Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија

Др Павле Младеновић

ЈЕДНА МАТЕМАТИЧКА ИГРА

Постоје различите игре у којима су главни „реквизити“ жетони, новчићи, палидрвца, ... У таквим играма могу учествовати један или више играча. У њима се обично захтева да се премештањем фигура добије нека конфигурација фигура или да се противник доведе у ситуацију да не може одиграти потез итд. Описаћемо овде једну игру у којој учествују два играча.

На неколико гомила налазе се жетони. Први и други играч наизменично повлаче потезе. Сваки потез се састоји у следећем: Играч бира једну гомилу жетона и са ње узима произвољан број жетона. Побеђује онај играч који последњи узме жетон.

Описана игра зове се *ним*. Наравно, поставља се питање који играч у конкретној ситуацији побеђује и како треба да игра да би ту победу остварио? Размотримо прво неколико примера.

Пример 1. Дате су две гомиле жетона, при чему се на првој налази пет, а на другој седам жетона. У овом случају први играч побеђује на следећи начин: у првом потезу он узима са друге гомиле два жетона, тако да после тога остану две гомиле са по пет жетона. У другом потезу други играч узима са једне од гомила известан број жетона и онда се на тим двема гомилама налазе различити бројеви жетона (на једној можда ниједан). У трећем потезу први играч игра опет тако да се после његовог потеза на гомилама налазе једнаки бројеви жетона. Ако први играч настави са овом стратегијом (после сваког његовог потеза на гомилама се налазе једанки бројеви жетона), он побеђује у игри после коначног броја потеза.

[1] Blaise Pascal (1623–1662), француски математичар

Пример 2. Нека су дате две гомиле жетона, при чему се на свакој налази осам жетона. Сада играч који први узима жетоне нарушава једнакост бројева жетона на гомилама, па други играч може (поступајући као први у претходном примеру) победити независно од потеза првог.

Пример 3. Нека су дате три гомиле жетона, при чему се на првим двема налазе по пет, а на трећој осам жетона. У овом случају први играч у првом потезу узима свих осам жетона са треће гомиле, после чега опет остају две гомиле са једнаким бројем жетона и, већ знамо, то је ситуација у којој губи играч који повлачи следећи потез.

Почетне позиције у примерима 1, 2 и 3 означимо редом са $(5,7)$, $(8,8)$, $(5,5,8)$. При томе, позиције $(5,7)$ и $(5,5,8)$ су добијене за првог играча, а позиција $(8,8)$ је добијена за другог играча.

Пример 4. Нека су дате три гомиле при чему се на првој налази осам, на другој 13 и на трећој 15 жетона. Ову позицију означавамо са $(8,13,15)$. Који од играча добија игру у овом случају и како треба да игра да би добио?

Правилна игра у овом случају је мало компликованија и зато предлажемо да пре наставка читања овог текста одиграте неколико партија игре из примера 4 са својим другом или другарицом.

Декадни запис бројева. За записивање природних бројева обично користимо *декадни систем*, који још зовемо и системом са основом 10. Прва цифра (гледано с десна на лево) је цифра јединица. Следећа цифра је цифра десетица, трећа цифра је цифра стотица итд. На пример, бројеве 57 и 328 можемо представити у облику

$$57 = 5 \cdot 10 + 7, \qquad 328 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8.$$

Напоменимо још да се у декадном систему записивања бројева користи десет цифара: $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Бинарни запис бројева. Осим декадног система користе се и други системи записивања бројева. Један од њих је *бинарни систем* (каже се и систем са основом 2). У њему се бројеви записују само помоћу две цифре — нуле и јединице. Разлика у односу на декадни систем је у томе што цифре гледано с десна на лево означавају редом број јединица, број двојки, број четворки итд. Да бисмо назначили да је, на пример, 1101 неки број записан у бинарном систему (а не број хиљаду сто један), користићемо ознаку 1101_2. При томе је

$$1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 = 13,$$

тј. 1101_2 је бинарни запис броја 13.

