Ристо Малчески

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА I

Скопје, 2019

Рецензенти
Проф. д-р Костадин Тренчевски
Проф. д-р Боро Пиперевски

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

517.1/.3(076)
517.521(076)

МАЛЧЕСКИ, Ристо
Математичка анализа 1 / Ристо Малчески. - Скопје : Армаганка, 2019. - 354 стр. ; 25 см

За авторот: стр. 353-354. - Библиографија: стр. 339-344. - Регистри

ISBN 978-608-4904-77-9

а) Реални функции од една променлива - Диференцијално сметање - Интегрално сметање - Вежби б) Бројни редови - Функционални низи и редови - Вежби
COBISS.MK-ID 111920906

СОДРЖИНА

VI глава. БРОЈНИ РЕДОВИ

VII глава. ФУНКЦИОНАЛНИ НИЗИ И РЕДОВИ

Упатства и решенија на задачите

ПРЕДГОВОР КОН ВТОРОТО ИЗДАНИЕ

> Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките, каде нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Оваа книга е продолжение на книгата **Основи на математичка анализа.** Книгата содржи целосен опфат на разработуваниот материјал кој е неопходен за натамошното изучување на математичката анализа. Материјалот е поделен на четири глави, и тоа:

1. Диференцијабилност на функција од една реална променлива
2. Интегрално сметање на функција од една реална променлива
3. Бројни редови и
4. Функционални низи и редови.

Во првата глава е разработена диференцијабилноста на функциите од реална променлива. Притоа, посебно внимание е посветено на воведувањето на поимите и конзистентноста на тврдењата, па затоа се разработени повеќе контрапримери кои се во функција на основниот текст. Во оваа глава, заради значењето при натамошното усвојување на математичката анализа сеопфатно се разработени конвексните функции.

Втората глава содржи две засебни целини и тоа: делот во кој е разработен неопределениот интеграл и класите интеграбилни функции и делот кој е посветен на Римановиот интеграл. При разработката на Римановиот интеграл посебно внимание е посветено на критериумите за интеграбилност по Риман, па така покрај стандардните критериуми даден е и критериумот на Лебег. Се разбира, претходно заради целовитост на изложувањата, во рамките на потребите, се разработени подмножествата на $\mathbf{R}$ кои имаат Лебегова мера нула. На крајот од оваа глава се докажани интегралните теореми за средна вредност, формулите на Боне и примената на Римановиот интеграл. За разлика од првото издание, овде е изоставен несвојствениот Риманов интеграл, кој треба да биде предмет на разработка на четвртиот дел од оваа серија.

Во третата глава се разработени бројните редови, при што одделно се разгледувани редовите со ненегативни членови, алтернативните редови, апсолутно конвергентните и семиконвергентните редови, како и критериумите за конвергенција на истите. На крајот од оваа глава одделно се разгледани повторните, двојните и двостраните редови, за да разгледувањата завршат со поимот за бесконечен производ и критериумите за конвергенција на бесконечните производи.

Четвртата глава е посветена на функционалните низи и редови и конвергенцијата на истите. Јасно, при разгледувањето на функционалните редови детално се разгледани степенските редови, аналитичките функции во реална област и разложувањето на функциите во степенски редови. На крајот од овој дел накратко се дадени операциите со степенски редови, како што се собирање, множење и делење на степенски редови и замената на ред во ред.

На крајот од книгава е даден список на литературата која е користена при изработката на споменатата серија книги и која на читателот треба да му укаже на дел од литературата која дополнително може да ја користи при усвојување на разработуваните содржини. Исто така, презентиран е индекс на автори на значајни поими и резултати опфатени во споменатата серија книги, за кои е даден периодот во кој живееле и земјата од која потекнуваат и во која твореле. Постојат повеќе причини кои ме поттикнаа да ги презентирам овие податоци, но сепак од пресудно значење беше желбата на читателите да им се укаже од кој период потекнуваат научните сознанија кои ги усвојуваат и каде истите се создавале. Се разбира, на крајот од книгава е даден детален индекс на разработуваните поими и тврдења, кој треба да го олесни користењето на книгава.

Изучувањето на математичката анализа, како и на секоја математичка дисциплина, не е можно без систематско самостојно решавање на задачи. Токму затоа при изложувањето на материјалот се разработени 163 примери со кои се појаснуваат воведените поими и презентираните тврдења и на крајот од секоја глава се дадени задачи, вкупно 242, дел од кои, како и примерите содржат и по неколку подзадачи, па така бројот на задачите е значително поголем. Примерите и задачите се така избрани, што дел од нив се во функција на усвојување на презентираниот материјал, дел се наменети за утврдување на усвоените знаења, но има и задачи кои се од натпреварувачки карактер.

Пријатна должност и особено задоволство ми е да им искажам благодарност на рецензентите проф. д-р Боро Пиперевски и проф. д-р Костадин Тренчевски кои со своите забелешки и сугестии придонесоа за подобрување на содржината на оваа книга. Исто така сакам да се заблагодарам на м-р Вера Малческа која внимателно го прочита ракописот и со своите забелешки даде значителен придонес за негово подобрување.

И покрај вложениот напор, не можам да се ослободам од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа книга, па затоа сум однапред благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија.

Март 2011, Авторот
Скопје

IV ГЛАВА

ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ НА ФУНКЦИЈА ОД ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

1. ДЕФИНИЦИЈА ЗА ИЗВОД. ПРИМЕРИ

1.1. Нека $A \subseteq \mathbf{R}, x_0 \in A$ и постои $\delta > 0$ таков што $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$ и $f : A \to \mathbf{R}$. Ставаме

$$\Delta x = x - x_0,\ x \in A,\ x \neq x_0,\ \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)\,.$$

Притоа

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\,.$$

Дефиниција. Ако постои границата

$$\lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

тогаш оваа граница ја *нарекуваме прв извод на функцијата* f *во точката* x_0 и ја означуваме со $f'(x_0)$.

Според тоа,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\,. \qquad (1)$$

За првиот извод на функцијата f во точката x_0 најчесто ќе ги користиме ознаките $f'(x_0),\ f'_{x_0}, (f(x_0))',\ \frac{df(x_0)}{dx}$.

Да забележиме дека првиот извод на функцијата може да биде и бесконечен, односно дека во (1) не се исклучени случаите кога

$$\lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \text{ или } \lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty\,.$$

Во натамошните разгледувања под изразот *функцијата има извод* ќе ги подразбираме само конечните изводи, ако не е поинаку кажано.

1.2. Пример. а) Ако $f(x) = c,$ каде c е константа, тогаш

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{0}{\Delta x} = 0\,,$$

што значи $(c)' = 0$

б) За функцијата $f(x) = \sin x$ добиваме

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x,$$

т.е. $(\sin x)'=\cos x$.

Аналогно, се докажува дека $(\cos x)'=-\sin x$.

в) Да ја разгледаме функцијата $f(x)=x^n$, $n\in\mathbf{N}$. Имаме

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x-x)[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+...+(x+\Delta x)x^{n-2}+x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+...+(x+\Delta x)x^{n-2}+x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+...+(x+\Delta x)x^{n-2}+x^{n-1}]=nx^{n-1},$$

што значи $(x^n)'=nx^{n-1}$.

г) За функцијата $f(x)=a^x$, $a>0$ имаме

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a,$$

што значи $(a^x)'=a^x\ln a$. За $a=e$ добиваме $(e^x)'=e^x\ln e=e^x$.

д) За функцијата $f(x)=\log_a x,\ a>0$ имаме

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\ln a},$$

што значи $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$. За $a=e$ добиваме $(\ln x)'=\frac{1}{x\ln e}=\frac{1}{x}$. ◆

1.3. Пример а) Нека $f(x)=x\,|\,x\,|, x\in\mathbf{R}$.

Ако $x_0>0$, тогаш при $x>0$ и $x\neq x_0$ имаме

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x|x|-x_0|x_0|}{x-x_0}=\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=x+x_0\to 2x_0=2\,|\,x_0\,|,\text{ кога } x\to x_0 .$$

Ако $x_0<0$, тогаш при $x<0$ и $x\neq x_0$ имаме

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{-x^2+x_0^2}{x-x_0}=-x-x_0\to -2x_0=2\,|\,x_0\,|,\text{ кога } x\to x_0 .$$

За $x_0=0, x\neq x_0$ имаме

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x|x|}{x}=|x|\to 0 .$$

Од досега изнесеното следува дека за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $(x|x|)'=2|x|$.

б) Да ја разгледаме функцијата $f(x)=|x|$. Оваа функција е непрекината во точката $x_0=0$, но нема извод во оваа точка. Навистина, од

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1 \text{ и}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

следува дека

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

не постои, што според дефиниција 1.1 значи дека функцијата $f(x)=|x|$ нема извод во точката $x_0=0$.

в) За функцијата

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

и точката $x_0=0$ за количникот

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\sin\frac{1}{x}$$

границата кога $x\to 0$ не постои. Според тоа, изводот на функцијата f во точката $x_0=0$ не постои. ♦

1.4. Теорема. Ако функцијата $y=f(x)$ има извод во точката x_0, тогаш таа е непрекината во оваа точка.

Доказ. Нека $|f'(x_0)|<\infty$. Ставаме

$$\alpha(\Delta x)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0) .$$

Од (1) имаме $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. Според тоа

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x .$$

Ако во последното равенство преминеме кон граница кога $\Delta x\to 0$, добиваме

$$\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=\lim_{\Delta x\to 0}f'(x_0)\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)\Delta x=0 ,$$

што значи

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0),$$

т.е. функцијата $y = f(x)$ е непрекината во точката x_0. ♦

1.5. Забелешка. Обратното тврдење на теорема 1.4 не важи, што следува од пример 1.3 б). Имено, функцијата $f(x) = |x|$ е непрекината во точката $x_0 = 0$, но како што видовме таа во оваа точка нема извод.

1.6. Дефиниција. Ако за секој $x \in A$ постои $f'(x)$, тогаш функцијата $f' : x \mapsto f'(x)$ ја *нарекуваме извод на функцијата* f *на множеството* A. Операцијата на наоѓање на f' често пати се нарекува *диференцирање на функцијата* f.

1.7. Во теорема 1.4 докажавме, дека ако функцијата $y = f(x)$ има извод во точката x_0, тогаш таа е непрекината во оваа точка. Логично се наметнува прашањето: *ако функцијата* $y = f(x)$ *има извод во секоја точка* $x \in A$, *дали функцијата* $f' : x \mapsto f'(x)$ *е непрекината на множеството* A. Одговорот на поставеното прашање е негативен, што може да се види од следниов пример.

Пример. Функцијата $f : (-1,1) \to \mathbf{R}$ определена со

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

има извод во секоја точка $x \in (-1,1)$ и притоа важи

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Јасно, функцијата f' има прекин во точката $x_0 = 0$. ♦

2. СВОЈСТВА НА ИЗВОДИТЕ ПОВРЗАНИ СО АРИТМЕТИЧКИТЕ ОПЕРАЦИИ НАД ФУНКЦИИТЕ

2.1. Теорема. Нека функциите $f : A \to \mathbf{R}$ и $g : A \to \mathbf{R}$ имаат изводи $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$ во точката x_0, соодветно. Точни се следниве тврдења:

а) Функцијата $f + g$ има извод во точката x_0 и притоа

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0). \tag{1}$$

б) Функцијата fg има извод во точката x_0 и притоа

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)\,. \tag{2}$$

в) Ако $g(x_0) \neq 0$, тогаш функцијата $\frac{f}{g}$ има извод во точката x_0 и притоа

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,. \tag{3}$$

Доказ. а) Од

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

и од дефиниција 1.1 следува дека $f+g$ има извод во точката x_0 и притоа важи (1).

б) Од

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x) + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0)$$

и од дефиницијата на $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$ и непрекинатоста на функцијата $g(x)$ во точката x_0 следува дека функцијата fg има извод во точката x_0 и притоа важи (2).

в) Од $g(x_0) \neq 0$ и непрекинатоста на функцијата $g(x)$ во точката x_0 следува дека $g(x) \neq 0$ во некоја околина $U(x_0;\delta)$ на точката x_0. Според тоа, за секој $x \in U(x_0;\delta)$ функцијата $\frac{f}{g}$ е определена и притоа важи

$$\frac{1}{x-x_0}[\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}] = \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}$$
$$= \frac{1}{g(x)g(x_0)}[g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}].$$

Сега, од дефиницијата на $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$ и од непрекинатоста на функцијата $g(x)$ во точката x_0 следува, дека функцијата $\frac{f}{g}$ има извод во точката x_0 и притоа важи (3). ♦

2.2. Последица. Ако функцијата $f(x)$ има извод во точката x_0 и ако $c \in \mathbf{R}$, тогаш функцијата $cf(x)$ има извод во точката x_0 и притоа важи

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0)\,. \tag{4}$$

Доказ. Од равенството (2) и од пример 1.2. а) непосредно следува

$$(cf)'(x_0) = (c)'f(x_0) + cf'(x_0) = 0 \cdot f(x_0) + cf'(x_0) = cf'(x_0)\,.\ ♦$$

2.3. Примери. а) Нека $y = e^x \cos x + 3x^4 \sin x$. Од пример 1.2 и од формулите (1), (2) и (4) добиваме

$$\begin{aligned} y' &= (e^x \cos x + 3x^4 \sin x)' = (e^x \cos x)' + (3x^4 \sin x)' \\ &= (e^x)'\cos x + e^x (\cos x)' + 3(x^4)'\sin x + 3x^4 (\sin x)' \\ &= e^x \cos x - e^x \sin x + 12x^3 \sin x + 3x^4 \cos x. \end{aligned}$$

б) Нека $y = \operatorname{tg} x$. Ако ја искористиме формулата (3), тогаш за секој $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ добиваме

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = (\tfrac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогно, за секој $x \neq \pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ добиваме $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$. ◆

2.4. Пример. Пресметајте ги збировите:

а) $\sum_{k=1}^{n} ke^{kx}, x \in \mathbf{R}$, б) $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}, x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

Решение. а) Јасно,

$$\sum_{k=1}^{n} ke^{kx} = \frac{n(n+1)}{2} \text{ за } x = 0.$$

Понатаму,

$$\sum_{k=1}^{n} e^{kx} = \frac{e^{(n+1)x} - e^x}{e^x - 1}, \text{ за } x \neq 0$$

и бидејќи од $f(x) = g(x)$ следува $f'(x) = g'(x)$, добиваме

$$\sum_{k=1}^{n} ke^{kx} = (\sum_{k=1}^{n} e^{kx})' = (\frac{e^{(n+1)x} - e^x}{e^x - 1})' = \frac{ne^{(n+2)x} - (n+1)e^{(n+1)x} + e^x}{(e^x - 1)^2}, \text{ за } x \neq 0.$$

б) Ако се искористи дека $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ и фактот дека од $f(x) = g(x)$ следува $f'(x) = g'(x)$, добиваме

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = (\sum_{k=0}^{n} x^k)' = (\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1})' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$ ◆

3. ИЗВОД НА ИНВЕРЗНА ФУНКЦИЈА

3.1. Теорема (за извод на инверзна функција). Нека претпоставиме дека функцијата

$$f : (a,b) \to \mathbf{R}, \; -\infty \leq a < b \leq +\infty$$

ги задоволува условите:

1) $f \in \mathbf{C}((a,b))$ и

2) f строго монотоно расте на (a,b).

Нека

$$(c,d) = \{f(x) \mid x \in (a,b)\}\,,\ (-\infty \le c < d \le +\infty)$$

и $g:(c,d) \to (a,b)$ е инверзната функција на f. Ако во точката x_0 постои $f'(x_0) \ne 0$, тогаш функцијата g има извод $g'(y_0)$ во точката $y_0 = f(x_0)$ и притоа важи

$$g'(y_0) = \tfrac{1}{f'(x_0)} = \tfrac{1}{f'(g(y_0))}\,. \tag{1}$$

Доказ. Ако $y \ne y_0$, тогаш $g(y) \ne g(y_0)$ бидејќи функцијата g монотоно расте. Понатаму, како и во доказот на теорема 1.4, добиваме

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f(g(y)) - f(g(y_0)) \\ &= f'(g(y_0))(g(y) - g(y_0)) + \alpha(g(y) - g(y_0))(g(y) - g(y_0)), \end{aligned}$$

каде $\alpha(g(y) - g(y_0)) \to 0$ кога $g(y) \to g(y_0)$. Бидејќи $g \in \mathbf{C}((c,d))$, добиваме дека при $y \to y_0$ важи $g(y) \to g(y_0)$, па затоа $\alpha(g(y) - g(y_0)) \to 0$. Конечно,

$$\begin{aligned} \tfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} &= \tfrac{g(y)-g(y_0)}{f'(g(y_0))(g(y)-g(y_0))+\alpha(g(y)-g(y_0))(g(y)-g(y_0))} \\ &= \tfrac{1}{f'(g(y_0))+\alpha(g(y)-g(y_0))} \to \tfrac{1}{f'(g(y_0))}, \end{aligned}$$

кога $y \to y_0$, т.е. функцијата g има извод $g'(y_0)$ во точката $y_0 = f(x_0)$ и притоа важи формулата (1). ♦

3.2. Пример. Докажете дека $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$, за секој $x \in \mathbf{R}$.

Решение. Ја применуваме теорема 3.1, при што земаме

$$(a,b) = (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\,,\ f(x) = \mathrm{tg}\, x\,, \text{ за } x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\,.$$

Притоа важи

$$(c,d) = \mathbf{R}\,,\ \mathrm{tg}\, x \in \mathbf{C}((-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})) \text{ и } f'(x) = \tfrac{1}{\cos^2 x} \ne 0\,, \text{ за секој } x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\,.$$

Затоа за $y \in \mathbf{R}$, $x = \mathrm{arctg}\, y$ и за инверзната функција $g(y) = \mathrm{arctg}\, y$, $y \in \mathbf{R}$ важи

$$(\mathrm{arctg}\, y)' = g'(y) = \tfrac{1}{f'(x)} = \cos^2 x = \tfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \tfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\, y)} = \tfrac{1}{1+y^2}\,. \ ♦$$

3.3. Забелешка. Аналогно, се докажува дека

$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, за секој $x \in \mathbf{R}$,

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, за секој $x \in (-1,1)$, и

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ за секој } x \in (-1,1).$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

4. ИЗВОД ОД СЛОЖЕНА ФУНКЦИЈА

4.1. Теорема (за извод на сложена функција). Нека функцијата $f: A \to \mathbf{R}$ има извод $f'(x_0)$ во точката $x_0 \in A$ и функцијата $g: B \to \mathbf{R}$, $B \supset \{f(x) \mid x \in A\}$ има извод $g'(y_0)$ во точката $y_0 = f(x_0)$. Тогаш, функцијата $g \circ f : A \to \mathbf{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ има извод во точката x_0 и притоа важи

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \tag{1}$$

Доказ. Од дефиницијата на $g'(y_0)$ аналогно како во доказот на теорема 1.4, имаме

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y - y_0) + \alpha(y - y_0)(y - y_0),$$

каде $\alpha(y - y_0) \to 0$ кога $y \to y_0$. За $x \neq x_0$ во последното равенство ставаме $y = f(x),\ y_0 = f(x_0)$ и го делиме со $x - x_0$. Добиваме

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \alpha(f(x) - f(x_0))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{2}$$

Од егзистенцијата на $f'(x_0)$, согласно со теорема 1.4, следува непрекинатоста на функцијата f во точката x_0. Затоа $f(x) \to f(x_0) = y_0$, што значи дека

$$\alpha(f(x) - f(x_0)) \to 0, \text{ кога } x \to x_0.$$

Сега, ако во равенството (2) земеме $x \to x_0$, добиваме дека изводот на функцијата $g \circ f$ постои и притоа важи равенството (1). ♦

4.2. Пример. а) Во пример 1.2 в) го определивме изводот на функцијата $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$. Овде, користејќи ја претходната теорема, ќе го определиме изводот на функцијата $f(x) = x^\alpha,\ x > 0,\ \alpha \in \mathbf{R}$. Ако го искористиме равенството $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, добиваме

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Така, за $y = \frac{1}{x}$ добиваме

$$y' = (\tfrac{1}{x})' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} = \frac{-1}{x^2},$$

а за $y = \sqrt{x}$ имаме

$$y' = (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \tfrac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

Да забележиме дека во случај кога функцијата $f(x) = x^{\alpha}$ е определена при $x < 0$, тогаш $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$.

