{aligned}$$

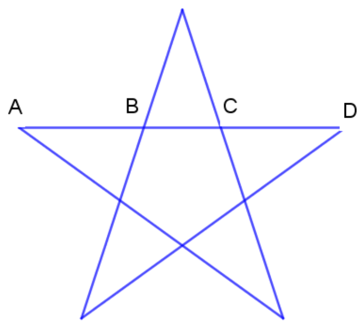
5. ЗЛАТНИОТ ПРЕСЕК ВО ГЕОМЕТРИЈАТА

5.1 ГЕОМЕТРИСКИ ПРИКАЗ НА ЗЛАТНИОТ ПРЕСЕК

Единствените својства на златниот пресек првпат биле разгледувани во контекст на поделбата на отсечка на две отсечки. Велиме дека отсечката е поделена во златен пресек, ако отсечката ја поделиме така што односот меѓу вкупната должина на отсечката и должината на подолгата отсечка е еднаков со односот меѓу должината на подолгата отсечка и должината на пократката отсечка.



Цртеж 2. Поделба на отсечка во златен пресек.



Цртеж 3. Златниот пресек кај петкраката ѕвезда.

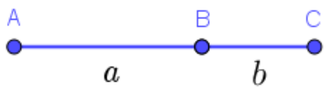
Со други зборови, велиме дека точката B ја дели отсечката AC (Цртеж 2) во златен пресек ако важи:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \tau .$$

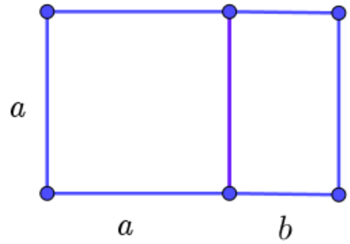
Еден од доказите дека питагорејците ја познавале конструкцијата на златниот пресек е фактот дека петкраката ѕвазда што претставува таен симбол на нивното братство вклучува златен пресек. Точките B и C претставуваат лев и десен пресек за отсечката AD (Цртеж 3).

5.2. ЗЛАТНИ ПРАВОАГОЛНИЦИ

Ако отсечките на кои е поделена првичната отсечка (Цртеж 4) ги искористиме за да конструираме правоаголник, тогаш тој правоаголник го нарекуваме златен правоаголник (Цртеж 5).



Цртеж 4. Страни на златниот правоаголник.



Цртеж 5. Златен правоаголник.

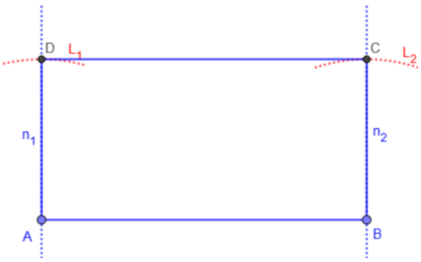
Страните на златниот правоголник имаат должини $a + b$ и a.

5.3. КОНСТРУКЦИЈА НА ЗЛАТЕН ПРЕСЕК

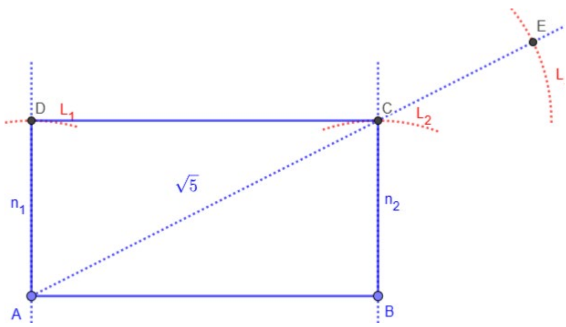
Чекор 1: Конструираме правоаголник $ABCD$ чии страни имаат должини 2 и 1.

Чекор 2: Конструираме симетрала s на отсечката AE.

Чекор 3. Пресечната точка на симетралата s со отсечката AE ја означуваме со F.



Цртеж 6. Чекор 1.

