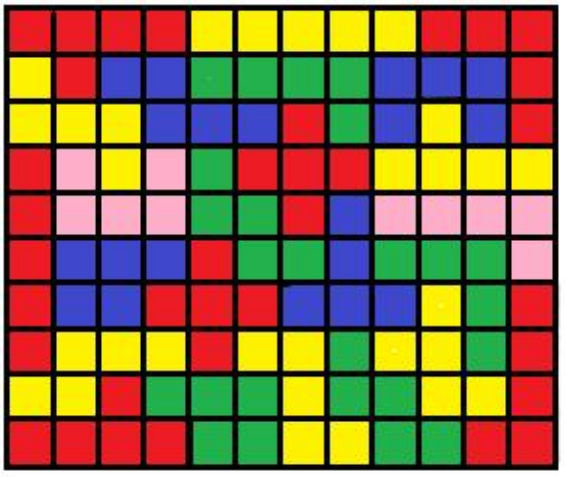
МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 45

Самоил Малчески

ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ЗА НАТПРЕВАРИ ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СЕДМО ОДДЕЛЕНИЕ



Скопје, 2024

Рецензент:
Д-р Методи Главче
Педагошки факултет, Скопје

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Пред вас е мала збирка подготвителни задачи за натпревари по математика за учениците од седмо одделение во основното образование. Збирката содржи 445 решени задачи кои се поделени во шест тематски целини и тоа:

- Теорија на броеви
- Алгебра,
- Текстуални задачи,
- Логика и комбинаторика.
- Геометрија и
- Дополнителни задачи.

Во одделните целини, освен во геометријата, задачите не се поделени во посебни параграфи, но сепак истите се групирани според сродноста. Делот Геометрија содржи четири целини и тоа: Агли во триаголник и четириаголник, Конструкривни задачи, Периметар и плоштина на рамнински фигури и Разни задачи. Притоа, скоро во сите целини се содржани задачи во кои се користат признаците за складност на триаголник, па затоа може да се каже дека во делот Геометрија е опфатен целиот материјал кој е присутен на натпреварите по математика. Овде ќе напоменам дека само мал дел од конструктивните задачи се целосно решени следејќи го алгоритамот: анализа, конструкција, доказ и дискусија, па затоа на читателот му препорачувам самостојно да ги реализираат четирите фази од решавањето на конструктивна задача.

Во првиот дел од збирката се дадени формулациите на задачите, а во вториот дел за повеќето задачи се дадени целосни решенија, а само кај мал дел се дадени само одговори. На читателот му препорачувам да се обиде самостојно да ја реши секоја задача, а потоа решението кое го добил да го спореди со даденото решение, односно да го проучи даденото решение ако самостојно не успеал да ја реши задачата.

Во оваа пригода сакам да му се заблагодарам на рецензентот д-р Методи Главче чиј ангажман не само што придонесе да се намалат грешките кои го пратат издавањето на било кој ракопис, туку и со своите забелешки допринесе за подобрување на ракописот во целина. Се надевам дека оваа збирка задачи ќе најде свое место во подготовката на учениците за регионалните натпревари, со што ќе даде и свој придонес во развојот на учениците надарени за математика.

Како што реков, издавањето на секоја книга неодминливо е пропратено со грешки и тоа како од технички, така и од стручен аспект. Оттука, особено ќе бидам благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе придонесе за подобрување на ракописот, а посебно за отстранување на евентуалните грешки.

Скопје
14. јуни, 2024 г.

Авторот

1. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. Бројот 247 поделен со некој едноцифрен број дава остаток 7. Колкав е остатокот ако бројот 1267 го поделиме со истиот тој едноцифрен број?

2. Бројот 851 е поделен со некој едноцифрен број и е добиен остаток 5. Колку е остатокот од делењето на бројот 2014 со истиот едноцифрен број?

3. Определи го $a \in \mathbb{Z}$, ако $\frac{7}{a+3} \in \mathbb{Z}$.

4. Определи го $a \in \mathbb{Z}$ ако $\frac{a+7}{a+3} \in \mathbb{Z}$.

5. а) За кои целобројни вредности на a вредноста на дропката $\frac{8}{3a+1}$ е цел број?
   б) Определи ги сите целобројни вредности на дропката $\frac{3a+9}{3a+1}$ ако a е цел број.

6. Определи ги сите цели броеви a за кои вредноста на дропката $\frac{2a+8}{2a+3}$ е цел број.

7. Определи го целиот број x за кој $\frac{202}{3-|1+x|}$ е цел број.

8. Определи ги сите природни броеви од видот $\overline{20a2b2}$ кои се деливи со 72.

9. Користејќи ги цифрите 0, 1, 2 и 7 запиши ги сите четирицифрени броеви кои се деливи со 40.

10. Определи го бројот на броевите од видот $\overline{2abcd3}$ кои се запишани со различни цифри, а бројот $\overline{abcd}$ е четирицифрен број делив со 5.

11. Докажи дека збирот на седум последователни цели броеви е делив со 7.

12. Докажи дека збирот на 8 последователни цели броеви не е делив со 8.

13. Ако за природните броеви a и b бројот $2a+5b$ е делив со 11, докажи дека и бројот $3a+2b$ е делив со 11.

14. Дали производот на непарните природни броеви помали или еднакви на 2013 е делив со нивниот збир?

15. Определи го најмалиот можен број делив со 4, чиј збир на цифри е еднаков на 2024.

16. Докажи дека меѓу било кои осум природни броеви постојат два броја чија разлика е делива со 7.

17. Докажи дека меѓу 12 произволни природни броеви постојат најмалку два чија разлика е делива со 11.

18. Определи го најмалиот природен број n за кој важи следново тврдење:
Меѓу било кои n природни броеви секогаш можеме да избереме три природни броја чија аритметичка средина е природен број.

19. Докажи дека $12^n - 22n - 1$ е делив со 11 за секој природен број n.

20. Определи ги сите нескратливи дропки $\frac{a}{b}$, $a,b \in \mathbb{N}$, такви што
$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 2\frac{71}{80}.$$

21. Определи го најмалиот природен број кој е делив со 7, а при делење со 2, 3, 4, 5 и 6 дава остаток 1.

22. Докажи дека бројот $n = \underbrace{222...222}_{2012}$ не е квадрат на природен број.

23. Докажи дека бројот

$$n = \underbrace{222...222}_{2012}\underbrace{000...000}_{2012}\underbrace{111...111}_{2012}$$

не е квадрат на природен број.

24. Определи го најмалиот природен број со кој треба да се подели изразот

$$2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5 \cdot 6^6 \cdot 7^7 \cdot 8^8 \cdot 9^9$$

за да се добие точен квадрат на природен број.

25. Нека за двоцифрените броеви $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ важи равенството $\overline{cd} = 4 \cdot \overline{ab}$. Докажи дека четирицифрениот број $\overline{abcd}$ е делив со 13.

26. Определи ги сите трицифрени природни броеви $\overline{abc}$ кои се деливи со 4 и со 17 и чиј збир на цифри е 17.

27. Определи го бројот на двоцифрените броеви кои собрани со својата десеткратна вредност даваат трицифрен број делив со 33.

28. Ако трицифрениот број x се собере со 13, збирот е делив со 13. Ако од бројот x се одземе 17, се добива број делив со 17. Ако бројот x се подели со 2, количникот е парен број. Определи го бројот x.

29. При делење на двоцифрен број со збирот на неговите цифри се добива број кој е 8 пати помал од бројот кој се добива при делење на двоцифрениот број со разликата на неговите цифри. Остатоците во двете делење се еднакви. Определи го овој двоцифрен број ако цифрата на десетките е поголема од цифрата на единиците.

30. Во низа една по друга се запишани 2009 цифри. Познато е дека секој двоцифрен број кој го формираат две соседни цифри во низата (во истиот редослед во кој се запишани) е делив со 17 или со 23.
    а) Последната цифра во низата е 1. Која е првата цифра?
    б) Првата цифра во низата е 9. Која е последната цифра?

31. Двоцифрениот број $\overline{x5}$ е три пати поголем од производот на своите цифри. Колку делители има овој број?

32. Колку различни делители има бројот:
а) 54, б) 540.

33. Определи го бројот на делителите на бројот:
а) 2015, б) 2016.

34. Позитивниот цел број n има 2 позитивни делители, а бројот $n+1$ има три позитивни делители. Колку позитивни делители има бројот $n+2$?

35. Докажи дека бројот 1111112111111 е сложен.

36. а) Прост број p, $p \geq 5$ при делење со 6 дава остаток 1 или 5, т.е.тој е од видот $6k+1$ или $6k-1$, $k \in \mathbb{N}$. Докажи!
б) Да ги разгледаме сите броеви кои при делење со 6 даваат остаток 1 или 5. Дали меѓу нив има сложени броеви?

37. Определи ги сите прости броеви p за кои и броевите $p+8$ и $p+10$ се исто така прости.

38. За простите броеви a,b,c важи $a+b+c=49$ и $a-b-c=13$. Ако $a>b>c$ пресметај го производот abc.

39. За простите броеви a,b,c важи $a+b+c=78$ и $a+b-c=74$. Ако $a>b>c$ пресметај го производот abc.

40. Дали постојат прости броеви p и q такви што $2p+3q=2006$?

41. Докажи дека секој број поголем од 3 може да се прикаже како збир на два или повеќе прости броеви.

42. Определи ги сите двоцифрени броеви кои се еднакви на квадратот на својата цифра на единиците.

43. Колку решенија во множеството цели броеви има равенката
$$|ab| \cdot p = 2009,$$
каде p е прост број?

44. Колку решенија има равенката $|ab|+p=2009$ во множеството цели броеви, ако p е прост број, а a и b се непарни броеви.

45. Дали постојат четири последователни прости броја, чиј збир е прост број.

46. Определи го бројот на трицифрените прости броеви кај кои сите цифри се различни, а цифрата на единиците е еднаква на збирот на другите две цифри.

47. Жаба скока на водни лилјани. Таа може да скокне 7 листови десно или 4 листови лево. Кој е потребниот најмал број скокови за да жабата се оддалечи точно 2024 водни лилјани?

48. Определи ги сите природни броеви x и y такви што $x^2+2y=27$. Колку решенија има дадената равенка?

49. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2+2y=26.$$

50. Определи ги целите броеви a и b такви што $a+b=ab=\frac{a}{b}$.

51. Определи го бројот на паровите цели броеви такви што
$$|x|+|y|=2008.$$

52. За природните броеви a и b важи $a+b=4$. Определи ги сите броеви a,b и c, $(c\in\mathbb{Z})$ за кои важи $a+b+|c|=2008$.

53. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$|x|+2|y|=10.$$

54. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$|x+1|\cdot(y-2)=2009.$$

55. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2+|y|=9.$$

2. АЛГЕБРА

1. Спореди ги броевите a и b ако
$$a = 1-2+3-4+5-6+...+2005-2006,$$
$$b = 1-3+5-7+9-11+...+2005-2007.$$

2. Спореди ги броевите $a-b$ и $c-d$, ако:
$$a = 1+7+13+...+2005,$$
$$b = 4+10+16+...+2008,$$
$$c = 1+5+9+...+2005,$$
$$d = 3+7+11+...+2007.$$

3. Нека
$A = 1+3+5+...+2007+2009$ и $B = 2+4+6+...+2008+2010$.
Пресметај $A-B$.

4. Збирот на првите 2015 природни броеви е поделен со бројот 2015. Определи го количникот.

5. Определи ја најголемата, најмалата и најмалата позитивна вредност која се добива ако во изразот
$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm ... \pm 2008 \pm 2009$$
пред секој број избереме еден знак.

6. Пресметај ја вредноста на изразот:
$$A = 77 \cdot 16 \cdot 19 + 88 \cdot (-7 \cdot 6^2) + 99 \cdot 2^3 \cdot (77 - 19 \cdot 4).$$

7. Пресметај ја вредноста на изразот
$$A = (1-\tfrac{1}{2})(2-\tfrac{2}{3})(3-\tfrac{3}{4})(4-\tfrac{4}{5})...(9-\tfrac{9}{10}) : 14\tfrac{2}{5}.$$

8. Ако е
$$A = 2-4\cdot(\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{2}) \text{ и } B = -121,2 : 12 - 12\tfrac{1}{2}\cdot 1,2$$
пресметај $\frac{|A+B|}{9}$.

9. Пресметај ја вредноста на изразот
$$A=(1-\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{4})(1+\tfrac{1}{5})...(1-\tfrac{1}{2022})(1+\tfrac{1}{2023}).$$

10. Пресметај ја вредноста на изразот
$$1-\tfrac{100}{101}+\tfrac{99}{101}-\tfrac{98}{101}+\tfrac{97}{101}-...-\tfrac{2}{101}+\tfrac{1}{101}.$$

11. Пресметај ја вредноста на изразот
$$A=(-2\tfrac{1}{4}):(-3)-((-\tfrac{3}{4}:\tfrac{9}{10}-1\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{15}{9}+1\tfrac{5}{6})-(-3-\tfrac{1}{8}))\cdot 4.$$

12. Дадени се множествата
$A=\{1,3,5,...,2005,2007,2009\}$ и $B=\{0,-2,-4,...,-2005,-2006,-2008\}$.
Нека c е збирот на сите елементи на множествата A и B, d е производот на нивните елементи и e е збирот на апсолутните вредности на нивните елементи. Определи го производот cde.

13. Дадени се множествата
$A=\{1,2,3,...,2007,2008,2009\}$ и $B=\{0,-1,-2,...,-2007,-2008\}$.
Нека c е збирот на сите броеви од множествата A и B, d е нивниот производ и e е разликата на збирот на сите парни броеви од A и збирот на сите непарни броеви од B. Подреди ги по големина броевите $|c-d|,|d-e|,|e-c|$ почнувајќи од најмалиот до најголемиот.

14. Дадени се множествата $A=\{1,2,...,2015\}$ и $B=\{0,-1,-2,...,-2016\}$. Броевите x и y се редоследно збирот и производот на сите елементи од $A\cup B$ и $z=1+3+5+...+2015-(-2-4-6-...-2016)$. Спореди ги броевите $|x-y|,|y-z|,|z-x|$.

15. Симон запишал 2009 цели броеви. Најмалиот меѓу нив е -3010, а секој следен е за 3 поголем од претходниот. Определи го збирот на сите овие броеви.

16. Марко по ред ги запишал броевите од 1 до 2024 и потоа пишувал предзнаци пред тие броеви. Пред бројот 1 напишал минус, потоа пред следните десет броеви запишал плус, потоа пред бројот 12 запишал минус, па пред следните десет броеви запишал плус и така натаму,

при што во секој чекор откако пред соодветниот број запишувал знак минус пред следните десет броја запишувал знак плус се додека не дошол до бројот 2024. Пресметај ја вредноста на добиениот израз.

17. Која цифра се наоѓа на 2006-тото место по децималната запирка на бројот $\frac{1}{7}$?

18. Определи ја 2023-тата цифра по децималната запирка во дицималното претставување на дропката $\frac{35}{37}$.

19. Определи ги цифрите a и b ($a \neq b$) така што бројот $\overline{0,ababab...}$ ќе биде нескратлива дропка кај која збирот на броителот и именителот е еднаков на 17.

20. Определи ги цифрите a и b ($a \neq b$) така што бројот $\overline{0,abbb...}$ ќе биде еднаков на нескратливата дропка за која збирот на именителот и броителот е еднаков на 17.

21. Определи ги цифрите a,b,c (не задолжително различни) така што ќе важи
$$\overline{0,ababab...} + \overline{0,abcabcabc...} = \frac{33}{37}.$$

22. Пресметај ја вредноста на изразот $A = -a - \frac{1}{b-\frac{1}{c}}$ ако $a = 0,333...$, $b = 0,444...$ и $c = 0,666...$.

23. Пресметај ја вредноста на изразот $-1 - \frac{1}{1-\frac{a}{b-\frac{1}{c}}}$, ако $a = 0,222...$, $b = 0,444...$ и $c = 0,888...$.

24. За $x = \frac{45}{18}$ пресметај ја вредноста на изразите A и B и спореди ги истите:
$$A = \frac{-2x+3\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}} : \frac{1}{0,8-2\frac{1}{10}}, \qquad B = \frac{3\cdot(\frac{1}{7}-0,5)-\frac{3}{4}}{4\frac{4}{5}-1,3:\frac{1}{5}+1,1} \cdot \frac{26}{x} \cdot \frac{42}{51}.$$

25. Претстави го бројот 2009 во вид на дропка чиј броител е деветти степен на некој природен број, а именител е десетти степен на некој природен број. Докажи дека задачата има бесконечно многу решенија.

26. Вредноста на изразот

$$(1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})(1+\tfrac{1}{4})...(1+\tfrac{1}{n})$$

е еднаква на 2013. Колку множители има даденият израз.

27. На местото на ѕвездичките стави знаци на аритметичките операции и распореди загради така што $\frac{1}{2}*\frac{1}{6}*\frac{1}{6018}=2006$ ќе премине во точно равенство?

28. На местото на ѕвездичките стави знаци на аритметичките операции така што ќе добиеш точно равенство:

$$(\tfrac{1}{2}*\tfrac{1}{3})*\tfrac{1}{5}*\tfrac{1}{67}=\tfrac{707}{2010}.$$

29. Меѓу броевите стави знаци за собирање и одземање така што ќе добиеш точно равенство:

$$\tfrac{5}{6}\ \ \tfrac{2}{5}\ \ \tfrac{3}{8}\ \ \tfrac{1}{3}=-\tfrac{11}{40}.$$

30. Реши ја равенката

$$\tfrac{1}{60}+\tfrac{1}{219}+\tfrac{1}{292}+\tfrac{1}{x}=\tfrac{2}{73}.$$

31. Реши ја равенката

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{2009}{2010}.$$

32. Реши ја равенката

$$\frac{1+3+5+...+2015+2017}{2+4+6+...+2014+2016}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2016}.$$

33. Ако x е рационален број, докажи дека:

$$x+|x|=\begin{cases}0, & \text{ако } x<0,\\ 2x, & \text{ако } x\geq 0.\end{cases}$$

34. За целите броеви x и y е определена операцијата * на следниот начин:
$$x*y=x-y+|x-y|.$$
Определи го бројот x ако $x*8=20$.

35. За броевите x и y дефинираме операција * на следниов начин
$$x*y=x+y-|x-y|.$$
Определи го бројот y ако $12*y=10$.

36. Реши ја равенката
$$||x|-1|=2011.$$

37. Реши ја равенката
$$||x-1|-2011|=1.$$

38. Реши ја равенката
$$|x+|x+|x|||=2010.$$

39. Определи го збирот на сите решенија на равенката
$$||2x-2\cdot 3|-|3\cdot 4-4\cdot 5||=6.$$

40. Определи го производот на сите решенија на равенката
$$||1-2\cdot 3|-|4\cdot 5-5x||=10.$$

41. Реши ја равенката
$$|||x|+2x|+3x|=4.$$

42. Реши ја равенката
$$|||2x|-3x|-4x|=5.$$

43. Реши ја равенката
$$x+|2x|=\frac{x}{3|x|}-\frac{2}{3}.$$

44. Реши ја равенката

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{|x|}}} = 2016.$$

45. Реши ја равенката

$$2x - |3x| = \frac{x}{|x|} - \frac{2}{3}.$$

46. Реши ја равенката

$$\frac{36}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{|x-36|}}} = 2016.$$

47. Определи го најмалиот природен број чија вредност може да ја има параметарот k за да решението на равенката

$$-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2x}{5} - \frac{4}{5}k\right) - k = \frac{3}{4}\cdot(8-2k) - 1$$

биде позитивно. За така најдената вредност на k пресметај го x.

48. Определи ги подредените парови (x, y), каде што x и y се природни броеви, такви што $x + y = 100$ и $\frac{\frac{1}{x}+y}{x+\frac{1}{y}} = 19$.

49. Определи и сите тројки броеви a, b, c такви што $ab = -12$, $ac = -20$ и $bc = 60$. Пресметај ја соодветната вредност на производот abc.

50. Дадена е неравенката $-31 < x < 33$.
а) Определи го множеството решенија на дадената неравенка во множеството цели броеви.
б) Пресметај го збирот на најдените решенија под а).
в) Пресметај го производот на најдените решенија под а).

51. Во множеството цели броеви реши ја неравенката

$$-\frac{2}{3} < \frac{2-x}{5} < \frac{9}{10}.$$

52. Во множеството цели броеви реши ја неравенката

$$\frac{1}{3} < \frac{2}{1-x} < \frac{3}{4}.$$

53. Во множеството цели броеви реши ја неравенката
$$-0,2 \le \frac{1}{65} + \frac{x}{62} \le -0,1 .$$

54. Во множеството цели броеви реши ја неравенката
$$-0,4 \le \frac{1}{5} - \frac{x}{2} \le -0,2 .$$

55. Во множеството цели броеви реши ја неравенката
$$3 < -(-a) + |2a| \le 6 .$$

56. Во множествоот цели броеви реши ја неравенката
$$6 < |a| - (-2a) \le 9 .$$

57. Пресметај го збирот на сите целобројни решенија на неравенката:
$$|x| + |x+1| < 2005 .$$

58. Пресметај го збирот на сите целобројни решенија на неравенката:
$$|x| + |x-1| < 2005 .$$

59. Докажи дека
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} < 1 .$$

60. Докажи дека
$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots \frac{1}{2005\cdot 2007} < \frac{1}{2} .$$

61. Докажи дека
$$|2x-8| + |3-2x| \ge 5$$
за секој реален број x.

62. Ако $x + y + z = 5$, докажи дека
$$|x-5| + |y+3| + |z-9| \ge 6 .$$

63. Броевите a, b и c се рационални и се такви што еден е позитивен, еден е негативен и еден е еднаков на нула. Ако $\frac{a(c-b)}{b} > 0$ кој од броевите е нула, позитивен и негативен.

64. Броевите a,b,c се такви што едниот е позитивен, едниот негативен и едниот е еднаков на нула. Ако $\frac{(a+b)(c-b)}{b}<0$, кој од овие броеви е позитиен, негативен и еднаков на нула?

3. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. Производот на еден двоцифрен и еден трицифрен број се запишува само со помош на неколку цифри 3. Кои се тие броеви?

2. Еден шестцифрен број завршува на цифрата 5. Ако таа цифра се премести на почетокот на бројот, т.е. се избрише од крајот и се допише на почетокот на бројот, тогаш новодобиениот број ќе биде 4 пати поголем од почетниот број. Одреди го почетниот број.

3. Ласте наместо да отчука двоцифрен број, по грешка пред првата цифра отчукал 4 и добил трицифрен број кој е 17 пати поголем од двоцифрениот број. Кој број требало Ласте да го отчука?

4. Ласте наместо да отчука двоцифрен број, по грешка пред првата цифра и по втората цифра отчукал 4 и добил четирицифрен број кој е 54 пати поголем од двоцифрениот број кој требало да го отчука. Кој број требало Ласте да го отчука?

5. Разликата на два броја е 9, а нивниот збир е 99. За колку проценти е:
   а) поголемиот од тие броеви е поголем од помалиот,
   б) помалиот од тие броеви е помал од поголемиот?

6. На еден трицифрен број е избришана цифрата на стотките и е добиен двоцифрен број кој е еднаков на 20% од трицифрениот број. Определи го трицифрениот број.

7. Збирот на 2024 последователни парни броеви е 1171896. Кој е најголемиот од овие броеви?

8. На таблата се запишани девет последователни природни броеви. Кога е избришан еден од запишаните броеви, збирот на преостанатоте броеви бил 2014. Кој број е избришан?

9. Јован сакал да запише десет последователни цели броеви, но случајно испуштил еден број. Кога ги собрал броевите кои ги запишал добил

збир 2007. Кои броеви Јован ги запишал и кој број го испуштил?

10. Горјан запишал дропка во која броителот е за 2009 поголем од именителот. Кога ја скратил дропката добил $\frac{1}{50}$. Која дропка ја запишал Горјан?

11. Дадена е дропката $\frac{51}{49}$. Кој број треба да се одземе од броителот и да се додаде на именителот на дадената дропка за да се добие дропката $\frac{3}{7}$?

12. Кој број треба да се одземе и од броителот и од именителот на дропката $\frac{1}{2009}$ за да се добие дропката $\frac{1}{2010}$?

13. Дадена е дропката $\frac{2023}{2024}$. Кој број треба да се одземе од броителот и да се додаде на именителот, за да по скратувањето се добие дропката $-\frac{3}{4}$?

14. Кој број треба да се одземе од именителот и да се помножи со броителот на дропката $\frac{1}{2009}$ за да се добие дропката $\frac{1}{40}$?

15. Збирот на две дропки со едноцифрени броители и именители е еднаков на $\frac{31}{40}$. Кои се тие дропки?

16. Броителот и именителот на една дропка се природни броеви, а нивниот збир е еднаков на 2007. Која е најголемата можна вредност на оваа дропка, ако таа е помала од $\frac{1}{3}$.

17. Збирот на три дропки чии броители се природни броеви, а именителите се прости броеви е еднаков на $\frac{113}{70}$. Определи ги овие дропки.

18. Дропката $\frac{93}{91}$ претстави ја како збир од две позитивни дропки чии именители се 7 и 13.

19. Определи ги броевите a,b и c, ако нивниот збир е за $\frac{5}{2}$ поголем од бројот a, за $\frac{59}{6}$ поголем од бројот b и за $\frac{5}{3}$ поголем од бројот c.

20. Пред 4 години, таткото бил трипати постар од своите ќерки Елена и Наташа заедно. Наташа тогаш била два пати постара од Елена. Колку години има Наташа, а колку Елена ако татко им сега е два пати постар од нив двете заедно?

21. Ана, Марија и Јован добиле текст за преведување од англиски на македонски јазик. На Ана и Марија, ако работат заедно им се потребни 30 часови за да го преведат текстот, на Ана и Јован им се потребни 42 часа, а на Марија и Јован 35 часови. Колку време (во часови и минути) им е потребно на Ана, Марија и Јован за да го преведат текстот, ако работат сите тројца заедно?

22. Дамјан сакал да купи книга но имал само 100 денари, што не било доволно. Продавачот му ја дал книгата под услов остатокот од парите да ги донесе следниот ден. Дамјан останал должен толку колку што би останал должен ако за книгата платил толку колку што останал должен. Определи ја цената на книгата?

23. Милан и Рампо купуваат топки. На Милан му недостасуваа 600 денари за да купи 4 топки, а на Рампо му недостасуваа 600 денари за да купи 5 топки. Ако се здружат, ќе им недостасуваат 600 денари за да купат 6 топки. Коку е цената е една топка?

24. Цената на една книга прво е зголемена за 50%, а потоа е намалена за 50%. Цената на друга книга прво е намалена за 50%, а потоа е зголемена за 50%. На крајот разликата во цените на книгата била 60 денари. Колава била разликата на цените на книгата на почетокот.

25. Во спортска продавница патиките се продавале за 900 ден. поефтино од тренерката. На акција патиките биле намалени за 10%, а тренерката за 5%. Габи купила патики и тренерка на намаление и за нив платила вкупно 5480 ден. Колку чинеле патиките, а колку тренерката пред намалувањето?

26. Пејо, Станко, Живко и Раде последниот ден од летувањето ги собрале сите пари кои ги имале и виделе дека имаат 4820 денари. Пејо имал 80% од парите на Станко, Станко имал 75% од парите на Живко и Живко имал 60% од парите на Раде. Колку пари имало секое дете последниот ден од летувањето?

27. Три сестри си поделиле одредена сума на пари при што првата сестра зела $\frac{1}{5}$ од парите, втората сестра $\frac{5}{8}$ од парите, а остатокот го зела третата сестра. Но, потоа третата сестра и дала на првата сестра $\frac{3}{4}$ од својот дел. Колкав дел од целата сума пари добила првата сестра?

28. Неколку браќа поделиле извесно количество златници. Првиот брат зел 100 златници и шестина од остатокот. Вториот брат зел 200 златници и шестина од новиот остаток итн. Последниот брат зел тоа што му останало. Се покажало дека сите браќа имаат еднаков број златници. Колку браќа учествувале во поделбата на златниците?

29. По намалувањето на цената за 30% за 280 денари може да се купат $2\,kg$ лимони повеќе отколку што можело да се купат за 240 денари пред намалувањето на цената. Колкава била цената на лимоните пред намалувањето, а колкава е по намалувањето на цената?

30. Предната гума на еден моторцикл се потрошува по поминати $25000\,km$, а задната по поминати $15000\,km$. По колку поминати километри треба да се сменат местата на гумите за тие истовремено да се потрошат? По колку поминати километри мотоциклистот мора да стави нови гуми?

31. Месар еден колбас го сечи на делови. Прво од целиот колбас отсекол негова третина. Добиените два дела повторно ги пресекол: од поголемиот дел отсекол негова петтина, а од помалиот дел отсекол негова четвртина. Колкава е должината на најмалиот добиен дел, ако должината на најголемиот дел е $48\,cm$?

32. Димитар ја бојадисувал дрвената ограда околу својата викендица. За викендот тој бојадисал 12 метри повеќе од $\frac{3}{8}$ од вкупната должина на

оградата. Во понеделникот бојадисал 3 метри повеќе од $\frac{1}{4}$ од вкупната должина на оградата. Во вторникот бојадисал $\frac{1}{3}$ од вкупната должина која ја бојадисал за време на викендот и во понеделникот, а во средата го бојадисал останатиот дел од оградата, кој бил точно $\frac{1}{24}$ од вкупната должина на оградата. Колку е долга оградата околу викендицата?

33. Двајца луѓе истовремено тргнале од местото A во местото B, првот со велосипед, а вториот со автомобил со брзина пет пати поголема од брзината на велосипедистот. На половина од патот автомобилот се расипал и автомобилистот остатокот од патот го поминал пешки со брзина два пати помала од брзината на велосипедистот. Кој прв стигнал во местото B?

34. Велосипедист возел од Прилеп до Битола со просечна брзина од $20\,km/h$, а на враќање со просечна брзина од $30\,km/h$. Определи ја средната брзина на движењето на велосипедистот на овој пат?

35. Еден велосипедист патот од Прилеп до Битола треба да го помине за 2 часа, а друг велосипедист патот од Битола за Прилеп за 3 часа. Ако истовремено тргнат еден кон друг, по колку време ќе се сретнат?

36. Андреј вози велосипед од дома до училиште секогаш со постојана брзина. Ако вози со $3\,m/s$ побрзо тогаш на училиште ќе стигне за три пати пократко време. Колку пати побрзо Андреј ќе стигне на училиште ако вози побрзо со $6\,m/s$?

37. Моторен чамец од Скопје до Велес плови 2 часа, а од Велес до Скопје 3 часа. Колку време овој чамец ќе плови од Скопје до Велес со угасен мотор?

38. Камион и автобус тргнале во пресрет од две места на автопатот. Притоа камионото вози со постојана брзина од $27\,km$ за 18 минути, а автобусот вози со постојана брзина од $864\,m$ за 28,8 секунди. Возилата се сретнале по 2 часа и 45 минути возење. Колку е долг патот меѓу местата на тргнување на возилата?

39. Од сад во кој е 25% раствор на сол се оттураат 3 литри течност и се дотура 2 литри вода. Така добиениот раствор има 20% сол. Колку литри раствор имало на почетокот во садот?

40. Јован измешал 5 литри 20% раствор на алкохол, 4 литри 25% раствор на алкохол и 11 литри вода. Колку проценти алкохол има во новиот раствор?

41. Колку литри дестилирана вода треба да се измеша со 4 литри 5% раствор на алкохол за да се добие 1% раствор на алкохол?

42. Колку литри дестилирана вода треба да се измешаат со 5 литри 4% раствор на алкохол и 5 литри 2% раствор на алкохол за да се добие 0,5% раствор на алкохол?

43. Земја купена во цвеќарница содржи 11% вода. Ратка сака да засади ружа која бара влажност на земјата 24%. Колку вода треба да тури Ратка на $3\,kg$ купена земја за да засадувањето на ружата е успешно?

44. Во три сада е турена вода. Ако $\frac{1}{2}$ од водата од првиот сад се претури во вториот сад, потоа $\frac{1}{3}$ од водата, која сега е во вториот сад, се претури во третиот сад, и на крајот $\frac{1}{4}$ од вкупното количество од третиот сад се претури во првиот сад, тогаш во секој сад ќе има по 6 литри вода. Колку вода имало на почетокот во секој сад?

45. Килограм говедско без коска чини 450 денари, килограм говедско со коска чини 390 денари, а килограм само коски чини 75 денари. Колку коски има во еден килограм со коски?

46. Дедо Коста треба да ја изора и посее својата нива со семенски материјал-пченица. Тој нивата ја изорал за 3 дена. Првиот ден изорал 20% од целата нива и уште 16 декари, вториот ден 30% од остатокот од првиот ден и уште 20 декари, а третиот ден изорал 75% од остатокот од претходниот ден и последните 30 декари. Колку килограми семенски материјал-пченица треба да купи дедо Коста, ако за сеење на еден декар е потребно 3,5 *kg* пченица?

47. Марко изнајмува 12 глисери кои имаат по 3 или 4 седишта. Колку гиесери има со по 3, а колку со 4 седишта, ако вкупниот број седишта е 43?

48. Во едно стадо има коњи, едногрби и двогрби камили. Ако вкупниот број на грбки е еднаков на 200, а бројот на коњите е еднаков на бројот на двогрбите камили, колку грла добиток има во ова стадо?

49. Кога Павел се префрлил од едно училиште во друго, во одделението во кое дошол процентот на учениците се зголемил од 50% на 52%. Колку девојчиња има во тоа одделение?

50. Минатиот викенд од сите ученици на едно одделение 68% биле на Попова Шапка, 52% биле во Охрид, а пет ученици биле и на Пипова Шапка и во Охрид. Колку ученици има во ова оделение ако се знае дека секој ученик бил барем на едно од наведените места?

51. Од сите ученици во одделението на Горјан 64% биле на некој ракометен натпревар и 14 ученици биле на некој фудбалски натпревар, а 20% биле и на ракометниот и на фудбалскиот натпревар. Секој ученик бил барем на еден од двата натпревари. Колку ученици има во одделението на Горјан?

52. Во едно одделение има 24 ученици. Половина од учениците во тоа одделение свири на некој инструмент. Исто така, $\frac{5}{8}$ од учениците од ова одделение пеат во училишниот хор. Ако е познато дека повеќе од третина, а помалку од $\frac{5}{12}$ ученици од одделението и свири и пее во хорот, колку ученици од ова одделение ниту свири некој инструмент, ниту пее во училишниот хор?

53. На еден остров $\frac{3}{4}$ од мажите се оженети, а $\frac{2}{7}$ од жените се мажени. Колкав дел од населението на островот не е во брак, ако бројот на оженетите мажи е еднаков на бројот на омажените жени?

54. Во едно село $\frac{2}{3}$ од машкото население е оженето, а $\frac{3}{5}$ од женското население е омажено. Колкав дел ов вкупното население е во брак, ако

бројот на оженетите мажи е еднаков на бројот на омажените жени?

55. Во едно одделение 20% од учениците имаат добар успех, 35% имаат многу добар успех, а преостанатите 9 ученици имаат одличен успех. Колку ученици учат во ова одделение?

56. На крајот на првото полугодие во едно одделение учениците го постигнале следниов успех: 24% од учениците имале добар успех, 32% имале многу добар успех, а преостанатите ученици имале одличен успех. На крајот од учебната година 3 ученици од многу добар го поправиле успеход во одличен, па 56% од учениците учебната година ја завршиле со одличен успех. Колку ученици имало во ова одделение?

57. Во едно училиште има точно три паралелки во седмо одделение: $7^{a)}, 7^{b)}$ и $7^{c)}$. Во паралелката $7^{a)}$ учат 36% од вкупниот број ученици во седмо одделение. Бројот на учениците во паралелката $7^{b)}$ е еднаков на $\frac{5}{9}$ од бројот на учениците во паралелката $7^{a)}$. Колку ученици учат во секоја паралелка, ако во $7^{a)}$ има 6 ученици помалку отколку во $7^{c)}$?

58. Еден работен ден 40% од учениците од првата смена во едно основно училиште за ужина купиле ќеврек, 36% од учениците купиле сендвич, а останатите купиле кроасан.
Во втората смена во истото училиште:
- бројот на учениците кои за ужина купиле кроасан, е поголем за 37,5% од бројот на учениците од истото училиште во првата смена кои за ужина купиле кроасан;
- бројот на учениците кои за ужина купиле сендвич, е поголем за 75% од бројот на учениците од истото училиште во првата смена кои за ужина купиле сендвич; и
- бројот на учениците кои за ужина купиле ќеврек, е помал за 75% од бројот на учениците од истото училиште во првата смена кои за ужина купиле ќеврек.
Во која смена бројот на учениците е поголем од бројот на учениците во другата смена? За колку проценти е поголем?

59. Марко има определен број џамлии, Зоран има $\frac{2}{3}$ од тој број, а Петар има $\frac{1}{4}$ од бројот на џамлиите кои ги има Зоран. Ако Зоран има 12 џамлии помалку од Марко, по колку џамлии има секое дете?

60. Маја, Јана и Виолета купиле кутија со 70 топчиња. Јана добила $\frac{1}{4}$ помалку топчиња од Маја, а Виолета добила 15 повеќе топчиња од Маја. Колку топчиња добило секое девојче?

61. Дедо Стојан има овоштарник во кој $\frac{1}{3}$ од овошките се јаболка, $\frac{3}{8}$ се круши и останатите се лешници. Колку најмногу лешници може да има во овоштарникот ако има помалку од 360 овошки?

62. Подготвувајќи се за натпревар, Новак решавал задачи од збирка по математика. Пресметал дека ако 10 дена решава по 5% од вкупниот број задачи ќе реши 70 задачи помалку отколку што би решил ако 8 дена решава по 8% од вкупниот број задачи. Колку задачи има збирката од која Новак се подготвувал за натпревар?

63. Подготвувајќи се за натпревар по математика и физика, Наум решавал задачи од збирките по математика и физика. Збирката задачи по математика има 350 задачи повеќе од збирката задачи по физика. Кога Наум решил 70% од задачите по математика и 44% од задачите по физика, му останале нерешени 90 задачи повеќе по физика отколку по математика. Колку задачи има збирката по математика, а колку збирката по физика?

64. Невена прочитала една книга за 4 дена. Почнувајќи од вториот ден, таа читала за 20% повеќе страници отколку претходниот ден. Првиот и четвртиот ден прочитала за 11 страници повеќе отколку вториот и третиот ден. Колку страници имала книгата која ја прочитала Невена?

65. Мирјана добила нарачка да изработи честитки. Првиот ден таа изработиле 10% од нарачката, вториот ден изработила 25% од остатокот, а тетиот ден 40% од новиот остаток. Тогаш и останало да направи уште 810 честитка. Колку честитки биле нарачани?

66. Баба Милка на своите четири внуци им поделила бомбони на следниов начин: првиот внук добил половина од бомбоните и уште една бомбона, вториот внук добил половина од преостанатите бомбони и уште една бомбона, третиот внук добил половина од преостанатите бомбони и уште една бомбона, за на крајот четвртиот внук да добие половина од преостанатите бомбони и уште една бомбона. Потоа баба Милка немала бомбони. Колку бомбони добил секој внук?

67. Баба Павлина на своите четири внуци им поделила бомбони на следниов начин: првиот внук добил половина од бомбоните и уште половина бомбона, вториот внук добил половина од преостанатите бомбони и уште половина бомбона, третиот внук добил половина од преостанатите бомбони и уште половина бомбона, за на крајот четвртиот внук да добие половина од преостанатите бомбони и уште половина бомбона. Потоа баба Павлина немала бомбони. Колку бомбони добил секој внук?

68. Платата на Петар е зголемена за p проценти, а платата на Јован е намалена за q проценти. Потоа Петар имал како Јован пред тоа, а Јован имал плата како Петар пред тоа.
    1) Определи го q, ако е познато p.
    2) Определи го p ако е познато q.

69. Господинот Рампо сака да чита книга седејќи во паркот под прилепската саат-кула. Еден ден додека тој седел на клупата и читал, ѕвоното од саатот се огласило пет пати. За тоа време тој избројал 11 удари. По последниот удар господинот Рампо станал и тргнал дома. Колку бил часот во тој момент? Ѕвоното на саат-кулата се огласува со толкав број удари колку што е цел број часови во тој момент, а на секој половина час се огласува со еден удар.

70. Една работилница за неколку дена требало да произведе определено количество од еден ист производ. Според планот за производство требало да се произведуваат по 10 производи на ден. Но, секој ден се произведувало 20% повеќе од предвиденото дневно производство. Осум дена пред крајниот рок биле произведени 72 производи повеќе од вкупно предвиденото количество според планот. Колку вкупно производи се произведени до крајниот рок?

4. ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. Околу тркалезна маса седат седум луѓе, меѓу кои има лажливци, кои секогаш лажат, и витези, кои секогаш ја говорат вистината. Првиот човек му рекол на вториот: „Ти си лажливец“. Вториот истото му го рекол на третиот, третиот на четвртиот, четвртиот на петтиот, петтиот на шестиот и шестиот на седмиот. Што му рекол седмиот на првиот?

2. Околу тркалезна маса седат 10 луѓе, витези и лажливци. Секој од нив рекол: „*Двата мои соседи се лажливци.*“ Колку витези има меѓу овие десет луѓе ако витезите секогаш ја кажуваат вистината, а лажливците секогаш лажат?

3. Во собата се наоѓаат неколку луѓе. Секој од нив е или лажливец (кој секогаш лаже) или витез (кој секогаш ја говори вистината). Од собата се слушнале неколку гласови:
   Прв глас. Во собата има најмногу тројца. Сите сме лажливци.
   Втор глас. Во собата има најмногу четворица. Не сме сите лажливци.
   Трет глас. Во собата има петмина. Тројца се лажливци.
   Дали во собата има повеќе лажливци или витези?

4. Околу тркалезна маса седат дванаесет деца. Момчињата секогаш им ја говорат вистината на момчињата, а ги лажат девојчињата, а девојчињата секогаш ја говорат вистината на девојчињата, а ги лажат момчињата. Секое дете на својот десен сосед на масата му ја кажал една од реченицте: „Ти си момче“ или „Ти си девојче“. Секоја од двете реченици е изговорена еднаков број пати. Колку момчиња, а колку девојчиња седеле околу масата?

5. Пред почетокот на Европското фудбалско првенство, пет пријатели ги дале следниве прогнози за тоа кои екипи ќе играат во финалето:
   1) Франција и Холандија,
   2) Белгија и Германија,
   3) Белгија и Франција,
   4) Англија и Холандија,
   5) Холандија и Германија.

Се покажало дека една прогноза била целосно неточна, а во преостанатите точно е наведен само по еден финалист. Кои екипи играле во финалето и која прогноза била целосно неточна?

6. Меѓу три воени ветерани се водел следниов разговор:
   A: B има две раце.
   B: C има две раце.
   C: A има две раце.
   A: Сите заедно имаме две раце.
   B. Сите заедно имаме три раце.
   C: Сите заедно имаме четири раце.
   Се покажало дека секој излагал толку пати колку што имал раце. Колку раце има секој од трите воени ветерани?

7. Лицата A,B,C ги дале следниве изјави:
   A: Владо уловил повеќе од 20 риби.
   B: Владо уловил помалку од 20 риби.
   C: Владо уловил барем една риба.
   Колку риби уловил Владо, ако е точна само една од наведените изјави?

8. Тројца пријатели разговараат на плажа:
   A: Овде сме најмногу 5 часа.
   B: Не, овде сме повеќе од 5 часа.
   C: Овде сме повеќе од 3 часа.
   Изјавата на само еден од пријателите е вистинита. Кој е тој?

9. Определи ги сите двоцифрени броеви n, ако меѓу следниве четири тврдења две се точни и две се неточни:
   1) n е делив со 5,
   2) n е делив со 23,
   3) $n+7$ е точен квадрат,
   4) $n-10$ е точен квадрат.

10. Јован и Гоце со своите синови биле на риболов. Јован уловил риби исто колку и неговиот син, а Гоце три пати повеќе од неговиот син. Вкупно уловиле 25 риби. Синот на Јован се вика Ристо. Како се вика синот на Гоце?

11. Еден човек има три часовника – еден обичен и два електрична кои се напојуваат со струја од градската мрежа. Од двата електрични часовника, едниот кога ќе снема струја застанува и продолжува да работи по доаѓањето на струјата, а другиот кога ќе снема струја се враќа на почетната положба 00:00 и по доаѓањето на струјата тргнува од почеток. Утрината кога човекот тргнал на работа сите три часовника покажувале 06:30. Во текот на денот еднаш снемало струја. Кога човекот се вратил дома едниот часовник покажувал 07:50, другиот 07:19, а третиот 06:03. Во кој временски интервал немало струја?

12. Филип познава пет девојки: Ана, Бела, Цвета, Дана и Ева. Познати се следниве факти:
    1) Девојките може да се поделат во две старосни групи: три имаат помалку од 25 години, а две имаат повеќе од 25 години.
    2) Две девојки се учителки, а останатите се секретарки.
    3) Ана и Цвета се во иста старосна група.
    4) Дана и Ева се во различни старосни групи.
    5) Бела и Ева имаат иста професија.
    6) Цвета и Дана имаат различни професии.
    7) Меѓу петте девојки Филип ќе се ожени со учителка која има повеќе од 25 години.

    Со која девојка ќе се ожени Филип?

13. Октоподите по правило имаат осум краци. Но, во борбата за опстанок октоподите често пати стануваат инвалиди, додека некои заради генетските промени, предизвикани од загадувањето на морињата, се раѓаат со помалку или повеќе од осум краци.

    Познато е дека, ако октопод има парен број краци, тој секогаш ја говори вистината, а ако има непарен број краци тој секогаш лаже. Еднаш зелениот октопод му рекол на синиот октопод:
    - Јас имам осум краци, а ти само шест.
    - Не. Јас имам осум краци, - налутено одговорил синиот октопод. Ти имаш само седум.

    Виолетовиот октопод го подржал синиот октопод и се пофалил:
    - Тој навистина има осум краци, а јас имам точно девет краци.
    - Никој од вас нема осум краци, - се вклучил во расправата црвениот октопод, - само јас имам осум краци.

Меѓу соговорниците постои октопод кој има точно осум краци. Кој октопод има точно осум краци?

14. Ако три четвртоци во еден месец се со непарен датум кој ден е 28. во тој месец?

15. На летната математичка школа имало 12 ученици кои биле родени во различни месеци. Покрај тоа, разликата во возраста на било кои два од овие 12 ученици е помала од една година. Ацо е меѓу нив најстар и тој е 214 дена постар од Митре кој е седми по ред. Определи го роденденот на Митре.

16. Андреј има дигитална вага која покажува точен број грамови и 100 вреќички со по 100 златници. Во 99 вреќички се златници од по 10 грама, а во една се златници од 9 грама. Како само со едно мерење Андреј може да открие во кои вреќички се златници од по 10 грама, а во која се златници од 9 грама?

17. Меѓу 2013 на изглед еднакви златници се наоѓаат 50 фалсификувани. Сите исправни златници се со иста маса и сите фалсификувани златници се со иста маса која за 1 грам се разликува од масата на исправните златници (може да се полесни или потешки). Имаме на располагање вага со два таса и скала која ја покажува разликата на масите на едниот и другиот тас во грамови. Дали може за произволно избран златник со едно мерење да се констатира дали е исправен или е фалсификуван?

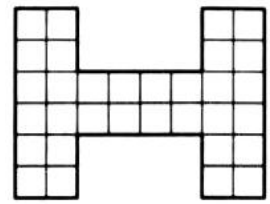
18. На располагање се две кофи, река и празно отворено буре кое собира околу 200 литри течност. Не е дозволено претурање од една кофа во друга. Дали може да се одмерат 13 литри вода во бурето ако кофите се со зафатнини од:
    а) 7 литри и 11 литри,
    б) 6 литри и 10 литри?

19. Определи го најмалиот број камиони со носивост 3 тони со кои одеднаш може да се превезат 50 контејнери со маси: $370\,kg, 372\,kg, 374\,kg, ..., 466\,kg, 468\,kg$.

20. Фирма за доставување на храна запослено 50 доставувачи на храна и почнува да работи во 8 часот, кога се првите испораки на храна. Следните испораки се на секој час (во 9:00, во 10:00, ...). Последната испорака е во 18:00. На 1. септември секој доставувач во некои 4 термини доставувал храна. Докажи дека постои термин кога 19 доставувачи разнесувале храна.

21. На некои полиња на шаховската табла се поставени квадратни плочки. Ана ги избројала плочките во секој ред и добила осум различни броја. Илија ги избројал плочките во секоја колона и не добил ниту еден од броевите кои ги добила Ана. Кои се броевите на Ана?

22. Фигурата прикажана на цртежот десно подели ја на 8 складни фигури на два различни начини.



23. Расечи правилен шестаголник на три дела од кои може да се состави ромб со иста плоштина.

24. Дали може квадрат да се подели на 2011 помали дисјунктни квадрати. Квадратите не мора да се меѓусебно складни?

25. Андреј има 3 конци. Некои од нив го исекол на по три дела, а потоа некои од добиените делови ги исекол на по три дела итн. Дали до оваа постапка може да се добијат 2011 конци?

26. Дали е можно на кружница да се запишат 2009 броеви такви што разликата на секои два соседни броја е 2 или -2?

27. Почнувајќи од цифрата 1 во горниот лев агол повлечи искршена линија до цифрата 9 во долниот десен агол. Притоа од цифра до цифра може да се оди само хоризонтално од лево кон десно и вертикално од горе кон долу, а збирот на цифрите кои ќе бидат прецртани со искршената линија треба да биде еднаков на 100. Определи го патот кој содржи најголем, односно најмал број свртувања.

1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9

28. На таблата се запишани природните броеви од 1 до 6. Дозволено е да се изберат два од нив и секој од избраните броеви да се зголеми за 1. Дали може со повторување на оваа постапка да се добијат шест еднакви броеви?

29. На таблата се запишани природните броеви од 1 до 6. Дозволено е да се изберат три од нив, на пример a,b,c и истите да се заменат со $a+b-c,b+c-a,c+a-b$. Дали е можно со повеќекратно повторување на оваа постапка да се добијат шест еднакви броја?

30. На секое од 2005 топчиња е запишан број чија апсолутна вредност е еднаква на 1. Дали е можно топчињата да се распоредат во две групи, така што збирот на сите броеви запишани на топчињата во едната група е еднаков на збирот на сите броеви запишани на топчињата во другата група?

31. Во една колона се наредени 2006 жетони кои се последователно нумерирани со природните броеви 1, 2, 3, ..., 2006. Во еден потег е дозволено да се променат местата на жетоните кои имаат заеднички сосед (на пример, на почетокот може да се сменат местата на жетоните 62 и 64 бидејќи двата жетони се соседни на жетонот 63). Дали е можно по конечен број потези на прво место да дојде жетонот со број

2006, а на последно место жетонот со број 1.

32. На таблата се запишани природните броеви 1, 2, 3, ..., 2012, 2013, 2014. Дозволено е било кои два броја да се заменат со апсолутната вредност на нивната разлика. Постапката се продолжува се додека на таблата не остане еден број. Дали тој број може да биде:
а) 0, б) 1?

33. При почетното поставување на фигурите на шаховската табла еден бел скокач (коњ) се наоѓа на полето $B1$, а еден црн скокач се наоѓа на полето $B8$. Дали може со скокачот од полето $B1$ и со скокачот од полето $B8$ да се направат по 2006 потези така што тие ќе ги заменат своите места?

34. Колку жетони може да се постават на шаховска табла ако не е дозволено да се постави жетон на полето $e3$ ниту две фигури може да се на две полиња кои се симетрични во однос на полето $e3$, т.е. центарот на тоа поле?

35. Триста кругчиња (полиња) се наредени на една кружница. Во едно поле е поставен жетон. Илија го поместува жетонот во насока на движењето на стречката на часовникот така што во првиот потег го поместува за едно поле, во вториот за две полиња, во третиот за три итн. во секој следен потег бројот на поминатите полиња е за 1 поголем од бројот на поминатите полиња во последнито потег. Дали на овој начин жетонот може да се доведе до секое од дадените 300 полиња?

36. Јанко и Марко си играат со броеви така што Јанко секогаш додава 3, а Марко секогаш одзема 5. Додавањето и одземањето на број е наизменично. Колку пати додале и одзеле број (тоа го направиле еднаков број пати), ако почетниот број е 2008, а последниот број е -28?

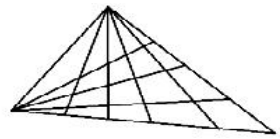
37. Дамјан и Доротеја се играат со броеви така што Дамјан секогаш додава 5, а Доротеја одзема 2. Додавањето и одземањето го прават наизменично. Со кој број почнале ако додавале и одземале по 1339 пати, а на крајот го добиле бројот 2009?

38. Колку најмалку, а колку најмногу пати во текот на една година може петокот да биде 13. ден во месецот?

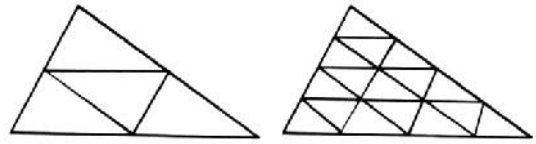
39. Определи го бројот на рамнокраките триаголници чии должини на страни изразени во cm се природни броеви и чиј периметар е еднаков на $2005\,cm$.

40. Ги разгледуваме рамнокраките триаголници чии должини на страни изразени во сантиметри се природни броеви. Определи го бројот на сите такви триаголници чиј периметар е еднаков на $2021\,cm$.

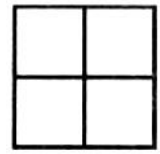
41. Колку различни траголници има на цртежот десно? А колку четириаголници?



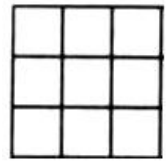
42. Колку складни триаголници ќе добиеме, ако секоја страна на даден триаголник ја поделиме на 12 еднакви делови и соодветните точки ги поврзиме со паралелни отсечки? На пример, ако страните на триаголникот ги делиме на 2 или 4 еднакви делови, се добиваат 4 или 16 складни триаголници (цртеж десно).



43. Колку рамнокраки правоаголни триаголници определуваат темињата на квадратите на цртежот десно?



44. Колку неправоаголни рамнокраки триаголници има на дадената квадратна мрежа чии темиња се темињата на квадратите на мрежата?
\



45. На колку начини сума од 20 денари може да се исплати со монети од 1, 2 и 5 денари?

46. За турнир во шах кој се игра преку Интернет се пријавиле n шахисти.

Турнирот се игра по системот да шахистот кој ќе ја загуби партијата отпаѓа, а во случај на реми испаѓа шахистот кој играл со бели фигури. Колку партии треба да се одиграат за да се добие победник на турнирот?

47. На еден тениски турнир учествуваат 17 тенисери и секој тенисер игра по еден меч со секој друг тенисер. Колку меча се одиграни на овој турнир?

48. На тениски турнир учествуваат 17 тенисери. Дали е можно по 5 дена на турнирот секој учесник да има по 5 одиграни меча?

49. Јанко реди на полица 3 книги за македонски јазик, 3 книги за математика и 2 книги за биологија, така што книгите за ист предмет ќе бидат една до друга. На колку начини Јанко може да ги нареди овие книги?

50. Определи го бројот на четирицифрените броеви кои се деливи со 5, кај кои:
    а) цифрите може да се повторуваат,
    б) сите цифри се различни.

51. Определи го бројот на природните четирицифрени броеви чиј производ на цифри не е поголем од 4?

52. Определи го бројот на седумцифрените броеви кај кои барем две цифри се еднакви.

53. Определи го бројот на деветцифрените броеви кај кои барем две цифри се еднакви.

54. Определи го бројот на десетцифрените природни броеви кои се запишани со различни цифри и кои се деливи со 9?

55. Колку има петцифрени броеви во чиј запис не се содржи цифрата 0 и чиј збир на цифри е поголем од нивниот производ?

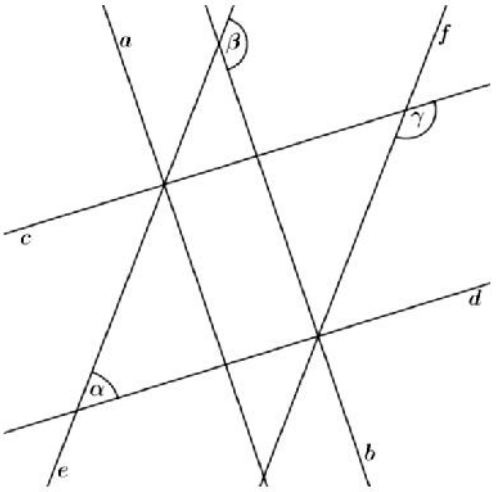
56. Во правоаголен координатен систем е даден правоаголник $ABCD$:
$$A(-100,-50),\ B(100,-50),\ C(100,50),\ D(-100,50).$$

Определи го бројот на точките $T(m,n)$ кои припаѓаат во правоаголникот $ABCD$, а за чии координати m n важи $20m+24n=2024$, каде $m,n\in\mathbb{Z}$.

5. ГЕОМЕТРИЈА

5.1. АГЛИ ВО ТРИАГОЛНИК И ЧЕТИРИАГОЛНИК

1. На цртежот десно се означени правите a,b,c,d,e и f, како и аглите ~, и ¥. За дадените прави важи $a \| b,\ c \| d,\ e \| f$ и $a \perp d$. Ако мерниот број на аголот ~ е $50^\circ 24'$, определи ги мерните броеви на аглите и ¥.



2. На страната AB на триаголникот ABC се определени точки M и K такви што $\overline{AM} = \overline{AC}$ и $\overline{BK} = \overline{BC}$. Ако триаголникот CMK е рамнокрак со агол 30° при врвот C определи ги аглите на триаголникот ABC.

3. Висината BH и симетралата на $\angle ACB$ на триаголникот ABC се сечат во точката M. Ако $\angle BMC$ е два пати поголем од $\angle ACB$ пресметај го $\angle ACB$.

4. Во триаголникот ABC симетралите на $\angle BAC$ и $\angle ACB$ се сечат под агол од 124°. Определи го $\angle ACB$.

5. Даден е триаголник ABC, $\angle BAC = \sim, \angle ABC = , \angle ACB = ¥$. Симетралите на аглите ~ и се сечат под агол од 115°, а симетралите на

аглите и ¥ се сечат под агол од 125°. Определи ги аглите на триаголникот ABC.

6. Во триаголникот ABC симетралите на аглите во темињата A и B се сечат под агол 140°. Висината и симетралата повлечени од аголот во темето C формираат агол од 20°. Одреди ги аглите во триаголникот.

7. Во внатрешност на триаголникот ABC е дадена точка P. Докажи дека $\measuredangle ACB < \measuredangle APB$.

8. На страната AC на триаголникот ABC е дадена точка P, а на страната BC точка Q. Докажи дека $\measuredangle CAQ + \measuredangle CBP < \measuredangle APB + \measuredangle BQA$.

9. Даден е рамнокрак триаголник ABC, при што $\overline{AC} = \overline{BC}$. На кракот AC се избрани точки M и N такви да $\measuredangle MBA = \measuredangle CBN$ и $\overline{MN} = \overline{BM}$, при што точката M е меѓу точките A и N. Определи го $\measuredangle NBA$.

10. Во остроаголниот триаголник ABC разликата на внатрешните агли во темињата A и C е 40°. Висините повлечени од темињата A и C се сечат во точката K и важи $\measuredangle AKC = 120^\circ$. Определи ги мерните броеви на внатрешните агли на триаголникот ABC.

11. Над едната катета на рамнокракиот правоаголен триаголник од надворешната страна е конструиран рамностран триаголник. Определи ги аглите на триаголникот кој е определен со хипотенузата на правоаголниот триаголник и темето на рамностраниот триаголник кое е надвор од правоаголниот триаголник.

12. Едниот агол на правоаголниот триаголник има 33°. Определи го аголот кој го формираат висината и тежишната линија кои соодветствуваат на хипотенузата.

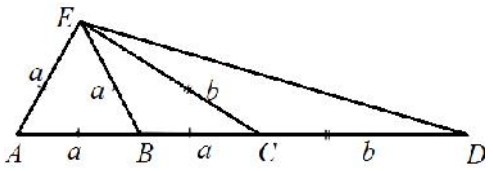
13. а) Докажи дека во секој правоаголен триаголник тежишната линија која соодветствува на хипотенузата е еднаква на половина од хипотенузата.
б) Определи ги аглите на правоаголен триаголник кај кој едната

катета е еднаква на половина од хипотенузата.

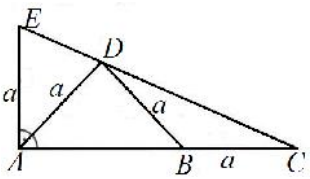
14. Нека O е центарот на кружницата опишана околу правоаголниот триаголник ABC со прав агол во темето C. Ако $\measuredangle AOC - \measuredangle BOC = 30^\circ$ пресметрај ги аглите на триаголникот ABC.

15. Аголот меѓу висината повлечена кон хипотенузата е симетралата на правиот агол во правоаголниот триаголник е еднаков на 11°. Определи ги мерките на аглите на овој триаголник.

16. Пресметај ја мерката на $\measuredangle ADE$ прикажан на цртежот десно.



17. Пресметај ја мерката на $\measuredangle ACE$ прикажан на цртежот десно.



18. На хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC се определени точки E и M такви што $\overline{AE} = \overline{AC}$ и $\overline{BM} = \overline{BC}$. Докажи дека $\measuredangle MCE = 45^\circ$.

19. Определи ги острите агли на правоаголниот триаголник ABC ако нормалата од темето на правиот агол C повлечена кон хипотенузата и симетралата на $\measuredangle ACB$ формираат агол кој е еднаков на $\frac{1}{9}$ од тапиот агол меѓу симетралите на острите али на триаголникот ABC.

20. Во рамнокрак триаголник ABC симетралите на надворешните агли на основата се сечат по агол од 75°. Што е поголемо, основата или кракот на овој триаголник?

21. Симетралата на $\measuredangle BAC$ на рамнокракиот триаголник ABC, со основа AB, гради со висината повлечена од темето A агол еднаков на 12°. Определи ги аглите на овој триаголник.

22. Периметарот на триаголникот ABC е еднаков на $72\,cm$. Ако точката D е средина на страната BC, периметарот на триаголникот ABD е $54\,cm$, а периметарот на триаголникот ADC е $48\,cm$. Спореди ги аглите на триаголникот ABC ако збирот на страните b и c е еднаков на $42\,cm$.

23. Во триаголникот ABC важи $\measuredangle BAC = 44^\circ$ и $\measuredangle ABC = 36^\circ$. На страната AB се дадени точки M и K такви што $\overline{AM} = \overline{AC}$ и $\overline{BK} = \overline{BC}$. Спореди ги страните на триаголникот CMK.

24. Даден е триаголник ABC со $\measuredangle BAC = 40^\circ$ и $\measuredangle ABC = 30^\circ$. На страната AB се определени точки E и M такви што $\overline{AE} = \overline{AC}$ и $\overline{BM} = \overline{BC}$. Спореди ги сраните на триаголникот MEC.

25. Во триаголник ABC аголот во темето C, т.е. $\measuredangle ACB$ е 48°. Нормалата на симетралата на $\measuredangle ACB$ која минува низ темето C ја сече правата AB во точка D, така што точката B лежи меѓу точките A и D и $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{BC}$. Пресметај ги големините на аглите во триаголникот ABC.

26. Симетралата на $\measuredangle BAC$ на основата AB на рамнокракиот триаголник ABC формира со спротивната страна агол од 52°. Пресметај го аголот меѓу симетралите на аглите на основата на овој триаголник.

27. Во рамнокрак $\triangle ABC$ симетралата на кракот AC и симетралата на $\measuredangle BAC$ се сечат во точка D која припаѓа на кракот BC. Определи ја големината на $\measuredangle CDA$.

28. Во рамнокракиот триаголник ABC аголот кој го формираат симетралата на аголот при врвот и симетралата на аголот при основата е пет пати поголем од аголот при основата. Што е поголемо: основата или кракот на овој триаголник?

29. Во триаголникот ABC аголот $\sim$ е еднаков на 80°, а висините h_a и h_b се сечат под агол од 126°. Која е најмала, а која е најголема страна

на триаголникот ABC ?

30. Во триаголникот ABC аголот кој го градат симетралите на надворешните агли во темињата B и C е еднаков на внатрешниот агол во темето C . Спореди ги должините на страните AB и AC .

31. Во триаголникот ABC аголот кој го формираат симетралите на надворешните агли во темињата B и C е еднаков на внатрешниот агол во темето A . Ако аголот во темето B е за 13° поголем од аголот во темето C , спореди ги должините на страните на триаголникот ABC .

32. На страните AB, AC и BC на триаголникот ABC избрани се редоследно точките D, E и F така што $\overline{AD} = \overline{AE}$ и $\overline{BD} = \overline{BF}$. Ако $\measuredangle EDF = 40^\circ$, пресметај ја мерката на $\measuredangle ACB$.

33. Нека M е точка на катетата BC на правоаголниот триаголник ABC таква што $\overline{BM} = 2\overline{MC}$. Ако k е средина на хипотенузата AB на овој триаголник, докажи дека $\measuredangle BAM = \measuredangle MKC$.

34. Симетралите на аглите ~ и во триаголникот ABC ги сечат спротивните страни BC и AC под агли 91° , односно 92° . Која е најмала, а која е најголема висина на триаголникот ABC ?

35. Впишаната кружница k во триаголникот ABC ги допира неговите страни во точките P, Q, R . Аглите на триаголникот ABC се ~, ,¥ . Определи ги аглите на триаголникот PQR .

36. Во триаголникот ABC аголот ~ е 78° . Точката M е на страната BC таква што триаголниците ABM и AMC се рамнокраки. Определи ги аглите на триаголникот ABC .

37. Во триаголникот ABC висината CC' и тежишната линија CC_1 го делат $\measuredangle ACB$ на три еднакви агли. Определи ги аглите на овој триаголник.

38. Даден е рамностран триаголник ABC и на страната AB произволна точка D. Нека E е точка таква што триаголникот CDE е рамностран и точките D и E се на различни страни од правата $p(B,C)$. Определи го $\angle CBE$.

39. Даден е рамностран триаголник ABC. На продолжението на висината CD, преку темето C, е земена точка E, таква што $\overline{CE} = \overline{AB}$. Докажи дека $\angle ACB$ и $\angle AEB$ се комплементни агли.

40. Даден е рамнокрак правоаголен триаголник ABC. На продолжението на хипотенузата AB, преку темето B, дадена е точка E таква, што $\overline{BE} = \overline{BC}$. Докажи дека аголот под кој симетралата на аголот A ја сече отсечката CE е суплементен на $\angle CBE$.

41. Дадена е отсечка AB и на неа произволна точка C. Од иста страна на правата $p(A,b)$ се конструирани рамностранни триаголници ACD и CBE. Отсечките AE и BD се сечат во точката F .Определи го $\angle EFB$.

42. Во правоаголен триаголник симетралата на правиот агол е симетрала и на аголот кој го формираат тежишната линија и висината повлечени од темето на правиот агол. Докажи!

43. Висината повлечена кон хипотенузата и симетралата на правиот агол се сечат под агол од 12°. Пресметај ги аглите на овој правоаголен триаголник.

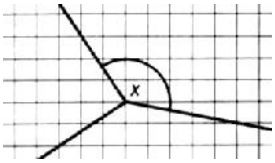
44. Во правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C, на страната AB е дадена точка M, а на страната AC точка N, така што $\overline{BC} = \overline{CN} = \overline{MN} = \overline{AN}$. Пресметај ги аглите на триаголник ABC.

45. Нека точката O е подножјето на нормалата повлечена од темето на правиот агол C кон хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC. Симетралата на $\angle ACO$ ја сече правата AB во точката K. Нормалата од K на AC ја сече AC во точката M. Определи го аголот меѓу правите CK и OM.

46. Центарот на впишаната и центарот на опишаната кружница на еден

триаголник се точки симетрични во однос една страна на триаголникот. Определи ги аглите на овој триаголник.

47. Во квадратна мрежа се нацртани три агли (цртеж десно). Определи ја мерката на аголот x.



48. Определи ги аглите на рамнокрак триаголник ABC $(\overline{AC} = \overline{BC})$ ако $\overline{AM} = 2\overline{CE}$, каде M и E се точките на пресеците на симеталите на аглите во темињата A и C редоследно со BC и AB.

49. Над страната AB на квадратот $ABCD$ е конструиран рамностран триаголник ABE при што точката E е во внатрешноста на квадратот. Определи ја мерката на $\angle DEC$.

50. Нека M е точка на страната AB на квадратот $ABCD$, таква што $\angle ADM = 20^\circ$, а N е точка на страната BC таква што е исполнето $\overline{CN} = \overline{DM} - \overline{AM}$. Определи ја мерката на $\angle MDN$.

51. Даден е правоаголник $ABCD$ $(\overline{AB} > \overline{BC})$. Симеталата на дијагоналата AC ја дели страната AB во однос 2:1. Докажи дека дијагоналите на правоаголникот се сечат под агол од 60°.

52. Симеталата на едната дијагонала ја сече подолгата страна на правоаголникот така што едниот од добиените делови е еднаков на пократката страна. Докажи дека дијагоналите на правоаголникот се сечат под агол од 45°.

53. Во правоаголник $ABCD$, $\overline{AB} > \overline{BC}$, симеталата на $\angle BAD$ ја сече отсечката BD во точката M. Ако $\angle MAC = 20^\circ$, определи ги аглите на триаголникот AMD.

54. Во ромбот $ABCD$ висината DD' е нормална на страната AB. Аголот во темето A е остар, а периметарот на ромбот е 8 пати поголем од висината DD'. Определи ги острите агли меѓу висината DD' и

дијагоналите на ромбот AC и BD.

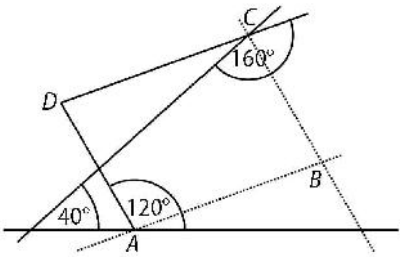
55. Симетралата на внатрешниот агол на паралелограмот сече една негова страна под агол кој е еднаков на еден од внатрешните агли на паралелограмот. Определи ги аглите на тој паралелограм.