б) Да ја разгледаме функцијата $y = u^{v}$, каде $u = u(x) > 0$, $v = v(x)$. Аналогно на претходниот пример, дадената функција можеме да ја запишеме во видот $y = e^{v \ln u}$. Сега, повторно од теорема 4.1 следува

$$y' = (e^{v\ln u})' = e^{v\ln u}(v\ln u)' = e^{v\ln u}(v'\ln u + v\tfrac{1}{u}u') = u^{v}v'\ln u + vu'u^{v-1} . \qquad (3)$$

Така, на пример, за функцијата $y = x^{x}$, $x > 0$ имаме $u(x) = v(x) = x$ и бидејќи $u'(x) = v'(x) = 1$, со замена во формулата (3) наоѓаме $y = x^{x}(\ln x + 1)$.

в) Да ја разгледаме функцијата $y = \ln|x|$, $x \neq 0$. Претходно покажавме дека за $x > 0$ важи $y' = \frac{1}{x}$. Ако $x < 0$, тогаш $y' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}$. Според тоа, при $x \neq 0$ важи $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

г) За функцијата $y = \frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|$, $x \neq \pm a$ имаме

$$y' = \frac{1}{2a}\frac{x+a}{x-a}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)' = \frac{1}{2a}\frac{x+a}{x-a}\frac{x+a-(x-a)}{(x+a)^2} = \frac{1}{x^2-a^2} .$$

Слично, се докажува дека за функцијата $y = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|$ важи $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$ (проверете!). ♦

4.3. Забелешка. Со помош на теорема 4.1 може да се најде извод и на имплицитната функција $y = y(x)$ која е зададена со помош на равенството $F(x,y) = 0$. Одговорот на прашањето кога последното равенство дефинира некоја функција и дали таа има извод, ќе го дадеме при изучувањето на функциите од повеќе променливи, а овде само ќе спомeнеме дека ако се најде извод од функцијата $F(x, y(x))$ како сложена функција, тогаш може да се определи y'.

4.4. Пример. Да ја разгледаме функцијата $y = y(x)$, определена со равенството $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Во овој случај постои функција со саканите својства, на пример $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Од равенството $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ добиваме

$$(b^2x^2 + a^2y^2)' = (a^2b^2)'$$

т.е.

$$2b^2x + 2a^2yy' = 0 .$$

Според тоа, $y' = -\frac{xb^2}{ya^2}$. ♦

4.5. Забелешка. Ако ја логаритмираме функцијата $y = u^v$, каде $u = u(x) > 0,\quad v = v(x)$ добиваме нејзино имплицитно претставување $\ln y = v \ln u$. Од последното равенство добиваме $(\ln y)' = (v \ln u)'$, што значи

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + \frac{v}{u} u', \text{ т.е. } y' = y(v' \ln u + \frac{v}{u} u').$$

Ако во последната формула ставиме $y = u^v$ по средувањето ја добиваме формулата (3). Оваа постапка е позната како логаритамско диференцирање и неа ќе ја илустрираме на следниов пример.

4.6. Пример. Да ја разгледаме функцијата $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$. Бидејќи $x^2 + 1 > 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$ можеме да логаритмираме. Притоа добиваме

$$\ln y = \sin x \ln(x^2 + 1),$$

од што следува

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln(x^2 + 1) + \frac{2x \sin x}{x^2 + 1},$$

односно

$$y' = (x^2 + 1)^{\sin x} [\cos x \ln(x^2 + 1) + \frac{2x \sin x}{x^2 + 1}]. \ ♦$$

4.7. Нека функциите $x = x(t),\ y = y(t)$ се определени во некоја околина на точката t_0 и нека едната од нив, на пример $x = x(t)$ е непрекината и строго монотона во споменатата околина. Тогаш, функцијата $x(t)$ има инверзна функција $t = t(x)$ и во некоја околина на точката $x_0 = x(t_0)$ има смисла композицијата $y(t(x))$, што значи дека функцијата $y = y(x)$ е параметарски зададена со формулите $x = x(t),\ y = y(t)$.

4.8. Лема. Ако функциите $x = x(t),\ y = y(t)$ имаат во точката t_0 изводи и ако $x'(t_0) \neq 0$, тогаш параметарски зададената функција $y = y(t(x))$, исто така, има извод во точката $x_0 = x(t_0)$ и притоа важи

$$y_x' = \frac{y_t'(t_0)}{x_t'(t_0)}. \tag{4}$$

Доказ. Според теорема 4.1 за сложената функција $y = y(t(x))$, ако ги испуштиме аргументите, имаме $y_x' = y_t' t_x'$. Но, од теоремата за извод на инверзна функција добиваме $t_x' = \frac{1}{x_t'}$. Сега формулата (4) следува од последните две равенства. ♦

4.9. Пример. Ако $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$, тогаш од $x_t^{'} = -a\sin t$, $y_t^{'} = b\cos t$, според формулата (4), добиваме

$$y_x^{'} = -\frac{b\cos t}{a\sin t} = -\frac{b}{a}\mathrm{ctg}\, t,\quad 0 < t < \frac{\pi}{2}.\ \blacklozenge$$

4.10. Да ги разгледаме функциите $\mathrm{ch}\, x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ и $\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ кои ги нарековме косинусхиперболикум и синусхиперболикум, соодветно, и функциите $\mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$ и $\mathrm{cth}\, x = \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}$ кои ги нарекуваме тангенсхиперболикум и котангенсхиперболикум, соодветно. Најпрво ќе докажеме неколку својства на овие функции. Имаме

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = (\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2 - (\frac{e^x-e^{-x}}{2})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1,$$

$$2\,\mathrm{ch}\, x\,\mathrm{sh}\, x = 2\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = \mathrm{sh}\, 2x,$$

$$\mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}} = \frac{1}{\mathrm{cth}\, x},$$

$$(\mathrm{ch}\, x)' = (\frac{e^x+e^{-x}}{2})' = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}\, x,$$

$$(\mathrm{sh}\, x)' = (\frac{e^x-e^{-x}}{2})' = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}\, x,$$

$$(\mathrm{th}\, x)' = \frac{(\mathrm{sh}\, x)'\mathrm{ch}\, x - (\mathrm{ch}\, x)'\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} \text{ и}$$

$$(\mathrm{cth}\, x)' = \frac{\mathrm{sh}^2 x - \mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x} = -\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}.$$

Забележуваме дека меѓу овие функции, со исклучок на првата и четвртата релација, важат исти релации како и за функциите синус, косинус, тангенс и котангенс.

Што се однесува до вториот дел од името на овие функции, да спомeнеме дека зборот хиперболикум доаѓа од фактот што равенките

$$x = a\,\mathrm{ch}\, t,\ y = a\,\mathrm{sh}\, t, \tag{5}$$

се параметарски равенки на хиперболата $x^2 - y^2 = a^2$. Навистина, ако ги квадрираме равенствата (5) и ги одземеме, тогаш ако се има предвид дека

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1,$$

се добива равенката на хиперболата.

Слично, равенките

$$x = a\cos t,\quad y = a\sin t, \tag{6}$$

каде $t \in [0, 2\pi)$, се параметарски равенки на кружницата $x^2 + y^2 = a^2$. Навистина, ако ги квадрираме равенствата (6) и ги собереме, тогаш, ако се има предвид дека $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, се добива равенка на кружница.

5. ЕДНОСТРАНИ ИЗВОДИ

5.1. Дефиниција. Нека $\delta > 0$. Ако функцијата $y = f(x)$ е определена на интервалот $(x_0 - \delta, x_0]$ и ако постои границата $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, тогаш оваа граница ја нарекуваме *извод од лево на функцијата* $f(x)$ во точката x_0 и ја означуваме со $f_-^{'}(x_0)$.

Ако функцијата $y = f(x)$ е определена на интервалот $[x_0, x_0 + \delta)$ и ако постои границата $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, тогаш оваа граница ја нарекуваме *извод од десно на функцијата* $f(x)$ во точката x_0 и ја означуваме со $f_+^{'}(x_0)$.

5.2. Лема. Функцијата $y = f(x)$ има извод во точката x_0 ако и само ако во точката x_0 постојат $f_-^{'}(x_0)$ и $f_+^{'}(x_0)$ и $f_-^{'}(x_0) = f_+^{'}(x_0)$. Притоа е исполнето равенството $f'(x_0) = f_-^{'}(x_0) = f_+^{'}(x_0)$.

Доказ. Непосредно следува од теоремата за егзистенција на еднострани граници на функција. ♦

5.3. Примери. а) Во пример 1.5 покажавме дека функцијата $f(x) = |x|$ нема извод во точката $x_0 = 0$. Меѓутоа, од соодветните разгледувања следува дека $f_-^{'}(0) = -1$ и $f_+^{'}(0) = 1$.

б) Да ја разгледаме функцијата

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Имаме,

$$f_-^{'}(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{e^{1/\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{t \to \infty} \frac{e^{-t}}{-\frac{1}{t}} = -\lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^t} = 0 \text{ и } f_+^{'}(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{e^{1/\Delta x}}{\Delta x} = +\infty.$$

Според тоа, за разгледуваната функција во точката $x_0 = 0$ постојат и левиот и десниот извод, но таа во оваа точка нема извод (лема 5.2).

в) Да ја разгледаме функцијата

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

Во точката $x_0=0$ имаме $\Delta y=\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}$, па затоа $|\Delta y|\leq|\Delta x|$, од што следува $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, т.е. разгледуваната функција е непрекината во точката $x_0=0$. Бидејќи

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}$$

и функцијата $\sin\frac{1}{t}$ нема ниту лева, ниту десна граница во точката $t=0$, (зошто?), заклучуваме дека во точката $x_0=0$ едностраните изводи за разгледуваната функција не постојат. Од лема 5.2 следува дека оваа функција нема извод во точката $x_0=0$. ♦

5.4. Забелешка. Аналогно на доказот на теорема 1.4 може да се докаже дека егзистенцијата на $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ повлекува непрекинатост на функцијата $f(x)$ во точката x_0. Притоа, за изводите $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ треба да се разгледаат две функции $\alpha_1(\Delta x)$ и $\alpha_2(\Delta x)$, соодветно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

5.5. Коментар. Ако функцијата $f(x)$ е определена на некој затворен интервал $[a,b]$ и во секоја точка $x\in[a,b]$ постои изводот $f'(x)$ на функцијата $f(x)$, (под извод во крајните точки на интервалот $[a,b]$ ќе ги подразбираме едностраните изводи $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$), тогаш $f'(x)$ е функција определена на $[a,b]$. Притоа, функцијата $f'(x)$ ќе ја нарекуваме извод на функцијата $f(x)$ на интервалот $[a,b]$. Ако $y=f(x)$, тогаш често пати наместо $f'(x_0)$ ќе пишуваме $y'|_{x=x_0}$.

6. ДИФЕРЕНЦИЈАЛ НА ФУНКЦИЈА

6.1. Дефиниција. Нека $f:A\to\mathbf{R}$ и точката x_0 е таква што постои $\delta>0$ таков што $U(x_0;\delta)\subseteq A$. Функцијата f ја нарекуваме *диференцијабилна во точката* x_0 ако постои $L\in\mathbf{R}$ таков што

$$f(x)=f(x_0)+L(x-x_0)+o(x-x_0),\quad x\to x_0. \tag{1}$$

За диференцијабилната функција f во точката x_0, линеарната функција $y=L(x-x_0)$ ја нарекуваме *диференцијал* на функцијата f во точката x_0 и ја означуваме со $df(x_0)$ или dy.

6.2. Коментар. Ако ставиме $x - x_0 = \Delta x$, тогаш за диференцијалот на функцијата имаме $dy = L\Delta x$ и ако замениме во (1), добиваме $\Delta y = dy + o(\Delta x),$ $\Delta x \to 0$. Бидејќи за $L \neq 0$ важи $o(\Delta x) = o(L\Delta x)$, од $\Delta y = dy + o(\Delta x),\ \Delta x \to 0$ добиваме $\Delta y = dy + o(dy),\ \Delta x \to 0$, што значи дека функциите Δy и dy се еквивалентни кога $\Delta x \to 0$, при што dy е линеарна функција од Δx, а Δy, воопшто кажано, е посложена функција.

Ако ставиме $\Delta x \overset{\text{def}}{=} dx$, тогаш за диференцијалот го имаме записот $dy = Ldx$.

Бидејќи за функцијата $o(\Delta x)$ важи $o(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x)\Delta x$, каде

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0, \tag{2}$$

релацијата (1) можеме да ја запишеме во обликот

$$\Delta y = L\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x. \tag{3}$$

Функцијата $\varepsilon(\Delta x)$ е определена за сите вредности на Δx за кои во (1) е определена функцијата $o(\Delta x)$, т.е. за секој Δx таков што $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, што значи и за $\Delta x = 0$. Имено, за множеството од овие Δx се бара границата (2), а бидејќи $\Delta x = 0$ припаѓа на ова множество, добиваме дека функцијата $\varepsilon(\Delta x)$ е непрекината во $\Delta x = 0$, што според (2) значи дека $\varepsilon(0) = 0$.

6.3. Пример. Да го определиме диференцијалот на функцијата $y = x^2$. Имаме

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = 2x\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x, \text{ каде } \varepsilon(\Delta x) = \Delta x,$$

што значи $dy = 2xdx$. ♦

6.4. Теорема. Функцијата $y = f(x)$ е диференцијабилна во точката x_0 ако и само ако таа има извод $f'(x_0)$ во x_0. Притоа, важи $dy = f'(x_0)dx$.

Доказ. Нека функцијата f е диференцијабилна во точката x_0, т.е. важи релацијата (1). Тогаш, при ознака $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, имаме

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = L + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = L.$$

Затоа $f'(x_0)$ постои и е еднаков на L. Според тоа, $dy = f'(x_0)dx$.

Обратно, нека постои $f'(x_0)$, т.е. постои $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тогаш,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x),\ \Delta x \neq 0,$$

каде $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$, па затоа за $\Delta x\neq 0$ точно е равенството

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\Delta x\ .$$

Ако земеме $\varepsilon(0)=0$, добиваме дека во некоја околина на точката x_0 точно е равенството

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),\qquad \Delta x\to 0,$$

што значи дека при $L=f'(x_0)$ важи равенството (1). Според тоа, функцијата f е диференцијабилна во точката x_0. ♦

6.5. Последица. Ако функцијата f е диференцијабилна во точката x_0, тогаш таа е непрекината во x_0.

Доказ. Нека функцијата f е диференцијабилна во точката x_0. Од теорема 6.4 следува дека f има извод во точката x_0. Конечно, од теорема 1.4 добиваме дека f е непрекината во точката x_0. ♦

6.6. Теорема. Ако функциите f и g се диференцијабилни во точката x_0, тогаш во таа точка се деференцијабилни и нивниот збир $f+g$ и производ fg, а ако $g(x_0)\neq 0$, тогаш и количникот $\frac{f}{g}$ е диференцијабилен и притоа важи

$$d(f+g)=df+dg,\quad d(fg)=gdf+fdg,\quad d(\tfrac{f}{g})=\frac{gdf-fdg}{g^2}\ . \tag{4}$$

(во формулите (4) вредностите на функциите и диференцијалите се земени во точката x_0).

Доказ. Доказот непосредно следува од теоремите 6.4 и 2.1. Ќе ја докажеме само втората формула. Имаме:

$$d(fg)=(fg)'dx=(f'g+g'f)dx=gf'dx+fg'dx=gdf+fdg\ .\ ♦$$

6.7. Теорема. Нека се дадени две функции f и g такви, што сложената функција $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ е определена во точката x_0. Ако функцијата $y=f(x)$ е диференцијабилна во точката x_0 и функцијата g е диференцијабилна во точката $y_0=f(x_0)$, тогаш сложената функција $g(f(x))$ е диференцијабилна во точката x_0 и притоа важи

$$d(g(f(x_0)))=g'(f(x_0))f'(x_0)dx=g'(y_0)dy\ . \tag{5}$$

Доказ. Од теоремите 6.4 и 4.1 имаме

$$d(g(f(x_0)))=(g(f(x_0)))'dx=g'(f(x_0))f'(x_0)dx\ ,$$

т.е. важи левото равенство во (5). Но, $dy=f'(x_0)dx$ и бидејќи $y_0=f(x_0)$, добиваме дека

$$g'(f(x_0))f'(x_0)dx = g'(y_0)dy\ ,$$

т.е. десното равенство во (5) е исполнето. ♦

6.8. Пример. Диференцијалот на функцијата $y = x^2 \cos\frac{2x+1}{x^2+3}$ ќе го пресметаме користејќи ја теорема 6.4. Имаме:

$$dy = d(x^2\cos\tfrac{2x+1}{x^2+3}) = (x^2\cos\tfrac{2x+1}{x^2+3})'dx = (2x\cos\tfrac{2x+1}{x^2+3} - x^2\,\tfrac{2(x^2+3)-2x(2x+1)}{(x^2+3)^2}\sin\tfrac{2x+1}{x^2+3})dx$$

$$= 2x(\cos\tfrac{2x+1}{x^2+3} + \tfrac{x^3+x^2-3x}{(x^2+3)^2}\sin\tfrac{2x+1}{x^2+3})dx.$$

Користејќи ги формулите (4), пресметајте го диференцијалот на оваа функција. ♦

7. ГЕОМЕТРИСКО ТОЛКУВАЊЕ НА ИЗВОДОТ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛОТ

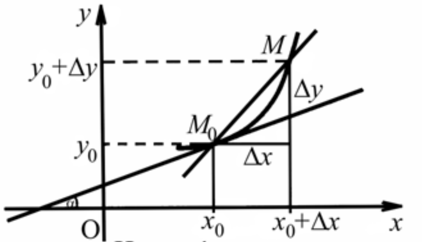
7.1. Дефиниција. Ако е зададена фамилија прави чии равенки се

$$a(t)x + b(t)y + c(t) = 0 \tag{1}$$

каде t е параметар и ако постојат конечните граници

$$\lim_{t\to t_0} a(t) = a_0\ ,\ \lim_{t\to t_0} b(t) = b_0 \text{ и } \lim_{t\to t_0} c(t) = c_0\ ,$$

тогаш ќе велиме дека правата (1) *тежи кон гранична права,* кога $t \to t_0$, чија равенка е $a_0x + b_0y + c_0 = 0$.