А како природан број који је записан у декадном систему записати у бинарном систему записивања бројева? Треба га представити у облику збира степена двојке. На пример,

$$\begin{aligned} 8 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 1000_2, \\ 13 &= 8 + 4 + 1 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 1101_2, \\ 15 &= 8 + 4 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 1111_2. \end{aligned}$$

Вратимо се сада примеру 4 и позицији жетона $(8, 13, 15)$. Претпоставимо да први играч узима са треће гомиле десет жетона, после чега се добија позиција $(8, 13, 5)$. Запишимо следеће две табеле које се односе на позиције $(8, 13, 15)$ и $(8, 13, 5)$.

8	...	1	0	0	0
13	...	1	1	0	1
15	...	1	1	1	1
		1	0	1	0

8	...	1	0	0	0
13	...	1	1	0	1
5	...	0	1	0	1
		0	0	0	0

У прве три врсте тих табела налазе се декадни и бинарни записи бројева који одређују позиције $(8, 13, 15)$ и $(8, 13, 5)$. Бројеви који су записани у четвртој врсти и прве и друге табеле одређени су на следећи начин. Разматра се посебно свака колона цифара у бинарном запису бројева. Испод колоне се уписује цифра 0, ако у тој колони има паран број јединица, а цифра 1, ако у тој колони има непаран број јединица. Тако је у четвртој врсти добијен неки природан број у бинарном запису. Тај број називамо *карактеристиком* одговарајуће позиције. Према томе, карактеристика позиције $(8, 13, 15)$ је број $1010_2 = 10$, а карактеристика позиције $(8, 13, 5)$ једнака је нули.

Може се доказати да важе следећа два тврђења:

(1) *Играч који је на потезу у позицији чија је карактеристика различита од нуле, може одиграти потез, тако да добије позицију чија је карактеристика једнака нули.*

(2) *Ма како играо играч који је на потезу у позицији чија је карактеристика једнака нули (и на гомилама има жетона), добиће се позиција чија је карактеристика различита од нуле.*

Како је карактеристика позиције $(8, 13, 15)$ различита од нуле, први треба да игра тако да се после сваког његовог потеза добије позиција са карактеристиком нула. Пошто се у сваком потезу узима бар један жетон, то ће после неколико потеза бити покупљени сви жетони, а то је позиција чија је карактеристика очигледно једнака нули. При томе, последњи потез повукао је први играч. Другим речима, позиција $(8, 13, 15)$ добијена је за играча који први игра. (Позиција $(8, 13, 5)$ изгубљена је за играча који у тој позицији први игра.)

Рецимо, ако други играч у позицији $(8, 13, 5)$ узме седам жетона са друге гомиле добиће се позиција $(8, 6, 5)$. Тада први играч треба да у следећем потезу узме пет жетона са прве гомиле, тако да се добије позиција $(3, 6, 5)$. Одредимо карактеристике ових позиција:

8	...	1	0	0	0		3	...	0	1	1
6	...	0	1	1	0		6	...	1	1	0
5	...	0	1	0	1		5	...	1	0	1
		1	0	1	1				0	0	0

Позиција $(8, 6, 5)$ има карактеристику различиту од нуле, а позиција $(3, 6, 5)$ има карактеристику једнаку нули.

Напоменимо да описана стратегија игре води једног од играча до победе и у случајевима када у почетној позицији има више од три гомиле жетона.

Задаци

1. Записати у декадном систему следеће бројеве:

(а) 1001_2, (б) 1011_2, (в) 110010_2, (г) 1011101_2.

2. Записати у бинарном систему следеће бројеве:

(а) 3, (б) 12, (в) 45, (г) 155.

3. Докажите да су следеће позиције у ним игри изгубљене за играча који први вуче потез:

(а) $(1, 2, 3)$, (б) $(1, 4, 5)$, (в) $(1, 6, 7)$, (г) $(2, 4, 6)$.

4. Докажите да су следеће позиције у ним игри добијене за играча који први вуче потез:

(а) $(1, 2, 4)$, (б) $(1, 3, 5)$, (в) $(1, 4, 7)$, (г) $(2, 3, 6)$.