Самоил Малчески
Скопје

ДОКАЖУВАЊЕ НЕРАВЕНСТВА СО РАЗЛОЖУВАЊЕ И СО НЕРАВЕНСТВАТА МЕЃУ СРЕДИНИТЕ (продолжение)

Во [6] се разгледани повеќе задачи, за чие решавање покрај факторизацијата се употребени и неравенствата меѓу средините. Во следните разгледувања, повторно ќе се осврнеме на примената на факторизацијата и основните неравенства меѓу средините, како при докажување на алгебарски, така и на геометриски неравенства.

На почетокот ќе докажеме две неравенства, при што ќе користиме дека квадрат на реален број е ненегативен број и дека збир на квадрати на реални броеви е ненегативен број, а е еднаков на нула ако и само ако сите собирци се еднакви на нула.

Задача 1. Ако $a+b\geq 1$, тогаш $a^4+b^4\geq \frac{1}{8}$. Докажи!

Решение. Од $a+b\geq 1$ следува $(a+b)^2\geq 1$, т.е. $a^2+2ab+b^2\geq 1$. Понатаму, од $(a-b)^2\geq 0$ следува $a^2-2ab+b^2\geq 0$. Ако ги собереме овие неравенства, добиваме

$$a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2\geq 1,$$

т.е. $2a^2+2b^2\geq 1$, од каде следува $a^2+b^2\geq \frac{1}{2}$. Последното неравенство го квадрираме и добиваме $a^4+2a^2b^2+b^4\geq \frac{1}{4}$ и како $a^4-2a^2b^2+b^4\geq 0$, ако ги собереме овие неравенства, го добиваме неравенството $2a^4+2b^4\geq \frac{1}{4}$, кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

Задача 2. Докажи дека за секои реални броеви a,b,c важи

$$a^2+5b^2+8c^2+4\geq 4ab+4bc+8c.$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$a^2+5b^2+8c^2+4-4ab-4bc-8c\geq 0,$$
$$a^2-4ab+4b^2+b^2-4bc+4c^2+4c^2-8c+4\geq 0,$$
$$(a-2b)^2+(b-2c)^2+(2c-2)^2\geq 0.$$

Конечно, последното неравенство очигледно е точно, што значи дека е точно и почетното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $c=1, b=2, a=4$. ■

Задача 3. Нека a,b,c,d се реални броеви такви што $a+d=b+c$. Докажи го неравенството

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c)\geq 0 .$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\begin{aligned}&2ac+2bd-2ad-2bc\geq 0,\\&-d(a-b)+c(a-b)\geq 0,\\&(a-b)(c-d)\geq 0.\end{aligned}$$

Сега, од условот на задачата имаме $a-b=c-d$, па затоа даденото неравенство е еквивалентно со очигледното неравенство:

$$(a-b)^2\geq 0,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b$, што е еквивалентно со $c=d$. ■

Задача 4. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c важи

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geq\frac{3}{4}.$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\begin{aligned}&4a^2(b+c)+4b^2(c+a)+4c^2(a+b)\geq 3(a+b)(b+c)(c+a),\\&a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b\geq 6abc,\\&a(b^2-2bc+c^2)+b(a^2-2ac+c^2)+c(a^2-2ab+b^2)\geq 0,\\&a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\geq 0.\end{aligned}$$

Конечно, последното неравенство очигледно е точно, што значи дека е точно и почетното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ■

Задача 5. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c важи

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\leq 2(a^3+b^3+c^3).$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\le 2(a^3+b^3+c^3),$$
$$2a^3+2b^3+2c^3-a^2b-a^2c-b^2a-b^2c-c^2a-c^2b\ge 0,$$
$$a^2(a-b)+a^2(a-c)+b^2(b-c)+b^2(b-a)+c^2(c-a)+c^2(c-b)\ge 0,$$
$$(a-b)(a^2-b^2)+(b-c)(b^2-c^2)+(c-a)(c^2-a^2)\ge 0,$$
$$(a-b)^2(a+b)+(b-c)^2(b+c)+(c-a)^2(c+a)\ge 0.$$

Конечно, последното неравенство очигледно е точно, што значи дека е точно и почетното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ■

Задача 6. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c важи

$$\sqrt{abc}\left(\tfrac{2}{a+b}+\tfrac{2}{b+c}+\tfrac{2}{c+a}\right)\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ .$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$2\sqrt{abc}((b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)+(a+b)(b+c))\le(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(a+b)(b+c)(c+a),$$
$$\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2(a+b)(a+c)+\sqrt{b}(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2(b+c)(b+a)+\sqrt{c}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(c+a)(c+b)\ge 0.$$