56. Симетралата на внатрешниот агол на паалелограмот сече една негова страна под агол кој е еднаков на $\frac{3}{4}$ од едниот внатрешен агол на паралелограмот. Определи ги аглите на овој паралелограм.

57. Нека M е точка на страната AB, а K е точка на страната CD на паралелограмот $ABCD$, така што $\overline{AM} = \overline{CK}$ и $\measuredangle AKB = 106^\circ$. Определи го аголот меѓу дијагоналите на четириаголникот $BCKM$.

58. Произволен правоаголен триаголник е пресликан со осна симетрија во однос на правата која е определена со неговата хипотенуза и така е добиен делтоид. Докажи дека може:
а) околу тој делтоид да се опише крижница,
б) во тој делтоид да се впише кружница.

59. На цртежот е прикажан паралелограмот $ABCD$. Определи ги неговите агли.



60. Даден е правоаголник $ABCD\,(\overline{AB} > \overline{BC})$. Нормалата од темето B повлечена кон дијагоналата AC, ја сече дијагоналата AC во точката M, така што должината на отсечката AM е три пати поголема од должината на отсечката MC. Определи го аголот под кој се сечат дијагоналите на овој правоаголник.

5.2. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

1. Даден е триаголник ABC. На правите AB, BC и CA определи точки M, N и P кои се еднакво оддалечени од точките A и B.

2. Дадена е кружница $k(S, 5\,cm)$ и во нејзината внатрешност точка M $(M \neq S)$. Определи точка A која припаѓа на кружницата $k(S, 5\,cm)$ и која е еднакво оддалечена од точките M и S.

3. Нацртај три неколинеарни точки A, B и C. Во рамнината во која лежат точките A, B и C конструирај права p така што растојанијата од точките A, B и C до правата p се еднакви. Колку такви прави постојат?

4. Дадени се точки A и A_1 и права p. Конструирај триаголник ABC, ако точката A е теме на триаголникот, точката A_1 е средина на страната BC, а правата p ја содржи висината CC'.

5. Дадени се неколинеарните точки D, E, F. Конструирај триаголник ABC така што редоследно точките D, E, F се подножјето на висината повлечена од темето C и средините на страните AC и BC.

6. Конструирај триаголник ABC ако должината на едната страна на триаголникот е $6\,cm$, соодветната висина е $5\,cm$, а должината на радиусот на опишаната кружница е $4\,cm$.

7. Конструирај триаголник ABC ако $a = 6\,cm$, $\sim + ¥ = 120^\circ$ и радиусот на впишаната кружница е $r = 1{,}5\,cm$.

8. Конструирај правоаголен триаголник ABC со прав агол о темето C ако разликата на хипотенузата c и катетата a е $c - a = 4\,cm$ и $\measuredangle ABC = 22^\circ 30'$.

9. Конструирај правоаголен триаголник чиј еден остар агол е $22^\circ 30'$, а

збирот на неговите катети е еднаков на $10,5\,cm$.

10. Конструирај правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C ако е даден збирот на хипотенузата и катетата $c+a=7\,cm$ и аголот $\measuredangle BAC=22^\circ 30'$.

11. Дадени се неколинеарни точки M, B_1, C_1. Конструирај триаголник ABC ако точката M е подножје на висината повлечена од темето A, B_1 е средина на страната AC и C_1 е средина на страната AB.

12. Конструирај триаголник ABC ако се дадени $\overline{AB}=7\,cm, \overline{AC}=3\,cm$ и тежишна линија $\overline{AA_1}=4\,cm$.

13. Конструирај триаголник ABC ако се дадени $\overline{AB}=7\,cm$, $\measuredangle ABC=75^\circ$ и тежишната линија $\overline{BB_1}=4\,cm$.

14. Конструирај триаголник ако $a=5\,cm$, $=45^\circ$ и радиусот на опишаната кружница е $3\,cm$.

15. Конструирај триаголник чии тежишни линии се складни со дадени отсечки AD, BE и CF.

16. Дадени се прави a и b кои се сечат во точката S и точка C која не лежи на правите a и b. Конструирај триаголник ABC ако правата a е симетрала на $\measuredangle BAC$, а правата b е симетрала на $\measuredangle ABC$.

17. Конструирај триаголник ABC за кој се дадени страната $a=5\,cm$, висината $h_a=4\,cm$ и радиусот на опишаната кружница $R=3\,cm$.

18. Конструирај триаголник ABC за кој се познати страната b, радиусот на впишаната кружница r и аголот ~ .

19. Дадени се три неколинеарни точки A, B, H. Конструирај триаголник ABC ако A и B се темиња на тој триаголник, а H е ортоцентар.

20. Дадени се три неколинеарни точки A, B и T. Конструирај триаголник ABC ако точките A и B се темиња на тој триаголник, а точката T е негово тежиште.

21. Конструирај ромб со висина $h = 4\,cm$ и еден внатрешен агол еднаков на 135°.

22. Конструирај ромб $ABCD$ кај кој еден внатрешен агол е еднаков на 120° и радиусот на впишаната кружница е еднаков на $2\,cm$.

23. Конструиран квадрат кај кој збирот на страната и дијагоналата е еднаков на $10\,cm$.

24. Конструирај квадрат кај кој разликата на дијагоналата и страната е еднаква на $2\,cm$.

25. Конструирај трапез $ABCD$ ако е $AB \| CD$, $\overline{AB} = 8\,cm$, $\overline{CD} = 2\,cm$, $\overline{AD} = 4\,cm$ и $\overline{BC} = 5\,cm$.

26. Конструирај трапез $ABCD\,(AB \| CD)$ таков што $\overline{AB} = 7\,cm, \overline{AC} = 5\,cm,$ $\overline{CD} = 3\,cm$ и $\measuredangle ACB = 60^\circ$.

27. Конструирај квадрат $ABCD$, ако се дадени темето A, точка M која припаѓа на дијагоналата AC и точка N која припаѓа на страната BC.

28. Конструирај трапез $ABCD$ ако е познато дека $AB \| CD$, $\overline{AB} = 8\,cm,$ $\overline{CD} = 2\,cm, \overline{BD} = 8\,cm$ и $\overline{AC} = 6\,cm$.

5.3. ПЕРИМЕТАР И ПЛОШТИНА НА РАМНИНСКИ ФИГУРИ

1. За аглите на правоаголниот триаголник ABC важи $\measuredangle ABC = 2\measuredangle CBA$ и $\overline{BC} = 8\,cm$. Точката M е средина на хипотенузата AB, точката N е средина на катетата AC и точката P е средина на отсечката AM. Пресметај ја должината на искршената линија $BCMNPA$.

2. Нека D е точка на кракот BC на рамнокракиот триаголник ABC, таква што $2\overline{DC} = \overline{BD}$. Определи ја должината на основата AB на овој триаголник ако е познато дека неговиот периметар е $25\,cm$ и дека периметарот на триаголникот ABD е за $1\,cm$ поголем од периметарот на триаголникот ADC.

3. Должините на страните на еден триаголник се три последователни парни природни броеви. Определи ги страните на триаголникот ако неговата плоштина е еднаква на $24\,cm^2$, а радиусот на впишаната кружница е $2\,cm$.

4. Нека M е средината на хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC. Ако периметрите на триаголниците ABC, AMC и BMC се редоследно $80\,cm$, $50\,cm$ и $64\,cm$, пресметај ги нивните плоштини.

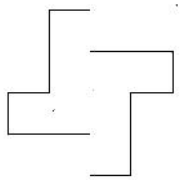
5. Основата AB на рамнокракиот триаголник ABC е долга $8\,cm$. Тежишната линија AM го дели овој триаголник на два триаголника чии периметри се разликуваат за $2\,cm$.
   а) Определи ја должината на кракот на триаголникот ABC.
   б) Спореди ги плоштините на двата триаголника.

6. Нека P и Q се редоследно средините на страните BC и CD на правоаголникот $ABCD$. Колкав дел од плоштината на правоаголникот $ABCD$ е плоштината на триаголникот APQ?

7. Во правоаголен координатен систем се зададени точка $S(2,3)$ и квадрат $ABCD$ за кој се познати три темиња $A(3,1), C(-2,6)$ и $D(-2,1)$.

Квадратот $A'B'C'D'$ е централно симетричен на квадратот $ABCD$ во однос на точката S. Определи ги координатите на точките B, A', B', C', D' и плоштината на пресекот на квадратите $ABCD$ и $A'B'C'D'$.

8. Фигурата на цртежот е составена од 4 складни правоаголници, кај кои едната страна е два пати подолга од другата. Пресметај го периметарот на оваа фигура, ако нејзината плоштина е $72cm^2$.



9. Во рамнокрак трапез кракот е за $10\,cm$ пократот од подолгата основа, а периметарот на трапезот е $34\,cm$. Определи ги страните на трапезот, ако дијагоналата AC е симетрала на аголот A.

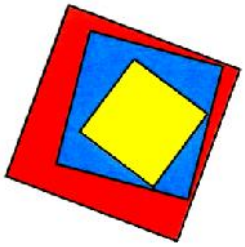
10. Нека L е периметарот на конвескен четириаголник и нека се d' и d'' неговите дијагонали. Докажи дека
$$d'+d'<L<2(d'+d'').$$

11. Нека P, Q, R, S се средините на страните AB, BC, CD, DA на конвексниот четириголник $ABCD$ и нека L е неговиот периметар. Докажи дека
$$2(\overline{PR}+\overline{QS})\le L.$$

12. Во паралелограм $ABCD$ симетралата на аголот A го сече продолжението на страната BC во точката P. Ако $\overline{CP}=5\,cm$, а периметарот на паралелограмот е $56\,cm$, пресметај ги должините на страните на паралелограмот.

13. Даден е правоаголник $ABCD$ $(\overline{AB}>\overline{BC})$. Нека s е симетралата на $\measuredangle BAD$, D_1 е точката симетрична на точката D во однос на правата s и B_1 е точката симетрична на точката B во однос на правата s. Ако $\overline{AD_1}=4\,cm$ и $\overline{AB_1}=10\,cm$, пресметај го периметарот на правоаголникот $ABCD$.

14. Ивана нацртала и обоила три квадрати како на цртежот десно. Должините на страните на квадратите се $8\,cm, 12\,cm$ и $16\,cm$. За колку проценти е поголема плоштината на црвениот од плоштината на синиот дел?



15. На правоаголник A е поставен нему складен правоаголник B, така да две негови темиња лежат на соседни страни на правоаголникот A, додека само една теме од правоаголникот A е покриено со правоаголникот B. Кој дел од правоаголникот A има поголема плоштина, оној што е покриен со правоаголникот B или другиот непокриен дел?

16. Периметарот на еден рамнокрак трапез е $20\,cm$, а радиусот на впишаната во него кружница е еднаков на $2\,cm$. Определи ја плоштината на овој трапез.

17. Нацртај правоаголник $ABCD$ ($\overline{AB} = 8\,cm, \overline{BC} = 5\,cm$), па конструирај ја симетралата s на $\angle BAD$. Пресликај го правоаголникот со осна симетрија во однос на правата s.
    а) Што е фигурата $A_1B_1C_1D_1$ односиметрична на правоаголникот $ABCD$.
    б) Определи ги периметарот и плоштината на фигурата која е пресек на правоаголникот $ABCD$ и фигурата $A_1B_1C_1D_1$.

18. Основите на рамнокрак трапез со нормални дијагонали изнесуваат $12\,cm$ и $8\,cvm$. Пресметај ја плоштината на трапезот.

19. Нека $ABCD$ е квадрат со страна a. Точката O е пресекот на дијагоналите AC и BD. Точките E и F се средини на отсечките BO и DO, а точката G припаѓа на отсечката CO и е таква што $\overline{CG} = 3\overline{GO}$. Кој дел од плоштината на квадратот е плоштината на четириаголникот $AEGF$?

20. Периметарот на паралелограмот $ABCD$ е $60\,cm$. Точката O пресек

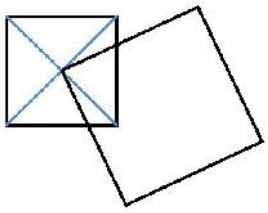
на наговите дијагонали AC и BD. Разликата на периметрите на два од четирите триаголници ABO, BCO, CDO, DAO е $10\,cm$. Определи ја најголемата можна плоштина на паралелограмот.

21. Симетралата на остриот агол во темето C на паралелограмот $ABCD$ ја сече правата AD во точката E, при што $\overline{AE} = 5\,cm$. Определи ги должините на страните на паралелограмот ако неговиот периметар е $50\,cm$.

22. Дијагоналите на трапезот $ABCD, (AB \| CD)$, се сечат во точката D. Докажи дека плоштините на триаголниците AOD и BOC се еднакви.

23. Дијагоналите на трапезот $ABCD\,(AB \| CD)$ се сечат во точката O. Докажи дека производот на плоштините на триаголниците AOD и BOC е еднаков на производот на плоштините на триаголниците AOB и COD. Дали ова тврдење важи за конвексен четириаголник кој не е трапез?

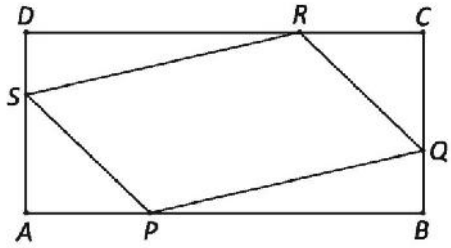
24. Дадени се два квадрати така што едното теме на поголемиот квадрат се наоѓа во пресекот на дијагоналите на помалиот квадрат (види цртеж). Ако плоштината на заедничкиот дел на овие квадрати е $4\,cm^2$, определи ја должината на страната на помалиот квадрат.



25. Страните на правоаголникот $ABCD$ се еднакви на $5\,cm$ и $3\,cm$. Симетралата на $\angle BAD$ ја сече правата BC во точката M така што $B - C - M$. Симетралата на $\angle BCD$ ја сече правата DA во точка E така што $D - A - E$. Определи ја плоштината на четириаголникот $ECMA$.

26. Страните на паралелограмот $ABCD$ се $8\,cm$ и $4\,cm$. Симетралата на $\angle BAD$ ја сече правата BC во точка M, така што $B - C - M$, а симетралата на $\angle BCD$ ја сече правата DA во точка E таква што $D - A - E$. Спореди ја плоштината на чеириаголникот $ECMA$ и плоштината на паралелограмот $ABCD$

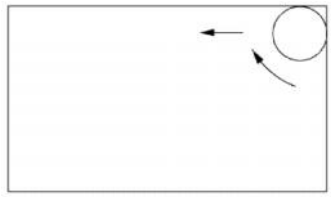
27. Точките P, Q, R, S ги делат страните на правоаголникот $ABCD$ во однос $1:2$ (види цртеж!)



а) Докажи дека четириаголникот $PQRS$ е паралелограм.

б) Определи го осносот на плоштините на паралелограмот $PQRS$ и правоаголникот $ABCD$.

28. Круг со радиус $3\,cm$ од внатрешната страна на правоаголникот должина $25\,cm$ и ширина $20\,cm$ се тркала по неговите страни (види цртеж). Одреди ја плоштината на оној дел од правоаголникот кој не се покрива при тркалањето на кругот.



29. За аглите на $\triangle ABC$ важи $\measuredangle ABC = \frac{7}{2}\measuredangle CAB$ и $\measuredangle BCA = \frac{3}{2}\measuredangle CAB$.

Симетралата на страната AC ги сече симетралата AD на $\measuredangle CAB$ и страната AB во точките M и K, соодветно. Докажи дека $\triangle BCM$ е рамнокрак и пресметај го периметарот на четириаголникот $BCMK$, ако важи $\overline{AM} + \overline{MK} = 6\,cm$.

5.4. РАЗНИ ЗАДАЧИ

1. Дадена е отсечката $\overline{AB} = 30{,}12\ cm$. Точките O, M, K се на таа отсечка така што отсечката AM е три пати подолга од отсечката MB и $\overline{AO} = \overline{KB} = 10{,}14\ cm$. Како е распоредот на точките A, B, O, M, K и колкаво е растојанието меѓу соседните точки?

2. Дадена е отсечка $\overline{AB} = 30{,}12\ cm$. Точките O, M, K на оваа отсечка се такви што отсечката AM е четири пати пократка од отсечката MB и $\overline{AO} = \overline{KB} = 2014\ cm$. Каков е распоредот на точките A, B, O, M, K и колкави се растојанијата меѓу соседните точки?

3. Нека D, E, F се соодветно средините на страните BC, CA, AB на триаголникот ABC. Докажи дека центарот на опишаната кружница на триаголникот ABC е ортоцентар на триаголникот DEF.

4. Во рамнината се дадени четири точки A, B, C, D такви што $AB \perp CD$ и $BC \perp AD$. Докажи дека $AC \perp BD$.

5. Нека M и K се подножјата на нормалите повлечени од темињата A и B на триаголникот ABC врз страните BC и AC, соодветно. Дали симетралата на отсечката MK ја содржи средината на страната AB?

6. Користејќи ги својствата на тежиштето на триаголникот подели дадена отсечка AD во однос $2:1$.

7. Нека M е точка во внатрешноста на триаголникот ABC и нека D, E, F се соодветно средините на страните BC, CA, AB. Ако точките P, Q, R се такви што D, E, F се соодветно средините на отсечките MP, MQ, MR, докажи дека триаголниците ABC и PQR се складни.

8. На основата AB на рамнокракиот триаголник ABC е дадена точка P. На правата CP е земена точка K таква што $\angle AKP + \angle CKB = 180^\circ$. Докажи дека точката P припаѓа на симетралата на аголот во темето C.

9. Даден е правоаголен триаголник ABC. Точките D, E и F се редоследно подножјето на висината од темето на правиот агол и средините на катетите AC и BC. Докажи дека точките C, D, E, F лежат на една кружница.

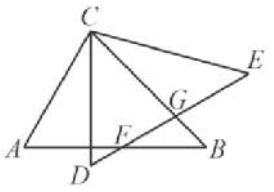
10. Во триаголник ABC ($\overline{AB} > \overline{BC}$), низ точките A и C се конструирани прави кои се нормални на симетралата на $\angle ABC$. Тие ги сечат правите BC и AB во точките K и M, соодветно. Определи ја должината на страната AB, ако $\overline{KC} = 5\,cm$ и $\overline{MB} = 8\,cm$.

11. Даден е триаголник ABC, $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle ABC = 20^\circ$, $\overline{AB} - \overline{BC} = 10\,cm$. Симетралата на $\angle ACB$ ја сече правата AB во точката M. Определи ја должината на отсечката CM.

12. Даден е триаголник ABC и точка M во него, таква што полуправите BM и CM се симетрали на $\angle ABC$ и $\angle BCA$, соодветно. Низ точката M е повлечена права p паралелна со страната BC. Правата p ги сече страните AB и AC, соодветно, во точките P и T. Докажи дека $\overline{BP} + \overline{CT} = \overline{PT}$.

13. Даден е триаголник ABC во кој $\angle BAC = 120^\circ$. На симетралата на $\angle BAC$ е дадена точка D таква што $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$. Докажи дека триаголникот BCD е рамностран.

14. Даден е триаголник ABC со агли $\angle BAC = 60^\circ$ и $\angle ABC = 45^\circ$. Триаголниците ABC и DEC се складни и се поставени како на цртежот десно, при што $\angle ACD = 30^\circ$. Докажи дека триаголникот CFG е рамнокрак.



15. Во правоаголен триаголник мерката на едниот остар агол е 75°. Докажи дека хипотенузата на тој триаголник е четири пати подолга од висината повлечена кон хипотенузата.

16. Докажи дека центарот на опишаната кружница е најблизок до

најдолгата страна на триаголникот.

17. Докажи дека центарот на впишаната кружница е најблиску до темето на најголемиот агол на триаголникот.

18. Триаголникот ABC не е правоаголен. Точките H и O се ортоцентар и центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Ако C_1 е средина на страната AB, докажи дека $\overline{CH} = 2\overline{OC_1}$.

19. Кружницата k, впишана во триаголникот ABC, ги допира редоследно страните $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{CA} = b$ во точките P, Q, R. Докажи дека
$$\overline{AP} = \overline{AR} = \frac{b+c-a}{2}, \overline{BP} = \overline{BQ} = \frac{a+c-b}{2}, \overline{CQ} = \overline{CR} = \frac{a+b-c}{2}.$$

20. Нека BC е најголемата страна на триаголникот ABC и A_1 е нејзината средина. Докажи дека:
    а) Ако $\overline{AA_1} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, тогаш триаголникот ABC е правоаголен.
    б) Ако $\overline{AA_1} < \frac{1}{2}\overline{BC}$, тогаш триаголникот ABC е тапоаголен.
    в) Ако $\overline{AA_1} > \frac{1}{2}\overline{BC}$, тогаш триаголникот ABC е остроаголен.

21. Низ средината S на дијагоналата BD на правоаголникот $ABCD$ е повлечена права p која ги сече страните AB и CD во точките P и Q, соодветно. Докажи дека $\overline{SP} = \overline{SQ}$.

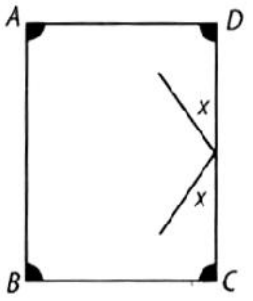
22. Над страните AB и BC на паралелограмот $ABCD$, надвор од него, се конструирани рамнострани триаголници ABE и BCF. Докажи дека триаголникот DEF е рамностран.

23. На страните AB и CD на ромбот $ABCD$ се избрани точки E и F такви што $\overline{AE} = \overline{BF}$. Ако $\angle BAD = 60^\circ$ докажи дека триаголникот DEF е рамностран.

24. На страната CD на квадратот $ABCD$ е дадена точка L. Од темињата A и C се повлечени нормали на правата BL кои истата ја сечат

редоследно во точките P и Q. Докажи дека $\overline{CP} = \overline{DQ}$.

25. Билијардската маса прикажана на цртежот десно е широка $3\,m$ и долга $4\,m$. Со еден удар сакаме билијардската топка да ја уфрлиме во дупката C, така што топката пред тоа точно еднаш удри во секој раб од масата и во дупката C влезе под агол 45°. Се знае дека ако топката удри во раб на масата под некој агол, по ударот таа го продолжува патот под истиот агол, само во друг правец. Определи ја точката на работ на масата од каде треба да ја удриме топката. Кој е тој раб и колку е оддалечена бараната точка од краевите на тој раб?



од точката B и на $3\,m$ од точката A.

26. Околу триаголник ABC кој не е правоаголен опишана е кружница k Отсечката BD е дијаметар на кружницата k, а точката H е ортоцентар на триаголникот. Докажи дека точките A, H, C, D се темиња на паралелограм.

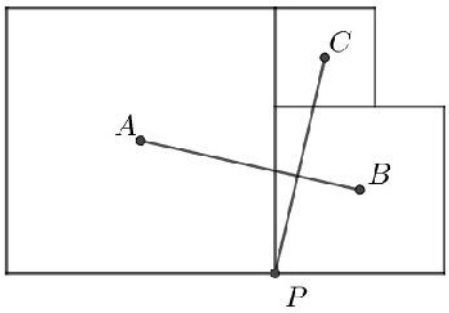
27. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е дадена точка E таква што $\angle EDC = 75^\circ$ и $\angle ECD = 30^\circ$. Определи ја должината на отсечката BE ако $\overline{AB} = 5,6\,cm$.

28. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е дадена точка E таква што $\angle EDC = 75^\circ, \angle ECD = 30^\circ$. Докажи дека точката E припаѓа на симетралата на отсечката AD.

29. Нека $ABCD$ е ромб со остар агол од 60°. Докажи дека кружницата повлечена над пократката дијагонала како дијаметар ги сече страните на ромбот во нивните средини.

30. Средините на страните и подножјето на една од висините на разностран триаголник се темиња на рамнокрак трапез. Докажи!

31. На цртежот десно се дадени три квадрати со своите центри A, B и C. Точката P е заедничко теме на квадратите со центри A и B. Пресметај го односот $\overline{AB} : \overline{PC}$.



32. Кружниците $k_1(A, r_1)$ и $k_2(A, r_2)$ се сечат во точките C и D. Докажи дека $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB$.

33. Кружниците $k_1(A, r_1)$ и $k_2(A, r_2)$ се сечат во точките C и D. Докажи дека отсечката AB е нормална на отсечката CD.

6. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Определи 2013 последователни цели броеви такви што нивниот збир ќе биде еднаков на 2013.

2. Определи 2013 последователни цели броеви такви што нивниот збир е -2013.

3. Определи 2012 последователни цели броеви такви што нивниот збир е 2012.

4. Венда запишала 2009 цели броеви така што секој следен број е за 2 поголем од претхидниот. Ако најголемиот број кој го запишала Венда е 2008, определи го збирот сите запишани броеви.

5. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x + (x+1) + ... + 19 + 20 = 57 .$$

6. Горјан запишал 2007 последователни цели броеви. Кога ги собрал добил збир 2007. Определи ги најмалиот и најголемиот број во низата која ја запишал Горјан.

7. Колку најмалку (повеќе од еден), а колку најмногу последователни цели броеви треба да се соберат за да се добие бројот 2010?

8. Збирот на k $(k > 1)$ последователни цели броеви е 9. Определи ги сите вредности кои може да ги има k.

9. На колку начини можеме бројот 2009 да го претставиме како збир на последователни непарни цели броеви? (Во збирот мора да има најмалку два собирци.)

10. На колку начини можеме да го претставиме бројот 2010 како збир на последователни цели броеви?

11. Магдалена на таблата запишувала цели броеви така што секој следен е за 2 поголем од претходниот. Кога ги запишала сите броеви видела дека нивниот збир е еднаков на -96. Кои броеви ги запишала Магдалена?

12. Загорка редоследно ги запишувала броевите $1,-3,5,-7,9,-11,13,...$ (наизменично ги менувала знаците на броевите кои по апсолутна вредност ја формираат низата непарни природни броеви). Колку броеви Загорка може да запише така што збирот на сите запишани броеви ќе биде делител на бројот 2013?

13. Богдан на таблата запишал низа броеви така што секој следен број е за 2 поголем од претходниот. Збирот на сите запишани броеви е 66, а производот на најмалиот и најголемиот запишан број е -64. Кои броеви ги запишал Богдан?

14. Крсте ја пресметувал вредноста на следниот израз
$$A=1-2+3-4+5-6+7-8+...+(2k-1)-2k+....$$
До кој број Крсте ги извршувал назначените операции ако вредноста на изразот е за 2012 помала од последниот број во изразот?

15. Како треба да се изберат знаците во изразот $\pm1\pm3\pm5\pm7\pm9\pm11$, за добиеме збир 2 или 13.

16. Дали е можно во $1*2*3*4*...*2004=2005$ знакот $*$ негде да се замени со $+$, а негде со $-$, така што ќе се добие точно равенство.

17. Кој е најмалиот природен број кој што може да се добие ако во изразот
$$1*2*3*...*2005*2006$$
секоја ѕвезда се замени со еден од знаците + или $-$?

18. Бројот 2008 прикажи го како производ на неколку природни броеви, а потоа и како збир на истите тие броеви. Најди барем три вакви претставувања.

19. На колку различни начини бројот 30 може да се запише како производ на пет различни цели броеви?

20. Производот на седум различни цели броеви е 252. Пресметај го збирот на овие броеви.

21. Броевите a,b,c,d,e се цели различни броеви такви што
$$(a+2)(b+2)(c+2)(d+2)(e+2)=20.$$
Определи го збирот $a+b+c+d+e$.

22. За целите броеви a,b,c,d важи дека броевите $a-1, 2b-3, 4c-5, 5d-6$ се различни и $(a-1)(2b-3)(4c-5)(5d-6)=-6$. Пресметај го збирот $a+b+c+d$.

23. За целите броеви a,b,c,d важи $(a-2)(2b-3)(3c-4)(4d-5)=6$. Определи го збирот $a+b+c+d$.

24. На колку различни начини бројот -840 може да се запише како производ на седум различни цели броеви.

25. Колку најмногу собирци може да има на левата страна на равенството
$$\overline{PET}+\overline{PET}+\ldots+\overline{PET}=\overline{BROJ}$$

26. Колку најмногу собирци може да има на левата страна на равенството
$$\overline{LETO}+\overline{LETO}+\ldots+\overline{LETO}=\overline{ODMOR}$$

27. Реши го бројниот ребус
$$\overline{abba}-\overline{cddc}=\overline{cfef},$$
во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

28. Замени ги буквите со цифри (различните букви со различни цифри, а исти букви со исти цифри) така што ќе важи:
$$\overline{KA}+\overline{RA}=\overline{DAB}.$$

29. Најди барем еден четирицифрен број кој помножен со 2016 дава осумцифрен број кој завршува на 2016:
$$****\cdot 2016=**** 2016.$$

30. Замени ги буквите со цифри (различните букви со различни цифри, а истите букви со исти цифри) и ѕвездичките со знаците на аритметичките операции така што ќе важи
$$M * A * T * E * M * A * T * I * K * A = 2017 .$$

31. Дадена е низата броеви
$$20, \_\_, \_\_, \_\_, -5, \_\_, ...$$
во која збирот на секои три последователни броеви е 12. Последниот број во оваа низа е 20 и овој број е запишан 500 пати. Пресметај го збирот на сите броеви во оваа низа.

32. а) Кој број треба да стои на местото на ѕвездичката во низата:
$$17, 23, 13, 11, *, 15, ... ?$$
б) Кој е 2013-тиот член на оваа низа?

33. Низата 1, 3, 7, 15, ... е таква што секој нејзин член е за 1 поголем од двократната вредност на претходниот член. Дали во оваа низа постои број кој е делив со 2014?

34. Броевите 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... се подредени така што секој член почнувајќи од третиот е еднаков на збирот на претходните два. Докажи дека на 1002-то место е број делив со 8.

35. Митре запишал 100 броеви. Првиот запишан број е 2, вториот е 3, а потоа секој, почнувајќи од вториот, е за 1 помал од производот на бројот кој е пред него и бројот кој е по него. Пресметај го збирот на броевите кои ги запишал Митре.

36. Михајло запишал 100 броеви. Првиот број е 2, вториот е 3, а потоа секој следен број, почнувајќи од вториот, е еднаков на збирот на бројот запишан пред него и бројот запишан по него. Пресметај го збирот на броевите кои ги запишал Михајло.

37. Ацо продавал лубеници на пазар. Кога Борис го прашал колку лубеници има, Ацо одговорил: „Бројот на лубениците е куб на природен број кој не е делив со 7.“ Потоа Ацо ги пребројувал лубениците и секоја седма му ја дал на Борис. Борис ги зел поклонетите лубеници и му рекол на Војо: „Ниту бројот на моите лубеници не е делив со 7, па

сепак ќе ти ја дадам секоја седма лубеница.“ Војо ништо не рекол, само секоја седма лубеница му ја дал на Гаврил. Гаврил видел дека бројот на неговите лубеници не е делив со 7, па секоја седма лубеница му ја поклонил на Дарко. Дарко од Гаврил добил точно 10 лубеници. Колку лубеници имал Ацо на почетокот?

38. Кога ќе го собереме некој трицифрен број со бројот запишан со истите цифир, но во обратен редослед, добиваме квадрат на природен број. Ако цифрата на десетките е еднаква на збирот на цифрите на единиците и стотките, определи ги сите такви трицифрени броеви.

39. Најди два двоцифрени броја ако е познато дека збирот на сите преостанати двоцифрени броеви е 50 пати поголем од еден од тие броеви.

40. Дали постои природен број со следново својство: ако некои две цифри ги заменат местата се добива трицифрен број кој е два пати поголем од почетниот број?

41. Иван има два помлади брата, кои исто така се ученици. По завршувањето на секое одделение секој брат од таткото добива онолку книги колку што одделенија до тогаш завршил. На крајот на минатата учебна година, браќата вкупно собрале 25 книги добиени од таткото. Кое одделение го завршил Иван?

42. Во селото на џуџињата $\frac{1}{7}$ од жителите носат црвена капа, а $\frac{2}{5}$ носат жолта капа. Преостанатите џуџиња носат сина капа. Колку жители на селото носат сина капа ако знаеме дека бројот на жителите на селото не е поголем од 200? (Капите се еднобојни.)

43. Во еден магацин има 360 гајби со јаболка и 384 гајби со круши. Гајбите со овошје треба да се испорачаат во различни продавници, во пратки во кои секогаш има еднаков број гајби со овошје и во секоја пратка има еднаков број гајби со јаболка. Камионите со кои се пренесуваат пратките со овошје може да носат најмногу 60 гајби. По колку гајби со јаболка и колку гајби со круши има во секоја пратка?

44. На еден тест биле зададени 20 прашања. За точно одговорено прашање се добиваат 8 поени, за неточно одговорено прашање се одземаат 5

поени, а неодговорено прашање се бодува 0 поени. Кирил на тестот освоил 120 поени. На колку прашања Кирил не одговорил?

45. Госпоѓата Јорданка има домашни миленичиња. Сите освен две миленичиња се кучиња, сите освен две миленичиња се мачиња, сите освен две миленичиња се папагали, а преостанатите се водени желки. По колку миленичиња има госпоѓата Јорданка од секој вид?

46. Марко од шешир извлекува топчиња на кои се запишани броевите 0, 5, 8 и 10, по еден број на секое топче. Тој извлекол еднаков број топчиња со броевите 8 и 10. Извлекол неколку топчиња на кои е бројот 5. Бројот на топчињата на кои е бројот 0 е еднаков на една четвртина од вкупниот број извлечени топчиња. Колку топчиња извлекол Марко ако збирот на сите броеви запишани на топчињата е 99?

47. При влез во театар меѓу 30 посетители се поделени 58 бонбони. Секое девојче добило шест бонбони, а секое момче добило четири бонбони, а сокое возрасно лице добило по една бонбона. Колку биле девојчиња, колку момчиња, а колку возрасни лица?

48. Покрај секое теме на еден седумаголник Никола запишал по еден цел број, така што збирот на броевите кои соодветствуваат на една страна е 1, на соседната страна е 2, на следната соседна е 3 итн. на последната е 7. Кои броеви Никола ги запишал покрај темињата на седумаголникот?

49. На секој ѕид на една коцка е запишан по еден природен број. На секое теме (ќош) на коцката е запишан производот од трите броја кои се запишани на ѕидовите кои го формираат темето (ќошот). Збирот на осумте така добиени производи е 385. Одреди го збирот на броевите кои се запишани на ѕидовите на коцката.

50. На секоја страна на шестаголник е запишан еден број, а покрај секое теме е запишан збирот на броевите на две страни кои го содржат тоа теме. Потоа се избришани броевите запишани на сите страни и во темето A. Дали може да се реконструира бројот покрај темето A?

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. Бројот 247 поделен со некој едноцифрен број дава остаток 7. Колкав е остатокот ако бројот 1267 го поделиме со истиот тој едноцифрен број?
Решение. Едноцифрениот делител е поголем од 7 и е делител на бројот $247-7=240$, па затоа тоа е бројот 8. Сега $1267=158\cdot 8+3$, па бараниот остаток е 3.

2. Бројот 851 е поделен со некој едноцифрен број и е добиен остаток 5. Колку е остатокот од делењето на бројот 2014 со истиот едноцифрен број?
Решение. Бројот 851 е поделен со некој од броевите 6, 7, 8 или 9. Бројот $851-5=846$ е делив со 6 и со 9. Значи, $2014=6\cdot 335+4$ и $2014=9\cdot 223+7$, па затоа може остаток е 4 или 7.

3. Определи го $a\in\mathbb{Z}$, ако $\frac{7}{a+3}\in\mathbb{Z}$.

Решение. Од $\frac{7}{a+3}\in\mathbb{Z}$ следува дека $a+3$ е делител на 7. Според тоа, $a+3\in\{-1,1,-7,7\}$. Значи,

1) $a+3=-1$, односно $a=-4$,
2) $a+3=1$, односно $a=-2$,
3) $a+3=-7$, односно $a=-10$,
4) $a+3=7$, односно $a=4$.

Конечно, $a+3\in\{-10,-4,-2,4\}$.

4. Определи го $a\in\mathbb{Z}$ ако $\frac{a+7}{a+3}\in\mathbb{Z}$.

Решение. Имаме

$$\frac{a+7}{a+3}=\frac{a+3+4}{a+3}=\frac{a+3}{a+3}+\frac{4}{a+3}=1+\frac{4}{a+3}.$$

Според тоа, $\frac{a+7}{a+3}$ е цел броја ако и само ако $\frac{4}{a+3}$,т.е. ако и само ако $a+3$ е делител на бројот 4. Оттука следува $a+3\in\{1,-1,2,-2,4,-4\}$, па затоа $a\in\{-4,-2,-5,-1,-7,1\}$.

5. а) За кои целобројни вредности на a вредноста на дропката $\frac{8}{3a+1}$ е цел број?

б) Определи ги сите целобројни вредности на дропката $\frac{3a+9}{3a+1}$ ако a е цел број.

Решение. а) Вредноста на дропката $\frac{8}{3a+1}$ е цел број ако $3a+1$ е делител на 8. Според тоа, $3a+1 \in \{8,-8,4,-4,2,-2,1,-1\}$.

Ако $3a+1=8$, тогаш $a=\frac{7}{3}$ и тоа не е цел број.

Ако $3a+1=-8$, тогаш $a=-3$.

Ако $3a+1=4$, тогаш $a=1$.

Ако $3a+1=-4$, $3a+1=2$, $3a+1=-1$, тогаш соодветно $a=-\frac{5}{3}$, $a=\frac{1}{3}$, $a=-\frac{2}{3}$ и тоа не се цели броеви.

Ако $3a+1=-2$, тогаш $a=-1$.

Ако $3a+1=1$, тогаш $a=0$.

б) Имаме, $\frac{3a+9}{3a+1}=\frac{3a+1}{3a+1}+\frac{8}{3a+1}=1+\frac{8}{3a+1}$. Сега, од решението под а) следува дека целобројните вредности на дадениот израз се добиваат за $a \in \{-3,-1,0,1\}$, при што $\frac{8}{3a+1} \in \{-1,-4,8,2\}$, односно $\frac{3a+9}{3a+1} \in \{0,-3,9,3\}$.

6. Определи ги сите цели броеви a за кои вредноста на дропката $\frac{2a+8}{2a+3}$ е цел број.

Решение. Имаме: $\frac{2a+8}{2a+3}=\frac{2a+3+5}{2a+3}=1+\frac{5}{2a+3}$. Според тоа, вредноста на дадената дропка е цел број ако и само ако вредноста на дропката $\frac{5}{2a+3}$ е цел број, т.е. ако и само ако $2a+3$ е делител на 5. Значи, $2a+3$ може да прима вредности $5,-5,1,-1$, што значи дека a соодветно е $1,-4,-1,-2$.

7. Определи го целиот број x за кој $\frac{202}{3-|1+x|}$ е цел број.

Решение. Дадениот израз е определен за $|1+x| \neq 3$, од каде добиваме $x \neq 2$ и $x \neq -4$. Дадениот израз е цел број ако $3-|1+x|$ е делител на 202, односно ако $3-|1+x| \in \{-202,-101,-2,-1,1,2,101,202\}$.

Можни се следниве случаи:

1) $3-|1+x|=-202$, од каде добиваме $x=204$ или $x=-206$,
2) $3-|1+x|=-101$, од каде добиваме $x=103$ или $x=-105$,
3) $3-|1+x|=-2$, од каде добиваме $x=4$ или $x=-6$,
4) $3-|1+x|=-1$, од каде добиваме $x=3$ или $x=-5$,
5) $3-|1+x|=1$, од каде добиваме $x=1$ или $x=-3$,
6) $3-|1+x|=2$, од каде добиваме $x=0$ или $x=-2$,
7) $3-|1+x|=101$, $|1+x|=-98$ и во овој случај немаме решение,
8) $3-|1+x|=202$, $|1+x|=-199$ и во овој случај немаме решение,

8. Определи ги сите природни броеви од видот $\overline{20a2b2}$ кои се деливи со 72.

Решение. Бројот $\overline{20a2b2}$ е делив со 72 ако истовремено е делив и со 8 и со 9. За да биде делив со 9 треба збирот на цифрите да е делив со 9, односно $2+0+a+2+b+2=6+a+b$ да биде делив со 9.
Истовремено треба да биде делив со 8, што значи дека трицифрениот завршеток треба да е делив со 8, односно $\overline{2b2}$ треба да е делив со 8. Од оваа деливост следува дека $b\in\{3,7\}$. Според тоа, заклучуваме дека за $b=3$, $a=0$ или $a=9$; за $b=7$, $a=6$.
Значи, бараните броеви се: 200232, 209232 и 205272.

9. Користејќи ги цифрите 0, 1, 2 и 7 запиши ги сите четирицифрени броеви кои се деливи со 40.

Решение. Во задачата нема дополнителни услови освен деливоста со 5 и со 8, што значи дека цифрите може да се повторуваат. Број е делив со 5 ако цифрата на единиците му е 0 или 5, а е делив со 8 ако неговиот трицифрен завршеток е делив со 8. Од дадените цифри последните три цифри може да се формираат на следниве начини: 000, 200, 120, 720. Според тоа, бараните броеви се: 1000, 1200, 1120, 1720, 2000, 2200, 2120, 2720, 7000, 7200, 7120, 7720.

10. Определи го бројот на броевите од видот $\overline{2abcd3}$ кои се запишани со различни цифри, а бројот $\overline{abcd}$ е четирицифрен број делив со 5.

Решение. Бидејќи бројот $\overline{abcd}$ е делив со 5 добиваме дека $d\in\{0,5\}$.

Ако $d=0$, тогаш бидејќи цифрите на бројот $\overline{2abcd3}$ треба да се различни добиваме дека $a,b,c\in\{1,4,5,6,7,8,9\}$. Цифрата a може да се

избере на 7 начини, потоа цифрата b на 6 начина и на крајот цифрата c на 5 начини. Значи, во овој случај имаме $7\cdot 6\cdot 5=210$ броеви.

Ако $d=5$, тогаш бидејќи цифрите на бројот $\overline{2abcd3}$ треба да се различни добиваме дека $a,b,c\in\{0,1,4,6,7,8,9\}$, $a\neq 0$. Цифрата a може да се избере на 6 начини, потоа цифрата b на 6 начина и на крајот цифрата c на 5 начини. Значи, во овој случај имаме $6\cdot 6\cdot 5=180$ броеви.

Конечно, имаме $210+180=390$ кои ги задоволуваат условите на задачата.

11. Докажи дека збирот на седум последователни цели броеви е делив со 7.

Решение. За збирот на седум последователни цели броеви добиваме

$$(n-3)+(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=7n.$$

Сега, од $7\mid 7$ следува $7\mid 7n$,што и требаше да се докаже.

12. Докажи дека збирот на 8 последователни цели броеви не е делив со 8.

Решение. Имаме,

$$\begin{aligned}A&=(n-3)+(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)\\&=8n+4=4(2n+1),\end{aligned}$$

па како $2n+1$ е непарен број, заклучуваме дека збирот на осум последователни цели броја е делив со 4, но не е делив со 8.

13. Ако за природните броеви a и b бројот $2a+5b$ е делив со 11, докажи дека и бројот $3a+2b$ е делив со 11.

Решение. Нека $2a+5b$ е делив со 11. Тоа значи дека постои природен број k таков што $2a+5b=11k$. Од последното равенство редоследно добиваме:

$$\begin{aligned}6a+15b&=33k,\\6a+4b+11b&=33k,\\6a+4b&=33k-11b,\\2(3a+2b)&=11(3k-b).\end{aligned}$$

Според тоа, $11\mid 2(3a+2b)$ и како $\mathrm{NZD}(11,2)=1$ заклучуваме дека $11\mid 2a+3b$.

14. Дали производот на непарните природни броеви помали или еднакви

на 2013 е делив со нивниот збир?

Решение. Имаме 1007 непарни броеви од 1 до 2013. Нивниот збир е:

$$\begin{aligned}1+3+...+2011+2013 &= (1+2013)+(3+2011)+...+(1005+1009)+1007\\ &= 503\cdot 2014+1007\\ &= 1007\cdot(503\cdot 2+1)\\ &= 1007\cdot 1007\\ &= 53\cdot 19\cdot 1007.\end{aligned}$$

Сега, бидејќи 19, 53 и 1007 се непарни природни броеви помали од 2013 добиваме дека $19\cdot 53\cdot 1007 \mid (1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 2015)$, што значи дека производот на непарните природни броеви помали или еднакви на 2013 е делив со нивниот збир.

15. Определи го најмалиот можен број делив со 4, чиј збир на цифри е еднаков на 2024.

Решение. За да го добиеме најмалиот можен број потребно е цифрата 9 да ја употребиме најголем број пати. Од $2024 = 224\cdot 9+8$, добиваме дека бараниот број има најмалку 225 цифри. Но, овој број е составен од 224 цифри 9 и една цифра 8, па како ниту еден од двоцифрените завршетоци 89, 98 и 99 не е делив со 4, заклучуваме дека не постои 225-цифрен број со бараните својства. Значи, бараниот број има најмалку 226 цифри. За да овој број е најмал ќе земеме цифрата со најголемата местна вредност да е 1. Тогаш збирот на пресотанатите 225 цифри ќе биде 2023. Ова е можно ако 223 цифри се 9, а преостанатите две цифри се 9, 7 или 8, 8. Бидејќи меѓу броевите 79, 88, 89, 97, 98 и 99 само бројот 88 е делив со 4, значи постои бараниот 226-цифрен број чиј збир на цифри е 2024 и кој е делив со 4 и тоа е бројот $1\underbrace{999...999}_{223\text{ цифри}}88$.

16. Докажи дека меѓу било кои осум природни броеви постојат два броја чија разлика е делива со 7.

Решение. Можни остатоци при делење на природен број со 7 се: 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Според тоа, дадени се осум броја, а имаме седум остатоци, па од принципот на Дирихле следува дека меѓу дадените броеви постојат два броја кои при делење со 7 даваат еднакви остатоци. Јасно, нивната разлика е делива со 7, што и требаше да се докаже.

17. Докажи дека меѓу 12 произволни природни броеви постојат најмалку два чија разлика е делива со 11.

Решение. При делење на природен број со бројот 11 можни остатоци се 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10. Според тоа, имаме 12 природни броја , 11 можни остатоци, па од принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку два броја кои при делење со бројот 11 даваат ист остаток r. Нека тоа се броевите $11n+r$ и $11m+r$. Тогаш, за разликата на овие два броја имаме $11n+r-(11m+r)=11(n-m)$, т.е. таа е делива со 11, што и требаше да се докаже.

18. Определи го најмалиот природен број n за кој важи следново тврдење:

Меѓу било кои n природни броеви секогаш можеме да избереме три природни броја чија аритметичка средина е природен број.

Решение. Јасно, за $n=3$ тврдењето не важи. На пример, аритметичката средна на броевите 1, 2 и 4 не е природен број.

Тврдењето не важи и за $n=4$. Навистина, за броевите 4, 5, 7 и 8 важи:

$$\frac{4+5+7}{3}=\frac{16}{3}\notin\mathbb{N},\ \frac{4+5+8}{3}=\frac{17}{3}\notin\mathbb{N},\ \frac{4+7+8}{3}=\frac{19}{3}\notin\mathbb{N},\ \frac{5+7+8}{3}=\frac{20}{3}\notin\mathbb{N}.$$

Ќе докажеме дека тврдењето важи за $n=5$. Аритметичката средина на три броја е природен број, ако нивниот збир е делив со 3. Тоа значи дека збирот на остатоците при делење со 3 е делив со 3. Остатоци при делење со 3 се 0, 1 и 2.

За произволни пет броја можни се следниве два случаја:

1) Меѓу разгледуваните броеви има три броја кои при делење со бројот 3 даваат ист остаток. Тогаш нивниот збир е делив со 3.
2) Меѓу разгледуваните броеви нема три броја кои при делење со 3 даваат ист остаток. Тогаш секој остаток се појавува најмногу два пати. Бидејќи имаме 5 броја и како $5=2+2+1$, заклучуваме дека меѓу броевите секој остаток мора да се јави најмалку еднаш. Значи, постојат три броја чии остатоци при делење со 3 се 0, 1 и 2, па како $0+1+2=3=3\cdot 1$ заклучуваме дека збирот на трите броја е делив со 3.

Конечно, најмалиот број n за кој важи тврдењето е $n=5$.

19. Докажи дека $12^n-22n-1$ е делив со 11 за секој природен број n.

Решение. Ја формираме низата $1,12,12^2,12^3,\cdots,12^{n-1}$. Го запишуваме збирот

$$S = 1 + 12 + 12^2 + 12^3 + \cdots + 12^{n-1}.$$

Двете страни множиме со 12 и добиваме

$$12S = 12 + 12^2 + 12^3 + \cdots 12^n \ .$$

Со одземање на последните две равенства добиваме $11S = 12^n - 1$, т.е.

$$12^n - 1 = 11 \cdot (1 + 12 + 12^2 + \cdots + 12^{n-1}) .$$

Значи,

$$12^n - 22n - 1 = 11 \cdot (1 + 12 + 12^2 + \cdots + 12^{n-1} - 2n) ,$$

од каде следува дека $11 | 12^n - 22n - 1$.

20. Определи ги сите нескратливи дропки $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}$, такви што

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 2\frac{71}{80} .$$

Решение. Од условот на здачата следува $\frac{a}{b} > \frac{b}{a}$, од каде добиваме $a^2 > b^2$ и како $a, b \in \mathbb{N}$, важи $a > b$. Понатаму, бидејќи дропката $\frac{a}{b}$ е нескратлива имаме $\text{NZD}(a, b) = 1$. Сега, од $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 2\frac{71}{80}$ последователно следува

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{231}{80}.$$

$$80(a^2 - b^2) = 231ab.$$

Но, $\text{NZD}(80, 231) = 1$, па од последното равенство следува дека a и b се делители на 80. Делители на 80 се: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40 и 80 и со непосредна проверка добиваме дека единствено решение на последната равенка е $a = 16, b = 5$. Според тоа, единствена нескратлива дропка која го задоволува услово на задачата е $\frac{a}{b} = \frac{16}{5}$.

21. Определи го најмалиот природен број кој е делив со 7, а при делење со 2, 3, 4, 5 и 6 дава остаток 1.

Решение. Ако x е бараниот број, тогаш $x - 1$ е делив со 2, 3, 4, 5 и 6, што значи дека $x - 1 = k \cdot \text{NZS}(2, 3, 4, 5, 6) = 60k$, каде k е природен број. Значи, $x = 60k + 1$. Најмалиот број од обликот $60k + 1$ кој е делив со 7 се добива за $k = 5$. Бараниот број е $x = 60 \cdot 5 + 1 = 301$.

22. Докажи дека бројот $n=\underbrace{222...222}_{2012}$ не е квадрат на природен број.

Решение. *Прв начин*. Бројот n е парен, па ако е квадрат на природен број a, тогаш бројот a мора да е парен, односно $a=2k$. Според тоа, $n=a^2=4k^2$, што значи дека $4\mid n$. Сега од деливоста со 4 следува дека двоцифреniот завршеток на n треба да е делив со 4. Но, 4 не е делител на 22, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека n не е квадрат на природен број.

Втор начин. Во долната табела е се дадени цифрите на единиците на произволен природен број a и на неговиот квадрат a^2.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Според тоа, квадрат на природен број не може да има цифра на единиците 2, па затоа бројот $n=\underbrace{222...222}_{2012}$ не е квадрат на природен број.

23. Докажи дека бројот

$$n=\underbrace{222...222}_{2012}\underbrace{000...000}_{2012}\underbrace{111...111}_{2012}$$

не е квадрат на природен број.

Решение. Збирот на цифрите на дадениот број е

$$2012\cdot 2+2012\cdot 0+2012\cdot 1=6036.$$

Сега, бидејќи 6036 е делив со 3, но не е делив со 9, заклучуваме дека бројот $n=\underbrace{222...222}_{2012}\underbrace{000...000}_{2012}\underbrace{111...111}_{2012}$ е делив со 3, но не е делив со 9, што значи дека не може да е квадрат на природен број.

24. Определи го најмалиот природен број со кој треба да се подели изразот

$$2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\cdot 5^5\cdot 6^6\cdot 7^7\cdot 8^8\cdot 9^9$$

за да се добие точен квадрат на природен број.

Решение. Имаме:

$$2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\cdot 5^5\cdot 6^6\cdot 7^7\cdot 8^8\cdot 9^9=2^{40}\cdot 3^{27}\cdot 5^5\cdot 7^7.$$

Бидејќи кај точен квадрат сите степени на простите делители мора да се парни, а 3, 5 и 7 се појавуваат на непарен степен, дадениот израз треба да се подели со $3\cdot 5\cdot 7=105$.

25. Нека за двоцифрените броеви $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ важи равенството $\overline{cd} = 4 \cdot \overline{ab}$. Докажи дека четирицифрениот број $\overline{abcd}$ е делив со 13.
Решение. Имаме
$$\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 100 \cdot \overline{ab} + 4 \cdot \overline{ab}$$
$$= 104 \cdot \overline{ab} = 13 \cdot 8 \cdot \overline{ab},$$
од каде следува дека $13 | \overline{abcd}$.

26. Определи ги сите трицифрени природни броеви $\overline{abc}$ кои се деливи со 4 и со 17 и чиј збир на цифри е 17.
Решение. *Прв начин*. Од $\text{NZD}(4,17) = 1$ дека бараните броеви се деливи со $4 \cdot 17 = 68$. Трицифрени содржатели на бројот 68 се: 136, 204, 272, 340, 408, 476, 544, 612, 680, 748, 816, 884 и 952. Од овие броеви само бројот 476 има збир на цифри еднаков на 17.
Втор начин. Природниот број $\overline{abc}$ е делив со 4 ако неговиот двоцифрен завршеток е делив со 4. Според тоа, можни двоцифрени завршеточи на $\overline{abc}$ се: 00, 04, 08, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92 и 96. Бидејќи a, b, c се цифри такви што $a + b + c = 17$, следува дека можни решенија се броевите 908, 728, 836, 944, 548, 656, 764, 368, 872, 476, 980, 584, 188, 692, 396. Од овие броеви единствен број кој е делив со 17 е бројот 476. Според тоа, бараниот број кој е делив со 4 и со 17 и чиј збир на цифри е 17 е бројот 476.

27. Определи го бројот на двоцифрените броеви кои собрани со својата десеткратна вредност даваат трицифрен број делив со 33.
Решение. Нека x е двоцифрен број кој ги задоволува условите на задачата. Тогаш $x + 10x = 11x$ е трицифрен број делив со 11. Сега, од $33 = 3 \cdot 11$ следува дека бројот x мора да е делив со 3. Најмалиот трицифрен број делив со 11 и со 3 е бројот 132, па затоа $x = 12$ е најмалиот двоцифрен број кој го има саканото својство. Најголемиот трицифрен број кој е делив со 11 и со 3 е бројот 990, па затоа $x = 90$ е најголемиот двоцифрен број кој го има саканото својство. Сега, двоцифрени броеви деливи со 3 има $(99 - 9) : 3 = 30$, но броевите 93, 96 и 99 не ги исполнуваат условите на задачата. Значи, имаме $30 - 3 = 27$ двоцифрени броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

28. Ако трицифрениот број x се собере со 13, збирот е делив со 13. Ако од бројот x се одземе 17, се добива број делив со 17. Ако бројот x се подели со 2, количникот е парен број. Определи го бројот x.

Решение. Од условот следува дека бројот x е еднаков на збирот на два броја деливи со 13, па затоа тој е делив со 13. Понатаму, бројот x е еднаков на збир на два броја деливи со 17, па затоа тој е делив со 17. Бидејќи x поделен со 2 дава парен број, заклучуваме дека x е делив со бројот 4. Броевите 4, 13 и 17 се заемно прости, па нивниот најмал заеднички содржател е делител на бројот x. Значи, $4\cdot 13\cdot 17 = 884$ е делител на бројот x. Но, x е трицифрен број, од каде следува $x = 884$.

29. При делење на двоцифрен број со збирот на неговите цифри се добива број кој е 8 пати помал од бројот кој се добива при делење на двоцифрениот број со разликата на неговите цифри. Остатоците во двете делење се еднакви. Определи го овој двоцифрен број ако цифрата на десетките е поголема од цифрата на единиците.

Решение. Нека бараниот број е $\overline{ab}, a > b$. Тогаш $\overline{ab} = x(a+b)+r$ и $\overline{ab} = 8x(a-b)+r$. Според тоа, $x(a+b)+r = 8x(a-b)+r$, од каде добиваме $a+b = 8(a-b)$, односно $9b = 7a$. Но, a и b се цифри, па од последното равенство следува $a = 9$ и $b = 7$, т.е. бараниот број е 97.

30. Во низа една по друга се запишани 2009 цифри. Познато е дека секој двоцифрен број кој го формираат две соседни цифри во низата (во истиот редослед во кој се запишани) е делив со 17 или со 23.

а) Последната цифра во низата е 1. Која е првата цифра?

б) Првата цифра во низата е 9. Која е последната цифра?

Решение. а) Двоцифрени броеви деливи со 17 се: 17, 34, 51, 68 и 85, а двоцифрени броеви деливи со 23 се: 23, 46, 69 и 92. Сите девет двоцифрени броеви кои се деливи со 17 и 23 имаат различни цифри на единиците, па затоа секоја цифра во низата еднозначно ја определува цифрата која и претходи. Ова значи дека последната цифра во низата еднозначно ја определува целата низа. Лесно се гледа дека последните 10 цифри во низата се 4692346851, од каде што следува дека пред последните пет цифри 46851 периодично се повторува блокот цифри 46923. Бидејќи $2009 = 5\cdot 401 + 4$ следува дека низата почнува со 6841, т.е. првата цифра е 6.

б) Разгледувајќи ги деветте двоцифрени броеви деливи со 17 или со 23, заклучуваме дека секоја цифра, освен 6 и 7, еднозначно ја определува следната цифра. По цифрата 7 низата не може да се продолжи, а по цифрта 6 може да е некоја од цифрите 8 или 9. Почетокот на низата е блок од пет цифри 92346. Ако шестата цифра во низата е 8, може да се запишат само уште четири цифри и ќе се добие низата 923468517, која понатаму не може да се продолжи. Ако шестата цифра во низата е 9, ќе се повтори блокот од првите пет цифри. Според тоа, ако на некое место во низата по цифрата 6 е цифрата 8, низата ќе заврши со цифрата 7 и вкупниот број цифри во низата при делење со 5 ќе даде остаток 4. Значи, за да се добие низа од 2009 цифри со бараното својство, треба постојано по цифрата 6 да е цифрата 9, се додека не добиеме низа од 2005 цифри. Во тој момент по цифрата 6 може да се запише една од цифрите 8 или 9. Во првиот случај низата од 2009 цифри ќе заврши со 7, а во вториот случај со 4.

31. Двоцифрениот број $\overline{x5}$ е три пати поголем од производот на своите цифри. Колку делители има овој број?

Решение. Имаме $\overline{x5}=10x+5$, па затоа важи $10x+5=3\cdot x\cdot 5$, од каде добиваме $10x+5=15x$, односно $x=1$. Значи, двоцифрениот број е 15 и негови делители се: 1, 3, 5 и 15, т.е. има 4 делители.

32. Колку различни делители има бројот:
а) 54, б) 540.

Решение. а) Имаме $54=2\cdot 3^3$. Делителите на бројот 54 ги содржат неговите множители. Значи, во делителите бројот 2 може да се појави 0 или 1 пат, бројот 3 може да се појави 0, 1, 2 или 3 пати. За секоја од овие можности има е $2\cdot 4=(1+1)\cdot(3+1)=8$ делители и тоа: 1, 2, 3, 9, 27, 6, 18 и 54.

б) Имаме $540=2^2\cdot 3^3\cdot 5$. Во делителите бројот 2 може да се појави 0, 1 или 2 пати, бројот 3 може да се појави 0, 1, 2 или 3 пати, бројот 5 може да се појави 0 или 1 пат. Значи, бројот на делителите на бројот 540 е $(2+1)\cdot(3+1)\cdot(1+1)=24$.

33. Определи го бројот на делителите на бројот:
а) 2015, б) 2016.

Решение. а) Разложувањето на бројот 2015 на прости множители е

$2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Броевите 5, 13 и 31 може како делители да се појават 0 или 1 пат. Затоа бројот на делителите на бројот 2015 е еднаков на $(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 8$.

б) Разложувањето на бројот 2016 на прости множители е $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Бројот 2 во делителите може да се појави 0, 1, 2, 3, 4 или 5 пати, бројот 3 може да се појави 0, 1 или 2 пати, а бројот 7 може да се појави 0 или 1 пат. Затоа бројот на делителите на бројот 2016 е еднаков на $(1+5)\cdot(1+2)\cdot(1+1) = 36$.

34. Позитивниот цел број n има 2 позитивни делители, а бројот $n+1$ има три позитивни делители. Колку позитивни делители има бројот $n+2$?

Решение. Два делители имаат простите броеви, а три делители имаат квадратите на простите броеви. Значи, n е прост број, а $n+1$ е квадрат на прост број. Според тоа, $n+1 = k^2$, од каде добиваме

$$n = k^2 - 1 = (k-1)(k+1).$$

За да е n прост број потребно е да е $k-1=1$, односно $k=2$ и $n=3$. Според тоа, единствено решение на задачата е бројот 3 и притоа важи $3+1 = 4 = 2^2$.

35. Докажи дека бројот 1111112111111 е сложен.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} 1111112111111 &= 1111111000000 + 1111111 \\ &= 1111111 \cdot 1000000 + 1111111 \cdot 1 \\ &= 1111111 \cdot 1000001. \end{aligned}$$

36. а) Прост број p, $p \geq 5$ при делење со 6 дава остаток 1 или 5, т.е.тој е од видот $6k+1$ или $6k-1$, $k \in \mathbb{N}$. Докажи!

б) Да ги разгледаме сите броеви кои при делење со 6 даваат остаток 1 или 5. Дали меѓу нив има сложени броеви?

Решение. а) Секој број при делење со 6 може да се запише во еден од облиците $6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4$ и $6k+5$. Очигледно, сите броеви поголеми од 5 запишани во видот $6k, 6k+2, 6k+3, 6k+4$ се сложени, па затоа ако p е прост број, тој мора да е од видот $6k+1$ или $6k+5$, $k \in \mathbb{N}$. Бројот од видот $6k+5$ често пати се запишува во обликот $6k-1$, $k \in \mathbb{N}$.

б) Не се сите броеви од видот $6k+1$ или $6k-1$ прости. На пример, за $n,k \geq 1$ производите

$$(6k+1)(6n+1) = 6(6kn+k+n)+1,$$
$$(6k-1)(6n-1) = 6(6kn-k-n)+1,$$
$$(6k+1)(6n-1) = 6(6kn-k+n)-1.$$

се од споменатите видови и се сложени броеви.

37. Определи ги сите прости броеви p за кои и броевите $p+8$ и $p+10$ се исто така прости.

Решение. Јасно, $p>2$. Ако $p=3$, тогаш $p+8=11$ и $p+10=13$, т.е. едно решение е $p=3$. Секој прост број p поголем од 3 е од видот $3k+1$ или $3k+2$. Ако $p=3k+1$, тогаш $p+8=3k+1+8=3(k+3)$ е сложен број, а ако $p=3k+2$, тогаш $p=3k+2+10=3(k+4)$ е сложен број. Значи, единствено решение е $p=3$.

38. За простите броеви a,b,c важи $a+b+c=49$ и $a-b-c=13$. Ако $a>b>c$ пресметај го производот abc.

Решение. Ако ги собереме дадените равенства добиваме $2a=62$, оа дкаде наоѓаме $a=31$. Според тоа, $b+c=31-13=18$. Бидејќи по услов $b>c$ добиваме $b=13$ и $c=5$, или $b=11$ и $c=7$. Конечно, $abc=31\cdot 13\cdot 5=2015$ или $abc=31\cdot 11\cdot 7=2387$.

39. За простите броеви a,b,c важи $a+b+c=78$ и $a+b-c=74$. Ако $a>b>c$ пресметај го производот abc.

Решение. Со собирање на двете равенства добиваме $2(a+b)=152$, односно $a+b=76$. Значи, $c=2$. Бидејќи a и b се прости броеви и $a>b$ добиваме $a=73, b=3$; $a=71, b=5$; $a=59, b=17$; $a=53, b=23$ или $a=47, b=29$. Бараниот производ ги прима вредностите 438, 710, 2006, 2438 или 2726.

40. Дали постојат прости броеви p и q такви што $2p+3q=2006$?

Решение. Ако $2p+3q=2006$, тогаш $3q=2006-2p=2(1003-p)$, што значи дека $3q$ е парен број. Значи, q е парен број, па затоа $q=2$. Но, тогаш $2p+3\cdot 2=2006$, од каде следува $p=1000$. Бидејќи 1000 не е прост број, заклучуваме дека не постојат прости броеви p и q

такви што $2p+3q=2006$.

41. Докажи дека секој број поголем од 3 може да се прикаже како збир на два или повеќе прости броеви.

Решение. Ако n е природен број поголем од 3, тогаш $n=2k$ или $n=2k+1$, каде k е природен број поголем од 1.

Ако $n=2k$, тогаш $n=2+2+...+2$, каде во последниот збир има k двојки.

Ако $n=2k+1$, тогаш $n=2+2+...+2+3$, каде во последниот збир има една тројка и $k-1$ двојка.

42. Определи ги сите двоцифрени броеви кои се еднакви на квадратот на својата цифра на единиците.

Решение. Нека бараниот број е $\overline{xy}$. Од условот на задачата следува $10x+y=y^2$, од каде добиваме $10x=y(y-1)$. Цифрата на единиците на бројот $10x$ е 0, па затоа или $5\mid y$ и $2\mid y-1$ или $2\mid y$ и $5\mid y-1$. Јасно, $y>0$, па во првиот случај добиваме $y=5$ и сега е $10x=20$, т.е. $x=2$. Значи, едно решение на здачата е бројот 25. Во вториот случај од $y>0$ и $2\mid y$ следува $y\in\{2,4,6,8\}$ и како $5\mid y-1$, добиваме $y=6$ и од $10x=30$ следува $x=3$. Значи, во овој случај решение е бројот 36.

43. Колку решенија во множеството цели броеви има равенката

$$|ab|\cdot p=2009,$$

каде p е прост број?

Решение. Дадена равенка е еквивалентна со равенката

$$|ab|\cdot p=7\cdot 7\cdot 41.$$

Според тоа, $p=7$ или $p=41$. Ако $p=7$, тогаш $|ab|=287$. Бидејќи $287=1\cdot 287=7\cdot 41$ и $ab=287$ или $ab=-287$, ги добиваме следниве решенија:

p	7	7	7	7	7	7	7	7
a	1	1	-1	-1	7	7	-7	-7
b	287	-287	287	-287	41	-41	41	-41

Бидејќи равенката е симетрична, ако ги замениме местата на a и b добиваме уште 8 решенија. Ако $p=41$, тогаш $|ab|=49$, па ги добиваме следниве решенија:

p	41	41	41	41
a	7	7	-7	-7
b	7	-7	7	-7

Значи, равенката има $8+8+4=20$ решенија.

44. Колку решенија има равенката $|ab|+p=2009$ во множеството цели броеви, ако p е прост број, а a и b се непарни броеви.

Решение. Во дадената равенка $|ab|+p=2009$ броевите a и b се непарни, па затоа апсолутната вредност на нивниот производ е непарен број. Според тоа, бројот p е парен број, па како тој е прост број добиваме дека $p=2$. Значи, равенката го добива видот $|ab|=2007$. Понатаму, $2007=3\cdot 3\cdot 223$, односно $2007=1\cdot 2007-3\cdot 669=9\cdot 223$. Бидејќи ни треба апсолутната вредност на производот на броевите a и b, производот на дадените броеви може да е и негативен. Со комбинирање на предзнаците $+$ и $-$ од секој пар добиваме по четири можности. Ако земеме првиот множител да е a, а вториот b, добиваме 12 решенија, а ако уште ги замениме местата на a и b добиваме уште 12 решенија, што значи дека равенката има 24 решенија.

45. Дали постојат четири последователни прости броја, чиј збир е прост број.

Решение. За да збир на четири броја биде прост број, еден (или три) од нив мора да е парен број, бидејќи освен бројот 2, сите прости броеви се непарни. Според тоа, четирите последователни прости броеви мора да го содржат бројот 2, па затоа тоа се броевите 2, 3, 5 и 7. Нивниот збир е 17 и тоа е прост број. Значи, постојат четири последователни прости броеви чиј збир е прост број.

46. Определи го бројот на трицифрените прости броеви кај кои сите цифри се различни, а цифрата на единиците е еднаква на збирот на другите две цифри.

Решение. Бидејќи бројот е прост, цифрата на единиците мора да е непарна. Понатаму, таа не може да е 1 бидејќи 1 не е збир на два различни едноцифрени броја различни од 1, не е 3, бидејќи тогаш збирот на цифрите ќе биде делив со 3, т.е. бројот ќе биде делив со 3, од исти причини не е 9, а не е ниту 5, бидејќи тогаш бројот ќе биде делив со 5. Значи, цифрата на единиците е 7.

Имаме шест трицифрени броеви чии цифри се различни, цифрата на единиците е 7 и збирот на другите две цифри е 7. Тоа се броевите 167, 257, 347, 437, 527 и 617. Со непосредна проверка добиваме дека броевите 167, 257, 347 и 617 се прости, а броевите $437 = 19 \cdot 23$ и $527 = 17 \cdot 31$ се сложени.

47. Жаба скока на водни лилјани. Таа може да скокне 7 листови десно или 4 листови лево. Кој е потребниот најмал број скокови за да жабата се оддалечи точно 2024 водни лилјани?

Решение. Со a да го означиме бројот на скоковите во десно, а со b бројот на скоковите во лево. Тогаш $7a - 4b = 2024$, од каде добиваме $7a = 4 \cdot (506 + b)$. Значи, 7 мора да е делител на $506 + b$. Сега, бидејќи $506 = 7 \cdot 72 + 2$ најмалиот број $506 + b$ за кој 7 е негов делител се добива за $b = 5$. Притоа имаме $7a = 4 \cdot 511$, па затоа $a = 282$. Според тоа, најмалиот број скокови е $292 + 5 = 297$.

48. Определи ги сите природни броеви x и y такви што $x^2 + 2y = 27$. Колку решенија има дадената равенка?

