РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА, ОДРЖАН ВО 1967 ГОД.

Трети клас

1. Да се реши системот равенки

$$xy=a^2;\quad (\log x)^2+(\log y)^2=\frac{5}{2}(\log a^2)^2,$$

каде што $a>0$ е даден број.

2. Да се докажат идентитетите:

$$\sin kx=\frac{\cos(k-\frac{1}{2})x-\cos(k+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\cos kx=\frac{\sin(k+\frac{1}{2})x-\sin(k-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

каде што $k=1,2,\dots,n$, а $x\neq 2m\pi$, $m=0,\pm 1,\pm 2,\dots$.

Користејќи ги добиените резултати, да се пресметаат збировите:

$$S_1=\sin x+\sin 2x+\dots+\sin nx,$$
$$S=\cos x+\cos 2x+\dots+\cos nx.$$

3. Обиколката на еден правоаголник е $2s$; ако неговата должина се зголеми за 5, а ширината за 3, се добива нов правоаголник чија плоштина е за 195 поголема од плоштината на дадениот правоаголник. Нека се x и y соодветно должина и ширина на дадениот правоаголник.

а) Да се изразат x и y во функција од s.

б) За кои вредности од s е можен проблемот.

в) Да се определи s кога дадениот правоаголник се сведува на квадрат.

4. Во рамнината Σ е даден агол $\sphericalangle BAC=60^\circ$. Во просторот над рамнината се наоѓа точка S која е оддалечена за 25cm од темето A, за 7cm од кракот AB и за 20cm од кракот AC. Да се пресмета растојанието на S од рамнината.

Четврти клас

1. n паралелни прави во една рамнина од серијата(A) се се-

чат со m паралелни прави од серијата(B)во истата рамнина. Колку паралелограми можат да се уочат во добиената мрежа?(Бројот на паралелограмите е поголем од $m.n.$).

2. Дадена е аритметичката низа:

$$\frac{m^2-1}{m},\ m,\ \frac{m^2+1}{m},\ \frac{m^2+2}{m},\ldots$$

каде m е даден природен број.

а)Да се најде n-тиот член a_n и збирот S_n од првите n членови на низата.

б)Да се напишат изразите за a_n и S_n кога $n=m$ и да се покаже дека S_m е цел број делив со 25 секогаш кога $m = 10k +1$, каде што k е природен број.

3. Да се покаже дека е

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},\ a>0,\ b>0,$$

и од тоа да се изведат неравенствата

$$a+b+c \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$$
$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc.$$

4. Дадена е функцијата

$$f(x)=\log_e(x+\sqrt{1+x^2}).$$

а)Да се покаже дека функцијата е непарна,т.е.$f(-x)= -f(x)$.

б)Да се најде инверзната функција.

в)Да се конструира графикот на функцијата $y=f(x)$ (користејќи го графикот на инверзната функција).

г)Да се пресмета плоштината заградена со графикот, x-оската и правата $x=1$.

РЕШЕНИЈА

Трети клас

1. Бидејќи x и y стојат под знакот на логаритамот,ако постои решение на системот,мора да биде $x>0$, $y>0$.

Ако првата равенка на системот ја логаритмуваме, системот добива облик

$$\log x+\log y=2 \log a,\ \log^2 x+\log^2 y=10 \log^2 a.$$

Ако ја воведеме смената: $\log x = u$, $\log y = v$,се добива

$$u+v=2\log a,\quad u^2+v^2=10\log^2 a\ ,$$

од каде:

$$u_1=3\log a,\quad v_1=-\log a;$$
$$u_2=-2\log a,\quad v_2=3\log a.$$

Ако се вратиме на непознатите x и y,се добива

$\log x_1=3\log a, \log x_1=\log a^3, x_1=a^3; \log y_1=-\log a, \log y_1=\log a^{-1}, y_1=\frac{1}{a}$.