Конечно, последното неравенство очигледно е точно, што значи дека е точно и почетното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ■

Задача 7. Докажи дека за секои реални броеви a,b,c такви што $0<c<b<a$ важи

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}\ . \qquad (1)$$

Решение. Бидејќи за броевите a,b,c важи $0<c<b<a$ можеме да ги воведеме замените $c=x^2, a-c=y^2, b-c=z^2$, $x,y,z>0$. Тогаш $a=x^2+y^2$ $b=x^2+z^2$, па даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$xy+xz\le\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)},$$
$$x^2y^2+x^2z^2+2x^2yz\le x^4+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2,$$
$$0\le x^4-2x^2yz+y^2z^2,$$
$$0\le(x^2-yz)^2.$$

Конечно, последното неравенство очигледно важи за секои x,y,z, па затоа при дадените услови важи и неравенството (1). ■

При решавањето на следните неколку задачи ќе ги користиме неравенствата меѓу средините. Но, прво ќе докажеме неколку равенства и неравенства за средните на два позитивни броја a и b. Да се потсетиме, ако n е природен број и $a_1, a_2, ..., a_n$ се позитивни реални броеви, тогаш нивните средини се определени како што следува:

$A = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$, аритметичка средина,

$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$, геометриска средина,

$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$, хармониска средина,

$K = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}$, квадратна средина,

и за нив се исполнети неравенствата:

$$H \le G \le A \le K ,$$

при што за $a_1 = a_2 = ... = a_n$ сите неравенства преминуваат во равенства.

Задача 8. Докажи дека за средините H, G, A и K на два броја a и b важи:

а) $AH = G^2$, б) $G^2 + K^2 = 2A^2$.

Решение. Имаме:

$$AH = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab = (\sqrt{ab})^2 = G^2 \text{, и}$$

$$G^2 + K^2 = ab + \frac{a^2+b^2}{2} = 2 \cdot \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = 2 \cdot \frac{(a+b)^2}{2^2} = 2(\frac{a+b}{2})^2 = 2A^2 . \blacksquare$$

Задача 9. Докажи дека за средините H, G, A и K на два броја a и b важи:

а) $KG \le A^2$, б) $K + G \le 2A$,

в) $2G \le A + H$, г) $2K + H \le 3A$.

Решение. а) Од $G^2 + K^2 = 2A^2$ следува

$$A^2 - KG = \frac{G^2+K^2}{2} - KG = \frac{(K-G)^2}{2} \ge 0 \text{, т.е. } KG \le A^2 .$$

б) Имаме:

$$(K+G)^2 = K^2 + 2KG + G^2 = 2A^2 + 2KG \le 2A^2 + 2A^2 = 4A^2 = (2A)^2 ,$$

па затоа $K + G \le 2A$.

в) Од равенството $AH=G^2$ и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина применето на броевите A и H следува

$$(A+H)^2 \ge 4AH = 4G^2 \text{, т.е. } 2G \le A+H \;.$$

г) Од неравенството меѓу аритметиката и геометриската средина применето на броевите A и $2A-H$, и од равенствата $G^2+K^2=2A^2$ и $AH=G^2$, последователно добиваме

$$\tfrac{A+2A-H}{2} \ge \sqrt{A(2A-H)}, \qquad (\tfrac{3A-H}{2})^2 \ge 2A^2 - AH,$$

$$(\tfrac{3A-H}{2})^2 \ge G^2+K^2-G^2, \qquad (\tfrac{3A-H}{2})^2 \ge K^2,$$

$$\tfrac{3A-H}{2} \ge K, \qquad 2K+H \le 3A,$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 10. Докажи дека за срединитe H, G, A и K на два броја a и b важи:

а) $K+H \ge A+G$, б) $KH \le AG$.