Решение. Од $x^2 + 2y = 27$ следува $x^2 = 27 - 2y$, па затоа x мора да е непарен број и да важи $x^2 < 27$. Значи, x е непарен број и $x \le 5$. За $x = 1$ добиваме $2y = 27 - 1$, т.е. $y = 13$, за $x = 3$ добиваме $2y = 27 - 9$, т.е. $y = 9$ и за $x = 5$ добиваме $2y = 27 - 25$, т.е. $y = 1$.

Значи, решенија се $x = 1, y = 13$; $x = 3, y = 9$; $x = 5, y = 1$.

49. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2 + 2y = 26.$$

Решение. Имаме, $x^2 = 26 - 2y$, од каде следува дека x^2 е парен број, па затоа x е парен број, т.е. $x = 2k, k \in \mathbb{Z}$. Значи, $4k^2 + 2y = 26$ и затоа $2k^2 + y = 13$. Според тоа, $y = 13 - 2k^2$, па затоа сите решенија на дадената равенка се $x = 2k$, $y = 13 - 2k^2$, $k \in \mathbb{Z}$.

50. Определи ги целите броеви a и b такви што $a + b = ab = \frac{a}{b}$.

Решение. Од $a + b = ab = \frac{a}{b}$ следува $b \neq 0$ и $abb = a$, т.е. $ab^2 = a$, па

затоа $a(b^2-1)=0$. Од последното равенство следува $a=0$ или $b^2-1=0$. За $a=0$, од $a+b=0$ следува $b=0$, што е противречност. Значи, $b^2-1=0$, односно $b=1$ или $b=-1$. За $b=1$ не постои цел број a таков што $a+1=a$, а за $b=-1$ добиваме $a-1=-a$, т.е. $2a=1$, па a не е цел број. Значи, не постојат цели броеви a и b такви што $a+b=ab=\frac{a}{b}$.

51. Определи го бројот на паровите цели броеви такви што
$$|x|+|y|=2008.$$

Решение. Бидејќи $|x|,|y|$ се ненегативни броеви, добиваме дека паровите броеви $(|x|,|y|)$ кои даваат збир 2008 се:

а) $(1,2007),(2,2006),(3,2005),\ldots,(2005,3),(2006,2),(2007,1)$ и

б) $(0,2008),(2008,0)$.

Ако $|x|=a,|y|=b$ и $a,b>0$ се решенија на равенката $|x|+|y|=2008$, тогаш четири пара броеви (x,y) ја задоволуваат оваа равенка и тоа: $(a,b),(a,-b),(-a,b),(-a,-b)$. Бидејќи во делот а) имаме 2007 различни можности за a и b, заклучуваме дека од а) добиваме $2007\cdot 4=8028$ парови. Ако на нив ги додадеме и четирите парови од делот б) и тоа: $(0,2008),(0,-2008),(2008,0),(-2008,0)$, добиваме дека вкупниот број парови е $8028+4=8032$.

52. За природните броеви a и b важи $a+b=4$. Определи ги сите броеви a,b и c, $(c\in\mathbb{Z})$ за кои важи $a+b+|c|=2008$.

Решение. Бидејќи $a+b=4$, добиваме $4+|c|=2008$, т.е. $|c|=2004$. Според тоа, $c=-2004$ или $c=2004$. Бидејќи a и b се природни броеви, од $a+b=4$ добиваме дека $(a,b)\in\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$, односно
$$(a,b,c)\in\{(1,3,-2004),(2,2,-2004),(3,1,-2004),$$
$$(1,3,2004),(2,2,2004),(3,1,2004)\}.$$

53. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$|x|+2|y|=10.$$

Решение. Важи $10\geq|x|\geq 0$, $|y|\geq 0$ и $|x|$ е парен број. Соодветните решенија, во множеството природни броеви, за $|x|$ и $|y|$ се:

$\|x\|$	0	2	4	6	8	10
$\|y\|$	5	4	3	2	1	0

Според тоа, решенијата во множеството цели броеви на дадената равенка се

x	0	0	2	2	–2	–2	4	4	–4	–4
y	5	–5	4	–4	4	–4	3	–3	3	–3

x	6	6	–6	–6	8	8	–8	–8	10	–10
y	2	–2	2	–2	1	–1	1	–1	0	0

54. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$|x+1|\cdot(y-2)=2009\,.$$

Решение. Бидејќи апсолутната вредност $|x+1|$ е секогаш ненегативна, мора да е и $y-2$ ненегативен број. Понатаму, бидејќи важи

$$2009=1\cdot 2009=7\cdot 287=49\cdot 41\,,$$

сите можнн вредности за $|x+1|$ и $y-2$ се

$$(|x+1|, y-2)\in\{(1,2009),(2009,1),(7,287),(287,7),(49,41),(41,49)\}$$

Од каде добиваме

$$(x+1, y-2)\in\{(1,2009),(-1,2009),(2009,1),(-2009,1),(7,287),(-7,287),$$
$$(287,7),(-287,7),(49,41),(-49,41),(41,49),(-41,49)\}$$

Според тоа:

$$(x,y)\in\{(0,2011),(-2,2011),(2008,3),(-2010,3),(6,289),(-8,289),$$
$$(286,9),(-288,9),(48,43),(-50,43),(40,51),(-42,51)\}$$

55. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2+|y|=9\,.$$

Решение. Од $x^2\geq 0$ и $|y|\geq 0$ следува дека $x^2\in\{0,1,4,9\}$. Според тоа, $x\in\{0,-1,1,-2,2,-3,3\}$. Сите решенија на дадената равенка се дадени во долната табела:

x	0	0	–1	–1	1	1	–2	–2	2	2	–3	3
y	9	–9	8	–8	8	–8	–5	5	–5	5	0	0

2. АЛГЕБРА

1. Спореди ги броевите a и b ако

$$a = 1-2+3-4+5-6+...+2005-2006,$$
$$b = 1-3+5-7+9-11+...+2005-2007.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} a &= 1-2+3-4+5-6+...+2005-2006 \\ &= (-1)+(-1)+(-1)+...+(-1) \\ &= 1003\cdot(-1) = -1003, \\ b &= 1-3+5-7+9-11+...+2005-2007 \\ &= (-2)+(-2)+(-2)+...+(-2) \\ &= 503\cdot(-2) = -1004, \end{aligned}$$

па затоа $a = -1003 > -1004 = b$.

2. Спореди ги броевите $a-b$ и $c-d$, ако:

$$a = 1+7+13+...+2005,$$
$$b = 4+10+16+...+2008,$$
$$c = 1+5+9+...+2005,$$
$$d = 3+7+11+...+2007.$$

Решение. Имаме:

$$a-b = 1-4+7-10+13-16+...+2005-2008 = (-3)\cdot 335 = -1005$$

и

$$c-d = 1-3+5-7+9-11+...+2005-2007 = (-2)\cdot 502 = -1004,$$

па затоа $a-b < c-d$.

3. Нека

$A = 1+3+5+...+2007+2009$ и $B = 2+4+6+...+2008+2010$.

Пресметај $A-B$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} A-B &= 1+3+5+...+2007+2009-(2+4+6+...+2008+2010) \\ &= (1-2)+(3-4)+(5-6)+...+(2007-2008)+(2009-2010) \\ &= 1005\cdot(-1) = -1005. \end{aligned}$$

4. Збирот на првите 2015 природни броеви е поделен со бројот 2015. Определи го количникот.

Решение. За збирот на првите 2015 природни броеви имаме

$$\begin{aligned} S &= 1+2+3+\ldots+2012+2013+2014+2015 \\ &= (1+2014)+(2+2013)+(3+2012)+\ldots+(1007+1008)+2015 \\ &= 1007\cdot 2015+2015 = 2015\cdot 1008. \end{aligned}$$

Според тоа, при делење на дадениот збир со 2015 се добива количник 1008.

5. Определи ја најголемата, најмалата и најмалата позитивна вредност која се добива ако во изразот

$$\pm 1\pm 2\pm 3\pm 4\pm\ldots\pm 2008\pm 2009$$

пред секој број избереме еден знак.

Решение. Најголемата можна вредност на изразот е

$$1+2+3+4+\ldots+2008+2009 = 1005\cdot 2009 = 2019045\,.$$

Најмалата можна вредност на изразот е

$$-1-2-3-4-\ldots-2008-2009 = -2019045\,.$$

Имаме: $n-(n+1)-(n+2)+(n+3)=0$ за секој природен број n и како 2009 при делење со 4 дава остаток 1, важи:

$$1+(2-3-4+5)+(6-7-8+9)+\ldots+(2006-2007-2008+2009)=1,$$

што значи дека најмалата можна позитивна вредност на изразот е 1.

6. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$A = 77\cdot 16\cdot 19+88\cdot(-7\cdot 6^2)+99\cdot 2^3\cdot(77-19\cdot 4)\,.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} A &= 77\cdot 16\cdot 19+88\cdot(-7\cdot 6^2)+99\cdot 2^3\cdot(77-19\cdot 4) \\ &= 77\cdot 16\cdot 19+88\cdot(-7\cdot 36)+99\cdot 8\cdot(77-76) \\ &= 77\cdot 16\cdot 19-88\cdot 7\cdot 36+99\cdot 8\cdot 1 \\ &= 23408-22176+792 \\ &= 1232+792 \\ &= 2024. \end{aligned}$$

7. Пресметај ја вредноста на изразот

$$A = (1-\tfrac{1}{2})(2-\tfrac{2}{3})(3-\tfrac{3}{4})(4-\tfrac{4}{5})\ldots(9-\tfrac{9}{10}):14\tfrac{2}{5}\,.$$

Решение. Имаме:

$$A=(1-\tfrac{1}{2})(2-\tfrac{2}{3})(3-\tfrac{3}{4})(4-\tfrac{4}{5})...(9-\tfrac{9}{10}):14\tfrac{2}{5}$$
$$=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{9}{4}\cdot\tfrac{16}{5}\cdot...\cdot\tfrac{81}{10}:\tfrac{72}{5}$$
$$=\tfrac{1}{1}\cdot\tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{3}{1}\cdot\tfrac{4}{1}\cdot...\cdot\tfrac{8}{1}\cdot\tfrac{9}{2\cdot5}\cdot\tfrac{5}{8\cdot9}$$
$$=3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=2520.$$

8. Ако е

$$A=2-4\cdot(\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{2})\ \text{ и }\ B=-121,2:12-12\tfrac{1}{2}\cdot1,2$$

пресметај $\frac{|A+B|}{9}$.

Решение. Имаме:

$$A=2-4\cdot(\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{2})=2-4\cdot(-\tfrac{3}{8})=2+\tfrac{3}{2}=3,5\ \text{ и}$$
$$B=-121,2:12-12\tfrac{1}{2}\cdot1,2=-10,1-15=-25,1,$$

па затоа

$$\frac{|A+B|}{9}=\frac{|3,5+(-25,1)|}{9}=\frac{21,6}{9}=2,4.$$

9. Пресметај ја вредноста на изразот

$$A=(1-\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{4})(1+\tfrac{1}{5})...(1-\tfrac{1}{2022})(1+\tfrac{1}{2023}).$$

Решение. Бидејќи $1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$ и $1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$, добиваме

$$A=(1-\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{4})(1+\tfrac{1}{5})...(1-\tfrac{1}{2022})(1+\tfrac{1}{2023})$$
$$=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\tfrac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\tfrac{\cancel{6}}{\cancel{5}}\cdot\tfrac{\cancel{5}}{\cancel{6}}\cdot...\cdot\tfrac{\cancel{2022}}{\cancel{2021}}\cdot\tfrac{\cancel{2021}}{\cancel{2022}}\cdot\tfrac{2024}{2023}$$
$$=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2024}{2023}=\tfrac{1012}{2023}.$$

10. Пресметај ја вредноста на изразот

$$1-\tfrac{100}{101}+\tfrac{99}{101}-\tfrac{98}{101}+\tfrac{97}{101}-...-\tfrac{2}{101}+\tfrac{1}{101}.$$

Решение. Имаме:

$$1-\tfrac{100}{101}+\tfrac{99}{101}-\tfrac{98}{101}+...-\tfrac{2}{101}+\tfrac{1}{101}=\tfrac{101}{101}-\tfrac{100}{101}+\tfrac{99}{101}-\tfrac{98}{101}+\tfrac{97}{101}-...-\tfrac{2}{101}+\tfrac{1}{101}$$
$$=\tfrac{101-100}{101}+\tfrac{99-98}{101}+\tfrac{97-96}{101}+...+\tfrac{3-2}{101}+\tfrac{1}{101}$$
$$=\underbrace{\tfrac{1}{101}+\tfrac{1}{101}+...+\tfrac{1}{101}}_{50\text{ пати}}+\tfrac{1}{101}=\tfrac{51}{101}.$$

11. Пресметај ја вредноста на изразот

$$A=(-2\tfrac{1}{4}):(-3)-((-\tfrac{3}{4}:\tfrac{9}{10}-1\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{15}{9}+1\tfrac{5}{6})-(-3-\tfrac{1}{8}))\cdot 4\,.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}A&=(-2\tfrac{1}{4}):(-3)-((-\tfrac{3}{4}:\tfrac{9}{10}-1\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{15}{9}+1\tfrac{5}{6})-(-3-\tfrac{1}{8}))\cdot 4\\&=(-\tfrac{9}{4}):(-3)-((-\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{10}{9}-\tfrac{9}{5}\cdot\tfrac{15}{9}+\tfrac{11}{6})-(-\tfrac{25}{8}))\cdot 4\\&=\tfrac{3}{4}-((-\tfrac{5}{6}-3+\tfrac{11}{6})+\tfrac{25}{8})\cdot 4\\&=\tfrac{3}{4}-(-2+\tfrac{25}{8})\cdot 4=\tfrac{3}{4}-\tfrac{9}{8}\cdot 4\\&=\tfrac{3}{4}-\tfrac{9}{2}=-\tfrac{15}{4}.\end{aligned}$$

12. Дадени се множествата

$A=\{1,3,5,...,2005,2007,2009\}$ и $B=\{0,-2,-4,...,-2005,-2006,-2008\}$.

Нека c е збирот на сите елементи на множествата A и B, d е производот на нивните елементи и e е збирот на апсолутните вредности на нивните елементи. Определи го производот cde.

Решение. Меѓу елементите на множествата A и B е бројот 0, па затоа производот d на нивните елементи е еднаков на 0. Според тоа, $cde=c\cdot 0\cdot e=0$.

13. Дадени се множествата

$A=\{1,2,3,...,2007,2008,2009\}$ и $B=\{0,-1,-2,...,-2007,-2008\}$.

Нека c е збирот на сите броеви од множествата A и B, d е нивниот производ и e е разликата на збирот на сите парни броеви од A и збирот на сите непарни броеви од B. Подреди ги по големина броевите $|c-d|,|d-e|,|e-c|$ почнувајќи од најмалиот до најголемиот.

Решение. Множеството B ги содржои сите броеви спротивни на броевите на множеството A, освен на бројот 2009, па затоа збирот на сите броеви во дадените множества е 2009. Множеството B го содржи бројот 0, па затоа производот на сите броеви од множествата A и B е еднаков на 0. Парните броеви од множеството A се: 2, 4, ..., 2006, 2008 (вкупно 1004 броја), па затоа нивниот збир е

$$(2+2008)+(4+2006)+...+(1004+1006)=2010\cdot 502=1009020\,.$$

Непарни броеви од множеството B се: $-1,-3,...,-2005,-2007$ (вкупно 1004 броја), па затоа нивниот збир е

$(-1-2007)+(-3-2005)+...(-1005-1003)=-2008\cdot 502=-1008016$.

Според тоа, $e=1009020-(-1008016)=2017036$. Значи,

$$|c-d|=2009,|d-e|=2017036,|e-c|=2015027$$

и бараното подредување е: $|c-d|,|e-c|,|d-e|$.

14. Дадени се множествата $A=\{1,2,...,2015\}$ и $B=\{0,-1,-2,...,-2016\}$. Броевите x и y се редоследно збирот и производот на сите елементи од $A\cup B$ и $z=1+3+5+...+2015-(-2-4-6-...-2016)$. Спореди ги броевите $|x-y|,|y-z|,|z-x|$.

Решение. Имаме $A\cup B=\{-2016,-2015,....,-2,-1,0,1,2,...,2015\}$, па затоа збирот на сите елементи на $A\cup B$ е $x=-2016$. Производот на сите елементи на $A\cup B$ е $y=0$, бидејќи меѓу множителите е бројот 0, а

$$z=1+3+5+...+2015-(-2-4-6-...-2016)$$
$$=1+2+3+...+2015+2016=\frac{2016\cdot(2016+1)}{2}=2033136.$$

Според тоа,

$$|x-y|=2016,|y-z|=2033136,|z-x|=2035152,$$

од каде следува

$$|x-y|<|y-z|<|z-x|.$$

15. Симон запишал 2009 цели броеви. Најмалиот меѓу нив е -3010, а секој следен е за 3 поголем од претходниот. Определи го збирот на сите овие броеви.

Решение. Броевите кои Симон ги запишал се

$$-3010,-3007,-3004,...,-7,-4,-1,2,5,8,...,3005,3008,3011,3014,$$

и тоа се 1004 негативни и 1005 позитивни броеви. Збирот на овие броеви е:

$$-3010+3011-3007+3008-3004+3005...-7+8-4+5-1+2+3014=$$
$$=\underbrace{1+1+...+1}_{1004}+3014=4018.$$

16. Марко по ред ги запишал броевите од 1 до 2024 и потоа пишувал предзнаци пред тие броеви. Пред бројот 1 напишал минус, потоа пред следните десет броеви запишал плус, потоа пред бројот 12 запишал минус, па пред следните десет броеви запишал плус и така натаму,

при што во секој чекор откако пред соодветниот број запишувал знак минус пред следните десет броја запишувал знак плус се додека не дошол до бројот 2024. Пресметај ја вредноста на добиениот израз.

Решение. Бидејќи Марко периодично предзнаите ги ставал на секои 11 броеви и тоа пред првиот број знак минус, па пред следните десет знак плус, тој од 1 до 2024 тоа го направил $2023:11=184$ пати, а последниот плус го ставил пред бројот 2024. Така го добил изразот

$$\begin{aligned}A &= -1+2+...+11-12+13+...+22-...+2013-2014+2015+...+2024\\ &= 1+2+...+2024-2\cdot(1+12+23+34+...+2014)\\ &= \tfrac{2024\cdot 2025}{2}-2\cdot(1+1+11+1+22+1+33+...+1+2013)\\ &= \tfrac{2024\cdot 2025}{2}-2\cdot(184+11\cdot(1+2+3+...+183))\\ &= 1012\cdot 2025-2\cdot(184+11\cdot\tfrac{183\cdot 184}{2})\\ &= 1012\cdot 2025-2\cdot 184-11\cdot 183\cdot 184\\ &= 2049300-370760\\ &= 1678540.\end{aligned}$$

17. Која цифра се наоѓа на 2006-тото место по децималната запирка на бројот $\frac{1}{7}$?

Решение. Имаме $\frac{1}{7}=0,142857142857(142857)...$ што значи дека децималниот запис на бројот бројот $\frac{1}{7}$ нема предпериода и 142857 е неговата периода. Сега, од $2006=6\cdot 334+2$ заклучуваме дека на 2006-тото место во децималниот запис на бројот $\frac{1}{7}$ е втората цифра од периодата, а тоа е цифрата 4.

18. Определи ја 2023-тата цифра по децималната запирка во дицималното претставување на дропката $\frac{35}{37}$.

Решение. Имаме $\frac{35}{37}=0,(945)$ и бидејќи $2023=674\cdot 3+1$ заклучуваме дека 2023-тата цифра по децималната запирка е првата цифра во периодата, што значи дека тоа е цифрата 9.

19. Определи ги цифрите a и b ($a\neq b$) така што бројот $\overline{0,ababab...}$ ќе биде нескратлива дропка кај која збирот на броителот и именителот е

еднаков на 17.

Решение. Ако $x=\overline{0,ababab...}$, тогаш $100x=\overline{ab,abab...}$, па затоа важи

$$100x-x=\overline{ab,abab...}-\overline{0,ababab...},$$
$$99x=\overline{ab},$$
$$x=\frac{10a+b}{9\cdot 11}.$$

Од условот на задачата следува дека $10a+b$ мора да е делив со 9 или со 11, бидејќи ако е делив со 3, но не е делив со 9, тогаш именителот на дропката ќе биде 33, што противречи на условот збирот на броителот и именителот не дропката да е еднаков на 17. Ако $10a+b=11k$, тогаш бидејќи збирот на броителот и именителот треба да е 17, добиваме $k=8$, од каде следува $a=b=8$, што противрчи на $a\neq b$. Ако $10a+b=9k$, тогаш бидејќи бидејќи збирот на броителот и именителот треба да е 17, добиваме $k=6$, од каде следува $a=5, b=4$.

20. Определи ги цифрите a и b ($a\neq b$) така што бројот $\overline{0,abbb...}$ ќе биде еднаков на нескратливата дропка за која збирот на именителот и броителот е еднаков на 17.

Решение. Ако $x=\overline{0,abbb...}$, тогаш $10x=\overline{a,bbb...}$ и $100x=\overline{ab,bb...}$. Од овие две равенства следва дека $90x=\overline{ab}-a$, па затоа

$$x=\frac{\overline{ab}-a}{90}=\frac{9a+b}{2\cdot 3^2\cdot 5}.$$

Сега, бидејќи $0<x<1$, можни се следниве случаи:

1) $9a+b=2k$, што не е можно бидејќи тогаш именителот ќе биде 45, што противречни на условот збирот на броителот и именителот да е еднаков на 17.
2) $9a+b=3k$, што не е можно бидејќи тогаш именителот ќе биде 30, што противречни на условот збирот на броителот и именителот да е еднаков на 17.
3) $9a+b=6k$, при што заради условот збирот на броителот и именителот да е 17 добиваме $k=2$, односно $9a+b=12$. Понатаму, a и b ($a\neq b$) се цифри па од последното равенство следува $a=1$ и $b=3$.
4) $9a+b=9k$, при што заради условот збирот на броителот и именителот да е 17 добиваме $k=7$, односно $9a+b=63$. Бидејќи a и b ($a\neq b$) се цифри од последното равенство следува $a=6, b=9$

или $a=7, b=0$

5) $9a+b=10k$, при што заради условот збирот на броителот и именителот да е 17 добиваме $k=8$, т.е. $9a+b=80$. Бидејќи a и b се цифри од последното равенство следува $a=b=8$, што противречи на $a\neq b$.

21. Определи ги цифрите a,b,c (не задолжително различни) така што ќе важи

$$\overline{0,ababab...}+\overline{0,abcabcabc...}=\frac{33}{37}.$$

Решение. Имаме, $\overline{0,ababab...}=\frac{\overline{ab}}{99}$ и $\overline{0,abcabcabc...}=\frac{\overline{abc}}{999}$, па затоа даденото равенство е еквивалентно со равенството $\frac{\overline{ab}}{99}+\frac{\overline{abc}}{999}=\frac{33}{37}$, од каде добиваме $2210a+221b+11c=9801$. Оттука имаме

$$9801-221\cdot 9-11\cdot 9\le 2210a\le 9801,$$

па лесно се добива дека единствена можност е $a=4$. На ист начин од равенството $221b+11c=961$ следува $b=4$, па затоа $c=7$.

22. Пресметај ја вредноста на изразот $A=-a-\frac{1}{b-\frac{1}{c}}$ ако $a=0,333...$, $b=0,444...$ и $c=0,666...$.

Решение. Од $a=0,333...$ следува $10a=3,333...$, па затоа

$$\begin{aligned}10a-a&=3,333...-0,333...\\ 9a&=3,\\ a&=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Аналогно наоѓаме $b=\frac{4}{9}$ и $c=\frac{2}{3}$. Конечно,

$$\begin{aligned}A&=-a-\frac{1}{b-\frac{1}{c}}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{\frac{4}{9}-\frac{1}{\frac{2}{3}}}\\ &=-\frac{1}{3}-\frac{1}{\frac{4}{9}-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{-\frac{19}{18}}\\ &=-\frac{1}{3}+\frac{18}{19}=\frac{-19+54}{57}=\frac{35}{57}.\end{aligned}$$

23. Пресметај ја вредноста на изразот $-1-\frac{1}{1-\frac{a}{b-\frac{1}{c}}}$, ако $a=0,222...$, $b=0,444...$ и $c=0,888...$.

Решение. Аналогно како во претходната задача наоѓаме $a=\frac{2}{9}, b=\frac{4}{9}$ и $c=\frac{8}{9}$. Според тоа,

$$-1-\frac{1}{1-\frac{a}{b-\frac{1}{c}}}=-1-\frac{1}{1-\frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}-\frac{1}{\frac{8}{9}}}}=-1-\frac{1}{1-\frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}-\frac{9}{8}}}=-1-\frac{1}{1+\frac{\frac{2}{9}}{\frac{49}{72}}}$$

$$=-1-\frac{1}{1+\frac{16}{49}}=-1-\frac{1}{\frac{65}{49}}=-1-\frac{49}{65}=-1\frac{49}{65}.$$

24. За $x=\frac{45}{18}$ пресметај ја вредноста на изразите A и B и спореди ги истите:

$$A=\frac{-2x+3\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}:\frac{5}{6}}:\frac{1}{0{,}8-2\frac{1}{10}},\qquad B=\frac{3\cdot(\frac{1}{7}-0{,}5)-\frac{3}{4}}{4\frac{4}{5}-1{,}3:\frac{1}{5}+1{,}1}\cdot\frac{26}{x}\cdot\frac{42}{51}.$$

Решение. Имаме $x=\frac{45}{18}=\frac{5}{2}$, па затоа

$$A=\frac{-2x+3\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}:\frac{5}{6}}:\frac{1}{0{,}8-2\frac{1}{10}}=\frac{-2\cdot\frac{5}{2}+3\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}:\frac{5}{6}}:\frac{1}{0{,}8-2\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{-5+\frac{11}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}:\frac{6}{5}}:\frac{1}{\frac{8}{10}-\frac{21}{10}}=\frac{\frac{-15+11}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{2}{5}}:\frac{1}{\frac{-13}{10}}$$

$$=\frac{\frac{-4}{3}}{\frac{-1}{15}}\cdot(\frac{-13}{10})=20\cdot(\frac{-13}{10})=-26,$$

$$B=-\frac{3\cdot(\frac{1}{7}-0{,}5)-\frac{3}{4}}{4\frac{4}{5}-1{,}3:\frac{1}{5}+1{,}1}\cdot\frac{26}{x}\cdot\frac{42}{51}=-\frac{3\cdot(\frac{1}{7}-\frac{1}{2})-\frac{3}{4}}{\frac{24}{5}-\frac{13}{10}\cdot5+\frac{11}{10}}\cdot\frac{26}{\frac{5}{2}}\cdot\frac{42}{51}$$

$$=-\frac{3\cdot(\frac{-5}{14})-\frac{3}{4}}{\frac{48-65+11}{10}}\cdot\frac{52}{5}\cdot\frac{42}{51}=-\frac{\frac{-51}{28}}{\frac{-6}{10}}\cdot\frac{52}{5}\cdot\frac{42}{51}$$

$$=-\frac{51\cdot10}{28\cdot6}\cdot\frac{52}{5}\cdot\frac{42}{51}=-\frac{52}{2}=-26,$$

што значи $A=B$.

25. Претстави го бројот 2009 во вид на дропка чиј броител е деветти степен на некој природен број, а именител е десетти степен на некој природен број. Докажи дека задачата има бесконечно многу решенија.
Решение. Едно решение е на пример

$$2009=\frac{(2009^9)^9}{(2009^8)^{10}}.$$

Нека броевите $m=10k-1$ и $n=9k-1$, $k\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$\frac{(2009^{10k-1})^9}{(2009^{9k-1})^{10}} = \frac{2009^{90k-9}}{2009^{90k-10}} = 2009,$$

па затоа задачата има бесконечно многу решенија.

26. Вредноста на изразот

$$(1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})(1+\tfrac{1}{4})...(1+\tfrac{1}{n})$$

е еднаква на 2013. Колку множители има дадениот израз.

Решение. Имаме

$$(1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})(1+\tfrac{1}{4})...(1+\tfrac{1}{n}) = 2013,$$

$$\tfrac{2+1}{2}\cdot\tfrac{3+1}{3}\cdot\tfrac{4+1}{4}\cdot...\cdot\tfrac{n-1+1}{n-1}\cdot\tfrac{n+1}{n} = 2013,$$

$$\tfrac{\cancel{3}}{2}\cdot\tfrac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\tfrac{5}{\cancel{4}}\cdot...\cdot\tfrac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}}\cdot\tfrac{n+1}{\cancel{n}} = 2013,$$

$$\tfrac{n+1}{2} = 2013,$$

$$n = 4025.$$

Значи, во дадениот израз има $4025-1=4024$ множители.

27. На местото на ѕвездичките стави знаци на аритметичките операции и распореди загради така што $\frac{1}{2}*\frac{1}{6}*\frac{1}{6018} = 2006$ ќе премине во точно равенство?

Решение. Бидејќи $6018:2006=3$, очигледно дека дека на местото на втората ѕвездичка треба да стои знакот за делење, а $\frac{1}{2}*\frac{1}{6}$ треба да даде резултат $\frac{1}{3}$. Така добиваме $(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}):\frac{1}{6018} = 2006$.

28. На местото на ѕвездичките стави знаци на аритметичките операции така што ќе добиеш точно равенство:

$$(\tfrac{1}{2}*\tfrac{1}{3})*\tfrac{1}{5}*\tfrac{1}{67} = \tfrac{707}{2010}.$$

Решение. Имаме $2\cdot3\cdot5=30$ и $30\cdot67=2010$, па затоа една идеја за поставување на знаците е бројот 707 да се добие како збир или разлика на два броја од кои едниот е 30. Имаме, $667+30=707$, но ова нема да даде решение бидејќи бројот 667 не е делив со бројот 67. Од друга страна,

$$\tfrac{707}{2010} = \tfrac{737-30}{2010} = \tfrac{737}{2010} - \tfrac{30}{2010} = \tfrac{11\cdot67}{30\cdot67} - \tfrac{1}{67} = \tfrac{11}{30} - \tfrac{1}{67}$$

$$= \tfrac{6+5}{6\cdot5} - \tfrac{1}{67} = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{67} = (\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{67},$$

и тоа е бараното равенство.

29. Меѓу броевите стави знаци за собирање и одземање така што ќе добиеш точно равенство:

$$\frac{5}{6}\ \ \frac{2}{5}\ \ \frac{3}{8}\ \ \frac{1}{3}=-\frac{11}{40}.$$

Решение. Да го определиме најмалиот заеднички содржател на именителите на дропките: $\mathrm{NZD}(6,5,8,3,40)=120$. Ги прошируваме сите дропки до именител 120 и добиваме

$$\frac{100}{120}\ \ \frac{48}{120}\ \ \frac{45}{120}\ \ \frac{40}{120}=-\frac{33}{120}.$$

Според тоа, меѓу броевите 100, 48, 45 и 40 треба да ставиме знаци за собирање и одземање така што резултатот ќе биде -33. Бидејќи $100-48-43-40=-33$, добиваме

$$\frac{5}{6}-\frac{2}{5}-\frac{3}{8}-\frac{1}{3}=-\frac{11}{40}.$$

30. Реши ја равенката

$$\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{x}=\frac{2}{73}.$$

Решение. Последователно добиваме

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{x}=\frac{2}{73},\\
&\frac{1}{x}=\frac{2}{73}-\frac{1}{60}-\frac{1}{219}-\frac{1}{292},\\
&\frac{1}{x}=\frac{2}{73}-\frac{1}{219}-\frac{1}{292}-\frac{1}{60},\\
&\frac{1}{x}=\frac{2}{73}-\frac{1}{3\cdot 73}-\frac{1}{4\cdot 73}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5},\\
&\frac{1}{x}=\frac{120-20-15-73}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 73},\\
&\frac{1}{x}=\frac{12}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 73},\\
&\frac{1}{x}=\frac{1}{5\cdot 73},\\
&x=5\cdot 73=365.
\end{aligned}$$

31. Реши ја равенката

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{2009}{2010}.$$

Решение. Од равенката добиваме

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{2009}{2010}-1,$$

од каде следува

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{-2010}\text{, т.е. } 1+\frac{1}{x}=-2010\,.$$

Според тоа, $\frac{1}{x}=-2011$, па затоа $x=-\frac{1}{2011}$.

32. Реши ја равенката

$$\frac{1+3+5+...+2015+2017}{2+4+6+...+2014+2016}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2016}\,.$$

Решение. Јасно, $x\neq 0$. Имаме:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x}+\frac{1}{2016}=\frac{1+3+5+...+2015+2017}{2+4+6+...+2014+2016},\\
&\frac{1}{x}+\frac{1}{2016}=\frac{2-1+4-1+6-1+...+2016-1+2018-1}{2+4+6+...+2014+2016},\\
&\frac{1}{x}+\frac{1}{2016}=\frac{2+4+6+...+2016+2018-1009}{2+4+6+...+2016},\\
&\frac{1}{x}+\frac{1}{2016}=\frac{2+4+6+...+2016}{2+4+6+...+2016}+\frac{2018-1009}{2+4+6+...+2016},\\
&\frac{1}{x}+\frac{1}{2016}=1+\frac{1009}{2(1+2+3+...+1008)},\\
&\frac{1}{x}+\frac{1}{2016}=1+\frac{1009}{2.\frac{1008\cdot 1009}{2}},\\
&\frac{1}{x}+\frac{1}{2016}=1+\frac{1}{1008},\\
&\frac{1}{x}=\frac{1009}{1008}-\frac{1}{2016},\\
&\frac{1}{x}=\frac{2018-1}{2016},\\
&\frac{1}{x}=\frac{2017}{2016},\\
&x=\frac{2016}{2017}.
\end{aligned}$$

33. Ако x е рационален број, докажи дека:

$$x+|x|=\begin{cases}0, & \text{ако } x<0,\\ 2x, & \text{ако } x\geq 0.\end{cases}$$

Решение. Од

$$|x|=\begin{cases}-x, & \text{ако } x<0,\\ x, & \text{ако } x\geq 0\end{cases}$$

следува

$$x+|x|=\begin{cases}x+(-x), & \text{ако } x<0,\\ x+x, & \text{ако } x\geq 0,\end{cases}=\begin{cases}0, & \text{ако } x<0,\\ 2x, & \text{ако } x\geq 0.\end{cases}$$

34. За целите броеви x и y е определена операцијата * на следниот начин:

$$x * y = x - y + |x - y|.$$

Определи го бројот x ако $x * 8 = 20$.

Решение. Од дефиницијата на операцијата * следува

$$x - 8 + |x - 8| = 20.$$

Ако $x \geq 8$, тогаш $|x - 8| = x - 8$ и дадената равенка го добива видот $x - 8 + (x - 8) = 20$, па затоа $x = 18$ и како $18 > 8$, тоа е една решение.

Ако $x < 8$, тогаш $|x - 8| = -(x - 8)$ и дадената равенка го добива видот $x - 8 - (x - 8) = 20$, т.е. $0 \cdot x = 20$ и во овој случај немаме решение на почетната равенка.

Значи, бараниот број е $x = 18$.

35. За броевите x и y дефинираме операција * на следниов начин

$$x * y = x + y - |x - y|.$$

Определи го бројот y ако $12 * y = 10$.

Решение. Од дефинисијата на операцијата * следува равенката

$$12 + y - |12 - y| = 10.$$

Сега, од дефиницијата на апсолутната вредност имаме:

1) Ако $12 - y \geq 0$, равенката го добива видот $12 + y - (12 - y) = 10$, од каде наоѓаме $2y = 10$, т.е. $y = 5$ и ова е едно решение на равенката (Зошто?).
2) Ако $12 - y < 0$, равенката го добива видот $12 - y + (12 - y) = 10$, т.е. $0 \cdot y + 24 = 10$ и оваа равенка нема решение, што значи дека и почетната равенка нема решение.

36. Реши ја равенката

$$||x| - 1| = 2011.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на севкупноста равенки $|x| - 1 = 2011$ и $|x| - 1 = -2011$, односно на $|x| = 2012$ и $|x| = -2010$. Од првата равенка добиваме $x = 2012$ или $x = -2012$, а додека втората равенка нема решение.

37. Реши ја равенката

$$||x - 1| - 2011| = 1.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на севкупноста равенки $|x-1|-2011=1$ и $|x-1|-2011=-1$, односно со севкупноста равенки $|x-1|=2012$ и $|x-1|=2010$. Од првата равенка добиваме $x-1=2012$ или $x-1=-2012$, па затоа $x=2013$ или $x=-2011$. Од втората равенка добиваме $x-1=2010$ или $x-1=-2010$, па затоа $x=2011$ или $x=-2009$.

38. Реши ја равенката

$$|x+|x+|x|||=2010.$$

Решение. Ако $x<0$, тогаш $x+|x|=0$, па равенката го добива видот $|x|=2010$, од каде заради $x<0$ добиваме $x=-2010$. Ако $x>0$, тогаш $x+|x|=2x$ и равенката го добива видот $|x+2x|=2010$, односно $3x=2010$. Значи, во овој случај $x=670$. Конечно, множеството решенија на равенката е $\{-2010,670\}$.

39. Определи го збирот на сите решенија на равенката

$$||2x-2\cdot 3|-|3\cdot 4-4\cdot 5||=6.$$

Решение. По средувањата равенката го добива видот $||2x-6|-8|=6$. Според тоа $|2x-6|-8=6$ или $|2x-6|-8=-6$, односно $|2x-6|=14$ или $|2x-6|=2$.

Од првата равенка следува $2x-6=14$ или $2x-6=-14$, од каде добиваме $x=10$ или $x=-4$.

Од втората равенка следува $2x-6=2$ или $2x-6=-2$, од каде следува $x=4$ или $x=2$.

Решенија на равенката се $-4,2,4,10$ и нивниот збир е 12.

40. Определи го производот на сите решенија на равенката

$$||1-2\cdot 3|-|4\cdot 5-5x||=10.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$|5-|20-5x||=10.$$

Од последната равенка следува $5-|20-5x|=10$ и $5-|20-5x|=-10$. Од првата равенка добиваме $|20-5x|=-5$ и оваа равенка нема решение. Од втората равенка следува $|20-5x|=15$, од каде добиваме $20-5x=15$, т.е. $x=1$ и $20-5x=-15$, т.е. $x=7$. Конечно, производот на решенијата на дадената равенка е $1\cdot 7=7$.

41. Реши ја равенката

$$|||x|+2x|+3x|=4.$$

Решение. Ако $x \geq 0$, тогаш равенката го добива видот

$$4=|||x|+2x|+3x|=||x+2x|+3x|=|3x+3x|=6x,$$

па затоа $x=\frac{2}{3}$. Ако $x<0$, тогаш равенката го добива видот

$$4=||-x+2x|+3x|=|-x+3x|=-2x,$$

па затоа $x=-2$.

42. Реши ја равенката

$$|||2x|-3x|-4x|=5.$$

Решение. За $x \geq 0$ имаме $|x|=x$, па затоа

$$||2x-3x|-4x|=||-x|-4x|=|x-4x|=3x.$$

Понатаму, $3x=5$, од каде следува $x=\frac{5}{3}$ и ова е едно решение. За $x<0$ имаме $|x|=-x$, па затоа

$$|||2x|-3x|-4x|=||-2x-3x|-4x|=|-5x-4x|=-9x.$$

Понатаму, $-9x=5$, од каде следува $x=-\frac{5}{9}$ и ова е второ решение.

43. Реши ја равенката

$$x+|2x|=\frac{x}{3|x|}-\frac{2}{3}.$$

Решение. Јасно, мора да е $x \neq 0$.

Ако $x>0$, тогаш $|x|=x$, па равенката е $x+2x=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}$. Според тоа, $x=-\frac{1}{9}$, но ова не е решение бидејќи е негативен број.

Ако $x<0$, тогаш $|x|=-x$, па равенката е $x-2x=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}$. Според тоа, $x=1$, но ова не е решение бидејќи е позитивен број.

Конечно, дадената равенка нема решение.

44. Реши ја равенката

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{|x|}}}=2016.$$

Решение. Од $\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{|x|}}}=2016$ следува дека именителот на дропката на

левата страна е еднаков на реципрочната вредност на бројот на десната страна,одноно $1-\frac{1}{1+\frac{1}{|x|}}=\frac{1}{2016}$, од каде добиваме

$$\frac{1}{1+\frac{1}{|x|}}=1-\frac{1}{2016}=\frac{2015}{2016}=\frac{1}{\frac{2016}{2015}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2015}}.$$

Според тоа, $|x|=2015$, па решенијата на дадената равнека се $x=2015$ и $x=-2015$.

45. Реши ја равенката

$$2x-|3x|=\frac{x}{|x|}-\frac{2}{3}.$$

Решение. Јасно, $x\neq 0$.

Ако $x>0$, тогаш ја добиваме равенката $2x-3x=1-\frac{2}{3}$, од каде добиваме $x=-\frac{1}{3}$. Но, ова не е решение, бидејќи треба да е позитивно.

Ако $x<0$, тогаш ја добиваме равенката $2x+3x=-1-\frac{2}{3}$, од каде добиваме $x=-\frac{1}{3}$ и ова е решение на почетната равенка.

Значи, единствено решение на равенката е $x=-\frac{1}{3}$.

46. Реши ја равенката

$$\frac{36}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{|x-36|}}}=2016.$$

Решение. Имаме, $\frac{36}{2016}=1-\frac{1}{1+\frac{1}{|x-36|}}$, па затоа $\frac{1}{1+\frac{1}{|x-36|}}=1-\frac{1}{56}$. Според тоа, $\frac{1}{1+\frac{1}{|x-36|}}=\frac{55}{56}$, односно $1+\frac{1}{|x-36|}=\frac{56}{55}$, па затоа $\frac{1}{|x-36|}=\frac{1}{55}$. Значи, $|x-36|=55$, од каде добиваме $x-36=55$ или $x-36=-55$. Конечно, $x=91$ или $x=-19$.

47. Определи го најмалиот природен број чија вредност може да ја има параметарот k за да решението на равенката

$$-\frac{1}{2}\cdot(\frac{2x}{5}-\frac{4}{5}k)-k=\frac{3}{4}\cdot(8-2k)-1$$

биде позитивно. За така најдената вредност на k пресметај го x.

Решение. Последователно добиваме

$$-\tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{2x}{5}-\tfrac{4}{5}k)-k=\tfrac{3}{4}\cdot(8-2k)-1,$$
$$-\tfrac{x}{5}+\tfrac{2}{5}k-k=6-\tfrac{3}{2}k-1,$$
$$-\tfrac{x}{5}-\tfrac{3}{5}k=5-\tfrac{3}{2}k,$$
$$2x=9k-50,$$
$$x=\tfrac{9k-50}{2}.$$

Според тоа, треба да важи $\frac{9k-50}{2}>0$, од каде добиваме $9k-50>0$, односно $k>\frac{50}{9}=5\frac{5}{9}$. Но, k треба да е најмалиот природен број, па затоа $k=6$. Притоа имаме $x=\frac{9\cdot 6-50}{2}=2$.

48. Определи ги подредените парови (x,y), каде што x и y се природни броеви, такви што $x+y=100$ и $\frac{\frac{1}{x}+y}{x+\frac{1}{y}}=19$.

Решение. Имаме:

$$\frac{\frac{1}{x}+y}{x+\frac{1}{y}}=19 \;\Leftrightarrow\; \frac{\frac{1+xy}{x}}{\frac{xy+1}{y}}=19 \;\Leftrightarrow\; \frac{(1+xy)y}{(1+xy)x}=19.$$

Задачата има решение ако $x,y,1+xy\neq 0$, па од последната равенка добиваме $\frac{y}{x}=19$, односно $y=19x$. Со замена во $x+y=100$ наоѓаме $x+19x=100$, т.е. $x=5$. Конечно, $y=19\cdot 5=95$, што значи дека единствен подреден пар кој ги задоволува условите на задачата е парот $(x,y)=(5,95)$.

Забелешка. Решението на задачата навистина е подреден пар природни броеви, но во решавањето на истата овој услов никаде не го искористивме, што значи дека истиот е непотребен.

49. Определи и сите тројки броеви a,b,c такви што $ab=-12$, $ac=-20$ и $bc=60$. Пресметај ја соодветната вредност на производот abc.

Решение. Ги множиме равенствата $ab=-12$, $ac=-20$ и $bc=60$, по што добиваме $(abc)^2=120^2$. Од последното равество следува:

1) $abc=120$, од каде добиваме
$$a=\frac{abc}{bc}=\frac{120}{60}=2,\ b=\frac{abc}{ca}=\frac{120}{-20}=-6\ c=\frac{abc}{ab}=\frac{120}{-12}=-10.$$
2) $abc=-120$, од каде добиваме

$$a=\frac{abc}{bc}=\frac{-120}{60}=-2\,,\ b=\frac{abc}{ca}=\frac{-120}{-20}=6\ c=\frac{abc}{ab}=\frac{-120}{-12}=10\,.$$

50. Дадена е неравенката $-31<x<33$.

а) Определи го множеството решенија на дадената неравенка во множеството цели броеви.

б) Пресметај го збирот на најдените решенија под а).

в) Пресметај го производот на најдените решенија под а).

Решение. а) Бидејќи x е цел број и $-31<x<33$, добиваме

$$x\in\{-30,-29,-28,...,-1,0,1,...,28,29,30,31,32\}\,.$$

б) Збирот на решенија е

$$(-30)+(-29)+(-28)+...+(-1)+0+1+...+28+29+30+31+32=$$
$$=(-30+30)+(-29)+29+(-28)+28+...+(-1)+1+31+32=63.$$

в) Меѓу решенијата е и бројот 0, па затоа производот на решенијата е еднаков на 0.

51. Во множеството цели броеви реши ја неравенката

$$-\frac{2}{3}<\frac{2-x}{5}<\frac{9}{10}\,.$$

Решение. Прво ги сведуваме дропките на заеднички именител $-\frac{20}{30}<\frac{6(2-x)}{30}<\frac{27}{30}$. Понатаму, $-20<6(2-x)<27$, од каде со делење со 6 добиваме $-\frac{20}{6}<2-x<\frac{27}{6}$, односно $-\frac{10}{3}<2-x<\frac{9}{2}$. Одземаме 2 од секоја страна на неравенката и добиваме $-\frac{10}{3}-2<-x<\frac{9}{2}-2$, односно $-5\frac{1}{3}<-x<2\frac{1}{2}$. Значи, $-x\in\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$, што значи дека $x\in\{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$.

52. Во множеството цели броеви реши ја неравенката

$$\frac{1}{3}<\frac{2}{1-x}<\frac{3}{4}\,.$$

Решение. Дадената равенка ја сведуваме до заеднички броител $\frac{6}{18}<\frac{6}{3(1-x)}<\frac{6}{8}$. Оттука следува дека $18>3(1-x)>8$. Понатаму, последователно ги добиваме еквивалентните неравенки

$$6>1-x>\frac{8}{3},$$

$$5>-x>\frac{5}{3}.$$

Од последната неравенка следува $-x\in\{2,3,4\}$, од каде што следува

$x \in \{-2,-3,-4\}$.

53. Во множеството цели броеви реши ја неравенката

$$-0,2 \le \frac{1}{65} + \frac{x}{62} \le -0,1.$$

Решение. Последователно ги добиваме еквивалентните неравенки

$$-0,2 \cdot 65 \cdot 62 \le 62 + 65x \le -0,1 \cdot 65 \cdot 62$$
$$-806 \le 62 + 65x \le -403,$$
$$-868 \le 65x \le -465,$$
$$-\frac{868}{65} \le x \le -\frac{465}{65},$$
$$-13\frac{23}{65} \le x \le -7\frac{10}{65},$$

па затоа $x \in \{-13,-12,-11,-10,-9,-8\}$.

54. Во множеството цели броеви реши ја неравенката

$$-0,4 \le \frac{1}{5} - \frac{x}{2} \le -0,2.$$

Решение. Дадената неравенка последователно е еквивалентна со неравенките

$$-4 \le 2 - 5x \le -2,$$
$$-6 \le -5x \le -4,$$
$$4 \le 5x \le 6,$$
$$\frac{4}{5} \le x \le \frac{6}{5}.$$

Според тоа, единствено целобројно решение е $x = 1$.

55. Во множеството цели броеви реши ја неравенката

$$3 < -(-a) + |2a| \le 6.$$

Решение. Ако $a > 0$, тогаш имаме $3 < a + 2a \le 6$, односно $3 < 3a \le 6$, од каде добиваме $a = 2$.

Ако $a < 0$, тогаш имаме $3 < a - 2a \le 6$, односно $3 < -a \le 6$, од каде добиваме $-6 \le a < 3$, па во овој случај решенија се $a \in \{-6,-5,-4\}$.

Значи, целобројни решенија на дадената неравенка се $-6,-5,-4$ и 2.

56. Во множествоот цели броеви реши ја неравенката

$$6 < |a| - (-2a) \le 9.$$

Решение. Ако $a \ge 0$, тогаш неравенката го добива видот $6 < a + 2a \le 9$, т.е. $6 < 3a \le 9$, од каде добиваме $a = 3$.

Ако $a<0$, тогаш неравенката го добива видот $6<-a+2a\le 9$, т.е. $6<a\le 9$. Во случајов немаме решение бидејќи треба да е $a<0$.
Значи, единствено решение на дадената неравенка е $a=3$.

57. Пресметај го збирот на сите целобројни решенија на неравенката:
$$|x|+|x+1|<2005.$$

Решение. Ако $x\ge 0$, тогаш $x+1>0$, па неравенката го добива видот $2x+1<2005$, од каде добиваме $x<1002$. Според тоа, броевите 0, 1, 2, 3, ... 1001 се единствените ненегативни целобројни решенија на дадената неравенка.
Понатаму, ако $x+1\le 0$, тогаш $x<0$, па дадената неравенка го добива видот $-x-x-1<2005$, од каде добиваме $x>-1003$. Според тоа, броевите $-1,-2,...,-1002$ се единствените негативни целобројни решенија на дадената неравенка.
Конечно, збирот на сите целоброни решенија на дадената неравенка е
$$-1002-1001-...-2-1+0+1+2+...+1001=-1002.$$

58. Пресметај го збирот на сите целобројни решенија на неравенката:
$$|x|+|x-1|<2005.$$

Решение. Ако $x-1\ge 0$, тогаш $x>0$, па неравенката го добива видот $2x-1<2005$, од каде добиваме $x<1003$. Според тоа, броевите 1, 2, 3, ... 1002 се единствените позитивни целобројни решенија на дадената неравенка.
Понатаму, ако $x\le 0$, тогаш $x-1<0$, па дадената неравенка го добива видот $-x-x+1<2005$, од каде добиваме $x>-1002$. Според тоа, броевите $0,-1,-2,...,-1001$ се единствените непозитивни целобројни решенија на дадената неравенка.
Конечно, збирот на сите целобројни решенија на дадената неравенка е
$$-1001-1000-...-2-1+0+1+2+...+1001+1002=1002.$$

59. Докажи дека $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}<1$.

Решение. Имаме:
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}&=\frac{16}{2\cdot 16}+\frac{8}{4\cdot 8}+\frac{4}{8\cdot 4}+\frac{2}{16\cdot 2}+\frac{1}{32}\\&=\frac{16}{32}+\frac{8}{32}+\frac{4}{32}+\frac{2}{32}+\frac{1}{32}\\&=\frac{16+8+4+2+1}{32}=\frac{31}{32}<1.\end{aligned}$$

60. Докажи дека

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots\frac{1}{2005\cdot 2007}<\frac{1}{2}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{1\cdot 3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{2}{1\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3-1}{1\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}=(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})\cdot\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{1}{3\cdot 5}\cdot\frac{2}{2}=\frac{2}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5-3}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{2}=(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})\cdot\frac{1}{2},$$

.....

$$\frac{1}{2005\cdot 2007}=\frac{1}{2005\cdot 2007}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1}{2005\cdot 2007}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2007-2005}{2005\cdot 2007}\cdot\frac{1}{2}=(\frac{1}{2005}-\frac{1}{2007})\cdot\frac{1}{2}$$

па затоа

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots\frac{1}{2005\cdot 2007}&=(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})\cdot\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})\cdot\frac{1}{2}+\ldots+(\frac{1}{2005}-\frac{1}{2007})\cdot\frac{1}{2}\\&=(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2005}-\frac{1}{2007})\cdot\frac{1}{2}\\&=(1-\frac{1}{2007})\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2007}\cdot\frac{1}{2}<\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

61. Докажи дека $|2x-8|+|3-2x|\geq 5$ за секој реален број x.

Решение. Ако го искористиме неравенството $|a+b|\leq|a|+|b|$ кое важи за секои броеви a и b, и тоа дека $|-a|=|a|$, добиваме

$$5=|3-8|=|2x-8+3-2x|\leq|2x-8|+|3-2x|.$$

62. Ако $x+y+z=5$, докажи дека

$$|x-5|+|y+3|+|z-9|\geq 6.$$

Решение. Ако искористиме дека за секои броеви a,b,c важи

$$|a+b+c|\leq|a|+|b|+|c|,$$

добиваме

$$\begin{aligned}6&=|5-11|=|x+y+z-11|\\&=|x-5+y+3+z-9|\\&\leq|x-5|+|y+3|+|z-9|,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

63. Броевите a,b и c се рационални и се такви што еден е позитивен, еден е негативен и еден е еднаков на нула. Ако $\frac{a(c-b)}{b}>0$ кој од броевите е нула, позитивен и негативен.

Решение. Бројот b е именител на дропката, па затоа е различен од 0.

Бројот a не може да е 0, бидејќи тогаш дропката ќе биде 0, а таа е позитивна. Значи, $c=0$. Според тоа, $\frac{a(-b)}{b}>0$, односно $-a>0$, па затоа $a<0$. Конечно, $b>0$.

64. Броевите a,b,c се такви што едниот е позитивен, едниот негативен и едниот е еднаков на нула. Ако $\frac{(a+b)(c-b)}{b}<0$, кој од овие броеви е позитиен, негативен и еднаков на нула?

Решение. Бројот b е именител на дропката, па затоа $b\neq 0$. Ако $a=0$, тогаш добиваме $\frac{b(c-b)}{b}<0$,т.е. $c-b<0$, па затоа $c<b$. Според тоа, $c<0$ и $b>0$. Ако $c=0$, тогаш $\frac{(a+b)(-b)}{b}<0$, односно $a+b>0$, па е $a>-b$. Според тоа, $a>0, b<0$, ако $|a|>|b|$, односно $a<0, b>0$, ако $|a|<|b|$. Според тоа, задачата има три решенија.

3. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. Производот на еден двоцифрен и еден трицифрен број се запишува само со помош на неколку цифри 3. Кои се тие броеви?
   Решение. Производот на двоцифрен и трицифен број е четирицифрен или петцифрен број, т.е. е или 3333 или 33333. Имаме $3333 = 3 \cdot 11 \cdot 101$ па затоа во случај на четирицифрен број решенија се $11 \cdot 303$ и $33 \cdot 101$. На ист начин $33333 = 3 \cdot 41 \cdot 271$, па овој случај решението е $41 \cdot 813$.

2. Еден шестцифрен број завршува на цифрата 5. Ако таа цифра се премести на почетокот на бројот, т.е. се избрише од крајот и се допише на почетокот на бројот, тогаш новодобиениот број ќе биде 4 пати поголем од почетниот број. Одреди го почетниот број.
   Решение. Нека бараниот број е $\overline{abcde5}$. Од условот на задачата следува $\overline{5abcde} = 4 \cdot \overline{abcde5}$, од каде добиваме
   $$500000 + \overline{abcde} = 4 \cdot (10 \cdot \overline{abcde} + 5),$$
   $$\overline{abcde} = 12820,$$
   $$\overline{abcde5} = 128205.$$

3. Ласте наместо да отчука двоцифрен број, по грешка пред првата цифра отчукал 4 и добил трицифрен број кој е 17 пати поголем од двоцифрениот број. Кој број требало Ласте да го отчука?
   Решение. Нека $\overline{ab}$ е двоцифрениот број кој требало да го отчука Ласте, а $\overline{4ab}$ е трицифрениот број кој го отчукал. Тогаш $\overline{4ab} = 17 \cdot \overline{ab}$, од каде добиваме $400 + \overline{ab} = 17 \cdot \overline{ab}$, па затоа $16 \cdot \overline{ab} = 400$, односно $\overline{ab} = 400 : 16 = 25$.

4. Ласте наместо да отчука двоцифрен број, по грешка пред првата цифра и по втората цифра отчукал 4 и добил четирицифрен број кој е 54 пати поголем од двоцифрениот број кој требало да го отчука. Кој број требало Ласте да го отчука?
   Решение. Нека $\overline{ab}$ е двоцифрениот број кој требало Ласте да го отчука. Тој го отчукал бројот $\overline{4ab4}$ и затоа важи $\overline{4ab4} = 54 \cdot \overline{ab}$.

Според тоа, $4000+10\cdot\overline{ab}+4=54\cdot\overline{ab}$, од каде добиваме $44\cdot\overline{ab}=4004$. Конечно, $\overline{ab}=4004:44=91$. Значи, Ласте требало да го отчука бројот 91.

5. Разликата на два броја е 9, а нивниот збир е 99. За колку проценти е:
а) поголемиот од тие броеви е поголем од помалиот,
б) помалиот од тие броеви е помал од поголемиот?
Решение. Нека x и y се бараните броеви. Според условот на задачата имаме $x-y=9$ и $x+y=99$. Оттука наоѓаме $x=54$ и $y=45$.
а) Бројот 54 е поголем од бројот 45 за 9, односно за 20%.
б) бројот 45 е помал од бројот 54 за 9, а тоа е за $\frac{1}{6}$, што значи за $\frac{100}{6}=16\frac{2}{3}\%$.

6. На еден трицифрен број е избришана цифрата на стотките и е добиен двоцифрен број кој е еднаков на 20% од трицифрениот број. Определи го трицифрениот број.
Решение. Нека почетниот број е $\overline{abc}$. Добиениот двоцифрен број е $\overline{bc}$, па затоа важи $\overline{bc}=20\%\overline{abc}$, односно $10b+c=\frac{1}{5}(100a+10b+c)$. Од последната равенка следува $c=5(5a-2b)$. Бидејќи c е цифра делива со 5, можни се два случаја:
1) $c=0$ и тогаш $5a=2b$, од каде добиваме $a=2$ и $b=5$.
2) $c=5$ и тогаш $5a=2b+1$, од каде добиваме $a=1,b=2$ или $a=3,b=7$.
Значи, бараниот трицифрен број е еден од броевите: 250, 125 и 375.

7. Збирот на 2024 последователни парни броеви е 1171896. Кој е најголемиот од овие броеви?
Решение. *Прв начин*. Бидејќи станува збор за последователни парни броеви (разликата на соседните броеви е константна), добиваме дека аритметичката средина на сите броеви е еднаква на аритметичката средина на најмалиот и најголемиот број. Нека најголемиот број е n. Имаме 2024 парни броеви, од што следува дека најмалиот број е $n-2\cdot2023=n-4046$. Според тоа, $\frac{n+n-4046}{2}=\frac{1171896}{2024}$, од каде добиваме $n-2023=579$. Значи, $n=2602$ е бараниот број.

Втор начин. Нека n е бараниот број. Тогаш важи

$$\underbrace{n+(n-2)+(n-4)+\ldots+(n-4046)}_{2024\text{ собирци}}=1171896,$$

$$2024n-(2+4+6+\ldots+4046)=1171896,$$

$$2024n-2\cdot(1+2+3+\ldots+2023)=1171896,$$

$$2024n-2\cdot\tfrac{2023\cdot 2024}{2}=1171896,$$

$$2024(n-2023)=1171896,$$

$$n-2023=579,$$

$$n=2602.$$

8. На таблата се запишани девет последователни природни броеви. Кога е избришан еден од запишаните броеви, збирот на преостанатоте броеви бил 2014. Кој број е избришан?

Решение. Нека деветте последователни броја се $n+1, n+2, \ldots, n+9$. Збирот на некои осум членови на оваа низа е $9n+45-(n+x)$, каде со x го означивме еден од броевите 1, 2, 3, ..., 9. Според условот на задачата последователно добиваме:

$$9n+45-(n+x)=2014,$$

$$8n=1969+x,$$

$$n=\tfrac{1969+x}{8},$$

$$n=246+\tfrac{1+x}{8},$$

па како n е природен број заклучуваме $x=7$. Значи, $n=247$, а избришаниот број е $247+7=254$.

9. Јован сакал да запише десет последователни цели броеви, но случајно испуштил еден број. Кога ги собрал броевите кои ги запишал добил збир 2007. Кои броеви Јован ги запишал и кој број го испуштил?

Решение. Нека $x+k$, $k=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ се десет цели последователни цели броеви. Нивниот збир е $10x+45$, па кога Јован го испуштил бројот $x+k$, го добил збирот 2007. Според тоа,имаме

$$10x+45-(x+k)=2007,$$

$$10x+45-x-k=2007,$$

$$9x-k=1962.$$

Бидејќи $9\mid 9x$ и $9\mid 1962$ заклучуваме дека $9\mid k$. Според тоа, $k=0$ или $k=9$. За $k=0$, добиваме $9x=1962$, т.е. $x=218$. Значи, испуштен е

бројот 218, а се запишани броевите 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226 и 227. За $k=9$, добиваме $9x-9=1962$, т.е. $x=219$. Според тоа, испуштен е бројот $219+9=228$, а се запишани броевите 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226 и 227.

10. Горјан запишал дропка во која броителот е за 2009 поголем од именителот. Кога ја скратил дропката добил $\frac{1}{50}$. Која дропка ја запишал Горјан?

Решение. Нека почетната дропка Горјан ја скратил со x. Тоа значи дека тоја ја запишал дропката $\frac{x}{50x}$, па затоа $50x-x=2009$, од каде добиваме $49x=2009$, т.е. $x=41$. Значи, Горјан ја запишал дропката $\frac{41}{50\cdot 41}=\frac{41}{2050}$.

11. Дадена е дропката $\frac{51}{49}$. Кој број треба да се одземе од броителот и да се додаде на именителот на дадената дропка за да се добие дропката $\frac{3}{7}$?

Решение. Имаме $\frac{51-x}{49+x}=\frac{3}{7}$. Оттука следува $7(51-x)=3(49+x)$, па затоа $357-7x=147+3x$. Според тоа, $7x+3x=357-147$, од каде добиваме $x=21$.

12. Кој број треба да се одземе и од броителот и од именителот на дропката $\frac{1}{2009}$ за да се добие дропката $\frac{1}{2010}$?

Решение. Нека x е бараниот број. Имаме $\frac{1-x}{2009-x}=\frac{1}{2010}$, од каде добиваме

$$2010(1-x)=2009-x.$$

Решението на последната равенка е $x=\frac{1}{2009}$.

13. Дадена е дропката $\frac{2023}{2024}$. Кој број треба да се одземе од броителот и да се додаде на именителот, за да по скратувањето се добие дропката $-\frac{3}{4}$?

Решение. Со x да го означиме бараниот број. Имаме $\frac{2023-x}{2024+x}=-\frac{3}{4}$, од каде добиваме $4(2023-x)=-3(2024+x)$, т.е. $x=14164$.

14. Кој број треба да се одземе од именителот и да се помножи со бројателот на дропката $\frac{1}{2009}$ за да се добие дропката $\frac{1}{40}$?

Решение. Нека бараниот број е x. Тогаш $\frac{1\cdot x}{2009-x}=\frac{1}{40}$. Од последната равенка добиваме $40x=2009-x$, па затоа $41x=2009$, т.е. $x=49$.

15. Збирот на две дропки со едноцифрени броители и именители е еднаков на $\frac{31}{40}$. Кои се тие дропки?

Решение. Од $40=1\cdot 40=2\cdot 20=4\cdot 10=5\cdot 8$ следува дека единствена можност за именителите се броевите 5 и 8. Значи, бараните дропки се $\frac{x}{5}$ и $\frac{y}{8}$. Според тоа, $\frac{x}{5}+\frac{y}{8}=\frac{31}{40}$, од каде добиваме $\frac{8x+5y}{40}=\frac{31}{40}$, односно $8x+5y=31$. Значи, $8x<31$, па затоа $x<4$. Ако $x=1$, добиваме $5y=23$, што не е можно бидејќи y не е природен број. Ако $x=2$, добиваме $5y=15$, односно $y=3$. Ако $x=3$, добиваме $5y=7$, што не е можно бидејќи y не е природен број. Конечно, бараните дропки се $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{8}$.

16. Броителот и именителот на една дропка се природни броеви, а нивниот збир е еднаков на 2007. Која е најголемата можна вредност на оваа дропка, ако таа е помала од $\frac{1}{3}$.

Решение. Нека именителот на дропката е x. Тогаш нејзиниот броител е $2007-x$. Според условот на задачата важи $\frac{2007-x}{x}<\frac{1}{3}$, од каде добиваме $\frac{2007}{x}-1<\frac{1}{3}$, односно $\frac{2007}{x}<\frac{4}{3}$. Затоа $\frac{x}{2007}>\frac{3}{4}$, што значи $x>\frac{2007\cdot 3}{4}=\frac{6021}{4}=1505\frac{1}{4}$. Но, x е природен број па затоа $x\geq 1506$. Јасно, дропката $\frac{2007-x}{x}$ има најголема можна вредност, ако x е најмалиот можен број,при што $2007-x$ е најголемиот можен број. Значи, $x=1506$ и дропката е $\frac{501}{1506}$. .

17. Збирот на три дропки чии броители се природни броеви, а именителите се прости броеви е еднаков на $\frac{113}{70}$. Определи ги овие дропки.

Решение. Бидејќи именителот е 70 и $70=2\cdot5\cdot7$, добиваме дека единствени можни именители се 2, 5 и 7. Значи, бараните дропки се $\frac{x}{2}, \frac{y}{5}$ и $\frac{z}{7}$. Имаме, $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7}=\frac{113}{70}$, од каде добиваме $\frac{35x+14y+10z}{70}=\frac{113}{70}$, односно $35x+14y+10z=113$. Јасно, $x<4$, бидејќи во спротивно ќе биде $35x\geq140>113$.

Ако $x=1$, тогаш $14y+10z=78$, од каде добиваме $y=2$ и $z=5$.

Ако $x=2$, тогаш $14y+10z=43$, што не е можно бидејќи левата страна е парен, а десната е непарен број.

Ако $x=3$, тогаш $14x+10z=8$, што не е можно бидејќи $14x+10z\geq24$.

Значи, единствено решение на задачата е $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{5}{7}=\frac{113}{70}$.

18. Дропката $\frac{93}{91}$ претстави ја како збир од две позитивни дропки чии именители се 7 и 13.

Решение. Дропката $\frac{93}{91}$ треба да ја претставиме како збир од две дропки $\frac{a}{7}$ и $\frac{b}{13}$, односно $\frac{93}{91}=\frac{a}{7}+\frac{b}{13}=\frac{13a+7b}{91}$. Значи, $93=13a+7b$, односно $13a=93-7b, a,b\in\mathbb{N}$. Јасно, $b\geq1$, па затоа $13a\leq93-7\cdot1=86$, од каде добиваме $a\leq6$. Од $93=13a+7b$ следува $7b=93-13a$, а од тоа што 7 е делител на $7b$, мора 7 да е делител и на $93-13a$. Со непосредна проверка се добива дека за $a\leq6$ само при $a=5$ бројот $93-13a=28$ е делив со 7. Конечно, при $a=5$ имаме $b=4$, па бараното претставување е $\frac{93}{91}=\frac{5}{7}+\frac{4}{13}$.

19. Определи ги броевите a,b и c, ако нивниот збир е за $\frac{5}{2}$ поголем од бројот a, за $\frac{59}{6}$ поголем од бројот b и за $\frac{5}{3}$ поголем од бројот c.

Решение. Од условот на задачата се добиваат следниве равенства :

$$a+b+c=a+\frac{5}{2}, a+b+c=b+\frac{59}{6}, a+b+c=c+\frac{5}{3} \qquad (1)$$

од каде добиваме

$$b+c=\frac{5}{2}, a+c=\frac{59}{6}, a+b=\frac{5}{3}. \qquad (2)$$

Ако ви собереме равенствата (1) добиваме $2a+2b+2c=14$, од каде следува

$$a+b+c=7. \qquad (3)$$

Со замена во (3) од (2) се добива $a=\frac{9}{2}, b=-\frac{17}{6}, c=\frac{16}{3}$.

20. Пред 4 години, таткото бил трипати постар од своите ќерки Елена и Наташа заедно. Наташа тогаш била два пати постара од Елена. Колку години има Наташа, а колку Елена ако татко им сега е два пати постар од нив двете заедно?

Решение. Нека таткото има t години, ќерката Елена има x и ќерката Наташа има y години. Пред четири години, имаме:

$$t-4=3(x-4+y-4) \text{ и } y-4=2(x-4).$$

Оттука,

$$t=3x+3y-20 \quad y=2x-4, \text{ т.е. } t=9x-32.$$

Од друга страна, денес имаме

$$t=2(x+y), \text{ т.е. } t=6x-8.$$

Според тоа,

$$9x-32=6x-8,$$

од каде добиваме $x=8$. Сега $y=2\cdot 8-4=12$. Значи, Наташа има 12 години, а Елена има 8 години.

21. Ана, Марија и Јован добиле текст за преведување од англиски на македонски јазик. На Ана и Марија, ако работат заедно им се потребни 30 часови за да го преведат текстот, на Ана и Јован им се потребни 42 часа, а на Марија и Јован 35 часови. Колку време (во часови и минути) им е потребно на Ана, Марија и Јован за да го преведат текстот, ако работат сите тројца заедно?

Решение. Ана и Марија, ако работат заедно, за 1 час преведуваат $\frac{1}{30}$ од текстот. Ана и Јован, ако работат заедно, за 1 час преведуваат $\frac{1}{42}$ од текстот. Марија и Јован, ако работат заедно, за 1 час преведуваат $\frac{1}{35}$ од текстот. Според тоа, ако работат тројцата заедно, за 1 час преведуваат $(\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{35}):2=\frac{3}{70}$ од текстот. Ако со T го означиме времето потребно за преведување на целиот текст, кога сите тројца работат заедно, добиваме дека $\frac{3}{70}T=1$, односно $T=\frac{70}{3}=23\frac{1}{3}\,h$. Значи, на Ана, Марија и Јован им се потребни 23 часа и 20 минути, за да го преведат текстот, работејќи сите заедно.