$\log x_2=-\log a, \log x_2=\log a^{-1}, x_2=-1;\ \log y_2=3\log a, \log y_2=\log a^3, y_2=a^3$

2. За докажување на дадените идентитети ќе ги користиме формулите за трансформирање на разлика на тригонометриски функции во производ.

$$\sin kx=\frac{\cos(k-\frac{1}{2})x-\cos(k+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{-2\sin kx\sin(-\frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}}=\sin kx.$$

$$\cos kx=\frac{\sin(k+\frac{1}{2})x-\sin(k-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{2\cos kx.\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\cos kx\ .$$

$$S_1=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}+\frac{\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}+\dots+\frac{\cos(n-\frac{1}{2})x-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{n+1}{2}x.\sin(-\frac{nx}{2})}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\ .$$

$$S_2=\frac{\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}+\frac{\sin\frac{5x}{2}-\sin\frac{3x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}+\dots+\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin(n-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{2\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\ .$$

3.а)Од даденото следува:

$$(x+5)(y+3)=xy+195,\ x+y=s$$

Ако се упрости првата равенка на овој систем,се добива системот:

$$3x+5y=180,\ x+y=s\ .$$

Следува:

$$x=\frac{5s-180}{2},\ y=\frac{180-3s}{2}.$$

б)За да биде можен проблемот,треба да е $x>0$ и $y>0$, односно да биде:

$$180-3s>0,\ 5s-180>0,$$

Следува:

$$36<s<60\ .$$

в)Правоаголникот се сведува на квадрат,ако е $x=y$, т.е.ако е

$$5s-180=180-3s,\ 8s=360,\ s=45\ .$$

4. Од ΔAOS (сл.50) имаме:

$$\overline{SO}^2=\overline{AS}^2-\overline{AO}^2\ . \qquad (1)$$

Четириаголникот AMON е тетивен четириаголник, впишан во круг со дијаметар AO.

Од ΔAMN следува:

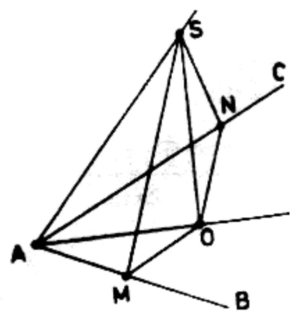
$$\overline{AO}=\frac{\overline{MN}}{\sin 60^\circ} \qquad (2)$$

По косинусната теорема:

$\overline{MN}^2=\overline{AM}^2+\overline{AN}^2-2\overline{AM}\cdot\overline{AN}\cos 60^\circ$,каде што е

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AS}^2-\overline{SM}^2}=\sqrt{625-49}=\sqrt{576}=24$,

$\overline{AN}=\sqrt{\overline{AS}^2-\overline{SN}^2}=\sqrt{625-400}=\sqrt{225}=15$.



Сл.50

Според тоа:

$$\overline{MN}^2=576+225-2.15.24.\frac{1}{2}=576+225-360=441,$$

$$\overline{MN}=21\ .$$

Потоа, од (2) се добива:

$$\overline{AO}=\frac{21}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{42}{\sqrt{3}}=14\sqrt{3}\ .$$

Поради тоа,за нормално растојание на точката S од рамнината се добива:

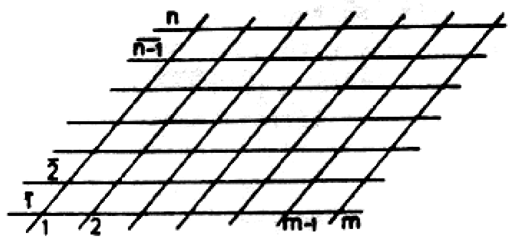
$$\overline{SO}^2=625-588=37,\ \overline{SO}=\sqrt{37}\approx 6{,}08$$
$$SO=\sqrt{37}=6{,}08.$$

Четврти клас

1. Ако пресечните точки што се јавуваат на првата права од серијата (A) ги одбележиме со $1,2,\dots m-1,m$, а пресечните точки што се јавуваат на првата права од серијата B ги одбележиме со $\bar{1},\bar{2},\dots\overline{n-1},\bar{n}$ (сл.51), тогаш секој паралелограм што се јавува во добиената мрежа може да се определи со по еден пар броеви (α,β) - каде што е $1\leqslant\alpha\leqslant m$, $1\leqslant\beta\leqslant m$ - и по еден пар броеви $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$ - каде што е $1\leqslant\bar{\alpha}\leqslant n$, $1\leqslant\bar{\beta}\leqslant n$.

Поради тоа бројот на паралелограмите е:

$$C_m^2\cdot C_n^2=\frac{m(m-1)n(n-1)}{4}.$$



Сл.51

2. а)

$$d=a_2-a_1=m-\frac{m^2-1}{m}=\frac{1}{m}.$$

Според тоа:

$$a_n=\frac{m^2-1}{m}+(n-1)\cdot\frac{1}{m}=\frac{m^2-1+n-1}{m}=\frac{m^2+n-2}{m}.$$

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}\left(\frac{m^2-1}{m}+\frac{m^2+n-2}{m}\right)=\frac{n(2m^2+n-3)}{2m}.$$

б) За $n=m$ се добива

$$a_m=\frac{m^2+m-2}{m}=\frac{(m-1)(m+2)}{m};\quad S_m=\frac{m(2m^2+m-3)}{2m}=\frac{(m-1)(2m+3)}{2}.$$

За $m=10k+1$ е:

$$S_m=\frac{10k(20k+2+3)}{2}=5k\cdot5(4k+1)=25k(4k+1).$$

Бидејќи изразот за S_m содржи множител 25, тој е делив со 25.

3. Од

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0\quad(\text{за } a>0 \text{ и } b>0)$$

следува:

$$a+b-2\sqrt{ab}\geqslant 0,\ a+b\geqslant 2\sqrt{ab},\ \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

Знакот равно важи кога е $a=b$.

Од

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a+c}{2}+\frac{b+c}{2}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$$

следува:

$$a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\ .$$

Од

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab},\ b+c\geqslant\ 2\sqrt{bc}, c+a\geqslant 2\sqrt{ac}$$

следува:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8\sqrt{ab.bc.ca},\ (a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc.$$

4.а)

$$f(-x)=\log_{(2)}(\sqrt{1+x^2}-x)=\log_{(2)}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\log_{(2)}(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x).$$

б)Ако во изразот,со кој е зададена функцијата, x го замениме со y,а y го замениме со x,се добива:

$$x=\log_{(2)}(y+\sqrt{1+y^2}),\ 2^x=y+\sqrt{1+y^2},\ 2^x-y=\sqrt{1+y^2}.$$

Ако ги дигнеме двете страни на равенката на квадрат, се добива:

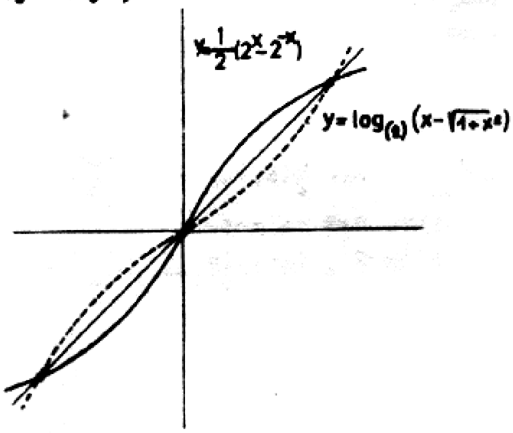
$$2^{2x}-2y.2^x+y^2=1+y^2,$$

од каде што е

$$y=\frac{2^{2x}-1}{2.2^x}=\frac{2^x-2^{-x}}{2}.$$

в)Графикот на оваа функција најлесно се добива со давање разни вредности на x.

Графикот на инверзната функција и дадената функција се симетрични во однос на симетралата на I и III квадрант (сл.46).



Сл.52

г)

$$P=\int_0^1\log_{(2)}(x+\sqrt{1+x^2})dx\ .$$

Интегралот ќе го решиме со парцијална интеграција.

Нека е:

$$u=\log_2(x+\sqrt{1+x^2}),\ dv=dx,$$

од каде што е

$$du=\frac{1}{\ln 2\sqrt{1+x^2}}\,dx,\quad v=x.$$

$$P=\left[x\log_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1-\frac{1}{\ln 2}\int_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=\left[x\log_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{1}{\ln 2}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1$$

$$=\log_2\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{1}{\ln 2}\left(1-\sqrt{2}\right).$$

Задачите се превземени од книгата
Десет години натпревари по математика, подготвена од П. Димиќ и Е. Бубески