Решение. а) Од $K-G \ge 0$ и $K+G \le 2A$, $AH=G^2$ и $G^2+K^2=2A^2$ следува

$$(K+G)(K-G) \le 2A(K-G),$$
$$K^2-G^2 \le 2AK-2AG,$$
$$K^2+2AG+G^2 \le 2AK+2G^2,$$
$$2A^2+2AG \le 2AK+2AH,$$
$$2A(A+G) \le 2A(K+H),$$
$$A+G \le K+H.$$

б) Ако искористиме дека $AH=G^2$ и $KG \le A^2$, последователно добиваме

$$HK = \tfrac{AHK}{A} = \tfrac{G^2K}{A} = \tfrac{KG}{A}\cdot G \le \tfrac{A^2}{A}\cdot G = AG \;. \text{ ■}$$

Задача 11. Нека $a,b,c \ge 0$. Докажи дека важи

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc \;.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a+b \ge 2\sqrt{ab} \;,\; b+c \ge 2\sqrt{bc} \text{ и } c+a \ge 2\sqrt{ca} \;.$$

Ако ги помножиме овие неравенства, добиваме

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8\sqrt{(abc)^2} = 8abc .$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ■

Задача 12. Нека $a,b>0$ се такви што $a+b=1$. Докажи дека

$$(1+\tfrac{1}{a})(1+\tfrac{1}{b}) \ge 9 .$$

Решение. Од, $a+b \ge 2\sqrt{ab}$ и условот на задачата следува $2\sqrt{ab} \le 1$, односно $4ab \le 1$. Значи, $\frac{1}{ab} \ge 4$, па затоа

$$(1+\tfrac{1}{a})(1+\tfrac{1}{b}) = 1+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{ab} = 1+\tfrac{a+b}{ab}+\tfrac{1}{ab} = 1+\tfrac{2}{ab} \ge 1+2\cdot 4 = 9 .$$

Јасно,знак за равенство важи ако и само ако $a=b=\frac{1}{2}$. ■

Задача 13. Докажи дека за секои позитивни реални броеви x и y важи

$$x^4+y^3+x^2+y+1 \ge \tfrac{9}{2}xy .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $x^4+1 \ge 2x^2$ и $y^3+y \ge 2y^2$. Понатаму, од овие две неравенства, со повторна примена на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и неравенството $\sqrt{6} > \frac{9}{4}$, добиваме

$$\begin{aligned} x^4+y^3+x^2+y+1 &= (x^4+1)+(y^3+y)+x^2 \ge 2x^2+2y^2+x^2 \\ &= 3x^2+2y^2 \ge 2\sqrt{3x^2\cdot 2y^2} \\ &= 2\sqrt{6}xy > 2\cdot\tfrac{9}{4}xy = \tfrac{9}{2}xy, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 14. Нека a,b,c се позитивни броеви такви што $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Докажи дека

$$a+b+c \ge 9 .$$

Решение. *Прв начин*. Од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина за позитивните броеви a,b,c и условот $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ следува

$$\tfrac{a+b+c}{3} \ge \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = 3, \text{ т.е. } a+b+c \ge 9 .$$

Јасно,знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=3$.

Втор начин. Од условот на задачата и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a+b+c=(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=3+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})$$

$$\geq 3+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}=3+2+2+2=9.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=3$. ■

Задача 15 (неравенство на Несбит). Докажи дека за позитивните реални броеви a,b,c важи

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Решение. *Прв начин*. Да ставиме $b+c=x, c+a=y, a+b=z$. Ако ги собереме овие равенства, добиваме

$$x+y+z=2(a+b+c)\text{, т.е. } x+y+z=2(a+x),$$

од каде наоѓаме $a=\frac{y+z-x}{2}$. Аналогно се добива $b=\frac{x+z-y}{2}$ и $c=\frac{x+y-z}{2}$. Според тоа,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{y+z-x}{2x}+\frac{x+z-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}$$

$$=\frac{1}{2}((\frac{y}{x}+\frac{x}{y})+(\frac{y}{z}+\frac{z}{y})+(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}))-\frac{3}{2}$$

$$\geq\frac{1}{2}(2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}+2\sqrt{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{y}}+2\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}})-\frac{3}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(2+2+2)-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$,т.е. ако и само ако $a=b=c$.