22. Дамјан сакал да купи книга но имал само 100 денари, што не било доволно. Продавачот му ја дал книгата под услов остатокот од парите да ги донесе следниот ден. Дамјан останал должен толку колку што би останал должен ако за книгата платил толку колку што останал должен. Определи ја цената на книгата?
Решение. Според условот на здачата Дамјан останал должен онолку пари колку што дал за книгата. Тој имал 100 денари, т.е. платил 100 денари, што значи книгата чинела $100+100=200$ денари.

23. Милан и Рампо купуваат топки. На Милан му недостасуваа 600 денари за да купи 4 топки, а на Рампо му недостасуваа 600 денари за да купи 5 топки. Ако се здружат, ќе им недостасуваат 600 денари за да купат 6 топки. Коку е цената е една топка?
Решение. Ако купуваат одделно на Милан и Рампо вкупно им недостасуваат 1200 денари за да купат 9 топки. Од друга страна ако купуваат заедно им недостасуваат 600 денари за да купат 6 топки. Значи, цената на $9-6=3$ топки е $1200-600=600$ денари. Според тоа, цената на една топка е $600:3=200$ денари.

24. Цената на една книга прво е зголемена за 50%, а потоа е намалена за 50%. Цената на друга книга прво е намалена за 50%, а потоа е зголемена за 50%. На крајот разликата во цените на книгата била 60 денари. Колава била разликата на цените на книгата на почетокот.
Решение. Нека цената на првата книга била x, а на втората y. По првата промена цената на првата книга била $x+50\%x=1{,}5x$, а по втората била $1{,}5x-0{,}5\cdot 1{,}5x=0{,}75x$. Цената на втората книга по првата промена била $y-50\%y=0{,}5y$, а по втората промена била $0{,}5y+0{,}5\cdot 0{,}5y=0{,}75y$. На крајот разликата во цените на книгите била $0{,}75x-0{,}75y=60$, што значи дека на почетокот таа разлика била $x-y=60:0{,}75=80$ денари.

25. Во спортска продавница патиките се продавале за 900 ден. поефтино од тренерката. На акција патиките биле намалени за 10%, а тренерката за 5%. Габи купила патики и тренерка на намаление и за нив платила вкупно 5480 ден. Колку чинеле патиките, а колку тренерката пред намалувањето?
Решение. Цената на патиките пред намалувањето била p, а на

тренерките била $p+900$. По намалувањето важи:

$$\frac{90}{100}p+\frac{95}{100}(p+900)=5480.$$

Од овде, патиките пред намалувањето чинеле 2500 денари, а тренерката 3400 денари.

26. Пејо, Станко, Живко и Раде последниот ден од летувањето ги собрале сите пари кои ги имале и виделе дека имаат 4820 денари. Пејо имал 80% од парите на Станко, Станко имал 75% од парите на Живко и Живко имал 60% од парите на Раде. Колку пари имало секое дете последниот ден од летувањето?

Решение. Нека последниот ден Пејо има p денари, Станко има s денари, Живко има z денари и Раде има r денари. Тогаш

$$z=\frac{60}{100}r=\frac{3}{5}r,\ \ s=\frac{75}{100}z=\frac{3}{4}z=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}r=\frac{9}{20}r,$$
$$p=\frac{80}{100}s=\frac{4}{5}s=\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{20}r=\frac{9}{25}r.$$

Бидејќи вкупно имале 4820 денари, добиваме

$$p+s+z+r=4820,$$
$$\frac{9}{25}r+\frac{9}{20}r+\frac{3}{5}r+r=4820,$$
$$36r+45r+60r+100r=482000,$$
$$241r=482000,$$
$$r=2000.$$

Конечно, Раде имал 2000 денари, Живко имал 1200 денари, Станко имал 900 денари и Пејо имал 720 денари.

27. Три сестри си поделиле одредена сума на пари при што првата сестра зела $\frac{1}{5}$ од парите, втората сестра $\frac{5}{8}$ од парите, а остатокот го зела третата сестра. Но, потоа третата сестра и дала на првата сестра $\frac{3}{4}$ од својот дел. Колкав дел од целата сума пари добила првата сестра?

Решение. Според условот на задачата првата сестра зела $\frac{1}{5}x$, втората $\frac{5}{8}x$, а третата сестра зела $x-\frac{1}{5}x-\frac{5}{8}x=\frac{7}{40}x$. Третата сестра на првата и дала $\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{40}x=\frac{21}{160}x$ од парите.

Конечно, првата сестра добила вкупно $\frac{1}{5}x+\frac{21}{160}x=\frac{53}{160}x$ од парите.

28. Неколку браќа поделиле извесно количество златници. Првиот брат зел 100 златници и шестина од остатокот. Вториот брат зел 200 златници и шестина од новиот остаток итн. Последниот брат зел тоа што му останало. Се покажало дека сите браќа имаат еднаков број златници. Колку браќа учествувале во поделбата на златниците?

Решение. Нека вкупниот број златници е x. Според условот на задачата првиот брат зел $100+\frac{x-100}{6}=\frac{x+500}{6}$ златници, по што останале $x-\frac{x+500}{6}=\frac{5x-500}{6}$ златници. Вториот брат зел

$$200+\frac{1}{6}\cdot(\frac{5x-500}{6}-200)=200+\frac{5x-1700}{36}=\frac{5x+5500}{36}$$

златници. Но според условот на задачата сите браќа добиле еднаков број златници, па затоа $\frac{x+500}{6}=\frac{5x+5500}{36}$, од каде добиваме $x=2500$. Значи, вкупно се поделени 2500 златници и како првиот брат добил $\frac{2500+500}{6}=500$ златници, во поделбата учествувале $2500:500=5$ браќа.

29. По намалувањето на цената за 30% за 280 денари може да се купат $2\,kg$ лимони повеќе отколку што можело да се купат за 240 денари пред намалувањето на цената. Колкава била цената на лимоните пред намалувањето, а колкава е по намалувањето на цената?

Решение. Ако пред намалувањето цената на $1\,kg$ лимони е x денари, тогаш за 240 денари може да се купат $\frac{240}{x}\,kg$ лимони. По намалувањето, цената на $1\,kg$ лимони е 70% од почетната цена, односно таа е $0,7x$ денари. Затоа за 280 денари може да се купат $\frac{280}{0,7x}=\frac{400}{x}\,kg$. Според тоа, $\frac{400}{x}=\frac{240}{x}+2$, од каде добиваме $\frac{160}{x}=2$, односно $x=80$ денари.

Значи, пред намалувањето цената на $1\,kg$ лимони е 80 денари, а по намалувањето таа е $0,7\cdot 80=56$ денари.

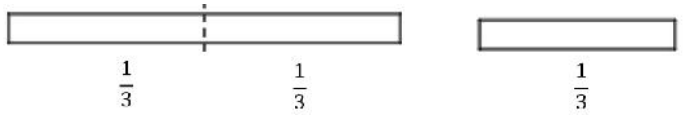
30. Предната гума на еден моторцикл се потрошува по поминати $25000\,km$, а задната по поминати $15000\,km$. По колку поминати километри треба да се сменат местата на гумите за тие истовремено да се потрошат? По колку поминати километри мотоциклистот мора да стави нови гуми?

Решение. За да се потрошат подеднакво гумите, мораат да поминат еднаков број километри на предното и на задното тркало. Да претпоставиме дека секоја гума поминува $x\,km$ на предното и $x\,km$ на задното тркало додека потполно не се потроши. Тогаш непознатата x го задоволува условот $\frac{1}{25000}+\frac{1}{15000}=\frac{1}{x}$, од каде добиваме $x=9375\,km$.

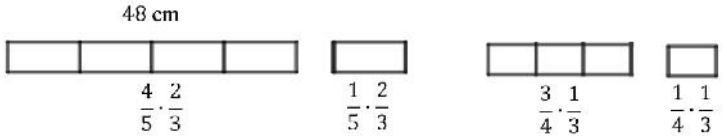
Мотоциклистот ќе ги смени местата на гумите по поминати $9375\,km$, а по $2\cdot 9375\,km=18750\,km$ ќе мора да стави нови гуми.

31. Месар еден колбас го сечи на делови. Прво од целиот колбас отсекол негова третина. Добиените два дела повторно ги пресекол: од поголемиот дел отсекол негова петтина, а од помалиот дел отсекол негова четвртина. Колкава е должината на најмалиот добиен дел, ако должината на најголемиот дел е $48\,cm$?

Решение. По првото сечење месарот ги добил деловите:



По второто сечење имаме четири делови од колбасот и истите се прикажани на долниот цртеж.



Најголемот дел е еднаков на $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$ од целиот колбас и има должина $48\,cm$. Затоа целиот колбас е долг $48:\frac{8}{15}=90\,cm$. Најмалите два дела се $\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$ и $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ од целиот колбас, па како $\frac{2}{15}>\frac{1}{12}$, добиваме дека најмалиот делбен дел е $\frac{1}{12}\cdot 90=7{,}5\,cm$.

32. Димитар ја бојадисувал дрвената ограда околу својата викендица. За викендот тој бојадисал 12 метри повеќе од $\frac{3}{8}$ од вкупната должина на оградата. Во понеделникот бојадисал 3 метри повеќе од $\frac{1}{4}$ од вкупната должина на оградата. Во вторникот бојадисал $\frac{1}{3}$ од вкупната должина која ја бојадисал за време на викендот и во понеделникот, а

во средата го бојадисал останатиот дел од оградата, кој бил точно $\frac{1}{24}$ од вкупната должина на оградата. Колку е долга оградата околу викендицата?

Решение. Ако со x ја означиме должината на оградата изразена во метри, тогаш

- за време на викендот се бојадисани $\frac{3}{8}x+12$ метри,
- во понеделникот ае бојадисани $\frac{1}{4}x+3$ метри,
- во вторникот се бојадисани $\frac{1}{3}(\frac{3}{8}x+12+\frac{1}{4}+3)=\frac{5}{24}x+5$ метри,
- во средата се бојадисани $\frac{1}{24}x$ метри.

Според тоа, $\frac{3}{8}x+12+\frac{1}{4}x+3+\frac{5}{24}x+5+\frac{1}{24}x=x$, од каде добиваме $x=160\,m$.

33. Двајца луѓе истовремено тргнале од местото A во местото B, првот со велосипед, а вториот со автомобил со брзина пет пати поголема од брзината на велосипедистот. На половина од патот автомобилот се расипал и автомобилистот остатокот од патот го поминал пешки со брзина два пати помала од брзината на велосипедистот. Кој прв стигнал во местото B?

Решение. *Прв начин*. Автомобилистот одел пешки толку време колку што на велосипедистот му е потребно да го помине целиот пат. Бидејќи велосипедистот веќе поминал една десеттина од патот, му преостанале да помени девет десеттини од патот. Овие девет десеттини ќе ги помине побрзо отколку што автомобилистот пешки го помине остатокот од патот.

Втор начин. Нека брзина на велосипедистот е $2v$. Тогаш брзината на автомобилот е $5\cdot 2v=10v$, а брзината на автомобилистот кога ќе оди пешки е $2v:2=v$. Ако должината на патот меѓу местата A и B е x, тогаш велосипедистот од A до B ќе патува $\frac{x}{2v}$ единици време, а автомобилистот ќе патува $\frac{\frac{x}{2}}{10v}+\frac{\frac{x}{2}}{v}=\frac{x}{20v}+\frac{x}{2v}$ единици време. Бидејќи $\frac{x}{20v}+\frac{x}{2v}>\frac{x}{2v}$ заклучуваме дека велосипедистот побрзо ќе стигне во местото B.

34. Велосипедист возел од Прилеп до Битола со просечна брзина од

$20\,km/h$, а на враќање со просечна брзина од $30\,km/h$. Определи ја средната брзина на движењето на велосипедистот на овој пат?

Решение. Нека t_1 е времето за кое велосипедистот го поминал патот при одењето во Битола, т.е. $t_1 = \frac{s}{20}$ и $t_2 = \frac{s}{30}$ е времето кое го поминал при враќањето во Прилеп (s е должината на патот меѓу Прилеп и Битола). Средна брзина со која се движел велосипедистот е еднаква на $v_{sr} = \frac{s+s}{\frac{s}{t_1}+\frac{s}{t_2}} = \frac{2s}{\frac{s}{20}+\frac{s}{30}} = \frac{2}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}} = 24\,km$.

35. Еден велосипедист патот од Прилеп до Битола треба да го помине за 2 часа, а друг велосипедист патот од Битола за Прилеп за 3 часа. Ако истовремено тргнат еден кон друг, по колку време ќе се сретнат?

Решение. Патот од Прилеп до Битола да го означиме со s. Првиот велосипедист се движи со просечна брзина $v' = \frac{s}{2}$, а вториот со просечна брзина $v'' = \frac{s}{3}$. До средбата првиот минува пат s', а вториот минува пат s'', каде $s' + s'' = s$. Ако со t го означиме времето кое ќе помине до средбата, тогаш $v't + v''t = s$, од каде добиваме $\frac{s}{2}t + \frac{s}{3}t = s$. Според тоа, $\frac{t}{2} + \frac{t}{3} = 1$, односно $t = \frac{6}{5}\,h = 1\frac{1}{5}\,h = 1\,h\,12\,\min$. Значи, велосипедистите ќе се сретнат по 1 час и 12 минути.

36. Андреј вози велосипед од дома до училиште секогаш со постојана брзина. Ако вози со $3\,m/s$ побрзо тогаш на училиште ќе стигне за три пати пократко време. Колку пати побрзо Андреј ќе стигне на училиште ако вози побрзо со $6\,m/s$?

Решение. Андреј поминува пат $s = vt$. Според условот на задачата $s = (v+3)\cdot\frac{1}{3}t$. Значи, $vt = (v+3)\cdot\frac{1}{3}t$, од каде добиваме $3v = v + 3$, односно $v = 1{,}5\,m/s$. Тогаш $v + 6 = 1{,}5 + 6 = 7{,}5 = 5v$, што значи дека тогаш Андреј дома ќе стигне пет пати побрзо.

37. Моторен чамец од Скопје до Велес плови 2 часа, а од Велес до Скопје 3 часа. Колку време овој чамец ќе плови од Скопје до Велес со угасен мотор?

Решение. Нека v' е брзината на чамецот, а v'' е брзината на реката. По течението на Вардар патот од Скопје до Велес нека е s. Тогаш

$\frac{s}{v'+v''}=2$ и $\frac{s}{v'-v''}=3$. Според тоа, $2v'+2v''=3v'-3v''$, па затоа $v'=5v''$. Сега, бидејќи $\frac{s}{v'+v''}=2$, добиваме $\frac{s}{6v''}=2$, односно $\frac{s}{v''}=12$. Значи, чамецот од Скопје до Велес со угасен мотор ќе плови 12 часа.

38. Камион и автобус тргнале во пресрет од две места на автопатот. Притоа камионото вози со постојана брзина од $27\ km$ за 18 минути, а автобусот вози со постојана брзина од $864\ m$ за 28,8 секунди. Возилата се сретнале по 2 часа и 45 минути возење. Колку е долг патот меѓу местата на тргнување на возилата?
Решение. Возилата се движеле $2\ h\ 45\ \text{min}=120\ \text{min}+45\ \text{min}=165\ \text{min}$. Каминонот поминува $27\ km$ за $18\ \text{min}$, што значи дека за $1\ \text{min}$ поминува $27:18=1,5\ km$. Автобусот поминува $864\ m$ за $28,8\ s$, што значи дека за $1\ s$ поминува $864:28,8=30\ m$. Значи, автобусот за $1\ \text{min}$ поминува $60\cdot 30\ m=1800\ m=1,8\ km$. Двете возила за $1\ \text{min}$ поминуваат $1,5+1,8=3,3\ km$, па за $165\ \text{min}$ поминале $165\cdot 3,3=544,5\ km$.

39. Од сад во кој е 25% раствор на сол се оттураат 3 литри течност и се дотура 2 литри вода. Така добиениот раствор има 20% сол. Колку литри раствор имало на почетокот во садот?
Решение. Нека во садот имало x литри раствор. По истурањеето на 3 литри во садот ќе има $25\%\cdot(x-3)$ килограми сол. Но, кога ќе се турат 2 литри вода, тогаш во садот ќе има $20\%\cdot(x-3+2)$ килограми сол. Значи, $25\%\cdot(x-3)=20\%\cdot(x-3+2)$, односно $\frac{25}{100}(x-3)=\frac{20}{100}(x-1)$, па затоа $x=11$. Значи, на почетокот во садот имало 11 литри раствор.

40. Јован измешал 5 литри 20% раствор на алкохол, 4 литри 25% раствор на алкохол и 11 литри вода. Колку проценти алкохол има во новиот раствор?
Решение. Во 5 литри 20% раствор на алкохол има $20\%\cdot 5=1\ l$ алкохол, а во 4 литри 25% раствот на алкохол има $25\%\cdot 4=1\ l$ алкохол. Сега вкупно имаме $5+4+11=20$ литри течност во која има $2\ l$ алкохол. Според тоа, во овој раствор има $\frac{2}{20}\cdot 100\%=10\%$ алкохол.

41. Колку литри дестилирана вода треба да се измеша со 4 литри 5%

раствор на алкохол за да се добие 1% раствор на алкохол?

Решение. Од $4 \cdot 5\% = 0,2$ следува дека во 4 литри 5% раствор ба алкохол има $2\,dl$ алкохол и 3,8 литри вода. Ако со x го означиме бараното количество дестилирана вода кое треба да се дотури, добиваме $(4+x) \cdot 1\% = 0,2$, односно $4+x=20$, па е $x=16$. Значи, треба да се дотури 16 литри дестилирана вода за да се добие 1% раствор на алкохол.

42. Колку литри дестилирана вода треба да се измешаат со 5 литри 4% раствор на алкохол и 5 литри 2% раствор на алкохол за да се добие 0,5% раствор на алкохол?

Решение. Пет литри 4% раствор на алкохол содржи $5 \cdot 4\% = 0,2\,l$ алкохол, а 5 литри 2% раствор на алкохол содржи $5 \cdot 2\% = 0,1\,l$ алкохол. Значи, имаме $0,3\,l$ алкохол во $10\,l$ измешани раствори. Притоа имаме $9,7\,l$ вода. За да добиеме 0,5% раствор на алкохол треба да додадеме x литри дестилирана вода, при што $(10+x) \cdot 0,5\% = 0,3$, од каде добиваме $(10+x) \cdot 0,5 = 30$. Од последната равенка наоѓаме $x=50$, т.е. треба да дотуриме 50 литри вода.

43. Земја купена во цвеќарница содржи 11% вода. Ратка сака да засади ружа која бара влажност на земјата 24%. Колку вода треба да тури Ратка на $3\,kg$ купена земја за да засадувањето на ружата е успешно?

Решение. Во $3\,kg$ купена земја има сува материја 89%, односно $2,67\,kg$. Ако треба влажноста да е 24% тогаш $2,67 = 0,76 \cdot (3+x)$,од каде добиваме $x = \frac{267}{76} - 3 = \frac{39}{76} \approx 0,513\,l$. Значи, Ратка во купената земја треба да тури $0,51\,l$ вода.

44. Во три сада е турена вода. Ако $\frac{1}{2}$ од водата од првиот сад се претури во вториот сад, потоа $\frac{1}{3}$ од водата, која сега е во вториот сад, се претури во третиот сад, и на крајот $\frac{1}{4}$ од вкупното количество од третиот сад се претури во првиот сад, тогаш во секој сад ќе има по 6 литри вода. Колку вода имало на почетокот во секој сад?

Решение. Во третото прелевање од третиот сад е прелеана четвртина

од водата па останале $\frac{3}{4}$ од водата, што значи ако пред прелевањето иало c литри вода, тогаш $\frac{3}{4}c = 6$, односо $c = 8$. Значи, во третото прелевање во првиот сад се турени 2 литри вода, што значи дека во првиот сад имало 4, во вториот 6 и во третиот 8 литри вода. Во второто прелевање третина вода од вториот сад е прелеана во третиот сад па ако во вториот сад пред прелевањето имало b литри вода, добиваме $\frac{2}{3}b = 6$, односно $b = 9$, Значи, од вториот ад се прелеани 3 литри вода, па затоа пред второто прелевање во првиот сад имало 4 литри, во вториот имало 9 литри и во третиот сад имало 5 литри вода. Конечно, во првото прелевање од првиот во вториот сад е прелеана половина од водата, па ако во првиот сад имало a литри вода, тогаш $\frac{1}{2}a = 4$, односно $a = 8$. Значи, во првото прелевање во вториот сад се прелеани 4 литри вода, па затоа на почетокот во првиот сад имало 8 литри, во вориот сад имало 5 и во третиот сад имало 5 литри вода.

45. Килограм говедско без коска чини 450 денари, килограм говедско со коска чини 390 денари, а килограм само коски чини 75 денари. Колку коски има во еден килограм со коски?

Решение. Нека во килограм говедско месо има $x\,kg$ коски. Тогаш во него има $(1-x)\,kg$ месо без коски. Според тоа, цената на коските ќе биде $75x$ денари, а цената на месото без косни ќе биде $450(1-x)$ денари. Оттука ја добиваме равенката

$$75x + 450(1-x) = 390\,.$$

Решението на последната равенка е $x = 0{,}16$, што значи дека во килограм говедско со коски има 160 g коски.

46. Дедо Коста треба да ја изора и посее својата нива со семенски материјал-пченица. Тој нивата ја изорал за 3 дена. Првиот ден изорал 20% од целата нива и уште 16 декари, вториот ден 30% од остатокот од првиот ден и уште 20 декари, а третиот ден изорал 75% од остатокот од претходниот ден и последните 30 декари. Колку килограми семенски материјал-пченица треба да купи дедо Коста, ако за сеење на еден декар е потребно 3,5 *kg* пченица?

Решение. *Прв начин*. Последните 30 декари се 25% од површината која е изорана третиот ден, што значи дека третиот ден дедо Коста

изорал $4 \cdot 30 = 120$ декари, кои останале неизорани по вториот ден. Бидејќи вториот ден дедо Коста изорал 30% од остатокот од првиот ден и уште 20 декари, добиваме дека по орањето на 30% од остатокот од првиот ден неизорани биле $120 + 20 = 140$ декари, што значи дека 70% од остатокот од првиот ден се 140 декари, т.е. остатокот по првиот ден е $\frac{140}{70} \cdot 100 = 200$ декари. Последното значи дека по орањето на 20% од целата нива останале $200 + 16 = 216$ декари и тоа се 80% од целата нива. Значи, целата нива имала $\frac{216}{80} \cdot 100 = 270$ декари. Конечно, бидејќи за сеење на 1 декар се потребни $3,5\,kg$ пченица, добиваме дека за да ја засее нивата дедо Коста требало да купи $270 \cdot 3,5 = 945\,kg$ пченица.

Втор начин. Нека нивата имала x декари. Првиот ден се изорани $0,2x + 16$ декари, па неизорани останале $x - (0,2x + 16) = 0,8x - 16$ декари. Вториот ден се изорани $0,3(0,8 - 16) + 20 = 0,24x + 15,2$ декари, па неизорани останале $0,8x - 16 - (0,24x + 15,2) = 0,56x - 31,2$ декари. Третиот ден се изорани $0,75(0,56x - 31,2) + 30 = 0,42x + 6,6$ декари, со што е изорана целата нива, па затоа $0,42x + 6,6 = 0,56x - 31,2$. Последната равенка е еквивалентна на равенката $0,14x = 37,8$, од каде добиваме $x = 270$ декари. Конечно, бидејќи за сеење на 1 декар се потребни $3,5\,kg$ пченица, добиваме дека за да ја засее нивата дедо Коста требало да купи $270 \cdot 3,5 = 945\,kg$ пченица.

47. Марко изнајмува 12 глисери кои имаат по 3 или 4 седишта. Колку гиесери има со по 3, а колку со 4 седишта, ако вкупниот број седишта е 43?

Решение. *Прв начин*. Ако сите глисери имаат по 3 седишта, тогаш вкупниот број седишта ќе биде $3 \cdot 12 = 36$. Значи, ќе имаме $43 - 36 = 7$ седишта помалку. Овие седум седишта се во глисерите со 4 седишта и и како глисер со 4 седишта има едно седише повеќе од глисер со 3 седишта заклучуваме дека имама 7 глисери со 4 седишта. Значи, бројот на глисерите со 3 седишта е $12 - 7 = 5$.

Втор начин. Нека имаме x глисери со 3 седишта. Тогаш бројот на глисерите со 4 седишта е $12 - x$. Затоа $3x + 4(12 - x) = 43$, од каде добиваме $x = 5$. Значи, имаме 5 глисери со 3 седишта и $12 - 5 = 7$ глисери со 4 седишта.

48. Во едно стадо има коњи, едногрби и двогрби камили. Ако вкупниот број на грбки е еднаков на 200, а бројот на коњите е еднаков на бројот на двогрбите камили, колку грла добиток има во ова стадо?
Решение. Нека k е бројот на коњите, e е бројот на едногрбите и d е бројот на двогрбите камили. Според условот на задачата $2d+e=200$. Сега, бидејќи $k=d$, добиваме $k+e+d=d+e+d=2d+e=200$, што значи дека бројот на животните во стадото е еднаков на 200.

49. Кога Павел се префрлил од едно училиште во друго, во одделението во кое дошол процентот на учениците се зголемил од 50% на 52%. Колку девојчиња има во тоа одделение?
Решение. Ако x е бројот на девојчињата во одделението, тогаш по доаѓањето н Павел бројот на учениците се зголемил од $2x$ на $2x+1$. Сега процентот на девојчињата е 48%, па затоа $x=0,48(2x+1)$, од каде добиваме $0,04x=0,48$, односно $x=12$.

50. Минатиот викенд од сите ученици на едно одделение 68% биле на Попова Шапка, 52% биле во Охрид, а пет ученици биле и на Пипова Шапка и во Охрид. Колку ученици има во ова оделение ако се знае дека секој ученик бил барем на едно од наведените места?
Решение. Нека во одделението има x ученици. На Попова Шапка биле $\frac{68x}{100}$ ученици, а во Охрид биле $\frac{52x}{100}$ ученици. Според тоа, на двете места биле $\frac{68x}{100}+\frac{52x}{100}-x$ ученици, па затоа последователно добиваме

$$\begin{aligned}&\tfrac{68x}{100}+\tfrac{52x}{100}-x=5,\\&68x+52x-100x=500,\\&20x=500,\\&x=25.\end{aligned}$$

Значи, во ова одделение има 25 ученици.

51. Од сите ученици во одделението на Горјан 64% биле на некој ракометен натпревар и 14 ученици биле на некој фудбалски натпревар, а 20% биле и на ракометниот и на фудбалскиот натпревар. Секој ученик бил барем на еден од двата натпревари. Колку ученици има во одделението на Горјан?
Решение. Нека во одделението на Горјан има x ученици. Од условот

на задачата следува равенката $x=\frac{64}{100}x+14-\frac{20}{100}x$. Решението на последната равенка е $x=25$, што значи дека во одделението на Горјан има 25 ученици.

52. Во едно одделение има 24 ученици. Половина од учениците во тоа одделение свири на некој инструмент. Исто така, $\frac{5}{8}$ од учениците од ова одделение пеат во училишниот хор. Ако е познато дека повеќе од третина, а помалку од $\frac{5}{12}$ ученици од одделението и свири и пее во хорот, колку ученици од ова одделение ниту свири некој инструмент, ниту пее во училишниот хор?

Решение. Некој инструмент свират $24:2=12$ ученици. Во училишниот хор пеат $\frac{5}{8}\cdot 24=15$ ученици. Повеќе од $24:3=8$, а помалку од $\frac{5}{12}\cdot 24=10$ ученици и пее и свири, што значи дека 9 ученици и пеат и свират. Последното значи дека $12-9=3$ само свират, а $15-9=6$ само пеат. Конечно, ниту свират ниту пеат $24-3-9-6=6$ ученици.

53. На еден остров $\frac{3}{4}$ од мажите се оженети, а $\frac{2}{7}$ од жените се мажени. Колкав дел од населението на островот не е во брак, ако бројот на оженетите мажи е еднаков на бројот на омажените жени?

Решение. Според условот на задачата x мажи и x жени се во брак. Значи, на островот живеат $\frac{4x}{3}$ мажи и $\frac{3x}{2}$ жени. Според тоа, островот има $\frac{4x}{3}+\frac{3x}{2}=\frac{8x+9x}{6}=\frac{17x}{6}$ жители. Бидејќи од нив $2x$ се во брак, во брак не се $\frac{17x}{6}-2x=\frac{17x-12x}{6}=\frac{5x}{6}$ жители. Значи, во брак не се $\frac{5x}{6}:\frac{17x}{6}=\frac{5}{17}$ од жителите на островот.

54. Во едно село $\frac{2}{3}$ од машкото население е оженето, а $\frac{3}{5}$ од женското население е омажено. Колкав дел ов вкупното население е во брак, ако бројот на оженетите мажи е еднаков на бројот на омажените жени?

Решение. Нека n е бројот на брачните парови. Тогаш во селото има n оженети мажи и n омажени жени, т.е. $2n$ лица се во брак. Понатаму, вкупниот број женски лица во селото е $\frac{5n}{3}$, а вкупниот број машки

лица е $\frac{3n}{2}$. Значи, селото има $\frac{5n}{3}+\frac{3n}{2}=\frac{19n}{6}$ жители. Значи, во брак се $\frac{2n}{\frac{19n}{6}}=\frac{12}{19}$ од населението.

55. Во едно одделение 20% од учениците имаат добар успех, 35% имаат многу добар успех, а преостанатите 9 ученици имаат одличен успех. Колку ученици учат во ова одделение?

Решение. Одличен успех имаат $100\%-(20\%+35\%)=45\%$ од учениците. Ако во одделението учат x ученици, тогаш бидејќи 9 имаат одличен успех, добиваме $\frac{45}{100}x=9$, од каде $x=\frac{9\cdot 100}{45}=20$. Значи, во ова одделение учат 20 ученици.

56. На крајот на првото полугодие во едно одделение учениците го постигнале следниов успех: 24% од учениците имале добар успех, 32% имале многу добар успех, а преостанатите ученици имале одличен успех. На крајот од учебната година 3 ученици од многу добар го поправиле успеходот во одличен, па 56% од учениците учебната година ја завршиле со одличен успех. Колку ученици имало во ова одделение?

Решение. Нека во одделението имало x ученици. На полугодитео бројот на одличните ученици бил $\frac{100-24-32}{100}x=\frac{44}{100}x$. На крајот на учебната година имало 3 ученици повеќе со одличен успех и бројот на одличните ученици бил $\frac{56}{100}x$. Затоа $\frac{44}{100}x+3=\frac{56}{100}x$, од каде добиваме $44x+300=56x$, односно $x=25$. Значи, во ова одделение имало 25 ученици.

57. Во едно училиште има точно три паралелки во седмо одделение: $7^{a)}, 7^{b)}$ и $7^{c)}$. Во паралелката $7^{a)}$ учат 36% од вкупниот број ученици во седмо одделение. Бројот на учениците во паралелката $7^{b)}$ е еднаков на $\frac{5}{9}$ од бројот на учениците во паралелката $7^{a)}$. Колку ученици учат во секоја паралелка, ако во $7^{a)}$ има 6 ученици помалку отколку во $7^{c)}$?

Решение. Нека има x ученици во седмо одделение. Во $7^{a)}$ има

$0,36x=\frac{9}{25}x$ ученици, во $7^{b)}$ има $\frac{5}{9}\cdot\frac{9}{25}x=\frac{1}{5}x$ ученици и во $7^{c)}$ има $x-\frac{9}{25}x-\frac{1}{5}x=\frac{11}{25}x$ ученици. Бидејќи во во $7^{a)}$ има 6 ученици помалку отколку во $7^{c)}$ добиваме $\frac{11}{25}x-\frac{9}{25}x=6$, од каде наоѓаме $x=75$. Според тоа, во $7^{a)}$ има $\frac{9}{25}\cdot 75=27$ ученици, во $7^{b)}$ има $\frac{1}{5}\cdot 75=15$ ученици и во $7^{c)}$ има $75-(27+15)=33$ ученици.

58. Еден работен ден 40% од учениците од првата смена во едно основно училиште за ужина купиле ќеврек, 36% од учениците купиле сендвич, а останатите купиле кроасан.
Во втората смена во истото училиште:
- бројот на учениците кои за ужина купиле кроасан, е поголем за 37,5% од бројот на учениците од истото училиште во првата смена кои за ужина купиле кроасан;
- бројот на учениците кои за ужина купиле сендвич, е поголем за 75% од бројот на учениците од истото училиште во првата смена кои за ужина купиле сендвич; и
- бројот на учениците кои за ужина купиле ќеврек, е помал за 75% од бројот на учениците од истото училиште во првата смена кои за ужина купиле ќеврек.
Во која смена бројот на учениците е поголем од бројот на учениците во другата смена? За колку проценти е поголем?
Решение. Да го означиме со x вкупниот број на ученици од првата смена. За ужина купиле: ќеврек $0,4x$ ученици; сендвич $0,36$ ученици; а кроасан $(1-(0,4+0,36))x=0,24x$ ученици.
Во втората смена, кроасан купиле: $0,24x+0,375\cdot\ 0,24x=0,33x$ ученици; сендвич купиле $0,36x+0,75\cdot 0,4x=\ 0,63x$ ученици; а ќеврек купиле $0,4x-0,75\cdot 0,4x=0,1x$ ученици. Вкупниот број на ученици од втората смена е $0,33x+0,63x+0,1x=1,06x=x+0,06x$. Бидејќи $0,06=6\%$ заклучуваме дека во втората смена во училиштето имало 6% повеќе ученици отколку во првата смена.

59. Марко има определен број џамлии, Зоран има $\frac{2}{3}$ од тој број, а Петар има $\frac{1}{4}$ од бројот на џамлиите кои ги има Зоран. Ако Зоран има 12

џамлии помалку од Марко, по колку џамлии има секое дете?

Решение. Бидејќи Зоран има $\frac{2}{3}$ од бројот на џамлиите на Марко, тој има $\frac{1}{3}$ помалку џамлии од Марко. Ако со x го означиме бројот на џамлиите на Марко, добиваме $\frac{1}{3}x=12$, т.е. $x=36$. Значи, Марко има 36 џамлии, Зоран има $36-12=24$ џамлии и Петар има $\frac{1}{4}\cdot 24=6$ џамлии.

60. Маја, Јана и Виолета купиле кутија со 70 топчиња. Јана добила $\frac{1}{4}$ помалку топчиња од Маја, а Виолета добила 15 повеќе топчиња од Маја. Колку топчиња добило секое девојче?

Решение. Четвртина од топчињата на Марта да ги означиме со x. Значи, Марта има $4x$ топчиња. Ако Јана добила $\frac{1}{4}$ помалку топчиња од Маја, таа добила $4x-x=3x$ топчиња. Виолета, која има 15 топчиња повеќе од Маја, добила $4x+15$ топчиња. Значи,

$$4x+3x+(4x+15)=70,$$

од каде добиваме $x=5$. Значи, Маја добила 20, Јана 15 и Виолета 35 топчиња.

61. Дедо Стојан има овоштарник во кој $\frac{1}{3}$ од овошките се јаболка, $\frac{3}{8}$ се круши и останатите се лешници. Колку најмногу лешници може да има во овоштарникот ако има помалку од 360 овошки?

Решение. Според условот на задачата $\frac{8}{24}$ овошки се јаболка, $\frac{9}{24}$ се круши и $1-(\frac{8}{24}+\frac{9}{24})=\frac{7}{24}$ од вкупниот број овошки се лешници. Бидејќи $336=24\cdot 14<360=24\cdot 15$, најголемиот број кој е помал од 360 и е делив со 24 е 336. Според тоа, $\frac{7}{24}\cdot 336=98$ овошки се лешници.

62. Подготвувајќи се за натпревар, Новак решавал задачи од збирка по математика. Пресметал дека ако 10 дена решава по 5% од вкупниот број задачи ќе реши 70 задачи помалку отколку што би решил ако 8 дена решава по 8% од вкупниот број задачи. Колку задачи има збирката од која Новак се подготвувал за натпревар?

Решение. Нека x е бројот на задачите во збирката. Ако Новак решава

10 дена по 5% од задачите, тој ќе реши 50% од x, односно $0,5x$. Ако решава 8 дена по 8% од задачите ќе реши 64% од x, односно $0,64x$. Затоа важи $0,5x = 0,64x - 70$, од каде добиваме $x = 500$.

63. Подготвувајќи се за натпревар по математика и физика, Наум решавал задачи од збирките по математика и физика. Збирката задачи по математика има 350 задачи повеќе од збирката задачи по физика. Кога Наум решил 70% од задачите по математика и 44% од задачите по физика, му останале нерешени 90 задачи повеќе по физика отколку по математика. Колку задачи има збирката по математика, а колку збирката по физика?

Решение. Со x да го зоначиме бројот на задачати во збирката по математика, а со y бројот на задачите во збирката по физика. Од условот на задачата следува $x = y + 350$. Кога Наум решил 70% од задачите по математика, му останале нерешени уште 30%, односно $0,3x$ задачи по математика. Понатаму, кога решил 44% од задачите по физика му останале нерешени 56% од задачите или $0,56y$ задачи по физика. Затоа $0,3x = 0,56y - 90$. Ако од првата равенка замениме за x во втората, добиваме $0,3(y + 350) = 0,56y - 90$, од каде наоѓаме $y = 750$. Значи, $x = 750 + 350 = 1100$.

64. Невена прочитала една книга за 4 дена. Почнувајќи од вториот ден, таа читала за 20% повеќе страници отколку претходниот ден. Првиот и четвртиот ден прочитала за 11 страници повеќе отколку вториот и третиот ден. Колку страници имала книгата која ја прочитала Невена?

Решение. Нека невена првиот ден прочитала x страници. Вториот ден прочитала $x + 0,2x = 1,2x$ странии, третиот ден прочитала

$$1,2x + 0,2 \cdot 1,2x = 1,2x + 0,24x = 1,44x$$

страници и четвртиот ден прочитала

$$1,44x + 0,2 \cdot 1,44x = 1,44x + 0,288x = 1,728x$$

страници. Од условот на задачата следува дека

$$x + 1,728x = 1,2x + 1,44x + 11,$$

од каде добиваме $0,088x = 11$, односно $x = 125$. Конечно, книгата има

$$125 + 1,2 \cdot 125 + 1,44 \cdot 125 + 1,728 \cdot 125 + 11 = 671$$

страница.

65. Мирјана добила нарачка да изработи честитки. Првиот ден таа изработиле 10% од нарачката, вториот ден изработила 25% од остатокот, а тетиот ден 40% од новиот остаток. Тогаш и останало да направи уште 810 честитка. Колку честитки биле нарачани?

Решение. Нека x е бројот на нарачаните честитки. Мирјана првиот ден изработила $0,1x$, па останало да изработи $0,9x$ од нарачката. Таа вториот ден изработила $0,25 \cdot 0,9x = 0,225x$, што значи дека и останало да изработи $0,9x - 0,225x = 0,675x$ од нарачката. Третиот ден Мирјана изработила $0,4 \cdot 0,675x = 0,27x$ од нарачката, па и останало да изработи $0,675x - 0,27x = 0,405x$ честитки. Според условот на задачата имаме $0,405x = 810$, т.е. $x = 810 : 0,405 = 2000$. Значи, биле нарачани 2000 честитки.

66. Баба Милка на своите четири внуци им поделила бомбони на следниов начин: првиот внук добил половина од бомбоните и уште една бомбона, вториот внук добил половина од преостанатите бомбони и уште една бомбона, третиот внук добил половина од преостанатите бомбони и уште една бомбона, за на крајот четвртиот внук да добие половина од преостанатите бомбони и уште една бомбона. Потоа баба Милка немала бомбони. Колку бомбони добил секој внук?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-нанапред.

Бидејќи четвртиот внук добил половина од преостанатите бомбони и уште една бомбона, по што баба Милка веќе немала бомбони заклучуваме дека 1 бомбона е половина од бомбоните кои баба Милка ги имала пред четвртиот внук да добие бомбон. Значи, четвртиот внук добил $1+1=2$ бомбон.

Кога на овој број ќе му додадеме 1, добиваме $2+1=3$, и тоа се половина од бомбоните пред баба Милка да му даде бомбони на третиот внук. Значи, пред третиот внук да добие бомбони баба Милка имала $2 \cdot 3 = 6$ бомбони.

Кога на овој број ќе му додадеме 1, добиваме $6+1=7$, и тоа се половина од бомбоните пред баба Милка да му даде бомбони на вториот внук. Значи, пред вториот внук да добие бомбони баба Милка имала $2 \cdot 7 = 14$ бомбони.

Кога на овој број ќе му додадеме 1, добиваме $14+1=15$, и тоа се половина од бобоните пред баба Милка да му даде бомбони на првиот внук. Значи, на почетокот баба Милка имала $2 \cdot 15 = 30$ бомбони.

Конечно, првиот внук добил $30:2+1=16$ бомбони, по што останале $30-16=14$ бомбони. Вториот внук добил $14:2+1=8$ бомбони, по што останале $14-8=6$ бомбони. Третиот внук добил $6:2+1=4$ бомбони, по што останала $6-4=2$ бомбона. Четвртиот внук добил $2:2+1=2$ бомбони, по што останале $2-2=0$ бомбони.

67. Баба Павлина на своите четири внуци им поделила бомбони на следниов начин: првиот внук добил половина од бомбоните и уште половина бомбона, вториот внук добил половина од преостанатите бомбони и уште половина бомбона, третиот внук добил половина од преостанатите бомбони и уште половина бомбона, за на крајот четвртиот внук да добие половина од преостанатите бомбони и уште половина бомбона. Потоа баба Павлина немала бомбони. Колку бомбони добил секој внук?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-нанапред.

Бидејќи четвртиот внук добил половина од преостанатите бомбони и уште половина бомбона, по што баба Павлина веќе немала бомбони заклучуваме дека половина бомбона е половина од бомбоните кои баба Павлина ги имала пред четвртиот внук да добие бомбон. Значи, четвртиот внук добил $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ бомбона.

Кога на овој број ќе му додадеме $\frac{1}{2}$, добиваме $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, и тоа се половина од бомбоните пред баба Павлина да му даде бомбони на третиот внук. Значи, пред третиот внук да добие бомбони баба Павлина имала $2\cdot\frac{3}{2}=3$ бомбони.

Кога на овој број ќе му додадеме $\frac{1}{2}$, добиваме $3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$, и тоа се половина од бомбоните пред баба Павлина да му даде бомбони на вториот внук. Значи, пред вториот внук да добие бомбони баба Павлина имала $2\cdot\frac{7}{2}=7$ бомбони.

Кога на овој број ќе му додадеме $\frac{1}{2}$, добиваме $7+\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$, и тоа се половина од бобоните пред баба Павлина да му даде бомбони на првиот внук. Значи, на почетокот баба Павлина имала $2\cdot\frac{15}{2}=15$ бомбони.

Конечно, првиот внук добил $\frac{15}{2}+\frac{1}{2}=8$ бомбони, по што останале $15-8=7$ бомбони. Вториот внук добил $\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=4$ бомбони, по што ос-

танале $7-4=3$ бомбони. Третиот внук добил $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$ бомбони, по што останала $3-2=1$ бомбона. Четвртиот внук добил $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ бомбона, по што останале $1-1=0$ бомбони.

68. Платата на Петар е зголемена за p проценти, а платата на Јован е намалена за q проценти. Потоа Петар имал како Јован пред тоа, а Јован имал плата како Петар пред тоа.
    1) Определи го q, ако е познато p.
    2) Определи го p ако е познато q.

    Решение. Нека на почетокот платата на Петар е a, а платата на Јован е q. Имаме $(1+p)a=b$ и $(1-q)b=a$. Според тоа,

    $$b=(1-q)a=(1-q)(1+p)b,\ \text{т.е.}\ (1-q)(1+p)=1.$$

    Оттука добиваме дека $q=\frac{p}{1+p}$ и $p=\frac{q}{1-q}$.

69. Господинот Рампо сака да чита книга седејќи во паркот под прилепската саат-кула. Еден ден додека тој седел на клупата и читал, ѕвоното од саатот се огласило пет пати. За тоа време тој избројал 11 удари. По последниот удар господинот Рампо станал и тргнал дома. Колку бил часот во тој момент? Ѕвоното на саат-кулата се огласува со толкав број удари колку што е цел број часови во тој момент, а на секој половина час се огласува со еден удар.

    Решение. Со x да го означиме бројот на ударите во првото огласување на цел број часови. Постојат две можности: првото огласување означува половина час или цел број часови.

    Во првиот случај, бидејќи имаме 5 огласувања ја добиваме равенката

    $$1+x+1+(x+1)+1=11,$$

    т.е. равенката $2x=7$, што не е можно бидејќи x треба да е цел број.

    Во вториот случај ја добиваме равенката

    $$x+1+(x+1)+1+(x+2)=11,$$

    т.е. равенката $3x=6$ чие решение е $x=2$. Значи, господинот Рампо тргнал кон дома во $x+2=4$ часот.

70. Една работилница за неколку дена требало да произведе определено количество од еден ист производ. Според планот за производство требало да се произведуваат по 10 производи на ден. Но, секој ден се

произведувало 20% повеќе од предвиденото дневно производство. Осум дена пред крајниот рок биле произведени 72 производи повеќе од вкупно предвиденото количество според планот. Колку вкупно производи се произведени до крајниот рок?

Решение. Нека x е бројот на произведените производи 8 дена пред крајниот рок. Бидејќи секој ден се произведувале 20% по веќе од планираните 10 производи, т.е. по 12 производи, планираното производство требало да заврши за $\frac{x}{12}+8$ денови. Од друга страна, планираното производство било $x-72$ производи, па како било планирано да се произведуваат 10 производи на ден, тоа требало да заврши за $\frac{x-72}{10}$ денови. Оттука следува $\frac{x}{12}+8=\frac{x-72}{10}$, т.е. $10(x+96)=12(x-72)$. Решение на последната равенка е $x=912$. Според тоа, 8 дена пред крајниот рок се произведени 912 производи и како се произведувале по 12 производи дневно до крајниот рок се произвеле $912+8\cdot 12=1008$ производи.

4. ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. Околу тркалезна маса седат седум луѓе, меѓу кои има лажливци, кои секогаш лажат, и витези, кои секогаш ја говорат вистината. Првиот човек му рекол на вториот: „Ти си лажливец“. Вториот истото му го рекол на третиот, третиот на четвртиот, четвртиот на петтиот, петтиот на шестиот и шестиот на седмиот. Што му рекол седмиот на првиот?
   Решение. Седмиот му рекол на првиот: „Ти си витез“.
   Ако првиот е лажливец, тогаш врз основа на неговата изјава вториот е витез, па третиот е лажливец, четвртиот е витез, петтиот е лажливец, шестиот е витез, седмиот е лажливец. Бидејќи и првиот е лажливец, седмиот морал да каже: „Ти си витез“.
   Ако првиот е витез, тогаш вториот е лажливец, третиот е витез, четвртиот е лажливец, петтиот е витез, шестиот е лажливец, седмиот е витез. Сега, бидејќи првиот е витез, седмиот морал да каже: „Ти си витез“.

2. Околу тркалезна маса седат 10 луѓе, витези и лажливци. Секој од нив рекол: „*Двата мои соседи се лажливци.*“ Колку витези има меѓу овие десет луѓе ако витезите секогаш ја кажуваат вистината, а лажливците секогаш лажат?
   Решение. Не може да се повеќе од 5 витези, бидејќи тогаш некои два витези ќе бидат соседи, па изјавата на некој витез ќе биде лажна. Може да се 5 витези, во случај кога на масата наизменично седат витези и лажливци.
   На масата не може да се помалку од 4 витези, бидејќи тогаш на некое место ќе има последователно три лажливци, па изјавата на средниот ќе биде вистините. Точно 4 може да бидат, на пример, ако поредокот околу масата е ВЛЛВЛЛВЛВЛ или ВЛЛВЛВЛЛВЛ.

3. Во собата се наоѓаат неколку луѓе. Секој од нив е или лажливец (кој секогаш лаже) или витез (кој секогаш ја говори вистината). Од собата се слушнале неколку гласови:
   Прв глас. Во собата има најмногу тројца. Сите сме лажливци.
   Втор глас. Во собата има најмногу четворица. Не сме сите лажливци.
   Трет глас. Во собата има петмина. Тројца се лажливци.

Дали во собата има повеќе лажливци или витези?

Решение. Првиот глас е на лажливец, бидејќи како витез не може да каже: „Сите сме лажливци.“ Според тоа, не е точен и неговиот прв исказ. Значи, во собата има повеќе од тројца.

Вториот глас е на витез, бидејќи неговиот втор исказ е точен. Значи, точен е и неговиот прв исказ. Значи, во собата нема повеќе од четворица. Ако се земе и првиот исказ на првиот човек, заклучуваме дека во собата има точно четворица.

Третиот глас е на лажливец, бидејќи неговиот прв исказ не е точен. Тогаш не е точен и неговиот втор исказ (дека има тројца лажливци). Значи, во собата има двајца лажливци и двајца витези.

4. Околу тркалезна маса седат дванаесет деца. Момчињата секогаш им ја говорат вистината на момчињата, а ги лажат девојчињата, а девојчињата секогаш ја говорат вистината на девојчињата, а ги лажат момчињата. Секое дете на својот десен сосед на масата му ја кажал една од реченицте: „Ти си момче“ или „Ти си девојче“. Секоја од двете реченици е изговорена еднаков број пати. Колку момчиња, а колку девојчиња седеле околу масата?

   Решение. Според условот на задачата секое момче ја кажало реченицата: „Ти си момче“, која е точна ако десно од него е момче, а не е точна ако десно од него е девојче. Аналогно секое девојче ја изговорило реченицата „Ти си девојче“. Бидејќи секоја од реченицте е изговорена еднаков број пати, заклучуваме дека околу масата седи еднаков број момчиња и девојчиња, односно 6 момчиња и 6 девојчиња.

5. Пред почетокот на Европското фудбалско првенство, пет пријатели ги дале следниве прогнози за тоа кои екипи ќе играат во финалето:
   1) Франција и Холандија,
   2) Белгија и Германија,
   3) Белгија и Франција,
   4) Англија и Холандија,
   5) Холандија и Германија.

   Се покажало дека една прогноза била целосно неточна, а во преостанатите точно е наведен само по еден финалист. Кои екипи играле во финалето и која прогноза била целосно неточна?

   Решение. Прво ќе определиме која прогноза е потполно неточна. Ако

потполно е неточна прогнозата 1), тогаш од 3) следува дека во финалето играла Белгија. Сега, од 2) ќе следува дека во финалето не играла Германија, што значи дека и прогнозата 5) е потполно неточна. Аналогно се заклучува дека не може да се потполно неточни и прогнозите 2), 3) и 5). Значи, потполно неточна е прогнозата 4). Сега, од 1) и 5) следува дека во финалето играле Германија и Франција.

6. Меѓу три воени ветерани се водел следниов разговор:

A: B има две раце.

B: C има две раце.

C: A има две раце.

A: Сите заедно имаме две раце.

B. Сите заедно имаме три раце.

C: Сите заедно имаме четири раце.

Се покажало дека секој излагал толку пати колку што имал раце. Колку раце има секој од трите воени ветерани?

Решение. Вкупниот број раце не може да биде:

- 6, бидејќи тогаш последните три искази се невистинити,
- 5, бидејќи тогаш четири искази се невистинити (два меѓу првите три се вистинити),
- 3, бидејќи тогаш четири искази се невистинити (два меѓу првите три и два меѓу последните три),
- 2, бидејќи тогаш најмалку четири искази се невистинити,
- 1, бидејќи тогаш сите искази се невистинити,
- 0, бидејќи тогаш сите искази се невистинити.

Значи, сите тројца заедно имаат четири раце. Затоа вториот исказ на C е вистинит, па C има најмногу една рака. Вторите искази кои ги дале A и B се невистинити, а исто така и првиот исказ на B. Бидејќи B дал два невисинити искази, тој има две раце. Според тоа, првиот исказ на A е вистинит. Бидејќи A дал еден невистинит исказ, тој има една рака. Значи, првиот исказ на C е невистинит, па C има една рака.

Конечно, A и C имаат по една рака, а B има две раце.

7. Лицата A,B,C ги дале следниве изјави:

A: Владо уловил повеќе од 20 риби.

B: Владо уловил помалку од 20 риби.

C: Владо уловил барем една риба.

Колку риби уловил Владо, ако е точна само една од наведените изјави?

Решение. Ако Владо уловил барем една риба, но помалку од 20, тогаш се точни исказите B и C, а ако уловил повеќе од 20 риби, тогаш се точни исказите A и C. Понатаму, ако Владо не уловил ниту една риба, тогаш е точен исказот B, а ако уловил точно 20 риби, тогаш е точен исказот C. Конечно, Владо не уловил ниту една риба или уловил точно 20 риби.

8. Тројца пријатели разговараат на плажа:
A: Овде сме најмногу 5 часа.
B: Не, овде сме повеќе од 5 часа.
C: Овде сме повеќе од 3 часа.
Изјавата на само еден од пријателите е вистинита. Кој е тој?

Решение. Во изјавите се спомнуваат 3 и 5 часа. Затоа ќе ги разгледаме можностите пријателите на плажа да се:
1) помалку од 3 час,
2) точно 3 часа,
3) повеќе од 3, а помалку од 5 часа,
4) точно 5 часа,
5) повеќе од 5 часа.

Само во случаите 1) и 2) точно еден кажал вистина, а тоа е *A*. Во сите други случаи најмалку двајца кажале вистина. Според тоа, само *A* кажал вистина и меѓу другото можеме да заклучиме дека пријателите на плажа биле најмногу 3 часа.

9. Определи ги сите двоцифрени броеви n, ако меѓу следниве четири тврдења две се точни и две се неточни:
1) n е делив со 5,
2) n е делив со 23,
3) $n+7$ е точен квадрат,
4) $n-10$ е точен квадрат.

Решение. Кога се во прашање двоцифрените броеви тврдењето 4) е согласно со секое од преостанатитетри тврдења, а секои две тврдења меѓу првите три тврдења се исклучуваат.

Од тоа следува дека постојат три броја кои ги задоволуваат условите на задачата 35, 46, 74. Ако се точни тврдењата 1) и 4), тоа е бројот 35. Ако се точни тврдењата 2) и 4), тоа е бројот 46. Ако се точни тврде-

њата 3) и 4), тоа е бројот 74.

10. Јован и Гоце со своите синови биле на риболов. Јован уловил риби исто колку и неговиот син, а Гоце три пати повеќе од неговиот син. Вкупно уловиле 25 риби. Синот на Јован се вика Ристо. Како се вика синот на Гоце?

    Решение. Нека Јован уловил x риби. Толку уловил и неговиот син Ристо. Ако синот на Гоце уловил y риби, тогаш Гоце уловил $3y$ риби. Значи, сите заедно уловиле $2x+4y$ риби, па затоа $2x+4y=25$. Последното равенство не е можно, бидејќи левата страна е делива со 2, а десната страна не е делива со 2.

    Значи, на риболовот биле двајца татковци и двајца синови, но не биле четири различни луѓе. Ова е можно само ако едниот човек е истовремено и татко и син. Бидејќи Јован и Ристо се татко и син кои уловиле еднаков број риби, а Гоце уловил три пати повеќе риби од својот син, заклучуваме дека единствено Јован е во улога и на татко и на син, т.е. синот на Гоце се вика Јован. Навистина, во овој случај ја добиваме равенката $3x+x+x=25$, т.е. $x=5$, што значи дека Јован и Ристо уловиле по 5 риби, а Гоце уловил 15 риби.

11. Еден човек има три часовника – еден обичен и два електрична кои се напојуваат со струја од градската мрежа. Од двата електрични часовника, едниот кога ќе снема струја застанува и продолжува да работи по доаѓањето на струјата, а другиот кога ќе снема струја се враќа на почетната положба 00:00 и по доаѓањето на струјата тргнува од почеток. Утрината кога човекот тргнал на работа сите три часовника покажувале 06:30. Во текот на денот еднаш снемало струја. Кога човекот се вратил дома едниот часовник покажувал 07:50, другиот 07:19, а третиот 06:03. Во кој временски интервал немало струја?

    Решение. Јасно е дека часовникот кој покажува 07:50 не е електричен и тој покажува точно време. Двата електрични часовника заостануваат. Поголемо заостанување има часовникот кој покажува 06:03, што значи дека толку време поминало од доаѓањето на струјата. Според тоа, струјата дошла во 01:47. Вториот електричен часовник заостанува зад првиот 31 минута, што значи дека струја немало во временски интервал од 31 минута. Според тоа, струјата прекинала 31 минута пред 01:47, односно во 01:16. Значи, прекинот на струјата бил од 01:16 до 01:47.

12. Филип познава пет девојки: Ана, Бела, Цвета, Дана и Ева. Познати се следниве факти:
    1) Девојките може да се поделат во две старосни групи: три имаат помалку од 25 години, а две имаат повеќе од 25 години.
    2) Две девојки се учителки, а останатите се секретарки.
    3) Ана и Цвета се во иста старосна група.
    4) Дана и Ева се во различни старосни групи.
    5) Бела и Ева имаат иста професија.
    6) Цвета и Дана имаат различни професии.
    7) Меѓу петте девојки Филип ќе се ожени со учителка која има повеќе од 25 години.

    Со која девојка ќе се ожени Филип?

    Решение. Од 1), 3) и 4) следува дека или Дана или Ева се во иста старосна група како Ана и Цвета. Од 2), 5) и 6) следува дека или Цвета или Дана имаат иста професија како Бела и Ева. Според тоа, Бела и Ева се секретарки. Според 7) Филип нема да се ожени ниту со Бела ниту со Ева. Според тоа, Филип ќе се ожени со Дана, која е учителка и која има повеќе од 25 години. Старосните групи и професиите на преостанатите четири девојки може да се определат врз основа на претходните разгледувања. На пример, Ева има помалку од 25 години, а Бела повеќе од 25години, Цвета е секретарка, а Ана е учителка.

13. Октоподите по правило имаат осум краци. Но, во борбата за опстанок октоподите често пати стануваат инвалиди, додека некои заради генетските промени, предизвикани од загадувањето на морињата, се раѓаат со помалку или повеќе од осум краци.

    Познато е дека, ако октопод има парен број краци, тој секогаш ја говори вистината, а ако има непарен број краци тој секогаш лаже. Еднаш зелениот октопод му рекол на синиот октопод:
    - Јас имам осум краци, а ти само шест.
    - Не. Јас имам осум краци, - налутено одговорил синиот октопод. Ти имаш само седум.

    Виолетовиот октопод го подржал синиот октопод и се пофалил:
    - Тој навистина има осум краци, а јас имам точно девет краци.
    - Никој од вас нема осум краци, - се вклучил во расправата црвениот октопод, - само јас имам осум краци.

    Меѓу соговорниците постои октопод кој има точно осум краци. Кој

октопод има точно осум краци?

Решение. Ако виолетовиот октопод говори вистина, тогаш тој има парен број краци. Но, во тој случај тој не може да каже дека има девет краци. Значи, виолетовиот октопод лаже. Оттука следува дека синиот октопод нема осум краци. Но, синиот октопод вели дека има осум краци, што значи дека и тој лаже. Значи, синиот октопод има непарен број краци. Според тоа, зелениот октопод излагал кога рекол дека синиот октопод има шест краци. Значи, зелениот октопод лаже, па затоа тој не може да има парен број краци, односно нема осум краци. Од досега изнесеното следува дека првото тврдење на црвениот октопод е точно, па затоа точно е и второто негово тврдење. Значи, осум краци има само црвениот октопод.

14. Ако три четвртоци во еден месец се со непарен датум кој ден е 28. во тој месец?

Решение. Најмалиот непарен датум е 1-ви и нека тоа е четврток. Меѓу два последователни четвртоци има 7 дена, па затоа соодветните датуми се со различна парност. Значи 15-ти и 29-ти се непарни датуми кои паѓаат во четврток во тој месец. Според тоа, 28-тиот ден тој месец е во среда. Првиот четврток кој паѓа во непарен датум може да биде и 3-ти. Тогаш непарни датуми кои паѓаат во четврток се 17-ти и 31-ви. Значи, пак се исполнети условите на задачата. Сега 28-тиот ден во тој месец ќе биде во понеделник. Значи, задачата има две решенија, т.е. ако три четвртоци во еден месец се во непарен датум, тогаш 28-тиот ден во тој месец може да е понеделник или среда.

15. На летната математичка школа имало 12 ученици кои биле родени во различни месеци. Покрај тоа, разликата во возраста на било кои два од овие 12 ученици е помала од една година. Ацо е меѓу нив најстар и тој е 214 дена постар од Митре кој е седми по ред. Определи го роденденот на Митре.

Решение. Седумте настари ученици се родени во седум последователни месеци. Заради разликата од 214 дена, меѓу Ацо и Митре, во овие месеци мора да има најмалку 215 дена. Бидејќи $215 = 7 \cdot 30 + 5$, тоа е можно само ако меѓу седумте последователни месеци има пет месеци со 31 ден. Такви се само месеците: јули, август, септември, октомври, ноември, декември и јануари. Значи, Ацо е роден на 1 јули, а Митре на 31 јануари следната година.

16. Андреј има дигитална вага која покажува точен број грамови и 100 вреќички со по 100 златници. Во 99 вреќички се златници од по 10 грама, а во една се златници од 9 грама. Како само со едно мерење Андреј може да открие во кои вреќички се златници од по 10 грама, а во која се златници од 9 грама?

    Решение. Нека Андреј ги означи вреќичките со броевите од 1 до 100. Потоа од секоја вреќичка зема онолку златници колку што е бројот со кој вреќичката е означена. Така Андреј вкупно зел

    $$1+2+3+...+99+100=5050$$

    златници. Ако сите златници се од по 10 грама, тогаш нивната маса ќе биде $5050\cdot 10=50500$ грама. Но бидејќи има златници и од 9 грама, Андреј ќе измери маса поголема или еднаква на 50400 грама, а помала од 50500 грама. Притоа, ако Андреј измерил маса $50500-x$ грама, $1\le x\le 100$ тоа значи дека тој зел x златници од по 9 грама и тие се во вреќичката означена со бројот x.

17. Меѓу 2013 на изглед еднакви златници се наоѓаат 50 фалсификувани. Сите исправни златници се со иста маса и сите фалсификувани златници се со иста маса која за 1 грам се разликува од масата на исправните златници (може да се полесни или потешки). Имаме на располагање вага со два таса и скала која ја покажува разликата на масите на едниот и другиот тас во грамови. Дали може за произволно избран златник со едно мерење да се констатира дали е исправен или е фалсификуван?

    Решение. Да земеме еден златник, а преостанатите да ги распределиме на левиот и десниот тас по 1006. Ако издвоениот златник е исправен, разликата на масите на двата таса ќе биде парен број грамови. Ако издвоениот златник е неисправен, разликата на масите на двата таса ќе биде непарен број грамови. Така заклучуваме дали земениот златник е исправен или неисправен.

18. На располагање се две кофи, река и празно отворено буре кое собира околу 200 литри течност. Не е дозволено претурање од една кофа во друга. Дали може да се одмерат 13 литри вода во бурето ако кофите се со зафатнини од:

    а) 7 литри и 11 литри,

    б) 6 литри и 10 литри?

Решение. а) Може да се измерат. Имено, бидејќи $2 \cdot 11 - 3 \cdot 7 = 1$, важи $26 \cdot 11 - 39 \cdot 7 = 13$. Значи, 26 пати тураме по 11 литри и 39 пати истураме по 7 литри и добиваме 13 литри.
б) Не може, бидејќи 13 е непарен број, а зафатнината на секоја кофа е парен број.

19. Определи го најмалиот број камиони со носивост 3 тони со кои одеднаш може да се превезат 50 контејнери со маси: $370\,kg, 372\,kg, 374\,kg, ..., 466\,kg, 468\,kg$.

Решение. Седум камиони не се доволни одеднаш да се превезат сите 50 контејнери, бидејќи ниту еден камион не може да превезе повеќе од 7 контејнери (масата на осумте најлесни контејнери $3016\,kg$ и е поголема од 3 тони). Од друга страна, 8 камиони се доволни, што заклучуваме на следниов начин.
Масата на било кои 6 контејнери е помала од $3000\,kg$, бидејќи масата на најтешките 6 контејнери е еднаква на $2778\,kg$. Масата на било кои 7 од најлесните 14 контејнери исто така е помала од $3000\,kg$, бидејќи масата на седумте најтешки од овие 14 контејнери е еднаква на $2730\,kg$. Според тоа, на два камиони треба да се натоварат 14 најлесни контејнери, на секој по 7, а на преостанатите 6 камиони ги товариме преостанатите 36 контејнери, по 6 контејнери на секој камион.

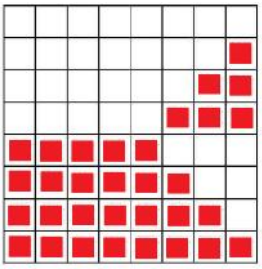
20. Фирма за доставување на храна запослено 50 доставувачи на храна и почнува да работи во 8 часот, кога се првите испораки на храна. Следните испораки се на секој час (во 9:00, во 10:00, ...). Последната испорака е во 18:00. На 1. септември секој доставувач во некои 4 термини доставувал храна. Докажи дека постои термин кога 19 доставувачи разнесувале храна.

Решение. Сите доставувачи работеле во вкупно $50 \cdot 4 = 200$ термини за доставување на храна. Вкупно имаме 11 термини и бидејќи $200 = 11 \cdot 18 + 2$ од принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку 19 доставувачи кои во ист термин доставувале храна.

21. На некои полиња на шаховската табла се поставени квадратни плочки. Ана ги избројала плочките во секој ред и добила осум различни броја. Илија ги избројал плочките во секоја колона и не добил ниту еден од

броевите кои ги добила Ана. Кои се броевите на Ана?

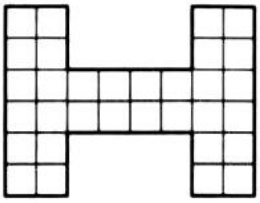
Решение. Ана добила осум броја од множеството $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Тоа значи дека сите броеви на Илија се еднакви на бројот кој не го добила Ана. Според тоа, во секоја колона има еднаков број на плочки. Нека тоа е бројот x. Значи, бројот на плочките на таблата е еднаков на $8x$. Бидејќи Илија не добил ниту еден од броевите кои ги добила Ана бројот на плочките е еднаков на



$$0+1+2+3+4+5+6+7+8-x=36-x.$$

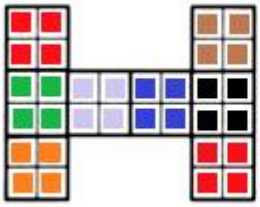
Значи, $8x=36-x$, од каде следува $x=4$. Според тоа, бројот на Илија е 4, а броевите на Ана се 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7 и 8. Ваков распоред на плочките е даден на цртежот десно.

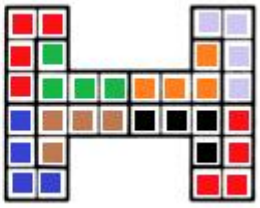
22. Фигурата прикажана на цртежот десно подели ја на 8 складни фигури на два различни начини.



Решение. Дадена фигура на 8 складни фигури може да се подели така што имаме:

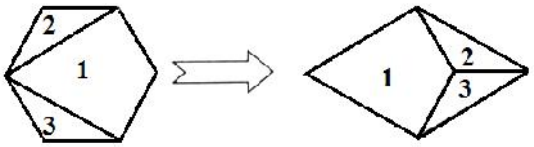
1) 8 скалдни квадрати (цртеж долу лево),
2) 8 складни Г тетрамина (цртеж долу десно).





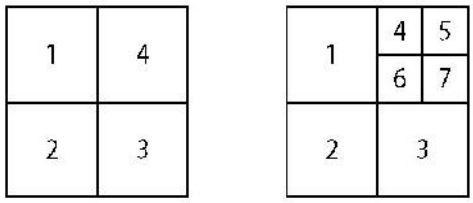
23. Расечи правилен шестаголник на три дела од кои може да се состави ромб со иста плоштина.

Решение. Бараното расекување и составениот ромб од добиените делови се прикажани на цртежот десно.



24. Дали може квадрат да се подели на 2011 помали дисјунктни квадрати. Квадратите не мора да се меѓусебно складни?

Решение. Кога еден квадрат ќе се подели на 4 помали квадрати, бројот на квадратите се зголемува за 3. Значи, од 1 квадрат може да се добијат 4, од 4 квадрати може да се добијат 7 итн. Според тоа, од 1 квадрат може да се добијат $3k+1$ квадрати, каде $k \in \mathbb{N}$. Бидејќи $2011 = 3 \cdot 670 + 1$, заклучуваме дека од 1 квадрат може да се добијат 2011 квадрати.



25. Андреј има 3 конци. Некои од нив го исекол на по три дела, а потоа некои од добиените делови ги исекол на по три дела итн. Дали до оваа постапка може да се добијат 2011 конци?

Решение. Кога Андреј еден конец ќе го пресече на три дела бројот на конците се зголемува за 2. Така при секое сечење бројот на конците се зголемува за 2 (под едно сечење подразбираме поделба на еден конец на три дела). Значи, по n сечења бројот на конците ќе се зголеми за $2n$. На почетокот имаме 3 конци, па затоа по n сечења ќе имаме $3+2n$ конци.Според тоа, Андреј може да добие 2011 конци ако равенката $3+2n=2011$ има решение во множеството природни броеви. Имаме $2n = 2011-3$, односно $n = 2008:2 = 1004$. Значи, по 1004 сечења Андреј може да добие 2011 конци.

26. Дали е можно на кружница да се запишат 2009 броеви такви што разликата на секои два соседни броја е 2 или -2?

Решение. Нека на кружницата се редоследно запишани броевите $a_1, a_2, ..., a_{2009}$. Тогаш

$$a_1 - a_2 = \pm 2,\ a_2 - a_3 = \pm 2, ..., a_{2008} - a_{2009} = \pm 2,\ a_{2009} - a_1 = \pm 2,$$

Забележуваме дека во горните равенства секој од броевите $a_1, a_2, ..., a_{2009}$ се појавува два пати и тоа еднаш со знак + и еднаш со знак $-$. Според тоа, ако ги собереме дадените равенства, тогаш збирот на десната страна е еднаков на 0, а додека на левата страна имаме збир на 2009 броја 2 или -2. За да овој збир е еднаков на 0 треба бројот на собирците да е парен број, што не е точно. Според тоа, не е можно да се распоредат 2009 броја на саканиот начин.