Цртеж 1

7.2. Нека функцијата f е определена во некоја околина $U(x_0)$ на точката x_0 и е непрекината во таа точка. При ознаки $y_0 = f(x_0)$ и $M_0(x_0, y_0)$ (цртеж 1), да фиксираме произволно нараснување на аргументот Δx, при кое важи $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$ и да ставиме

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\ ,\ M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)\ .$$

Правата која минува низ точките M и M_0 ја нарекуваме *секанта на графикот на функцијата* f и нејзината равенка гласи

$$y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0)\ . \tag{2}$$

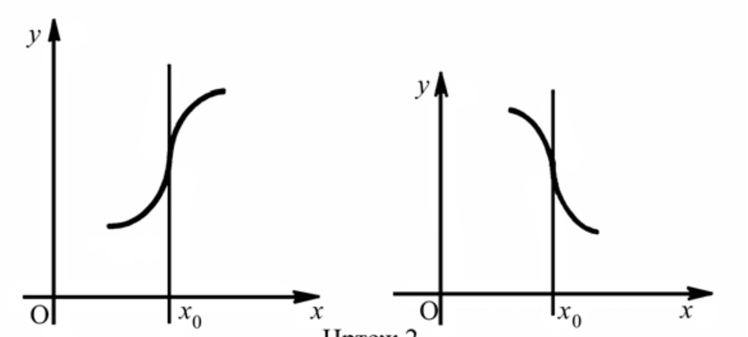
Очигледно, за секантата (2) нараснувањето Δx е параметар и притоа за да секантата (2) се стреми кон гранична положба, различна од права паралелна со оската Oy, кога $\Delta x \to 0$, потребно и доволно е да постои конечната граница $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, што значи потребно и доволно е во точката x_0 да постои конечен извод. Притоа, равенката на граничната положба на секантатата, која ја нарекуваме *тангента на графикот на функцијата* f во точката M_0, има облик

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) . \tag{3}$$

Правата која минува низ точката M_0 и е нормална на тангентата во точката M_0 ја нарекуваме *нормала на графикот на функцијата* f во точката M_0. Ако $f'(x_0) \neq 0$, тогаш нејзината равенка е

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) , \tag{4}$$

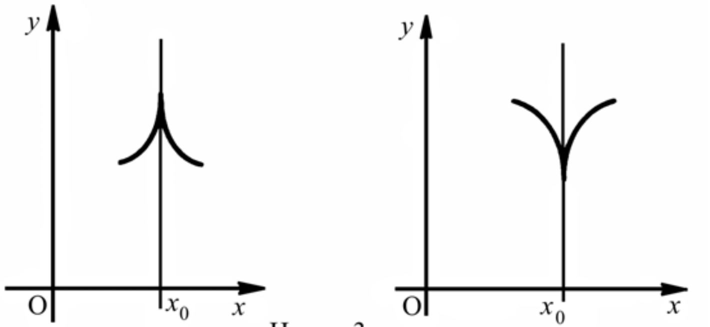
а ако $f'(x_0) = 0$, тогаш равенката на нормалата во точката M_0 е $x = x_0$.



Цртеж 2

Нека $f'(x_0) = +\infty$ или $f'(x_0) = -\infty$. Од равенката на секантата (2) добиваме

$$\frac{y - y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = x - x_0 .$$



Цртеж 3

Ако во последното равенство преминеме кон граница кога $\Delta x \to 0$, тогаш заради $f'(x_0) = +\infty$ или $f'(x_0) = -\infty$ за равенката на граничната положба на секантата во точката M_0, добиваме $x = x_0$ (цртеж 2). Исто така е можен случајот кога границата $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$ не е бесконечност со определен знак, па затоа во таа точка не постои ниту конечен ниту бесконечен извод со определен знак, туку само $f'(x_0)=\infty$. Тоа е можно, на пример, ако во точката x_0 постојат еднострани бесконечни изводи со различни знаци. Тогаш, во околина на точката x_0 графикот на функцијата има облик прикажан на цртеж 3 и притоа за граничната положба на секантата во точката M_0 повторно добиваме $x=x_0$.

7.3. Забелешка. Од непрекинатоста на функцијата f во точката x_0 следува дека $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ и бидејќи $\overline{MM_0}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ добиваме $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\overline{MM_0}=0$, што значи дека "точката M тежи кон точката M_0" по графикот на функцијата f.

Овде, да забележиме дека од геометриското значење на коефициентот пред $x-x_0$ во равенката (3) имаме $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$, каде α е аголот меѓу тангентата во точката M_0 и позитивниот дел на оската Ox (цртеж 1).

7.4. Да ја означиме ординатата на тангентата со y_t и во равенката (3) да ставиме $x-x_0=\Delta x$. Добиваме $y_t-y_0=f'(x_0)\Delta x$. Десната страна на последната равенка, всушност, е диференцијалот dy на функцијата f во точката x_0, па затоа

$$dy=y_t-y_0, \tag{5}$$

т.е. диференцијалот на функцијата е еднаков на нараснувањето на ординатата на тангентата.

7.5. Пример. а) Ќе докажеме дека тангентата повлечена во секоја точка $M_0(x_0,y_0)$, за која $x_0\neq 0,\frac{1}{4}$, на графикот на функцијата $y=\frac{\sqrt{x-4x^2}}{2}$, ја сече оската Oy во точка M таква, што $\overline{M_0M}=\overline{MO}$.

Најнапред да забележиме дека функцијата е определена на интервалот $[0,\frac{1}{4}]$.

Нека $M_0(x_0,y_0)$, каде $y_0=\frac{\sqrt{x_0-4x_0^2}}{2}$ е произволна точка од графикот на функцијата. За дадената функција имаме $y'=\frac{1-8x}{4\sqrt{x-4x^2}}$, од што добиваме

$$y'(x_0)=\frac{1-8x_0}{4\sqrt{x_0-4x_0^2}}.$$

Ако замениме во (3), тогаш за равенката на тангентата во точката M_0 добиваме

$$y-\frac{\sqrt{x_0-4x_0^2}}{2}=\frac{1-8x_0}{4\sqrt{x_0-4x_0^2}}(x-x_0).$$

За пресечната точка M со оската Oy имаме $x_1 = 0$, од што добиваме

$$y_1 = \frac{8x_0^2 - x_0}{4\sqrt{x_0 - 4x_0^2}} + \frac{\sqrt{x_0 - 4x_0^2}}{2} = \frac{x_0}{4\sqrt{x_0 - 4x_0^2}},$$

што значи дека тангентата ја сече оската Oy во точка $M(0, y_1)$, $y_1 = \frac{x_0}{4\sqrt{x_0 - 4x_0^2}}$.

Од досега изнесеното имаме

$$\overline{M_0M} = \sqrt{(x_0 - 0)^2 + (\frac{\sqrt{x_0 - 4x_0^2}}{2} - \frac{x_0}{4\sqrt{x_0 - 4x_0^2}})^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{(x_0 - 8x_0^2)^2}{16(x_0 - 4x_0^2)}} = \frac{x_0}{4\sqrt{x_0 - 4x_0^2}} = \overline{MO},$$

што и требаше да се докаже.

б) Ќе докажеме дека збирот на отсечките што тангентата во секоја точка од параболата $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ги отсекува на координатните оски има константна должина a.

Бидејќи точката $M(x_0, y_0)$ лежи на параболата, добиваме дека важи

$$\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} = \sqrt{a}. \tag{6}$$

Ако за првиот извод $y'(x_0) = -\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}$ замениме во равенката на тангентата $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ добиваме

$$y - y_0 = -\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(x - x_0)$$

и според (1) имаме

$$y\sqrt{x_0} + x\sqrt{y_0} = \sqrt{a}\sqrt{x_0}\sqrt{y_0}.$$

Пресечните точки со координатните оски се $A(\sqrt{a}\sqrt{x_0}, 0)$ и $B(0, \sqrt{a}\sqrt{y_0})$, па затоа од (6) следува дека збирот на отсечките што тангентата ги отсекува на координатните оски е

$$\sqrt{a}\sqrt{x_0} + \sqrt{a}\sqrt{y_0} = \sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0}) = \sqrt{a}\sqrt{a} = a.$$

в) Ќе докажеме дека тангентите на сите елипси $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ со заедничка оска $2a$ и различни оски $2b$, повлечени во точка со иста апциса, се сечат во иста точка која лежи на апцисната оска.

Нека се

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ и } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \ b \neq b_1$$

две различни елипси кои го задоволуваат условот на задачата. Лесно се докажува дека тангентите во точките со заедничка апциса $M(x_0, y_0)$ и $M(x_0, y_1)$ се

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1 \text{ и } \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_1}{b_1^2}=1 .$$

Нивната пресечна точка е $A(\frac{a^2}{x_0},0)$. Сега тврдењето на задачата следува од произволноста на b и b_1 . ♦

8. ФИЗИЧКО ТОЛКУВАЊЕ НА ИЗВОДОТ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛОТ

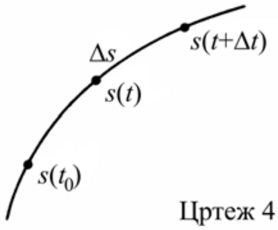
8.1. Нека вредностите на функцијата $y=f(x)$ и на нејзиниот аргумент x се некои физички величини, при што аргументот x се менува на некој интервал $[a,b]$. Нека $x_0 \in [a,b]$, $\Delta x>0$, $x=x_0+\Delta x,\quad x\in[a,b]$ и $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Количникот $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ е еднаков на промената на променливата y на интервалот $[x_0,x_0+\Delta x]$ и го нарекуваме *вредност на средната брзина на промена на променливата* y *на интервалот* $[x_0,x_0+\Delta x]$. Ако $\Delta x\to 0$, т.е. ако интервалот $[x_0,x_0+\Delta x]$ се “стега” кон точката x_0 , тогаш количникот $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ја определува вредноста на средната брзина на промената на y во однос на x на се помали интервали кои ја содржат точката x_0 . Претходно изнесеното важи и кога $\Delta x<0$ за интервалот $[x_0+\Delta x,x_0]$.

Границата $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$, ако истата постои, ја нарекуваме *брзина на промената* на променливата y во однос на променливата x во точката x_0 . Ако оваа брзина постои, тогаш нараснувањето Δy има облик

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),\qquad \Delta x\to 0 .$$

Тоа значи дека нараснувањето Δy линеарно зависи од нараснувањето Δx со точност до бесконечно мала величина од повисок ред од Δx .

Од претходно изнесеното можеме да заклучиме дека постоењето на брзината ни овозможува да сметаме дека на многу мали интервали физичкиот процес што е опишан со функцијата f се одвива речиси линеарно.



Цртеж 4

8.2. Пример. Ако $s=s(t)$ е должината на патот кој го минува материјална точка за време t , почнувајќи од некој временски момент t_0, тогаш $\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)$, (цртеж 4), па затоа со $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ е дадена *средната брзина* на движењето во временскиот интервал Δt , почнувајќи од временскиот момент t и неа да ја означиме со $v_s=\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Границата

$$\lim_{\Delta t \to 0} v_s = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$$

ја дава моменталната брзина на движењето на материјалната точка во временскиот момент t. Според тоа, $v = \frac{ds}{dt}$.

Диференцијалот $ds = v\Delta t$ е еднаков на патот што го поминува материјалната точка за временскиот интервал Δt, почнувајќи од временскиот момент t, ако движењето на тој дел од патот е рамномерно со брзина v. Овој пат се разликува од вистински изминатиот пат Δs за бесконечно мала величина од повисок ред од Δt, $\Delta s = ds + o(\Delta t),\ \Delta t \to 0$. ♦

8.3. Пример. Нека со $q = q(t)$ го означиме количеството електричество кое поминало низ напречниот пресек на даден спроводник во временски момент t. Тогаш, $\Delta q = q(t+\Delta t) - q(t)$ е еднакво на количеството електричество кое поминало низ разгледуваниот пресек од временскиот момент t до временскиот момент $t + \Delta t$. Количникот $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ ја дава средната брзина со која количеството електричество поминало низ напречниот пресек на спроводникот за време Δt и ја означуваме со I_s. Оваа величина во физиката е позната како средна јачина на електричната струја за време Δt. Границата $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = I$ ја дава моменталната јачина на електричната струја во даден временски момент t. Според тоа, $I = \frac{dq}{dt}$.

Диференцијалот $dq = I\Delta t$ е еднаков на количеството електричество кое би поминало низ напречниот пресек на спроводникот за временски интервал Δt, ако јачината на електричната струја во разгледуваниот интервал е константна. Јасно, ова количество електричество се разликува од вистински поминатото количество електричество за бесконечно мала величина од повисок ред од Δt, $\Delta q = dq + o(\Delta t),\ \Delta t \to 0$. ♦

9. ИЗВОДИ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛИ ОД ПОВИСОК РЕД

9.1. Дефиниција. Нека функцијата $y = f(x)$ е определена на интервалот (a,b), има во секоја точка $x \in (a,b)$ извод $f'(x)$ и нека $x_0 \in (a,b)$. Ако во точката x_0 постои изводот на функцијата $f'(x)$, тогаш него го нарекуваме *втор извод* на функцијата f во точката x_0 и го означуваме со $f''(x_0)$ или со $f^{(2)}(x_0)$.

Аналогно, ако постои изводот $f^{(n-1)}(x),\ n = 1,2,3,...$, тогаш $n-$от извод $f^{(n)}(x)$, доколку постои, го дефинираме со равенството

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Притоа имаме $f^{(0)}(x)=f(x)$ и $f^{(1)}(x)=f'(x)$.

9.2. Примери. а) Ако $y=x^n$, тогаш

$$y'=nx^{n-1},\ \ y''=n(n-1)x^{n-2},\ldots,\ y^{(n)}=n!,\ \ y^{(n+1)}=y^{(n+2)}=\ldots=0$$

б) Ако $y=a^x,\ a>0,$ тогаш

$$y'=a^x\ln a,\ \ y''=a^x\ln^2 a,\ldots,\ y^{(n)}=a^x\ln^n a,$$

за секој природен број n. Јасно, ако $a=e$, тогаш $(e^x)^{(n)}=e^x$, за секој природен број n. ♦

9.3. Дефиниција. Нека $A\subseteq \mathbf{R}$. За функцијата $y=f(x)$ ќе велиме дека е *n пати (непрекинато) диференцијабилна на множеството A*, ако таа во секоја точка од A има (напрекинати) изводи заклучно со n-ти ред. Притоа пишуваме $f\in \mathbf{C}^{(n)}(A)$.

Множеството бесконечно диференцијабилни функции на A го дефинираме со $\mathbf{C}^{(\infty)}(A)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{C}^{(n)}(A)$.

Може да се докаже дека:

а) за секое множество $A\subseteq \mathbf{R}$ важи

$$\mathbf{C}^{(n)}(A)\subseteq \mathbf{C}^{(n-1)}(A)\subseteq\ldots\subseteq \mathbf{C}^{(1)}(A)\subseteq \mathbf{C}(A);$$

б) ако $f,g\in \mathbf{C}^{(n)}(\mathbf{R})$, тогаш $g\circ f\in \mathbf{C}^{(n)}(\mathbf{R})$;

в) ако функцијата $f\in \mathbf{C}^{(n)}((a,b))$ има инверзна функција g и ако $f'(x)\neq 0$, за $x\in(a,b)$, тогаш $g\in \mathbf{C}^{(n)}((c,d))$ каде $(c,d)=\{f(x)\mid x\in(a,b)\}$.

9.4. Пример. Функциите $e^x, \sin x, \cos x\in \mathbf{C}^{(\infty)}(\mathbf{R})$. ♦

9.5.Теорема. Нека функциите $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ имаат изводи од $n-$ти ред во точката x_0 и $\lambda_1,\lambda_2\in \mathbf{R}$. Тогаш функциите

$$\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2=\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x) \text{ и } y_1y_2=f_1(x)f_2(x)$$

исто така, имаат изводи од $n-$ти ред во точката x_0 и притоа важи

$$(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2)^{(n)}=\lambda_1 y_1^{(n)}+\lambda_2 y_2^{(n)} \tag{1}$$

и

$$(y_1y_2)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k)} \tag{2}$$

каде со $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $k = 0,1,2,...,n$ се означени биномните коефициенти.

Формулата (2) е позната како *Лајбницова формула.*

Доказ. Доказот на теоремата ќе го спроведеме со индукција. За $n = 1$ точноста на формулите (1) и (2) беше докажана во теоремата 2.1. Нека претпоставиме дека формулите се точни за изводите до $n-$ти ред. Ќе докажеме дека тие се точни и за изводите од $(n+1)-$ви ред.

Во случајот на збир на функции имаме

$$\begin{aligned}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)^{(n+1)} &= [(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)^{(n)}]' = (\lambda_1 y_1^{(n)} + \lambda_2 y_2^{(n)})' \\ &= \lambda_1 (y_1^{(n)})' + \lambda_2 (y_2^{(n)})' = \lambda_1 y_1^{(n+1)} + \lambda_2 y_2^{(n+1)}\end{aligned}$$

со што е докажана формулата (1).

Пред да преминеме на доказот на формулата (2) да се потсетиме дека за биномните коефициенти важат равенствата

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k,\ C_n^0 = C_n^n = C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1\,.$$

Имаме:

$$\begin{aligned}(y_1 y_2)^{(n+1)} &= ((y_1 y_2)^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k)} \right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + y_1^{(n-k)} y_2^{(k+1)}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k+1)} \\ &= y_1^{(n+1)} y_2^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k+1)} + y_1^{(0)} y_2^{(n+1)} \\ &= y_1^{(n+1)} y_2^{(0)} + \sum_{p=1}^{n} (C_n^p + C_n^{p-1}) y_1^{(n+1-p)} y_2^{(p)} + y_1^{(0)} y_2^{(n+1)} \\ &= y_1^{(n+1)} y_2^{(0)} + \sum_{p=1}^{n} C_{n+1}^p y_1^{(n+1-p)} y_2^{(p)} + y_1^{(0)} y_2^{(n+1)} = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p y_1^{(n+1-p)} y_2^{(p)}\end{aligned}$$

со што формулата (2) е докажана. ♦

9.6. Теорема. Нека функцијата $y = y(x)$ има втор извод во точката x_0, а функцијата $z = z(y)$ има втор извод во точката $y_0 = y(x_0)$. Тогаш сложената функција $z(y(x))$ има втор извод во точката x_0 и притоа важи

$$z_{xx}'' = z_{yy}'' y_x'^{\,2} + z_y' y_{xx}''\,. \tag{3}$$

Доказ. Навистина, ако постојат $z''(y_0)$ и $y''(x_0)$, тогаш постојат и $z'(y_0)$ и $y'(x_0)$. Според тоа, во некои околини на точките x_0 и y_0 функциите $y = y(x)$ и $z = z(y)$, соодветно, се непрекинати. Затоа во некоја околина на точката x_0 е определена сложената функција $z(y(x))$. Од теорема 4.1 следува дека $z'_x = z'_y y'_x$. Ако последното равенство уште еднаш го диференцираме по x , добиваме

$$z''_{xx} = (z'_y)'_x y'_x + z'_y y''_{xx} = z''_{yy} y'^{2}_x + z'_y y''_{xx} \text{ . } \blacklozenge$$

9.7. Забелешка. Аналогно, при соодветни претпоставки се пресметуваат и изводите од повисок ред на сложена функција.