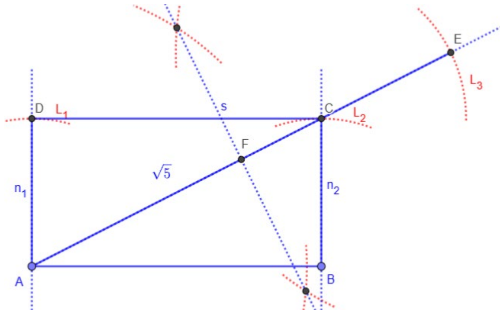


Цртеж 7. Чекор 2.

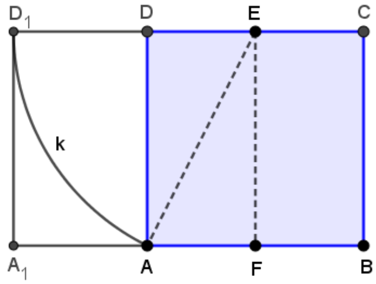
$$|AF| = \frac{|AE|}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \text{златен пресек}$$

Да напоменеме дека во [7] се вклучени 16 различни конструкции на златниот пресек со детални објаснувања.

5.4 КОНСТРУКЦИЈА НА ЗЛАТЕН ПРАВОАГОЛНИК



Цртеж 8. Чекор 3.



Цртеж 9. Конструкција на златен правоаголник.

Го конструираме квадратот $ABCD$. Со отсечката EF го делиме квадратот на два еднакви дела. Цртаме кружен лак k со центар во точката E и со радиус EA. Пресекот на кружниот лак со продолжението на страната CD откај точката D ќе го означиме со D_1 . Ја конструираме страната D_1A_1 како паралелна на страната DA. Конструиравме два златни правоаголници: A_1BCD_1 и A_1ADD_1 , [3].

5.5. НАОЃАЊЕ НА ЗЛАТЕН ПРЕСЕК ВО ПРАВИЛЕН ПЕТАГОЛНИК

Го разгледуваме петаголникот $ABCDE$ (Цртеж 6). Во ΔEDB чии внатрешни агли имаат $72^0, 72^0$ и 36^0, соодветно, повлекуваме симетрала на внатрешниот агол при темето D. Пресечната точка на симетралата со страната EB ја означуваме со A_1.

Според признакот AAA, имаме $\Delta EDB \sim \Delta A_1ED$. Од сличноста на триаголниците следува дека:

$$\frac{x}{y-x} = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad x^2 = y^2 - xy \quad \rightarrow \quad y^2 - xy - x^2 = 0$$

$$\rightarrow y = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4x^2}}{2} \quad \rightarrow y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x$$

Вредноста $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ е златниот пресек.

Ја применуваме косинусната теорема за триаголникот ΔEDB.

$$x^2 = y^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot y \cdot cos36^0$$

$$\rightarrow \quad x^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)^2 - 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}x \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}x \cdot cos36^0$$

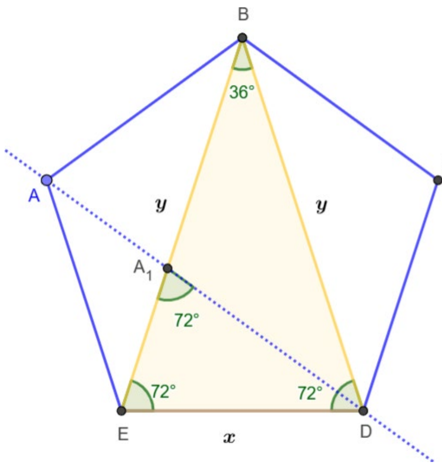
$$\rightarrow\ 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot cos36^0$$

$$\rightarrow\ 1 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} + \frac{6+2\sqrt{5}}{4} - 2\cdot\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\cdot cos36^0$$

$$\rightarrow\ 1 = (3+\sqrt{5}) - (3+\sqrt{5})\cdot cos36^0$$

$$\rightarrow\ (3+\sqrt{5})\cdot cos36^0 = 2+\sqrt{5}$$

$$\rightarrow\ cos36^0 = \frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \qquad \rightarrow\ cos36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\text{златен пресек}}{2}$$



Цртеж 10. Златен пресек во правилен петаголник.