27. Почнувајќи од цифрата 1 во горниот лев агол повлечи искршена ли-

нија до цифрата 9 во долниот десен агол. Притоа од цифра до цифра може да се оди само хоризонтално од лево кон десно и вертикално од горе кон долу, а збирот на цифрите кои ќе бидат прецртани со искршената линија треба да биде еднаков на 100. Определи го патот кој содржи најголем, односно најмал број свртувања.

1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9

Решение. Патишта со најмал број свртувања се, на пример:

11123456788999999 и 12345667777777789,

а со најголем број свртувања се, на пример:

12234556677889999, 12344556677888899 и 123344556677889999.

28. На таблата се запишани природните броеви од 1 до 6. Дозволено е да се изберат два од нив и секој од избраните броеви да се зголеми за 1. Дали може со повторување на оваа постапка да се добијат шест еднакви броеви?

Решение. Збирот на дадените броеви е непарен, а со зголеување на два броја за 1 парноста на збирот не се менува. Бидејќи збирот на шест еднакви броја е парен број, заклучуваме дека со наведената операција не може да се добијат шест еднакви броја.

29. На таблата се запишани природните броеви од 1 до 6. Дозволено е да се изберат три од нив, на пример a,b,c и истите да се заменат со $a+b-c,b+c-a,c+a-b$. Дали е можно со повеќекратно повторување на оваа постапка да се добијат шест еднакви броја?

Решение. Збирот на дадените броеви е непарен, а со замена на броевите a,b,c со броевите $a+b-c, b+c-a, c+a-b$ тој збир не се менува бидејќи

$$(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)=a+b+c\,.$$

Бидејќи збирот на шест еднакви броја е парен број, со опишаната постапка од броевите од 1 до 6 не може да се добијат шест еднакви броја.

30. На секое од 2005 топчиња е запишан број чија апсолутна вредност е еднаква на 1. Дали е можно топчињата да се распоредат во две групи, така што збирот на сите броеви запишани на топчињата во едната група е еднаков на збирот на сите броеви запишани на топчињата во другата група?

Решение. На секое топче е запишан бројот 1 или -1. Нека претпоставиме дека има повеќе топчиња на кои е запишан бројот 1. Ако на секое топче на кое е запишан бројот -1 му придружиме топче на кое е запишан бројот 1, тогаш збирот на броевите запишани на тие топчиња ќе биде еднаков на нула. Притоа, сме употребиле парен број топчиња и како 2005 е непарен број, ни останууваат непарен број топчиња на кои е запишан бројот 1. Тоа значи, дека збирот на сите броеви запишани на топчињата е непарен. Затоа не е можно топчињата да се поделат во две групи така што збирот на запишаните броеви во секоја група ќе биде еднаков.

На потполно ист начин се разгледува случајот кога има повеќе топчиња на кои е запишан бројот -1.

31. Во една колона се наредени 2006 жетони кои се последователно нумерирани со природните броеви 1, 2, 3, ..., 2006. Во еден потег е дозволено да се променат местата на жетоните кои имаат заеднички сосед (на пример, на почетокот може да се сменат местата на жетоните 62 и 64 бидејќи двата жетони се соседни на жетонот 63). Дали е можно по конечен број потези на прво место да дојде жетонот со број 2006, а на последно место жетонот со број 1.

Решение. Нека и местата (позициите) на кои се жетоните се нумерирани со броевите 1, 2, 3, ..., 2006, така што секој жетон е нумериран со ист број како и местото на кое стои. Со определеното преместување жетон со парен број секогаш се преместува на парна позиција. Затоа жетонот број 1 не може никогаш да дојде на 2006-тата позиција.

32. На таблата се запишани природните броеви 1, 2, 3, ..., 2012, 2013, 2014. Дозволено е било кои два броја да се заменат со апсолутната вредност на нивната разлика. Постапката се продолжува се додека на таблата не остане еден број. Дали тој број може да биде:
а) 0, б) 1?

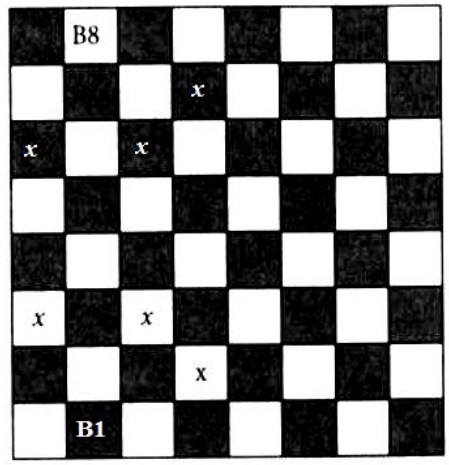
Решение. Нека $a \geq b$. Бидејќи броевите a и b се заменуваат со бројот $|a-b|=a-b$, збирот на сите броеви се намалува за $a+b-(a-b)=2b$. Тоа значи дека парноста на збирот на почетните броеви не се менува.

а) Збирот на почетните броеви 1, 2, 3, ..., 2014 е непарен, па затоа и крајниот збир ќе биде непарен. Тоа значи дека на крајот не е можно да остане бројот 0.

б) Ако прво последователните парови (1, 2), (3, 4), ..., (2013, 2014) ги замениме со апсолутната вредност на нивната разлика, го добиваме 1007 пати бројот 1. Повторувајќи ја постапката на крајот останва бројот 1.

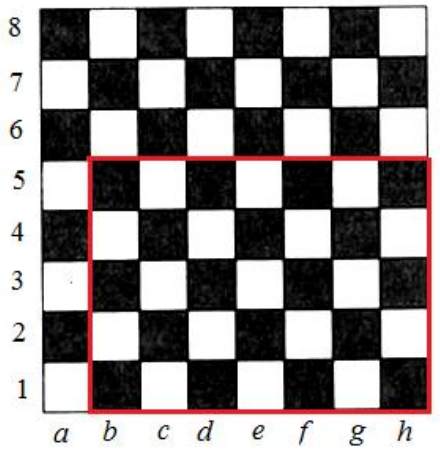
33. При почетното поставување на фигурите на шаховската табла еден бел скокач (коњ) се наоѓа на полето $B1$, а еден црн скокач се наоѓа на полето $B8$. Дали може со скокачот од полето $B1$ и со скокачот од полето $B8$ да се направат по 2006 потези така што тие ќе ги заменат своите места?

Решение. Белиот скокач се наоѓа на црно поле $B1$, а црниот на бело поле $B8$. По првиот потег белиот скокач ќе се најде на бело поле, а црниот на црно поле. По вториот скок белиот скокач ќе биде на црно, а црниот на бело поле. Воопшто по парен број скокови белиот скокач се-когаш ќе биде на црно поле, а црниот скокач секогаш ќе биде на бело поле. Затоа со секој од скокачите се направат по 2006 потези тогаш тие не може да ги заменат местата, бидејќи треба да направат парен број потези и да ја променат бојата на полето на кое се наоѓаат.



34. Колку жетони може да се постават на шаховска табла ако не е дозволено да се постави жетон на полето $e3$ ниту две фигури може да се на две полиња кои се симетрични во однос на полето $e3$, т.е. центарот на тоа поле?

Решение. Да го разгледаме максималниот правоаголник во чиј центар се наоѓа полето $e3$. Тоа е правоаголникот 7×5 во долниот десен дел на таблата (цртеж десно). Во овој правоаголник кој има 17 парови симетрични полиња во однос на центарот на полето $e3$ можеме да поставиме најмногу 17 жетони. На секое од преостанатите 29 полиња можеме да поставиме по еден жетон. Значи, максималниот број жетони е $29+17=46$.



35. Триста кругчиња (полиња) се наредени на една кружница. Во едно поле е поставен жетон. Илија го поместува жетонот во насока на движењето на стречката на часовникот така што во првиот потег го поместува за едно поле, во вториот за две полиња, во третиот за три итн. во секој следен потег бројот на поминатите полиња е за 1 поголем од бројот на поминатите полиња во последнито потег. Дали на овој начин жетонот може да се доведе до секое од дадените 300 полиња?

Решение. Да ги нумерираме полињата редоследно во насока на движењето на стрелките на часовникот со броевите од 0 до 299 и да претпоставиме дека на почетокот жетонот бил на полето 0. По n потези жетонот ќе се наоѓа на поле означено со r_n каде r_n е остатокот од делењето на бројот $\frac{n(n+1)}{2}$ со бројот 300. Бројот $\frac{n(n+1)}{2}$ не може да завршува на цифрите 2, 4, 7 и 9. Бидејќи бројот и неговиот остаток при делењето со 300 завршуваат на иста цифра, следува дека жетонот никогаш нема да се најде на поле чија цифра на единиците е 2, 4, 7 или 9.

36. Јанко и Марко си играат со броеви така што Јанко секогаш додава 3, а Марко секогаш одзема 5. Додавањето и одземањето на број е наизменично. Колку пати додале и одзеле број (тоа го направиле еднаков број пати), ако почетниот број е 2008, а последниот број е -28?
Решение. Бидејќи Јанко и Марко додаваат и одземаат наизменично, по секој чекор, т.е. по секое додавање и одземање, бројот ќе се намалува за 2. Разликата на почетниот и крајниот број е $2008-(-28)=2036$, што значи дека имаме $2036:2=1018$ чекори

37. Дамјан и Доротеја се играат со броеви така што Дамјан секогаш додава 5, а Доротеја одзема 2. Додавањето и одземањето го прават наизменично. Со кој број почнале ако додавале и одземале по 1339 пати, а на крајот го добиле бројот 2009?
Решение. Дамјан и Доротеја наизменично додавале и одземале, па затоа по еден чекор (додавање и одземање) бројот ќе се зголеми за $5-2=3$. Значи, тргнувајќи од почетниот број по 1339 чекори бројот ќе се зголеми за $3\cdot 1339=4017$. Конечно, бидејќи на крајот го добиле бројот 2009, почетниот број бил $2009-4017=-2008$.

38. Колку најмалку, а колку најмногу пати во текот на една година може петокот да биде 13. ден во месецот?
Решение. Лесно се заклучува дека одговорот е ист ако наместо петок се набљудува било кој ден од седмицата. Според тоа, треба да се определи колку пати најмалку, а колку пати најмногу, еден определен ден од седмицата може да се појави како 13. ден во месецот во текот на една година. Деновите во неделата редоследно да ги означиме со 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, при што се 1 сме го означиле оној ден кој во разгледуваната година се јавува на 13. јануари. Тогаш лесно се пресметува кои денови паѓаат како 13. денови во преостатанатите месеци. Резултатите се дадени во следната табела (во првиот ред се обична, а во вториот ред за престапна година).

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	4	4	7	2	5	7	3	6	1	4	6
1	4	5	1	3	6	1	4	7	2	5	7

Разгледувајќи ја табелата заклучуваме дека и за првиот и за вториот ред важи: секој брј од 1 до 7 се појавува најмалку еднаш, при што има

такви кои се појавуваат точно еднаш, такви што се појавуваат два пати и такви што се појавуваат три пати. Значи, секој ден во седмицата, според тоа и петокот, може да биде тринаесетти во месецот најмалку еднаш, а најмногу три пати во текот на годината.

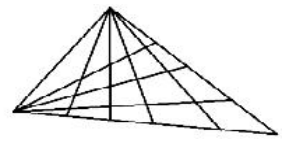
39. Определи го бројот на рамнокраките триаголници чии должини на страни изразени во cm се природни броеви и чиј периметар е еднаков на $2005\,cm$.

Решение. Нека a е должината на основата, а b е должината на кракот на триаголникот кој ги задоволува условите на задачата. Бидејќи $2b+a=2005$ следува дека a е непарен број. Понатаму, од неравенството на триаголник имаме $a<2b$ следува $2a<a+2b=2005$, од каде добиваме $a<1003$. Сега, бидејќи a е непарен број, добиваме $a\in\{1,3,5,...,1001\}$, што значи дека постојат 502 триаголници кои ги задоволуваат условите на задачата.

40. Ги разгледуваме рамнокраките триаголници чии должини на страни изразени во сантиметри се природни броеви. Определи го бројот на сите такви триаголници чиј периметар е еднаков на $2021\,cm$.

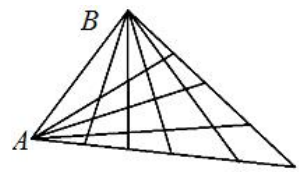
Решение. Нека a е должината на основата, а b е должината на кракот на триаголнк кој го задоволува условот на задачата. Имаме $L=2021\,cm$, што значи дека $a+2b$ е непарен број, па затоа a е непарен број. Збирот на должините на двете страни е поголем од должината на третата страна, па затоа $a<2b$. Од $a+2b=2021$ и $a<2b$ следува $2a<a+2b=2021$, односно $a<1011$. Но, a е непарен број, па затоа $a\in\{1,3,5,...,1009\}$. Множеството $\{1,3,5,...,1009\}$ има 505 елементи, што значи дека бараниот број триаголници е 505.

41. Колку различни траголници има на цртежот десно? А колку четириаголници?



Решение. Темињата на триаголниците може да се точките A и B и точките на пресеците на правите низ A со правите низ B.

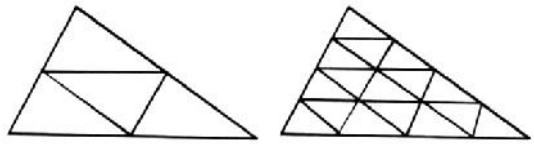
Петте прави низ точката A (вклучувајќи ја и правата AB) во пресекот со секоја права низ B (освен правата AB) определуваат 10 триаголници (бидејќи 5 точки на права опре-



делуваат 10 отсечки). Низ точката B поминуваат 5 прави различни од AB, па затоа вкупниот број триаголници со едно теме во A е еднаков на $5 \cdot 10 = 50$. Слично наоѓаме дека бројот на триаголниците со едно теме во B е еднаков на $4 \cdot 15 = 60$. Бидејќи триаголниците кои ги содржат и темето A и темето B броени двапати, од збирот $50 + 60 = 110$ треба да се одземе бројот на таквите триаголници, а нив ги има $5 \cdot 4 = 20$. Имено, третото теме е една од точките точките кои се добиваат во пресекот на четири прави низ A со 5 прави низ B. Значи, бараниот број триаголници е $110 - 20 = 90$.

Секој четириаголник е определен со една од четирите прави низ A и една од петте прави низ B (исклучена е правата AB). Имено, секој избор на две прави низ A и две прави низ B определува еден четириаголник. Бидејќи две прави низ A може да се изберат на $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ начина, а две прави низ B на $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$, заклучуваме дека бројот на четириаголниците е еднаков на $6 \cdot 10 = 60$.

42. Колку складни триаголници ќе добиеме, ако секоја страна на даден триаголник ја поделиме на 12 еднакви делови и соодветните точки ги поврзиме со паралелни отсечки? На пример, ако страните на триаголникот ги делиме на 2 или 4 еднакви делови, се добиваат 4 или 16 складни триаголници (цртеж десно).



Решение. Забележуваме дека во секој ред добиваме непарен број триаголници. Имено, ако хоризонталната основа е поделена на k делови тогаш во првиот ред имаме $k + (k-1) = 2k - 1$ триаголници, во вториот ред имаме $k - 1 + (k-2) = 2k - 3$ триаголници итн. во претпоследниот ред имаме $2 + 1 = 3$ триаголници и во последниот ред имаме 1 триаголник. Во нашиот случај страната е поделена на 12 еднакви делови, па затоа бројот на триаголниците е 23, 21, 19, 17,..., 5, 3, 1. Според тоа, со дадената поделба се добиени

$$1 + 2 + 5 + \ldots + 23 = (1 + 23) + (3 + 21) + \ldots + (11 + 13)$$
$$= 6 \cdot 24 = 144$$

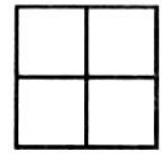
триаголници.

Забелешка. Во случај на поделба на k делови вкупниот број на три-

аголници е

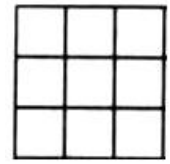
$$\begin{aligned} m &= 1+3+5+\ldots+(2k-5)+(2k-3)+(2k-1) \\ &= (1+2k-1)+(3+2k-3)+\ldots+(k-1+k+1) \\ &= \tfrac{k}{2}\cdot 2k = k^2. \end{aligned}$$

43. Колку рамнокраки правоаголни триаголници определуваат темињата на квадратите на цртежот десно?



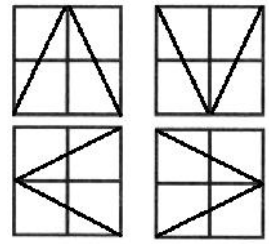
Решение. Во еден мал квадрат имаме 4 мали рамнокраки правоаголни траголници. Имено едната дијагонала квадратот го дели на два рамнокраки триаголници и другата уште на два. Значи, имаме $4\cdot 4=16$ мали рамнокраки триаголници. Со темињата на големиот квадрат се определени уште 4 рамнокраки правоаголни триаголници. Со средините на страните на големиот триаголник е определен квадрат и со тоа имаме уште 4 рамнокраки правоаголни триаголници. Ако центарот на квадратот го поврземе со темињата на големиот квадрат, добиваме уште 4 рамнокраки правоаголни триаголници. Конечно, имаме $16+4+4+4=28$ рамнокраки правоаголни триаголници.

44. Колку неправоаголни рамнокраки триаголници има на дадената квадратна мрежа чии темиња се темињата на квадратите на мрежата?



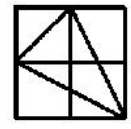
Решение. Соседните страни на ист квадрат не може да се страни на бараните триаголници, бидејќи притоа се добива правоаголен триаголник. Исто така спротивните страни не може да се страни на бараните триаголници бидејќи се паралелни.

Дијагоналите на два соседни квадрати зафаќаат агол од 90°, па затоа ако земеме само квадрати од еден ред нема да добиеме ниту еден од бараните триаголници.



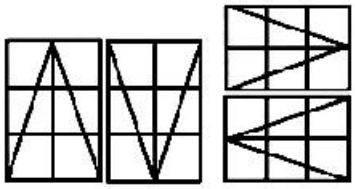
Ако земеме квадрати 2×2 кои вкупно ги има 4, во секој од овие квадрати се наоѓаат по 4 рамнокраки триаголници кои не се правоаголни (цртеж десно). Според тоа, досега имаме $4\cdot 4=16$ триаголници кои ги задоволуваат условите на задачата.

Понатаму, во секој 2×2 квадрат ако дијагоналата на 1×1 ја земеме за основа, а спротивното теме од дијагоналниот

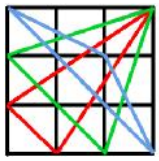


на него квадрат зе трето теме, добиваме квадрат кој ги задоволува условите на задачата (цртеж десно). Значи, во секој 2×2 има 4 вакви триаголници, па затоа имаме уште $4\cdot 4=16$ триаголници кои ги задоволуваат условите на задачата.

Сега, ако разгледуваме правоаголници составени од по два реда со по ри квадрати, кои ги има вкупно 4, во секој од нив има по 2 триаголника кои ги задоволуваат условите на задачата. Значи, имаме уште $4\cdot 2=8$ триаголници од саканиот вид.



Гледајќи ја целата мрежа можеме да најдеме уште три различни видови триаголници кои ги задоволуваат условоите на задачата (цртеж десно). Со вретење на мрежата можеме да добиеме уште три различни положби, па така добиваме нови $4\cdot 3=12$ триаголници.



Конечно, вкупно има $16+16+8+12=52$ триаголници кои ги задоволуваат условите на здачата.

45. На колку начини сума од 20 денари може да се исплати со монети од 1, 2 и 5 денари?

Решение. Нека бројот на монетите од 1 денар е x, бројот на монетите од 2 денари е y и бројот на монетите од 5 денари е z. Тогаш треба да важи $x+2y+5z=20$. Ќе разгледаме два случаја.

- Ако z е парен, т.е. ако $z=2k$, тогаш $x+2y=20-10k$, $(0\le k\le 2)$. Тогаш y може да е од множеството $\{0,1,2,...,10-5k\}$, при што потоа x е еднозначно определен. Значи, за $k=0,1,2$ имаме вкупно $11+6+1=18$ решенија.
- Ако z е непарен, т.е. ако $z=2k+1$, тогаш
$$x+2y=20-5(2k+1)=15-10k,\ (0\le k\le 1).$$
Тогаш y може да е од множеството $\{0,1,2,...,7-5k\}$, при што потоа x е еднозначно определен. Значи, за $k=0,1$ имаме вкупно $8+3=11$ решенија.

Конечно, сумата од 20 денари со монети од 1, 2 и 5 денари може да се исплати на $18+11=29$ различни начини.

46. За турнир во шах кој се игра преку Интернет се пријавиле n шахисти.

Турнирот се игра по системот да шахистот кој ќе ја загуби партијата отпаѓа, а во случај на реми испаѓа шахистот кој играл со бели фигури. Колку партии треба да се одиграат за да се добие победник на турнирот?

Решение. За да се добие победник во турнирот, без разлика како шахистите се распоредени мора $n-1$ шахист да испадне од натпреварувањето. Од натпреварувањето се испаѓа ако се изгуби партија или ако партијата заврши реми, што значи за да се добие победникот на купот мора да има $n-1$ испаѓања. Според тоа, одиграни се $n-1$ партии.

47. На еден тениски турнир учествуваат 17 тенисери и секој тенисер игра по еден меч со секој друг тенисер. Колку меча се одиграни на овој турнир?

Решение. Секој тенисер игра по еден меч со секој друг тенисер, што значи дека секој тенисер мора да одигра по 16 меча. Имаме 17 тенисери, и при горното броење на мечевите секој меч е броен два пати (кога тенисерот A игра со тенисерот B, тоа е истиот меч кога тенисерот B игра со тенисерот A). Тоа значи дека вкупно ќе се одиграат $(17\cdot 16):2=136$ меча.

48. На тениски турнир учествуваат 17 тенисери. Дали е можно по 5 дена на турнирот секој учесник да има по 5 одиграни меча?

Решение. Ако претпоставиме дека во некој момент секој од 17-те тенисери има одиграно по 5 меча, тогаш сите тенисери вкупно ќе одиграат $17\cdot 5=85$ меча. Но, бидејќи во секој меч играат по два тенесери, секој меч се брои два пати, па затоа вкупниот број мечеви мора да е парен. Конечно, бидејќи 85 не е парен број, заклучуваме дека не е можно во некој момент секој учесник на турнирот да има одиграно по 5 меча.

49. Јанко реди на полица 3 книги за македонски јазик, 3 книги за математика и 2 книги за биологија, така што книгите за ист предмет ќе бидат една до друга. На колку начини Јанко може да ги нареди овие книги?

Решение. Книгите по македонски јазик може да се распоредат на $3\cdot 2\cdot 1=6$ начина, книгите по математика исто така на $3\cdot 2\cdot 1=6$, а книгите по биологија на $2\cdot 1=2$. Сега, бидејќи предметите можеме да ги распоредиме на $3\cdot 2\cdot 1=6$ начина, добиваме дека вкупно имаме $6\cdot 6\cdot 6\cdot 2=432$ можни распореди.

50. Определи го бројот на четирицифрените броеви кои се деливи со 5, кај кои:
    а) цифрите може да се повторуваат,
    б) сите цифри се различни.
    Решение. а) Еден број е делив со 5 ако цифрата на единиците е 0 или 5, што значи дека за цифрата на единиците имаме 2 можности. Бидејќи цифрите во записот може да се повторуваат за цифрата на илјадитите имаме 9 можности, за цифрата на стотките имаме 10 можности и за цифрата на десетките имаме 10 можности. Според тоа, има $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1800$ броеви со саканите својства.
    б) Ако сите цифри се различни, имаме два случаја, и тоа: 1) Цифрата на единиците е 0 и такви броеви има $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 504$; 2) Цифрата на единиците е 5 и такви броеви има $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 448$. Конечно, имаме $504 + 448 = 952$ броја со саканите својства.

51. Определи го бројот на природните четирицифрени броеви чиј производ на цифри не е поголем од 4?
    Решение. Производот на цифрите на овие броеви може да биде 0, 1 , 2, 3 или 4.
    Ако производот на цифрите е 0, тогаш барем една од цифрите на овој број мора да е 0. Бидејќи имаме 9000 четирицифрени броеви, а четирицифрени броеви кои во својот запис не ја содржат цифрата 0 се $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$, добиваме дека четирицифрени броеви кои во својот запис имаат барем една цифра 0 се $9000 - 6561 = 2439$.
    Производот на цифрите е 1 ако сите цифри се 1, па имаме само еден таков четирицифрен број.
    Производот на цифрите е 2 ако една цифра е 2, а преостанатите се 1, па имаме четири такви броеви: 2111, 1211, 1121 и 1112.
    Производот на цифрите е 3 ако една цифра е 3, а преостанатите се 1, па имаме четири такви броеви: 3111, 1311, 1131 и 1113.
    Производот на цифрите е 4 ако една цифрат е 3, а преостанатите се 1, па имаме четири такви броеви: 4111, 1411, 1141 и 1114, или ако две цифри се 2 и две цифреи се 1, па имаме 6 такви броеви: 1122, 1212, 1221, 2112, 2121 и 2211.
    Според тоа, имаме $2439 + 1 + 4 + 4 + 4 + 6 = 2458$ броеви со саканите својства.

52. Определи го бројот на седумцифрените броеви кај кои барем две цифри се еднакви.

Решение. Имаме вкупно 9000000 седумцифрени броеви. Притоа бројот на седумцифрените броеви кај кои сите цифри се различни е $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 544320$. Значи, бараниот број броеви е

$$9000000 - 544320 = 8455680.$$

53. Определи го бројот на деветцифрените броеви кај кои барем две цифри се еднакви.

Решение. Имаме вкупно 900000000 деветцифрени броеви. Понатаму, деветцифрени броеви кај кои сите цифри се различни има

$$9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 3265920.$$

Според тоа, има $900000000 - 3265920 = 896734080$ деветцифрени броеви кај кои барем две цифри се еднакви.

54. Определи го бројот на десетцифрените природни броеви кои се запишани со различни цифри и кои се деливи со 9?

Решение. Бидејќи $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$ и $9 \mid 45$ заклучуваме дека сите десетцифрени броеви запишани со различни цифри се деливи со 9. Бидејќи постојат $10!$ низи (броеви) кои може да се формираат од цифрите од 0 до 9, за да го добиеме бараниот број броеви треба да го одземеме бројот на броевите кои почнуваат со цифрата 0, а нив ги има $9!$. Според тоа, имаме

$$10! - 9! = 10\cdot 9! - 9! = 9\cdot 9! = 3265920$$

десетцифрени броеви кои се деливи со 9 и чии цифри се различни.

55. Колку има петцифрени броеви во чиј запис не се содржи цифрата 0 и чиј збир на цифри е поголем од нивниот производ?

Решение. Ако во записот на бројот нема ниту една единица, тогаш најмал производ на цифрите има бројот 22222 и тогаш

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 32 > 10 = 2+2+2+2+2,$$

т.е. производот на цифрите е поголем од нивниот збир. Збирот на цифрите на петцифрен број може да е најмногу $9+9+9+9+9 = 45$. Ако на бројот 22222 една цифра зголемиме за 1, тогаш производот на цифрите ќе биде $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3 = 48$, што е повеќе од најголемиот можен збир. Од пртходните разгледувања следува дека во записот на бројот мора да има барем една цифра 1.

Нека во записот на бројот има точно една цифра 1. Тогаш најмалиот

производ на цифрите се добива кога имаме четири цифри 2 и една цифра 1. Во овој случај производот на цифрите е 16, а збирот е 9, па оваа можност отпаѓа. Со секое зголемување на некоја двојка за 1, збирот се зголемува за 1, а производот за повеќе од 1, па затоа бараните броеви имаат во својот запис повеќе од една цифра 1.

Нека во записот на бројот има точно две цифри 1. Тогаш најмалиот производ на цифрите се добива кога имаме три цифри 2 и две цифри 1. Во овој случај производот на цифрите е 8, а збирот е 8, па оваа можност отпаѓа. Со секое зголемување на некоја двојка за 1, збирот се зголемува за 1, а производот за повеќе од 1, па затоа бараните броеви имаат во својот запис повеќе од две цифри 1.

Во следната табела се разгледани случаите во кои има најмалку три цифри еднакви на 1.

Број цифри 1	Бараниот број	Збир поголем од производ	Број броеви
5	11111	ДА (5>1)	1
4	21111, 12111, 11211, 11121, 11112	ДА (6>2)	5
	31111, 13111, 11311, 11131, 11113	ДА (7>3)	5
	41111, 14111, 11411, 11141, 11114	ДА (8>4)	5
	51111, 15111, 11511, 11151, 11115	ДА (9>5)	5
	61111, 16111, 11611, 11161, 11116	ДА (10>6)	5
	71111, 17111, 11711, 11171, 11117	ДА (11>7)	5
	81111, 18111, 11811, 11181, 11118	ДА (12>8)	5
	91111, 19111, 11911, 11191, 11119	ДА (13>9)	5
3	22111, 21211, 21121, 21112, 12211, 12121, 12112, 11221, 11212, 11122	ДА (7>4)	10
	32111, 31211, 31121, 31112, 13211, 13121, 13112, 11321, 11312, 11132, 23111, 21311, 21131, 21113, 12311, 12131, 12113, 11231, 11213, 11123	ДА (8>6)	20
	42111, 41211, 41121, 41112, 14211, 14121, 14112, 11421, 11412, 11142, 24111, 21411, 21141, 21114, 12411, 12141, 12114, 11241, 11214, 11124	ДА (9>8)	20

Според тоа, бараниот број броеви е: $1+40+10+20+20=91$.

56. Во правоаголен координатен систем е даден правоаголник $ABCD$:

$$A(-100,-50),\ B(100,-50),\ C(100,50),\ D(-100,50).$$

Определи го бројот на точките $T(m,n)$ кои припаѓаат во правоаголникот $ABCD$, а за чии координати m n важи $20m+24n=2024$, каде $m,n\in\mathbb{Z}$.

Решение. Равенката $20m+24n=2024$ ја делиме со 4 и добиваме $5m+6n=506$. Според тоа, 5 е делител на $506-6n=5\cdot(101-n)+n-1$, па затоа 5 е делител на $n-1$. Значи, постои цел број k таков што $n=5k+1$. Понатаму, со замена во $5m+6n=506$ ја добиваме равенката $m=100-6k$. Бидејќи точката $T(m,n)$ мора да припаѓа на правоаголникот $ABCD$, за неговите кординати важи

$$-100\le m\le 100 \text{ и } -50\le n\le 50.$$

Според тоа,

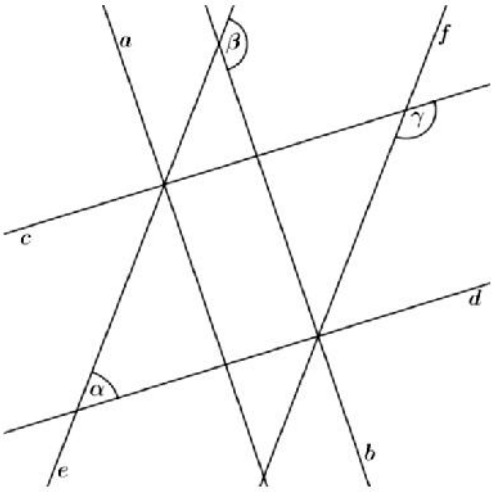
$$-100\le 100-6k\le 100 \text{ и } -50\le 5k+1\le 50.$$

Од првата неравенка добиваме $0\le 6k\le 200$, односно $0\le k\le 33\frac{1}{3}$. Од втората неравенка добиваме $-51\le 5k\le 49$, односно $-10\frac{1}{5}\le k\le 9\frac{4}{5}$. Сега, од неравенките $0\le k\le 33\frac{1}{3}$ и $-10\frac{1}{5}\le k\le 9\frac{4}{5}$ следува $0\le k\le 9$, што значи дека постојат 10 точки кои ги задоволуваат условите на задачата.

5. ГЕОМЕТРИЈА

5.1. АГЛИ ВО ТРИАГОЛНИК И ЧЕТИРИАГОЛНИК

1. На цртежот десно се означени правите a,b,c,d,e и f, како и аглите ~, и ¥. За дадените прави важи $a \| b$, $c \| d$, $e \| f$ и $a \perp d$. Ако мерниот број на аголот ~ е $50^\circ 24'$, определи ги мерните броеви на аглите и ¥.

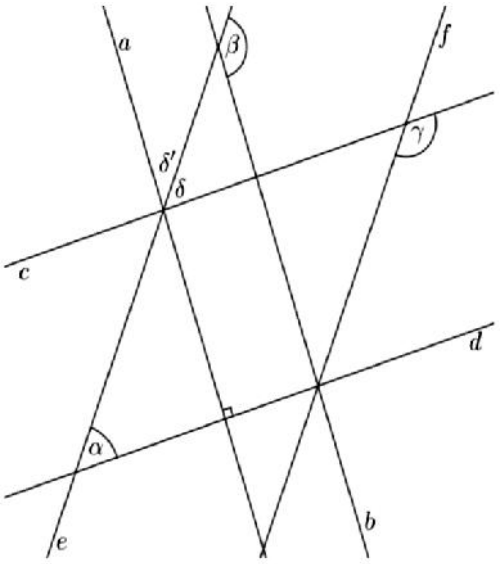


Решение. Од $c \| d$ и $e \| f$ следува дека ~ и ¥ се агли со паралелни краци. Понатаму, аголот ~ е остар, а аголот ¥ е тап, па затоа тие се суплементни, односно важи $\sim + ¥ = 180^\circ$. Оттука следува

$$¥ = 180^\circ - 50^\circ 24' = 129^\circ 36'.$$

Да ги означиме помошните агли ¢ и ¢' како на цртежот десно. Имаме $\sim = ¢$ како остри агли на трансферзалата на паралелните прави c и d. Значи,

$$¢ = \sim = 50^\circ 24'.$$



Од $a \perp d$ и $c \| d$ следува дека $a \perp c$, па затоа важи $¢ + ¢ = 90^\circ$. Според тоа,

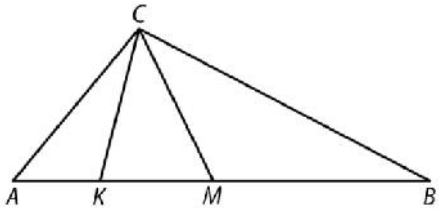
$$¢\,' = 90^\circ - 50^\circ 24' = 39^\circ 36'.$$

Бидејќи $¢\,'$ и се остар и тап агол на трансферзалата на паралелните прави a и b, тие се суплементни, односно $¢\,' + = 180^\circ$. Значи,

$$= 180^\circ - 39^\circ 36' = 140^\circ 24'.$$

2. На страната AB на триаголникот ABC се определени точки M и K такви што $\overline{AM} = \overline{AC}$ и $\overline{BK} = \overline{BC}$. Ако триаголникот CMK е рамнокрак со агол 30° при врвот C определи ги аглите на триаголникот ABC.

Решение. Триаголникот KMC е рамнокрак, па затоа $\measuredangle CMK = \measuredangle CKM = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$. Триаголникот AMC е рамнокрак, па затоа $\measuredangle ACM = \measuredangle AMC = \measuredangle KMC = 75^\circ$.

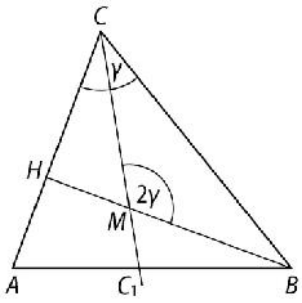


Според тоа, $\measuredangle BAC = \measuredangle MAC = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$. На ист начин се добива дека $\measuredangle ABC = 30^\circ$. Конечно, $\measuredangle BCA = 120^\circ$.

3. Висината BH и симетралата на $\measuredangle ACB$ на триаголникот ABC се сечат во точката M. Ако $\measuredangle BMC$ е два пати поголем од $\measuredangle ACB$ пресметај го $\measuredangle ACB$.

Решение. Да означиме $\measuredangle ACB = ¥$. Тогаш од условот на задачата следува дека $\measuredangle BMC = 2¥$ и $\measuredangle MCA = \frac{¥}{2}$. Но $\measuredangle BMC$ е надворешен е за триаголникот MCH, па затоа $\measuredangle BMC = 90^\circ + \frac{¥}{2}$. Според тоа,

$$90^\circ + \frac{¥}{2} = 2¥, \text{ т.е. } \measuredangle ACB = ¥ = 60^\circ.$$



4. Во триаголникот ABC симетралите на $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle ACB$ се сечат под агол од 124°. Определи го $\measuredangle ACB$.

Решение. Да означиме $\measuredangle BAC = \sim$, $\measuredangle ACB =$ и $\measuredangle ACB = ¥$. Нека симетралите на аглите се сечат во точката O (нацртај цртеж). Од

триаголникот AOB следува $\frac{\sim}{2}+\frac{}{2}+124^\circ=180^\circ$, па затоа $\frac{\sim}{2}+\frac{}{2}=56^\circ$, односно $\sim+\ =2\cdot 56^\circ=112^\circ$. Конечно,

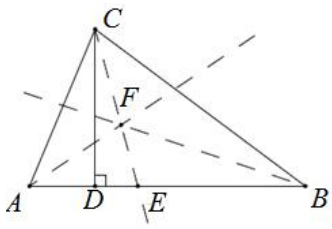
$$¥=180^\circ-(\sim+\ )=180^\circ-112^\circ=68^\circ.$$

5. Даден е триаголник ABC, $\measuredangle BAC=\sim$, $\measuredangle ABC=\ $, $\measuredangle ACB=¥$. Симетралите на аглите $\sim$ и се сечат под агол од 115°, а симетралите на аглите и ¥ се сечат под агол од 125°. Определи ги аглите на триаголникот ABC.

Решение. Нека симетралите на аглите $\sim$ и се сечат во точката O. Тогаш од триаголникот AOB следува дека $\frac{\sim}{2}+\frac{}{2}+115^\circ=180^\circ$, а од триаголникот BOC дека $\frac{¥}{2}+\frac{}{2}+125^\circ=180^\circ$. Од последните две равенки следува $\sim+\ =130^\circ$ и $¥+\ =110^\circ$. Ги собираме овие две равенки и бидејќи $\sim+\ +¥=180^\circ$, добиваме $=60^\circ$. Сега лесно се добива дека $\sim=70^\circ$ и $¥=50^\circ$.

6. Во триаголникот ABC симетралите на аглите во темињата A и B се сечат под агол 140°. Висината и симетралата повлечени од аголот во темето C формираат агол од 20°. Одреди ги аглите во триаголникот.

Решение. Од триаголникот ABF имаме дека $\frac{\sim}{2}+\frac{}{2}+140^\circ=180^\circ$, т.е. $\frac{\sim}{2}+\frac{}{2}=40^\circ$. Од тука $\sim+\ =80^\circ$, па $¥=100^\circ$. Бидејќи $\measuredangle ECA=\frac{¥}{2}=50^\circ$ и аголот што го формираат симетралата и висината повлечени од темето C следува дека $\measuredangle DCA=\measuredangle ECA-\measuredangle ECD=30^\circ$. Од правоаголниот триаголник ADC се добива дека $\sim=180^\circ-(90^\circ+30^\circ)=60^\circ$. Збирот на аглите во еден триаголник е 180° од каде следува дека



$$=180^\circ-(\sim+¥)=20^\circ.$$

7. Во внатрешност на триаголникот ABC е дадена точка P. Докажи де-

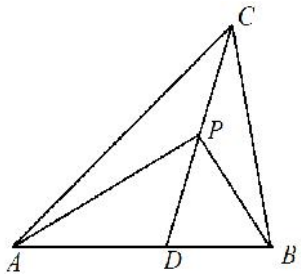
ка $\measuredangle ACB < \measuredangle APB$.

Решение. Нека D е пресекот на правата CP и страната AB. Бидејќи $\measuredangle APD$ е надворешен за триаголникот APC, добиваме

$$\measuredangle APD = \measuredangle ACP + \measuredangle CAP$$

и затоа $\measuredangle ACP < \measuredangle APD$. Слично, од триаголникот BPC добиваме $\measuredangle BCP < \measuredangle BPD$. Според тоа,

$$\begin{aligned}\measuredangle ACB &= \measuredangle ACP + \measuredangle PCB \\ &< \measuredangle APD + \measuredangle DPB = \measuredangle APB.\end{aligned}$$

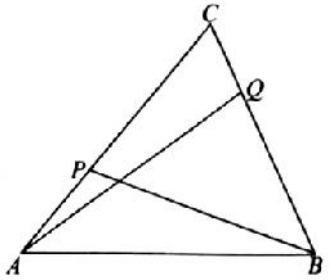


8. На страната AC на триаголникот ABC е дадена точка P, а на страната BC точка Q. Докажи дека $\measuredangle CAQ + \measuredangle CBP < \measuredangle APB + \measuredangle BQA$.

Решение. Бидејќи $\measuredangle BQA$ е надворешен агол за триаголникот AQC важи

$$\measuredangle BQA = \measuredangle CAQ + \measuredangle ACQ,$$

па затоа $\measuredangle BQA > \measuredangle CAQ$. Аналогно се докажува дека $\measuredangle APB > \measuredangle CBP$. Конечно, ако ги собереме последните неравенства добиваме $\measuredangle CAQ + \measuredangle CBP < \measuredangle APB + \measuredangle BQA$, што и требаше да се докаже.



9. Даден е рамнокрак триаголник ABC, при што $\overline{AC} = \overline{BC}$. На кракот AC се избрани точки M и N такви да $\measuredangle MBA = \measuredangle CBN$ и $\overline{MN} = \overline{BM}$, при што точката M е меѓу точките A и N. Определи го $\measuredangle NBA$.

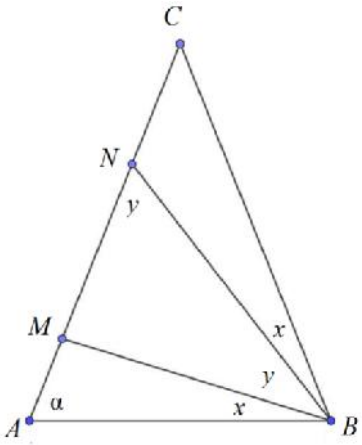
Решение. Нека $\measuredangle BAC = \measuredangle CBA = \sim$, $\measuredangle MBA = \measuredangle CBN = x$ и $\measuredangle NBM = y$. Тогаш $\sim = 2x + y$. Триаголникот BNM е рамнокрак, па затоа

$$\measuredangle NBM = \measuredangle MNB = y.$$

Понатаму, аглите на триаголникот ABN се $2x + y, x + y$ и y, па затоа

$$2x + y + x + y + y = 180^\circ,$$

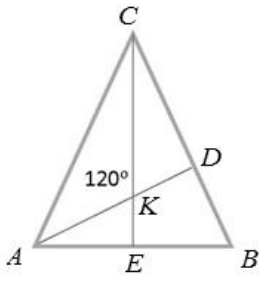
од каде добиваме $x + y = 60^\circ$.



Конечно, $\measuredangle NBA = x + y = 60^\circ$.

10. Во остроаголниот триаголник ABC разликата на внатрешните агли во темињата A и C е 40°. Висините повлечени од темињата A и C се сечат во точката K и важи $\measuredangle AKC = 120^\circ$. Определи ги мерните броеви на внатрешните агли на триаголникот ABC.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за аглите на триаголникот ABC. Имаме $\sim - ¥ = 40^\circ$ и $\measuredangle AKC = 120^\circ$. Од триаголникот ACE имаме $\measuredangle ACE = 90^\circ - \sim$, од триаголникот DAC имаме $\measuredangle DAC = 90^\circ - ¥$ и како $\measuredangle ACE + \measuredangle DAC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ добиваме $90^\circ - \sim + 90^\circ - ¥ = 60^\circ$, т.е. $\sim + ¥ = 120^\circ$.

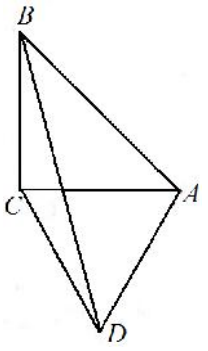


Значи, $= 180^\circ - (\sim + ¥) = 60^\circ$. Решавајќи го системот $\sim - ¥ = 40^\circ$ и $\sim + ¥ = 120^\circ$, добиваме $\sim = 120^\circ$ и $¥ = 40^\circ$.

11. Над едната катета на рамнокракиот правоаголен триаголник од надворешната страна е конструиран рамностран триаголник. Определи ги аглите на триаголникот кој е определен со хипотенузата на правоаголниот триаголник и темето на рамностраниот триаголник кое е надвор од правоаголниот триаголник.

Решение. При ознаки како на цртежот десно имаме $\overline{BC} = \overline{CA} = \overline{CD}$, што значи дека триаголниот BCD е рамнокрак. Понатаму,

$$\measuredangle BCD = \measuredangle BCD + \measuredangle ACD = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ,$$



па затоа $\measuredangle CBD = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$. Сега

$\measuredangle DBA = \measuredangle CBA - \measuredangle CBD = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$,

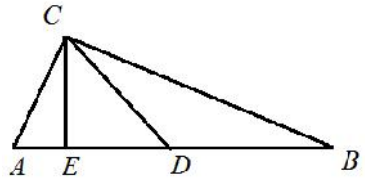
$\measuredangle DAB = \measuredangle DAC + \measuredangle CAB = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$ и

$\measuredangle BDA = \measuredangle CDA - \measuredangle CDB = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$.

12. Едниот агол на правоаголниот триаголник има 33°. Определи го аголот кој го формираат висината и тежишната линија кои соодветству-

ваат на хипотенузата.

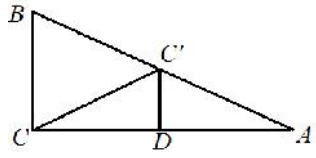
Решение. Нека $=33^\circ$. Триаголникот BCD е рамнокрак, па затоа $\measuredangle DCB=33^\circ$. Триаголникот BCE е правоаголен, па затоа $\measuredangle ECB=57^\circ$. Конечно,



$$\measuredangle ECD=\measuredangle ECB-\measuredangle DCB=24^\circ.$$

13. а) Докажи дека во секој правоаголен триаголник тежишната линија која соодветствува на хипотенузата е еднаква на половина од хипотенузата.
б) Определи ги аглите на правоаголен триаголник кај кој едната катета е еднаква на половина од хипотенузата.

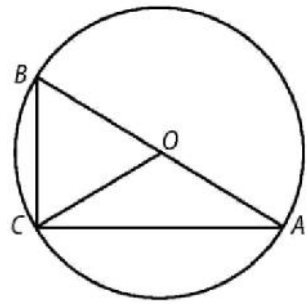
Решение. а) Нека $C'D\perp AC$. Бидејќи $\overline{AC'}=\overline{BC'}$, добиваме дека $C'D$ е средна линија на триаголникот ABC, па затоа $\overline{CD}=\overline{AD}$. Сега, од $\overline{C'D}=\overline{C'D}$,



$\overline{CD}=\overline{AD}$ и $\measuredangle CDC'=\measuredangle ADC'=90^\circ$ следува дека $\triangle CC'D\cong AC'D$. Од оваа складност следува $\overline{CC'}=\overline{AC'}=\overline{BC'}$, што и требаше да се докаже.
б) Имаме $\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{BC'}=\overline{CC'}$. Значи, триаголникот BCC' е рамностран, па затоа $\measuredangle CBA=\measuredangle CBC'=60^\circ$ и $\measuredangle CAB=30^\circ$.

14. Нека O е центарот на кружницата опишана околу правоаголниот триаголник ABC со прав агол во темето C. Ако $\measuredangle AOC-\measuredangle BOC=30^\circ$ пресметрај ги аглите на триаголникот ABC.

Решение. Нека $\measuredangle CAB=\sim$ и $\measuredangle CBA=$. Триаголниците CAO и BCO се рамнокраки со основи CA и BC, соодветно, па затоа

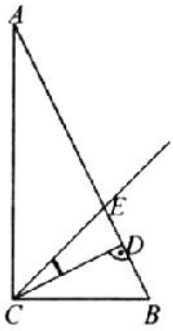


$$\begin{aligned}30^\circ&=\measuredangle AOC-\measuredangle BOC\\&=180^\circ-\sim-\sim-(180^\circ-\ -\ )\\&=2(\ -\sim),\end{aligned}$$

т.е. $-\sim=15^\circ$. Но, $+\sim=90^\circ$, па од последните две равенства

следува $\sim = 37^\circ 30'$ и $= 52^\circ 30'$.

15. Аголот меѓу висината повлечена кон хипотенузата е симетралата на правиот агол во правоаголниот триаголник е еднаков на 11°. Определи ги мерките на аглите на овој триаголник.

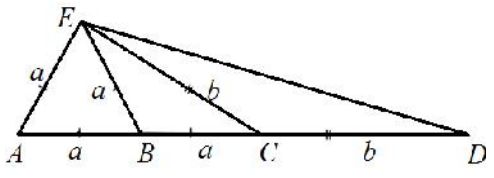


Решение. При ознаките како на цртежот десно имаме $\measuredangle ECD = 11^\circ$, па затоа

$$\measuredangle DCB = \measuredangle BCE - \measuredangle ECD = 45^\circ - 11^\circ = 34^\circ.$$

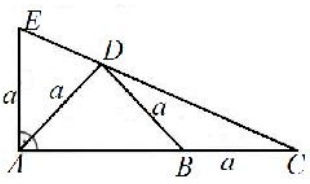
Триаголникот BCD е правоаголен, па затоа важи $\measuredangle CBD = \quad = 56^\circ$. Според тоа, $\measuredangle CAB = \sim = 34^\circ$. Конечно, аглите на дадениот триаголник се еднакви на $34^\circ, 56^\circ$ и 90°.

16. Пресметај ја мерката на $\measuredangle ADE$ прикажан на цртежот десно.



Решение. Аглите на триаголникот ABE се по 60°. Понатаму, $\measuredangle EBC = 120^\circ$, бидејќи е суплементен на $\measuredangle ABE$. Сега, триаголникот BCE е рамнокрак, па аглите при основата CE се еднакви на $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. Зачи, $\measuredangle ECD = 150^\circ$, како суплементен агол на $\measuredangle BCE$. Конечно, триаголникот ECD е рамнокрак, па затоа $\measuredangle ADE = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$.

17. Пресметај ја мерката на $\measuredangle ACE$ прикажан на цртежот десно.



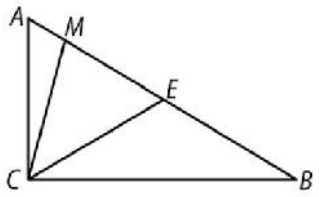
Решение. Да означиме $\measuredangle ACE = \sim$. Триаголникот BCD е рамнокрак, па затоа $\measuredangle CDB = \measuredangle BCD = \sim$. Понатаму, $\measuredangle ABD$ е надворешен агол за триаголникот BCD, па затоа $\measuredangle ABD = 2\sim$. Триаголникот ABD е рамнокрак, па затоа $\measuredangle DAB = 2\sim$. Сега, $\measuredangle ADE$ е надвореш агол за триаголникот ACD и затоа важи

$$\measuredangle ADE = \measuredangle DAC + \measuredangle ACD = 3\sim.$$

Триаголникот ADE е рамнокрак, што значи $\measuredangle DEA = 3\sim$. Според тоа, острите агли на триаголникот ACE се еднакви на $\sim$ и $3\sim$, па затоа $3\sim + \sim = 90^\circ$, од каде добиваме $\sim = \frac{90^\circ}{4}$, т.е. $\sim = 22^\circ 30'$

18. На хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC се определени точки E и M такви што $\overline{AE} = \overline{AC}$ и $\overline{BM} = \overline{BC}$. Докажи дека $\measuredangle MCE = 45^\circ$.

Решение. Нека $\overline{AC} < \overline{BC}$. Тогаш на хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC го имаме распоредот $B - M - E - A$ (цртеж десно). Триаголниците ACE и BMC се рамнокраки. Имаме



$$\measuredangle CEM = \measuredangle AEC = \frac{180^\circ - \measuredangle CAE}{2} = \frac{180^\circ - \measuredangle CAB}{2} \text{ и}$$

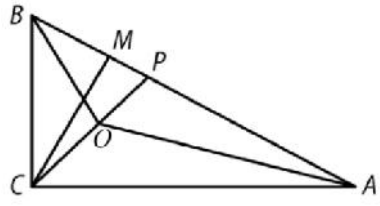
$$\measuredangle CMB = \measuredangle BCM = \frac{180^\circ - \measuredangle MBC}{2} = \frac{180^\circ - \measuredangle ABC}{2} .$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} \measuredangle MCE &= 180^\circ - \measuredangle CMB - \measuredangle CEA \\ &= 180^\circ - \frac{180^\circ - \measuredangle ABC}{2} - \frac{180^\circ - \measuredangle BAC}{2} \\ &= \frac{\measuredangle ABC + \measuredangle BAC}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ . \end{aligned}$$

19. Определи ги острите агли на правоаголниот триаголник ABC ако нормалата од темето на правиот агол C повлечена кон хипотенузата и симетралата на $\measuredangle ACB$ формираат агол кој е еднаков на $\frac{1}{9}$ од тапиот агол меѓу симетралите на острите али на триаголникот ABC .

Решение. Нека нормалата од темето C на правиот агол повлечена кон хипотенузата и симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сечат хипотенузата соодветно во точките M и P , соодветно. Нека симетралите на острите агли се сечат во точката O . Збирот на острите агли на правоаголниот триаголник е 90° , па збирот на нивните половинки е 45° . Според тоа,



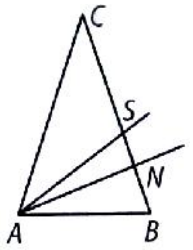
тапиот агол на триаголникот ABO е еднаков на 135°, па затоа $\measuredangle PCM = 135^\circ : 9 = 15^\circ$. Од правоаголниот триаголник CPM следува дека $\measuredangle CPM = 75^\circ$. Понатаму, $\measuredangle CPM$ е надворешен агол за триаголникот CAP, па затоа $\measuredangle CAB = \measuredangle CAP = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$. Значи, острите агли на триаголникот ABC се еднакви на 30° и 60°.

20. Во рамнокрак триаголник ABC симетралите на надворешните агли на основата се сечат по агол од 75°. Што е поголемо, основата или кракот на овој триаголник?

Решение. Нека S е пресечната точка на симетралите на надворешните агли на триаголникот ABC. За триаголникот ABS важи $\frac{\tilde{}_1}{2} + \frac{\tilde{}_1}{2} + 75^\circ = 180^\circ$ од каде добиваме $\tilde{}_1 = 105^\circ$. Но, $\tilde{}_1 + \tilde{} = 180^\circ$, па затоа $\tilde{} = 75^\circ$. Сега, од $2\tilde{} + ¥ = 180^\circ$, добиваме $¥ = 30^\circ$. Кнечно, бидејќи $\tilde{} > ¥$, а во секој триаголник наспроти поголем агол лежи поголема страна заклучуваме дека $b > a$.

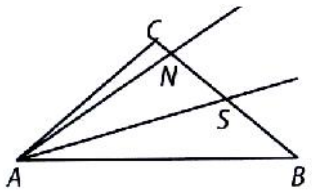
21. Симетралата на $\measuredangle BAC$ на рамнокракиот триаголник ABC, со основа AB, гради со висината повлечена од темето A агол еднаков на 12°. Определи ги аглите на овој триаголник.

Решение. Нека симетралата на $\measuredangle BAC = \tilde{}$ и висината повлечена од темето A ја сечат страната BC редоследно во точките S и N. Според тоа, можни се различни положби на точките S и N во однос на точќата B. Нека точката N се меѓу точките B и S (цртеж десно). Тогаш



$$\measuredangle NAS = \measuredangle BAS - \measuredangle BAN = \frac{\tilde{}}{2} - (90^\circ - \tilde{}) = \frac{3\tilde{}}{2} - 90^\circ$$

и затоа $\frac{3\tilde{}}{2} - 90^\circ = 12^\circ$, па затоа $\tilde{} = 68^\circ$.



Нека точката S е меѓу точките B и N (цртеж лево). Во овој случај имаме

$$\begin{aligned}\measuredangle SAN &= \measuredangle BAN - \measuredangle BAS \\ &= (90^\circ - \tilde{}) - \frac{\tilde{}}{2} \\ &= 90^\circ - \frac{3\tilde{}}{2},\end{aligned}$$

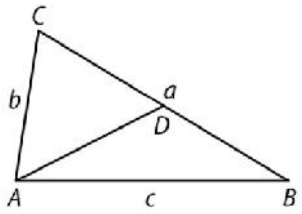
па затоа $90^\circ - \frac{3\sim}{2} = 12^\circ$, односно $\sim = 52^\circ$.

Конечно, аглите на триаголникот се $68^\circ, 68^\circ, 44^\circ$ или $52^\circ, 52^\circ, 76^\circ$.

22. Периметарот на триаголникот ABC е еднаков на $72\,cm$. Ако точката D е средина на страната BC, периметарот на триаголникот ABD е $54\,cm$, а периметарот на триаголникот ADC е $48\,cm$. Спореди ги аглите на триаголникот ABC ако збирот на страните b и c е еднаков на $42\,cm$.

Решение. Нека должините на страните на триаголникот ABC се a, b, c (цртеж десно). Тогаш

$$a = 72 - (b + c) = 72 - 42 = 30\,cm.$$



Ако должината на отсечката AD е x, тогаш

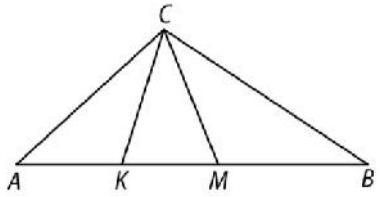
$$c + \frac{a}{2} + x = 54\,cm \text{ и } b + \frac{a}{2} + x = 48\,cm.$$

Сроред тоа, $c - b = 6\,cm$. Понатаму, $b + c = 42\,cm$, па од последните две равенства наоѓаме $c = 24\,cm$ и $b = 18\,cm$. Значи, $a > c > b$, па затоа $\sim > ¥ >$.

23. Во триаголникот ABC важи $\angle BAC = 44^\circ$ и $\angle ABC = 36^\circ$. На страната AB се дадени точки M и K такви што $\overline{AM} = \overline{AC}$ и $\overline{BK} = \overline{BC}$. Спореди ги страните на триаголникот CMK.

Решение. Триаголникот AMC е рамнокрак, па затоа

$$\angle AMC = \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = 68^\circ.$$



На ист начин, од рамнокракиот триаголник BCD следува

$$\angle BKC = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ.$$

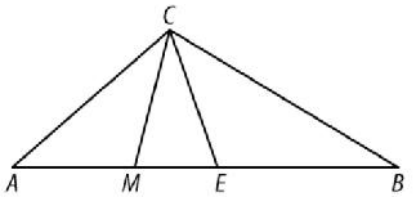
Третиот агол на триаголникот CMK е

$$\angle BKC = 180^\circ - \angle KMC - \angle MKC = 180^\circ - 68^\circ - 72^\circ = 40^\circ.$$

Сега, од $\angle MKC > \angle KMC > \angle KCM$ следува дека за страните на триаголникот CMK важи $\overline{MC} > \overline{KC} > \overline{KM}$.

24. Даден е триаголник ABC со $\angle BAC = 40^\circ$ и $\angle ABC = 30^\circ$. На страната AB се определени точки E и M такви што $\overline{AE} = \overline{AC}$ и $\overline{BM} = \overline{BC}$. Спореди ги сраните на триаголникот MEC.

Решение. Со оглед на односот на страните на триаголникот точката M е меѓу точките A и E. Понатаму, триаголниците AEC и BMC се рамнокраки. Оттука добиваме

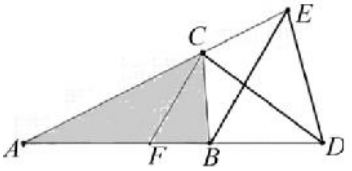


$$\angle BCM = \angle BMC = 75^\circ \text{ , } \angle ACE = \angle AEC = 70^\circ \text{ и } \angle ACB = 110^\circ .$$

Според тоа, $\angle MCE = 70^\circ + 75^\circ - 110^\circ = 35$. Конечно, бидејќи наспроти поголем агол во триаголник лежи поголема страна, добиваме дека $\overline{CE} > \overline{CM} > \overline{ME}$.

25. Во триаголник ABC аголот во темето C, т.е. $\angle ACB$ е 48°. Нормалата на симетралата на $\angle ACB$ која минува низ темето C ја сече правата AB во точка D, така што точката B лежи меѓу точките A и D и $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{BC}$. Пресметај ги големините на аглите во триаголникот ABC.

Решение. Правата CD која е нормала на симетралата на внатрешниот $\angle ACB$ е истовремено и симетрала на надворешниот агол во темето C. Ја продолжуваме страната AC преку темето C и на неа ја означуваме точката E така што да важи $\overline{BC} = \overline{CE}$. Триаголниците BCD и CDE се складни според признакот за складност САС. Од нивната складност следува $\angle CBD = \angle CED$, а $\angle CBD = \sim + ¥$. Бидејќи



$$\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AD}$$

следува дека триаголникот ADE е рамнокрак со агли

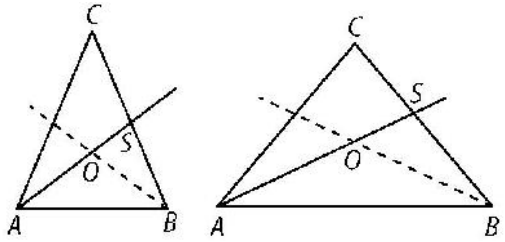
$$\angle ADE = \angle AED = \sim + ¥ .$$

За триаголникот ADE важи $\sim + 2(\sim + ¥) = 180^\circ$ и како $¥ = 48^\circ$ добиваме $\sim = 28^\circ$ и $= 104^\circ$.

26. Симетралата на $\angle BAC$ на основата AB на рамнокракиот триаголник

ABC формира со спротивната страна агол од 52°. Пресметај го аголот меѓу симетралите на аглите на основата на овој триаголник.

Решение. Нека симетралата на $\angle BAC = \sim$ ја сече спротвната страна во точката S. Притоа аголот од 52° може да биде $\angle BSA$ или $\angle CSA$ (види ги цртежите). Во првиот случај имаме



$$\angle BSA = 180^\circ - \angle BAS - \angle SBA = 180^\circ - \frac{\sim}{2} - \sim = 52^\circ, \text{ т.е. } \sim = 85^\circ 20'.$$

Бараниот агол меѓу симетралите на аглите при основата е

$$\angle AOB = 180^\circ - \sim = 94^\circ 40'.$$

Во вториот случај $\angle CSA$ е надворешен агол за триаголникот ABS, па затоа

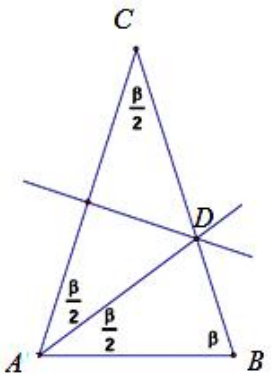
$$\angle CSA = \frac{\sim}{2} + \sim = 52^\circ, \text{ т.е. } \sim = 34^\circ 40'.$$

Бараниот агол меѓу симетралите на аглите при основата е

$$\angle AOB = 180^\circ - \sim = 145^\circ 20'.$$

27. Во рамнокрак $\triangle ABC$ симетралата на кракот AC и симетралата на $\angle BAC$ се сечат во точка D која припаѓа на кракот BC. Определи ја големината на $\angle CDA$.

Решение. Од условот на задачата следува дека $\angle BAC = \angle ABC =$. Понатаму, AD е симетрала на $\angle BAC$, па затоа $\angle BAD = \angle DAC = \frac{}{2}$. Но, точката D припаѓа на симетралата на кракот AC, па затоа $\overline{AD} = \overline{CD}$, т.е. триаголникот CAD е рамнокрак, со основа AC. Значи, $\angle CAD = \angle DAC = \frac{}{2}$. Според тоа, за збирот на аглите на $\triangle ABC$ добиваме



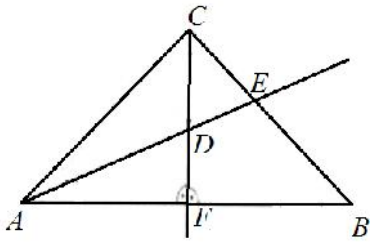
$$+ \quad + \frac{}{2} = 180^\circ, \text{ т.е. } \quad = 72^\circ.$$

Конечно, од $\triangle CAD$ наоѓаме

$$\measuredangle CDA = 180^\circ - 2\cdot\frac{}{2} = 180^\circ - \quad = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ .$$

28. Во рамнокракиот триаголник ABC аголот кој го формираат симетралата на аголот при врвот и симетралата на аголот при основата е пет пати поголем од аголот при основата. Што е поголемо: основата или кракот на овој триаголник?

Решение. Нека ~ е аголот при основата и ¥ е аголот при врвото на рамнокракиот триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$). Од триаголникот ACD следува $5\sim + \frac{\sim+¥}{2} = 180^\circ$, од каде добиваме $11\sim + ¥ = 360^\circ$. Од триаголмникот ACF имаме $\sim + \frac{¥}{2} + 90^\circ = 180^\circ$, т.е. $2\sim + ¥ = 180^\circ$. Според тоа, $11\sim + ¥ - (2\sim + ¥) = 360^\circ - 180^\circ$, т.е. $9\sim = 180^\circ$, од каде добиваме $\sim = 20^\circ$. Значи, $¥ = 180^\circ - 2\cdot 20^\circ = 140^\circ$. Конечно, од $¥ > \sim$ следува $\overline{AB} > \overline{BC}$, т.е. во триаголникот ABC основата е поголема од кракот.



29. Во триаголникот ABC аголот ~ е еднаков на 80°, а висините h_a и h_b се сечат под агол од 126°. Која е најмала, а која е најголема страна на триаголникот ABC?

Решение. Нека висините h_a и h_b се сечат во точката H. Тогаш

$$\measuredangle AHB = 126^\circ \text{ и}$$

$$\measuredangle A'HB = \measuredangle B'HA = 54^\circ .$$

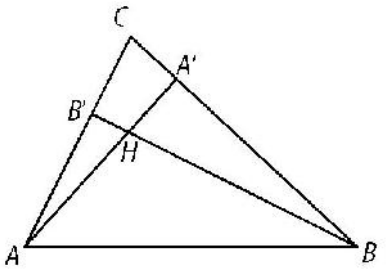
Според тоа, $\measuredangle CAA' = \measuredangle CBB' = 36^\circ$. Значи,

$$¥ = \measuredangle ACB = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ .$$

Но, $\sim = 80^\circ$, па затоа

$$= 180^\circ - (80^\circ + 54^\circ) = 46^\circ .$$

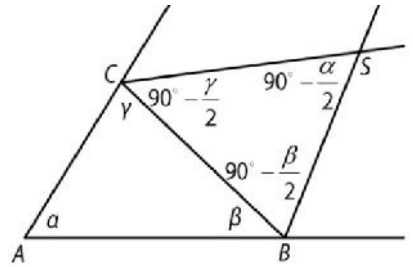
Според тоа, $< ¥ < \sim$, па затоа $b < c < a$. Значи, најмала страна е AC,



а најголема е BC.

30. Во триаголникот ABC аголот кој го градат симетралите на надворешните агли во темињата B и C е еднаков на внатрешниот агол во темето C. Спореди ги должините на страните AB и AC.

Решение. Да ги означиме аглите во темињата A,B,C со $\sim$, $,¥$. Нека S е пресечната точка на симетралите на надворешните агли во темињата B и C. Во триаголникот BCS аглите во темињата B и C се еднакви на $90^\circ - \frac{}{2}$ и $90^\circ - \frac{¥}{2}$, па затоа аголот во темето S е еднаков на $90^\circ - \frac{\sim}{2}$.

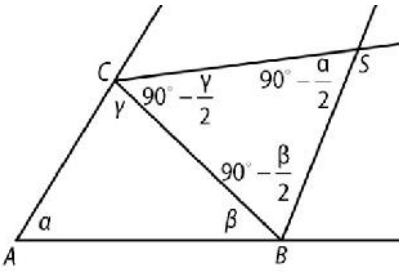


Според условот на задачата $90^\circ - \frac{\sim}{2} = ¥$, па затоа важи $\sim + 2¥ = 180^\circ$.

Но, $\sim + \quad + ¥ = 180^\circ$, па затоа $\quad = ¥$, од каде што следува $\overline{AB} = \overline{AC}$.

31. Во триаголникот ABC аголот кој го формираат симетралите на надворешните агли во темињата B и C е еднаков на внатрешниот агол во темето A. Ако аголот во темето B е за 13° поголем од аголот во темето C, спореди ги должините на страните на триаголникот ABC.

Решение. Аглите во темињата A,B,C да ги означиме со $\sim$, $,¥$., а пресечната точка на симетралите на надворешните агли во темињата B и C да ја означиме со S. Во триаголникот BCS аглите при темињата B и C се еднакви на $90^\circ - \frac{}{2}$ и $90^\circ - \frac{¥}{2}$, па затоа аголот во темето S е еднаков на $90^\circ - \frac{\sim}{2}$.

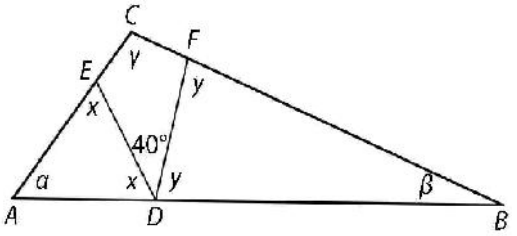


Според условот на задачата $90^\circ - \frac{\sim}{2} = \sim$, од каде добиваме $\sim = 60^\circ$.

Понатаму, од $\quad = ¥ + 13^\circ$ и $\quad + ¥ = 120^\circ$ добиваме $\quad = 66^\circ 30'$ и $¥ = 53^\circ 30'$. Според тоа, $\quad > \sim > ¥$ и затоа $b > a > c$.