Втор начин. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1\geq\frac{9}{2},$$

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\geq\frac{9}{2},$$

$$(a+b+c)(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{9}{2},$$

$$(2a+2b+2c)(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq 9,$$

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}}.$$

Но последното неравенство всушност е неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина за броевите $a+b,b+c,c+a$ што значи дека е точно, па заоа е точно и почетното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a+b=b+c=c+a$, т.е. ако и само ако $a=b=c$. ■

Задача 16. Докажи дека за позитивните реални броеви a,b,c важи

$$a(a-\sqrt{bc})+b(b-\sqrt{ca})+c(c-\sqrt{ab})\geq 0.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $-\frac{x+y}{2}\leq -\sqrt{xy}$ за секои позитивни реални броеви x,y, па затоа важи

$$\begin{aligned}a(a-\sqrt{bc})+b(b-\sqrt{ca})+c(c-\sqrt{ab}) &\geq a(a-\tfrac{b+c}{2})+b(b-\tfrac{c+a}{2})+c(c-\tfrac{a+b}{2})\\ &=a^2+b^2+c^2-\tfrac{ab+ac+bc+ba+ca+cb}{2}\\ &=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\\ &=\tfrac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)\geq 0,\end{aligned}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ■

Задача 16. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{a-1}{b+1}+\frac{b-1}{c+1}+\frac{c-1}{a+1}\geq 0.$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$(a+1)(b^2-1)+(b+1)(c^2-1)+(c+1)(a^2-1)\geq 0,$$

$$ab^2+bc^2+ca^2+a^2+b^2+c^2-a-b-c\geq 3,$$

$$ab^2+bc^2+ca^2+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+a+b+c\geq 6. \qquad (1)$$

Но,

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq 0$$

и како $abc=1$ од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина на шест позитивни броја добиваме

$$ab^2+bc^2+ca^2+a+b+c\geq 6\sqrt[6]{ab^2\cdot bc^2\cdot ca^2\cdot a\cdot b\cdot c}=6\sqrt[6]{(abc)^4}=6\sqrt[6]{1^4}=6.$$

Ако ги собереме последните две неравенства, го добиваме неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$. ■

Задача 17. Нека $n>1$ е природен број и $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви такви што

$$a_1a_2 = a_2a_3 = ... = a_{n-1}a_n = a_na_1 = 1.$$

Докажи дека

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq n.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот на задачата следува

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 &= \tfrac{a_1^2+a_2^2}{2} + \tfrac{a_2^2+a_3^2}{2} + ... + \tfrac{a_{n-1}^2+a_n^2}{2} + \tfrac{a_n^2+a_1^2}{2} \\ &\geq \sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_2a_3} + ... + \sqrt{a_{n-}a_n} + \sqrt{a_na_1} \\ &= \underbrace{1+1+...+1+1}_{n} = n. \end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$. ■

Задача 18. Нека $n > 1$ е природен број, $a_1, a_2, ..., a_n$ се позитивни реални броеви и $a_1 + a_2 + ... + a_n = M$. Докажи дека

$$\frac{a_1}{M-a_1} + \frac{a_2}{M-a_2} + ... + \frac{a_n}{M-a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Решение. Прво дадениот израз на левата страна на неравенството го трансформираме, а потоа од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина применето на броевите $\frac{M}{M-a_1}, \frac{M}{M-a_2}, ..., \frac{M}{M-a_n}$ добиваме

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{M-a_1} + \frac{a_2}{M-a_2} + ... + \frac{a_n}{M-a_n} &= \frac{M-(M-a_1)}{M-a_1} + \frac{M-(M-a_2)}{M-a_2} + ... + \frac{M-(M-a_n)}{M-a_n} \\ &= \frac{M}{M-a_1} + \frac{M}{M-a_2} + ... + \frac{M}{M-a_n} - n \\ &\geq \frac{n^2}{\frac{M-a_1}{M} + \frac{M-a_2}{M} + ... + \frac{M-a_n}{M}} - n = \frac{n^2M}{nM-(a_1+a_2+...+a_n)} - n \\ &= \frac{n^2}{n-1} - n = \frac{n}{n-1}. \end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\frac{M}{M-a_1} = \frac{M}{M-a_2} = ... = \frac{M}{M-a_n}$, т.е. ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n = \frac{M}{n}$. ■

Во следните неколку задачи ќе се осврнеме на примената на претходно разгледаните методи при докажување на некои геометриски неравенства.