9.8. Пример. Ќе докажеме дека функцијата $y = \sin(n \arcsin x)$ ја задоволува релацијата.

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \text{ .} \tag{4}$$

За првиот извод на функцијата наоѓаме

$$y' = \cos(n \arcsin x)\cdot(n\arcsin x)' = \frac{n\cos(n\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} \text{ .} \tag{5}$$

Сега од (5) за вториот извод на функцијата добиваме

$$y'' = \left(\frac{n\cos(n\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{\frac{-n^2\sin(n\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2} - \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}n\cos(n\arcsin x)}{1-x^2}$$

$$= \frac{-n^2\sin(n\arcsin x) + x\frac{n\cos(n\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-n^2y + xy'}{1-x^2}$$

т.е. ја добиваме релацијата $y'' = \frac{-n^2y+xy'}{1-x^2}$ која е еквивалентна на релацијата (4). Вториот извод на разгледуваната функција може да се определи и со помош на формулата (3). Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

9.9. Пример. За секој $n \in \mathbf{N}$ функцијата $y = (x^2-1)^n$ е полином од $2n-$ ти степен. Јасно, извод од полином е полином со степен помал за еден, па затоа функцијата

$$P_n(x) = [(x^2-1)^n]^{(n)}$$

е полином од $n-$ти степен. Овие полиноми во литературата се познати како *полиноми на Лежандр.* Ќе докажеме дека полиномите на Лежандр ја задоволуваат релацијата

$$(x^2-1)P''_n + 2xP'_n - n(n+1)P_n = 0 \text{ .} \tag{6}$$

Од $y = (x^2-1)^n$ следува $y' = 2nx(x^2-1)^{n-1}$, т.е.

$$(x^2-1)y' = 2nxy \text{ .} \tag{7}$$

Ако во релацијата (7) диференцираме $n+1$ пати, тогаш од Лајбницовата формула добиваме

$$(x^2-1)y^{(n+2)}+(n+1)2xy^{(n+1)}+\frac{n(n+1)}{2}2y^{(n)}=2nxy^{(n+1)}+(n+1)2ny^{(n)}.$$

Според тоа,

$$(x^2-1)y^{(n+2)}+2xy^{(n+1)}-n(n+1)y^{(n)}=0.$$

Конечно, ако се искористи фактот дека

$$P_n''=y^{(n+2)},\ P_n'=y^{(n+1)},\ P_n=y^{(n)},$$

добиваме дека релацијата (6) важи. ♦

9.10. Теорема. Нека функцијата $y=y(x)$ е непрекината и строго монотона во некоја околина на точката x_0 и нека во оваа точка постојат изводите y' и y'', при што $y'(x_0)\neq 0$. Тогаш и инверзната функција $x=x(y)$ има втор извод во точката $y_0=y(x_0)$ и притоа важи $x_{yy}''=-\frac{y_{xx}''}{y_x'^3}$.

Доказ. Од теорема 3.1 имаме $x_y'=\frac{1}{y_x'}$. Ако последното равенство го диференцираме по y, добиваме

$$x_{yy}''=(x_y')_y'=(\frac{1}{y_x'})_y'=-\frac{y_{xx}''}{y_x'^2}\frac{1}{y_x'}=-\frac{y_{xx}''}{y_x'^3}.\ ♦$$

9.11. Теорема. Ако за параметарски зададената функција $x=x(t)$, $y=y(t)$ постојат $x_{tt}''(t_0)$ и $y_{tt}''(t_0)$ и $x_t'(t_0)\neq 0$, тогаш постои и $y_{xx}''(x_0)$, каде $x_0=x(t_0)$, и притоа важи

$$y_{xx}''=\frac{y_{tt}''x_t'-y_t'x_{tt}''}{x_t'^3}. \tag{8}$$

Доказ. Со непосредни пресметувања добиваме

$$y_{xx}''=(y_x')_x'=(\frac{y_t'}{x_t'})_x'=(\frac{y_t'}{x_t'})_t't_x'=\frac{y_{tt}''x_t'-y_t'x_{tt}''}{x_t'^3}.\ ♦$$

9.12. Пример. Нека функцијата $y=y(x)$ е зададена со параметарските равенки

$$y(t)=e^t\cos t,\ x(t)=e^t\sin t,\ t\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

Ќе докажеме дека таа ја задоволува релацијата

$$y''(x+y)^2=2(xy'-y).$$

Јасно, на разгледуваниот интервал функцијата $x(t)=e^t\sin t$ е строго монотона, што значи функцијата $y=y(x)$ е добро дефинирана. За дадената функција имаме

$$y_t'=e^t(\cos t-\sin t)\ \text{и}\ x_t'=e^t(\cos t+\sin t),$$

што значи $x_t^{'}(t_0)\neq 0$, за секој $t\in(0,\frac{\pi}{2})$. Од лема 4.8 добиваме $y'=\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}$. Понатаму, $y_{tt}^{"}=-2e^t\sin t$ и $x_{tt}^{"}=2e^t\cos t$. Со замена во формулата (8), по средувањето, добиваме $y"=\frac{-2}{e^t(\cos t+\sin t)^3}$. Од досега изнесеното имаме

$$\begin{aligned}2(xy'-y)&=2(e^t\sin t\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}-e^t\cos t)\\&=\frac{-2e^t}{\cos t+\sin t}=\frac{-2}{e^t(\cos t+\sin t)^3}[e^t(\cos t+\sin t)]^2\\&=y"(x+y)^2\end{aligned}$$

што и требаше да докажеме. ♦

9.13. Дефиниција. Диференцијалот од првиот диференцијал $dy=f'(x)dx$ на функцијата $y=f(x)$, разгледуван само како функција од променливата x (што значи дека за нараснувањето dx на аргументот x претпоставуваме дека е константно), при услови кога повторното нараснување на независно променливата x се совпаѓа со почетното, го нарекуваме *втор диференцијал* $d^2f(x)$ на функцијата f во дадената точка x.

Според тоа,

$$d^2f(x)=d(df(x))=d(f'(x)dx)=d(f'(x))dx=f"(x)dxdx=f"(x)dx^2,$$

што значи $d^2f(x)=f"(x)dx^2$ или $d^2y=y"dx^2$, од што наоѓаме $y"=\frac{d^2y}{dx^2}$.

Аналогно, *диференцијал од* $n-$*ти ред,* $n=3,4,...$ го нарекуваме диференцијалот од диференцијалот од $(n-1)-$ви ред при услови во диференцијалите постојано да имаме едно и исто нараснување dx на независно променливата x. Значи, $d^ny=d(d^{n-1}y)$.

9.14. Лема. За диференцијалот од $n-$ти ред точна е формулата

$$d^ny=y^{(n)}dx^n,\qquad n=1,2,3,... . \tag{9}$$

Доказ. Доказот ќе го спроведеме со индукција. За $n=1$ и $n=2$ веќе докажавме дека формулата (9) важи. Нека претпоставиме дека важи за диференцијал од $(n-1)-$ви ред, т.е.

$$d^{n-1}y=y^{(n-1)}dx^{n-1}.$$

Тогаш, од дефиницијата на диференцијал од $n-$ти ред добиваме

$$d^ny=d(d^{n-1}y)=d(y^{(n-1)}dx^{n-1})=(y^{(n-1)}dx^{n-1})'dx=(y^{(n-1)})'dx^{n-1}dx=y^{(n)}dx^n$$

што и требаше да се докаже. ♦

9.15. Ќе наведеме уште некои својства на диференцијалите од повисок ред. Така,

а) $d^n(y_1+y_2)=d^n y_1+d^n y_2$,

б) $d^n(y_1 y_2)=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k} y_1 d^k y_2$, и

в) $d^n(cy)=cd^n y$, c е константа.

9.16. Нека $z=z(y)$, $y=y(x)$ се двапати диференцијабилни функции и нека има смисла композицијата $z(y(x))$. Во теорема 6.7 докажавме дека $dz=z_y^{'}dy$, својство познато како инваријантна форма на првиот диференцијал во однос на трансформацијата на независно променливата. Меѓутоа, за вториот диференцијал имаме

$$d^2z=d(dz)=d(z_y^{'}dy)=d(z_y^{'})dy+z_y^{'}d(dy)=z_{yy}^{''}dy^2+z_y^{'}d^2y$$

и бидејќи во општ случај важи $d^2y\neq 0$, заклучуваме дека диференцијалот $d^n z$, $n\geq 2$, во општ случај, не е инваријантен во однос на изборот на променливите.

10. ОСНОВНИ ТЕОРЕМИ НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОТО СМЕТАЊЕ

10.1. Теорема (Ферма). Нека

$$f:(a,b)\to \mathbf{R},\ x_0\in(a,b),\ f(x_0)=\max_{x\in(a,b)} f(x) \text{ или } f(x_0)=\min_{x\in(a,b)} f(x).$$

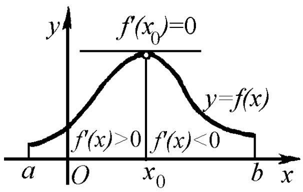
Ако во точката x_0 постои $f'(x_0)$, тогаш $f'(x_0)=0$, цртеж 5.

Доказ. Нека $f(x_0)=\max\limits_{x\in(a,b)} f(x)$. Според тоа, за секој $x\in(a,b)$ важи $f(x)\leq f(x_0)$. Тогаш, ако $x<x_0$ имаме

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0, \qquad (1)$$

а ако $x>x_0$, имаме

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0. \qquad (2)$$



Цртеж 5

Ако во точката x_0 постои изводот $f'(x_0)$, т.е. ако постои конечната граница $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$, тогаш преминувајќи кон граница во неравенството (1), кога $x\to x_0^-$, добиваме $f'(x_0)\geq 0$. Аналогно, преминувајќи кон граница во неравенството (2), кога $x \to x_0^+$, добиваме $f'(x_0) \le 0$. Од последните две неравенства следува $f'(x_0) = 0$.

Ако $f(x_0) = \min\limits_{x \in (a,b)} f(x)$, тогаш ставаме $g(x) = -f(x)$ и добиваме

$$g(x_0) = -f(x_0) = -\min_{x \in (a,b)} f(x) = \max_{x \in (a,b)} (-f(x)) = \max_{x \in (a,b)} g(x).$$

Според тоа $g'(x_0) = 0$, т.е. $f'(x_0) = 0$. ♦

10.2. Теорема (Рол). Нека за функцијата f важи:

а) $f \in \mathbf{C}([a,b])$,

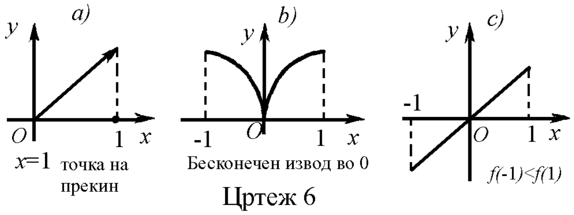
б) за секој $x \in (a,b)$ постои $f'(x)$ и

в) $f(a) = f(b)$.

Тогаш постои барем една точка $\xi \in (a,b)$ таков што $f'(\xi) = 0$.

Доказ. Од теоремата на Ваерштрас следува дека функција непрекината на интервал ги достигнува својот максимум и својот минимум во некои точки на тој интервал. Ако $M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ и $m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, тогаш за секој $x \in [a,b]$ се исполнети неравенствата $m \le f(x) \le M$.

Ако $m = M$, тогаш функцијата е константна, па значи $f' \equiv 0$ на (a,b) и во својство на точката ξ може да се земе која било точка од интервалот (a,b). Ако пак $m \ne M$, тоа значи дека барем една од вредностите m и M не се достигнува на краевите на интервалот $[a,b]$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека тоа е вредноста m и нека точката $\xi \in (a,b)$ е таков што $f(\xi) = m$. Јасно, во точката ξ функцијата f го достигнува својот минимум и на интервалот (a,b), па затоа од теоремата на Ферма следува дека $f'(\xi) = 0$. ♦



Цртеж 6

10.3. Коментар. Сите услови од теоремата на Рол се суштествени. На цртеж 6 се дадени графиците на три функции, определени на интервалот $[-1,1]$, за кои одделно не е исполнет само еден од трите услови на теоремата на Рол и затоа не постои точка $\xi \in (-1,1)$ таков што $f'(\xi) = 0$. На пример, за функцијата на црт. 5 а) точката $x_0 = 1$ е точка на прекин, а за функцијата $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (цртеж 5 b)) имаме: f е непрекината на интервалот $[-1,1]$, $f(1) = 1 = f(-1)$, меѓутоа, не постои точка $\xi \in (-1,1)$ таков што

$f'(\xi)=0$, бидејќи $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\neq 0$. Овде уште да напоменеме дека иако во точката $x_0=0$ оваа функција достигнува минимум, сепак не важи теоремата на Рол, за што причина е непостоењето на $f'(0)$.

10.4. Пример. а) Нека $P(x)=x(x-a_1)...(x-a_n)$, $x\in\mathbf{R}$, $a_i\in\mathbf{R}$, $i=1,...,n$ и $0=a_0<a_1<a_2<...<a_{n-1}<a_n$. Да се докаже дека полиномот $P'(x)$ има n реални нули кои се наоѓаат меѓу нулите на полиномот $P(x)$.

За $P:[a_k,a_{k+1}]\to\mathbf{R}$, $k=0,1,2,...,n-1$ се исполнети условите од теоремата на Рол. Навистина,

i) P е полином, и тоа непрекинат на интервалот $[a_k,a_{k+1}]$ за секој $k=0,1,2,...,n-1$,

ii) за секој $x\in(a_k,a_{k+1})$ постои $P'(x)$ и

iii) $P(a_k)=P(a_{k+1})=0$ за секој $k=0,1,2,...,n-1$.

Затоа, од оваа теорема следува дека за секој $k=0,1,2,...,n-1$ постои $\xi_k\in(a_k,a_{k+1})$ таков што $P'(\xi_k)=0$, што значи дека $P'(x)$ има n реални нули кои се наоѓаат меѓу нулите на полиномот $P(x)$.

б) Нека $a_i,b_i\in\mathbf{R}$, $i=1,2,...,n$ и $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ie^{b_ix}$ е таков што постои $x_0\in\mathbf{R}$, $f(x_0)\neq 0$. Ќе докажеме дека функцијата f не може да има повеќе од $(n-1)$ – на реална нула.

Тврдењето ќе го докажеме со со индукција по n.

i) За $n=1$ имаме $f(x)=a_1e^{b_1x}$ и постои $x_0\in\mathbf{R}$ таков што $a_1e^{b_1x_0}\neq 0$. Тоа значи $a_1\neq 0$, па затоа $f(x)=a_1e^{b_1x}\neq 0$, за секој $x\in\mathbf{R}$, т.е. тврдењето важи.

ii) Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n=k$, т.е. дека ако $a_i,b_i\in\mathbf{R}$, $i=1,2,...,k$ и $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{k}a_ie^{b_ix}$ е таков што постои $x_0\in\mathbf{R}$, $f(x_0)\neq 0$, тогаш функцијата f не може да има повеќе од $(k-1)$ – на реална нула.

Да претпоставиме дека постојат $a_i,b_i\in\mathbf{R}$, $i=1,2,...,k+1$ и $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{k+1}a_ie^{b_ix}$ е таква што постои $x_0\in\mathbf{R}$, $f(x_0)\neq 0$ и функцијата f има $(k+1)-$ на реална нула. Од $f(x_0)\neq 0$ следува дека постои $i\in\{1,2,...,k+1\}$ таков што $a_i\neq 0$. Без ограничување на општоста можеме даземеме дека $a_{k+1}\neq 0$. Но, тогаш функцијата

$$g(x)=\frac{f(x)}{a_{k+1}e^{b_{k+1}x}}=\frac{a_1}{a_{k+1}}e^{(b_1-b_{k+1})x}+\frac{a_2}{a_{k+1}}e^{(b_2-b_{k+1})x}+...+\frac{a_k}{a_{k+1}}e^{(b_k-b_{k+1})x}+1$$

има $(k+1)-$на реална нула. Сега од теоремата на Рол следува дека постојат $c_i, i=1,2,...,k$ такви што $g'(c_i)=0, i=1,2,..,k$ т.е. функцијата

$$g'(x)=\frac{a_1}{a_{k+1}}(b_1-b_{k+1})e^{(b_1-b_{k+1})x}+\frac{a_2}{a_{k+1}}(b_2-b_{k+1})e^{(b_2-b_{k+1})x}+...+\frac{a_k}{a_{k+1}}(b_k-b_{k+1})e^{(b_k-b_{k+1})x}$$

има k реални нули. Последното противречи на претпоставката при

$$a_i^{'}=\frac{a_i}{a_{k+1}}(b_i-b_{k+1}), b_i^{'}=b_i-b_{k+1},$$

за $i=1,2,...,k$, бидејќи постои $x_0\in\mathbf{R}$ таков што $g'(x_0)\neq 0$. Навистина, во спротивно би имале $g(x)=\text{const}$, а тогаш важи 1).

Според тоа, тврдењето важи за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n\geq 1$. ♦

10.5. Теорема (Лагранж). Нека за функцијата $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ важи

а) $f\in\mathbf{C}([a,b])$ и

б) за секој $x\in(a,b)$ постои $f'(x)$.

Тогаш, постои точка $\xi\in(a,b)$ таков што

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a). \tag{3}$$

Доказ. Да ја разгледаме помошната функција

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x. \tag{4}$$

За функцијата F се исполнети сите услови од теоремата на Рол. Навистина, таа е непрекината на интервалот $[a,b]$, како разлика на непрекинати функции на $[a,b]$, за секој $x\in(a,b)$ постои $F'(x)$ и од равенството (4) следува

$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}b=F(b).$$

Затоа постои барем една точка $\xi\in(a,b)$ таков што $F'(\xi)=0$, т.е. постои барем една точка $\xi\in(a,b)$ таков што важи равенството $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ кое е еквивалентно на равенството (3). ♦

10.6. Забелешка. Природно е да се запрашаме дали ако функцијата $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ има извод f' во (a,b), тогаш за секој $c\in(a,b)$ постојат $e,d\in(a,b)$ такви што

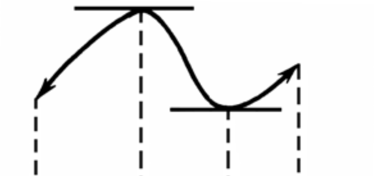
$$\frac{f(e)-f(d)}{e-d}=f'(c),\ c\in(d,e).$$

Одговорот на ова прашање е негативен, што може да се види ако ја разгледаме функцијата $f:[-1,1]\to \mathbf{R}$, $f(x)=x^3$ и $c=0$. Имено, од

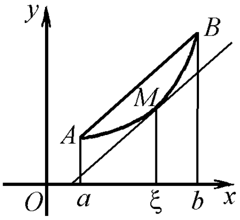
$$\frac{f(e)-f(d)}{e-d}=e^2+de+d^2>0=f'(c)$$

заклучуваме дека бараните $e,d\in(-1,1)$ не постојат.