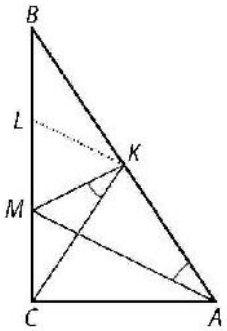
32. На страните AB, AC и BC на триаголникот ABC избрани се редо-следно точките D, E и F така што $\overline{AD} = \overline{AE}$ и $\overline{BD} = \overline{BF}$. Ако $\measuredangle EDF = 40^\circ$, пресметај ја мерката на $\measuredangle ACB$.

Решение. Од $\overline{AD} = \overline{AE}$ и $\overline{BD} = \overline{BF}$ следува дека триаголниците DEA и FDB се рамнокраки. Нека $\measuredangle ADE = x$ и $BDF = y$. Тогаш $x = \frac{180^\circ - \sim}{2}$ и $y = \frac{180^\circ - }{2}$. Бидејќи $x + y = 140^\circ$, добиваме $\frac{180^\circ - \sim}{2} + \frac{180^\circ - }{2} = 140^\circ$, од каде следува $\sim + \ = 80^\circ$. Затоа $¥ = 180^\circ - (\sim + \ ) = 100^\circ$.



33. Нека M е точка на катетата BC на правоаголниот триаголник ABC таква што $\overline{BM} = 2\overline{MC}$. Ако k е средина на хипотенузата AB на овој триаголник, докажи дека $\measuredangle BAM = \measuredangle MKC$.

Решение. Нека L е средината на BM. Тогаш $\overline{BL} = \overline{LM} = \overline{MC}$. Понатаму, KL е средна линија во триаголникот MAB, па затоа $LK \parallel AM$, од каде следува $\measuredangle BAM = \measuredangle BKL$. Според тоа, доволно е да докажеме дека $\measuredangle BKL = \measuredangle MKC$. Бидејќи $\overline{BK} = \overline{KC}$, триаголникот BKC е рамнокрак, па затоа $\measuredangle LBK = \measuredangle MCK$. Понатаму, од $\overline{BL} = \overline{MC}$, $\overline{BK} = \overline{KC}$ и $\measuredangle LBK = \measuredangle MCK$, заради признакот САС следува дека триаголниците LKB и MCK се складни. Затоа $\measuredangle BKL = \measuredangle MKC$.



34. Симетралите на аглите $\sim$ и во триаголникот ABC ги сечат спротивните страни BC и AC под агли 91°, односно 92°. Која е најмала, а која е најголема висина на триаголникот ABC?

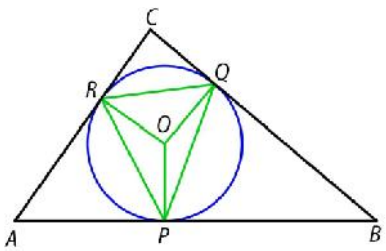
Решение. Нека симетралите на аглите $\sim$ и во триаголникот ABC ги сечат спротивните страни BC и AC соодветно во точките A' и B'

(нацртај цртеж). Според условот на задачата имаме $\angle AA'B = 91^\circ$ или $\angle AA'C = 91^\circ$, односно $\angle BB'A = 92^\circ$ или $\angle BB'C = 92^\circ$. Јасно, постојат четири распореди на овие агли. Нека $\angle AA'B = 91^\circ$ и $\angle BB'A = 92^\circ$. Тогаш од $\triangle AA'B$ следува $\frac{\sim}{2} + \ + 91^\circ = 180^\circ$, а од $\triangle ABB'$ следува $\sim + \frac{}{2} + 92^\circ = 180^\circ$. Од последните две равенства добиваме $\sim = 58^\circ$, $= 60^\circ$, па затоа $¥ = 180^\circ - (58^\circ + 60^\circ) = 92^\circ$. Значи, $\sim < \ < ¥$, од каде следува $a < b < c$. Конечно, од последните неравенства добиваме $h_a > h_b > h_c$.

Останатите три случаи се решаваат аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

35. Впишаната кружница k во триаголникот ABC ги допира неговите страни во точките P, Q, R. Аглите на триаголникот ABC се $\sim$, $,¥$. Определи ги аглите на триаголникот PQR.

Решение. Триаголникот APR е рамнокрак со агол при врвот $\sim$, па затоа $\angle APR = \frac{180^\circ - \sim}{2}$. Слично, триаголникот CRQ е рамнокрак со агол при врвот $\angle CRQ = \frac{180^\circ - ¥}{2}$. Според тоа, $\angle PRQ = 180^\circ - \angle ARP - \angle CRQ = 180^\circ - \frac{180^\circ - \sim}{2} - \frac{180^\circ - ¥}{2} = \frac{¥ + \sim}{2}$.

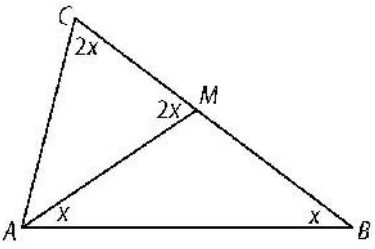


Аналогно наоѓаме $\angle RQP = \frac{+¥}{2}$ и $\angle QRP = \frac{\sim +}{2}$.

36. Во триаголникот ABC аголот $\sim$ е 78°. Точката M е на страната BC таква што триаголниците ABM и AMC се рамнокраки. Определи ги аглите на триаголникот ABC.

Решение. Разликуваме два случаја.

1) Ако $\angle MAB = \angle MBA = x$ како на цртеж десно, тогаш
$$\angle AMC = \angle ACM = 2x.$$
Значи, $\angle CAM = 180^\circ - 4x$, па добиваме



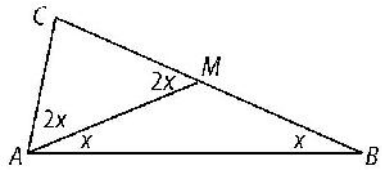
$$\measuredangle CAB = x + 180^\circ - 4x = 78^\circ .$$

Според тоа, $3x = 102^\circ$, од каде следува $x = 34^\circ$. Значи, аглите на триаголникот ABC се $\sim = 78^\circ$, $= 34^\circ, ¥ = 68^\circ$.

2) Ако $\measuredangle MAB = \measuredangle MBA = x$ како на цртеж десно, тогаш

$$\measuredangle AMC = \measuredangle CAM = 2x .$$

Значи, $x + 2x = 78^\circ$. Според тоа, $x = 26^\circ$, од каде следува $\sim = 78^\circ$, $= 26^\circ, ¥ = 76^\circ$.



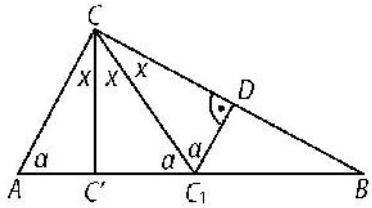
37. Во триаголникот ABC висината CC' и тежишната линија CC_1 го делат $\measuredangle ACB$ на три еднакви агли. Определи ги аглите на овој триаголник.

Решение. Од условот на задачата следува

$$\measuredangle ACC' = \measuredangle C'CC_1 = \measuredangle C_1CB = x .$$

Триаголниците ACC' и C_1CC' се складни, па затоа важи

$\overline{AC} = \overline{CC_1}$ и $\overline{AC'} = \overline{C'C_1} = \frac{1}{2}\overline{BC_1}$.



Нека $C_1D \perp BC$. Тогаш $\triangle CAC' \equiv \triangle CC_1C' \equiv \triangle CC_1D$, бидејќи имаат еднакви агли и $\overline{AC} = \overline{CC_1}$. Значи, $\overline{C_1D} = \overline{C'C_1} = \frac{1}{2}\overline{BC_1}$. Во триаголникот BC_1D кој е правоаголен, катетата C_1D е два пати пократка од хипотенузата, па затоа важи $= \measuredangle C_1BD = 30^\circ$ и $\measuredangle BC_1D = 60^\circ$. Според тоа, $2\sim + 60^\circ = 180^\circ$, од каде добиваме $\sim = 60^\circ$. Значи, аглите на триаголникот ABC се $30^\circ, 60^\circ$ и 90°.

38. Даден е рамностран триаголник ABC и на страната AB произволна точка D. Нека E е точка таква што триаголникот CDE е рамностран и точките D и E се на различни страни од правата $p(B,C)$. Определи го $\measuredangle CBE$.

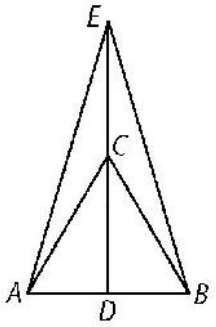
Решение. Имаме $\overline{AC} = \overline{BC}$ (страни на рамностраниот триаголник ABC), $\overline{CD} = \overline{CE}$ (страни на рамностраниот триаголник DEC) и

$\measuredangle ACD = 60^\circ - \measuredangle DCB = \measuredangle BCE$, па од признакот САС следува дека триаголниците ADC и BEC се складни (направи цртеж). Од складноста следува $\measuredangle CBE = \measuredangle CAD = 60^\circ$.

39. Даден е рамностран триаголник ABC. На продолжението на висината CD, преку темето C, е земена точка E, таква што $\overline{CE} = \overline{AB}$. Докажи дека $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle AEB$ се комплементни агли.

Решение. *Прв начин*. Триаголникот ABC е рамностран, па затоа

$$\measuredangle ACB = 60^\circ \text{ и } \measuredangle ACD = \measuredangle BCD = 30^\circ.$$



Понатаму, $\measuredangle ACE = \measuredangle BCE = 150^\circ$ и бидејќи триаголниците ACE и BCE се рамнокраки, добиваме $\measuredangle AEC = \measuredangle BEC = 15^\circ$. Според тоа,

$$\measuredangle AEB = \measuredangle AEC + \measuredangle CEB = 30^\circ.$$

Конечно,

$$\measuredangle AEB + \measuredangle ACB = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ,$$

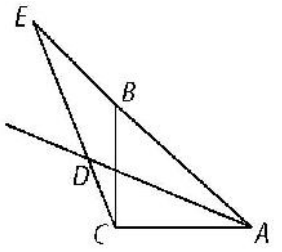
т.е. $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle AEB$ се комплементни агли.

Втор начин. Триаголникот ABC е рамностран, па затоа $\measuredangle ACB = 60^\circ$. Понатаму, $\overline{CE} = \overline{AB} = \overline{CA} = \overline{CB}$, што значи дека C е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABE. Затоа $\measuredangle AEB = \frac{1}{2}\measuredangle ACB = 30^\circ$ и $\measuredangle AEB + \measuredangle ACB = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, т.е. $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle AEB$ се комплементни агли.

40. Даден е рамнокрак правоаголен триаголник ABC. На продолжението на хипотенузата AB, преку темето B, дадена е точка E таква, што $\overline{BE} = \overline{BC}$. Докажи дека аголот под кој симетралата на аголот A ја сече отсечката CE е суплементен на $\measuredangle CBE$.

Решение. Имаме $\measuredangle CBA = 45^\circ$, па затоа важи $\measuredangle CBE = 135^\circ$. Понатаму, од $\overline{BE} = \overline{BC}$ следува дека $\triangle ECB$ е рамнокрак, па затоа важи $\measuredangle EBC = 22^\circ 30'$. Оттука следува дека

$$\measuredangle ACD = 90^\circ + 22^\circ 30' = 112^\circ 30'.$$



Од друга страна $\measuredangle CAD = 22^\circ 30'$, од каде

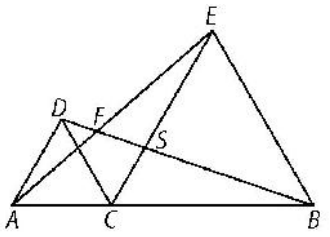
добиваме дека

$$\angle ADC = 180^\circ - 112^\circ 30' - 22^\circ 30' = 45^\circ .$$

Според тоа, $\angle CBE + \angle CDA = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$, т.е. $\angle CBE$ и $\angle CDA$ се суплементни.

41. Дадена е отсечка AB и на неа произволна точка C. Од иста страна на правата $p(A,b)$ се конструирани рамностран триаголници ACD и CBE. Отсечките AE и BD се сечат во точката F. Определи го $\angle EFB$.

Решение. Имаме



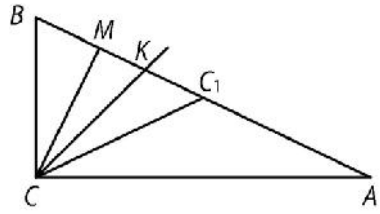
$$\overline{AC} = \overline{DC},\ \overline{CE} = \overline{CB} \text{ и}$$

$$\angle ACE = \angle DCB = 120^\circ,$$

па од признакот САС следува дека триаголниците ACE и DCB се складни. Од тоа следува дека $\angle AEC = \angle DBC$, па како $\angle FSE = \angle GSC$ (како накрсни агли) добиваме триаголниците FSE и BSC имаат по два еднакви агли. Затоа и третите агли им се еднакви, односно $\angle EFS = \angle BCS = 60^\circ$, односно $\angle EFB = 60^\circ$.

42. Во правоаголен триаголник симетралата на правиот агол е симетрала и на аголот кој го формираат тежишната линија и висината повлечени од темето на правиот агол. Докажи!

Решение. Нека $\angle ACB$ е прав и нека CC_1 и CM се соодветно тежишната линија и висината, а правата CK е симетралата на $\angle ACB$. Од правоаголниот триаголник CMB следува дека $\angle MCB = 90^\circ - \ = \sim$, а од рамнокракиот триаголник CAC_1 следува дека $\angle ACC_1 = \sim$. Според тоа,



$$\angle C_1CK = \angle ACK - \angle ACC_1 = 45^\circ - \sim \text{ и}$$

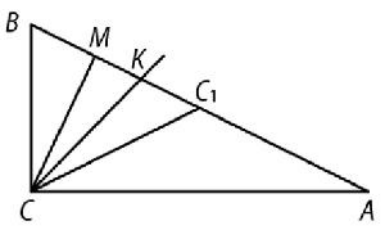
$$\angle MCK = \angle BCK - \angle MCB = 45^\circ - \sim,$$

односно во правоаголен триаголник симетралата на правиот агол е симетрала на аголот формиран од тежишната линија и висината повлечени од темето на правиот агол.

43. Висината повлечена кон хипотенузата и симетралата на правиот агол

се сечат под агол од 12°. Пресметај ги аглите на овој правоаголен триаголник.

Решение. Нека $\angle ACB$ на триаголникот ABC е прав, а CC_1 и CM се соодветно тежишната линија и висината, а правата CK е симетралата на $\angle ACB$ и $\angle MCK = 12^\circ$. Според претходната задача добиваме

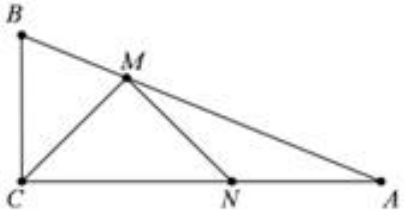


$\angle C_1CK = \angle MCK$. Понатаму, $\angle KCB = 45^\circ$, како половина од правиот агол, а исто така $\angle KCB = \angle KCM + \angle MCB$. Затоа $45^\circ = 12^\circ + \angle MCB$, т.е. $\sim = \angle MCB = 33^\circ$. Значи, аглите на правоаголниот триаголник ABC се $\sim = 33^\circ$, $= 57^\circ$ и $¥ = 90^\circ$.

44. Во правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C, на страната AB е дадена точка M, а на страната AC точка N, така што $\overline{BC} = \overline{CN} = \overline{MN} = \overline{AN}$. Пресметај ги аглите на триаголник ABC.

Решение. Триаголниците ANM, NMC и BCM се рамнокраки, па

$$\sim = \angle CAM = \angle NMA = \angle CBM = \angle CMB,$$
$$\angle MCN = \angle CNM$$



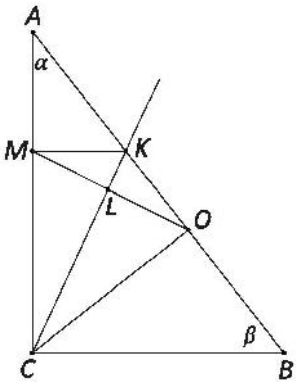
Аголот $\angle MCN$ е надворешен агол за триаголникот AMN, па затоа $\angle MCN = 2\sim$. Но, $\angle MCN = \angle CNM$, па затоа $\angle CMN = 180^\circ - 4\sim$. За аголот $\angle BMC$ добиваме

$$\angle BMC = 180^\circ - (180^\circ - 4\sim) - \sim = 3\sim .$$

Значи, $= 3\sim$, па затоа $\sim + 3\sim = 90^\circ$, т.е. $\sim = 22^\circ 30'$ и $= 67^\circ 30'$.

45. Нека точката O е подножјето на нормалата повлечена од темето на правиот агол C кон хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC. Симетралата на $\angle ACO$ ја сече правата AB во точката K. Нормалата од K на AC ја сече AC во точката M. Определи го аголот меѓу правите CK и OM.

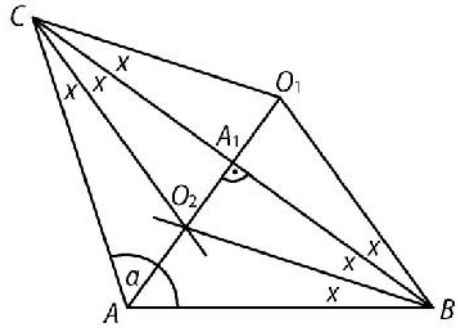
Решение. Нека $\measuredangle CAB = \sim$ и $\measuredangle ABC =$. Аглите $\sim$ и се комплементни, т.е. $\sim + = 90^\circ$. Од правоаголниот триаголник ACO имаме $\measuredangle ACO = 90^\circ - \sim =$. Сега, CK е симетрала на $\measuredangle ACO$, па затоа $\measuredangle ACK = \measuredangle KCO = \frac{}{2}$. Сега, триаголниците MCK и OCK се правоаголни, имаат заед-ничка хипотенуза CK и $\measuredangle ACK = \measuredangle KCO = \frac{}{2}$, па затоа тие се складни. Од оваа складност следува $\overline{MC} = \overline{CO}$.



За триаголниците MCL и OCL важи $\overline{MC} = \overline{CO}$, $\measuredangle ACK = \measuredangle KCO = \frac{}{2}$ и CL е заедничка страна, па од признакот САС следува дека тие се складни. Според тоа, $\measuredangle MLC = \measuredangle OLC$ и како $\measuredangle MLC + \measuredangle OLC = 180^\circ$, добиваме $\measuredangle MLC = \measuredangle OLC = 90^\circ$. Значи, аголот меѓу правите CK и OM е прав агол.

46. Центарот на впишаната и центарот на опишаната кружница на еден триаголник се точки симетрични во однос една страна на триаголникот. Определи ги аглите на овој триаголник.

Решение. Нека O_1 и O_2 се центрите на опишаната и впишаната кружница на триаголникот ABC. Бидејќи центрите на опишаната и впишаната кружница се на различни страни на триаголникот, овој триаголник е тапоаголен и нека тапиот агол е во темето A.



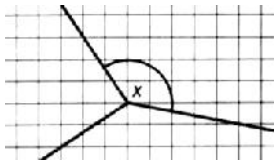
Понатаму, бидејќи точките O_1 и O_2 се симетрични во однос на страната BC, правата O_1O_2 е нормална на страната BC. Сега, O_1 е центар на опишаната кружница, па затоа триаголникот BCO_1 е рамнокрак и нека $\measuredangle BCO_1 = \measuredangle CBO_1 = x$. Но, од својствата на осната симетрија следува дека триаголниците BCO_1 и BCO_2 се складни, па затоа

триаголникот BCO_2 е рамнокрак, односно $\measuredangle BCO_2 = \measuredangle CBO_2 = x$. Понатаму, O_2 е центар на впишаната кружница, па затоа CO_2 и BO_2 се симетрали на агли, што значи дека $\measuredangle ACO_2 = \measuredangle ABO_2 = x$. Според тоа, $\measuredangle ACO_1 = \measuredangle ABO_1 = 3x$. Сега, O_1 е центар на опишпаната кружница, па затоа триаголниците ACO_1 и ABO_1 се рамнокраки, што значи $\measuredangle CAO_1 = \measuredangle BAO_1 = 3x$. Конечно, од триагоникот ABC добиваме

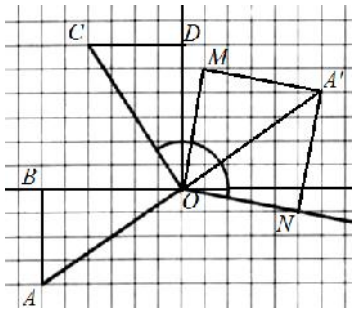
$$\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = 180^\circ,$$
$$2x + 2x + 6x = 180^\circ,$$
$$x = 18^\circ.$$

Значи, аглите на триаголникот ABC се еднакви на $36^\circ, 36^\circ$ и 108°.

47. Во квадратна мрежа се нацртани три агли (цртеж десно). Определи ја мерката на аголот x.



Решение. Во квадратната мрежа да ги означиме $A, B, C, D, E, F, M, N, O$ како на цртежот десно и нека точката A' е симетрична на точката A во однос на точката O. Триаголниците OAB и OCD се правоаголни со еднакви кате-ти, па затоа тие се складни. Од складноста следува $\measuredangle AOB = \measuredangle COD$, па затоа



$$\begin{aligned}\measuredangle AOC &= \measuredangle AOB + \measuredangle BOC \\ &= \measuredangle DOC + \measuredangle BOC \\ &= \measuredangle BOD = 90^\circ.\end{aligned}$$

Аналогно се докажува дека $\measuredangle MON = 90^\circ$. Понатаму, страните на четириаголникот $MONA'$ се дијагонали на правоаголници со страни 1 и 5, па затоа тие се еднакви. Значи, четириаголникот $MONA'$ е ромб со еден прав агол, што значи дека тој е квадрат. Оттука следува дека $\measuredangle A'OM = 45^\circ$, па затоа

$$\measuredangle COM = 180^\circ - \measuredangle AOC - \measuredangle A'OM = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

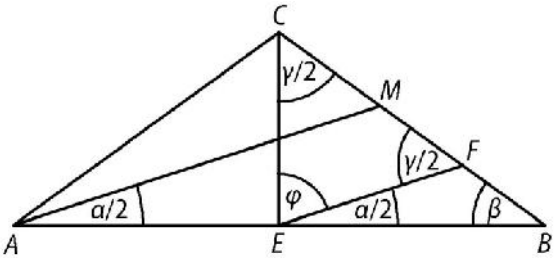
Конечно,

$$x = \measuredangle NOC = \measuredangle NOM + \measuredangle MOC = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ.$$

48. Определи ги аглите на рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) ако $\overline{AM} = 2\overline{CE}$, каде M и E се точките на пресеците на симетралите на аглите во темињата A и C редоследно со BC и AB.

Решение. Од условот на задачата следува:

$$\sim = \quad , \ \measuredangle BAM = \frac{\tilde{}}{2}, \ \measuredangle BCE = \frac{¥}{2}, \ \measuredangle BEC = \measuredangle AEC = 90^\circ.$$



Нека EF е отсечка паралелна на AM при што точката F припаѓа на на кракот BC (види цртеж). Сега $\measuredangle BAM = \measuredangle BEF = \frac{\tilde{}}{2}$, како агли со паралелни краци. Бидејќи точката E е средина на отсечката AB и $EF \parallel AM$ добиваме дека EF е средна линија на триаголникот ABM, па затоа $\overline{EF} = \frac{\overline{AM}}{2}$. Од условот на задачата имаме $\overline{CE} = \frac{\overline{AM}}{2}$, па затоа $\overline{EF} = \overline{CE}$. Според тоа, триаголникот EFC е рамнокрак, па затоа $\measuredangle EFC = \measuredangle BCE = \frac{¥}{2}$. Ако $\measuredangle FEC = ¨$, од триаголникот EFC добиваме $¨ + ¥ = 180^\circ$, т.е. $¨ = 180^\circ - ¥ = 2\sim$. Но, $¨ + \frac{\tilde{}}{2} = \measuredangle BEC = 90^\circ$, па затоа $2\sim + \frac{\tilde{}}{2} = 90^\circ$, од каде наоѓаме $\sim = \quad = 36^\circ$ и $¥ = 180^\circ - 2\sim = 108^\circ$.

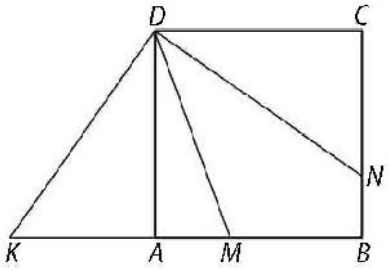
49. Над страната AB на квадратот $ABCD$ е конструиран рамностран триаголник ABE при што точката E е во внатрешноста на квадратот. Определи ја мерката на $\measuredangle DEC$.

Решение. Имаме $\measuredangle EBC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Понатаму, $\overline{EB} = \overline{BC}$, што значи дека триаголникот EBC е рамнокрак. Оттука следува, дека $\measuredangle BEC = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$. Но, $\triangle EBC \cong \triangle EAD$, па затоа $\measuredangle DEA = 75^\circ$. Конечно, $\measuredangle DEC = 360^\circ - 60^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 150^\circ$.

50. Нека M е точка на страната AB на квадратот $ABCD$, таква што

$\angle ADM = 20^\circ$, а N е точка на страната BC таква што е исполнето $\overline{CN} = \overline{DM} - \overline{AM}$. Определи ја мерката на $\angle MDN$.

Решение. Нека K е точка на правата AB таква што $K - A - M - B$ и $\overline{AK} = \overline{CN}$. Тогаш триаголниците ADK и CDN се правоаголни триаголници со еднакви катети, па затоа тие се складни. Од ваа складност следува $\angle CDN = \angle ADK$. Исто така важи



$$\overline{MK} = \overline{AM} + \overline{AK} = \overline{AM} + \overline{CN} = \overline{MD},$$

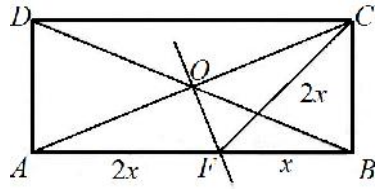
па затоа триаголникот DMK е рамнокрак. Бидејќи $\angle ADM = 20^\circ$, добиваме $\angle DMK = 70^\circ$, па затоа $\angle MKD = \angle MDK = 55^\circ$. Сега,

$$\angle CDN = \angle ADK = 55^\circ - 20^\circ = 35^\circ,$$

па е $\angle MDN = 90^\circ - 20^\circ - 35^\circ = 35^\circ$.

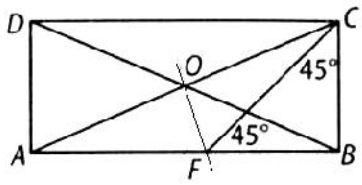
51. Даден е правоаголник $ABCD$ ($\overline{AB} > \overline{BC}$). Симетралата на дијагоналата AC ја дели страната AB во однос 2:1. Докажи дека дијагоналите на правоаголникот се сечат под агол од 60°.

Решение. Бидејќи F припаѓа на симетралата на отсечката AC важи $\overline{AF} = \overline{FC}$, т.е. триаголникот ACF е рамнокрак. Значи, $\angle CAF = \angle ACF = \sim$. Понатаму, $\angle CFB$ е надворешен за триаголникот CAF, па затоа $\angle CFB = 2\sim$. Правоаголниот триаголник CFB има катета x и хипотенуза $2x$, па затоа е половина од рамностран триаголник. Тоа значи дека $\angle CFB = 60^\circ$. Оттука следува дека $\sim = 30^\circ$. Понатаму, $\angle ABO = \angle BAO = \sim = 30^\circ$, од каде следува $\angle OBC = \angle BCO = 60^\circ$, па затоа $\angle BOC = 60^\circ$.



52. Симетралата на едната дијагонала ја сече подолгата страна на правоаголникот така што едниот од добиените делови е еднаков на пократката страна. Докажи дека дијагоналите на правоаголникот се сечат под агол од 45°.

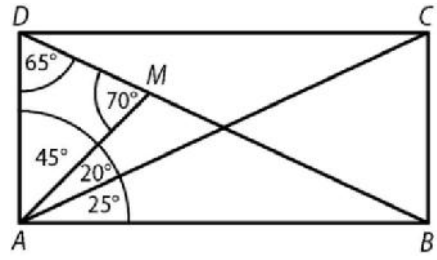
Решение. Од условот на задачата имаме $\overline{FB} = \overline{BC}$, па затоа триаголникот FBC е рамнокрак правоаголен (цртеж десно). Според тоа, $\measuredangle CFB = \measuredangle FCB = 45^\circ$.



Понатаму, триаголникот AFC е рамнокрак, па како бидејќи $\measuredangle CFB$ е надворешен агол за овој триаголник добиваме $\measuredangle CAF = \measuredangle FCA = 22^\circ 30'$. Според тоа, $\measuredangle OBC = \measuredangle BOC = 22^\circ 30' + 45^\circ = 67^\circ 30'$, што значи дека $\measuredangle COB = 180^\circ - 2 \cdot 67^\circ 30' = 45^\circ$.

53. Во правоаголник $ABCD$, $\overline{AB} > \overline{BC}$, симетралата на $\measuredangle BAD$ ја сече отсечката BD во точката M. Ако $\measuredangle MAC = 20^\circ$, определи ги аглите на триаголникот AMD.

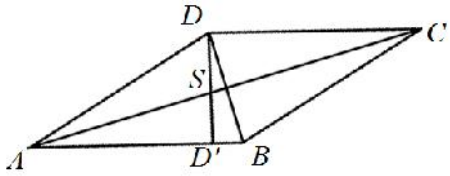
Решение. Отсечката AM е симетрала на $\measuredangle DAB$, па затоа $\measuredangle DAM = 45^\circ$. Правоаголните триаголници ADC и DAB имаат еднакви катети, па од признакот САС следува дека тие се складни. Од оваа складност следува $\measuredangle ADM = \measuredangle ADB = \measuredangle DAC = 65^\circ$. Конечно,



$$\measuredangle DMA = 180^\circ - (45^\circ + 65^\circ) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ .$$

54. Во ромбот $ABCD$ висината DD' е нормална на страната AB. Аголот во темето A е остар, а периметарот на ромбот е 8 пати поголем од висината DD'. Определи ги острите агли меѓу висината DD' и дијагоналите на ромбот AC и BD.

Решение. Нека S е пресекот на дијагоналата AC и висната DD'. Ако периметарот на томбот е $8x$, тогаш должините на страните на ромбот се $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 2x$,



а висината е $\overline{DD'} = x$. Значи, во триаголникот ADD' хипотенузата е два пати поголема од едната катета, па затоа тој е половина од рам-

ностран триаголник. Тоа значи дека $\measuredangle ADD' = 60^\circ$ и $\measuredangle DAD' = 30^\circ$. Значи, $\measuredangle ADB = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$, па затоа

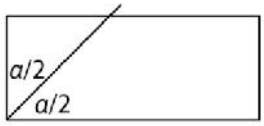
$$\measuredangle D'DB = \measuredangle ADB - \measuredangle ADD' = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$$

и како дијагоналите на ромбот се заемно нормални добиваме

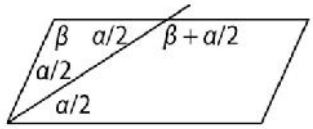
$$\measuredangle DSC = 90^\circ - \measuredangle D'DB = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ.$$

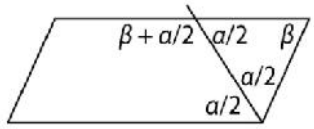
55. Симетралата на внатрешниот агол на паралелограмот сече една негова страна под агол кој е еднаков на еден од внатрешните агли на паралелограмот. Определи ги аглите на тој паралелограм.

Решение. Симетралата на внатрешниот агол на правоаголен паралелограм сече една негова страна под агол од 45°, односно 135°, па затоа не се исполнети условите на задачата.



Симетралата на внатрешниот остар агол ~ на косоаголен паралелограм ја сече неговата страна под агли $\frac{\sim}{2}$ и $\frac{\sim}{2} +$, па не се исполнети условите на задачата.

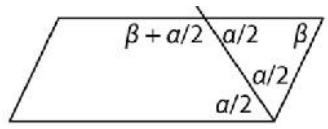




Значи, останува симетралата на внатрешниот тап агол ~ на косоаголен паралелограм да ја сече страната под агол кој е еднаков на еден од внатрешните агле на паралелограмот. Значи $\frac{\sim}{2} =$, па од $\sim + = 180^\circ$, наоѓаме $+2 = 180^\circ$, т.е. $= 60^\circ$ и $\sim = 120^\circ$.

56. Симетралата на внатрешниот агол на паалелограмот сече една негова страна под агол кој е еднаков на $\frac{3}{4}$ од едниот внатрешен агол на паралелограмот. Определи ги аглите на овој паралелограм.

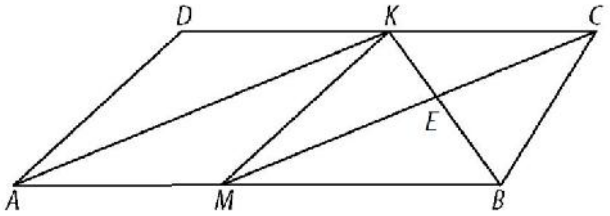
Решение. Симетралата на внатрешниот агол на правоаголен паралелограм сече една негова страна под агол 45°, односно 135° па не се исполнети условите на задачата. Симетралата на внатрешниот агол ~ на косоаголен паралелограм $ABCD$ сече негова страна под агли $\frac{\sim}{2}$, односно $+\frac{\sim}{2}$ (види



цртеж). Според тоа, $\frac{\sim}{2}=\frac{3}{4}$, односно $\sim=\frac{3}{2}$. Сега, од $\sim+\quad=180^\circ$ следува $\frac{3}{2}+\quad=180^\circ$, па е $\quad=72^\circ$ и $\sim=108^\circ$.

57. Нека M е точка на страната AB, а K е точка на страната CD на паралелограмот $ABCD$, така што $\overline{AM}=\overline{CK}$ и $\measuredangle AKB=106^\circ$. Определи го аголот меѓу дијагоналите на четириаголникот $BCKM$.

Решение. Според условот на задачата отсечките AM и CK се паралелни и еднакви. Според тоа, четириаголникот $AMCK$ е паралелограм и $AK\|MC$. Со E да го означиме пресекот на дијагоналите на четириаголникот $BCKM$. Имаме $\measuredangle AKB=\measuredangle MEB$ како агли со паралелни краци, па затоа бараниот агол е 106° ,односно 74°.

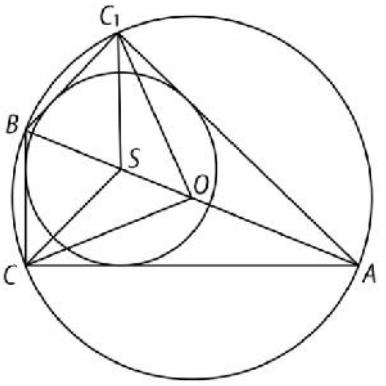


58. Произволен правоаголен триаголник е пресликан со осна симетрија во однос на правата која е определена со неговата хипотенуза и така е добиен делтоид. Докажи дека може:

а) околу тој делтоид да се опише крижница,

б) во тој делтоид да се впише кружница.

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник со хипотенуза AB (цртеж десно).

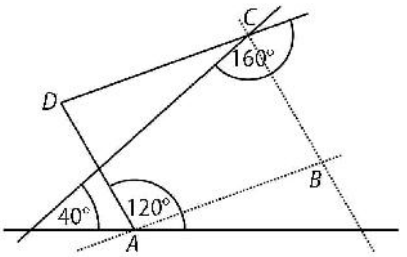


а) Околу триаголникот ABC опишуваме кружница чиј центар е дијаметар е хипотенузата AB. Но пра-вата определена со дијаметарот AB е оската на симетрија, што значи дека оваа кружница се пресликува во самата себе, т.е точката C_1 симетрична на темето C лежи на кружницата. Значи, околу делтоидот $BCAC_1$ може да се опише кружница.

б) Заради осната симетрија правата AB е симетрала на $\measuredangle CAC_1$ и на

$\angle CBC_1$. Понатаму, Симетралата на $\angle ACB$ е односиметрична на симетралата на $\angle AC_1B$, па затоа овие две полуправи ќе се сечат во точката S на оската на симетријата AB. Последното значи дека точката S е еднакво оддалечена од страните на делтоидот $BCAC_1$, па затоа во него може да се впише кружница чиј центар е точката S.

59. На цртежот е прикажан паралелограмот $ABCD$. Определи ги неговите агли.



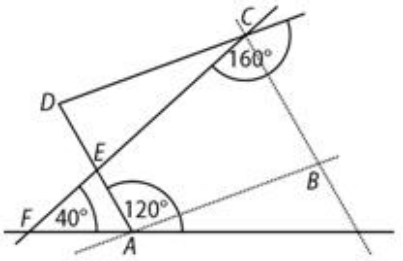
Решение. Да означиме како на цртежот десно. Имаме, $\angle FAE = 60^\circ$, па затоа важи

$$\angle AEF = \angle DEC = 80^\circ.$$

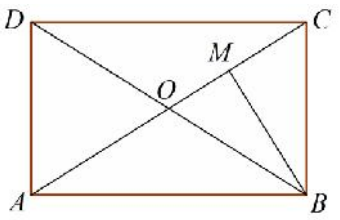
Бидејќи $\angle ECD = 20^\circ$, добиваме дека

$$\angle EDC = 180^\circ - (80^\circ + 20^\circ) = 80^\circ$$

Според тоа, аглите на паралелограмот се $\angle ADC = \angle ABC = 80^\circ$ и $\angle DAB = \angle BCD = 100^\circ$.



60. Даден е правоаголник $ABCD$ $(\overline{AB} > \overline{BC})$. Нормалата од темето B повлечена кон дијагоналата AC, ја сече дијагоналата AC во точката M, така што должината на отсечката AM е три пати поголема од должината на отсечката MC. Определи го аголот под кој се сечат дијагоналите на овој правоаголник.



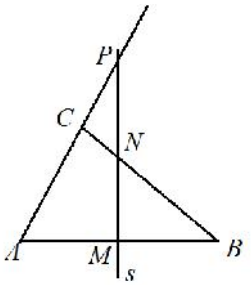
Решение. Нека $ABCD$ $(\overline{AB} > \overline{BC})$ е правоаголникот кој ги задоволува условите на задачата. Од $\overline{AM} = 3\overline{MC}$ следува $\overline{AC} = 4\overline{MC}$. Но, $\overline{AC} = 2\overline{AO}$, па затоа $\overline{AO} = 2\overline{MC}$ и $\overline{OM} = \overline{MC} = \frac{1}{2}\overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{OB}$.

Според тоа, во правоаголниот триаголник OBM катетата OM е еднаква на половина од хипотенузата OB, па затоа $\angle BOM = 60^\circ$. Значи, дијагоналите на правоаголникот се сечат под агол од 60°.

5.2. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

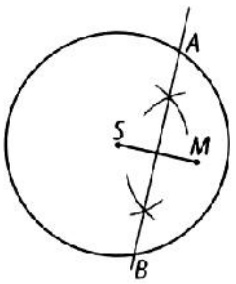
1. Даден е триаголник ABC. На правите AB, BC и CA определи точки M, N и P кои се еднакво оддалечени од точките A и B.

Решение. Точките A и B се различни, па затоа сите точки кои се еднакво оддалечени од нив припаѓаат на симетралата s на отсечката AB. Според тоа, $M = s \cap AB$, $N = s \cap BC$ и $P = s \cap CA$ (цртеж десно).



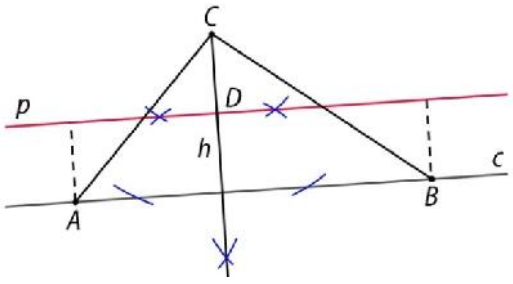
2. Дадена е кружница $k(S, 5\,cm)$ и во нејзината внатрешност точка M $(M \neq S)$. Определи точка A која припаѓа на кружницата $k(S, 5\,cm)$ и која е еднакво оддалечена од точките M и S.

Решение. Бараната точка е еднакво оддалечена од точките M и S, па затоа истата припаѓа на симетралата на отсечката SM. Симетралата на отсечката SM ја сече кружницата k во точките A и B (цртеж десно). Јасно, точките A и B се бараните точки кои припаѓаат на кружницата и се еднакво оддалечени од точките M и S.



3. Нацртај три неколинеарни точки A, B и C. Во рамнината во која лежат точките A, B и C конструирај права p така што растојанијата од точките A, B и C до правата p се еднакви. Колку такви прави постојат?

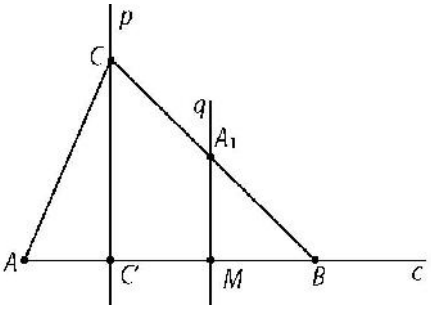
Решение. Ги повлекуваме правата $c \equiv AB$ и висината од темето C во триаголникот ABC, чија должина ја означуваме со h. Нека D е средината на висината. Низ точката D повлекуваме права p паралелна со правата c. Растојанието меѓу правите p и c е



$\frac{h}{2}$, што значи дека точките A и B од правата p се на растојание $\frac{h}{2}$, а на истото расојание од правата p е и точката C. На ист начин се добиваат уште две решение, т.е. права q која е паралелна на BC и ја полови висината повлечена од темето A и права r која ја е паралелна на AC и ја полови висината повлечена од темето B. Значи, задачата има три решенија.

4. Дадени се точки A и A_1 и права p. Конструирај триаголник ABC, ако точката A е теме на триаголникот, точката A_1 е средина на страната BC, а правата p ја содржи висината CC'.

Решение. *Анализа*. Нека M е подножјето на нормалата од точката A_1 на правата AB. Бидејќи A_1 е средина на BC, и $A_1M \parallel CC'$ добиваме дека A_1M е средна линија на правоаголниот триаголник BCC'. Значи, A_1M е половина од висината CC'.

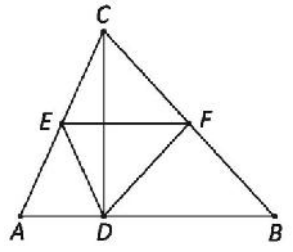


Конструкција. Од точката A повлекуваме нормала на правата p, која правата p ја сече во точката C'. Низ точката A_1 конструираме права q паралелна со правата p и $M = q \cap AC'$. Сега $\overline{C'M} = \overline{MB}$ и темето C е во пресекот на p и BA_1.

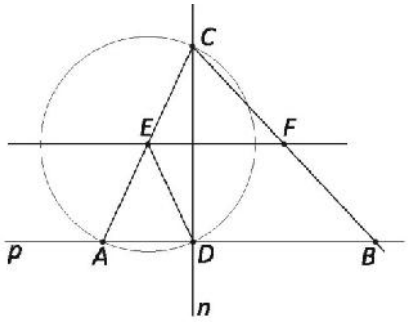
Доказот и дискусијата ги оставаме на читателот за вежба.

5. Дадени се неколинеарните точки D, E, F. Конструирај триаголник ABC така што редоследно точките D, E, F се подножјето на висината повлечена од темето C и средините на страните AC и BC.

Решение. *Анализа*. Нека претпоставиме дека задачата е решена и нека ABC е бараниот триаголник. Отсечката EF е средна линија на триаголникот ABC, па затоа е паралена со страната AB. Понатаму, $CD \perp AB$ и важи $\overline{EC} = \overline{EA} = \overline{ED}$.



Конструкција. Ја повлекуваме правата EF



и потоа низ точката D конструираме права p паралелна до EF. Во точката D конструираме права n нормална на правата p. Потоа конструираме кружница $k(E,\overline{ED})$ и во пресек со правите p и n ги добиваме темињата A и C. Ја повлекуваме правата CF и во пресек со правата p го добиваме темето B.

Доказ. Следува од анализата и конструкцијата.

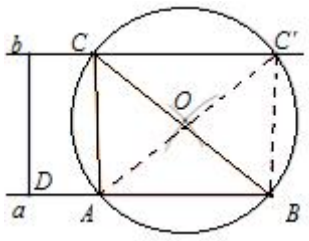
Дискусија. Задачата има единствено решение.

6. Конструирај триаголник ABC ако должината на едната страна на триаголникот е $6\,cm$, соодветната висина е $5\,cm$, а должината на радиусот на опишаната кружница е $4\,cm$.

Решение. *Анализа*. Нека $\overline{AB}=6\,cm$ и $h_a=5\,cm$. Темето C се наоѓа на правата b која е паралелна на правата AB и е на растојание h_a од неа. Центарот O на опишаната кружница се наоѓа во пресекот на кружниците $k(A,4\,cm)$ и $k(B,4\,cm)$. Значи, темето C се наоѓа во пресекот на опишаната кружница и правата b.

Конструкција. Конструкцијата ја реализираме последователно во следниве чекори:

- на права a конструираме отсечка $\overline{AB}=6\,cm$,
- конструираме права b која е паралелна на правата a и е на растојание $h_a=5\,cm$ од неа,
- конструираме кружни лаци $k(A,4\,cm)$ и $k(B,4\,cm)$ во чиј пресек го наоѓаме центарот O на опишаната кружница на триаголникот,
- ја конструираме опишаната кружница на триаголникот и во пресекот со правата b го наоѓаме третото теме C.

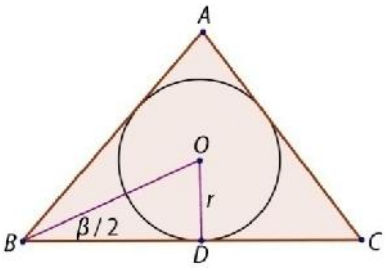


Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение до складност.

7. Конструирај триаголник ABC ако $a = 6\,cm$, $\sim + ¥ = 120^\circ$ и радиусот на впишаната кружница е $r = 1{,}5\,cm$.

Решение. *Анализа*. Нека ABC е бараниот триаголник, O е центарот на впишаната кружница и D е точка на BC таква што OD е радиусот на впишаната кружница. Според условот на задачата $\sim + ¥ = 120^\circ$ и затоа $= 60^\circ$. За правоаголниот триаголник OBD познати ни се една негова катета и остриот агол $\frac{}{2}$, па затоа истиот може да се конструира. Јасно, $\measuredangle OCD = \measuredangle OCA$.



Конструкција. Ги реализираме следниве чекори:

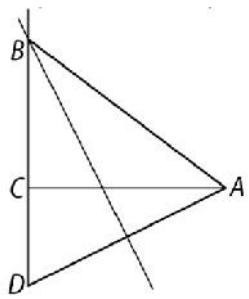
- го конструираме триаголникот OBD, со што ги добиваме темето B и центарот на впишаната кружница O,
- на полуправата BD ја нанесуваме страната $\overline{BC} = a = 6\,cm$ и го добиваме темето C,
- во темето B над страната BC конструираме агол $= 60^\circ$, а во темето C над страната BC конструираме агол еднаков на $2\measuredangle OCD$. Во пресекот на краците на овие два агли го наоѓаме темето A.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение до складност.

8. Конструирај правоаголен триаголник ABC со прав агол о темето C ако разликата на хипотенузата c и катетата a е $c - a = 4\,cm$ и $\measuredangle ABC = 22^\circ 30'$.

Решение. *Анализа*. Нека ABC е бараниот триаголник и нека D е точка на полуправата BC таква што $\overline{BA} = \overline{BD}$. Тогаш триаголникот DAB е рамнокрак и $\measuredangle ABD = 22^\circ 30'$, од каде добиваме $\measuredangle ADB = \frac{180^\circ - 22^\circ 30'}{2}$. Но, $\overline{DC} = \overline{BD} - \overline{BC} = c - a$ и $\measuredangle ACD = 90^\circ$, па



затоа триаголникот ACD , може да се конструира.

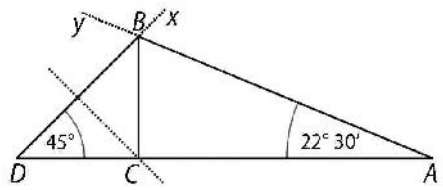
Конструкција. Конструираме триаголник ACD со $\overline{DC} = c - a$, $\measuredangle ACD = 90^\circ$ и $\measuredangle ADC = \frac{180^\circ - 22^\circ 30'}{2}$. Конструираме симетрала на отсечката AD и во пресекот со правата DC го наоѓаме темето B, со што триаголникот ABC.

Доказот и дискусијата ги оставаме начитателот за вежба.

9. Конструирај правоаголен триаголник чиј еден остар агол е $22^\circ 30'$, а збирот на неговите катети е еднаков на $10,5\,cm$.

Решение. *Анализа*. Нека триаголникот е конструиран и нека на пример $\measuredangle CAB = 22^\circ 30'$. Да ја продолжиме страната AC на триаголникот ABC преку темето C и да определиме точка D таква што $\overline{CD} = \overline{BC}$. Триаголникот BDC е рамнокрак правоаголен со прав агол во темето C, па затоа $\measuredangle CDB = 45^\circ$, а точката C припаѓа на симетралата на хипотенузата BD. Понатаму, $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BC} = 10,5\,cm$, па за триаголникот DAB се познати страна и двата налегнати агли, што значи дека тој може да се конструира.

Конструкција. Конструираме отсечка $\overline{AD} = 10,5\,cm$, па конструираме полуправа Dx која со DA зафаќа агол од 45° и конструираме полуправа Ay која со AD зафаќа агол од $22^\circ 30'$ (цртеж десно). Во пресекот на овие полуправи го наоѓаме темето B. Ја конструираме симетралата на отсечката DB и во пресекот со DA го наоѓаме темето C.



Доказ. непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение до складност.

10. Конструирај правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C ако е даден збирот на хипотенузата и катетата $c + a = 7\,cm$ и аголот $\measuredangle BAC = 22^\circ 30'$.

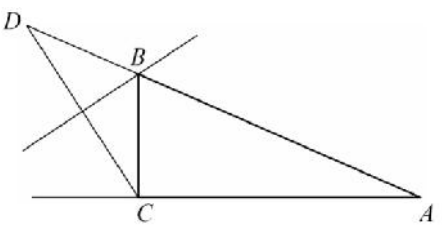
Решение. Нека ABC е бараниот триаголник и D е точка на правата

AB таква што $\overline{BC} = \overline{BD}$. Триаголникот CBD е рамнокрак со агол при врвот еднаков на

$\measuredangle CBD = 90^\circ + 22^\circ 30' = 112^\circ 30'$.

Оттука следува

$\measuredangle BDC = \frac{1}{2}(180^\circ - 112^\circ 30')$.



Сега, конструираме триаголник ACD кој е еднозначно определен со страната

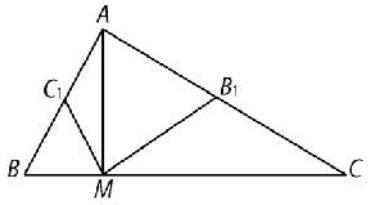
$$\overline{AD} = c + a = 7\ cm,\ \measuredangle CAD = 22^\circ 30'$$ и

$$\measuredangle CDA = \measuredangle CDB = \frac{1}{2}(180^\circ - 112^\circ 30').$$

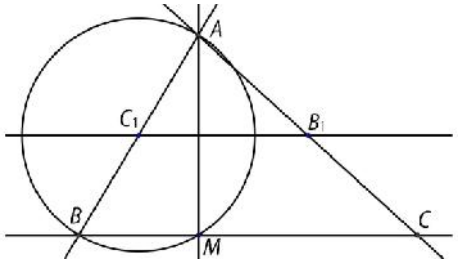
Темето B е пресечната точка на симетралата на отсечката CD и правата AD, бидејќи триаголникот CBD е рамнокрак.

11. Дадени се неколинеарни точки M, B_1, C_1. Конструирај триаголник ABC ако точката M е подножје на висината повлечена од темето A, B_1 е средина на страната AC и C_1 е средина на страната AB.

Решение. *Анализа*. Нека ABC е бараниот триаголник. Тогаш B_1C_1 е средна линија на триаголникот, па затоа е паралелна со BC. Триаголникот BMA е правоаголен па отсечката C_1M е тежишна линија која соодветствува на хипотенузата BA и е еднаква на половина од хипотенузата. На ист начин за триаголникот CMA отсечката B_1M е еднаква на половина од страната CA.



Конструкција. Низ точката M повлекуваме права p паралелна со правата B_1C_1. Конструираме кружница со центар во C_1 и радиус $\overline{C_1M}$ и во пресек со p ја наоѓаме точката B. Ја повлекуваме правата BC_1 која кружницата ја сече во точката A, а потоа правата AB_1

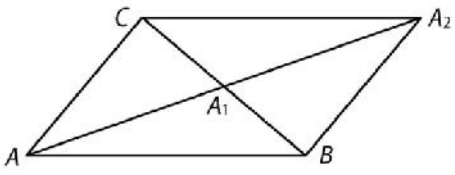


која правата p ја сече во точката C.

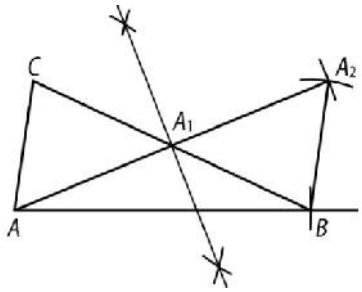
Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.
Дискусија. Задачата има единствено решение.

12. Конструирај триаголник ABC ако се дадени $\overline{AB} = 7\,cm, \overline{AC} = 3\,cm$ и тежишна линија $\overline{AA_1} = 4\,cm$.

Решение. *Анализа*. Нека триаголникот ABC е конструиран и нека точката A_2 е на продолжението на тежишната линија AA_1 преку точката A_1 и е таква што $\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2}$ (цртеж десно). Од $\overline{CA_1} = \overline{A_1B}$ и $\measuredangle AA_1C = \measuredangle BA_1A_2$ следува дека триаголниците AA_1C и BA_1A_2 се складни (САС), па затоа $\overline{CA} = \overline{A_2B}$. Според тоа, за триаголникот ABA_2 се познати страните $\overline{AB} = 7\,cm, \overline{BA_2} = 3\,cm$ и $\overline{AA_2} = 8\,cm$, па затоа истиот може да се конструира.



Конструкција. Го конструираме триаголникот ABA_2 со страни $\overline{AB} = 7\,cm$, $\overline{BA_2} = 3\,cm$, $\overline{AA_2} = 8\,cm$. Потоа конструираме симетрала на отсечката AA_2 со што ја определу-ваме нејзината средина A_1. На крајот темето C го определуваме како симетрична точка на точката B во однос на точката A_1.



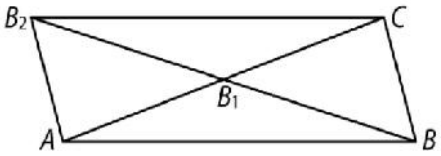
Забелешка. Откако го конструиравме триаголникот ABA_2, бидејќи четириаголникот ABA_2C е паралелограм, темето C можевме да го определме како пресек на кружниците $k(A_2, \overline{AB})$ и $k(A, \overline{BA_2})$.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.
Дискусија. Задачата има единствено решение.

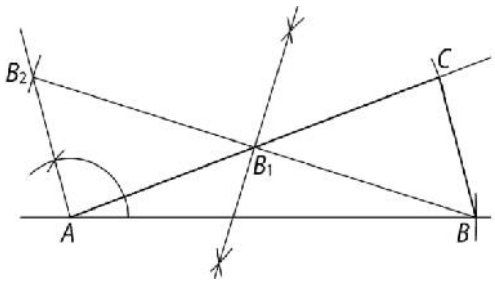
13. Конструирај триаголник ABC ако се дадени $\overline{AB} = 7\,cm$, $\measuredangle ABC = 75^\circ$ и тежишната линија $\overline{BB_1} = 4\,cm$.

Решение. *Анализа*. Нека ABC е бараниот триагол-ник и точката B_2 е

симетрична на точката B во однос на точката B_1. Дијагоналите на четириаголникот $ABCB_2$ се половат, па затоа тој е паралелограм со основа $\overline{AB} = 7\,cm$, дијагонала $\overline{BB_2} = 2 \cdot \overline{BB_1} = 8\,cm$ и $\measuredangle BAB_2 = 180^\circ - \measuredangle ABC = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$. Според тоа, триаголникот ABB_2 може да се конструира.



Конструкција. Го конструираме триаголникот ABB_2 со страни $\overline{AB} = 7\,cm$, $\overline{BB_2} = 8\,cm$ и агол $\measuredangle BAB_2 = 105^\circ$. Повлекуваме симетрала на отсечката BB_2 и ја наоѓаме точката B_1. Конечно, темето C го определуваме како точка која е симетрична на темето A во однос на точката B_1.

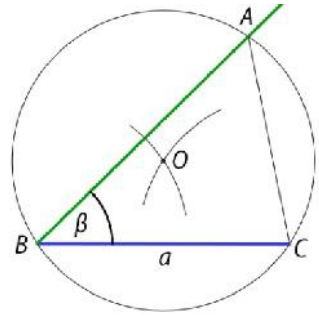


Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

14. Конструирај триаголник ако $a = 5\,cm$, $= 45^\circ$ и радиусот на опишаната кружница е $3\,cm$.

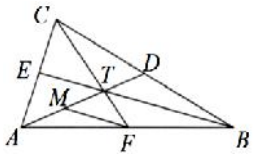
Решение. На произволна права ја нанесуваме отсечката $\overline{BC} = a = 5\,cm$. Во точката B конструираме агол $= 45^\circ$. Конструираме кружници $k(B, 3\,cm)$ и $k(C, 3\,cm)$ во чиј пресек го наоѓаме центарот O на опишаната кружница $k(O, 3\,cm)$. Ја конструираме кружницата $k(O, 3\,cm)$ и во пресекот на истата со кракот на аголот го наоѓаме темето A.



На читателот му шрепорачуваме самостојно да ги реализира четирите фази при решавање на конструктивна задача.

15. Конструирај триаголник чии тежишни линии се складни со дадени отсечки AD, BE и CF.

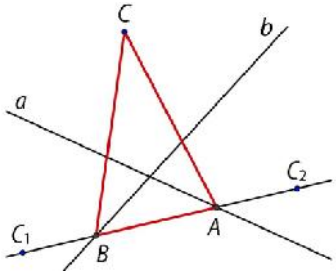
Решение. *Анализа*. Нека претпоставиме дека ABC е бараниот триаголник. Ако T е тежиштето на $\triangle ABC$ и M е средината на отсечката AT, тогаш $\overline{TF}=\frac{\overline{CF}}{3}, \overline{TM}=\frac{\overline{AD}}{3}, \overline{MF}=\frac{\overline{BE}}{3}$.



Според тоа, ако ги поделиме дадените отсечки на три дела, тогаш можеме да го конструираме триаголникот MFT. Сега, на правата MT ги определуваме точките A и D, на правата TF ја определуваме точката C, а точката B е во пресекот на правите AF и CD.

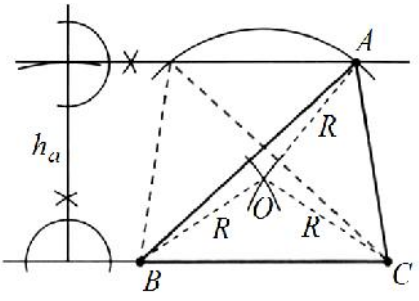
16. Дадени се прави a и b кои се сечат во точката S и точка C која не лежи на правите a и b. Конструирај триаголник ABC ако правата a е симетрала на $\measuredangle BAC$, а правата b е симетрала на $\measuredangle ABC$.

Решение. Конструираме точки C_1 и C_2 симетрични на точката C во однос на правите a и b. Правата C_1C_2 ги сече правите a и b соодветно во точките A и B. Јасно, триаголникот ABC е бараниот триаголник.



17. Конструирај триаголник ABC за кој се дадени страната $a=5\,cm$, висината $h_a=4\,cm$ и радиусот на опишаната кружница $R=3\,cm$.

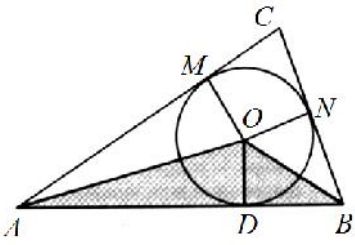
Решение. Ако O е центарот на опишанат кружница околу триаголникот ABC, тогаш триаголникот BCO е рамнокрак триаголник со основа $a=5\,cm$ и крак $R=3\,cm$. Го конструираме овој триаголник, а потоа конструираме кружница $k(O,3\,cm)$ и права паралелна на правата BC на растојание $h_a=4\,cm$. Во пресекот на оваа права и кружницата k е темето A на триаголникот ABC.



18. Конструирај триаголник ABC за кој се познати страната b, радиусот

на впишаната кружница r и аголот $\sim$.

Решение. За триаголникот ABO е познато $\measuredangle BAO = \frac{\sim}{2}$, $\overline{AB} = b$ и висината $\overline{OD} = r$, па затоа тој може да се конструира. Ја нанесуваме страната AB и над неа во темето A конструираме агол еднаков на $\frac{\sim}{2}$. Потоа конструираме права паралелна на AB која е на растојание r од AB и во пресек со претходно конструираниот агол го наоѓаме темето O. Сега $\measuredangle ABO = \frac{-}{2}$, па темето C е во пресек на краците на $\measuredangle OAM = \frac{\sim}{2}$ и $\measuredangle OBN = \frac{-}{2}$.



19. Дадени се три неколинеарни точки A, B, H. Конструирај триаголник ABC ако A и B се темиња на тој триаголник, а H е ортоцентар.

Решение. Ја цртаме отсечката AB, а потоа ги повлекуваме правите $p \equiv AH$ и $q \equiv BH$. Потоа над страната AB, како над дијаметар, опишуваме кружница која p и q ги сече во точките D и E. Триаголниците ABD и ABE се правоаголни, што значи дека точките D и E се подножја на висините повлечени од темињата A и B. Во пресекот на правите BD и AE го добиваме темето C. Направи цртеж!

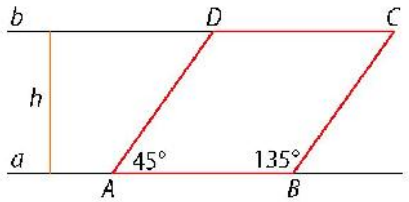
20. Дадени се три неколинеарни точки A, B и T. Конструирај триаголник ABC ако точките A и B се темиња на тој триаголник, а точката T е негово тежиште.

Решение. Ја повлекуваме полуправата AT. Тежиштето T ја дели тежишната линија AA' во однос $\overline{AT} : \overline{TA'} = 2:1$. Конструираме симетрала s на отсечката AT и нека $s \cap AT = M$. Наоѓаме точка A' таква што T е средина на отсечката MA'. Ја повлекуваме полуправата BA' и на неа наоѓаме точка C таква што A' е средина на BC. Со тоа триаголникот ABC е конструиран.

21. Конструирај ромб со висина $h = 4\,cm$ и еден внатрешен агол еднаков на 135°.

Решение. *Анализа*. Нека $ABCD$ е ромбот кој треба да го конструи-

раме и нека $\measuredangle ABC = 135^\circ$. Тогаш аголот кај темето A е суплементен на аголот кај темето B, па затоа $\measuredangle BAD = 45^\circ$. Понатаму, правите на кои припаѓаат страните AB и CD се паралелни и се на растојание h една од друга.



Конструкција. а) Конструираме паралелни прави a и b кои е се на растојание $h = 4\,cm$ една од друга.

б) На правата a избираме произволна точка A во која конструираме агол од 45° чиј еден крак е на правата a.

в) Во пресекот на правата b и кракот на конструираниот агол го наоѓаме темето D. Отсечката AD е еднаква на страната на ромбот $ABCD$.

г) На правата a ја пренесуваме отсечката AD и го добиваме темето B, а со пренесување на истата отсечка на правата b го добиваме темето C.

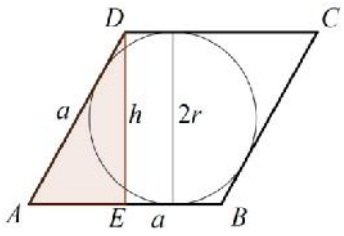
Доказ. Следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение до складност.

22. Конструирај ромб $ABCD$ кај кој еден внатрешен агол е еднаков на 120° и радиусот на впишаната кружница е еднаков на $2\,cm$.

Решение. *Анализа*. Дијаметарот на впишаната кружница е еднаков на висината на ромбот, што значи дека всината на ромбот е еднаква на $4\,cm$. Ако еден од внатрешните агли е еднаков на 120°, тогаш другиот агол е еднаков на 60°.

Конструкција. Последователно имаме:

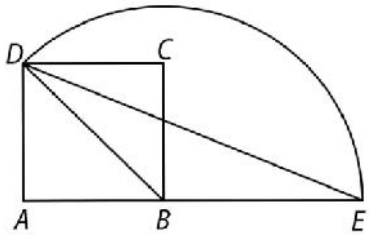


- конструираме правоаголен триаголник ADE за кој се дадени агол од 60° и спротивната катета со должина $4\,cm$ (цртеж десно),
- од темето A на полуправата AE ја на-несуваме должина-та на страната на ромбот $a = \overline{AD}$, со што го добиваме темето B,
- во пресекот на кружните лаци со центри во точките B и D и радиуси еднакви на a го добиваме темето C.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.
Дискусија. Задачата има единствено решение до складност.

23. Конструиран квадрат кај кој збирот на страната и дијагоналата е еднаков на $10\,cm$.

Решение. *Анализа*. Нека претпоставиме дека $ABCD$ е бараниот квадрат. На правата AB определу-ваме точка E таква што $\overline{BE} = \overline{BD}$ (цртеж десно). За триаголникот AED имаме: $\measuredangle EAD = 90^\circ$, отсечката AE е еднаква на дадениот збир на страната и дијагоналата на квадратот и $\measuredangle AED = \frac{1}{2}\measuredangle ABD = 22^\circ 30'$.



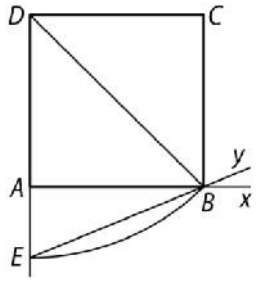
Конструкција. Конструираме отсечка $\overline{AE} = 10\,cm$ и над неа од иста страна на правата AE агли $\measuredangle(AE, Ax) = 90^\circ$ и $\measuredangle(EA, Ey) = 22^\circ 30'$. Во пресекот на полуправите Ax и Ey ја определуваме точката D. На полуправата AE определуваме точка B таква што $\overline{AB} = \overline{AD}$. Темето C го наоѓаме во прескот на кружници со центри во B и D и радиус $r = \overline{AB}$.

Доказ. Според конструкцијата четириаголникот $ABCD$ е ромб со еден прав агол, па затоа е квадрат. Јасно, $\measuredangle ABD = 45^\circ$. За триаголникот BED надворешниот агол во темето B е $\measuredangle ABD$, па оттука следува дека $\measuredangle BED = \measuredangle EDB = 22^\circ 30'$, односно $\overline{BE} = \overline{BD}$. Значи, кај конструираниот квадрат збирот на страната и дијагоналата е AE ,односно $10\,cm$.

Дискусија. Задачата има единствено решение до складност.

24. Конструирај квадрат кај кој разликата на дијагоналата и страната е еднаква на $2\,cm$.

Решение. *Анализа*. Нека претпоставиме дека $ABCD$ е бараниот квад-рат и нека E е точка на полуправата DA таква што $\overline{DE} = \overline{DB}$. Триаголникот EBD е рамнокрак, па затоа важи



$$\measuredangle DEB = \measuredangle DBE = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67^\circ 30'.$$

Според тоа, триаголникот EBA е правоаголен со даден остар агол $\measuredangle AEB = 67^\circ 30'$ и катета еднаква на дадената разлика на дијагоналата и страната на квадратот $ABCD$, па затоа може да се конструира.

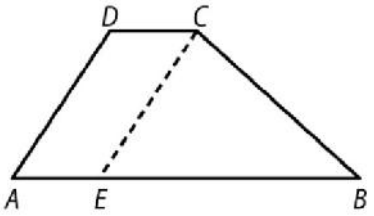
Конструкција. Конструираме отсечка $\overline{AE} = 2\,cm$ и агли $\measuredangle EAx = 90^\circ$ и $\measuredangle AEy = 67^\circ 30'$, од иста страна на правата AE. Во пресекот на полуправите Ax и Ey ја наоѓаме точката B, со што е определена страна AB. Сега лесно се конструира квадратот $ABCD$.

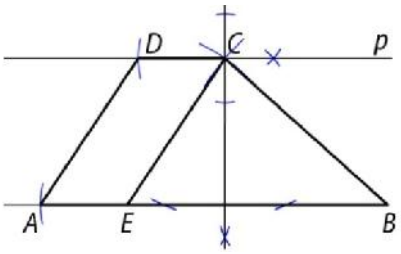
Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

25. Конструирај трапез $ABCD$ ако е $AB \| CD$, $\overline{AB} = 8\,cm$, $\overline{CD} = 2\,cm$, $\overline{AD} = 4\,cm$ и $\overline{BC} = 5\,cm$.

Решение. *Анализа*. Нека $ABCD$ е бараниот трапез и нека E е точка на основата AB таква што $\overline{AE} = \overline{CD}$, види цртеж. Тогаш четириаголникот $AECD$ има еден пар паралелни и еднакви страни, па е паралелограм. Според тоа, EC е паралелна е еднаква на AD. Значи, за триаголниот EBC се познати неговите страни $\overline{EB} = \overline{AB} - \overline{CD} = 6\,cm$, $\overline{EC} = 4\,cm$ и $\overline{BC} = 5\,cm$, па затоа тој може да се конструира.