Задача 19. Нека a и b се должините на катетите, а c е должината на хипотенузата на правоаголен триаголник. Докажи дека важи

$$(1+\tfrac{c}{a})(1+\tfrac{c}{b})\ge 3+2\sqrt{2}\,.$$

Решение. Од Питагоровата теорема и неравенствата меѓу аритметичката и геометриската средина имаме:

$$\begin{aligned}(1+\tfrac{c}{a})(1+\tfrac{c}{b}) &= \frac{(a+c)(b+c)}{ab} = \frac{ab+c(a+b)+c^2}{ab}\\ &\ge 1+\frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{ab}+\frac{a^2+b^2}{ab}\\ &\ge 1+\frac{2\sqrt{ab}\cdot\sqrt{2\sqrt{a^2b^2}}}{ab}+\frac{2\sqrt{a^2b^2}}{ab}\\ &= 1+\frac{2\sqrt{2}\sqrt{ab}^2}{ab}+\frac{2ab}{ab}\\ &= 3+2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b$, т.е. ако и само ако триаголникот е рамнокрак правоаголен. ■

Задача 20. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник. Докажи дека важи

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\,.$$

Решение. Јасно, $a+b-c>0, b+c-a>0$ и $c+a-b>0$. Сега, од неравенството меѓу аритметилката и квадратната средина следува

$$\begin{aligned}&\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}=\\ &=\frac{\sqrt{c+a-b}+\sqrt{a+b-c}}{2}+\frac{\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}}{2}+\frac{\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}}{2}\\ &\le\sqrt{\frac{\sqrt{c+a-b}^2+\sqrt{a+b-c}^2}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{a+b-c}^2+\sqrt{b+c-a}^2}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{b+c-a}^2+\sqrt{c+a-b}^2}{2}}\\ &=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.\end{aligned}$$

Јасно,знак за равенство важи ако и само ако

$$\sqrt{a+b-c}=\sqrt{b+c-a}=\sqrt{c+a-b}\,,$$

т.е. ао и само ако $a=b=c$. ■

Задача 21. Даден е квадар кај кој должината на просторната дијагонала е еднаква на m. Определи ја најголемата можна плоштина на овој квадар.

Решение. Нека должините на рабовите на квадарот се a,b и c. Тогаш ако го искористиме неравенството $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$, кое важи за секои реални броеви x,y,z, за плоштината на квадарот добиваме

$$P = 2(ab + bc + ca) \le 2(a^2 + b^2 + c^2) = 2m^2 .$$

Според тоа, плоштината на квадарот е помала или еднаква на $2m^2$ и таа е еднаква на $2m^2$ ако и само ако $a = b = c$, т.е. ако и само ако квадарот е коцка со раб $a = \frac{m}{\sqrt{3}}$. ■

Задача 22. Квадар и коцка имаат еднакви волумени. Докажи дека коцката има помала плоштина од квадарот.

Решение. Нека должините на рабовите на квадарот се a,b,c. Тогаш неговиот волумен е еднаков на $V = abc$ и тој е еднаков на волуменот на коцката, што значи дека за должината на работ на коцката важи $m^3 = abc$, т.е. $m = \sqrt[3]{abc}$. Значи, плоштината на коцката е $P = 6\sqrt[3]{(abc)^2}$, а плоштината на квадарот е $P' = 2(ab + bc + ca)$. Сега, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$P' = 2(ab + bc + ca) \ge 2 \cdot 3\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)} = 6\sqrt[3]{(abc)^2} = P ,$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 23. Квадар и коцка имаат еднакви плоштини. Докажи дека квадарот има помал волумен од коцката.

Решение. Нека должините на рабовите на квадарот се a,b,c, а должината на работ на коцката е m. Од условот на задачата следува равенството $3m^2 = ab + bc + ca$. Тогаш волуменот на квадарот е $V = abc$, а волуменот на коцката е $V' = m^3$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$V = abc = \sqrt{(ab)(bc)(ca)} \le \sqrt{(\tfrac{ab+bc+ca}{3})^3} = \sqrt{(\tfrac{3m^2}{3})^3} = m^3 = V' ,$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 24. Даден е квадар со рабови a,b,c и просторна дијагонала D. Докажи дека

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \ge abcD\sqrt{3} .$$

Решение. Од претходно докажаното неравенство

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$$

следува неравенството

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx).$$

Ако во последното неравенство ставиме $x=(ab)^2, y=(bc)^2, z=(ca)^2$ и иакористиме дека $a^2+b^2+c^2=D^2$, го добиваме неравенството

$$\begin{aligned}((ab)^2+(bc)^2+(ca)^2)^2 &\geq 3((ab)^2(bc)^2+(bc)^2(ca)^2+(ca)^2(ab)^2) \\ &= 3a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2) \\ &= 3a^2b^2c^2D^2,\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството кое требаше да го докажеме. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$, т.е. ако и само ако квадарот е коцка. ■