Геометриската интерпретација на теоремата на Ферма е во тоа, што ако во точката x_0 функцијата f прима максимална или минимална вредност во некоја околина на x_0, тогаш тангентата на графикот на функцијата во точката $(x_0, f(x_0))$ е паралелна на оската Ox (цртеж 7).



Цртеж 7



Цртеж 8

Геометриската интерпретација на теоремата на Лагранж е во тоа, што (цртеж 8) на лакот со крајни точки $A(a,f(a))$ и $B(b,f(b))$ постои точка $M(\xi,f(\xi))$ во која тангентата е паралелена со тетивата AB. Навистина, согласно со теоремата на Лагранж имаме

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{5}$$

каде $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ е коефициентот на правецот на тетивата AB, а $f'(\xi)$ е коефициентот на правецот на тангентата во точката $M(\xi,f(\xi))$. Сега тврдењето следува од равенството (5).

10.7. Ако ставиме $\theta=\frac{\xi-a}{b-a},\ a<\xi<b,$ тогаш очигледно $0<\theta<1$ и притоа $\xi=a+\theta(b-a)$. Затоа формулата (3) можеме да ја запишеме во обликот

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),\qquad 0<\theta<1$$

Нека $a=x,\ b-a=\Delta x$. Тогаш претходната формула го добива обликот

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\qquad 0<\theta<1$$

и таа е позната под името *формула за конечно нараснување на Лагранж.*

10.8. Пример. а) Докажете дека за секој $x\in\mathbf{R}$ важи

$$e^x\ge 1+x,$$

при што равенство важи ако и само ако $x=0$.

б) Докажете дека за функцијата

$$f(x)=Ax^n+Bx+C,\ x\in[a,b]$$

константата ξ од теоремата на Лагранж не зависи од константите A, B и C.

Решение. а) Нека $x > 0$. Сега од теоремата на Лагранж за функцијата $f(u) = e^u$, $u \in [0, x]$ следува дека постои $\xi \in (0, x)$ таков што

$$e^x - e^0 = e^{\xi}(x - 0) > x,$$

бидејќи $e^{\xi} > 1$. Значи, за $x > 0$ важи $e^x > 1 + x$.

Нека $x < 0$. Сега од теоремата на Лагранж за функцијата $f(u) = e^u$, $u \in [x, 0]$ следува дека постои $\xi \in (x, 0)$ таков што $e^0 - e^x = e^{\xi}(x - 0) < -x$, бидејќи $e^{\xi} < 1$ и $-x > 0$. Значи, за $x < 0$ важи $e^x > 1 + x$.

Според тоа, при $x \neq 0$ важи $e^x > 1 + x$, а за $x = 0$ имаме $e^0 = 1 = 1 + 0$, т.е. важи знак за равенство.

б) Ако $f(x) = Ax^n + Bx + C$, тогаш $f'(x) = Anx^{n-1} + B$, па затоа

$$\frac{Ab^n + Bb + C - Aa^n - Ba - C}{b - a} = An\xi^{n-1} + B, \text{ т.е. } \frac{A(b^n - a^n) + B(b - a)}{b - a} = An\xi^{n-1} + B$$

од што следува $\frac{b^n - a^n}{b - a} = n\xi^{n-1}$, односно $\xi = \sqrt[n-1]{\frac{b^n - a^n}{n(b - a)}}$. Според тоа, константата ξ од теоремата на Лагранж за разгледуваната функција не зависи од константите A, B и C. ♦

10.9. Последица. а) Ако функцијата $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ има извод f' на (a, b) и за секој $x \in (a, b)$ важи $f'(x) = 0$, тогаш постои $L \in \mathbf{R}$ таков што за секој $x \in (a, b)$ важи $f(x) = L$.

б) Ако функциите $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ и $g : (a, b) \to \mathbf{R}$ имаат изводи f' и g' на (a, b) и за секој $x \in (a, b)$ важи $f'(x) = g'(x)$, тогаш постои $L \in \mathbf{R}$ таков што за секој $x \in (a, b)$ важи $f(x) = g(x) + L$.

Доказ. а) Од теоремата на Лагранж, применета на функцијата $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ на интервалот $[x_0, x] \subset (a, b)$ следува дека постои $\xi \in (x_0, x)$ таков што

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = 0.$$

Според тоа, за секој $x \in (a, b)$ важи $f(x) = f(x_0) = L$.

б) Да ја разгледаме функцијата $h : (a, b) \to \mathbf{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$, за секој $x \in (a, b)$. Јасно, оваа функција има извод h' на (a, b) и за секој $x \in (a, b)$ важи $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. Сега од а) следува дека постои $L \in \mathbf{R}$ таков што за секој $x \in (a, b)$ важи $f(x) - g(x) = L$, т.е. за секој $x \in (a, b)$ важи $f(x) = g(x) + L$. ♦

10.10. Пример. а) Ќе ги определиме сите функции $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ за кои важи $f'(x) = f(x)$, за секој $x \in \mathbf{R}$.

Бидејќи $e^{-x} \neq 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$, од условот имаме $e^{-x} f'(x) = e^{-x} f(x)$ за секој $x \in \mathbf{R}$, што значи $e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$. Но, функциите $f(x)$ и $g(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$ се диференцијабилни, па затоа и функцијата $h(x) = e^{-x} f(x)$ е диференцијабилна за секој $x \in \mathbf{R}$ и притоа важи

$$h'(x) = e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = 0 \text{, за секој } x \in \mathbf{R} .$$

Сега од последица 10.9. а) следува дека постои $L \in \mathbf{R}$ таков што $h(x) = L,$ за секој $x \in \mathbf{R}$. Конечно, $f(x) = Le^{x}$, за секој $x \in \mathbf{R}$.

б) Ќе ги определиме сите функции $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ за кои важи $f'(x) = 2ax + b,$ за секој $x \in \mathbf{R},$ каде a и b се дадени константи.

За функцијата $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = ax^2 + bx$ важи $g'(x) = 2ax + b,$ за секој $x \in \mathbf{R}$. Според тоа, функциите f и g ги задоволуваат условите од последица 10.9. б), па затоа постои $c \in \mathbf{R}$ таков што $f(x) = g(x) + c$, за секој $x \in \mathbf{R},$ што значи $f(x) = ax^2 + bx + c$, за секој $x \in \mathbf{R}$.

в) Ќе докажеме, дека ако $f \in \mathbf{C}([a,b])$, f не е линеарна на $[a,b]$ и има конечен извод во (a,b), тогаш постои $c \in (a,b)$ таков што $|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}| < | f'(c) |$.

Нека $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Тогаш,

$$| f(b) - f(a) | = | \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] | \leq \sum_{i=0}^{n-1} | f(x_{i+1}) - f(x_i) | \quad . \tag{6}$$

Од теоремата на Лагранж следува дека постои $\alpha_i \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 0,1,2,...,n-1$ таков што $f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\alpha_i)(x_{i+1} - x_i)$. Заменуваме во (6) и добиваме

$$| f(b) - f(a) | \leq \sum_{i=0}^{n-1} | f'(\alpha_i) | (x_{i+1} - x_i) . \tag{7}$$

Но, функцијата f не е линеарна, па од последица 10.9 следува дека $f'(x) \neq \text{const}$, т.е. $| f'(x) | \neq \text{const}$. Тоа значи, постојат $x_i, i = 0,1,2,...,n$ такви, што меѓу броевите $| f'(\alpha_i) |$ постои најголем број, различен од нула. Овој број да го означиме со $| f'(c) |$. Со замена во (2) го добиваме неравенството

$$| f(b) - f(a) | \leq | f'(c) | \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = | f'(c) | (b - a)$$

кое е еквивалентно на бараното неравенство. ♦

10.11. Последица. Ако функцијата f е непрекината на даден интервал (конечен или бесконечен) и има извод еднаков на нула во сите точки од тој интервал, освен можеби во конечно многу, тогаш функцијата е еднаква на константа на разгледуваниот интервал.

Доказ. Нека функцијата f ги задоволува условите на интервалот Δ и нека $x_1, x_2 \in \Delta,\ \ x_1 < x_2$. Да ги нумерираме во растечки редослед точките на Δ во кои изводот на f не постои, или постои, но е бесконечен, и кои лежат на интервалот (x_1, x_2). Овие точки да ги означиме со $a_1, a_2, ..., a_k$. Од последицата 10.9. а) следува дека функцијата f е константна на секој од интервалите $(x_1, a_1),\ (a_1, a_2),$ $..., (a_k, x_2)$. Од непрекинатоста на функцијата следува дека таа е константна на секој од интервалите $[x_1, a_1], [a_1, a_2], ..., [a_k, x_2]$, што значи дека е константна на интервалот $[x_1, x_2]$. Сега тврдењето следува од произволноста на точките $x_1, x_2 \in \Delta$. ♦

10.12. Последица. Нека функцијата f е непрекината на интервалот $[a, b)$, диференцијабилна на интервалот (a, b) и за изводот $f'(x)$ постои конечна граница од десно во точката $x = a$. Тогаш во точката $x = a$ за функцијата f постои десниот извод $f_+^{'}$ и притоа важи $f_+^{'}(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$.

Доказ. Нека во точката $x = a$ за изводот $f'(x)$ постои конечна граница од десно и нека $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = A$. Ако за функција f ја примениме теоремата на Лагранж на интервалот $[a, x],\ a < x < b$ добиваме

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi) \tag{8}$$

каде $\xi = \xi(x)$ лежи меѓу точките x и a, па затоа $\lim\limits_{x \to a^+} \xi(x) = a$. Ако го искористиме правилото за смена на променливите при наоѓање на граничните вредности на функциите, добиваме

$$\lim_{x \to a^+} f'(\xi) = A .$$

Од последното равенство и од равенството (8) следува дека постои и границата

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A ,$$

што значи дека десниот извод $f_+^{'}(a)$ постои и е еднаков на A. ♦

10.13.Теорема (Коши). Нека за функциите f и g важи:

а) $f, g \in \mathbf{C}([a, b])$,

б) f и g се диференцијабилни во (a, b) и в) $g'(x) \neq 0$, за секој $x \in (a,b)$.

Тогаш, постои точка ξ, $\xi \in (a,b)$ таква што

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{9}$$

Доказ. Најпрво да забележиме дека формулата (9) има смисла. Имено, ако $g(b) = g(a)$, тогаш функцијата g ги задоволува условите од теоремата на Рол, па значи ќе постои точка $\xi, \xi \in (a,b)$ таков што $g'(\xi) = 0$, што противречи на условот. Да ја разгледаме помошната функција

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x).$$

Лесно се гледа дека $F(a) = F(b)$, што значи дека функцијата F ги задоволува условите од теоремата на Рол, па затоа постои $\xi \in (a,b)$ таков што $F'(\xi) = 0$, односно постои $\xi \in (a,b)$ таков што е исполнето равенството

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = 0$$

кое е еквивалентно со равенството (9). ♦

10.14. Пример. Ќе докажеме дека за секој $n \in \mathbf{N}$ и за секој $x > 0$ важи

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}. \tag{10}$$

Доказот ќе го спроведеме со индукција по n. За $n = 1$, од примерот 10.8 следува дека $e^x > 1 + x$ за секој $x > 0$.

Нека претпоставиме дека за $n = k$ и за секој $x > 0$ важи

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!}. \tag{11}$$

Да ги разгледаме функциите

$$f(u) = e^u \text{ и } g(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \ldots + \frac{u^k}{k!} + \frac{u^{k+1}}{(k+1)!}, \text{ за } u \in [0,x].$$

Функциите f и g ги задоволуваат условите од теоремата на Коши, па затоа постои $c \in (0,x)$ таков што

$$\frac{e^x - e^0}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}-1} = \frac{e^c}{1+c+\frac{c^2}{2!}+\ldots+\frac{c^k}{k!}}.$$

Од последното равенство и од неравенството (11) следува дека

$$\frac{e^x - e^0}{x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}} > 1, \text{ т.е. } e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

што значи неравенството (10) важи и за $n = k + 1$ и за секој $x > 0$. Сега тврдењето следува од принципот на математичка индукција. ♦

11. ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА

11.1. Нека $n \in \mathbf{N}$ и $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 0,1,2,...,n$. Ќе докажеме дека за секоја точка $x_0 \in \mathbf{R}$ полиномот

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n, \qquad x \in \mathbf{R}$$

може да се претстави во обликот

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + b_3(x - x_0)^3 + ... + b_n(x - x_0)^n, \quad x \in \mathbf{R} \quad (1)$$

каде $b_i \in \mathbf{R}$, $i = 0,1,2,...,n$. Овие броеви можат да се определат на следниов начин: ако во равенството (1) ставиме $x = x_0$, добиваме $b_0 = P(x_0)$. Го диференцираме равенството (1) и наоѓаме

$$P'(x) = b_1 + 2b_2(x - x_0) + 3b_3(x - x_0)^2 + ... + nb_n(x - x_0)^{n-1}, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

Ако во (2) ставиме $x = x_0$, добиваме $b_1 = P'(x_0)$. Понатаму, од (2) добиваме

$$P''(x) = 2 \cdot 1 \cdot b_2 + 3 \cdot 2b_3(x - x_0) + ... + n(n-1)b_n(x - x_0)^{n-2}, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

Ако во (3) ставиме $x = x_0$, добиваме $b_2 = \frac{P''(x_0)}{2!}$. Продолжувајќи ја постапката, наоѓаме

$$b_m = \frac{P^{(m)}(x_0)}{m!}, \text{ за } m = 3,4,...,n.$$

Според тоа,

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \ x \in \mathbf{R}. \quad (4)$$

Оваа формула, која ја нарекуваме *Тејлорова формула за полиноми,* е интересна бидејќи полиномот $P(x)$ на $\mathbf{R}$ наполно е определен ако се знае вредноста на полиномот и на неговите изводи во некоја точка x_0.

11.2. Пример. Нека $P(x)$ е полином од $n-$ти степен и

$$P(a) > 0, P'(a) > 0, ..., P^{(n)}(a) > 0$$

за некој $a \in \mathbf{R}$. Докажете дека сите реални корени на равенката $P(x) = 0$ се помали или еднакви на a.

Решение. За полиномот $P(x)$ Тејлоровата формула во точката a гласи:

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x - a) + \frac{P''(a)}{2!}(x - a)^2 + ... + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Ако равенката $P(x) = 0$ има реален корен $b > a$, тогаш од претходната равенка добиваме $P(b) > 0$, што е противречност. ♦

11.3. Кога се работи за функција, која не е полином, формулата (4) не е точна. Сепак ако се ограничиме на вредности x кои се блиски до точката x_0, тогаш при определени услови може да се тврди дека аналоген израз на десната страна на (4) е многу близок до самата функција. За таа цел ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема. Нека функцијата $f:(a,b)\to \mathbf{R}$ при $n\geq 1$ ги задоволува условите:

а) за секој $x\in(a,b)$ постои $f^{(n-1)}(x)$ и

б) за некоја точка $x_0\in(a,b)$, постои $f^{(n)}(x_0)$.

Тогаш, точна е формулата

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),\qquad x\to x_0. \tag{5}$$

Формулата (5) ја нарекуваме *Тејлорова формула,* а $o((x-x_0)^n)$ го нарекуваме *остаточен член во форма на Пеано.*

Доказ. Да ја разгледаме функцијата

$$r_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,\qquad x\in(a,b). \tag{6}$$

Од условите а) и б) следува дека за секој $x\in(a,b)$ постои $r_n^{(n-1)}(x)$ и постои $r_n^{(n)}(x_0)$, при што важи

$$r_n(x_0)=r_n'(x_0)=r_n''(x_0)=r_n^{(3)}(x_0)=...=r_n^{(n)}(x_0)=0\ .$$

Од дефиницијата на извод имаме

$$r_n^{(n-1)}(x)=r_n^{(n-1)}(x)-r_n^{(n-1)}(x_0)=r_n^{(n)}(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0),\ \text{кога}\ x\to x_0,$$

што значи

$$r_n^{(n-1)}(x)=o(x-x_0),\ \ x\to x_0. \tag{7}$$

Ако ја искористиме теоремата на Лагранж, добиваме

$$r_n^{(n-2)}(x)=r_n^{(n-2)}(x)-r_n^{(n-2)}(x_0)=r_n^{(n-1)}(c)(x-x_0),$$

каде c лежи меѓу x и x_0. Ако $x\to x_0$, тогаш и $c\to x_0$, па затоа од последната релација и од релацијата (7) следува дека

$$r_n^{(n-2)}(x)=o((x-x_0)^2),\ \ x\to x_0.$$

Ако претходната постапка ја повториме $n-2$ пати, наоѓаме

$$r_n(x)=o((x-x_0)^n),\ \ x\to x_0. \tag{8}$$

Конечно, од (6) и (8) следува точноста на формулата (5). ♦

11.4. Теорема. Нека $n \in \mathbf{N}$. Ако за функцијата $f:(a,b) \to \mathbf{R}$ постои $f^{(n+1)}(x)$, за секој $x \in (a,b)$ и $x_0 \in (a,b)$, тогаш за секој $x \in (a,b)$ постои θ, $0 < \theta < 1$ таков што

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x), \tag{9}$$

каде

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{10}$$

Формулата (9) е Тејлорова формула со *остаточен член на Лагранж,* ((10)).

Доказ. Јасно, формулата (9) важи за $x = x_0$. Нека $x \neq x_0$. Да ја разгледаме функцијата

$$u(z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x - z) - \ldots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - z)^n - \frac{L}{(n+1)!}(x - z)^{n+1}, \quad L \in \mathbf{R},$$

каде z се менува во интервалот со крајни точки x и x_0. Согласно со условите на теоремата, функцијата $u(z)$ е непрекината и има извод во точките на разгледуваниот интервал. Освен тоа, $u(x) = 0$. Сега константата L ќе ја избереме така, што $u(x_0) = 0$. Од теоремата на Рол следува дека постои θ, $0 < \theta < 1$ таков што $u'(x_0 + \theta(x - x_0)) = 0$. Бидејќи

$$u'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x - z)^n + \frac{L}{n!}(x - z)^n,$$

од последното равенство наоѓаме $L = f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$. Јасно, при овој избор на константата L важи $u(x_0) = 0$, т.е. важи Тејлоровата формула (9), каде остаточниот член е даден со формулата (10). ♦

11.5. Забелешка. Полиномот

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

во Тејлоровите формули (5) и (9) го нарекуваме *Тејлоров полином.* Ако $x_0 = 0$, тогаш Тејлоровата формула ја нарекуваме *Маклоренова,* која е дадена со

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + r_n(x) \tag{11}$$

каде остаточниот член во облик на Пеано е $r_n(x) = o(x^n)$, $x \to x_0$, а во облик на Лагранж $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$.

11.6. Теорема. Нека функцијата f е диференцијабилна заклучно со $n-$ти ред во точката x_0 и нека

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0, \tag{12}$$

каде $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$ е некој полином со степен помал или еднаков на n.

Тогаш

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \; k = 0,1,2,...,n, \tag{13}$$

т.е. $P_n(x)$ е Тејлоровиот полином.

Доказ. Од формулите (5) и (12) следува

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0$$

од каде ако преминеме кон граница кога $x \to x_0$, наоѓаме $a_0 = f(x_0)$. Нека овој член на левата и десната страна го поништиме и потоа поделиме со $x-x_0$, $x \neq x_0$. Сега од

$$o((x-x_0)^n) = \varepsilon(x)(x-x_0)^n, \text{ каде } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0,$$

добиваме

$$\frac{o((x-x_0)^n)}{x-x_0} = \varepsilon(x)(x-x_0)^{n-1} = o((x-x_0)^{n-1}), \quad x \neq x_0,$$

од што следува

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (x-x_0)^{k-1} + o((x-x_0)^{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k-1} + o((x-x_0)^{n-1}), \quad x \to x_0.$$

Ако повторно преминеме кон граница кога $x \to x_0$ добиваме $a_1 = f'(x_0)$. Продолжувајќи ја постапката наоѓаме дека се исполнети равенствата (13). ♦

11.7. Коментар. Претходната теорема, всушност, го карактеризира Тејлоровиот полином на функцијата f како нејзино најдобро полиномно приближување во околина на дадена точка. Јасно, притоа ова приближување е единствено, па затоа претставувањето на функцијата во облик (12) понекогаш може да биде искористено за нејзино разложување според Тејлоровата формула. Имено, ако на каков било начин го определиме претставувањето (13), тогаш од претходната теорема следува дека тоа е разложувањето на функцијата според Тејлоровата формула. Претходно изнесеното најдобро може да се илустрира со следниот пример, во кој ќе се користиме со елементарни знаења за геометрискиот ред, поим кој ќе го воведеме подоцна.

11.8. Пример. Да ја разложиме функцијата $f(x) = \frac{1}{1-x}$ според Маклореновата формула. Да забележиме дека

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \qquad |x| < 1.$$

Ако ставиме

$$r_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = \frac{x^{n+1}}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

добиваме

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + r_n(x), \qquad |x| < 1$$

и бидејќи

$$\lim_{x\to 0} \frac{r_n(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0$$

добиваме $r_n(x) = o(x^n)$ кога $x \to 0$. Според тоа, претставувањето

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n), \qquad x \to 0$$

е Маклореновото разложување на функцијата $f(x) = \frac{1}{1-x}$. ♦

11.9. Пример. а) Функцијата $f(x) = \sin x$ има изводи од произволен ред. За оваа функција ќе ја најдеме Маклореновата формула со остаточен член во облик на Пеано. Со помош на математичка индукција лесно се докажува дека

$$(\sin x)^{(k)} = \sin(x + \frac{k\pi}{2}), \ \ k = 1, 2, \ldots$$

па затоа

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & k = 2m, m \in \mathbf{N} \\ (-1)^m, & k = 2m+1, m \in \mathbf{N} \end{cases} \tag{14}$$

и ако се искористи формулата (11), добиваме

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \qquad x \to 0.$$

Овде остаточниот член го запишавме во обликот $o(x^{2n+2})$, а не во обликот $o(x^{2n+1})$, бидејќи од (14) следува дека последниот собран член во Тејлоровиот полином е еднаков на нула.

б) Лесно се докажува дека за функцијата $f(x) = \cos x$ важи

$$(\cos x)^{(k)} = \cos(x + \frac{k\pi}{2}), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

па затоа

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & k = 2m+1, m \in \mathbf{N} \\ (-1)^m, & k = 2m, m \in \mathbf{N} \end{cases} \tag{15}$$

и ако се искористи формулата (11) добиваме

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \qquad x \to 0.$$

Овде остаточниот член го запишавме во обликот $o(x^{2n+1})$, а не во обликот $o(x^{2n})$, бидејќи од (15) следува дека последниот собран член во Тејлоровиот полином е еднаков на нула.

в) Бидејќи за функцијата $f(x)=e^x$ важи $(e^x)^{(n)}=e^x$, добиваме

$$f^{(n)}(0)=1,\ \ n=1,2,\dots,$$

па затоа

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),\qquad x\to 0\,. \tag{16}$$

Ако во формулата (16), x го замениме со $-x$, добиваме

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+o(x^n),\qquad x\to 0\,. \tag{17}$$

Со одземање на (17) од (16), добиваме

$$\operatorname{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}),\qquad x\to 0\,,$$

а со нивно собирање, имаме

$$\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}),\qquad x\to 0\,.$$

Од теорема 11.6 следува дека добиените релации, всушност, се Тејлоровите формули за функциите sh x и ch x.

г) Ако искористиме дека за функцијата $f(x)=\ln(1+x)$ важи

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k},\qquad k=1,2,\dots,$$

добиваме

$$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!,\ \ k=1,2,\dots$$

и бидејќи $f(0)=1$ за Маклореновото претставување на оваа функција имаме

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n),\qquad x\to 0\,. \ \blacklozenge$$

11.10. Забелешка. Ако функцијата $f(x)$ може да се запише во обликот $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ и ако се познати Тејлоровите разложувања на функциите $g(x)$ и $h(x)$ во околина на точката $x=x_0$ до $o((x-x_0)^n)$, т.е. ако се познати

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\ \text{ и }\ h(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$$

при што $c_0=h(x_0)\neq 0$, тогаш од теорема 11.6 следува дека за наоѓање на Тејлоровото разложување на функцијата f може да се примени методот на неопределени коефициенти кој се состои во следното.

Нека

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),\ x\to x_0$$

е бараното разложување. Со изедначување на коефициентите пред $(x-x_0)^k$, $k=0,1,2,...,n$ во равенството

$$(\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n))(\sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n))=\sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$$

наоѓаме систем равенки, со чие решавање ги определуваме коефициентите a_k, $k=0,...,n$.

11.11. Пример. Според Маклореновата формула ќе ја разложиме функцијата $f(x)=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ до $o(x^6)$.

Нека

$$f(x)=\sum_{k=0}^{6} a_k x^k+o(x^6),\ \ x\to 0.$$

Ако ја искористиме релацијата $f(x)(1+x+x^2)=1-x+x^2$, добиваме

$$1-x+x^2=(1+x+x^2)(\sum_{k=0}^{6} a_k x^k+o(x^6))$$

од што по срамнување на коефициентите пред $1,x,x^2,x^3,x^4,x^5$ и x^6 го добиваме системот равенки

$$a_0=1,\ a_1+a_0=-1,\ a_2+a_1+a_0=1,\ a_3+a_2+a_1=0,$$
$$a_4+a_3+a_2=0,\ a_5+a_4+a_3=0,\ a_6+a_5+a_4=0$$

со чие решавање добиваме $a_0=1,\ a_1=-2,\ a_2=2,\ a_3=0,\ a_4=-2,\ a_5=2,\ a_6=0$. Според тоа,

$$\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}=1-2x+2x^2-2x^4+2x^5+o(x^6),\qquad x\to 0.\ \blacklozenge$$

11.12. Забелешка. Нека $F(x)=f(g(x))$ е сложена функција и нека се познати разложувањата на функциите f и g, т.е.

$$f(w)=\sum_{k=0}^{n} a_k(w-w_0)^k+o((w-w_0)^n),\qquad w\to w_0 \tag{18}$$

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),\qquad x\to x_0 \tag{19}$$

каде $w_0 = g(x_0)$. Тогаш, за наоѓање на коефициентите c_k, $k = 0,1,2,...,n$ во разложувањето

$$F(x) = f(g(x)) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \qquad x \to x_0$$

во релацијата (18) треба да ставиме $w = g(x)$, т.е. да ја замениме функцијата $g(x)$ со нејзиното разложување (19), а потоа да ги извршиме соодветните аритметички операции, при што ќе ги зачуваме само членовите од облик

$$c_k (x - x_0)^k, \; k = 0,1,2,...,n \, .$$

11.13. Пример. Според Маклореновата формула ќе ја разложиме функцијата $F(x) = e^{2x - x^2}$ до $o(x^5)$.

Според (16), за Маклореновото разложување на функцијата $f(w) = e^w$ имаме

$$e^w = 1 + w + \tfrac{w^2}{2!} + \tfrac{w^3}{3!} + \tfrac{w^4}{4!} + \tfrac{w^5}{5!} + o(w^5), \quad w \to 0 \, .$$

Сега, од забелешка 11.12 за Маклореновото разложување на дадената функција имаме

$$e^{2x-x^2} = 1 + 2x - x^2 + \tfrac{(2x-x^2)^2}{2!} + \tfrac{(2x-x^2)^3}{3!} + \tfrac{(2x-x^2)^4}{4!} + \tfrac{(2x-x^2)^5}{5!} + o((2x - x^2)^5), \qquad x \to 0$$

т.е.

$$e^{x-2x^2} = 1 + 2x + x^2 - \tfrac{2}{3} x^3 - \tfrac{5}{6} x^4 - \tfrac{1}{15} x^5 + o(x^5), \qquad x \to 0 \, ,$$

при што искористивме дека $o((2x - x^2)^5) = o(x^5)$, кога $x \to 0$. ♦

11.14. Забелешка. Нека треба да се најде границата $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ каде

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \, .$$

Во околината на x_0, до првиот ненулти член, според Тејлоровата формула ги разложуваме функциите f и g, ако тоа е можно, т.е. наоѓаме

$$f(x) = a(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad a \neq 0 \text{ и } g(x) = b(x - x_0)^m + o((x - x_0)^m), \quad b \neq 0 \, .$$

Тогаш, од својствата на функцијата o следува

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)}{b(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m)} = \frac{a}{b} \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{n-m} = \begin{cases} 0, & n > m \\ \frac{a}{b}, & n = m \\ \infty, & n < m \end{cases}$$

Ако треба да се најде $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, каде $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, тогаш со трансформацијата $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$ овој случај го сведуваме на претходниот. Слично кога имаме неопределености од типот $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$, со соодветни трансформации ги сведуваме на обликот $\frac{0}{0}$. На крајот, за наоѓање на граничните вредности во случаите кога имаме неопределености од типот $0^0, 1^\infty$ и ∞^0, споменатиот метод можеме да го примениме ако претходно го логаритмираме дадениот израз, или директно во изразот ги замениме Тејлоровите развои на функциите.

11.15. Пример. Ќе ја пресметаме граничната вредност

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}.$$

Бидејќи

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad t \to 0,$$

добиваме

$$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4), \qquad x \to 0$$

и бидејќи

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \qquad x \to 0,$$

наоѓаме

$$\cos x - e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right) = -\frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

Според тоа,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = -\frac{1}{12}. \ ♦$$

11.16. Пример. Ќе ја пресметаме граничната вредност

$$\lim_{x\to 0}(\cos(xe^x) - \ln(1-x) - x)^{\operatorname{ctg} x^3}.$$

Имаме:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\cos(xe^x) - \ln(1-x) - x)^{\operatorname{ctg} x^3} &= \lim_{x\to 0}(1 - \frac{(xe^x)^2}{2} + o((xe^x)^3) + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x)^{1/\operatorname{tg} x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}(1 - \frac{(x+x^2+o(x^2))^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3))^{1/(x^3+\mathrm{o}(x^3))}\\ &= \lim_{x\to 0}(1 - \frac{2x^3}{3} + o(x^3))^{1/(x^3+\mathrm{o}(x^3))} = e^{-2/3}\end{aligned}$$

Во овој дел без доказ ги искористивме Тејлоровите претставувања на функцијата $\operatorname{tg} x = x + o(x)$, од што следува $\operatorname{tg} x^3 = x^3 + o(x^3)$, и на функцијата

$$\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

11.17. Пример. Ќе ја пресметаме граничната вредност

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

Имаме:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^2-x^2}{x^2[x+o(x^2)]^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^2[x+o(x^2)]^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=-\frac{1}{3}.$$

11.18. Една од суштинските примени на Тејлоровата (Маклореновата) формула се приближните пресметувања. Користењето на Маклореновата формула за приближно пресметување на определени величини ќе го покажеме на следниов пример.

Пример. Да се пресмета $\sqrt{e}$ со точност до 10^{-4}.

Решение. Маклореновата формула за функцијата $f(x)=e^x$ со остаточен член во форма на Лагранж е дадена со

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1, \tag{20}$$

па затоа

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},$$

при што грешката е дадена со $r_n=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$. Ако во (20) ставиме $x=\frac{1}{2}$, добиваме

$$\sqrt{e}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2 2!}+\ldots+\frac{1}{2^n n!}+r_n. \tag{21}$$

каде $r_n=\frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{2^{n+1}(n+1)!}, 0<\theta<1$.

Од $0<\theta<1$ и $2<e<3$ следува $e^{\frac{\theta}{2}}<2$, па затоа $r_n<\frac{1}{2^n(n+1)!}$. Треба да го определиме n така, што $r_n<10^{-4}$. Ако $n=3$, тогаш $r_3<\frac{1}{192}$. Ако $n=4$, тогаш $r_4<\frac{1}{1920}$, а ако $n=5$, тогаш $r_5<\frac{1}{23040}<10^{-4}$. Според тоа, за да го определиме $\sqrt{e}$ со точност до 10^{-4}, доволно е во (21) да ги率 земеме првите шест собирци. Притоа добиваме

$$\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2 2!}+\frac{1}{2^3 3!}+\frac{1}{2^4 4!}+\frac{1}{2^5 5!}=1,648697917.\ ♦$$

11.9. На крајот од овој дел ќе разгледаме уште два примера и ќе ја докажеме Тејлоровата формула со остаточен член во форма на Коши.

Пример А. Нека $f \in \mathbf{C}^{(2)}((-\infty,+\infty))$ и

$$M_k = \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} |f^{(k)}(x)| < +\infty, k = 0,1,2.$$

Докажете го неравенството $M_1^2 \leq 2M_0M_1$.

Решение. Од Тејлоровата формула со остаточен член во облик на Лагранж имаме

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0+\theta(x-x_0))}{2!}(x-x_0)^2, 0<\theta<1.$$

Според тоа,

$$0 \leq |f(x)| \leq |f(x_0)| + |f'(x_0)|\cdot|x-x_0| + |f''(x_0+\theta(x-x_0))|\frac{|x-x_0|^2}{2!}$$

$$\leq M_0 + M_1y + M_2\frac{y^2}{2},$$

каде $y = |x-x_0|$. Бидејќи $2M_0 + 2M_1y + M_2y^2 \geq 0$, имаме $4M_1^2 - 8M_0M_2 \leq 0$, од што следува $M_1^2 \leq 2M_0M_1$. ♦

Пример Б. Ако f е два пати непрекинато диференцијабилна функција на $[0,1]$ таква што $f(0) = f(1) = 0$ и $\min\limits_{x\in[0,1]} f(x) = -1$, тогаш $\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x) \geq 8$.

Решение. Од $f(0) = f(1) = 0$ и $\min\limits_{x\in[0,1]} f(x) = -1$ следува дека постои $a \in (0,1)$ таков што $\min\limits_{x\in[0,1]} f(x) = -1 = f(a)$ и во точката a имаме $f'(a) = 0$. Можни се два случаја: $a \in (0,\frac{1}{2}]$ или $a \in (\frac{1}{2},1)$.

i) Нека $a \in (0,\frac{1}{2}]$. Од Тејлоровата формула добиваме

$$0 = f(0) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(0-a) + \frac{f''(\beta)}{2!}(0-a)^2 = -1 + \frac{f''(\beta)}{2!}a^2,$$

што значи

$$f''(\beta) = \frac{2}{a^2} \geq 8,$$

па затоа

$$\max_{x\in[0,1]} f''(x) \geq f''(\beta) \geq 8.$$

ii) Нека $a \in (\frac{1}{2},1)$. Од Тејлоровата формула добиваме

$$0 = f(1) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(1-a) + \frac{f''(\beta)}{2!}(1-a)^2 = -1 + \frac{f''(\beta)}{2!}(1-a)^2,$$

што значи

$$f''(\beta) = \frac{2}{(1-a)^2} > 8,$$

па затоа

$$\max_{x\in[0,1]} f''(x) \geq f''(\beta) > 8\,. \ ♦$$

11.10. Теорема. Ако $n \in \mathbf{N}$. Ако за функцијата $f:(a,b) \to \mathbf{R}$ постои $f^{(n+1)}(x)$, за секој $x \in (a,b)$ и $x_0 \in (a,b)$, тогаш за секој $x \in (a,b)$ постои θ, $0 < \theta < 1$ таков што

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x), \tag{22}$$

каде

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1}. \tag{23}$$

Формулата (22) е Тејлорова формула со *остаточен член на Коши*, ((23)).

Доказ. Јасно, формулата (22) важи за $x = x_0$. Нека $x \neq x_0$. Да ја разгледаме функцијата

$$u(z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x-z) - \ldots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n,$$

каде z се менува во интервалот со крајни точки x и x_0. Согласно со условите на теоремата, функцијата $u(z)$ е непрекината и има извод во точките на разгледуваниот интервал. Освен тоа, $u(x) = 0$ и $u(x_0) = r_n(x)$. Забележуваме дека

$$u'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n.$$

Да ја разгледаме функцијата $h(z) = x - z$, која е непрекината на интервалот со крајни точки x и x_0 и на овој интервал важи $h'(z) = -1 \neq 0$. Функциите $u(z)$ и $h(z)$ на интервалот со крајни точки x и x_0 ги задоволуваат условите на теоремата на Коши, па затоа во овој интервал постои ξ таков што

$$\frac{u(x)-u(x_0)}{h(x)-h(x_0)} = \frac{u'(\xi)}{h'(\xi)}.$$

Но, тоа значи дека постои $\theta, 0 < \theta < 1$ таков што $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$ и со замена во последното равенство го добиваме равенството

$$\frac{r_n(x)}{x-x_0} = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x - x_0 - \theta(x-x_0)), 0 < \theta < 1$$

кое е еквивалентно на равенството (23). ♦

12. ЛОПИТАЛОВО ПРАВИЛО

12.1. Во претходната точка го разгледавме користењето на Тејлоровото разложување при определување на гранични вредности на неопределености од следниве видови: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. Во оваа точка ќе докажеме дека некои од овие неопределености можат поедноставно да се разрешат со користење на *Лопиталовото правило.*

12.2. Теорема. Ако функциите f и g се определени во околина на точката x_0, притоа важи

$$f(x_0)=g(x_0)=0 \tag{1}$$

и постојат изводите $f'(x_0),\ g'(x_0)\neq 0$, тогаш постои границата

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказ. Навистина, од (1) следува

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\frac{f'(x)}{g'(x)}.\ \blacklozenge$$

12.3. Теорема. Ако:

1) функциите f и g се диференцијабилни на интервалот (a,b),
2) $g'(x)\neq 0$ за секој $x\in(a,b)$,
3) $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=0$ и
4) постои граничната вредност $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,

тогаш постои и граничната вреднсот $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ и притоа важи

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказ. Да ги додефинираме функциите f и g во точката a ставајќи $f(a)=g(a)=0$. Сега функциите f и g се непрекинати во точката a и на секој интервал $[a,x]$, каде $a<x<b$, ги задоволоваат условите од теоремата на Коши. Затоа за секој $x\in(a,b)$ постои $\xi=\xi(x),\ a<\xi<x$ таков што

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{2}$$

при што $\lim\limits_{x\to a^+}\xi(x)=a$. Затоа, ако $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ постои, тогаш

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (3)$$

Конечно, од (2) и (3) следува дека

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

што и требаше да се докаже. ♦

12.4. Теорема. Нека за функциите f и g важи:

1) тие се диференцијабилни за $x>c$,
2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$,
3) $g'(x)\neq 0$, за секој $x>c$ и
4) постои граничната вредност $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогаш постои и граничната вредност $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ и притоа важи

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $c>0$. Ја воведуваме смената $x=\frac{1}{t}$ и кога $x\to+\infty$ имаме $t\to 0^+$ и обратно. Функциите $\varphi(t)=f(\frac{1}{t})$ и $\psi(t)=g(\frac{1}{t})$ се определени на интервалот $(0,\frac{1}{c})$ и на овој интервал постојат

$$\varphi'(t)=-\tfrac{1}{t^2}f'(\tfrac{1}{t}) \text{ и } \psi'(t)=-\tfrac{1}{t^2}g'(\tfrac{1}{t}).$$

Јасно,

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{-\frac{1}{t^2}f'(\frac{1}{t})}{-\frac{1}{t^2}g'(\frac{1}{t})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

што значи дека граничната вреднсот $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$ постои. Од досега изнесеното следува дека функциите $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на интервалот $(0,\frac{1}{c})$ ги задоволуваат условите од претходната теорема, па затоа $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}$ постои и притоа важи

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

Но, $\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}=\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}=\frac{f(x)}{g(x)}$, каде $x=\frac{1}{t}$, па затоа

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to0^+}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}=\lim_{t\to0^+}\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.\ \blacklozenge$$

12.5. Теорема. Ако:

1) функциите f и g се диференцијабилни на интервалот (a,b),
2) $g'(x)\neq 0$ за секој $x\in(a,b)$,
3) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\infty$ и
4) постои граничната вредност $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,

тогаш постои и граничната вреднсот $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ и притоа важи

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Доказ. Нека постои граничната вредност

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k\,. \tag{4}$$

Ако $a<x<x_0<b,$ тогаш на интервалот $[x,x_0]$ функциите f и g ги задоволуваат условите од теоремата на Коши, па затоа постои точка $\xi=\xi(x,x_0)$ таков што

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\qquad x<\xi<x_0\,. \tag{5}$$

Понатаму, од

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=\infty$$

следува дека постои точка $x_1=x_1(x_0)$ таков што за секој $x\in(a,x_1)$ важи

$$f(x)\neq 0,\ \ g(x)\neq 0,\ \ f(x)\neq f(x_0)\,, \tag{6}$$

од што следува дека за овие вредности на x важи

$$\frac{f(x)}{g(x)}\frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

т.е.

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}\,. \tag{7}$$

Во десната страна на равенството првиот множител $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ тежи кон k кога $x_0\to a^+$, а вториот множител заради

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$$

тежи кон 1 кога $x \to a^+$ и фиксиран x_0, т.е.

$$\lim_{x\to a^+} \frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1 . \qquad (8)$$

Во равенството (7) не може непосредно да се премине кон граница, бидејќи претходно споменатите гранични премини за множителите на десната страна на (7) се добиваат при различни услови, и тоа за $x_0 \to a^+$ и при фиксиран x_0 за $x \to a^+$. Сепак, ако земеме произволна околина $U(k)$ на граничната вредност k, тогаш од условот (4) следува дека може да се фиксира точка x_0 доволно блиска до точката a таква што количникот $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ се наоѓа во таа околина, бидејќи $a < \xi < x_0$. Сега од условот (8) следува дека количникот $\frac{f(x)}{g(x)}$, види (7), исто така ќе припаѓа на околината $U(k)$, што значи дека е точно равенството $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k$. ♦

12.6. Забелешка. Теоремата 12.5, заедно со нејзиниот доказ е точна, со неопходните промени во условите, и кога $x \to b^-$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, а исто така и за двострани граници.

12.7. Пример. а) Ќе ја определиме граничната вредност

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a},\ a > 0$$

Имаме:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^a)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{ax^a} = 0 .$$

б) Нека $n \in \mathbf{N}$ и $a > 1$. Тогаш

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^n)'}{(a^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \lim_{x\to\infty} \frac{(nx^{n-1})'}{(a^x \ln a)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x \ln^2 a} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{a^x \ln^n a} = 0$$

в) Ќе ја определиме граничната вредност $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x})$. Имаме:

$$\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} + \cos x}{\frac{\sin x}{x}} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x\cos x)'}{(x^2 \sin x)'}$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{2x\sin x + x^2 \cos x} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{2x\sin x + x^2 \cos x} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{2 + \frac{x}{\sin x}\cos x} = \frac{2}{3}$$

г) Ќе ја определиме граничната вредност $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{1/x}$. Најпрво ќе ја определиме границата

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln(e^x+x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x+x} = 2 .$$

Сега од непрекинатоста на експоненцијалната функција добиваме $f(x'') \ge f(x')$

$$\lim_{x\to 0}(e^x + x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(e^x+x)^{1/x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln(e^x+x)^{1/x}} = e^2 . \blacklozenge$$

13. МОНОТОНОСТ НА ФУНКЦИЈА

13.1. Теорема. Нека $f:(a,b)\to \mathbf{R}$ и за секој $x\in(a,b)$ постои $f'(x)$. Функцијата f монотоно расте на (a,b) ако и само ако

$$f'(x) \ge 0 \text{, за секој } x\in(a,b) . \tag{1}$$

Доказ. Нека претпоставиме дека условот (1) е исполнет и нека $a < x' < x'' < b$. Ако ја примениме теоремата на Лагранж за функцијата f на интервалот $[x', x'']$ добиваме дека постои $c\in(x',x'')$ таков што

$$f(x'') - f(x') = f'(c)(x'' - x') \ge 0$$

од што следува . Сега тврдењето следува од произволноста на точките x' и x''.

Нека претпоставиме дека функцијата f монотоно расте на (a,b). Тогаш,

$$f'(x) = f_+'(x) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \ge 0 ,$$

бидејќи $\Delta x > 0$ и $f(x+\Delta x) - f(x) \ge 0$. ♦

13.2. Теорема. Нека $f:(a,b)\to \mathbf{R}$ и за секој $x\in(a,b)$ постои $f'(x)$. Функцијата f строго монотоно расте на (a,b) ако и само ако се исполнети условите

1) $f'(x) \ge 0$, за секој $x\in(a,b)$ и
2) не постои интервал $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ таков што $f'(x) = 0$ за секој $x\in(\alpha,\beta)$.

Доказ. Нека f строго монотоно расте на (a,b). Тогаш f монотоно расте на (a,b) и од теорема 13.1 следува дека условот 1) е исполнет. Условот 2) исто така е исполнет, бидејќи ако постои интервал (α,β) таков што $f'(x) = 0$, за секој $x \in (\alpha,\beta)$, тогаш f е константа на (α,β). Последното противречи на фактот дека f е строго монотоно расте на (a,b).

Ако се исполнети условите 1) и 2), тогаш од теорема 13.1 следува дека функцијата f монотоно расте на (a,b). Нека $x' < x''$ и $f(x') = f(x'')$. Тогаш, од монотоноста на функцијата f следува дека за секој $x \in [x',x'']$ важи $f(x) = f(x')$ и затоа $f'(x) = 0$, за секој $x \in (x',x'')$, што противречи на условот 2). Затоа $f(x') < f(x'')$. ♦

13.3. Последица. Нека за функциите $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ и $g:[a,b] \to \mathbf{R}$ се исполнети условите:

1) f и g се непрекинати на $[a,b]$ и $f(a) = g(a)$,
2) $f'(x)$ и $g'(x)$ постојат за секој $x \in (a,b)$ и
3) $f'(x) > g'(x)$, за секој $x \in (a,b)$.

Тогаш, $f(x) > g(x)$, за секој $x \in (a,b)$.

Доказ. Функцијата $h(x) = f(x) - g(x)$ е непрекината на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b). Од $h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$, за секој $x \in (a,b)$ и од теорема 13.2 следува дека функцијата h монотоно расте на (a,b). Но,

$$h(a) = f(a) - g(a) = 0$$

и бидејќи функцијата h е непрекината на $[a,b]$ добиваме $h(x) > 0,$ за секој $x \in (a,b)$, т.е. $f(x) > g(x)$, за секој $x \in (a,b)$. ♦

13.4. Пример. а) Ќе докажеме дека

$$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}, \text{ за } n > 1 \text{ и } x > a > 0.$$

Да ги разгледаме функциите $f(x) = \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}$ и $g(x) = \sqrt[n]{x-a}$, на интервалот $[a,b]$, каде $b \in \mathbf{R}$ е произволно избран. Бидејќи

$$f(a) = g(a) = 0 \text{ и } f'(x) = \tfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} < \tfrac{1}{n\sqrt[n]{(x-a)^{n-1}}} = g'(x),$$

за секој $x \in (a,b)$, од последица 13.3 следува дека $f(x) < g(x)$, за секој $x \in (a,b)$. Од произволноста на b следува дека $f(x) < g(x)$, за секој $x > a > 0$.

б) Ќе докажеме дека $1 + 2\ln x \le x^2,$ за секој $x > 0$.

За функциите $f(x) = 1 + 2\ln x$ и $g(x) = x^2$ на интервалот $[1,b]$, каде $b \in \mathbf{R}$ е произволно избран важи $f(1) = g(1)$ и

$$f'(x) = \tfrac{2}{x} < 2x = g'(x), \text{ за секој } x \in (1,b).$$

Од последица 13.3 следува дека $f(x) < g(x)$, за секој $x \in (1,b)$ и од произволноста на b следува $f(x) < g(x)$, за секој $x > 1$.

За $x \in (0,1]$ ставаме $t = \frac{1}{x}$ и добиваме

$t \geq 1$, $f(x) = 1 - 2\ln t = f_1(t)$ и $g(x) = \frac{1}{t^2} = g_1(t)$, $f_1(1) = g_1(1)$ и

$f_1'(t) = -\frac{2}{t} < -\frac{2}{t^3} = g_1'(t)$,

за секој $t \in (1,b)$, каде $b \in \mathbf{R}$ е произволно избран. Според тоа, $f_1(t) < g_1(t)$, за секој $t > 1$, што значи дека $f(x) < g(x)$, за секој $x \in (0,1)$. ♦

13.5. Пример. Да ја разгледаме функцијата $f : (-1,1) \to \mathbf{R}$ определена со

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Лесно се докажува дека функцијата f е диференцијабилна и дека

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x\sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

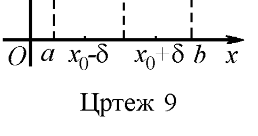
Според тоа, во секоја околина на точката $x_0 = 0$ изводот f' прима како позитивни, така и негативни вредности. Конечно, од теорема 13.2 следува дека не постои околина на точката $x_0 = 0$ на која функцијата f е монотона. ♦

14. ЛОКАЛНИ ЕКСТРЕМИ НА ФУНКЦИЈА

14.1. Дефиниција. Нека функцијата f е определена во некоја околина на точката x_0. Тогаш x_0 ја нарекуваме *точка на локален максимум (локален минимум)* ако постои $\delta > 0$ таков што

$$f(x) \leq f(x_0),\ (f(x) \geq f(x_0)) \text{ за секој } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Ако постои $\delta > 0$ таков што $f(x) < f(x_0)$, $(f(x) > f(x_0))$, за секој $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, тогаш за точката x_0 ќе велиме дека е *точка на строг локален максимум,* цртеж 9, *(строг локален минимум).*



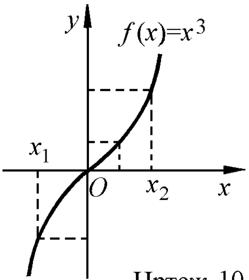
Цртеж 9

Точките на локален максимум (строг локален максимум) и на минимум (строг локален минимум) ги нарекуваме *точки на локален (строг локален) екстрем.*

14.2. Теорема (потребен услов за локален екстрем). Нека точката x_0 е точка на екстрем на функцијата f, определена во некоја околина на точката x_0. Ако изводот на функцијата f во точката x_0 постои, тогаш $f'(x_0)=0$.

Доказ. Нека x_0 е точка на локален максимум. Тогаш, постои $\delta>0$ таков што $f(x)\le f(x_0)$, за секој $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Според тоа, за функцијата f на интервалот $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ се исполнети условите од теоремата на Ферма, па затоа $f'(x_0)=0$. ♦

14.3. Забелешка. Условот $f'(x_0)=0$ не е доволен услов за да x_0 е точка на локален екстрем. Навистина, за функцијата $f(x)=x^3$, цртеж 10 во точката $x_0=0$ важи $f'(x_0)=0$, но оваа точка не е точка на локален екстрем, бидејќи за секој $\delta>0$ интервалот $(x_0-\delta,x_0+\delta)\equiv(-\delta,\delta)$ содржи точка $x_1<0$ и точка $x_2>0$ во кои $f(x_1)=x_1^3<0$ и $f(x_2)=x_2^3>0$.



Цртеж 10

14.4. Дефиниција. Точките, во кои изводот на функцијата f е еднаков на нула, ги нарекуваме *критични (стационарни) точки* за функцијата f.

14.5. Дефиниција. Функцијата g го *зачувува знакот одлево* во точката x_0, ако постои $\delta>0$ таков што за секој $x\in(x_0-\delta,x_0)$ важи $g(x)>0$ или постои $\delta>0$ таков што за секој $x\in(x_0-\delta,x_0)$ важи $g(x)<0$.

Аналогно се определува поимот функцијата g го зачувува знакот оддесно во точката x_0.

14.6. Теорема. Нека функцијата $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ го задоволува еден од следниве два услова:

1) постои $\delta>0$ таков што за секој $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ постои $f'(x)$, при што точката x_0 е критична, т.е. $f'(x_0)=0$ и изводот f' го зачувува знакот одлево и оддесно во точката x_0; или

2) функцијата f е непрекината на $[a,b]$ и постои $\delta>0$ таков што за секој $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ постои $f'(x)$, при што изводот f' го зачувува знакот одлево и оддесно во точката x_0.

Тогаш, ако при премин низ точката x_0 изводот f' го менува знакот, тогаш x_0 е точка на локален екстрем за функцијата f, а ако при премин низ точката x_0 изводот f' не го менува знакот, тогаш x_0 не е точка на локален екстрем.

Доказ. Условот 2) е поопшт, па затоа ќе го разгледаме доказот кога е исполнет овој услов.

i) Нека за некој $\delta > 0$ и за секој $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ важи $f'(x) > 0$ и за секој $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ важи $f'(x) < 0$, т.е. изводот го менува знакот од “+“ во “-“. Според тоа, функцијата f монотоно расте на интервалот $(x_0 - \delta, x_0]$ и монотоно опаѓа на интервалот $[x_0, x_0 + \delta)$. Значи, за секој $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ е исполнето $f(x) < f(x_0)$, т.е. точката x_0 е точка на строг локален максимум. Аналогно, ако изводот го менува знакот од “-“ во “+“, тогаш точката x_0 е точка на строг локален минимум.

ii) Нека сега $\delta > 0$ е таков што за секој $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ важи $f'(x) > 0$, т.е. изводот не го менува знакот. Тогаш функцијата монотоно расте на интервалите $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ и бидејќи е непрекината во точката x_0, добиваме дека f монотоно расте на интервалот $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Затоа f нема екстрем во точката x_0. ♦

14.7. Пример. а) Ќе ги определиме екстремните вредности на функцијата $f(x) = \frac{(x+3)^3}{(x+1)^2}$. Оваа функција е определена и диференцијабилна на множеството $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

Изводот на дадената функција е $f'(x) = \frac{(x+3)^2 (x-3)}{(x+1)^3}$. Стационарните точки на функцијата ги добиваме со решавање на равенката $f'(x) = 0$. Имаме, $x_0 = -3$ и $x_1 = 3$.

За стационарната точка $x_0 = -3$ избираме $\delta = 1$ и за вака избраниот δ добиваме $f'(x) > 0$, за секој $x \in (-4, -3) \cup (-3, -2)$, што значи дека во оваа точка функцијата нема локален екстрем.

За стационарната точка $x_1 = 3$ избираме $\delta = 1$ и за вака избраниот δ добиваме $f'(x) < 0$, за секој $x \in (2, 3)$ и $f'(x) > 0$ за секој $x \in (3, 4)$, т.е. изводот го менува знакот во стационарната точка $x_1 = 3$ од “-“ во “+“, што значи дека во оваа точка функцијата има строг локален минимум, $f(3) = \frac{27}{2}$.

б) Ќе ги определиме екстремните вредности на функцијата

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2} .$$

Оваа функција е определена и непрекината за секој реален број.

Изводот на разгледуваната функција е $f'(x) = \frac{x+4}{\sqrt[3]{x(x+6)^2}}$. Стационарна точка на дадената функција е $x_0 = -4$. При премин низ точката $x_0 = -4$ изводот f' го менува знакот од ”+” во ”-”, па затоа во точката $x_0 = -4$ функцијата има строг локален максимум кој е еднаков на $f(-4) = 2\sqrt[3]{4}$.

Во точката $x_1 = 0$ изводот f' на функцијата не постои, а при премин низ точката изводот го менува знакот од ”-” во ”+”. Значи во оваа точка функцијата има строг локален минимум $f(0) = 0$.

Во точката $x_2 = -6$ изводот f' на функцијата не постои, но при премин низ точката $x_2 = -6$ тој не го менува знакот, па затоа во оваа точка функцијата нема локален екстрем. ♦

14.8. Теорема. Нека $f:[a,b] \to \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$, $x_0 \in (a,b)$ и нека се исполнети условите:

1) постои $\delta > 0$ таков што за секој $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ постои $f^{(m-1)}(x)$,
2) постои $f^{(m)}(x_0)$ и
3) $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(m-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(m)}(x_0) \neq 0$.

Тогаш, ако $m = 2k,\ k \in \mathbf{N}$, точката x_0 е точка на локален екстрем и притоа е точка на строг локален максимум ако $f^{(m)}(x_0) < 0$, а точка на строг локален минимум ако $f^{(m)}(x_0) > 0$. За $m = 2k+1,\ k \in \mathbf{N}$ точката x_0 не е точка на локален екстрем.