6. ЗЛАТНИОТ ПРЕСЕК ВО АРХИТЕКТУРАТА

Златниот пресек бил широко застапен во античката и во готската архитектура, која подоцна била заменета со ренесансната архитектура. Леон Батиста Алберти и Пачиоли, математичари и уметници, се најзаслужни за поттикнување на примената на златниот пресек во архитектурата во периодот на ренесансата. Издвојуваме неколку познати градби во кои е застапен златниот пресек: споменикот Партенон на Акропол во Атина, Грција, Големата пирамида во Гиза, Египет, позната и како Кеопсова пирамида, готската катедралата „Нотр Дам“ во Париз, позната и како „Париската Света Богородица“, мавзолејот „Таџ Махал“ во Агра, Индија, зградата Зграфито во Фиренца и, во поново време, зградата на Обединетите нации во Њујорк.

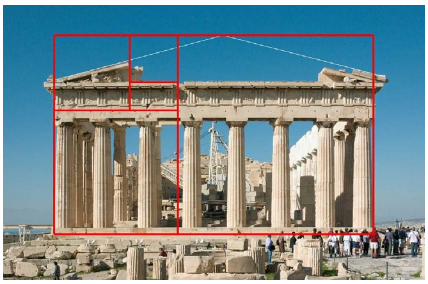
Што се однесува до македонските градби, златниот пресек е применет на главниот простор (без олтарската апсида) во манастирот „Свети Никола“ во кривопаланечкото село Псача, изграден во средината на 14 век.

6.1. СПОМЕНИКОТ ПАРТЕНОН НА АКРОПОЛ

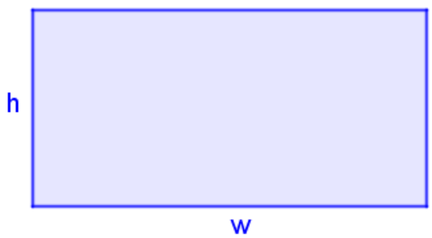
Античките Грци верувале дека од сите правоаголници, златниот правоаголник, односно правоаголникот конструиран според златен пресек, најмногу предизвикува чувство на естетика и затоа тој многу често се користел во обликувањето на архитектурни дела од тоа време. Низ историјата, златниот правоаголник се сметал за најпријатен за око. Грчкиот скулптор Фидиј го изградил споменикот Партенон (Слика 2) на ридот Акропол во Атина (реплика на овој споменик е изградена во Стогодишниот парк во Нешвил, САД), а златниот пресек бил вклучен во сите негови дела. Споменикот Партенон е пример на градба чие правоаголно лице претставува златен правоаголник (Цртеж 11), т. е. за него важи дека односот на ширината кон должината е приближно еднаков на златниот пресек. Ако ширината на правоаголникот ја означиме со h, а должината со w, тогаш важи следнава пропорција [3]:

$$\frac{h}{w} = \frac{w}{h+w}$$

Оваа пропорција се нарекува божествена пропорција. Ако замениме $h = 1$, можеме да ја решиме соодветната равенка по w:



Слика 1. Споменикот Партенон [6].



Цртеж 11. Златен правоаголник.

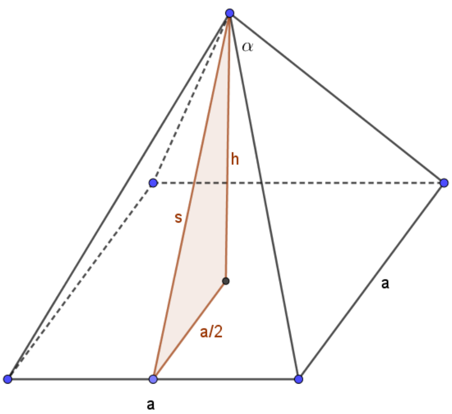
$$\frac{1}{w} = \frac{w}{1+w} \rightarrow 1 + w = w^2 \rightarrow w^2 - w - 1 = 0$$

Бидејќи должината е ненегативна, ненегативното решение на оваа равенка е всушност златниот пресек τ, [3].

