Četiri jednakosti za pravilni petnaesterokut

Dragoljub Milošević[1]

U MFL 3/263 (2015/16), str. 165 – 171, prikazano je šest načina dokazivanja sljedećeg poučka: *U pravilnom petnaesterokutu* $A_0A_1\dots A_{14}$ *vrijedi jednakost*

$$\frac{1}{|A_0A_1|}=\frac{1}{|A_0A_2|}+\frac{1}{|A_0A_4|}+\frac{1}{|A_0A_7|}.$$

Prikazat ćemo još jedan dokaz ove jednakosti, ali i po jedan dokaz još tri jednakosti za pravilni petnaesterokut.

Promatrajmo pravilni petnaesterokut $ABCDEFGHKLMNPQR$.

Središnji kut nad stranicom tog mnogokuta je $360^\circ : 15 = 24^\circ$, odgovarajući obodni kut iznosi $24^\circ : 2 = 12^\circ$, a unutarnji kut $180^\circ - 24^\circ = 156^\circ$. Uvedimo oznake $|AB| = a$, $|AC| = b$, $|AD| = c$, $|AE| = d$, $|AF| = e$, $|AG| = f$ i $|AH| = g$. Tada vrijede sljedeće jednakosti:

$$f - d = a, \tag{1}$$

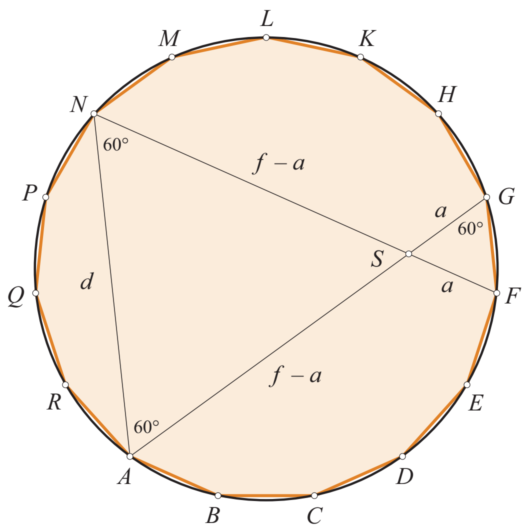
$$\frac{a}{g}+\frac{c}{d}=1, \tag{2}$$

$$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}=1, \tag{3}$$

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{d}+\frac{1}{g}=\frac{1}{a}. \tag{4}$$

Dokaz.

1) Točku sjecišta dijagonala $\overline{AG}$ i $\overline{FN}$ obilježimo sa S (slika 1).

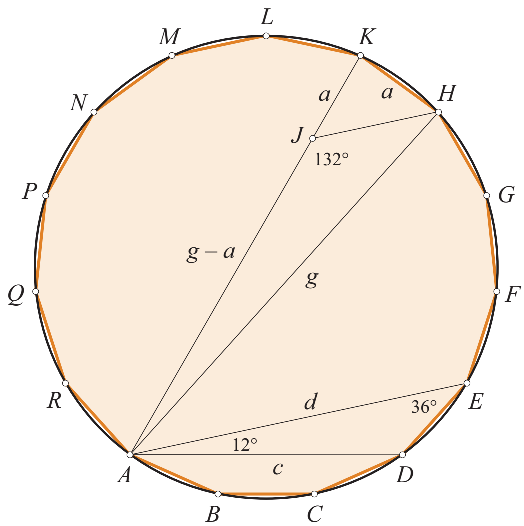


Slika 1.

[1] Profesor je u mirovini u srednjoj školi u Gornjem Milanovcu.

S obzirom na to da je $\sphericalangle SFG = \sphericalangle SGF = 60^\circ$, znači da je trokut FGS jednakostranični. Kako je $|FS| = |GS| = a$, slijedi $|AS| = |NS| = f - a$. Trokut ASN je također jednakostranični, pa je $|AS| = |SN| = |NA|$. Kako je $|AS| = f - a$, $|AN| = d$ i $|AS| = |NA|$, zaključujemo da je $f - a = d$, odnosno $f - d = a$, tj. vrijedi jednakost (1).

2) Na dijagonali $\overline{AK}$ odredimo točku J tako da bude $|KJ| = |HK| = a$. Tada je $|AJ| = g - a$ (slika 2).

