



Language: Macedonian

Day: 1

Саботиа, 11 Април, 2026

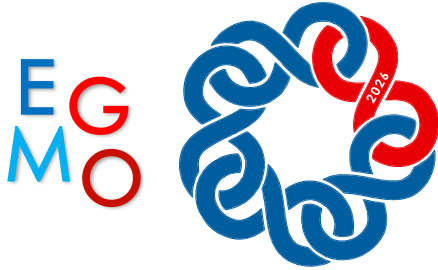
Задача 1. 2026×2026 табла од квадратчиња велиме дека е *борго* ако барем едно квадратче е обоено во црвено. Правоаголен регион од квадратчиња е *непарен-правоаголник* ако се состои од непарен број црвени квадратчиња. Определи го најголемиот природен број M таков што за било која *борго* 2026×2026 табла, постои *непарен-правоаголник* кој се состои од барем M квадратчиња.
Забелешка: Правоаголен регион има страни паралелни на таблата и ја содржи сета своја внатрешност.

Задача 2. Нека n е природен број, Марија игра игра каде што почнува со бројот 1 на таблата. Ако бројот V е напишан на таблата, таа може да избере природен број j таков што $1 \leq j \leq n$ и го брише бројот V и на негово место го запишува бројот $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$, играта завршува кога Марија сака. Со $R(x)$ го означуваме најблискиот цел број до x , така што ако x е точно на средина помеѓу два цели броја го земаме поголемиот. Пример: $R(1.3) = 1$ and $R(1.5) = R(1.8) = 2$.

- Докажи дека за било кој n , постои природен број B таков што Марија не може да ја заврши играта со број поголем од B на таблата.
- За секој n , нека $f(n)$ биде максималниот број кој може да се добие после конечно многу бришења. Покажи дека постои природен број N таков што за секој природен број $m \geq N$, 2026 го дели $f(m)$.

Задача 3. Нека \mathbb{R} е множеството на реални броеви. Одреди ги сите функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такви што за сите реални броеви x и y , следново е точно:

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$



Language: Macedonian

Day: 2

Негела, 12 Април, 2026

Задача 4. Бесконечна низа од реални броеви $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ ја задоволува релацијата $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ за секој природен број n . Нека $r = 2026^{2026}$, докажи дека

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Задача 5. Нека ABC е остроаголен триаголник таков што $AC > AB$. Нека ω биде опишаната кружница на ABC , а O нејзиниот центар. Нека K биде пресекот на тангентите на ω во B и C . Опишаната кружница на ABK ја сече правата BC повторно во $Z \neq B$. Нека L биде средината на KZ . Нека X биде пресекот на правите KZ и AB . Нека V е точка на опишаната кружница на ABL која се наоѓа на истата страна од правата BC како и A , притоа OV да биде нормална на KZ . Докажи дека LV е нормална на CX .

Задача 6. Нека p е прост број и нека n е природен број таков што p не е делител на n . Со k го обележуваме бројот на позитивни делители на n , а со $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ ги означуваме делителите на n . За секој $i = 1, 2, \dots, k$, го дефинираме c_i како бројот на позитивни делители, ℓ , на d_i^2 за кои p е делител на $d_i - \ell$. Докажи дека:

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \dots + c_k) \geq k^2.$$