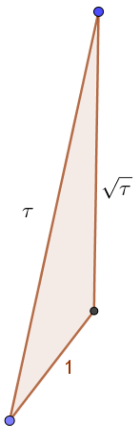
6.2. ГОЛЕМАТА ПИРАМИДА ВО ГИЗА ИЛИ КЕОПСОВАТА ПИРАМИДА

Основата на Кеопсовата пирамида има должина $a \approx 230\ m$ и висина $h \approx 147\ m$, а аголот при врвот на пирамидата е 63,43°, [2]. Аголот при врвот на пирамидата е приближно еднаков со аголот при врвот на златниот ромб со дијагонали D и d, прикажан на Цртеж 14. Да напоменеме дека односот на дијагоналите кај златниот ромб е еднаков со златниот пресек, т. е. важи $\frac{D}{d} = \tau$.

Го разгледуваме правоаголниот триаголник со страни a, h и s (цртежите 12 и 13), каде што a е страната на квадратната основа на пирамидата, h е висината на пирамидата и s е висината на бочниот ѕид.



Цртеж 12. Скица на Кеопсовата пирамида.

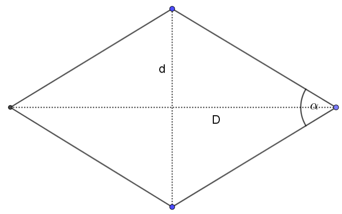


Цртеж 13. Кеплеровиот триаголник.

Се покажува дека тој триаголник го содржи златниот пресек. Триаголникот е откриен од Кеплер и во негова чест се нарекува Кеплеров триаголник, [1], [4].

Се покажува дека важи $\frac{s}{a/2} \approx \tau$. Имено, ако ги поделиме сите три страни на триаголникот соодветно со $a/2$, тогаш триаголникот може да го означиме како на Цртеж 13. Очигледно е дека односот на хипотенузата и катетата при основата е еднаков на златниот пресек. Непосредно може да се провери односот на периметарот на основата $L = 4a$ и висината на пирамидата h е приближно еднаков на бројот π, [1], [4], [7].

Во литературата постојат тврдења дека градителите на Кеопсовата пирамида знаеле за врската меѓу димензиите на пирамидата и златниот пресек, [2].



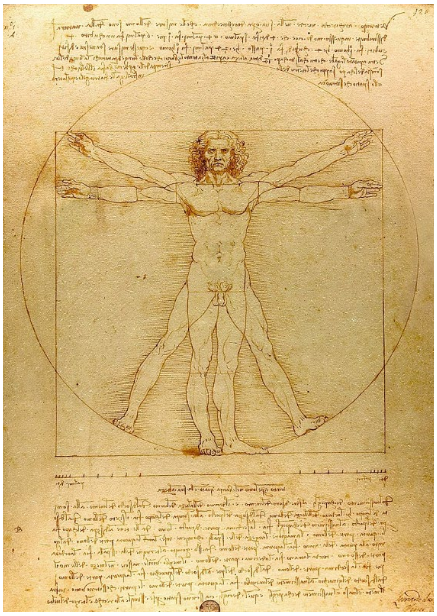
Цртеж 14. Златен ромб.

7. ЗЛАТНИОТ ПРЕСЕК ВО СЛИКАРСТВОТО

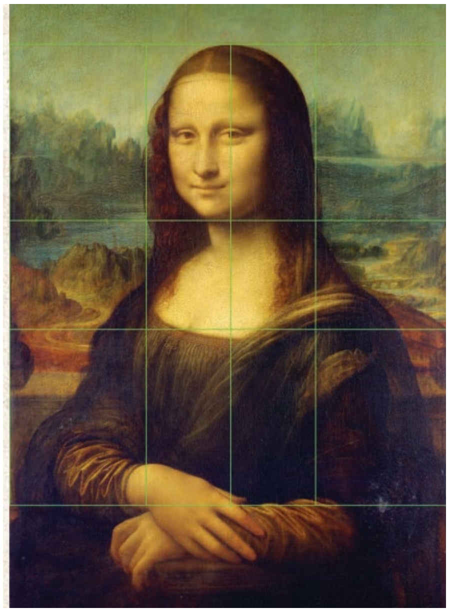
Посебна улога во уметничкото творештво има употребата на златниот пресек, односно како што поинаку се нарекува, божествената пропорција. Застапен е во најпознатите ликовни дела. Уметниците од античка Грција добро го познавале златниот пресек и затоа создале дела со совршена класична убавина кои подоцна биле имитирани од ренесансните сликари. Најпознати автори за кои се смета дека го користеле златниот пресек во своите дела се Леонардо да Винчи („Мона Лиза“, „Тајната вечера“, „Витрувијанскиот човек“), Микеланџело („Давид“, „Светата фамилија“), Рафаел, Рембрант („Автопортрет“), Ботичели и Салвадор Дали. Убав пример на примена на златниот пресек е ремек делото на Рафаел – „Атинската школа“, фреска во Апостолската палата во Ватикан, во која тој ги овековечува највидните грчки филозофи и научници, од Питагора до Платон во амбиент на филозофски дијалог, [4].

Проучувањето на златниот пресек би било невозможно без Леонардо да Винчи и неговиот „Витрувијански човек“ (Слика 3). Познатиот римски архитект Витрувиј (1 век п.н.е.) прв нацртал човечко тело во круг чиј центар е во папокот, додека рацете и нозете се раширени. Да Винчи својот цртеж го засновал на работата на Витрувиј. Цртежот прикажува тело на гол маж во две положби кои се преклопуваат, вписан во круг и квадрат, двата геометриски архетипа на антиката. Според овој цртеж, висината на човекот е еднаква на ширината на неговите раширени раце.

Цртежот често се нарекува „закон за пропорција“ или „човечки пропорции“. Врз основа на него, Леонардо направил комплетна студија за човечката фигура и покажал како одделни делови на телото се во однос близок на златниот пресек, [4], [7].



Слика 2. Витрувијански човек [6]



Слика 3. Мона Лиза [6].

Во создавањето на своето ремек-дело „Мона Лиза“ (Слика 4), Леонардо да Винчи го користел златниот пресек за да создаде хармонични пропорции на лицето на Мона Лиза, која предизвикува восхит со својата мистериозна насмевка. Овој концепт на користење на златниот пресек за убавина и хармонија е референциран во различни литературни дела кои зборуваат за уметноста и естетиката, па затоа ова дело има двојно значење, и во сферата на сликарството и во литературата, воопшто.

8. ЗЛАТНИОТ ПРЕСЕК ВО ЛИТЕРАТУРАТА

Постојат значаен број на истражувања кои ја третираат примената на златниот пресек во литературата. Во некои книги златниот пресек се користи за одредување на димензиите и маргините на страниците, во други пак е вграден во структурата на приказната делејќи ги точките на заплет или ритамот на приказната. Постојат книги каде што писателите го користат златниот пресек во дефинирање на односите меѓу ликовите или пак во одредувањето на темпото и редоследот на настаните во приказната. Некои автори користат броеви на Фибоначи за да ја одредат структурата на своите дела. На пример, песната може да има шема на слогови што што е во согласност со низата на Фибоначи, или романот може да има поглавја со броеви на зборови што се усогласени со броевите на Фибоначи. Се „експериментира“ и со броење на зборови или должини на пасуси кои одговараат на броевите на Фибоначи.

Главните цели на сите овие „експериментирања“ со вклучување на златен пресек и Фибоначиеви броеви во литературата се: подобрувањето на читливоста на текстот, зголемување на неговата естетската привлечност, додавање длабочина, симболика и интриги во приказната, како и создавање на чувство на хармонија и рамнотежа кај читателите.

Епската поема „Енеида“, напишана од римскиот поет Вергилиј (70 г. - 19 г. п.н.е.) се смета за едно од најголемите поетски дела во историјата. Џорџ Екел Дакворт, професор по класика на Универзитетот Принстон, го изнел најдраматичното тврдење за присуството на златниот пресек во ова дело. Во својата студија од 1962 година „Структурни модели и пропорции во Вергилиевата Енеида“, Дакворт се обидел да докаже дека во изработката на ова дело Вергилиј користел златен пресек и на микро ниво (малите единици) и на макро ниво (главните поделби во епот). Во својата анализа Дакворт во епот открил присуство на „стотици златни пресеци“. Дакворт исто така сметал дека на Вергилиј му бил познат фактот дека односот на два последователни Фибоначи броеви е приближна вредност на златниот пресек. Во трудот од 1981 год. Курчин од Универзитетот во Отава и Херц-Фишлер ги оспоруваат резултатите на Дакворт, [1], [5]. Меѓу познатите дела во кои се забележува присуство на златниот пресек се вбројуваат „Божествена комедија“ од Данте Алигиери, „Големиот Гетсби“ од Ф. Скот Фицџералд, „Сон на летната ноќ“ од Вилијам Шекспир и други. Од делата во кои на различни начини се вклучени броевите на Фибоначи ги издвојуваме: „Кодот на Да Винчи“ од Ден Браун, „Необичниот инцидент на кучето во текот на ноќта“ од Марк Хадон, „Куќа од лисја“ од

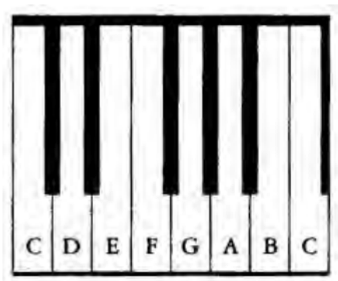
Марк З. Даниелевски и други. Присуството на златниот пресек и броевите на Фибоначи исто така е присутно и во делата на Пушкин, Лермонтов, Шилер, Толстој и други познати автори [9]. Златниот пресек и Фибоначиевите броеви се присутни и во делата на Петар Петровиќ Његош „Горски венец“ и „Луча микрокозма“ [5]. Интересно е дека дури и димензиите на Ноевата арка запишани во Библијата вклучуваат златен правоаголник.

9. ЗЛАТНИОТ ПРЕСЕК ВО МУЗИКАТА

Присуството на златниот пресек се забележува и во конструкцијата на музичките инструменти. Тоа посебно се однесува за виолината и флаутата, каде златниот пресек понекогаш претставувал тајно средство за остварување на особено пријатни тонски бои [5]. Широко е распространето мислењето дека златниот пресек е применет и во изработката на виолините конструирани од Антонио Страдивари [1].

Композиторите Бетовен, Бах, Шопен, Моцарт и Барток се најчесто спомнуваните имиња во музиката за кои се смета дека користеле златен пресек и Фибоначиеви броеви во своите дела. Најголемо присуство на златниот пресек и Фибоначиевите броеви е откриено во композициите на унгарскиот композитор Бела Барток (1881-1945). Унгарскиот музиколог Ерна Лендваи темелно ја истражувал музиката на Барток и утврдил дека таа во повеќе аспекти е во склад со златниот пресек. Сепак, постојат музиколози кои не се согласуваат со овие истражувања, [5], [1].

Октавата на клавијатура на пијаното се состои од тринаесет клавиши, осум бели и пет црни (Слика 5). Петте црни клавиши се поделени во две групи, едната со два клавиши, а другата со три. Очигледно е дека погореспомнатите броеви 2, 3, 5, 8 и 13 се првите пет членови на низата на Фибоначи, [1], [3], [8].



Слика 4. Октава на клавијатура на пијано [1]

Во своето дело „Дебиси во пропорција“, Род Хауат од Универзитетот во Кембриџ тврди дека францускиот композитор

Клод Дебиси (1862-1918), чии хармонични иновации имале длабоко влијание врз генерации на композитори, многу често го користел златниот пресек, [1].

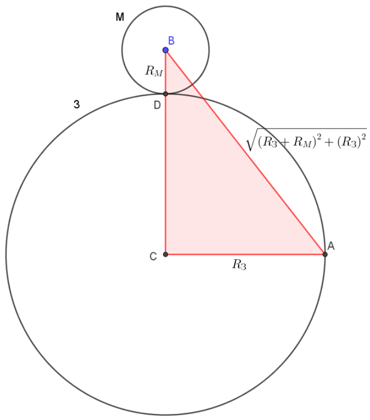
Во својата докторска дисертација, „Симетрија на музичкото дело“, Јадранка Хофман Јаблан покажала дека во голем број познати музички композиции местата каде што се одигруваат најзначајните промени – локални и глобални кулминации, точки на модулација и слично се совпаѓаат со поделбата на композицијата во склад со златниот пресек, [5].

10. ЗЛАТНИОТ ПРЕСЕК ВО ВСЕЛЕНАТА

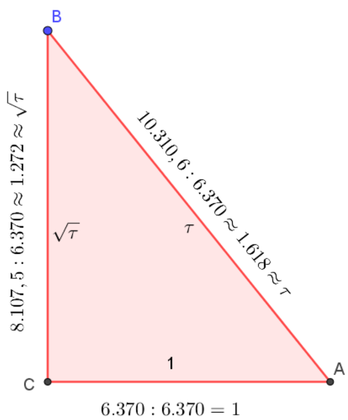
10.1 ПРИСУСТВО НА ЗЛАТНИОТ ПРЕСЕК

Националната аеронаутичка вселенска агенција (НАСА) во 2003 година објави наоди дека обликот на вселената е додекаедар заснован на златниот пресек. Според мерењата на НАСА, радиусите на Земјата и на Месечината се $R_З \approx 6370$ *km*, $R_М \approx 1737{,}4$ *km*, соодветно. Ако ги поставиме топките што ги симболизираат Земјата и Месечината, како што тоа е претставено на Цртеж 15, тогаш означениот триаголник на Цртежите 15 и 16 всушност претставува Кеплеров триаголник.

По пресметка на вредностите на страните на триаголникот согласно горенаведените вредности, ќе ја поделиме должината на секоја од трите страни соодветно со должината на радиусот на Земјата. Финалното означување на страните може да се види во внатрешноста на Цртеж 16, [6].



Цртеж 15. Кеплеров триаголник 1



Цртеж 16. Кеплеров триаголник 2

10.2 ПЛАНЕТАРНИТЕ ОРБИТИ И ЗЛАТНИОТ ПРЕСЕК

Земјата има уште една необична врска со Венера, нејзиниот следен најблизок сосед во Сончевиот систем. Земјата и Венера имаат орбитална резонанца што ги доведува до истите позиции во Вселената пет пати во текот на осум орбити на Земјата и тринаесет орбити на Венера. Очигледно е присуството на Фибоначиевите броеви. Орбиталниот период на Венера е 224,7 денови, што претставува приближно 0.6152 од една година на Земјата (365,256 дена). Овој број пак е многу близок до реципрочната вредност на златниот пресек, [6].

10.3 ЦРНИТЕ ДУПКИ И ЗЛАТНИОТ ПРЕСЕК

Ј. А. Нието од Автономниот универзитет во Синалоа, Мексико, во својот труд објавен во 2011 година, обидувајќи се да ги опише својствата на црните дупки во четири димензии, ја открил следнава формула, со што и формално ја открил врската меѓу црните дупки и златниот пресек, [6]:

$$\begin{vmatrix} 1-\tau & 1 \\ 1 & -\tau \end{vmatrix} = \tau^2 - \tau - 1 = 0$$

11. ЗЛАТНИОТ ПРЕСЕК ВО ПРИРОДАТА

Набљудувајќи ги отсекогаш формите во природата, човекот сфатил дека постојат правилни односи на деловите и склад на формите и дека тие се наоѓаат во природата во совршен, идеален однос и пропорции кои се сметаат за божествени.

Златниот пресек и Фибоначиевите броеви ги има насекаде во природата, присутни се во цветот на сончогледот, во распоредот на листовите на гранките на дрвата, во распоредот на лушпите кај шишарката, кај сите цвеќиња и листови што имаат облик на правилен петоаголник и кај многу други растенија. На пример, семките во цветот на сончогледот се поставени во две спирални низи, леви и десни, едните во насока на движење на стрелката на часовникот, а другите во обратна насока. Секоја семка на сончогледот припаѓа на една лева и на една десна спирална линија. Бројот на леви спирални линии во секој цвет претставува Фибоначиев број, а бројот на десни спирални линии е исто така Фибоначиев број, но не истиот туку соседниот, а погоре видовме дека односите на соседните Фибоначиеви броеви конвергираат кон златниот пресек, [5], [10].

Познато е дека односот на бројот на женки и бројот на мажјаци во кошницата со пчели е близок до златниот пресек.

Златниот пресек е присутен во анатомијата на човековото тело, во ритамот на отчукувањата на срцето, во структурата на ДНК. Дури и плодноста е поврзана со златниот пресек. Преку испитувања на матката кај жените утврдено е дека при раѓањето односот на должината и ширината на матката е приближно 2. Во текот на животот тој однос се намалува до 1.46. Испитувањата покажале дека жените се најплодни кога тој однос е приближно еднаков со златниот пресек.

12. ЗАКЛУЧОК

Пропорцијата на златниот пресек претставува извор на совршена убавина – онаа за која вечно трагале уметниците. Цајзинг е човекот што е најзаслужен златниот пресек да не се набљудува само како математички и геометриски феномен, туку како израз на убавина и комплетност и во природата и во уметноста. Негова е теоријата дека дека целиот универзум е изграден во склад со таа пропорција.

Во трудот покажавме дека златниот пресек и Фибоначиевите броеви се присутни насекаде, во: математиката, анатомијата на човечкото тело, природата, архитектурата, сликарството, вајарството, музиката, литературата, па дури и во вселената. Златниот пресек и Фибоначиевите броеви се манифестираат во бројни форми, на разни начини, на повеќе нивоа и во различни концепти, или кратко кажано, нивната појавност има широк спектар на варијации.

Во трудот спомнавме и неколку оспорувања на присуство на златниот пресек. Иако златниот пресек го има насекаде околу нас, луѓето треба да бидат објективни, да ја почитуваат науката и да не претеруваат во откривањето на златниот пресек по секоја цена, односно дури и онаму каде што реално не постои.

Златниот пресек има големи примени во повеќе области: теоријата на броеви, алгоритмите за пребарување, минимизирањето на функциите, теоријата на мрежи, атомската структура на одредени материјали и растот на биолошките организми. Златниот пресек и Фибоначиевите броеви се користат и во ботаниката, зоологијата, бизнисот, економијата, [10], статистиката, операционите истражувања, археологијата, образованието, социологијата, психологијата на меѓучовечките односи, теоријата на хаосот, анализата на ДНК, квантната механика и многу други области, [3].

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Livio, *The Golden ratio*, The story of Phi, the world's most astonishing number, Broadway Books, New York, 2003.

[2] R. A. Dunlap, *The golden ratio and Fibonacci numbers*, World Scientific, Singapore, 2003.

[3] K. J. Smith, *The nature of Mathematics*, Brooks Cole, Cengage Learning, Belmont, USA, 2012.

[4] M. Danesi, *Pi (π) in Nature, Art, and Culture, Geometry as a Hermeneutic Science*, Brill, Leiden|Boston, 2021.

[5] М. Чанак, *Математика и музика*, Истина и лепота, Једна златна хармонијска нит, Завод за уџбенике, Београд, 2009.

[6] G. B. Meisner, *The golden ratio: The divine beauty of mathematics*, Race Point Publishing (an imprint of The Quarto Group), 2018.

[7] A. S. Posamentier, I. Lehmann, *The glorious golden ratio*, Prometheus books, 2012.

[8] M. Cross, R. Friedman, *The golden ratio & Fibonacci sequence*, Hoshin media, 2013.

[9] A. Stakhov, *The mathematics of harmony: From Euklid to contemporary mathematics and computer science,* World Scientific, 2009.

[10] В. Јорданов, *Фибоначиевите броеви, теоријата на Елиот и тргувањето со хартии од вредност,* Математички омнибус 9, 2021, 97–112.

[1] Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Факултет за информатички науки и компјутерско инженерство
ул. Руѓер Бошковиќ, бр. 16, 1000, Скопје
e-mail: metodija.jancheski@finki.ukim.mk

[2] ООУ„Коле Неделковски”,
ул. Антоније Грубишиќ, бр.8, 1000, Скопје
e-mail: vikiiki@gmail.com

[3] ООУ „Тихомир Милошевски”,
ул. 1, бр. 62, Ѓорче Петров, 1000, Скопје
e-mail: a_kaladziska@yahoo.com

Примен: 9.8.2023
Поправен: 30.9.2023
Одобрен: 4.10.2023
Објавен на интернет: 29.11.2023