Задачи за самостојна работа

1. Нека $0<b<a$ и $ab=1$. Докажи дека
$$\frac{a^2+b^2}{a-b} \geq 2\sqrt{2}.$$
2. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи дека
$$ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}.$$
3. Ако $x>-1$, докажи дека
$$\frac{x+x^2+x^3+x^4}{1+x^5} \leq 2.$$
4. Нека a,b,c се реални броеви такви што $ab+bc+ca=1$. Докажи дека
$$a^2+b^2+c^2 \geq 1.$$
5. Нека $a \geq 0$. Докажи дека
$$a^3+2 \geq a^2+2\sqrt{a}.$$
6. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a \leq b \leq c$. Докажи дека
$$c^2-b^2+a^2 \geq (c-b+a)^2.$$
7. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c важи
$$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2) \geq 6abc.$$
8. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека
$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

9. Докажи дека за секои реални броеви a,b важи

$$(a^2+b^2)(a^4+b^4)\geq(a^3+b^3)^2 .$$

10. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи дека

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3} .$$

11. Нека $a,b,c\geq1$. Докажи дека

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}<\sqrt{c(ab+1)+1} .$$

12. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Докажи дека

$$(a-1)(b-1)(c-1)\geq8 .$$

13. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=3$. Докажи дека

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2} .$$

14. Нека $n>1$ е природен број и $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_1+a_2+...+a_n=1$. Докажи дека

$$\frac{a_1}{2-a_1}+\frac{a_2}{2-a_2}+...+\frac{a_n}{2-a_n}\geq\frac{n}{2n-1} .$$

15. Нека $n>1$ е природен број и $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_1+a_2+...+a_n=1$. Докажи дека

$$(a_1+\frac{1}{a_1})^2+(a_2+\frac{1}{a_2})^2+...+(a_n+\frac{1}{a_n})^2\geq\frac{(1+n^2)^2}{n} .$$

16. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи дека

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}\leq\frac{3}{2} .$$

17. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc\leq1$. Докажи дека

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq a+b+c .$$

18. Нека $x,a,b,c,d,e,f>0$ и $a+b+c+d+e+f=9$. Докажи дека

$$\frac{x^{a-b}}{a+b}+\frac{x^{b-c}}{b+c}+\frac{x^{c-d}}{c+d}+\frac{x^{d-e}}{d+e}+\frac{x^{e-f}}{e+f}+\frac{x^{f-a}}{f+a}\geq2 .$$

19. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=3$. Докажи дека

$$\frac{a^4+3ab^3}{a^3+2b^3}+\frac{b^4+3bc^3}{b^3+2c^3}+\frac{c^4+3ca^3}{c^3+2a^3}\leq 4\,.$$

20. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}$. Докажи дека

$$\frac{1-a^2+c^2}{c(a+2b)}+\frac{1-b^2+a^2}{a(b+2c)}+\frac{1-c^2+b^2}{b(c+2a)}\geq 6\,.$$

21. Дали постои квадар со волумен $0{,}4\,m^3$ таков што збирот на неговите рабови е еднаков на $8\,m$.
22. Докажи дека за плоштината P и волуменот V на секој квадар важи $P^3\geq 216V^2$.
23. Даден е квадар со рабови a,b,c и просторна дијагонала D. Докажи дека

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(a+b+c)\leq D<a+b+c\,.$$

24. Даден е квадар со рабови a,b,c и плоштина P. Докажи дека

$$P\leq \frac{2}{3}(a+b+c)^2\,.$$

Литература

1. Arslanagić, Š., Zubović, D., Neke nejednakosti kvadra, Matka, 120, 2020/2021
2. Milošević, D., O brojevnim sredinama za dva pozitivna broja, Matka, 114, 2020/2021
3. Palman, D., Stereometrija, Element, Zagreb, 2005
4. Малчески, Р., Неравенства меѓу средините и пресметување квадратен корен од позитивен број, Нумерус (Математички талент), Скопје
5. Малчески, Р., Примена на неравенствата меѓу средините во геометријата, Математички, талент, Скопје, 2023
6. Малчески, С., Докажување неравенства со разложување и со примена на неравенствата меѓу средините, Математички талент, 2023
7. Тошић, Р., Основна својства неједнакости и примене у решавању задатака, Математички лист (Математички талент), Београд (Скопје)
8. Цветковски, З., Основни неравенства и нивна примена, Нумерус (Математички талент), Скопје