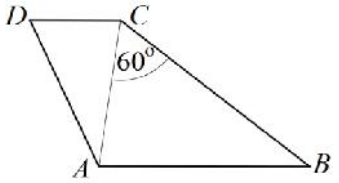
Конструкција. Цртаме отсечка $\overline{EB} = 6\,cm$, а потоа конструираме кружници $k'(E, 4\,cm)$ и $k''(B, 5\,cm)$ во чиј пресек е определено темето C. На правата EB определуваме точка A така што E е меѓу A и B и $\overline{EA} = 2\,cm$. Понатаму, конструираме полуправа Cp паралелна на правата AB и определуваме точка D таква што $\overline{CD} = 2\,cm$.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение до складност.

26. Конструирај трапез $ABCD$ $(AB \| CD)$ таков што $\overline{AB} = 7\,cm$, $\overline{AC} = 5\,cm$, $\overline{CD} = 3\,cm$ и $\measuredangle ACB = 60^\circ$.

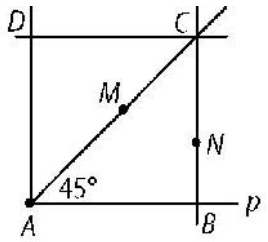
Решение. Бараниот трапез може да се конструира на следниов начин:



- прво го конструираме триагоникот ABC за кој ни се познати две страни и аголот наспроти поголемата страна,
- низ точката C конструираме права паралелна на правата AB,
- од точката C нанесуваме отсечка $3\,cm$ и годобиваме темето D (точките B и D се на различни страни на правата AC).

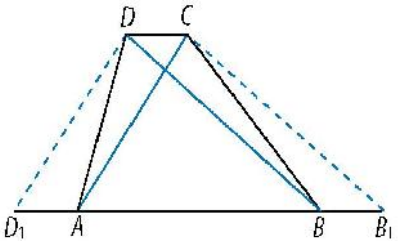
27. Конструирај квадрат $ABCD$, ако се дадени темето A, точка M која припаѓа на дијагоналата AC и точка N која припаѓа на страната BC.

Решение. Ја повлекуваме правата AM на која лежи дијагоналата AC. Конструираме $\measuredangle MAp = 45^\circ$. Темето B припаѓа на полуправата p. Од точката N повлекуваме нормала q на полуправата p и во пресекот на q со полуправатите p и AM ги наоѓаме темињата B и C, соодветно. Сега, лесно се конструира темето D.



28. Конструирај трапез $ABCD$ ако е познато дека $AB \| CD$, $\overline{AB} = 8\,cm$, $\overline{CD} = 2\,cm$, $\overline{BD} = 8\,cm$ и $\overline{AC} = 6\,cm$

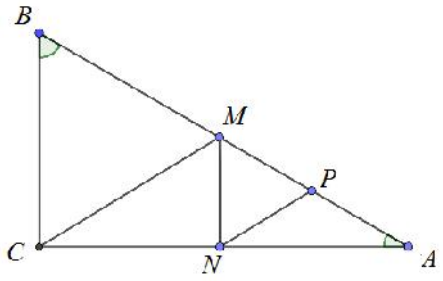
Решение. Прво конструираме отсечка AB_1 таква што $\overline{AB_1} = \overline{AB} + \overline{BB_1} = \overline{AB} + \overline{DC} = 10\,cm$, при што имаме распоред $A - B - B_1$. Потоа го конструираме триаголникот AB_1C со страни $\overline{AC} = 6\,cm$, $\overline{AB_1} = 10\,cm$ и $\overline{B_1C} = \overline{BD} = 8\,cm$. Таа го добивме темето C. Аналогно го конструираме триаголникот D_1BD чии страни се $\overline{BD} = 8\,cm$, $\overline{D_1B} = \overline{D_1A} + \overline{AB} = \overline{DC} + \overline{AB} = 10\,cm$ и $\overline{D_1D} = \overline{AC} = 6\,cm$, со распоред $D_1 - A - B$. Четириаголникот $ABCD$ е бараниот трапез. Докажи!



5.3. ПЕРИМЕТАР И ПЛОШТИНА НА РАМНИНСКИ ФИГУРИ

1. За аглите на правоаголниот триаголник ABC важи $\measuredangle ABC = 2\measuredangle CBA$ и $\overline{BC} = 8\,cm$. Точката M е средина на хипотенузата AB, точката N е средина на катетата AC и точката P е средина на отсечката AM. Пресметај ја должината на искршената линија $BCMNPA$.

Решение. Од условот на задачата следува $\measuredangle ABC = 60^\circ$ и $\measuredangle CBA = 30^\circ$. Според тоа, триаголникот ABC е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{AB} = 2\overline{BC} = 16\,cm$. Сега, M е средина на хипотенузата AB, па затоа M е центар на опишаната кружница околу правоаголниот триаголник ABC, односно $\overline{CM} = \overline{BM} = 8\,cm$. Понатаму, N е средина на AC, па затоа MN е средна линија на триаголникот ABC, од каде следува дека $MN \parallel BC$. Оттука и од $\measuredangle BCA = 90^\circ$ следува дека $\measuredangle MNA = 90^\circ$, што значи дека триаголникот AMN е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AM} = 4\,cm$. Сега, P е средина на хипотенузата AM, па затоа P е центар на опишаната кружница околу правоаголниот триаголник AMN, односно $\overline{PN} = \overline{PA} = 4\,cm$. Конечно,



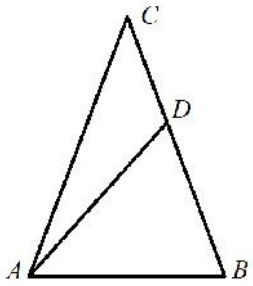
$$L_{BCMNPA} = \overline{BC} + \overline{CM} + \overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PA} = 8 + 8 + 4 + 4 + 4 = 28\,cm.$$

2. Нека D е точка на кракот BC на рамнокракиот триаголник ABC, таква што $2\overline{DC} = \overline{BD}$. Определи ја должината на основата AB на овој триаголник ако е познато дека неговиот периметар е $25\,cm$ и дека периметарот на триаголникот ABD е за $1\,cm$ поголем од периметарот на триаголникот ADC.

Решение. Нека $L_{ADC} = x$. Од условот на задачата следува равенството $L_{ABD} = L_{ADC} + 1$, односно $L_{ABD} = x + 1$. Понатаму,

$$L_{ABD} + L_{ADC} = L_{ABC} + 2\overline{AD},$$

па затоа $2x+1=25+2\overline{AD}$, т.е. $x=12+\overline{AD}$.



Понатаму, од $2\overline{DC}=\overline{BD}$ следува

$$\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{DC}+\overline{BD}=3\overline{DC}.$$

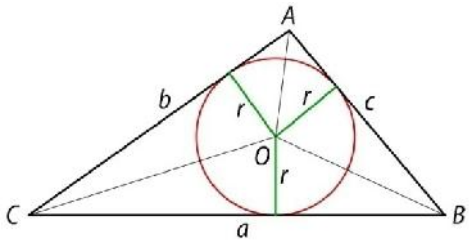
Значи,

$$\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{AD}=12+\overline{AD},$$
$$3\overline{CD}+\overline{CD}=12,$$
$$\overline{CD}=3\,cm.$$

Конечно, $\overline{AC}=3\overline{DC}=9\,cm$ и $\overline{AB}=25-2\cdot 9=7\ cm$.

3. Должините на страните на еден триаголник се три последователни парни природни броеви. Определи ги страните на триаголникот ако неговата плоштина е еднаква на $24\,cm^2$, а радиусот на впишаната кружница е $2\,cm$.

Решение. Нека a,b,c се должините на страните на триаголникот ABC и нека r е радиусот на впишаната кружница. Имаме



$$a=2k-2, b=2k, c=2k+2$$

каде $k\in\mathbb{N}$. Понатаму, за секој триаголник важи

$$P_{ABC}=P_{ABO}+P_{AOC}+P_{OBC}=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}=\frac{a+b+c}{2}r.$$

Значи, $\frac{(2k-2)+2k+(2k+2)}{2}\cdot 2=24$, од каде добиваме $6k=24$, односно $k=4$. Значи, должините на страните на триагоникот се

$$a=2\cdot 4-2=6\,cm, b=2\cdot 4=8\,cm, c=2\cdot 4+2=10\,cm.$$

4. Нека M е средината на хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC. Ако периметрите на триаголниците ABC, AMC и BMC се редоследно $80\,cm, 50\,cm$ и $64\,cm$, пресметај ги нивните плоштини.

Решение. Бидејќи точката M е средина на хипотенузата добиваме дека должината на CM е еднаква на половина од хипотенузата. За периметрите на триаголниците важи

$$L_{ABC}=a+b+c=80,$$

$$L_{AMC} = b + \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = b + c = 50 \text{ и}$$

$$L_{BMC} = a + \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = a + c = 64.$$

Ако од првата равенка ја одземеме втората добиваме $a = 30\,cm$, а ако од првата ја одземеме втората добиваме $b = 16\,cm$. Според тоа, $c = 34\,cm$. Значи, плоштините на триаголниците се:

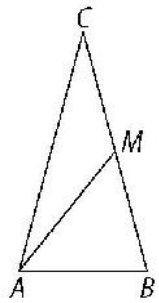
$$P_{ABC} = \frac{30 \cdot 16}{2} = 240\,cm^2,\ P_{AMC} = P_{BMC} = \frac{P_{ABC}}{2} = 120\,cm^2.$$

5. Основата AB на рамнокракиот триаголник ABC е долга $8\,cm$. Тежишната линија AM го дели овој триаголник на два триаголника чии периметри се разликуваат за $2\,cm$.

а) Определи ја должината на кракот на триаголникот ABC.

б) Спореди ги плоштините на двата триаголника.

Решение. а) Ако основата, кракот и тежишната линија на триаголникот ABC ги означиме со a, c и m, тогаш $L_{ABM} = a + m + 0{,}5c$ и $L_{ACM} = c + 0{,}5c + m$. Можни се два случаја:

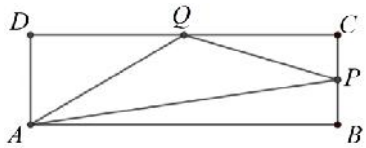


1) $L_{ABM} - L_{ACM} = 2$, од каде следува $a - c = 2$, па затоа $c = 6\,cm$,
2) $L_{ACM} - L_{ABM} = 2$, од каде следува $c - a = 2$, па затоа $c = 10\,cm$.

б) Триаголниците ABM и ACM имаат еднакви страни BM и CM и заедничка висина повлечена од темето A, па затоа нивните плоштини се еднакви.

6. Нека P и Q се редоследно средините на страните BC и CD на правоаголникот $ABCD$. Колкав дел од плоштината на правоаголникот $ABCD$ е плоштината на триаголникот APQ?

Решение. Нека $\overline{AB} = a$ и $\overline{BC} = b$. Тогаш $\overline{BP} = \overline{PC} = \frac{b}{2}$ и $\overline{DQ} = \overline{QC} = \frac{a}{2}$, па затоа



$$P_{APQ} = P_{ABCD} - P_{ABP} - P_{CPQ} - P_{QDA} = ab - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} - \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{a}{2}$$

$$= \frac{8ab - 2ab - ab - 2ab}{8} = \frac{3ab}{8}.$$

Според тоа,

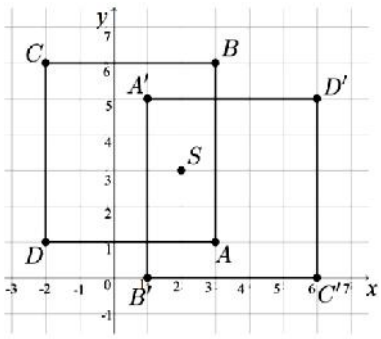
$$P_{APQ} : P_{ABCD} = ab : \frac{3ab}{8} = \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\% .$$

7. Во правоаголен координатен систем се зададени точка $S(2,3)$ и квадрат $ABCD$ за кој се познати три темиња $A(3,1), C(-2,6)$ и $D(-2,1)$. Квадратот $A'B'C'D'$ е централно симетричен на квадратот $ABCD$ во однос на точката S. Определи ги координатите на точките B, A', B', C', D' и плоштината на пресекот на квадратите $ABCD$ и $A'B'C'D'$.

Решение. Координатите на точките се:

$B(3,6)$, $A'(1,5)$, $B'(1,0)$,

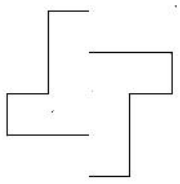
$C'(6,0)$ и $D'(6,5)$.



Пресекот на двата квадрати е правоаголник со должини на страни 2 и 3 и затоа неговата плоштина е

$$P = 2 \cdot 3 = 6 .$$

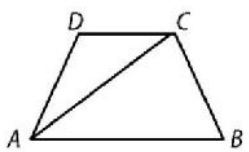
8. Фигурата на цртежот е составена од 4 складни правоаголници, кај кои едната страна е два пати подолга од другата. Пресметај го периметарот на оваа фигура, ако нејзината плоштина е $72cm^2$.



Решение. Ако плоштината на фигурата $72cm^2$, тогаш плоштината на секој правоаголник е $18cm^2$. Бидејќи едната страна е два пати подолга од другата имаме $2a \cdot a = 18$, т.е. $a = 3\,cm$. Значи, страните на правоаголникот се $3\,cm$ и $6\,cm$. Конечно, периметарот на дадената фигура е: $8a + 4 \cdot 2a = 16a = 48\,cm$.

9. Во рамнокрак трапез кракот е за $10\,cm$ пократот од подолгата основа, а периметарот на трапезот е $34\,cm$. Определи ги страните на трапезот, ако дијагоналата AC е симетрала на аголот A.

Решение. Бидејќи дијагоналата AC е симетрала на аголот A имаме $\angle BAC = \angle CAD$, а $\angle BAC = \angle ACD$ како агли со паралелни краци. Според тоа, $\angle CAD = \angle ACD$, па затоа триагол-



никот ACD е рамнокрак. Значи, $\overline{AD}=\overline{DC}$, односно $b=c$. Знаеме дека

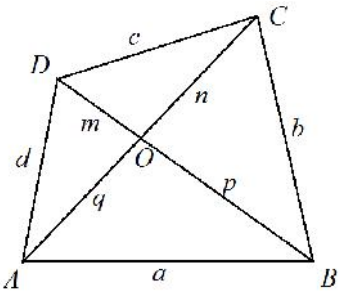
$$a=c+10,\ L=a+b+2c$$

и затоа $34=c+10+c+2c$, т.е. $c=6\,cm$. Значи, $b=6\,cm$ и $a=16\,cm$.

10. Нека L е периметарот на конвескен четириаголник и нека се d' и d'' неговите дијагонали. Докажи дека $d'+d'<L<2(d'+d'')$.

Решение. Нека при ознаките на цртежот десно $m+p=d'$ и $n+q=d''$. Од неравенството на триаголник следува

$$d'<a+d,\quad d'<b+c,$$
$$d''<c+d,\quad d''<a+b.$$



Ако ги собереме горните неравенства и добиеното неравенство го поделиме со 2, добиваме

$$d'+d''<a+b+c+d=L.$$

Повторно од неравенството на триаголник следува

$$c<m+n,\ d<m+q,\ a<q+p,\ b<n+p.$$

Ако ги собереме горните неравенства, добиваме

$$L=a+b+c+d<2m+2n+2p+2q=2(d'+d'').$$

11. Нека P,Q,R,S се средините на страните AB,BC,CD,DA на конвексниот четириголник $ABCD$ и нека L е неговиот периметар. Докажи дека $2(\overline{PR}+\overline{QS})\le L$.

Решение. Нека E е средината на дијагоналата AC. Тогаш

$$\overline{PR}\le\overline{PE}+\overline{ER},\quad \overline{QS}\le\overline{SE}+\overline{QE},$$

па затоа

$$\overline{PR}+\overline{QS}\le\overline{PE}+\overline{ER}+\overline{SE}+\overline{EQ}.$$

Бидејќи PE,ER,SE,EQ се средни линии на триаголниците ABC и ACD, добиваме

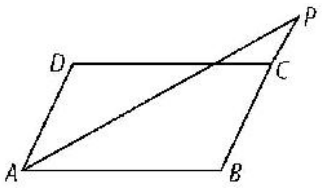
$$\overline{PE}=\frac{\overline{BC}}{2},\ \overline{ER}=\frac{\overline{AD}}{2},\ \overline{SE}=\frac{\overline{CD}}{2},\ \overline{EQ}=\frac{\overline{AB}}{2}.$$

Според тоа,

$$\overline{PR}+\overline{QS}\le\frac{\overline{BC}}{2}+\frac{\overline{AD}}{2}+\frac{\overline{CD}}{2}+\frac{\overline{AB}}{2},\ \text{т.е. } 2(\overline{PR}+\overline{QS})\le L.$$

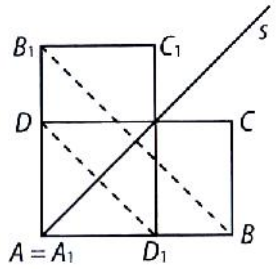
12. Во паралелограм $ABCD$ симетралата на аголот A го сече продолжението на страната BC во точката P. Ако $\overline{CP}=5\,cm$, а периметарот на паралелограмот е $56\,cm$, пресметај ги должините на страните на паралелограмот.

Решение. Бидејќи AP е симетрала на аголот A, добиваме $\measuredangle BAP=\measuredangle PAD$, а $\measuredangle BPA=\measuredangle PAD$ како агли со паралелни краци. Значи, $\measuredangle BAP=\measuredangle BPA$, т.е. триаголникот APB е рамнокрак. Оттука следува $\overline{AB}=\overline{BP}=a$, па како $\overline{BP}=\overline{BC}+\overline{CP}=b+5$, добиваме дека $a=b+5$. Според тоа, $L=2(a+b)=2(b+5+b)=4b+10$, што значи $4b+10=56$, т.е. $b=11{,}5\,cm$ и $a=16{,}5\,cm$.

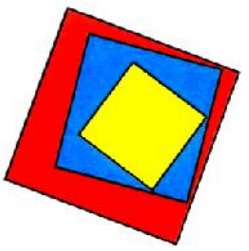


13. Даден е правоаголник $ABCD$ $(\overline{AB}>\overline{BC})$. Нека s е симетралата на $\measuredangle BAD$, D_1 е точката симетрична на точката D во однос на правата s и B_1 е точката симетрична на точката B во однос на правата s. Ако $\overline{AD_1}=4\,cm$ и $\overline{AB_1}=10\,cm$, пресметај го периметарот на правоаголникот $ABCD$.

Решение. Бидејќи оската на симетрија е симетралата на $\measuredangle BAD$, полуправата AB се пресликува на полуправата AD и обратно. Значи, точката D_1, сликата на точката D, се наоѓа на полуправата AB, а точката B_1, сликата на точката B, се наоѓа на полуправата AD. При осната симетрија се запазуваат должините на отсечките, па затоа $\overline{AD}=\overline{AD_1}=4\,cm$ и $\overline{AB}=\overline{AB_1}=10\,cm$. Конечно, периметарот на правоаголникот $ABCD$ е: $L=2(\overline{AD}+\overline{AB})=2(4+10)=24\,cm$.



14. Ивана нацртала и обоила три квадрати како на цртежот десно. Должините на страните на квадратите се $8\,cm, 12\,cm$ и $16\,cm$. За колку проценти е поголема плоштината на црвениот од плоштината на синиот дел?



Решение. Плоштината на црвениот дел е $16^2 - 12^2 = 112\,cm^2$. Плоштината на синиот дел е $12^2 - 8^2 = 80\,cm^2$. Конечно, од

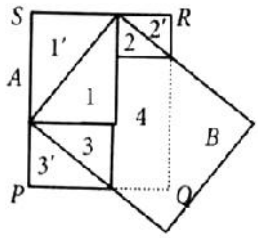
$$(112:80)\cdot 100 - 100 = 40$$

заклучуваме дека плоштината на црвениот дел е 40% поголема од плоштината на синиот дел.

15. На правоаголник A е поставен нему складен правоаголник B, така да две негови темиња лежат на соседни страни на правоаголникот A, додека само една теме од правоаголникот A е покриено со правоаголникот B. Кој дел од правоаголникот A има поголема плоштина, оној што е покриен со правоаголникот B или другиот непокриен дел?

Решение. Темињата на правоаголникот A да ги означиме со P, Q, R, S.

Ако правоаголникот B го покрива темето Q, тогаш плоштините на откриените делови $1', 2', 3'$ се соодветно еднакви на плоштините на покриените делови $1, 2, 3$ (цртеж десно). Тоа значи дека покриениот дел на правоаголникот A е поголем од откриениот негов дел за плоштината на делот означен со 4.



Ако правоаголникот B го покрива темето S, тогаш очигледно покриениот дел на правоаголникот A е помал од неговиот откриен дел.

16. Периметарот на еден рамнокрак трапез е $20\,cm$, а радиусот на впишаната во него кружница е еднаков на $2\,cm$. Определи ја плоштината на овој трапез.

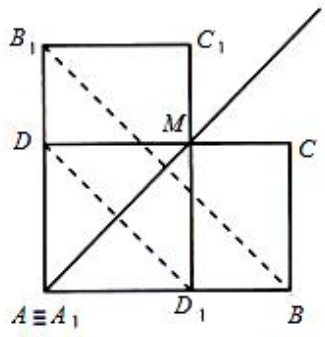
Решение. Трапез во кој може да се впише кружница е тангентен, па затоа $a + b = 2c$ (тангентните отсечки повлечени од иста точка се еднакви). Понатаму, $L = a + b + 2c = 2(a + b)$, па затоа $2(a + b) = 20$, односно $a + b = 10\,cm$. Бидејќи висината на трапезот е еднаква на дијаметарот на впишаната кружница, добиваме $h = 2r = 4\,cm$. Конечно, плоштината на трапезот е $P = \frac{a+b}{2}h = \frac{10}{2}\cdot 4 = 20\,cm^2$.

17. Нацртај правоаголник $ABCD$ ($\overline{AB} = 8\,cm, \overline{BC} = 5\,cm$), па конструирај ја симетралата s на $\angle BAD$. Пресликај го правоаголникот со осна симетрија во однос на правата s.

а) Што е фигурата $A_1B_1C_1D_1$ осносиметрична на правоаголникот $ABCD$.

б) Определи ги периметарот и плоштината на фигурата која е пресек на правоаголникот $ABCD$ и фигурата $A_1B_1C_1D_1$.

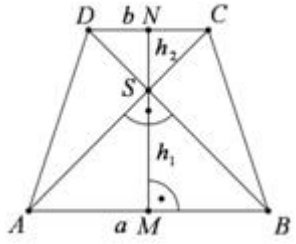
Решение. а) Со осна симетрија паралелни и еднакви отсечки се пресликуваат во паралелни и еднакви отсечки, а аглите се пресликуваат во еднакви агли. Значи, фигурите се пресликуваат во складни фигури, па затоа фигурата $A_1B_1C_1D_1$ е која е осносиметрична на правоаголникот е правоаголник со должини на страии $\overline{A_1B_1} = \overline{AB} = 8\,cm, \overline{B_1C_1} = \overline{BC} = 5\,cm$.



б) Нека M пресекот на осносиметричните прави CD и C_1D_1. Точката M припаѓа на симетралата s, точката D припаѓа на правата A_1B_1, точката D_1 припаѓа на правата AD и темето A_1 се совпаќа со темето A. Според тоа, пресекот на $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ е паралелограм. Овој паралелграм е квадрат бидејќи $\overline{A_1D_1} = \overline{AD} = 5\,cm$ и $\angle D_1AD = 90^\circ$. Должината на страната на квадратот е $5\,cm$, па затоа неговиот периметар е $20\,cm$, а плоштината е $25\,cm^2$.

18. Основите на рамнокрак трапез со нормални дијагонали изнесуваат $12\,cm$ и $8\,cvm$. Пресметај ја плоштината на трапезот.

Решение. Бидејќи дијагоналите на трапезот се нормални, важи $\angle ASB = 90^\circ$, па ΔABS е рамнокрак правоаголен и $\triangle AMS$ е рамнокрак правоаголен. Оттука, $h_1 = \frac{a}{2} = 6\,cm$. Слично, $h_2 = \frac{b}{2} = 4\,cm$. Значи, $h = h_1 + h_2 = 10\,cm$. Оттука,

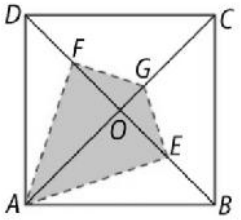


$$P = \frac{a+b}{2}h = 100\,cm^2.$$

19. Нека $ABCD$ е квадрат со страна a. Точката O е пресекот на дијагоналите AC и BD. Точките E и F се средини на отсечките BO и

DO, а точката G припаѓа на отсечката CO и е таква што $\overline{CG} = 3\overline{GO}$. Кој дел од плоштината на квадратот е плоштината на четириаголникот $AEGF$?

Решение. Од условот на задачата следува $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2}d$ и $\overline{OG} = \frac{1}{4}\overline{OC} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}d = \frac{1}{8}d$ и $\overline{AG} = \frac{5}{8}d$, каде со d е означена дијагоналата на дадениот квадрат. Понатаму, четириаголникот $AEGF$ е делтоид бидејќи неговите дијагонали се сечат под прав агол и дијагоналата AG е негова симетрала, па затоа $P_{AEGF} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}d\cdot\frac{5}{8}d = \frac{5}{32}d^2$. Од друга страна, плоштината на квадратот е $P_{ABCD} = \frac{1}{2}d^2$, па затоа важи



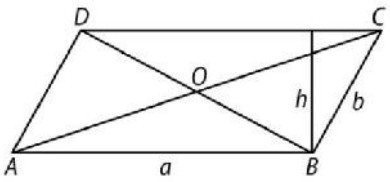
$$P_{AEGF} : P_{ABCD} = \frac{5}{32}d^2 : \frac{1}{2}d^2 = \frac{5}{16}.$$

Значи, плоштината на четириагол-никот $AEGF$ е еднаква на $\frac{5}{16}$ од плоштината на квадратот.

20. Периметарот на паралелограмот $ABCD$ е $60\,cm$. Точката O пресек на наговите дијагонали AC и BD. Разликата на периметрите на два од четирите триаголници ABO, BCO, CDO, DAO е $10\,cm$. Определи ја најголемата можна плоштина на паралелограмот.

Решение. Нека a и b се должините на страните ($a > b$). Од условот на задачата следува

$2(a+b) = 60$, т.е. $a+b = 30$.

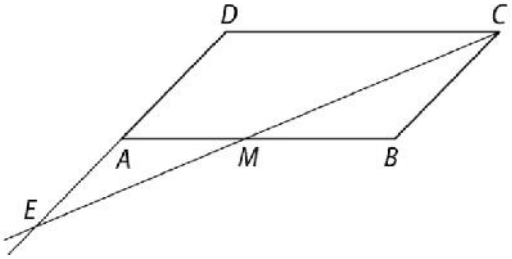


Од четирите триаголници, два по два имаат ист периметар, па $10\,cm$ е разликата на периметрите на триаголниците ABO и BCO и таа разлика е еднаква на $a-b$. Значи, $a-b = 10$. Од $a+b = 30$ и $a-b = 10$ наоѓаме $a = 20\,cm$ и $b = 10\,cm$. Плоштината на паралелограмот е $P = ah = 20h$ и истата е најголема можна кога $h = b$, односно кога паралелограмот е правоаголник. Значи, најголемата можна плоштина е $P = 200\,cm^2$.

21. Симетралата на остриот агол во темето C на паралелограмот $ABCD$ ја сече правата AD во точката E, при што $\overline{AE} = 5\,cm$. Определи ги

должините на страните на паралелограмот ако неговиот периметар е $50\,cm$.

Решение. Нека M е пресечната точка на правата CE и страната AB. Тогаш $BCM = \measuredangle MCD$ (правата MC е симетрала), $\measuredangle BCM = \measuredangle MEA$ (агли на трансферзала), $\measuredangle MCD = \measuredangle BMC$ (агли на трансферзала) и $\measuredangle MBC = \measuredangle EMA$ (накрсни агли).



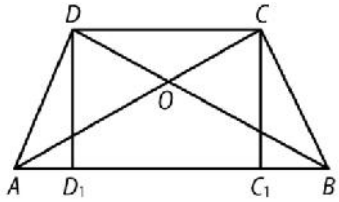
Според тоа, триаголниците AEM и BMC се рамнокраки, па затоа $\overline{AE} = \overline{AM} = 5\,cm$ и $\overline{BM} = \overline{BC} = x$. Значи, $2\cdot(x+5)+2x = 50$, од каде добиваме $x = 10\,cm$. Конечно, должините на страните на паралелограмот се $15\,cm$ и $10\,cm$.

22. Дијагоналите на трапезот $ABCD, (AB \| CD)$, се сечат во точката D. Докажи дека плоштините на триаголниците AOD и BOC се еднакви.

Решение. Од $\overline{DD_1} = \overline{CC_1}$ следува дека триаголниците ABD и ABC имаат еднакви плоштини (цртеж десно). Оттука следува

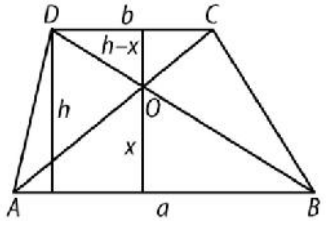
$$\begin{aligned} P_{AOD} &= P_{ABD} - P_{ABO} \\ &= P_{ABC} - P_{ABO} \\ &= P_{BOC}, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

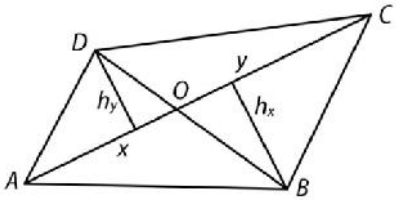


23. Дијагоналите на трапезот $ABCD\,(AB \| CD)$ се сечат во точката O. Докажи дека производот на плоштините на триаголниците AOD и BOC е еднаков на производот на плоштините на триаголниците AOB и COD. Дали ова тврдење важи за конвексен четириаголник кој не е трапез?

Решение. Нека h е висина на трапезот $ABCD$, а x е висина на триаголнокот ABO. Плоштината на триаголникот

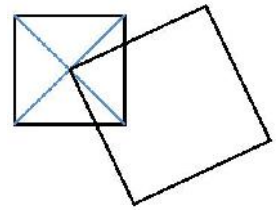


AOB е $\frac{ax}{2}$, плоштината на триаголникот COD е $\frac{b(h-x)}{2}$. Плоштината на триаголникот AOD е $\frac{ah}{2}-\frac{ax}{2}=\frac{a(h-x)}{2}$, а на триаголникот BOC е $\frac{bh}{2}-\frac{b(h-x)}{2}=\frac{bx}{2}$. Производот на плоштините на триаголниците AOD и BOC е еднаков $\frac{a(h-x)}{2}\cdot\frac{bx}{2}=\frac{abx(h-x)}{4}$. Производот на плоштините на триаголниците AOB и COD е еднаков на $\frac{ax}{2}\cdot\frac{b(h-x)}{2}=\frac{abx(h-x)}{4}$. Значи, бараните производи се меѓусебно еднакви.



Нека $ABCD$ е произволен конвексен четириаголник (цртеж лево). При ознаките како на цртежот плоштините на триаголниците ABO, OBC, COD и DOA се: $\frac{xh_x}{2},\frac{yh_x}{2},\frac{yh_y}{2}$ и $\frac{xh_y}{2}$. Производот на плоштините на триаголниците ABO и CDO е еднаков на $\frac{xh_x}{2}\cdot\frac{yh_y}{2}$, а производот на плоштините на триаголниците AOD и BOD е еднаков на $\frac{yh_x}{2}\cdot\frac{xh_y}{2}$. Значи, производите на плоштините се еднакви, што значи дека тврдењето важи и за произволен конвексен четириаголник.

24. Дадени се два квадрати така што едното теме на поголемиот квадрат се наоѓа во пресекот на дијагоналите на помалиот квадрат (види цртеж). Ако плоштината на заедничкиот дел на овие квадрати е $4\,cm^2$, определи ја должината на страната на помалиот квадрат.

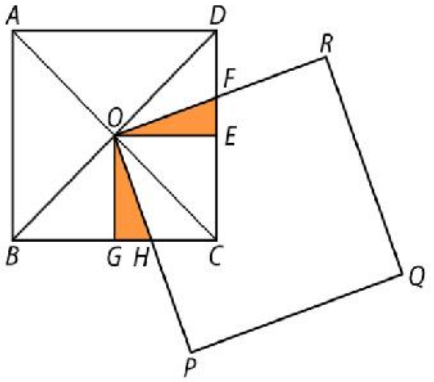


Решение. Да ги означиме теми-ња та на квадратите и соодветните пресечни точки (цртеж долу десно). Нека точките E и G се подножјата на нормалите повлечени од точката O на страните CD и CB соодветно. Нека a е должината на страната на помалиот квадрат. Имаме,

$$\overline{OE}=\overline{OG}=\frac{a}{2}\ \ \angle OEF=\angle OGH=90^\circ \text{ и}$$

$$\angle GOH=90^\circ-\angle HOE=\angle EOF,$$

па од признакот АСА следува дека триаголниците OEF и OGH се складни. Според условот на задачата плоштината на заедничкиот дел на двата квадрати, т.е. на четириаголникот $OHCF$ е $4\,cm^2$. Сега од складноста на триаголниците OEF и OGH следува



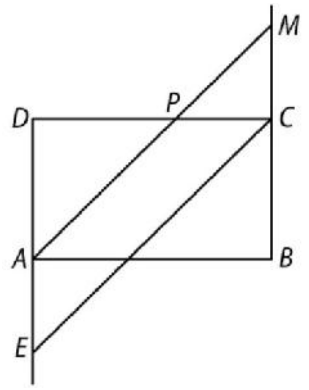
$$(\tfrac{a}{2})^2 = P_{GCEO} = P_{GHO} + P_{HCEO} = P_{EFO} + P_{HCEO} = P_{HCFO} = 4,$$

па затоа $\frac{a}{2} = 2$, т.е. $a = 4\,cm$.

25. Страните на правоаголникот $ABCD$ се еднакви на $5\,cm$ и $3\,cm$. Симетралата на $\angle BAD$ ја сече правата BC во точката M така што $B - C - M$. Симетралата на $\angle BCD$ ја сече правата DA во точка E така што $D - A - E$. Определи ја плоштината на четириаголникот $ECMA$.

Решение. Нека правата AM ја сече CD во точката P. Бидејќи AM е симе-трала на $\angle BAD$ триагониците ADP и PCM се размнокраки. Значи,

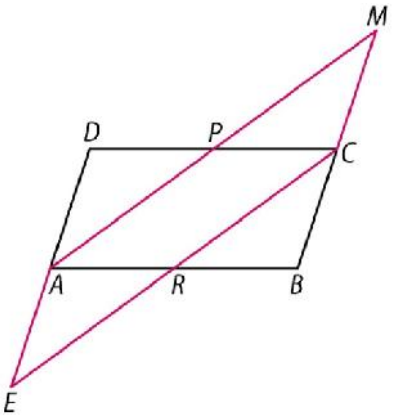
$$\overline{AD} = \overline{DP} = 3\,cm \text{ и } \overline{PC} = \overline{CM} = 2\,cm.$$



На ист начин добиваме дека $\overline{AE} = 2\,cm$. Според тоа, четириаголникот $ECMA$ има пар еднакви и паралелни страни $\overline{AE} = \overline{CM} = 2\,cm$, па затоа тој е паралелограм. Висината на овој паралелограм која соодветствува на овие страни е $\overline{AB} = 5\,cm$. Конечно, плоштината на четириаголникот $ECMA$ е еднаква на $10\,cm^2$.

26. Страните на паралелограмот $ABCD$ се $8\,cm$ и $4\,cm$. Симетралата на $\angle BAD$ ја сече правата BC во точка M, така што $B - C - M$, а симетралата на $\angle BCD$ ја сече правата DA во точка E таква што $D - A - E$. Спореди ја плоштината на чеириаголникот $ECMA$ и плоштината на паралелограмот $ABCD$

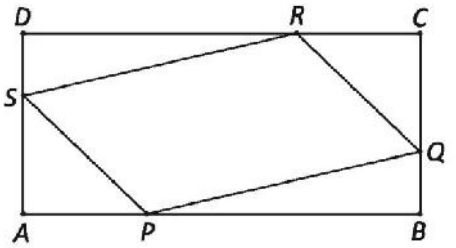
Решение. Нека AM ја сече CD во точката P. Бидејќи AM е симетрала $\angle BAD$ триаголниците ADP и PCM се рамнокраки, па затоа $\overline{AD}=\overline{DP}=4\,cm$ и $\overline{PC}=\overline{CM}=4\,cm$ (цртеж десно). Аналогно се докажува дека $\overline{AE}=4\,cm$. Според тоа, четириаголникот $ECMA$ има пар спротивни еднакви и паралелни страни, па затоа тој е паралелограм. Сега, паралелограмите $ECMA$ и $ABCD$ имаат еднакви основи $\overline{BC}=\overline{CM}=4\,cm$ и еднакви висини повлечени кон овие основи (растојанието од темето C до правата AD), па затоа паралелограмите $ECMA$ и $ABCD$ имаат еднакви плоштини.



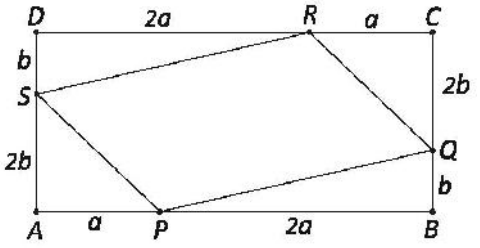
27. Точките P,Q,R,S ги делат страните на правоаголникот $ABCD$ во однос $1:2$ (види цртеж!)

а) Докажи дека четириаголникот $PQRS$ е паралелограм.

б) Определи го односот на плоштините на паралелограмот $PQRS$ и правоаголникот $ABCD$.



Решение. а) При ознаките како на цртежот десно триаголниците APS и CRQ се слични, па затоа важи $\overline{SP}=\overline{QR}$. Аналогно се докажува дека $\overline{PQ}=\overline{RS}$. Според тоа, четириаголникот $PQRS$ има два пара еднакви спротивни страни, па затоа тој е паралелограм.



б) За плоштината на правоаголникот добиваме

$$P_{ABCD}=3a\cdot 3b=9ab\,.$$

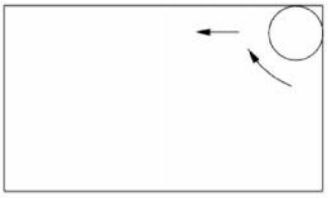
Понатаму,

$$P_{PQRS} = P_{ABCD} - (P_{SAP} + P_{PBQ} + P_{QCR} + P_{RDS})$$
$$= 9ab - (\frac{2ab}{2} + \frac{2ab}{2} + \frac{2ab}{2} + \frac{2ab}{2})$$
$$= 5ab,$$

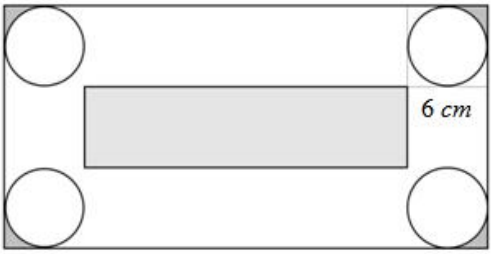
па затоа

$$P_{PQRS} : P_{ABCD} = 5ab : (9ab) = 5 : 9 .$$

28. Круг со радиус $3\,cm$ од внатрешната страна на правоаголникот должина $25\,cm$ и ширина $20\,cm$ се тркала по неговите страни (види цртеж). Одреди ја плоштината на оној дел од правоаголникот кој не се покрива при тркалањето на кругот.



Решение. Јасно, при тркалањето на кругот нема да се покријат осенчените делови од аглите на правоаголникот. Понатаму, бидејќи дијаметарот на кругот е $6\,cm$, при неговото тркалање ќе се покријат сите останати точки од правоаголникот кои од неговите страни се на растојание помало или еднакво од $6\,cm$. Значи, при тркалањето на кругот нема да се покрие осенчениот правоаголник чии страни се еднакви на



$$25 - 2 \cdot 6 = 13\,cm \text{ и } 20 - 2 \cdot 6 = 8\,cm .$$

Конечно, плоштината на непокриениот дел од правоаголникот ќе биде еднаква на

$$8 \cdot 13 + 6^2 - ® \cdot 3^2 = 140 - 9®\,.$$

29. За аглите на $\triangle ABC$ важи $\measuredangle ABC = \frac{7}{2}\measuredangle CAB$ и $\measuredangle BCA = \frac{3}{2}\measuredangle CAB$. Симетралата на страната AC ги сече симетралата AD на $\measuredangle CAB$ и страната AB во точките M и K, соодветно. Докажи дека $\triangle BCM$ е рамнокрак и пресметај го периметарот на четириаголникот $BCMK$, ако важи $\overline{AM} + \overline{MK} = 6\,cm$.

Решение. Од условот на задачата следува

$$\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = 180^\circ,$$

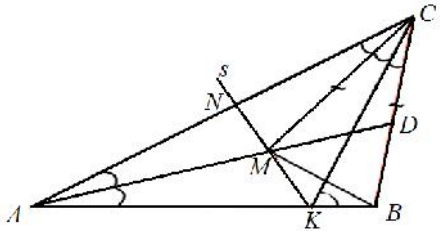
$$\frac{7}{2}\measuredangle CAB + \frac{3}{2}\measuredangle CAB + \measuredangle CAB = 180^\circ,$$

$$6\measuredangle CAB = 180^\circ,$$

$$\measuredangle CAB = 30^\circ,$$

па затоа

$$\measuredangle BCA = 45^\circ, \measuredangle ABC = 105^\circ.$$



Понатаму, $M, K \in s$, па затоа важи $\overline{AM} = \overline{CM}$ и $\overline{AK} = \overline{CK}$, т.е. триаголниците ACM и ACK се рамнокраки. Тоа значи дека

$$\measuredangle KAC = \measuredangle ACK = 30^\circ.$$

Понатаму, бидејќи AM е симетрала на $\measuredangle CAK$, добиваме дека

$$\measuredangle KAM = \measuredangle MAC = 15^\circ.$$

Но, $\triangle ACM$ е рамнокрак па затоа важи

$$\measuredangle ACM = \measuredangle CAM = 15^\circ,$$

од што следува дека

$$\measuredangle MCK = \measuredangle ACK - \measuredangle ACM = 15^\circ$$

и затоа

$$\measuredangle KCB = \measuredangle ACK - \measuredangle MCK = 15^\circ.$$

Сега, од $\triangle BCK$ следува

$$\measuredangle BKC = 180^\circ - (\measuredangle KBC + \measuredangle BCK) = 180^\circ - (105^\circ + 15^\circ) = 60^\circ,$$

а од правоаголниот $\triangle KCN$ следува

$$\measuredangle MKC = \measuredangle NKC = 180^\circ - (\measuredangle KNC + \measuredangle NCK) = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ.$$

Понатаму, од

$$\measuredangle MKC = \measuredangle BKC = 60^\circ,\ \measuredangle MCK = \measuredangle BCK = 15^\circ \text{ и } \overline{KC} = \overline{KC}$$

следува дека $\triangle MKC \cong \triangle BKC$. Од докажаната складност следува $\overline{MC} = \overline{BC}$, што значи дека $\triangle BCM$ е рамнокрак.

Од условот на задачата иимаме $\overline{AM} + \overline{MK} = 6\,cm$, па како $\overline{AM} = \overline{CM}$, добиваме $\overline{CM} + \overline{MK} = 6\,cm$. Конечно, од $\triangle MKC \cong \triangle BKC$ следува

$$L_{BCMK} = \overline{CM} + \overline{MK} + \overline{KB} + \overline{BC} = 2(\overline{CM} + \overline{MK}) = 12\,cm.$$

5.4. РАЗНИ ЗАДАЧИ

1. Дадена е отсечката $\overline{AB} = 30{,}12\ cm$. Точките O, M, K се на таа отсечка така што отсечката AM е три пати подолга од отсечката MB и $\overline{AO} = \overline{KB} = 10{,}14\ cm$. Како е распоредот на точките A, B, O, M, K и колкаво е растојанието меѓу соседните точки?

   Решение. Од $\overline{AM} = 3\overline{MB}$ следува $\overline{MB} = 30{,}12 : 4 = 7{,}53\ cm$, односно $\overline{AM} = 22{,}59\ cm$. Понатаму, од условот на задачата следува распоредот на точките $A - O - K - M - B$ и

   $$\overline{AO} = 1{,}14\ c,$$
   $$\overline{OK} = 30{,}12 - 2 \cdot 10{,}14 = 9{,}84\ cm,$$
   $$\overline{MB} = 7{,}53\ cm,$$
   $$\overline{KM} = 10{,}14 - 7{,}53 = 2{,}61\ cm.$$

2. Дадена е отсечка $\overline{AB} = 30{,}12\ cm$. Точките O, M, K на оваа отсечка се такви што отсечката AM е четири пати пократка од отсечката MB и $\overline{AO} = \overline{KB} = 2014\ cm$. Каков е распоредот на точките A, B, O, M, K и колкави се растојанијата меѓу соседните точки?

   Решение. Од $\overline{AM} = 4\overline{MB}$ следува $\overline{AM} = 30{,}12 : 5 = 6{,}024\ cm$, односно $\overline{MB} = 24{,}096\ cm$. Понатаму, од условот на задачата следува дека распоредот на точките е $A - M - K - O - B$ и дека

   $$\overline{AM} = 6{,}024\ cm,$$
   $$\overline{MK} = 30{,}12 - 20{,}14 - 6{,}024 = 3{,}956\ cm,$$
   $$\overline{KO} = 20{,}14 - 6{,}024 - 3{,}956 = 10{,}16\ cm,$$
   $$\overline{OB} = 30{,}12 - 20{,}14 = 9{,}98\ cm.$$

3. Нека D, E, F се соодветно средините на страните BC, CA, AB на триаголникот ABC. Докажи дека центарот на опишаната кружница на триаголникот ABC е ортоцентар на триаголникот DEF.

   Решение. Ако O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, тогаш правата OF со страната AB зафаќа прав агол. Бидејќи DE е средна линија на $\triangle ABC$, отсечките DE и AB се паралелни, па затоа правата OF е нормална на DE. Слично се докажува дека правата

OD е нормална на отсечката EF. Според тоа, точката O е ортоцентар на $\triangle DEF$.

4. Во рамнината се дадени четири точки A, B, C, D такви што $AB \perp CD$ и $BC \perp AD$. Докажи дека $AC \perp BD$.

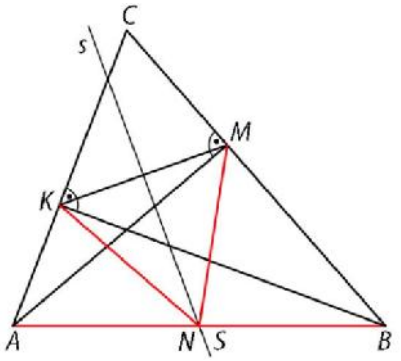
Решение. Од $AB \perp CD$ и $BC \perp AD$ следува дека една од овие четири точки е ортоцентар на триаголникот чии темиња се преостанатите три точки. Нека ортоцентарот е точката A. Тогаш висината AB е нормална на страната CD. Слично и висината AD е нормална на страната BC. Според тоа и третата висина AC е нормална на страната BD.

На потполно ист начин се разгледуваат случаите кога некоја друга од дадените точки е ортоцентар на триаголникот чии темиња се преостанатите три точки.

5. Нека M и K се подножјата на нормалите повлечени од темињата A и B на триаголникот ABC врз страните BC и AC, соодветно. Дали симетралата на отсечката MK ја содржи средината на страната AB?

Решение. Нека N е пресечната точка на симетралата на отсечката MK и страната AB. Имаме

$$\overline{NK} = \overline{NM}. \qquad (1)$$



Нека S е средина на страната AB, т.е. $\overline{SA} = \overline{SB}$. Триаголникот ABK е правоаголен со прав агол при темето K, па затоа за радиусот r_0 на опишаната кружница околу триаголникот ABK имаме

$$\overline{SK} = \overline{SA} = \overline{SB} = r_0. \qquad (2)$$

Триаголникот ABM е правоаголен со прав агол при темето B, па затоа важи

$$\overline{SM} = \overline{SA} = \overline{SB} = r_0. \qquad (3)$$

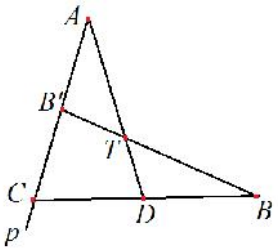
Сега, од (2) и (3) следува дека

$$\overline{SM} = \overline{SK}. \qquad (4)$$

Бидејќи точките N и S припаѓаат на страната AB на триаголникот ABC и важат равенствата (1) и (4) добиваме дека $N \equiv S$, односно симетралата на отсечката MK ја содржи средината на страната AB.

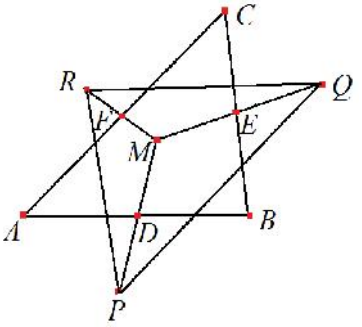
6. Користејќи ги својствата на тежиштето на триаголникот подели дадена отсечка AD во однос $2:1$.

Решение. Ја цртаме отсечката AD и во точката A повлекуваме полуправа Ap. Понатаму, на Ap последователно наоѓаме точки B' и C такви што $\overline{AB'}$ е произволна должина, а $\overline{AC}=2\overline{AB'}$. Ја повлекуваме полуправата CD и на неа наоѓаме точка B таква што $\overline{DB}=\overline{CD}$. Сега, ја повлекуваме правата BB' и наоѓаме $T=AD\cap BB'$. По конструкција AD и BB' се тежишни линии на триаголникот ACB, па затоа T е негово тежиште, што значи $\overline{AT}:\overline{TD}=2:1$.



7. Нека M е точка во внатрешноста на триаголникот ABC и нека D,E,F се соодветно средините на страните BC,CA,AB. Ако точките P,Q,R се такви што D,E,F се соодветно средините на отсечките MP,MQ,MR, докажи дека триаголниците ABC и PQR се складни.

Решение. Отсечката DE е средна линија за триаголниците ABC и MPQ, па затоа $\frac{1}{2}\overline{AC}=\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{PQ}$. Според тоа, $\overline{AC}=\overline{PQ}$. Аналогно се докажува дека $\overline{AB}=\overline{RQ}$ и $\overline{BC}=\overline{PR}$. Конечно, од признакот ССС следува дека триаголниците ABC и PQR се складни.



8. На основата AB на рамнокракиот триаголник ABC е дадена точка P. На правата CP е земена точка K таква што

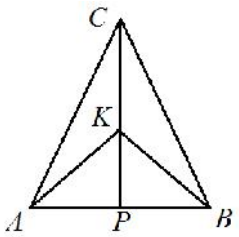
$$\measuredangle AKP+\measuredangle CKB=180^\circ.$$

Докажи дека точката P припаѓа на симетралата на аголот во темето C.

Решение. Од

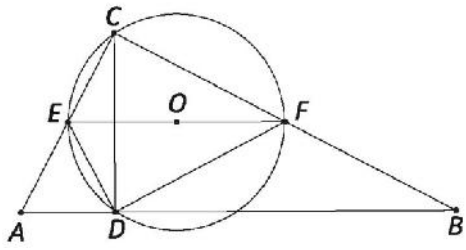
$$\measuredangle AKP+\measuredangle CKB=180^\circ \text{ и } \measuredangle AKP+\measuredangle AKC=180^\circ$$

следува $\measuredangle AKC = \measuredangle CKB$. Во триаголниците AKC и BKC важи $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{CK} = \overline{CK}$ и $\measuredangle AKC = \measuredangle CKB$, па затоа тие се складни. Од оваа складност следува дека $\measuredangle ACK = \measuredangle BCK$, што значи дека правата CK, односно правата CP симетрала на аголот во темето C, што и требаше да се докаже.



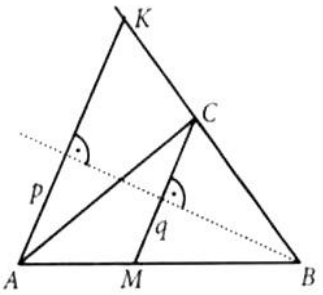
9. Даден е правоаголен триаголник ABC. Точките D, E и F се редоследно подножјето на висината од темето на правиот агол и средините на катетите AC и BC. Докажи дека точките C, D, E, F лежат на една кружница.

Решение. Во правоаголниот триаголник ADC точката E е центар на опишаната кружница околу тој триаголник, па затоа важи $\overline{AE} = \overline{EC} = \overline{DE}$. На ист начин од правоаголниот триаголник BDC следува дека $\overline{BF} = \overline{FC} = \overline{DF}$ (види цртеж). Сега, од признакот ССС следува дека триаголниците DEF и CEF се складни. Значи, $\measuredangle EDF = \measuredangle ECF = 90^\circ$, па затоа точките C, D, E, F лежат на кружницата чиј дијаметар е средната линија EF на триаголникот ABC.



10. Во триаголник ABC $(\overline{AB} > \overline{BC})$, низ точките A и C се конструирани прави кои се нормални на симетралата на $\measuredangle ABC$. Тие ги сечат правите BC и AB во точките K и M, соодветно. Определи ја должината на страната AB, ако $\overline{KC} = 5\,cm$ и $\overline{MB} = 8\,cm$.

Решение. Нека нормалата на симетралата на $\measuredangle ABC$ низ точката A е правата p, а нормалата на симетралата на $\measuredangle ABC$ низ точката C е правата q. Бидејќи правите p и q ги сечат правите BC и AB во точките



K и M триаголниците BAK и BMC се рамнокраки, па затоа $\overline{AB}=\overline{BK}$ и $\overline{MB}=\overline{BC}$. Според тоа,

$$\overline{AB}=\overline{BK}=\overline{BC}+\overline{CK}=\overline{MB}+\overline{CK}=8+5=13\,cm.$$

11. Даден е триаголник ABC, $\angle BAC=40^\circ$, $\angle ABC=20^\circ$, $\overline{AB}-\overline{BC}=10\,cm$. Симетралата на $\angle ACB$ ја сече правата AB во точката M. Определи ја должината на отсечката CM.

Решение. Нека K е точка на страната AB таква што $\overline{BC}=\overline{BK}$. Тогаш $\overline{AK}=\overline{AB}-\overline{BK}=\overline{AB}-\overline{BC}=10\,cm$. Од $\overline{BC}=\overline{BK}$ следува дека триаголникот BCK е рамнокрак и како $\angle ABC=20^\circ$, добиваме дека $\angle BKC=\angle BCK=80^\circ$. Тогаш $\angle AKC=180^\circ-80^\circ=100^\circ$, што значи дека $\angle ACK=40^\circ$. Според тоа, триаголникот ACK е рамнокрак, па затоа $\overline{AK}=\overline{KC}=10\,cm$. Од $\angle ACM=\angle BCM=60^\circ$, следува дека $\angle KMC$ како надворешен агол за триаголникот BMC е еднаков на збирот на двата несоседни агли, т.е. на збирот на $\angle BCM=60^\circ$ и $\angle MBC=20^\circ$. Значи, $\angle KMC=80^\circ$. Бидејќи $\angle MKC=\angle BCK=80^\circ$, триаголникот KMC е рамнокрак, па затоа $\overline{CM}=\overline{KC}=10\,cm$.

12. Даден е триаголник ABC и точка M во него, таква што полуправите BM и CM се симетрали на $\angle ABC$ и $\angle BCA$, соодветно. Низ точката M е повлечена права p паралелна со страната BC. Правата p ги сече страните AB и AC, соодветно, во точките P и T. Докажи дека $\overline{BP}+\overline{CT}=\overline{PT}$.

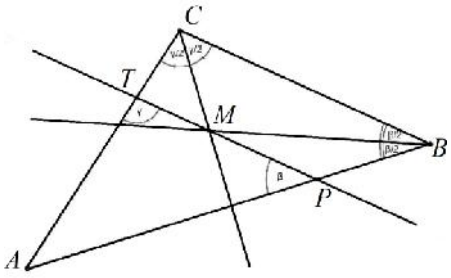
Решение. Од условот на задачата правата p е паралелна со страната BC на $\triangle ABC$. Според тоа AB е трансферзала на p и BC, од каде следува

$$\angle MPA=\angle CBA=\quad .$$

Ова значи дека

$$\angle MPB=180^\circ-\quad ,$$

па затоа



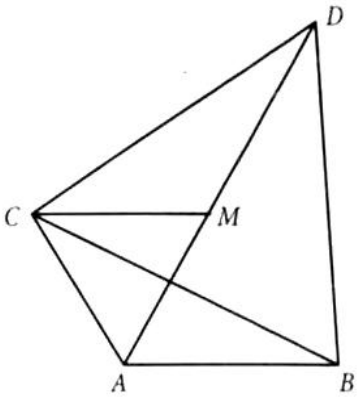
$$\angle BMP = 180^\circ - (180^\circ - \quad + \tfrac{}{2}) = \tfrac{}{2}\,.$$

Значи, $\angle PBM = \angle BMP = \frac{}{2}$, па затоа $\triangle BMP$ е рамнокрак. Аналогно се заклучува дека правата AC е трансферзала на p и BC, па $\triangle MCT$ е рамнокрак. Од тука се добива дека $\overline{BP} = \overline{PM}$ и $\overline{CT} = \overline{TM}$, па затоа

$$\overline{BP} + \overline{CT} = \overline{PM} + \overline{MT} = \overline{PT}$$

13. Даден е триаголник ABC во кој $\angle BAC = 120^\circ$. На симетралата на $\angle BAC$ е дадена точка D таква што $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$. Докажи дека триаголникот BCD е рамностран.

Решение. На симетралата AD земаме точка M таква што $\overline{AM} = \overline{AC}$. Тогаш триаголникот AMC е рамнокрак со агол при врвот $\angle CAM = 60^\circ$, што значи дека тој е рамностран. Сега, за триаголниците ABC и MDC важи



$\overline{CM} = \overline{CA}$, $\overline{AB} = \overline{MD}$ и

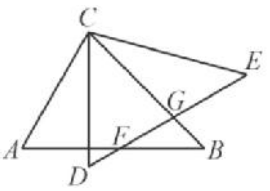
$\angle CAB = \angle CMD = 120^\circ$,

затоа тие се складни. Според тоа, $\angle ACB = \angle MCD$ и $\overline{CD} = \overline{BC}$. Значи,

$$\angle BCD = \angle MCD + \angle BCM = \angle ACB + \angle BCM = \angle ACM = 60^\circ.$$

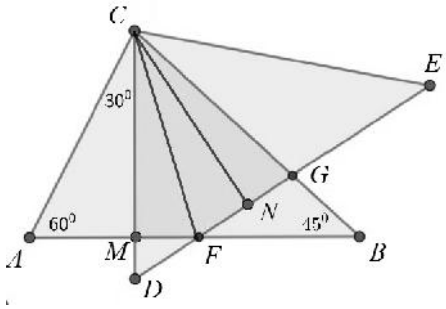
Конечно, од $\overline{CD} = \overline{BC}$ и $\angle BCD = 60^\circ$ следува дека триаголникот BCD е рамностран.

14. Даден е триаголник ABC со агли $\angle BAC = 60^\circ$ и $\angle ABC = 45^\circ$. Триаголниците ABC и DEC се складни и се поставени како на цртежот десно, при што $\angle ACD = 30^\circ$. Докажи дека триаголникот CFG е рамнокрак.



Решение. *Прв начин*. Да означиме како на цртежот десно. Имаме $\angle BAC = 60^\circ$ и $\angle ACM = 30^\circ$, па затоа $\angle AMC = 90^\circ$, т.е. CM е висина во триаголникот ABC. Нека CN е висината на триагол-никот DEC.

Тогаш од складноста на триаголниците ABC и DEC следува складноста на триаголниците AMC и DNC. Сега, триаголникот BCM е правоаголен и како $\angle MBC = 45^\circ$, добиваме $\angle BCM = 45^\circ$. Според тоа,



$$\angle BCN = \angle BCM - \angle NCM$$
$$= 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ,$$

па како триаголникот NGC е правоаголен добиваме $\angle NGC = 75^\circ$. Значи, $\angle NGB = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$, па затоа

$$\angle BFG = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ,$$

односно $\angle GFM = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. Понатаму, триаголниците FMC и FNC се правоаголни, имаат заедничка хипотенуза CF и еднаква катета $\overline{CM} = \overline{CN}$, што значи дека тие се складни. Според тоа, важи $\angle MFC = \angle NFC$, па затоа

$$2\angle GFC = \angle MFC + \angle NFC = \angle GFM = 150^\circ, \text{ т.е. } \angle GFC = 75^\circ.$$

Значи, $\angle GFC = 75^\circ = \angle FGC$, т.е. триаголникот CFG е рамнокрак.

Втор начин. Имаме $\angle BAC = 60^\circ$ и $\angle ACM = 30^\circ$, па затоа $\angle AMC = 90^\circ$, т.е. CM е висина во триаголникот ABC. Нека CN е висината на триаголникот DEC. Тогаш од складноста на триаголниците ABC и DEC следува складноста на триаголниците AMC и DNC. Сега, триаголникот BCM е правоаголен и како $\angle MBC = 45^\circ$, добиваме $\angle BCM = 45^\circ$. Според тоа,

$$\angle BCN = \angle BCM - \angle NCM = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ.$$

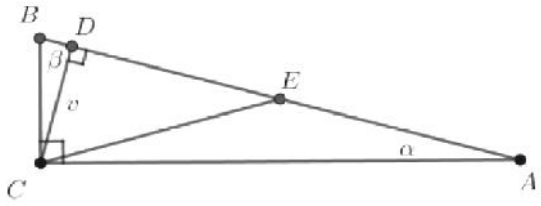
Понатаму, триаголниците FMC и FNC се правоаголни, имаат заедничка хипотенуза CF и еднаква катета $\overline{CM} = \overline{CN}$, што значи дека тие се складни. Затоа важи $\angle MCF = \angle NCF$. Но, $\angle MCN = 30^\circ$, па затоа

$$2\angle FCN = \angle MCF + \angle FCN = \angle MCN = 30^\circ,$$

т.е. $\angle FCN = 15^\circ$. Според тоа, $\angle FCN = 15^\circ = \angle GCN$, што значи дека во триаголникот CFG висината CN е и симетрала на аголот при темето C, па затоа тој е рамнокрак.

15. Во правоаголен триаголник мерката на едниот остар агол е 75°. Докажи дека хипотенузата на тој триаголник е четири пати подолга од висината повлечена кон хипотенузата.

Решение. Нека ABC е со прав агол во темето C и нека $=75^\circ$ (види цртеж).



Нека D е подножјето на висината повлечена од темето C, а E е средината на хипотенузата. Бидејќи средината на хипотенузата е центар на опишаната кружница околу триагокникот, добиваме дека $\overline{AE}=\overline{BE}=\overline{CE}=\frac{\overline{AB}}{2}$. Според тоа, триаголникот CAE е рамностран со краци CE и AE, па затоа

$$\measuredangle AEC=\measuredangle EAC=\sim=90^\circ-\quad=15^\circ.$$

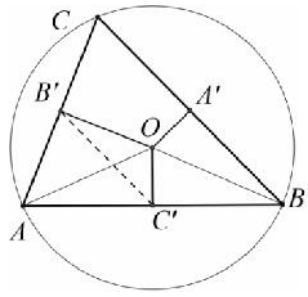
Понатаму, $\measuredangle BEC$ е надворешен за триаголникот CAE, па затоа имаме $\measuredangle BEC=2\sim=30^\circ$. Последното значи дека триаголникот CED е половина од рамностран триаголник, од каде следува дека $\overline{CD}=\frac{\overline{CE}}{2}$.

Конечно, $\overline{CD}=\frac{\overline{CE}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{\overline{AB}}{4}$, што и требаше да се докаже.

16. Докажи дека центарот на опишаната кружница е најблизок до најдолгата страна на триаголникот.

Решение. Ќе разгледаме три случаи.

1) Центарот на опишаната кружница се наоѓа во внатрешноста на триаголникот (цртеж десно). Нека во триаголникот ABC важи $\overline{AC}<\overline{BC}<\overline{AB}$. Правите $A'O, B'O, C'O$ се симетрали на страните BC, CA, AB, соодветно и O е центар на опишаната кружница. Растојанијата од центарот O до страните BC, CA, AB се соодветно $\overline{OA'}, \overline{OB'}, \overline{OC'}$. Треба да докажеме дека $\overline{OC'}<\overline{OA'}$ и $\overline{OC'}<\overline{OB'}$. Во триаголникот $B'C'O$ важи

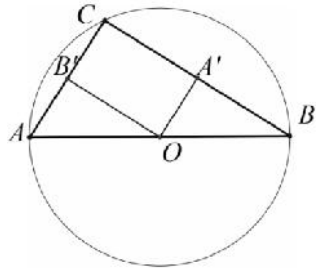


$\measuredangle B'C'O = \measuredangle AC'O - \measuredangle AC'B' = 90^\circ - \measuredangle AC'B' = 90^\circ -$ и

$\measuredangle C'B'O = \measuredangle AB'O - \measuredangle AB'C' = 90^\circ - \measuredangle AB'C' = 90^\circ - ¥$,

бидејќи $\measuredangle AC'B' =$ и $\measuredangle AB'C' = ¥$ како агли со паралелни краци. По претпоставка $\overline{AC} < \overline{AB}$, па затоа $< ¥$, т.е. $90^\circ - > 90^\circ - ¥$. Според тоа, $\measuredangle B'C'O > \measuredangle C'B'O$, па затоа $\overline{OA'} > \overline{OC'}$. Аналогно се докажува дека $\overline{OB'} > \overline{OC'}$.

2) Во случај на правоаголен триаголник центарот на опишаната кружница припаѓа на хипотенузата, па затоа тврдењето тривијално е точно.



3) Во случај кога триаголникот е тапоаголен (види цртеж), аглите на триаголникот $B'C'O$ се

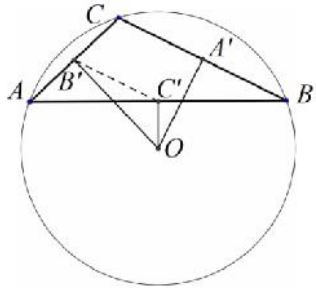
$\measuredangle B'C'O = \measuredangle AC'O - \measuredangle AC'B' = 90^\circ + \measuredangle AC'B' = 90^\circ +$ и

$\measuredangle C'B'O = \measuredangle AB'C' - \measuredangle AB'O = \measuredangle AB'C' - 90^\circ = ¥ - 90^\circ$,

бидејќи $\measuredangle AC'B' =$ и $\measuredangle AB'C' = ¥$ како агли со паралелни краци. По претпоставка $\overline{AC} < \overline{AB}$, па затоа $< ¥$, т.е. $90^\circ + > ¥ - 90^\circ$. Според тоа,

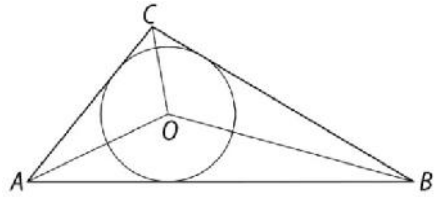
$\measuredangle B'C'O > \measuredangle C'B'O$,

па затоа $\overline{OB'} > \overline{OC'}$. Аналогно се докажува дека $\overline{OA'} > \overline{OC'}$



17. Докажи дека центарот на впишаната кружница е најблиску до темето на најголемиот агол на триаголникот.

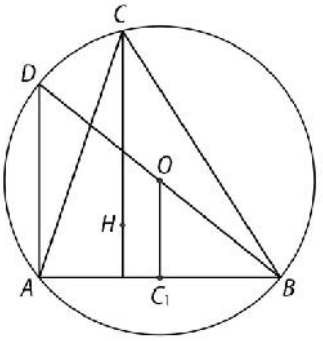
Решение. Нека ABC е произволен триаголник за кој важи $¥ > ~ >$ (цртеж десно). Точката O е центарот на впишаната кружница и правите AO, BO и CO се редоследно симетрали на аглите $~$, и $¥$. Треба да докажеме дека $\overline{OC} < \overline{OA}$ и $\overline{OC} < \overline{OB}$. Во триаголникот BCO важи $\measuredangle BCO > \measuredangle CBO$, па затоа



$\overline{OC} < \overline{OB}$. Во триаголникот ACO важи $\angle ACO > \angle CAO$, па затоа $\overline{OC} < \overline{OA}$, што и требаше да се докаже.

18. Триаголникот ABC не е правоаголен. Точките H и O се ортоцентар и центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Ако C_1 е средина на страната AB, докажи дека $\overline{CH} = 2\overline{OC_1}$.

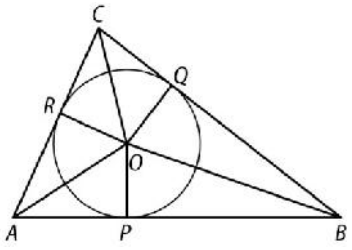
Решение. Нека ABC е остроаголен триаголник. Точките H, O и C_1 се редоследно ортоцентар центар на опишаната кружница околу овој триаголник и средина на AB. Нека BD е дијаметар на кружницата (цртеж десно). Отсечката OC_1 е средна линија на триаголникот ABD, па затоа $\overline{AD} = 2\overline{OC_1}$. Значи, $\overline{AD} = \overline{CH}$, па затоа $\overline{CH} = 2\overline{OC_1}$.



19. Кружницата k, впишана во триаголникот ABC, ги допира редоследно страните $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{CA} = b$ во точките P, Q, R. Докажи дека

$$\overline{AP} = \overline{AR} = \frac{b+c-a}{2}, \overline{BP} = \overline{BQ} = \frac{a+c-b}{2}, \overline{CQ} = \overline{CR} = \frac{a+b-c}{2}.$$

Решение. Нека O е центарот на впишаната кружница. Тогаш триаголниците APO и ARO се складни (бидејќи се правоаголни, $\angle PAO = \angle RAO = \frac{1}{2}\sim$, $\overline{RO} = \overline{PO} = r$ и AO е заедничка хипотенуза). Според тоа, $\overline{AP} = \overline{AR} = x$. Аналогно се докажува дека $\overline{BP} = \overline{BQ} = y$ и $\overline{CQ} = \overline{CR} = z$. Значи, $a = y + z$, $b = z + x, c = x + y$, односно $a + b + c = 2x + 2y + 2z$, од каде следува $x + y + z = \frac{a+b+c}{2}$. Значи,



$$\overline{AP} = \overline{AR} = x = \frac{a+b+c}{2} - (y+z) = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}.$$

Аналогно се докажуваат другите две равенства.