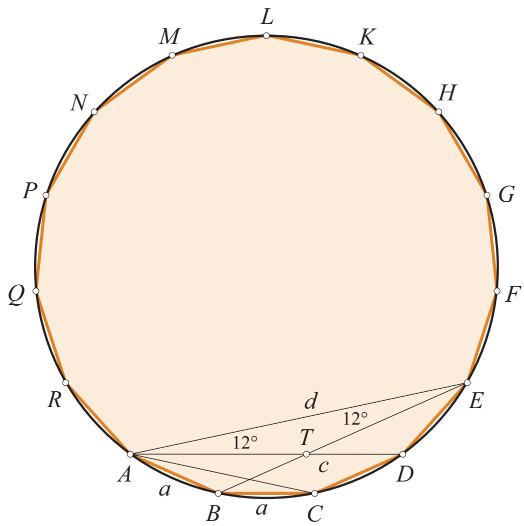


Slika 2.

U jednakokračnom trokutu AHK ($|AH| = |AK| = g$) je $\sphericalangle AHK = \sphericalangle AKH = (180^\circ - 12^\circ) : 2 = 84^\circ$, a u jednakokračnom trokutu HKJ ($|KJ| = |HK| = a$) imamo: $\sphericalangle KHJ = \sphericalangle KJH = (180^\circ - 84^\circ) : 2 = 48^\circ$. Tada je $\sphericalangle AHJ = 84^\circ - 48^\circ = 36^\circ$ i $\sphericalangle AJH = 180^\circ - (12^\circ + 36^\circ) = 132^\circ$.

U trokutu ADE je $\sphericalangle DAE = 12^\circ$ (obodni kut nad stranicom $\overline{DE}$ pravilnog 15-erokuta) i $\sphericalangle AED = 3 \cdot 12^\circ = 36^\circ$ (kut nad petinom kružnice opisane oko danog mnogokuta), pa je u trokutu ADE: $\sphericalangle ADE = 180^\circ - (12^\circ + 36^\circ) = 132^\circ$. Stoga zaključujemo da trokuti ADE i AJH imaju sukladne kutove, pa su slični. Radi toga slijedi $d : c = g : (g - a)$, odnosno $dg - ad = cg$. Odavde, nakon dijeljenja s dg, dobivamo $1 - \frac{a}{g} = \frac{c}{d}$ tj. $\frac{a}{g} + \frac{c}{d} = 1$.

3) Točku presjeka dijagonala $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ obilježimo s T (slika 3). U trokutu ATE kutovi $\sphericalangle TAE$ i $\sphericalangle AET$ su jednaki 12°, jer su to obodni kutovi nad stranicom pravilnog 15-terokuta. Kako je u trokutu ATE, $\sphericalangle ATE = 180^\circ - 2 \cdot 12^\circ = 156^\circ$, imamo $\sphericalangle DTE = 180^\circ - 156^\circ = 24^\circ$. S obzirom da je $\sphericalangle TDE = 11 \cdot 12^\circ = 132^\circ$ (obodni kut nad $\frac{11}{15}$ kružnice opisane oko danog mnogokuta), u trokutu DET je $\sphericalangle DET = 180^\circ - (132^\circ + 24^\circ) = 24^\circ = \sphericalangle DTE$, što znači da je trokut DET jednakokračni, tj. $|DT| = |DE| = a$. Tada je $|AT| = c - a$. Jednakokračni trokuti ABC i ATE su slični, jer imaju sukladne kutove. Iz te sličnosti slijedi $|AC| : |AB| = |AE| : |AT|$, ili $b : a = d : (c - a)$, odnosno $ad = b(c - a)$, tj. $bc - ad = ab$. Odavde, nakon dijeljenja s ab, dobivamo traženu jednakost (3).



Slika 3.

4) Iz dokazanih jednakosti (2) i (3) dobivamo njima ekvivalentne: $dg - ad = cg$ i $bc = ab + ad$. Iz prve je $d(g-a) = cg$ tj.

$$\frac{g-a}{g} = \frac{c}{d}. \tag{5}$$

Iz druge imamo $a(b+d) = bc$, ili

$$\frac{a(b+d)}{bd} = \frac{c}{d}. \tag{6}$$

Iz jednakosti (5) i (6) dobivamo $\dfrac{g-a}{g} = \dfrac{a(b+d)}{bd}$. Odavde je $1 - \dfrac{a}{g} = \dfrac{a(b+d)}{bd}$ ili $1 = \dfrac{a}{g} + \dfrac{a(b+d)}{bd}$. Ako posljednju jednakost podijelimo s a, imamo: $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{g} + \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{b}$, tj. vrijedi (4).

Napomena. Prve tri jednakosti mogu se dokazati i primjenom Ptolemejevog teorema za tetivni četverokut.