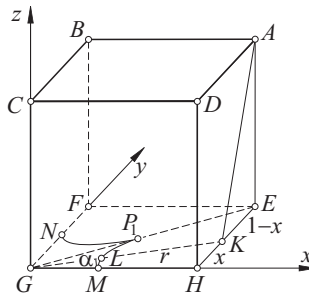


Pauk u sobi

Željko Hanjš, Zagreb

Pauk se nalazi u jednom kutu posude oblika kocke, brida duljine 1 cm. Može se gibati po zidovima brzinom 1 cm/s. Nađite geometrijsko mjesto točaka unutar kocke do kojih pauk može doći za dvije sekunde.

Pretpostavimo da pauk kreće iz kuta A kocke $ABCDEFGH$. Radi simetrije dovoljno je odrediti jednadžbu luka \widehat{PM} , npr. na podu kutije, unutar trokuta EGH , do koje može doći za dvije sekunde. Postavimo Kartezijev koordinatni sustav s vrhom u točki G . Pauk će biti prikazan točkom. On ne može doći unutar područja GMP . Da bi došao najdalje, mora ici iz vrha A do brida \overline{HE} , tj. do točke K . Neka je $\angle KGH = \alpha$. Da bi došao do najudaljenije točke, mora se po svakoj strani gibati po pravcu. Pretpostavimo da se gibao po dužini \overline{AK} i zatim po pravcu KG do točke L .



Ako je $x = |HK|$, a kako je $|GH| = 1$, dobivamo $x = \operatorname{tg} \alpha$. Sada redom dobivamo:

$$|AK| = \sqrt{1 + (1-x)^2} = \sqrt{1 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2},$$

$$|GK| = \sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$|KL| = 2 - |AK| = 2 - \sqrt{1 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2},$$

$$r = |GL| = |GK| - |KL| = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sqrt{1 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2} - 2,$$

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}.$$

Ovo je jednadžba luka \widehat{PM} u polarnim koordinatama.

$$\text{Za } \alpha = 0 \text{ je } r = \sqrt{2} - 1,$$

$$\text{za } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ je } r = \sqrt{2} - 1,$$

$$\text{za } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} \text{ je } r \leq \sqrt{2} - 1. \quad (*)$$

Lako se provjeri nejednakost (*).

Uz pretpostavku $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sqrt{1 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2} - 2$ dobivamo $\operatorname{tg} \alpha < 1$, a kako je ova nejednakost ispunjena za $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$, vrijedi i gornja nejednakost. Pauk može doći do svih točaka za koje je $r \geq \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sqrt{1 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2} - 2$, i simetrično na ostala područja.