20. Нека BC е најголемата страна на триаголникот ABC и A_1 е нејзината

средина. Докажи дека:

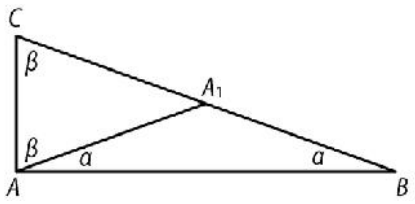
а) Ако $\overline{AA_1} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, тогаш триаголникот ABC е правоаголен.

б) Ако $\overline{AA_1} < \frac{1}{2}\overline{BC}$, тогаш триаголникот ABC е тапоаголен.

в) Ако $\overline{AA_1} > \frac{1}{2}\overline{BC}$, тогаш триаголникот ABC е остроаголен.

Решение. а) Триаголниците ABA_1 и AA_1C се рамнокраки, па затоа важи

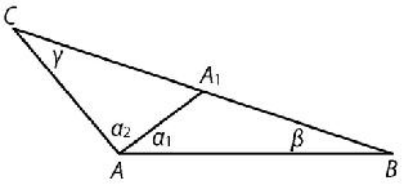
$$\measuredangle AA_1B = \measuredangle A_1BA = \sim \text{ и}$$
$$\measuredangle A_1AC = \measuredangle A_1CA = \quad .$$



Збирот на аглите во триаголникот ABC е еднаков на 180°, па затоа $2\sim + 2 = 180^\circ$, односно $\sim + = 90^\circ$. Значи, триаголникот ABC е правоаголен.

б) Да ги означиме аглите

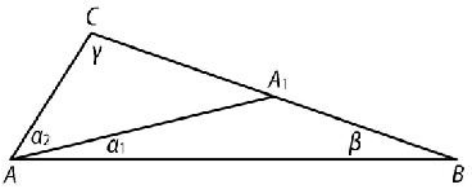
$$\measuredangle ABA_1 = \quad , \measuredangle ACA_1 = ¥,$$
$$\measuredangle BAA_1 = \sim_1, \measuredangle CAA_1 = \sim_2.$$



Според условот на задачата важи $\overline{AA_1} < \overline{A_1B}$, па од триаголникот ABA_1 следува $< \sim_1$. На ист начин од триаголникот CAA_1 следува $¥ < \sim_2$. Значи, $+¥ < a_1 + \sim_2 = \sim$. Според тоа, $180^\circ - a < \sim$, односно $90^\circ < \sim$. Значи, триаголникот ABC е тапоаголен.

в) Да ги означиме аглите

$$\measuredangle ABA_1 = \quad , \measuredangle ACA_1 = ¥,$$
$$\measuredangle BAA_1 = \sim_1, \measuredangle CAA_1 = \sim_2.$$

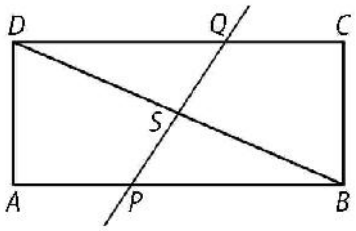


Според условот на задачата важи $\overline{AA_1} > \overline{A_1B}$, па од триаголникот ABA_1 следува $> \sim_1$. На ист начин од триаголникот CAA_1 следува $¥ > \sim_2$. Значи, $+¥ > a_1 + \sim_2 = \sim$. Според тоа, $180^\circ - a > \sim$, односно $90^\circ > \sim$. Значи, триаголникот ABC е остроаголен.

21. Низ средината S на дијагоналата BD на правоаголникот $ABCD$ е повлечена права p која ги сече страните AB и CD во точките P и

Q, соодветно. Докажи дека $\overline{SP} = \overline{SQ}$.

Решение. За триаголниците ADQ и SBP имаме, $\measuredangle SDQ = \measuredangle SBP$ како агли на трансферзала, $\overline{BS} = \overline{BD}$ и $\measuredangle DSQ = \measuredangle BSP$ како накрсни агли, па затоа тие се складни. Од оваа складност следува $\overline{SP} = \overline{SQ}$.



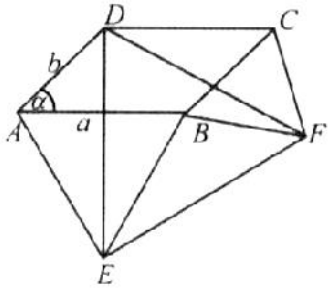
22. Над страните AB и BC на паралелограмот $ABCD$, надвор од него, се конструирани рамнострани триаголници ABE и BCF. Докажи дека триаголникот DEF е рамностран.

Решение. Имаме

$\overline{AE} = \overline{CD} = \overline{BE} = a$, $\overline{AD} = \overline{CF} = \overline{BF} = b$,

$\measuredangle DAE = \sim + 60^\circ$, $\measuredangle FCD = \sim + 60^\circ$,

$$\begin{aligned}\measuredangle FBE &= 360^\circ - (\measuredangle ABC + 60^\circ + 60^\circ)\\ &= 360^\circ - (180^\circ - \sim + 120^\circ)\\ &= 360^\circ - 300^\circ + \sim\\ &= 60^\circ + \sim.\end{aligned}$$



Според тоа, $\measuredangle DAE = \measuredangle FCD = \measuredangle FBE$, па затоа триаголниците DAE, FCD и FBE се складни. Од оваа складност следува $\overline{DE} = \overline{FD} = \overline{FE}$, што значи дека DEF е рамностран.

23. На страните AB и CD на ромбот $ABCD$ се избрани точки E и F такви што $\overline{AE} = \overline{BF}$. Ако $\measuredangle BAD = 60^\circ$ докажи дека триаголникот DEF е рамностран.

Решение. Од $\measuredangle BAD = 60^\circ$ следува $\measuredangle ABC = 120^\circ$, па како дијагоналата на ромбот е симетрла на аголот, добиваме $\measuredangle ABD = \measuredangle DBC = 60^\circ$. Според тоа, триаголникот ABD е рамностран, т.е. $\overline{AD} = \overline{BD}$. Понатаму, $\overline{AE} = \overline{BF}$ и затоа триаголниците AED и DBF се складни (признак САС). Според тоа, $\overline{DE} = \overline{DF}$ и $\measuredangle ADE = \measuredangle BDF$. Понатаму,

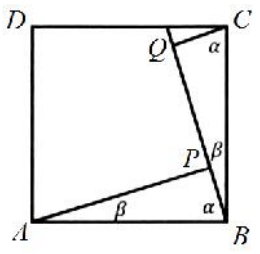
$$\measuredangle EDF = \measuredangle EDB + \measuredangle BDF = \measuredangle EDB + \measuredangle ADE = 60^\circ,$$

а како $\overline{DE} = \overline{DF}$ добиваме $\measuredangle DEF = \measuredangle DFE = 60^\circ$. Конечно, аглите на

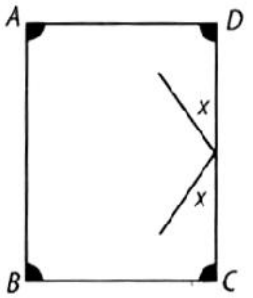
триаголникот DEF се еднакви на 60°, што значи дека тој е рамностран.

24. На страната CD на квадратот $ABCD$ е дадена точка L. Од темињата A и C се повлечени нормали на правата BL кои истата ја сечат редоследно во точките P и Q. Докажи дека $\overline{CP} = \overline{DQ}$.

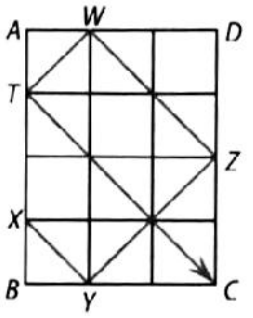
Решение. Нека $\measuredangle ABP = \sim$ и $\measuredangle CBQ =$. Тогаш $\sim + = 90^\circ$. Од $\measuredangle APB = 90^\circ$ и $\measuredangle CQB = 90^\circ$, добиваме $\measuredangle BAP =$ и $\measuredangle BCQ = \sim$. Сега, од признакот АСА следува дека триаголниците ABP и BCQ се складни. Според тоа, $\overline{BP} = \overline{CQ}$. Но, $\measuredangle QCD =$, па триаголниците PBC и QCD имаат две еднакви страни и еднаков агол меѓу нив, па од признакот САС следува дека тие се складни. Конечно, од оваа складност следува $\overline{CP} = \overline{DQ}$.



25. Билијардската маса прикажана на цртежот десно е широка $3\,m$ и долга $4\,m$. Со еден удар сакаме билијардската топка да ја уфрлиме во дупката C, така што топката пред тоа точно еднаш удри во секој раб од масата и во дупката C влезе под агол 45°. Се знае дека ако топката удри во раб на масата под некој агол, по ударот таа го продолжува патот под истиот агол, само во друг правец. Определи ја точката на работ на масата од каде треба да ја удриме топката. Кој е тој раб и колку е оддалечена бараната точка од краевите на тој раб?



Решение. Да ја поделиме билијардската маса на квадрати, по должина на 4 и по ширина на 3 квадрати. Страните на тие квадрати ќе бидат по $1\,m$. Решението најлесно може да се нацрта ако почнеме од точката C, каде што топчето треба да го заврши својот пат, под агол од 45°. Сите агли под кои топчето удира и се одбива

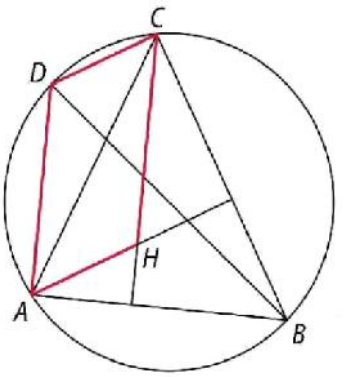


од рабовите се еднакви на 45°, па затоа ќе добиеме повеќе рамнокраки правоаголни триаголници. Имаме

$$\overline{BC}=\overline{BT},\ \overline{AT}=\overline{AW},\ \overline{DW}=\overline{DZ},\ \overline{CZ}=\overline{CY},\ \overline{BY}=\overline{BX}.$$

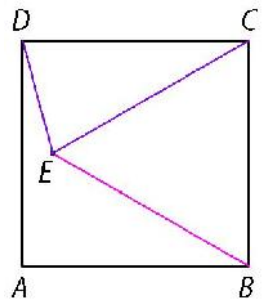
Значи, бараната точка е X, која е на работ AB и е на растојание $1\,m$ од точката B и на $3\,m$ од точката A.

26. Околу триаголник ABC кој не е правоаголен опишана е кружница k Отсечката BD е дијаметар на кружницата k, а точката H е ортоцентар на триаголникот. Докажи дека точките A,H,C,D се темиња на паралелограм.



Решение. Нека триаголникот ABC е остроаголен. Бидејќи BD е дијаметар на кружницата k триаголниците ABD и BCD се правоаголник. Според тоа, правите AD и CH сенормални на AB, па затоа тие се паралелни, Исто така правите AH и DC се нормални на BC, па затоа тие се паралелни. Значи, четириаголникот $AHCD$ има два пара паралелни страни, што значи дека е паралелограм. На потполно ист начин се разгледува случајот кога триаголникот ABC е тапоаголен.

27. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е дадена точка E таква што $\angle EDC=75^\circ$ и $\angle ECD=30^\circ$. Определи ја должината на отсечката BE ако $\overline{AB}=5,6\,cm$.



Решение. Нека точката E ги задоволува условите на задачата (цртеж десно). Тогаш

$$\begin{aligned}\angle DEC&=180^\circ-\angle EDC-\angle ECD\\&=180^\circ-75^\circ-30^\circ=75^\circ.\end{aligned}$$

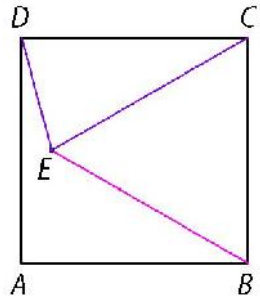
Според тоа, триаголникот EDC е рамнокрак, т.е. $\overline{CD}=\overline{EC}=5,6\,cm$. Од друга страна

$$\angle ECB=90^\circ-\angle ECD=90^\circ-30^\circ=60^\circ$$

и затоа триаголникот BCE е рамностран. Конечно,

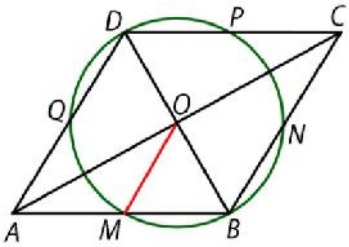
$$\overline{BE} = \overline{EC} = 5,6\ cm\,.$$

28. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е дадена точка E таква што $\angle EDC = 75^\circ, \angle ECD = 30^\circ$. Докажи дека точката E припаѓа на симетралата на отсечката AD.



Решение. Нека E е точката која ги задоволува условите на задачата. Тогаш од решението на претходната задача следува дека триаголникот BCE е рамностран. Тоа значи дека точката E припаѓа на симетралата на отсечката BC. Но, во квадратот $ABCD$ симетралата на отсечката BC е оска на симетрија на квадратот, што значи дека е симетрала на отсечката AD, што и требаше да се докаже.

29. Нека $ABCD$ е ромб со остар агол од 60°. Докажи дека кружницата повлечена над пократката дијагонала како дијаметар ги сече страните на ромбот во нивните средини.

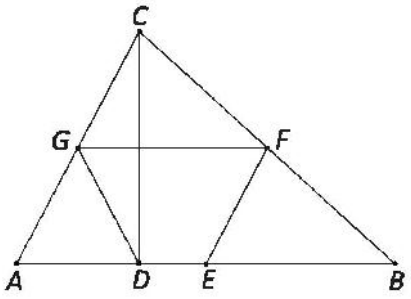


Решение. Нека дијагоналите на дадениот ромб $ABCD$ се сечат во точката O. Отсечката BD е дијаметар на кружницата k која страните AB, BC, CD и DA ги сече редоследно во точките M, N, P и Q. Триаголникот ABD е рамностран, па затоа важи $\overline{AB} = \overline{BD}$. Сега, од $\overline{OM} = \overline{OB}$ следува дека триаголникот MBO е рамнокрак со агол при основата $\angle MBO = 60^\circ$, па затоа овој триаголник е рамностран. Според тоа, $\overline{MB} = \overline{OB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, т.е. точката M е средина на страната AB. Аналогно се докажува дека точките N, P, Q се средини настраните BC, CD, DA на ромбот $ABCD$.

30. Средините на страните и подножјето на една од висините на разностран триаголник се темиња на рамнокрак трапез. Докажи!

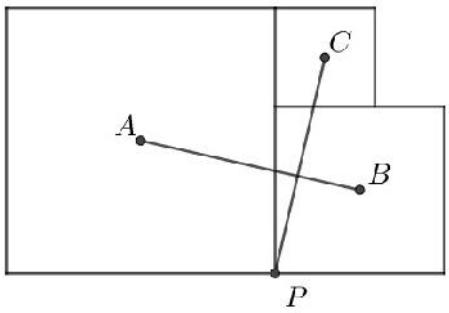
Решение. Нека точките D, E, F и G се редоследно подножјето на висината повлечена од темето C и средините на страните AB, BC и

CA на триаголникот ABC. Нека за триаголникот ABC е исполнето $\overline{BC} > \overline{AC}$, Тогаш го имаме распоредот на точките $A-D-E-B$ (цртеж десно).



Отсечката FG е средна линија на триаголникот, па затоа е паралелна на AB, односно на DE. Значи четириаголникот $DEFG$ е трапез. Точката G е средина на хипотенузата на правоаголниот триаголник ADC, па затоа е центар на опишаната кружница околу овој триаголник. Според тоа, $\overline{GD} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Понатаму EF е средна линија на триа-голникот ABC, па затоа $\overline{FE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Значи, $\overline{FE} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \overline{GD}$, од каде следува дека $DEFG$ е рамнокрак трапез.

31. На цртежот десно се дадени три квадрати со своите центри A, B и C. Точката P е заедничко теме на квадратите со центри A и B. Пресметај го односот $\overline{AB} : \overline{PC}$.



Решение. Со повлекување на линии паралелни на страните на квадратите ги конструираме правоаголните триаголници AQB и CRP (види цртеж).

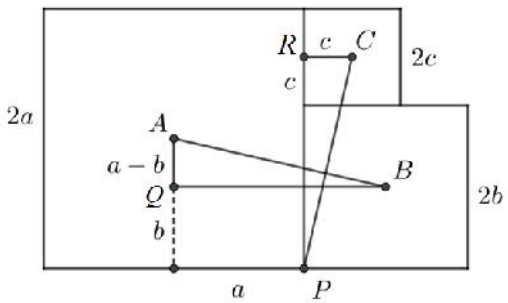
Нека должините на страните на квадратите со центри A, B и C соодветно се $2a, 2b$ и $2c$, соодветно. Бидејќи

$2a = 2b + 2c$, т.е. $a = b + c$, добиваме

$$\overline{AQ} = a - b = c = \overline{CR}$$

и

$$\overline{RP} = c + 2b = a - b + 2b$$
$$= a + b = \overline{QB}.$$

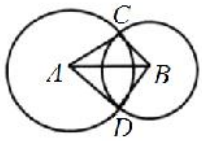


Сега, од признакот САС сле-

дува правоаголните триаголници AQB и CRP се складни, па затоа $\overline{AB} = \overline{PC}$. Конечно, $\overline{AB} : \overline{PC} = 1$.

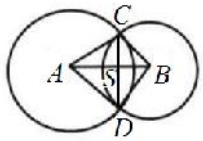
32. Кружниците $k_1(A, r_1)$ и $k_2(A, r_2)$ се сечат во точките C и D. Докажи дека $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB$.

Решение. Бидејќи $\overline{AC} = \overline{AD} = r_1$, $\overline{BC} = \overline{BD} = r_2$ и AB е заедничка страна на триаголниците ABC и ABD, заклучуваме дека овие триаголници се складни. Од складноста на овие триаголници следува $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB$.



33. Кружниците $k_1(A, r_1)$ и $k_2(A, r_2)$ се сечат во точките C и D. Докажи дека отсечката AB е нормална на отсечката CD.

Решение. Бидејќи $\overline{AC} = \overline{AD} = r_1$, $\overline{BC} = \overline{BD} = r_2$ и AB е заедничка страна на триаголниците ABC и ABD, заклучуваме дека овие триаголници се складни. Од складноста на овие триаголници следува $\measuredangle BAC = \measuredangle BAD$. Нека S е пресечната точка на AB и CD. Триаголниците ASC и ASD се складни (AS е заедничка страна, $\overline{AC} = \overline{AD} = r_1$ и $\measuredangle BAC = \measuredangle BAD$) па затоа $\measuredangle ASC = \measuredangle ASD$. Но, аглите $\measuredangle ASC$ и $\measuredangle ASD$ се суплементни и како тие се еднакви заклучуваме дека $\measuredangle ASC = \measuredangle ASD = 90^\circ$, т.е. $AB \perp CD$.



6. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Определи 2013 последователни цели броеви такви што нивниот збир ќе биде еднаков на 2013.

   Решение. Нека бараните броеви се $x, x+1, x+2, ..., x+2012$. Тогаш

   $$x + x + 1 + x + 2 + ... + x + 2012 = 2013,$$
   $$2013x + 1 + 2 + ... + 2012 = 2013,$$
   $$2013x + \frac{2012 \cdot 2013}{2} = 2013,$$
   $$x + 1006 = 1,$$
   $$x = -1005.$$

   Значи, бараните броеви се $-1005, -1004, ..., -1, 0, 1, ..., 1005, 1006, 1007$.

2. Определи 2013 последователни цели броеви такви што нивниот збир е -2013.

   Решение. Нека членовите на низата се $x, x+1, ..., x+2012$. Имаме

   $$x + x + 1 + ... + x + 2012 = -2013,$$
   $$2013x + 1 + 2 + ... + 2012 = -2013,$$
   $$2013x + \frac{2012 \cdot 2013}{2} = -2013,$$
   $$2013(x + 1006) = -2013,$$
   $$x + 1006 = -1,$$
   $$x = -1007.$$

   Значи, бараните броеви се: $-1007, -1006, ..., -1, 0, 1, ..., 1003, 1004, 1005$.

3. Определи 2012 последователни цели броеви такви што нивниот збир е 2012.

   Решение. Нека членовите на низата се $x, x+1, ..., x+2011$. Имаме

$$x + x + 1 + ... + x + 2011 = 2012,$$
$$2012x + 1 + 2 + ... + 2011 = 2012,$$
$$2012x + \frac{2011 \cdot 2012}{2} = 2012,$$
$$2012(x + \frac{2011}{2}) = 2012,$$
$$x + \frac{2011}{2} = 1,$$
$$x + 1005,5 = 1$$
$$x = -1004,5.$$

Бидејќи x не е цел број, не постојат 2012 последователни цели броеви чиј збир е еднаков на 2012.

4. Венда запишала 2009 цели броеви така што секој следен број е за 2 поголем од претходниот. Ако најголемиот број кој го запишала Венда е 2008, определи го збирот сите запишани броеви.
Решение. Броевите кои ги запишала Венда се 2008, 2006, ..., 6, 4, 2 (вкупно 1004 позитивни цели броеви) и $0, -2, -4, -6, ..., -2006, -2008$ (вкупно 1004 негативни цели броеви и нулата). Значи, Венда за секој позитивен цел број кој го запишала го запишала и спротивниот негов број, па збирот на сите броеви е еднаков на 0.

5. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x + (x + 1) + ... + 19 + 20 = 57.$$
Решение. Имаме:
$$x + (x + 1) + ... + 17 + 18 + 19 + 20 = 57,$$
и како $18 + 19 + 20 = 57$ дадената равенка има две решенија и тоа $x = -17$ и $x = 18$.

6. Горјан запишал 2007 последователни цели броеви. Кога ги собрал добил збир 2007. Определи ги најмалиот и најголемиот број во низата која ја запишал Горјан.
Решение. *Прв начин*. Горјан запишал непарен број броеви. Ако со x го означиме бројот кој го запишал во средината на низата, тоа е 1004-тиот број. Пред овој број имало 1003 броја, и по него исто така имало 1003 броја. Според тоа, запичаните броеви се
$$x - 1003, x - 1002, ..., x - 1, x, x + 1, ..., x + 1002, x + 1003.$$
Затоа,

$x-1003+x-1002+...+x-1+x+x+1+...+x+1002+x+1003=2007,$

$2007x=2007,$

$x=1.$

Значи, средниот број е $x=1$, па најмалиот број е $x-1003=-1002$, а најголемиот број е $x+1003=1004$.

Втор начин. Нека првиот запишан број е x. Тоа значи дека Горјан ги запишал броевите $x, x+1, x+2, ..., x+2006$. Според тоа,

$$x+x+1+x+2+...+x+2006=2007,$$

$$2007x+(1+2+...+2006)=2007,$$

$$2007x+1003\cdot 2007=2007,$$

$$x+1003=1,$$

$$x=-1002.$$

Значи, првиот број кој го запишал Горјан е -1002, а последниот број е $-1002+2006=1004$.

7. Колку најмалку (повеќе од еден), а колку најмногу последователни цели броеви треба да се соберат за да се добие бројот 2010?

Решение. Бидејќи од $x+(x+1)=2010$ следува $2x=2009$ и оваа равенка нема решение во множеството цели, најмалиот број е поголем или еднаков на 3. За три броја имаме

$$x+(x+1)+(x+2)=2010$$

и решението на оваа равенка е $x=669$. Според тоа, најмалку треба да собереме три броја и тоа се броевите 669,670 и 671.

Најголемиот можен број последователни цели броеви чиј збир е 2010 се добива ако покрај бројот 2010 ги земеме сите природни броеви помали од него, нивните спротивни броеви и бројот 0. Така добиваме

$$(-2009)+(-2008)+...+(-1)+0+1+...+2008+2009+2010=2010$$

и во овој збир имаме 4020 собирци.

8. Збирот на k $(k>1)$ последователни цели броеви е 9. Определи ги сите вредности кои може да ги има k.

Решение. Бараните збирови се:

1) $4+5=9$ и тука $k=2$,
2) $(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5=9$ и тука $k=9$,
3) $2+3+4=9$ и тука $k=3$,
4) $(-1)+0+1+2+3+4=9$ и тука $k=6$,

5) $(-8)+(-7)+...+(-1)+0+1+...+7+8+9=9$ и тука $k=18$.

Значи, $k\in\{2,3,6,9,18\}$.

9. На колку начини можеме бројот 2009 да го претставиме како збир на последователни непарни цели броеви? (Во збирот мора да има најмалку два собирци.)

Решение. Прво ќе го разгледаме случајот кога сите собирци се позитивни. Последователните непарни броеви ги запишуваме во видот $a+1, a+3, ..., a+2n+1$. Бараниот збир е:

$$(a+1)+(a+3)+...+(a+2n-1)=2009.$$

Збирот на првиот и последниот собирок е $2a+2n$, како и збирот на вториот и претпоследниот собирок итн. Бидејќи имаме n собирци добиваме $(2a+2n)\cdot\frac{n}{2}=2009$, т.е. $n(a+n)=2009$. Притоа важи $n<a+n$.

Сега, бидејќи $2009=7\cdot 7\cdot 41$, ги разликуваме следниве случаи:

1) ако $n=7$, тогаш $a+n=287$, па е $a=280$, што значи дека првиот број е 281,
2) ако $n=41$, тогаш $a+n=49$, па е $a=8$ и првиот број е 9.

Врз основа на овие решенија ги добиваме и решенијата кои содржат и негативни броеви, па затоа сите решенија на задачата се:

a) 281, 283, 285, 287, 289, 291, 293,
b) $-279,-277,-275,...,275,277,279,281,283,...,293$,
c) 9, 11, 13, 15, ..., 85, 87, 89,
d) $-7,-5,...,5,7,9,11,13,...,87,89$,
e) $-2007,-2005,...,2005,2007,2009$

10. На колку начини можеме да го претставиме бројот 2010 како збир на последователни цели броеви?

Решение. Прво ќи ги определиме сите решенија кога собирците се позитивни. Имаме:

$$(x+1)+(x+2)+...+(x+n)=2010,$$
$$(2x+n+1)n=2\cdot 2010=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67.$$

Понатаму, од $n<2x+n+1$ и фактот дека броевите n и $2x+n+1$ се со различна парност, мора да е n непарен број или да е делив со 4. Според тоа, можни се следниве случаи:

a) $n=3,\ 2x+n+1=1340,\ x=668$,
b) $n=4,\ 2x+n+1=1005,\ x=500$,

c) $n=5,\ 2x+n+1=804,\ x=399$,

d) $n=12,\ 2x+n+1=335,\ x=161$,

e) $n=15,\ 2x+n+1=268,\ x=126$,

f) $n=20,\ 2x+n+1=201,\ x=90$,

g) $n=60,\ 2x+n+1=67,\ x=3$.

Оттука, вклучувајчи ги и негативните цели броеви, ги добиваме следниве решенија:

a) 779, 670, 671 и $-668,-667,...,0,1,...,667,668,669,670,671$,

b) 501, 502, 503, 504 и $-500,...,-1,0,1,...,500,501,502,503,504$,

c) 400, 401, 402, 403, 404 и $-399,...,-1,0,1,...,399,400,...,404$,

d) 162, 163, ..., 173 и $-161,...,-1,0,1,...,161,162,163,...,173$,

e) 127, 128, ..., 141 и $-126,...,-1,0,1,...,126,127,128,...,141$,

f) 91, 92, ..., 110 и $-90,...,-1,0,1,...,90,91,92,...,110$,

g) 4, 5, 6, ..., 63 и $-3,-2,-1,1,2,3,4,...,63$.

11. Магдалена на таблата запишувала цели броеви така што секој следен е за 2 поголем од претходниот. Кога ги запишала сите броеви видела дека нивниот збир е еднаков на -96. Кои броеви ги запишала Магдалена?

Решение. Бројот -96 ќе го претставиме како збир на k последователни броеви такви што секој следен е поголем за 2 од претходниот. Нека најмалиот број е n. Тогаш

$$n+(n+2)+...+(n+2(k-1))=-96,$$
$$nk+2+4+...+2(k-1)=-96,$$
$$nk+k(k-1)=-96,$$
$$k(n+k-1)=-96.$$

Според тоа, природниот број k е делител на бројот 96, па затоа $k\in\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,32,48,96\}$.

- за $k=1$ имаме $n=-96$,
- за $k=2$ имаме $n=-49$ и броевите се: $-49,-47$,
- за $k=3$ имаме $n=-34$ и броевите се: $-34,-32,-30$,
- за $k=4$ имаме $n=-27$ и броевите се: $-27,-25,-23,-21$,
- за $k=6$ имаме $n=-21$ и броевите се: $-21,-19,-17,-15,-13,-11$,
- за $k=8$ имаме $n=-19$ и броевите се: $-19,-17,-15,-13,-11,-9,-7,-5$,

- за $k=12$ имаме $n=-19$ и броевите се: $-19,-17,-15,-13,-11,-9,-7,-5,-3,-1,1,3$,
- за $k=16$ имаме $n=-21$ и броевите се: $-21,-19,-17,...,-13,-11,-9,-7,...,7,9$,
- за $k=24$ имаме $n=-27$ и броевите се: $-27,-25,-23,-21,-19,-17,...,17,19$,
- за $k=32$ имаме $n=-34$ и броевите се: $-34,-32,-30,-28,-26,-24,...,24,26,28$,
- за $k=48$ имаме $n=-49$ и броевите се: $-49,-47,-45,-43,-41,...,41,43,45$,
- за $k=96$ имаме $n=-96$ и броевите се: $-96,-94,-92,...,92,94$.

12. Загорка редоследно ги запишувала броевите $1,-3,5,-7,9,-11,13,...$ (наизменично ги менувала знаците на броевите кои по апсолутна вредност ја формираат низата непарни природни броеви). Колку броеви Загорка може да запише така што збирот на сите запишани броеви ќе биде делител на бројот 2013?

Решение. Од $2013=3\cdot 11\cdot 61$ следува дека збирот мора да е еднаков на некој од броевите 1, 3, 11, 33, 61, 183, 671 и 2013.

Ако збирот има парен број собирци, тогаш збирот на првиот и вториот, третиот и четвртиот, петтиот и шестиот, ... запишани броеви е константен и е еднаков на -2. Според тоа, збирот на сите можни вредности на збирот по апсолутна вредност се парни, па затоа ниту еден не може да биде делител на 2013.

Нека имаме $2k+1$ собирци. Тогаш

$$\begin{aligned} S &= 1+(-3)+5+(-7)+...+(2(2k-1)-1)-(2(2k-1)+1)+2(2k+1)-1 \\ &= \underbrace{(-2)+(-2)+...+(-2)}_{k}+2(2k+1)-1 \\ &= -2k+4k+1=2k+1, \end{aligned}$$

што значи дека збирот е еднаков на бројот на собирците. Оттука следува дека Загорка може да запише 1, 3, 11, 33, 61, 183, 671 и 2013 броеви, при што збирот на запишаните броеви ќе биде еднаков на бројот на запишаните броеви.

13. Богдан на таблата запишал низа броеви така што секој следен број е за 2 поголем од претходниот. Збирот на сите запишани броеви е 66, а производот на најмалиот и најголемиот запишан број е -64. Кои

броеви ги запишал Богдан?

Решение. Бидејќи сите броеви во низата се со иста парност и има повеќе позитивни отколку негативни броеви (збирот на сите броеви е позитивен) и бидејќи $64 = 1 \cdot 64 = 2 \cdot 32 = 4 \cdot 16 = 8 \cdot 8$, можни низи броеви се $-2, 0, 2, ..., 32$ или $-4, -2, 0, ..., 14, 16$. Збирот на броевите во првата низа е 270, а во втората низа е 66. Значи, Богдан ги запишал броевите $-4, -2, 0, ..., 14, 16$.

14. Крсте ја пресметувал вредноста на следниот израз

$$A = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + ... + (2k - 1) - 2k + ...$$

До кој број Крсте ги извршувал назначените операции ако вредноста на изразот е за 2012 помала од последниот број во изразот?

Решение. Дадениот израз можеме да го запишеме во видот

$$A = 1 + (-2 + 3) + (-4 + 5) + (-6 + 7) + ... + (-2k) + (2k + 1)) + ...$$

Вредноста на секој израз во заградата е еднаков на 1. Според тоа, ако изразот A се состои од бројот 1 и n загради, тогаш последниот запишан број е $2n + 1$, па затоа треба да важи $1 + n = 2n + 1 - 2012$, од каде добиваме $n = 2012$. Според тоа, последниот запишан број е $2 \cdot 2012 + 1 = 4025$. Во случајот кога дадениот израз содржи парен број членови задачата нема решение.

15. Како треба да се изберат знаците во изразот $\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm 7 \pm 9 \pm 11$, за добиеме збир 2 или 13.

Решение. Во изразот се шест непарни броеви. Збир на шест непарни броеви е парен број, а ако пред некој број го промениме знакот од + во $-$ тогаш парноста не се менува. Според тоа, збирот никогаш не може да е непарен број, па затоа не може да е ниту 13.

Збирот на дадените броеви е 36, што значи дека треба да се намали за 34. При промена на еден знак пред некој број збирот се намалува за двократната вредност на тој број. Според тоа, треба да се променат знаците од + во $-$ пред три броја чиј збир е 17. Задачата има три решенија и тоа:

$$-1 + 3 + 5 - 7 - 9 + 11, \quad -1 + 3 - 5 + 7 + 9 - 11, \quad 1 - 3 - 5 + 7 - 9 + 11 .$$

16. Дали е можно во $1 * 2 * 3 * 4 * ... * 2004 = 2005$ знакот $*$ негде да се замени со $+$, а негде со $-$, така што ќе се добие точно равенство.

Решение. Ако сите знаци $*$ се заменат со знакот $+$ тогаш збирот на

левата страна ќе биде

$$1+2+\ldots+2004=(1+2004)+(2+2003)+\ldots+(1002+1003)$$
$$=1002\cdot 2005,$$

што значи дека ќе биде парен број. Сега, ако пред бројот k знакот $+$ го замениме со знакот $-$, тогаш збирот ќе се менува за $2k$, односно за парен број, што значи дека повторно ќе биде парен број. Според тоа, без разлика како и да ги ставиме знаците $+$ и $-$ на местото на знакот $*$, секогаш на левата страна ќе се добие парен број, кој не може да е еднаков на 2005. Значи, одговорот на прашањето е НЕ.

17. Кој е најмалиот природен број кој што може да се добие ако во изразот

$$1*2*3*\ldots*2005*2006$$

секоја ѕвезда се замени со еден од знаците + или $-$?

Решение. Најмалиот природен број кој може да се добие е 1 и тоа на следниов начин:

$$(1-2-3+4-5+6)+(7-8-9+10)+(11-12-13+14)+\ldots+$$
$$+(1999-2000-2001+2002)+(2003-2004-2005+2006).$$

18. Бројот 2008 прикажи го како производ на неколку природни броеви, а потоа и како збир на истите тие броеви. Најди барем три вакви претставувања.

Решение. Сите можни решенија се:

$$2008=2\cdot 1004\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot 1}_{1002\text{ единици}}=2+1004+\underbrace{1+1+1+\ldots+1+1}_{1002\text{ единици}},$$

$$2008=4\cdot 502\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot 1}_{1502\text{ единици}}=4+502+\underbrace{1+1+1+\ldots+1+1}_{1502\text{ единици}},$$

$$2008=8\cdot 251\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot 1}_{1749\text{ единици}}=8+251+\underbrace{1+1+1+\ldots+1+1}_{1749\text{ единици}},$$

$$2008=2\cdot 2\cdot 502\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot 1}_{1502\text{ единици}}=2+2+502+\underbrace{1+1+1+\ldots+1+1}_{1502\text{ единици}},$$

$$2008=2\cdot 4\cdot 251\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot 1}_{1751\text{ единици}}=2+4+251+\underbrace{1+1+1+\ldots+1+1}_{1751\text{ единици}},$$

$$2008=2\cdot 2\cdot 2\cdot 251\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot 1}_{1751\text{ единици}}=2+2+2+251+\underbrace{1+1+1+\ldots+1+1}_{1751\text{ единици}}.$$

19. На колку различни начини бројот 30 може да се запише како производ на пет различни цели броеви?

Решение. Бидејќи $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ другите два множители мора да се 1 и -1. Сега, за да производот е позитивен мора да имаме 2 или 4 негативни множители, па добиваме:

$$30 = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 5 = 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 5$$
$$= 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-5) = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-5).$$

Значи, бројот 30 како производ на пет различни цели броеви може да се запише на 4 начини.

20. Производот на седум различни цели броеви е 252. Пресметај го збирот на овие броеви.

Решение. Од $252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$ во производот мора да се додадат и множителите 1 и -1. Понатаму, сите множители мора да се различни, па затоа и броевите 2 и 2, 3 и 3 мора да се земат со различни знаци. Значи, бараниот призвод е $252 = 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot (-3) \cdot (-7)$, бидејќи множителот 7 мора да се земе со негативен знак. Конечно, бараниот збир е

$$1 + (-1) + 2 + (-2) + 3 + (-3) + (-7) = -7 .$$

21. Броевите a, b, c, d, e се цели различни броеви такви што

$$(a+2)(b+2)(c+2)(d+2)(e+2) = 20 .$$

Определи го збирот $a + b + c + d + e$.

Решение. Бидејќи $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$ и како сите цели броеви треба да се различни, мора да важи

$$(a+2)(b+2)(c+2)(d+2)(e+2) = 1 \cdot (-1) \cdot 2(-2) \cdot 5 .$$

Оттука следува дека

$$a + 2 + b + 2 + c + 2 + d + 2 + e + 2 = 1 + (-1) + 2 + (-2) = 5$$
$$a + b + c + d + e + 10 = 5,$$
$$a + b + c + d + e = -5.$$

22. За целите броеви a, b, c, d важи дека броевите $a-1, 2b-3, 4c-5, 5d-6$ се различни и $(a-1)(2b-3)(4c-5)(5d-6) = -6$. Пресметај го збирот $a + b + c + d$.

Решение. Јасно, $a-1, 2b-3, 4c-5, 5d-6$ се цели броеви. Четири различни цели броеви чиј производ е -6 се броевите $2, 3, 1, -1$ или $-2, -3, 1, -1$. Во првиот случај

$$(a-1)(2b-3)(4c-5)(5d-6)=2\cdot 3\cdot 1\cdot(-1),$$

од каде следува $a-1=2,\ 2b-3=1,\ 4c-5=3,\ 5d-6=-1$, бидејќи во преостанатите случаи броевите a,b,c,d нема да бидат цели. Оттука добиваме $a=3,\ b=2,\ c=2,\ d=1$, па затоа $a+b+c+d=8$. Во вториот случај $(a-1)(2b-3)(4c-5)(5d-6)=(-2)\cdot(-3)\cdot 1\cdot(-1)$, но не постојат цели броеви за кои полсеното равенство е исполнето. Навистина, за да d е цел број мора да е $5d-6=-1$, па добиваме $(a-1)(2b-3)(4c-5)=(-2)\cdot(-3)\cdot 1$. Значи $4c-5$ мора да е некој од броевите $-2,-3,1$, но тогаш c не е цел број.

Конечно, единствено решение на задачата е $a+b+c+d=8$.

23. За целите броеви a,b,c,d важи $(a-2)(2b-3)(3c-4)(4d-5)=6$. Определи го збирот $a+b+c+d$.

Решение. Броевите a,b,c,d се цели, па затоа и броевите $a-2,\ 2b-3,\ 3c-4$ и $4d-5$ се цели. Ако броевите a,b,c,d не мора да се различни, можни се случаите дадени во долната табела:

$a-2$	$2b-3$	$3c-4$	$4d-5$	a	b	c	d	$a+b+c+d$
6	1	–1	–1	8	2	1	1	12
–6	–1	–1	–1	–4	1	1	1	–1
–2	–3	–1	–1	0	0	1	1	2
2	3	–1	–1	4	3	1	1	9
–2	1	–1	3	0	2	1	2	5
2	–1	–1	3	4	1	1	2	8
–3	1	2	–1	–1	2	2	1	4
3	–1	2	–1	5	1	2	1	9
1	–3	2	–1	3	0	2	1	6
–1	3	2	–1	1	3	2	1	7
1	1	2	3	3	2	2	2	9
–1	–1	2	3	1	1	2	2	6

Значи, збирот $a+b+c+d$ може да биде еднаков на $-1,2,4,5,6,7,8,9$ и 12.

24. На колку различни начини бројот -840 може да се запише како производ на седум различни цели броеви.

Решение. Бидејќи $840 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$, за да бројот -840 се запише како производ на седум различни цели броеви, во производот мора да учествуваат и броевите 1 и -1. Сега, од тоа што множителите треба да се различни ги добиваме следниве претставувања:

$$\begin{aligned}
-840 &= 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 7 = 1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 5\cdot 7\\
&= 1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot 3\cdot(-4)\cdot 5\cdot 7 = 1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot 3\cdot 4\cdot(-5)\cdot 7\\
&= 1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot(-7) = 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot 4\cdot 5\cdot(-7)\\
&= 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot 5\cdot 7 = 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot 4\cdot(-5)\cdot 7\\
&= 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot 3\cdot(-4)\cdot 5\cdot(-7) = 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot 3\cdot(-4)\cdot(-5)\cdot 7\\
&= 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot(-5)\cdot(-7) = 1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)\cdot 7\\
&= 1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot 5\cdot(-7) = 1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot 3\cdot(-4)\cdot(-5)\cdot(-7)\\
&= 1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot 4\cdot(-5)\cdot(-7) = 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)\cdot(-7)\\
&= 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot 7\cdot 10 = 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-2)\cdot 3\cdot(-7)\cdot 10\\
&= 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-2)\cdot 3\cdot 7\cdot(-10) = 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-7)\cdot(-10)\\
&= 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-2)\cdot(-5)\cdot 6\cdot 7 = 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-2)\cdot 5\cdot(-6)\cdot 7\\
&= 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-2)\cdot 5\cdot 6\cdot(-7) = 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-2)\cdot(-5)\cdot(-6)\cdot(-7)\\
&= 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot 5\cdot 14 = 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-2)\cdot 3\cdot(-5)\cdot 14\\
&= 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-2)\cdot 3\cdot 5\cdot(-14) = 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-5)\cdot(-14).
\end{aligned}$$

Според тоа, постојат 28 различни претставувања на бројот -840 како производ на седум различни цели броеви.

25. Колку најмногу собирци може да има на левата страна на равенството

$$\overline{PET}+\overline{PET}+\ldots+\overline{PET}=\overline{BROJ}$$

Решение. Од даденото равенство следува дека бројот на собирците ќе биде најголем кога $\overline{PET}$ е најмал може број, а $\overline{BROJ}$ е најголем можен број. Најголем четирицифрен број запишан со различни цифри е 9876, а најмал трицифрен број запишан со различни цидри е 102. Според тоа, бараниот број собирци не може да е поголем од $9876:102=96{,}82$. Сега, бидејќи

$102\cdot 96=9792$, $103\cdot 96=9888$, $104\cdot 96=9984$ и $105\cdot 96=10080$,

заклучуваме дека 96 не е бараниот број. Бидејќи $103\cdot 95=9785$, заклучуваме дека бараниот број собирци е 95. Според тоа, на левата страна може да има најмногу 95 собирци.

26. Колку најмногу собирци може да има на левата страна на равенството

$$\overline{LETO}+\overline{LETO}+\ldots+\overline{LETO}=\overline{ODMOR}$$

Решение. Најмногу може да има 94 собирци, $1029 \cdot 94 = 95697$.
Решенија бараме меѓу броевите за кои $L = 1$ и $O = 9$. Бидејќи $L = 1$ и $O = 9$ најмалиот собирок на левата страна е бројот $\overline{LETO} = 1029$. Бидејќи $1029 \cdot 99 = 100842$ е шестцифрен број, проверуваме за броеви помали од 99, со што наоѓаме дека во овој случај најголемиот можен број собирци е 94.
Бидејќи $1039 \cdot 97, 1049 \cdot 96, 1059 \cdot 95$ се шестцифрени броеви, а со непосредна проверка наоѓаме дека $1039 \cdot 95, 1039 \cdot 96, 1049 \cdot 95$ не даваат решение, тоа е доволно да заклучиме дека бараниот максимален број собирци е еднаков на 94.

27. Реши го бројниот ребус

$$\overline{abba} - \overline{cddc} = \overline{cfef},$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Бидејќи $\overline{abba} - \overline{cddc} = \overline{cfef}$, важи $a = 2c$ или $a = 2c + 1$. Но, $a - c = f$, па затоа $a = 2c + 1$. Ако за c редоследно замениме 1, 2, 3 и 4, добиваме:

а) за $c = 1$ имаме $a = 3,\ f = 2$, па затоа $\overline{3bb3} - \overline{1dd1} = \overline{12e2}$ и во овој случај немаме решение,

б) за $c = 2$ имаме $a = 5,\ f = 3$, па затоа $\overline{5bb5} - \overline{2dd2} = \overline{23e3}$ и добиваме две решенија и тоа: $5005 - 2662 = 2343$ и $5115 - 2772 = 2343$,

в) за $c = 3$ имаме $a = 7,\ f = 4$, па затоа $\overline{7bb7} - \overline{3dd3} = \overline{34e4}$ и добиваме едно решение и тоа: $7117 - 3663 = 3454$,

г) за $c = 4$ имаме $a = 9,\ f = 5$, па затоа $\overline{9bb9} - \overline{4dd4} = \overline{45e5}$ и добиваме едно решение и тоа: $9339 - 4774 = 4565$.

28. Замени ги буквите со цифри (различните букви со различни цифри, а исти букви со исти цифри) така што ќе важи:

$$\overline{KA} + \overline{RA} = \overline{DAB}.$$

Решение. Јасно, $D = 1$. Понатаму, испитуваме систематски, заменувајќи ги за A можните цифри. Јасно, A не може да е 0 и 1.
За $A = 2$ ги добиваме решенијата

$$32 + 92 = 124,\ 52 + 72 = 124,\ 72 + 52 = 124,\ 92 + 32 = 124.$$

За $A = 3$ ги добиваме решенијата

$$43+93=136,\ 53+83=136,\ 83+53=136,\ 93+43=136.$$

За $A=4$ ги добиваме решенијата: $54+94=148,\ 94+54=148$.

За $A=5$ ги добиваме решенијата: $65+85=150,\ 85+65=150$.

За $A=6$ ги добиваме решенијата: $76+86=162,\ 86+76=162$.

За $A>6$ задачата нема решенија. Според тоа, задачата вкупно има 14 решенија.

29. Најди барем еден четирицифрен број кој помножен со 2016 дава осумцифрен број кој завршува на 2016:

$$****\cdot 2016 = **** 2016.$$

Решение. Нека се A и B редоследно четирицифрени броеви означени со ѕвездичките на левата и десната страна на равенството, т.е. нека $2016\cdot A = 10000\cdot B + 2016$. Тогаш имаме $2016(A-1)=10000\cdot B$. Бидејќи $2016 = 32\cdot 7\cdot 9$ и $10000 = 16\cdot 5^4$, добиваме $2\cdot 7\cdot 9(A-1) = 5^4\cdot B$. Но, $2\cdot 7\cdot 9$ и 5^4 се заемно прости броеви,па затоа $A-1$ мора да е делив со 5^4 и B мора да е делив со $2\cdot 7\cdot 9$. Според тоа,

$$A-1 = 5^4\cdot C = 625\cdot C \text{ и } B = 2\cdot 7\cdot 9\cdot C = 126\cdot C$$

за некој природен број C .Од условот дека A и B се четирицифрени броеви добиваме

$$625\cdot C+1\le 9999 \text{ и } 1000\le 126\cdot C,$$

односно

$$9,9365\le C\le 15,9968.$$

Бидејќи C е природен број, важи $8\le C\le 15$, па затоа за

$$C=8, C=9, C=10, C=11, C=12, C=13, C=14, C=15$$

сите решенија на задачата се:

$$5001\cdot 2016 = 10082016;\quad 5626\cdot 2016 = 11342016;$$
$$6251\cdot 2016 = 12602016;\quad 6876\cdot 2016 = 13862016;$$
$$7501\cdot 2016 = 15122016;\quad 8126\cdot 2016 = 16382016;$$
$$8751\cdot 2016 = 17642016;\quad 9376\cdot 2016 = 18902016.$$

30. Замени ги буквите со цифри (различните букви со различни цифри, а истите букви со исти цифри) и ѕвездичките со знаците на аритметичките операции така што ќе важи

$$M * A * T * E * M * A * T * I * K * A = 2017.$$

Решение. Постојат повеќе решенија на задачата. Некои од нив се:

$$4\cdot 1\cdot 8\cdot 2\cdot 4\cdot 1\cdot 8-5\cdot 6-1=2017,$$
$$6\cdot 3\cdot 8\cdot 7\cdot 6:3-8+2+4+3=2017,$$
$$3\cdot 1\cdot 4\cdot 7\cdot 3\cdot 1\cdot 4\cdot 2+0+1=2017,$$
$$8\cdot 9\cdot 7\cdot 4-8+9-7+3-5+9=2017,$$
$$8\cdot 9\cdot 7\cdot 4-8+9-7-3+1+9=2017,$$
$$9\cdot 8\cdot 7\cdot 3+9\cdot 8\cdot 7-5-4+8=2017,$$
$$8\cdot 9\cdot 7\cdot 4-8+9+7-0+2-9=2017,$$
$$8\cdot 9\cdot 7\cdot 4+8-9+7-1+5-9=2017,$$
$$8\cdot 9\cdot 7\cdot 3+8\cdot 9\cdot 7-6-2+9=2017,$$
$$9\cdot 8\cdot 7\cdot 3+9\cdot 8\cdot 7-2-5+8=2017.$$

31. Дадена е низата броеви

$$20,\_\_,\_\_,\_\_,-5,\_\_,...$$

во која збирот на секои три последователни броеви е 12. Последниот број во оваа низа е 20 и овој број е запишан 500 пати. Пресметај го збирот на сите броеви во оваа низа.

Решение. Со x, y, z редоследно да ги означиме броевите кои се меѓу 20 и -5. Според условот на задачата важи

$$20+x+y=12,\ x+y+z=12,\ y+z+(-5)=12.$$

Според тоа, од првата равенка следува $x+y=-8$, па од втората добиваме $-8+z=12$, што значи $z=20$. Сега, со замена во третата равенка добиваме $y+20-5=12$, т.е. $y=-3$, па од $x+y=-8$ наоѓаме $x-3=-8$, т.е. $x=-5$. Конечно, бараната низа е $20,-5,-3,20,...$. Ако бројот 20 е запишан 500 пати, тогаш пред него тројката $20,-5,-3$ се повторува 499 пати, па затоа бараниот збир е

$$499\cdot 12+20=5988+20=6008.$$

32. а) Кој број треба да стои на местото на ѕвездичката во низата:

$$17,\ 23,\ 13,\ 11,\ *,\ 15,\ ...\ ?$$

б) Кој е 2013-тиот член на оваа низа?

Решение. а) Имаме $23=3\cdot 7+2\cdot 1$, $13=3\cdot 3+2\cdot 1$, $11=3\cdot 3+2\cdot 1$, што значи дека секој следен број е еднаков на збирот на трикратната вредност на единиците и двократната вредност на десетките на претходниот број. Тоа значи, на местото на * треба да стои бројот $3\cdot 1+2\cdot 1=5$. Значи, низата е 17, 23, 13, 11, 5,15, 17, 23, ...

б) Низата е периодична со периода еднаква на 6. Според тоа, од

$2013 = 6 \cdot 665 + 3$ следува дека 2013-тиот член на оваа низа е еднаков на третиот член на низата, т.е. на 13.

33. Низата 1, 3, 7, 15, ... е таква што секој нејзин член е за 1 поголем од двократната вредност на претходниот член. Дали во оваа низа постои број кој е делив со 2014?
Решение. Сите членови на дадената низа се непарни бидејќи се од видот $2x+1$. Според тоа, ниту еден член од оваа низа не е делив со 2, што значи дека не е делив и со 2014.

34. Броевите 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... се подредени така што секој член почнувајќи од третиот е еднаков на збирот на претходните два. Докажи дека на 1002-то место е број делив со 8.
Решение. Да продолжме со формирање на членовите на дадената низа: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... При делење со 8 овие броеви даваат редоследно остатоци: 1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, 1, 1, ... Забележуваме дека остатоците се повторуваат по секои 12 броја, односно дека имаме периода 1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0. Сега, бидејќи $1002 = 12 \cdot 83 + 6$ добиваме дека бројот кој е на 1002-то место дава ист остаток како и бројот кој е на шестото место, односно остаток 0. Значи, овој број е делив со 8.

35. Митре запишал 100 броеви. Првиот запишан број е 2, вториот е 3, а потоа секој, почнувајќи од вториот, е за 1 помал од производот на бројот кој е пред него и бројот кој е по него. Пресметај го збирот на броевите кои ги запишал Митре.
Решение. Прво треба да ги определиме броевите кои ги запишал Митре. На второто место е бројот 3, а ако x е на третото место, тогаш според условот на задачата $3 = 2x - 1$, односно $x = 2$. Значи, првите три броја се 2, 3, 2. Пресметувајќи на истиот начин добиваме дека на четвртото место е бројот 1, па потоа повторно е бројот 1, па бројот 2, па бројот 3 итн. Според тоа, низата броеви е: 2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, ... Јасно, првите пет броја се повторуваат. Нивниот збир е 9, па како истите се повторуваат 20 пати, збирот на сите броеви кои ги запишал Митре е $9 \cdot 20 = 180$.

36. Михајло запишал 100 броеви. Првиот број е 2, вториот е 3, а потоа секој следен број, почнувајќи од вториот, е еднаков на збирот на

бројот запишан пред него и бројот запишан по него. Пресметај го збирот на броевите кои ги запишал Михајло.

Решение. Прво треба да ги определиме броевите кои ги запишал Михајло. Ако третиот запишан број е x, тогаш $3 = 2 + x$, па е $x = 1$. Значи, броевите се 2, 3, 1, ... За четвртиот број добиваме $3 + y = 1$, па $y = -2$. Слично петтиот број е -3, шестиот број е -1, па 2, 3, ... Значи, броевите кои Михајчо ги запишал се: $2, 3, 1, -2, -3, -1, 2, 3, 1, \ldots$ Јасно, првите шест броја се повторуваат 16 пати и на крајот се броевите $2, 3, 1, -2$. Збирот на првите шест броја е 0, па затоа збирот на сите 100 броја е $16 \cdot 0 + 2 + 3 + 1 - 2 = 4$.

37. Ацо продавал лубеници на пазар. Кога Борис го прашал колку лубеници има, Ацо одговорил: „Бројот на лубениците е куб на природен број кој не е делив со 7.“ Потоа Ацо ги пребројувал лубениците и секоја седма му ја дал на Борис. Борис ги зел поклонетите лубеници и му рекол на Војо: „Ниту бројот на моите лубеници не е делив со 7, па сепак ќе ти ја дадам секоја седма лубеница.“ Војо ништо не рекол, само секоја седма лубеница му ја дал на Гаврил. Гаврил видел дека бројот на неговите лубеници не е делив со 7, па секоја седма лубеница му ја поклонил на Дарко. Дарко од Гаврил добил точно 10 лубеници. Колку лубеници имал Ацо на почетокот?

Решение. Гаврил можел да има од $10 \cdot 7 + 1 = 71$ до $10 \cdot 7 + 6 = 76$ лубеници. Војо можел да има од $71 \cdot 7 + 1 = 497$ до $76 \cdot 7 + 6 = 538$ лубеници. Борис можел да има од $497 \cdot 7 + 1 = 3480$ до $538 \cdot 7 + 6 = 3772$ лубеници. Ацо од $3480 \cdot 7 + 1 = 24361$ до $3772 \cdot 7 + 6 = 26410$ лубеници. Имаме, $28^3 = 21952 < 24361 < 29^3 = 24389 < 26410 < 30^3 = 27000$, што значи дека Ацо на почетокот имал 24389 лубеници.

38. Кога ќе го собереме некој трицифрен број со бројот запишан со истите цифир, но во обратен редослед, добиваме квадрат на природен број. Ако цифрата на десетките е еднаква на збирот на цифрите на единиците и стотките, определи ги сите такви трицифрени броеви.

Решение. Имаме,

$$\overline{abc} + \overline{cba} = n^2,$$

$$100a + 10b + c + 100c + 10b + a = n^2,$$

$$101a + 20b + 101c = n^2,$$

па како $b = a + c$, добиваме

$$101a + 20(a + c) + 101c = n^2,$$
$$101a + 20a + 20c + 101c = n^2$$
$$121(a + c) = n^2,$$
$$11^2(a + c) = n^2.$$

Од последното равенство следува дека $a + c$ мора да е точен квадрат. Но, a и c се цифри, па затоа $a + c = 4$ или $a + c = 9$ (случајот $a + c = 1$ го отфраме бидејќи тогаш првата цифра на трицифрен број би била $a = 0$ или $c = 0$). Ако $a + c = 4$, тогаш решенија се 143, 242, 341, а ако $a + c = 9$, тогаш решенија се 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891.

39. Најди два двоцифрени броја ако е познато дека збирот на сите преостанати двоцифрени броеви е 50 пати поголем од еден од тие броеви.

Решение. Нека a и b се бараните броеви, а разликата меѓу збирот на сите двоцифрени броеви и $a + b$ е 50 пати поголема од a, односно $4905 - (a + b) = 50a$. Бидејќи $50 \mid 4905 - (a + b)$ можни се три случаи: $a + b = 55$, $a + b = 105$ и $a + b = 155$. Во првиот случај имаме $a = 97$ и затоа $b < 0$, па немаме решение на задачата. Во вториот случај имаме $a = 96$ и $b = 9 < 10$, па немаме решение на задачата. Во третиот случај $a = 95$ и $b = 60$, што значи дека задачата има единствено решение.

40. Дали постои природен број со следново својство: ако некои две цифри ги заменат местата се добива трицифрен број кој е два пати поголем од почетниот број?

Решение. Ако таков број постои, тогаш тој број е трицифрен и мора цифрата на стотките да го замени местото со цифрата на единиците или десетките за да се добие два пати поголем број.

1) Ако $2\overline{abc} = \overline{bac}$, тогаш $200a + 20b + 2c = 100b + 10a + c$, од каде добиваме $c = 10(8b - 19a)$, што е можно само ако $c = 0$. Значи, $8b = 19a$. Бидејќи не постојат ненулти цифри за кои важи последното равенство, заклучуваме дека во овој случај немаме решение.
2) Ако $2\overline{abc} = \overline{cba}$, тогаш $200a + 20b + 2c = 100c + 10b + a$, од каде добиваме $10(19a + b - 9c) = 8c - 9a$. Јасно, $c > a$. Понатаму, десната страна на последното равенство е делив а со 10, па затоа и левата

страна треба да е делива со 10, што според табелата

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8*c*	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9*a*	9	18	27	36	45	54	63	72	81

е можно само ако $c=6, a=2$ или $c=7, a=4$ или $c=8, a=6$ или $c=9, a=8$. Понатаму,

- за $c=6, a=2$ добиваме $b=21$, што не е можно бидејќи b е цифра,
- за $c=7, a=4$ добиваме $b=-11$, што не е можно бидејќи b е цифра,
- за $c=8, a=6$ добиваме $b=-41$, што не е можно бидејќи b е цифра,
- за $c=9, a=8$ добиваме $b=-71$, што не е можно бидејќи b е цифра,

Конечно, од претходните разгледувања следува дека не постои природен број со саканите својства.

41. Иван има два помлади брата, кои исто така се ученици. По завршувањето на секое одделение секој брат од таткото добива онолку книги колку што одделенија до тогаш завршил. На крајот на минатата учебна година, браќата вкупно собрале 25 книги добиени од таткото. Кое одделение го завршил Иван?

Решение. Секој син може по завршеното одделение да собере по 1 книга (по прво одделение), $3=1+2$ (по звршемо второ одделение), $6=1+2+3$ (по завршено трето одделение), па 10, 15, 21, 28 итн. Така ја имаме низата 1, 3, 10, 15, 21, 28, ... и бројот 25 треба да го запишеме како збир на три члена на оваа низа. Тоа може да се направи на единствен начин: $1+3+21=25$. Сега, Иван е најстар и тој вкупно добил 21 книга, што значи дека завршил шесто одделение. Потоа најмалиот брат завршил прво одделение, а средниот брат завршил трето одделение.

42. Во селото на џуџињата $\frac{1}{7}$ од жителите носат црвена капа, а $\frac{2}{5}$ носат жолта капа. Преостанатите џуџиња носат сина капа. Колку жители на селото носат сина капа ако знаеме дека бројот на жителите на селото не е поголем од 200? (Капите се еднобојни.)

Решение. Бројот на жителите мора да е природен број, а исто така

природен број мора да е и бројот на жителите кои носат црвена, жолта или сина капа. Тоа значи дека бројот на жителите на селото мора да е делив со 5 и со 7, т.е. тој е од видот $k \cdot \text{NZS}(5,7) = 35k$. Но, бројот на жителите на селото е помал од 200, па затоа селото може да има 35, 70, 105, 140 или 175 жители. Понатаму, $1-(\frac{1}{7}+\frac{2}{5})=\frac{16}{35}$, што значи дека $\frac{16}{35}$ од жителите на селото носат сина капа. Конечно, сина капа може да носат 16, 32, 48, 64 или 80 жители на селото.

43. Во еден магацин има 360 гајби со јаболка и 384 гајби со круши. Гајбите со овошје треба да се испорачаат во различни продавници, во пратки во кои секогаш има еднаков број гајби со овошје и во секоја пратка има еднаков број гајби со јаболка. Камионите со кои се пренесуваат пратките со овошје може да носат најмногу 60 гајби. По колку гајби со јаболка и колку гајби со круши има во секоја пратка?
Решение. Нека x е бројот на пратките кои треба да се испорачаат. Бидејќи секоја пратка содржи еднаков број гајби со овошје, но и еднаков број гајби со јаболка, заклучуваме дека секоја пратка содржи еднаков број гакби со круши. Според тоа, $x \mid 360$ и $x \mid 384$, од каде заклучуваме дека $x \mid \text{NZD}(360,384) = 24$. Ако $x = 24$, тогаш во секоја пратка има $260 : 24 = 15$ гајби со јаболка и $384 : 24 = 16$ гајби со круши и како $15 + 16 = 31 < 60$ ваквата испорака на овошјето е можна. Првиот помал делител на 24 е 12, па ако $x \le 12$, тогаш во секоја пратка мора да има по $360 : x \ge 360 : 12 = 30$ гајби со јаболка и $384 : x \ge 384 : 12 = 32$ гајби со круши, што не е можно бидејќи бројот на гајбите во една пратка ќе биде поголем или еднаков на $32 + 30 = 62 > 60$, а секој камион може да носи најмногу 30 гајби овошје.
Конечно, овошјето ќе биде испорачано со 24 пратки, а во секоја пратка ќе има по 15 гајби со јаболка и 16 гајби со круши.

44. На еден тест биле зададени 20 прашања. За точно одговорено прашање се добиваат 8 поени, за неточно одговорено прашање се одземаат 5 поени, а неодговорено прашање се бодува 0 поени. Кирил на тестот освоил 120 поени. На колку прашања Кирил не одговорил?
Решение. Ако со x го означиме бројот на прашањата кои Кирил ги одговорил, а со y бројот на неодговорените прашања, тогаш $20 - x - y$ е бројот на прашањата на кои Кирил погрешно одговорил.

Значи, важи $8x-5(20-x-y)=120$, односно $13x+5y=220$, при што $x>0, y\geq 0$ и $x+y\leq 20$. Од добиената равенка следува дека 5 треба да е делител на x. Бидејќи $13\cdot 20=260>220$ заклучуваме дека $x\in\{5,10,15\}$.

Ако $x=5$, тогаш $y=31$, па како $x+y=36>20$, ова не е решение.

Ако $x=10$, тогаш $y=18$, па како $x+y=28>20$, ова не е решение.

Ако $x=15$, тогаш $y=5$, па како $x+y=20$, добиваме дека Кирил точно одговорил на 15 прашања и не дал одговор на 5 прашања.

45. Госпоѓата Јорданка има домашни миленичиња. Сите освен две миленичиња се кучиња, сите освен две миленичиња се мачиња, сите освен две миленичиња се папагали, а преостанатите се водени желки. По колку миленичиња има госпоѓата Јорданка од секој вид?

Решение. Да забележиме дека госпоѓата Јорданка има еднаков број кучиња, мачиња и папагали. Со x да го означиме бројот на кучињата, а со y бројот на водените желки. Тоа значи дека вкупниот број миленичиња е $3x+y$. Бидејќи сите освен 2 се кучиња, добиваме дека $3x+y-2=x$, односно $2x+y=2$. Од последната равенка добиваме $x=1, y=0$ или $x=0, y=2$. Значи, можни се два случаја:

1) Госпоќата Јорданка има по едно куче, маче и папагал, а нема водени желки,
2) Госпоѓата Јорданка има две водени желки и нема други миленици.

46. Марко од шешир извлекува топчиња на кои се запишани броевите 0, 5, 8 и 10, по еден број на секое топче. Тој извлекол еднаков број топчиња со броевите 8 и 10. Извлекол неколку топчиња на кои е бројот 5. Бројот на топчињата на кои е бројот 0 е еднаков на една четвртина од вкупниот број извлечени топчиња. Колку топчиња извлекол Марко ако збирот на сите броеви запишани на топчињата е 99?

Решение. Со x да го означиме бројот на топчињата на кои е запишан бројот 8, односно бројот 10, а со y бројот на топчињата на кои е запишан бројот 5. Од условот на задачата имаме $18x+5y=99$. Сега, $5y=99-18x$, па затоа $5\mid(99-18x)$ и притоа од $y\geq 0$ следува $0\leq x\leq 5$. Условот за деливост е исполент само за $x=5$ и притоа добиваме $5y=45$,т.е. $y=9$. Значи, извлечени се $2\cdot 3+9=15$ топчиња

со броевите 5, 8 и 10 и тоа се $\frac{3}{4}$ од топчињата. Конечмо, Марко извлекол вкупно $15:\frac{3}{4}=20$ топчиња.

47. При влез во театар меѓу 30 посетители се поделени 58 бонбони. Секое девојче добило шест бонбони, а секое момче добило четири бонбони, а сокое возрасно лице добило по една бонбона. Колку биле девојчиња, колку момчиња, а колку возрасни лица?

Решение. Откако секој посетител ќе изеде по една бонбона, ќе останат $58-30=28$ бонбони, при што возрасните лица немаат ниту една бонбона. На секое момче му останууваа 3 бонбони, а на секое девојче му останууваат 5 бонбони. Ако во салата има x девојчиња и y момчиња, тогаш $5x+3y=28$. Добиената равенка ќе ја запишеме во видот $5x-10=18-3y$, односно $5(x-2)=3(6-y)$. Лесно се гледа дека $x\neq 0,1$, од каде добиваме дека $x\geq 2$. Значи, $x-2\geq 0$, па затоа мора да е $6-y\geq 0$. Од последната равенка следува дека $5\,|\,6-y$, па како $y>0$, добиваме $6-y=0$ или $6-y=5$, т.е. $y=6$ или $y=1$.

Ако $y=6$, тогаш $x=2$, па имаме 2 девојчиња, 6 момчиња и 22 возрасни лица.

Ако $y=1$, тогаш $x=5$, па имаме 5 девојчиња,1 момче и 24 возрасни лица.

48. Покрај секое теме на еден седумаголник Никола запишал по еден цел број, така што збирот на броевите кои соодветствуваат на една страна е 1, на соседната страна е 2, на следната соседна е 3 итн. на последната е 7. Кои броеви Никола ги запишал покрај темињата на седумаголникот?

Решение. Со a,b,c,d,e,f,g да ги означиме броевите кои се запишани редоследно во темињата на седумаголникот. Тогаш важи

$$a+b=1, b+c=2, c+d=3, d+e=4, e+f=5, f+g=6, g+a=7. \quad (*)$$

Ако ги собереме овие равенства, добиваме

$2(a+b+c+d+e+f+g)=28$, т.е. $a+b+c+d+e+f+g=14$.

Сега, ако во последното равенство замениме $a+b=1$, $c+d=3$ и $e+f=5$, добиваме $1+3+5+g=14$, т.е. $g=5$. Сега, ако замениме во последното равенство на (*), добиваме $a=2$. Понатаму, лесно се добиав дека $b=-1, c=3, d=0, e=4, f=1$. .

49. На секој ѕид на една коцка е запишан по еден природен број. На секое теме (ќош) на коцката е запишан производот од трите броја кои се запишани на ѕидовите кои го формираат темето (ќошот). Збирот на осумте така добиени производи е 385. Одреди го збирот на броевите кои се запишани на ѕидовите на коцката.

Решение. Нека a, b, c, d, e, f се природните броеви кои се запишани на ѕидовите на коцката, така што a и b се броеви запишани на спротивни ѕидови, броевите c и d се запишани на спротивни ѕидови и броевите e и f се запишани на спротивни ѕидови. На темињата на коцката се запишани следните броеви $ace, acf, ade, adf, bce, bcf, bde, bdf$. Од условот на задачата се добива

$$ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf = (a+b)(c+d)(e+f) = 385.$$

Единствен начин да се запише бројот 385 како производ од три множители поголеми од 1 е $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$, од каде следи дека

$$a+b+c+d+e+f = (a+b)+(c+d)+(e+f) = 5+7+11 = 23.$$

50. На секоја страна на шестаголник е запишан еден број, а покрај секое теме е запишан збирот на броевите на две страни кои го содржат тоа теме. Потоа се избришани броевите запишани на сите страни и во темето A. Дали може да се реконструира бројот покрај темето A?

Решение. Нека $ABCDEF$ е даденият шестаголник, а a, b, c, d, e, f се редоследно запишани броеви покрај неговите темиња. Да забележиме дека збирот на броевите покрај темињата A, C, E е еднаков на збирот на броевите покрај темињата B, D, F. Навистина, двата збира се еднакви на збирот на броевите запишани на сите страни на шестаголникот. Според тоа, $a+c+e = b+d+f$, па затоа $a = b+d+f-c-e$, што значи дека може да се реконструира бројот покрај темето A.