Доказ. Тејлоровата формула со остаточен член во облик на Пеано за функцијата f во точката x_0 има облик

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + o((x-x_0)^m), \qquad x \to x_0$$

и од условот 3) добиваме

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m), \qquad x \to x_0 .$$

Според тоа, ако $x \neq x_0$, тогаш

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^m \left(\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} + \frac{o((x-x_0)^m)}{(x-x_0)^m}\right), \qquad x \to x_0 \tag{1}$$

Согласно со дефиницијата на функцијата o за бројот $\frac{1}{2m!}|f^{(m)}(x_0)| > 0$ постои $\delta > 0$ таков што за секој $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ важи

$$\left|\frac{o((x-x_0)^m)}{(x-x_0)^m}\right| < \frac{1}{2m!}|f^{(m)}(x_0)|,$$

па затоа за $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ величините $\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} + \frac{o((x-x_0)^m)}{(x-x_0)^m}$ и $\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$ имаат ненулти вредности со ист знак. Според (1), знакот на разликата $f(x) - f(x_0)$ се совпаѓа со знакот на производот

$$\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m . \tag{2}$$

Значи, ако $m=2k$, тогаш $f(x)-f(x_0)>0$ кога $f^{(m)}(x_0)>0$ и x_0 е точка на строг локален минимум, а $f(x)-f(x_0)<0$ кога $f^{(m)}(x_0)<0$ и x_0 е точка на строг локален максимум. Ако, пак, $m=2k+1$, тогаш производот (2) го менува знакот при премин низ точката x_0 во некој интервал $(x_0-\delta', x_0+\delta')$, за $0<\delta'<\delta$, па затоа x_0 не е точка на локален екстрем. ♦

14.9. Пример. Ќе ги определиме екстремните вредности на функцијата $f(x)=\frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$ која е определена на множеството $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

За првиот извод на оваа функција имаме $f'(x)=\frac{x^3-3x^2-4x}{(x-1)^3}$, од каде, решавајќи ја равенката $f'(x)=0$, наоѓаме три стационарни точки $x_0=0,\ x_1=-1,$ $x_2=4$.

За вториот извод на функцијата имаме $f''(x)=\frac{14x+4}{(x-1)^4}$. Бидејќи $f''(0)>0$ и $f''(4)>0$ од претходната теорема, следува дека во точките $x_0=0$ и $x_2=4$ функцијата има строги локални минимуми $f(0)=0$ и $f(4)=\frac{32}{3}$, а бидејќи $f''(-1)<0$, повторно од претходната теорема следува дека во точката $x_1=-1$ функцијата има строг локален максимум $f(1)=\frac{1}{4}$. ♦

14.9. Забелешка. Ако функцијата $f(x)$ е непрекината на интервалот $[a,b]$ и ако на овој интервал во точките $x_1,x_2,...,x_k$ има k локални максимуми, тогаш најголемата вредност на функцијата $f(x)$ на интервалот $[a,b]$ се достигнува во една од точките $a,x_1,x_2,...,x_k,b$, т.е. таа е еднаква на

$$\max\{f(a),f(x_1),f(x_2),...,f(x_k),f(b)\}.$$

Аналогно, ако функцијата $f(x)$ е непрекината на интервалот $[a,b]$ и ако на овој интервал во точките $t_1,t_2,...,t_k$ има k локални минимуми, тогаш најмалата вредност на функцијата $f(x)$ на интервалот $[a,b]$ се достигнува во една од точките $a,t_1,t_2,...,t_k,b$, т.е. таа е еднаква на

$$\min\{f(a),f(t_1),f(t_2),...,f(t_k),f(b)\}.$$

14.10. Пример. Ќе докажеме дека

$$\frac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1, \text{ ако } x\in[0,1] \text{ и } p>1.$$

Да ја разгледаме функцијата $f(x)=x^p+(1-x)^p$, $x\in[0,1]$. Нејзиниот прв извод $f'(x)=p(x^{p-1}-(1-x)^{p-1})$ е еднаков на нула во точката $x_0=\frac{1}{2}$ и оваа точка е точка на локален минимум, $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2^{p-1}}$. Бидејќи $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2^{p-1}}$, $f(0)=1$, $f(1)=1$, од забелешка 14.9 следува $\max\limits_{0\le x\le 1} f(x)=1$ и $\min\limits_{0\le x\le 1} f(x)=\frac{1}{2^{p-1}}$, што значи

$$\frac{1}{2^{p-1}} \le x^p+(1-x)^p \le 1, \text{ ако } x\in[0,1] \text{ и } p>1\,. \blacklozenge$$

14.15. Пример. Да ја разгледаме функцијата $f:(-1,1)\to \mathbf{R}$ определена со

$$f(x)=\begin{cases} x^4(2+\sin\frac{1}{x}), & x\ne 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Лесно се докажува дека функцијата f има строг локален минимум во точката $x_0=0$ и дека таа е диференцијабилна на $(-1,1)$, при што

$$f\,'(x)=\begin{cases} x^2[4x(2+\sin\frac{1}{x})-\cos\frac{1}{x}], & x\ne 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Според тоа, функцијата f го задоволува потребниот услов за локален екстрем. Меѓутоа, лесно се гледа дека изводот $f\,'$ во секоја еднострана околина на точката $x_0=0$ прима како позитивни, така и негативни вредности, т.е. не се исполнети условите од теорема 14.6. Со непосредна проверка можеме да се убедиме дека не се исполнети и условите од теорема 14.8, што значи, наведените теореми не се доволен апарат за определување на екстремните вредности на диференцијабилните функции. Јасно, разгледуваната функција не е монотона во ниту една еднострана околина на точката $x_0=0$. ♦

15. КОНВЕКСНИ ФУНКЦИИ

15.1. Дефиниција. За функцијата f ќе велиме дека е *конвексна* на интервалот (a,b) ако за секои $x_1,x_2\in(a,b)$ и за секој $\alpha\in[0,1]$ е исполнето неравенството

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\,.$$

За функцијата f ќе велиме дека е *конкавна* на (a,b) ако функцијата $-f$ е конвексна на (a,b).

15.2. Дефиниција. Функцијата f ја нарекуваме *строго конвексна* на (a,b) ако за секои $x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1\ne x_2$ и за секој $\alpha\in(0,1)$ важи

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)< \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\,.$$

Функцијата f ја нарекуваме *строго конкавна* на (a,b) ако функцијата $-f$ е строго конвексна на (a,b).

15.3. Пример. Ќе докажеме дека функцијата $f(x)=x^2$ е строго конвексна на $(-\infty,+\infty)$. Навистина, ако $x_1 \neq x_2$ и $\alpha \in (0,1)$, тогаш

$$\begin{aligned}(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)^2 &= \alpha^2 x_1^2+2\alpha(1-\alpha)x_1x_2+(1-\alpha)^2 x_2^2\\ &< \alpha^2 x_1^2+\alpha(1-\alpha)(x_1^2+x_2^2)+(1-\alpha)^2 x_2^2=\alpha x_1^2+(1-\alpha)x_2^2\end{aligned}$$

што значи дека функцијата $f(x)=x^2$ е строго конвексна на $(-\infty,+\infty)$. Притоа го искористивме неравенството $2x_1x_2 < x_1^2+x_2^2$. ♦

15.4. Забелешка. Претходниот пример покажува дека постапката на непосредна проверка на конвексноста е доста сложена дури и кај наједноставните функции. Се поставува прашање, дали постои поедноставен начин да се провери конвексноста на една функција, користејќи ги на пример непрекинатоста, диференцијабилноста и слично. Во оваа точка подетално ќе се задржиме на претходните прашања, но прво ќе разгледаме неколку основни својства на конвексните функции.

15.5. Лема. Нека функциите f и g се конвексни на (a,b). Тогаш

а) функцијата $c_1 f+c_2 g$, каде $c_1,c_2>0$ е конвексна на (a,b),

б) функцијата $h(x)=\max\limits_{x\in(a,b)}\{f(x),g(x)\}$ е конвексна на (a,b).

в) ако $f:(a,b)\to \mathbf{R}$ е конвексна и $g:(c,d)\to \mathbf{R}$, $(c,d)\supset\{f(x)\,|\,x\in(a,b)\}$ е конвексна и монотоно растечка функција, тогаш и сложената функција $g\circ f:(a,b)\to\mathbf{R}$ е конвексна.

Доказ. а) Нека $x_1,x_2\in(a,b)$ и $\lambda,\mu\in[0,1]$ се такви, што $\lambda+\mu=1$. Тогаш, за секои $c_1,c_2>0$ добиваме

$$\begin{aligned}(c_1 f+c_2 g)(\lambda x_1+\mu x_2) &= c_1 f(\lambda x_1+\mu x_2)+c_2 g(\lambda x_1+\mu x_2)\\ &\le c_1\lambda f(x_1)+c_1\mu f(x_2)+c_2\lambda g(x_1)+c_2\mu g(x_2)\\ &= \lambda(c_1 f(x_1)+c_2 g(x_1))+\mu(c_1 f(x_2)+c_2 g(x_2))\\ &= \lambda(c_1 f+c_2 g)(x_1)+\mu(c_1 f+c_2 g)(x_2)\end{aligned}$$

што значи дека функцијата $c_1 f+c_2 g$, каде $c_1,c_2>0$, е конвексна на (a,b).

б) Нека $x_1,x_2\in(a,b)$ и $\lambda,\mu\in[0,1]$ се такви, што $\lambda+\mu=1$. Тогаш,

$$\begin{aligned}h(\lambda x_1+\mu x_2) &= \max_{x\in(a,b)}\{f(\lambda x_1+\mu x_2),g(\lambda x_1+\mu x_2)\}\\ &\le \max_{x\in(a,b)}\{\lambda f(x_1)+\mu f(x_2),\lambda g(x_1)+\mu g(x_2)\}\\ &\le \max_{x\in(a,b)}\{\lambda f(x_1),\lambda g(x_1)\}+\max_{x\in(a,b)}\{\mu f(x_2),\mu g(x_2)\}\\ &\le \lambda\max_{x\in(a,b)}\{f(x_1),g(x_1)\}+\mu\max_{x\in(a,b)}\{f(x_2),g(x_2)\}\\ &\le \lambda h(x_1)+\mu h(x_2),\end{aligned}$$

од што следува дека функцијата

$$h(x)=\max_{x\in(a,b)}\{f(x),g(x)\}$$

е конвексна на (a,b).

в) Нека $x_1,x_2\in(a,b)$ и $\alpha\in[0,1]$. Од конвексноста на функцијата f следува

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2).$$

Но, g е монотоно растечка функција, па затоа

$$g(f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2))\le g(\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)).$$

Конечно, од конвексноста на функција g следува

$$g(f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2))\le g(\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2))\le \alpha g(f(x_1))+(1-\alpha)g(f(x_2))$$

т.е. функцијата $g\circ f$ е конвексна на (a,b). ♦

15.6. Лема. Конвексната функција $f:(a,b)\to\mathbf{R}$, $f\not\equiv\mathrm{const}$ не достигнува максимумот во точка $x_0\in(a,b)$.

Доказ. Нека претпоставиме дека функцијата f го достигнува својот максимум во точката $x_0\in(a,b)$. Бидејќи $f\not\equiv\mathrm{const}$, постои интервал $(x_1,x_2)\subseteq(a,b)$ таков што $x_0\in(x_1,x_2)$ и на еден од неговите краеви вредноста на функцијата f е строго помала од нејзината вредност во точката x_0. Нека, на пример, $f(x_1)<f(x_0)$, $f(x_2)\le f(x_0)$. Понатаму, бидејќи $x_0\in(x_1,x_2)$ добиваме дека постои $\alpha\in(0,1)$ таков што $x_0=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$. Ако последните две неравенства ги помножиме со α и $1-\alpha$, соодветно и ги собереме, добиваме

$$\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)<f(x_0)=f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2),$$

што противречи на конвексноста на функцијата f. ♦

15.7. Последица. Конкавната функција $f:(a,b)\to\mathbf{R}$, $f\not\equiv\mathrm{const}$ не достигнува минимумот во точка $x_0\in(a,b)$.

Доказ. Непосредно следува од лема 15.6 и дефиниција 15.1. ♦

15.8. Теорема. Ако функцијата $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ е конвексна (конкавна) и ограничена, тогаш таа е непрекината на (a,b).

Доказ. Ќе го разгледаме случајот кога функцијата е конвексна. Бидејќи f е ограничена, постои $M>0$ таков што $|f(x)|\le M$, за секој $x\in(a,b)$. Нека $x_0\in(a,b)$ и нека $h>0$ е таков што $x_0\pm h\in(a,b)$. Од конвексноста на f следува неравенството

$$2f(x_0)\le f(x_0-h)+f(x_0+h)$$

кое е еквивалентно на неравенството

$$f(x_0)-f(x_0-h)\le f(x_0+h)-f(x_0)\,. \tag{1}$$

Ако $x_0\pm(k+1)h\in(a,b)$, за $k=1,2,...,n-1$, тогаш од неравенството (1) го добиваме системот неравенства

$$f(x_0-kh)-f(x_0-(k+1)h)\le f(x_0+h)-f(x_0)\le f(x_0+(k+1)h)-f(x_0+kh) \tag{2}$$

за $k=0,1,2,...,n-1$. Со собирање на неравенствата (2) го добиваме неравенството

$$\frac{f(x_0)-f(x_0-nh)}{n}\le f(x_0+h)-f(x_0)\le\frac{f(x_0+nh)-f(x_0)}{n},$$

од кое, ако се има предвид ограниченоста на функцијата f, добиваме

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|\le\frac{2M}{n}\,. \tag{3}$$

Сега, ако $\varepsilon>0$ е дадено, тогаш наоѓаме $n=[\frac{2M}{\varepsilon}]+1$ и земаме $\delta=\min\{\frac{b-x_0}{n},\frac{x_0-a}{n}\}$. Конечно, од (3) следува дека за вака најденото $\delta>0$ важи $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, кога $|x-x_0|<\delta$, т.е. функцијата f е непрекината во произволната точка $x_0\in(a,b)$. ♦

15.9. Теорема. Функцијата $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ е конвексна (строго конвексна) ако и само ако за секоја точка $x_0\in(a,b)$ функцијата

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\quad x\in(a,b)\setminus\{x_0\}$$

монотоно расте (строго монотоно расте) на (a,b).

Доказ. Ќе го разгледаме само случајот на строга конвексност. Нека $a<x_0<x_1<x_2<b$. Ставаме

$$\alpha=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_0},\quad 1-\alpha=\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}\,.$$

Тогаш $\alpha\in(0,1)$ и $x_1=\alpha x_0+(1-\alpha)x_2$. Сега тврдењето во овој случај следува од еквивалентноста на следнава низа равенства:

$$f(\alpha x_0+(1-\alpha)x_2)<\alpha f(x_0)+(1-\alpha)f(x_2)$$

$$f(x_1)<\frac{x_2-x_1}{x_2-x_0}f(x_0)+\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}f(x_2)$$

$$(x_2-x_0)f(x_1)<(x_2-x_1)f(x_0)+(x_1-x_0)f(x_2)$$

$$(x_2-x_0)[f(x_1)-f(x_0)]<(x_1-x_0)[f(x_2)-f(x_0)]$$

$$g(x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}<\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}=g(x_2)\,.$$

Доказите кога $a<x_1<x_0<x_2<b$ и $a<x_1<x_2<x_0<b$ се аналогни.

За конвексна функција во еквивалентните неравенства знакот $"<"$ го заменуваме со знакот $"\leq"$. ♦

15.10. Теорема. Нека $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ и за секој $x\in(a,b)$ постои $f'(x)$. Функцијата f е конвексна (строго конвексна) на (a,b) ако и само ако функцијата f' монотоно расте (строго монотоно расте) на (a,b).

Доказ. Нека f е конвексна на (a,b) и $a<x_1<x_2<b$. Според теорема 15.9 за точките $a<u<x_1<x_2<v<b$, имаме

$$\frac{f(u)-f(x_1)}{u-x_1}\leq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\leq\frac{f(v)-f(x_2)}{v-x_2},$$

од што следува

$$f_-^{'}(x_1)\leq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq f_+^{'}(x_2),$$

односно

$$f'(x_1)=f_-^{'}(x_1)\leq f_+^{'}(x_2)=f'(x_2).$$

Нека f' монотоно расте на (a,b) и нека за $x_0\in(a,b)$ ја разгледаме функцијата

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\, x\in(a,b)\setminus\{x_0\}.$$

Од теоремата на Лагранж следува дека постои точка c меѓу x и x_0 таков што $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$. Сега имаме

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-x_0)-(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)^2}=\frac{f'(x)-f'(c)}{x-x_0}\geq 0\,,\ x\in(a,b)\setminus\{x_0\},$$

т.е. функцијата $g(x)$ монотоно расте на интервалите (a,x_0) и (x_0,b). Освен тоа,

$$g(x_0^-)=f_-^{'}(x_0)=f'(x_0)=f_+^{'}(x_0)=g(x_0^+).$$

Од досега изнесеното и од теорема 15.9 следува дека функцијата f е конвексна на (a,b). ♦

15.11. Пример. а) (неравенство на Јанг). Ќе докажеме дека за секои $a,b,\ \lambda,\mu\in(0,+\infty)$ такви, што $\lambda+\mu=1$, е исполнето неравенството

$$ab\leq\lambda a^{\frac{1}{\lambda}}+\mu b^{\frac{1}{\mu}}.$$

Да ја разгледаме функцијата $f(x)=e^x$, $x\in\mathbf{R}$. Бидејќи $f'(x)=e^x$, за секој $x\in\mathbf{R}$ и функцијата $f'(x)=e^x$ строго монотоно расте на целата реална права од теорема 15.10, следува дека оваа функција е строго конвексна на целата реална права. Ставаме $x_1=\frac{\ln a}{\lambda}$, $x_2=\frac{\ln b}{\mu}$ и добиваме

$$f(\lambda x_1+\mu x_2)\le \lambda f(x_1)+\mu f(x_2),$$

за секои $a,b,\lambda,\mu\in(0,+\infty)$ такви, што $\lambda+\mu=1$, односно

$$e^{\lambda\frac{\ln a}{\lambda}+\mu\frac{\ln b}{\mu}}\le \lambda e^{\frac{\ln a}{\lambda}}+\mu e^{\frac{\ln b}{\mu}},$$

за секои $a,b,\lambda,\mu\in(0,+\infty)$ такви што $\lambda+\mu=1$. Според тоа,

$$e^{\ln ab}\le \lambda e^{\ln a^{1/\lambda}}+\mu e^{\ln b^{1/\mu}},$$

за секои $a,b,\lambda,\mu\in(0,+\infty)$ такви, што $\lambda+\mu=1$, од што добиваме

$$ab\le \lambda a^{\frac{1}{\lambda}}+\mu b^{\frac{1}{\mu}},$$

за секои $a,b,\lambda,\mu\in(0,+\infty)$ такви, што $\lambda+\mu=1$.

б) (Неравенство на Холдер). Ќе докажеме дека, ако $a_i,b_i>0$, за $i=1,...,n$ и $p,q>1$ се такви, што $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, тогаш

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\le(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Во неравенството на Јанг ставаме $\lambda=\frac{1}{p},\mu=\frac{1}{q}$ и добиваме дека за $a,b>0$ важи $ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$. