

XI ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2024

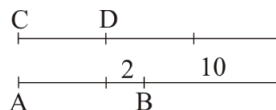
IV одделение

1. Во еден селски двор пасат кокошки и овци. Овците и кокошките заедно имаат вкупно 40 глави и 130 нозе. Колку овци и колку кокошки има во дворот?

Решение. Сите 40 животни имаат барем по 2 нозе, што е вкупно 80 нозе. Остануваат $130 - 80 = 50$ нозе кои ќе се поделат по 2 на 25 овци. Така, 25 животни се овци, а $40 - 25 = 15$ се кокошки.

2. Должината на отсечката AB е за 2 cm поголема од должината на отсечката CD . Ако должината на отсечката AB се зголеми за 10 cm , а должината на отсечката CD се зголеми три пати, тогаш ќе се добијат еднакви отсечки. Колкави се должините на отсечките AB и CD , пред зголемувањето?

Решение. Цртежот десно е нацртан според условите на задалата. Од цртежот е јасно дека кога отсечката CD ќе ја зголемиме три пати, тогаш таа се зголемила за двојната вредност од нејзината должина. Тоа зголемување изнесува $2 + 10 = 12\text{ cm}$, од каде за должината на CD се добива $12 : 2 = 6\text{ cm}$. Според тоа отсечката AB има должина од $6 + 2 = 8\text{ cm}$.



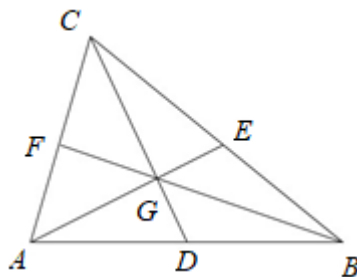
3. Ива ги преброила парите во својата касичка и рекла: „Ако ги заокружам на најблиската стотка, имам околу 5700 денари.“ Бојан точно ја заокружил својата заштеда на најблиската илјадарка и рекол: „Имам околу 6 илјади денари во касичката.“ Дали е можно Ива да има повеќе пари во својата касичка од што има Бојан во својата? Објасни го прецизно својот одговор.

Решение. Броевите што се заокружуваат на бројот 5700 при заокружување на најблиската стотка се броевите: 5650, 5651, 5652, ..., 5748, 5749. Броевите што се заокружуваат на бројот 6000 при заокружување на најблиската илјадарка се броевите: 5500, 5501, 5502, ..., 6498, 6499. Според тоа, можно е Ива да има повеќе пари од Бојан и тоа кога Бојан има меѓу 5500 и 5649 денари.

4. Именувај ги сите триаголници на цртежот.

Решение. На цртежот се дадени триаголниците: ABC , AGD , DGB , BGE , EGC , CGF , FGA , AGB , BGC , CGA , ADC , BDC , ACE , ABE , ABF , CBF .

Според тоа, на цртежот има 16 триаголници.



V одделение

1. Колку четирицифрени броеви постојат, чија почетна и крајна цифра е 3?

Решение. Бараните броеви се од видот: $\overline{3ab3}$. За избор на цифрата a имаме 10 можности. Понатаму, за избор на цифрата b имаме 10 можности. Ако го комбинираме секој избор на цифрата a со секој избор на цифрата b добиваме дека постојат $10 \cdot 10 = 100$ броеви од дадениот вид.

2. Јан и Лука купиле кеса бонбони. Прво, заедно, изеле $\frac{2}{3}$ од бонбоните, а подоцна секој од нив изел уште по една бонбона. Другиот ден, заедно изеле $\frac{1}{2}$ од остатокот и им останале уште 3 бонбони. Колку бонбони имало во кесата, на почетокот?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад нанапред. Трите бонбони што останале по вториот ден се $\frac{1}{2}$ од остатокот по првиот ден. Според тоа, по првиот ден им останаа 6 бонбони. Понатаму, ако ги додадеме двете бонбони што ги изеле подоцна првиот ден добиваме дека откако изеле $\frac{2}{3}$ од бонбоните, ним им останале 8 бонбони. Овие 8 бонбони се $\frac{1}{3}$ од вкупниот број бонбони, што значи дека во кесичката имало $3 \cdot 8 = 24$ бонбони.

3. Правоаголник и квадрат имаат еднакви периметри. Страната на квадратот е долга 6 *cm*. Едната страна на правоаголникот е долга 4 *cm*. Колку е долга другата страна на правоаголникот?

Решение. Периметарот на квадратот со должина на страна 6 *cm* е еднаков на $4 \cdot 6 = 24$ *cm*. Едната страна на правоаголникот има должина 4 *cm* и ако должината на другата страна ја означиме со a , за периметарот

на правоаголникот добиваме $2 \cdot 4 + 2a = 8 + 2a$. Значи, $8 + 2a = 24$, од каде добиваме $a = 8 \text{ cm}$.

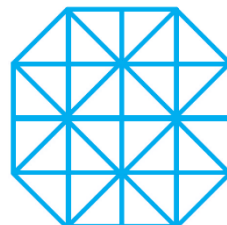
4. Обој едно од најмалите квадратчиња на цртежот десно.

а) Колку квадратчиња имаат еднаква плоштина со обоеното квадратче?

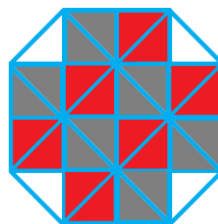
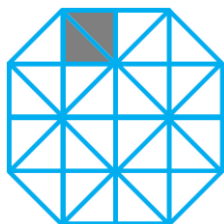
б) Колку квадрати имаат 4 пати поголема плоштина од обоеното квадратче?

в) Колку квадрати имаат 2 пати поголема плоштина од обоеното квадратче?

г) Колку вкупно квадрати има на цртежот?

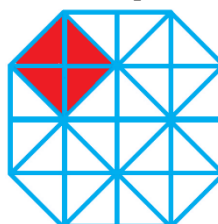
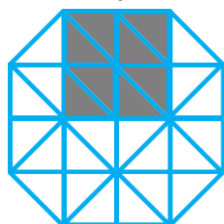


Решение. а) На долниот лев цртеж е прикажано бојењето на една од најмалите квадратчиња, а на десниот цртеж е прикажано бојењето на сите 12 квадратчиња кои имаат плоштина еднаква на плоштината на најмалото квадратче.



б) На долниот цртеж лево е прикажано квадратче кое има 4 пати поголема плоштина од најмалото квадратче. Вакви квадратчиња има 5.

в) На долниот цртеж десно е прикажано квадратче кое има 2 пати поголема плоштина од најмалото квадратче. Вакви квадратчиња има 5.



г) На цртежот единствени квадратчиња се квадратчињата кои се преброени во решенијата под а), б) и в). Според тоа, на цртежот има $12 + 5 + 5 = 22$ квадратчиња.

VI одделение

1. Колку цифри се потребни за да се нумерираат 425 страници од една книга? (Нумерирањето на страниците започнува од првата страница со бројот 1.)

Решение. За првите девет страници употребуваме по една цифра, односно вкупно 9 цифри. Од 10-тата до 99-тата страница имаме 90 страници и за секоја од нив употребуваме по 2 цифри, односно вкупно $2 \cdot 90 = 180$ цифри. Од 100-тата до 425-тата страница имаме 326 страници со по 3 цифри, па за нив употребуваме $3 \cdot 326 = 978$ цифри. Вкупно за сите 425 страници употребуваме $9 + 180 + 978 = 1167$ цифри, односно потребни се вкупно 1167 цифри за да се нумерира книга од 425 страници.

2. Дадена е дропката $\frac{2023}{2024}$. Еден ист број е одземен од броителот и е додаден на именителот на оваа дропка, така што по сведувањето на добиената дропка е добиена дропката $\frac{1}{2}$. Кој е тој број?

Решение. Нека бараниот број е x . Тогаш

$$\frac{2023-x}{2024+x} = \frac{1}{2},$$

$$4046 - 2x = 2024 + x,$$

$$3x = 2022,$$

$$x = 674.$$

3. Даден е правоаголник $ABCD$ на кој едната страна е долга 42 cm , а другата е пет пати пократка од првата. Пресметај ја плоштината на квадратот $EFGH$ чиј периметар е три пати помал од периметарот на зададениот правоаголник $ABCD$.

Решение. Нека a е должината на страната на правоаголникот $ABCD$, $a = 42 \text{ cm} = 420 \text{ mm}$. Должината на другата страна е $b = 420 : 5 = 84 \text{ mm}$.

Периметарот на правоаголникот $ABCD$ е

$$L = 2 \cdot (420 + 84) = 2 \cdot 504 = 1008 \text{ mm}.$$

Периметарот на квадратот $EFGH$ кој е три пати помал од периметарот на правоаголникот е

$$L^* = 1008 : 3 = 336 \text{ mm}.$$

Оттука, должината на страната на квадратот е еднаква на $336 : 4 = 84 \text{ mm}$

и плоштината на квадратот е еднаква на $P = 84 \cdot 84 = 7056 \text{ mm}^2$.

4. Даден е четириаголник означен како на цртежот десно. Одреди ја вредноста на аголот γ .

Решение. При ознаки како на дадениот цртеж имаме $\alpha + \beta + 110^\circ = 180^\circ$, од каде добиваме $\alpha + \beta = 70^\circ$. Понатаму,

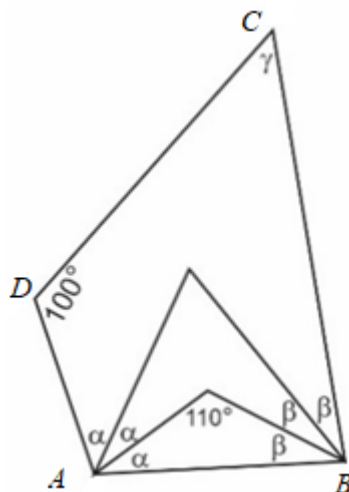
$$100^\circ + 3\alpha + 3\beta + \gamma = 360^\circ,$$

$$100^\circ + 3(\alpha + \beta) + \gamma = 360^\circ,$$

$$100^\circ + 3 \cdot 70^\circ + \gamma = 360^\circ,$$

$$\gamma = 360^\circ - 100^\circ - 3 \cdot 70^\circ,$$

$$\gamma = 50^\circ.$$



VII одделение

1. Во едно училиште има точно три паралелки во 7 одделение: 7а, 7б и 7в. Во 7а одделение учат 36% од вкупниот број на учениците од сите три одделенија. Бројот на ученици во 7б одделение е еднаков на $\frac{5}{9}$ од бројот на ученици во 7а. Колку ученици учат во секое од одделенијата, ако во 7а има 6 ученици помалку од 7в одделение?

Решение. Нека x е вкупниот број на ученици од сите три одделенија. Во 7а одделение се $0,36 = \frac{9}{25}$, во 7б се $\frac{5}{9} \cdot \frac{9}{25} = \frac{1}{5}$ и во 7в се $1 - \frac{9}{25} - \frac{1}{5} = \frac{11}{25}$ од вкупниот број ученици во трите одделенија. Бидејќи во 7а има 6 ученици помалку од 7в одделение добиваме $\frac{11}{25}x = \frac{9}{25}x + 6$. Решението на последната равенка е $x = 75$. Според тоа, во 7а одделение има $\frac{9}{25} \cdot 75 = 27$, во 7б одделение има $\frac{1}{5} \cdot 75 = 15$ и во 7в има $75 - (27 + 15) = 33$ ученици.

2. Определи ги сите трицифрени броеви кои се деливи со 4 и со 17 и чиј збир на цифри е еднаков на 17.

Решение. Бидејќи броевите 4 и 17 се заемно прости, ако трицифрениот број е делив со броевите 4 и 17, тогаш тој мора да е делив со нивниот производ, т.е. со бројот $4 \cdot 17 = 68$. Трицифрените броеви содржатели на бројот 68 се: 136, 204, 272, 340, 408, 476, 544, 612, 680, 748, 816, 884 и

952. Со непосредна проверка се добива меѓу овие броеви збирот на цифрите е 17 само кај бројот 476 и тој е единствено решение на задачата.

3. За аглиите во правоаголниот триаголник ABC важи: $2\angle ABC = \angle CAB$ а за страните на триаголникот важи $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ и $\overline{BC} = 8\text{ cm}$. Точката M е средина на хипотенузата AB , точката N е средина на катетата AC и точката P е средина на AM . Пресметај ја должината на искршената линија $BCMNPA$.

Решение. Од условот на задачата, острите агли во триаголникот се

$$\angle ABC = 60^\circ, \angle CAB = 30^\circ.$$

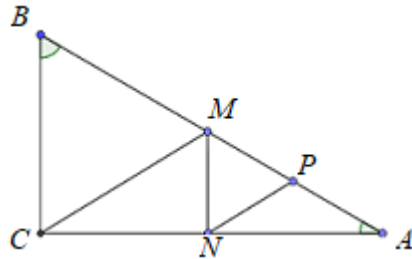
За триаголникот MBC важи

$$\angle MBC = 60^\circ, \overline{MB} = \overline{BC}$$

т.е. тој е рамнокрак со агол при врвот 60° , па мора да е рамностран. Доби-

ваме $\overline{MC} = 8\text{ cm}$. Понатаму, MN е средна линија на триаголникот ABC , па затоа $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 4\text{ cm}$. Исто така NP е средна линија за триаголникот AMC , па затоа $\overline{NP} = \frac{1}{2}\overline{MC} = 4\text{ cm}$. Јасно, $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AM} = 4\text{ cm}$. Доби-

ваме $\overline{BC} + \overline{CM} + \overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PA} = 8 + 8 + 4 + 4 + 4 = 28\text{ cm}$



4. Ги разгледуваме рамнокраките триаголници чии должини на страни во сантиметри се природни броеви. Одреди го бројот на сите такви триаголници чиј периметар изнесува 2021 cm .

Решение. Нека a е должина на основата, а b е должина на кракот (во cm) на триаголникот кој го исполнува условот на задачата. Од $L = 2021\text{ cm}$ следува дека $a + 2b$ е непарен број, па затоа a е непарен број. Збирот од должините на двете страни е поголем од третата страна, па мора да важи $a < 2b$. Од $a + 2b = 2021$, следува дека $a < 1011$, па a може да биде кој било елемент од множеството $\{1, 3, 5, \dots, 1009\}$. Бидејќи множеството $\{1, 3, 5, \dots, 1009\}$ има 505 елементи, следува дека бараниот број на триаголници е 505.

VIII одделение

1. За еден ракометен тим е познато дека минатата сезона одиграл неколку натпревари. На три натпревари постигнал 20 погодоци, на два натпревари постигнал 15 погодоци, а на сите останати по 30 погодоци. Колку натпревари одиграл тимот во сезоната, ако е познато дека просечниот број на постигнати погодоци на тимот во таа сезона бил 25?

Решение. Нека x е бројот на натпревари на кои ракометниот тим постигнал 30 погодоци. Според тоа, вкупниот број на натпревари кои ги одиграл тимот во сезоната е еднаков на $3 + 2 + x = 5 + x$, а вкупниот број на погодоци кои ги постигнал тимот со таа сезона е еднаков на $3 \cdot 20 + 2 \cdot 15 + 30x = 90 + 30x$. Бидејќи просечниот број на постигнати погодоци на тимот во таа сезона бил 25, добиваме дека $\frac{90+30x}{5+x} = 25$. Решението на последната равенка е $x = 7$. Значи, тимот одиграл $5 + 7 = 12$ натпревари.

2. Група работници за 4 дена ја провериле сообраќајната сигнализација на еден магистрален пат. Првиот ден провериле вдолж $\frac{1}{17}$ од патот, вториот ден трипати повеќе од првиот ден, третиот ден за 60 *km* повеќе од вториот ден, а четвртиот ден провериле онолку километри од патот колку што провериле првиот и вториот ден заедно. Определи ја должината на магистралниот пат.

Решение. Со x да ја означиме должината на патот. Од условот на задачата следува дека првиот ден работниците проверила $\frac{1}{17}x$, вториот ден провериле $\frac{3}{17}x$, третиот ден провериле $\frac{3}{17}x + 60$ и четвртиот ден провериле $\frac{1}{17}x + \frac{3}{17}x = \frac{4}{17}x$ од должината на патот. Значи,

$$\frac{1}{17}x + \frac{3}{17}x + \frac{3}{17}x + 60 + \frac{4}{17}x = x,$$

од каде добиваме $x = 170 \text{ km}$.

3. Најди ги сите прости броеви кои можат да се претстават како збир на два последователни природни броја.

Решение. Нека p е прост број. Ако $p = 2$, тогаш единствено претставување на бројот 2 како збир на два природни броја е $2 = 1 + 1$, па затоа $p = 2$ не е решение на задачата.

Ако простиот број p е поголем од 2, тогаш тој е непарен број, што значи дека $p = 2k + 1$, за некој $k \in \mathbb{N}$. Значи, $p = k + (k + 1)$, за некој $k \in \mathbb{N}$, т.е. p може да се запише како збир на два последователни природни броја. Конечно, решение на задачата се сите непарни прости броеви.

4. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C . Нека D е подножјето на висината спуштена од темето C кон страната AB и точката F е пресек на страната AB со тежишната линија повлечена од темето C . Ако аголот помеѓу висината CD и тежишната линија CF е 20° , одреди ја големината на аголот помеѓу симетралата на аголот во темето C и тежишната линија CF .

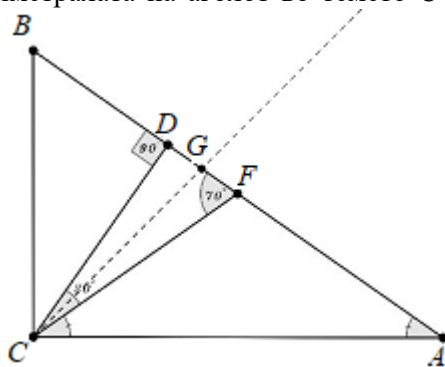
Решение. Нека G е пресечната точка на симетралата на аголот во темето C и страната AB . Триаголникот FDC е правоаголен триаголник со прав агол во темето D и $\angle DCF = 20^\circ$, па $\angle CFD = 70^\circ$.

Триаголникот CAF е рамнокрак триаголник со агол при врвот

$$\angle CFA = 180^\circ - \angle CFD = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

и затоа $\angle ACF = \angle CAF = 35^\circ$. Сега, од $\angle ACG = 45^\circ$, следува

$$\angle FCG = \angle ACG - \angle ACF = 45^\circ - 35^\circ = 10^\circ.$$



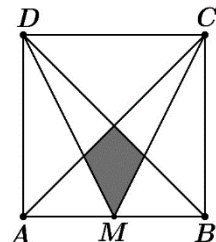
IX одделение

1. Одреди ја цифрата на единиците на бројот: $((((3^2)^3)^4)^5)^6$.

Решение. Имаме: $((((3^2)^3)^4)^5)^6 = 3^{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = (3^4)^{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} = 81^{180}$, од каде следува дека цифрата на единиците на дадениот број е 1.

2. Квадратот $ABCD$ даден на цртежот има страна со должина 1 m . Точката M е средишна точка за страната AB . Пресметај ја плоштината на исенчениот дел на цртежот.

Решение. Нека точката O е центар на квадратот и P е пресечна точка на MC и BD . Нека h е висината



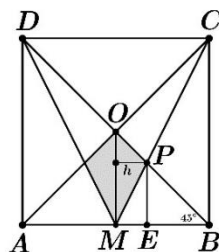
на триаголникот OMP повлечена од темето P . Нека E е подножје на нормалата спуштена од точката P кон страната AB . Значи, $\overline{ME} = h$. Од друга страна триаголникот MPE е сличен со триаголникот MCB , па затоа

$$\overline{ME} : \overline{PE} = \overline{MB} : \overline{BC}, \text{ т.е. } h = \overline{ME} = \frac{1}{2} \overline{PE}.$$

Значи, $\overline{PE} = 2h$. Понатаму, триаголникот BPE е рамнокрак правоаголен, па затоа $\overline{EB} = \overline{PE} = 2h$.

Според тоа, $\overline{MB} = \overline{ME} + \overline{EB}$, од каде добиваме $\frac{1}{2} = h + 2h$, т.е. $h = \frac{1}{6}$. Конечно, бараната плоштина

$$e P = 2P_{\triangle OPM} = 2 \cdot \frac{\overline{OM} \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} m^2.$$



3. Аце, Боби и Симе заедно работат на училишен проект. Ако Аце не помага, тогаш проектот ќе го завршат за 2 часа. Ако Боби не помага, тогаш проектот ќе го завршат за 3 часа. Ако Симе не помага, тогаш проектот ќе го завршат за 4 часа. Случајно дознале дека Даре ќе им помогне. Ако Даре работи сам на проектот, тогаш ќе му требаат 12 часа да го заврши проектот. Кое е најмалото потребно време што е потребно за да го завршат проектот?

Решение. Нека a , b , c и d се времињата што им се потребни на Аце, Боби, Симе и Даре соодветно, самостојно да го завршат проектот. Тоа значи дека за 1 час, Аце сам би завршил $\frac{1}{a}$ од проектот, Боби $\frac{1}{b}$ од проектот, Симе $\frac{1}{c}$ од проектот, а Даре $\frac{1}{d}$ од проектот. Од условот на задачата следуваат равенките

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{d} = \frac{1}{12}.$$

Најмалото потребно време x за да го завршат проектот се добива ако работат заедно сите четири ученици. За 1 час заедно ќе завршат:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}, \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{d}, \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{12}, \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \\ \frac{1}{x} &= \frac{3+6+4+2}{24} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Значи, најмалото потребно време за да се заврши проектот е $x = \frac{8}{5} h$.

4. Даден е четириаголник $ABCD$, така што збирот од должините на страните AB и AD е 10 cm , $\overline{BC} = \overline{CD}$ и аглие BAD и BCD се прави. Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.

Решение. При ознаки како на цртежот десно важи $a + b = 10$. Понатаму, триаголниците ABD и BCD се правоаголни, па од Питагоровата теорема следува

$$a^2 + b^2 = d^2 = c^2 + c^2,$$

$$c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Сега, за плоштината на четириаголникот $ABCD$ добиваме

$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD}, \text{ т.е.}$$

$$P_{ABCD} = \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 5^2 \text{ cm}^2 = 25 \text{ cm}^2.$$

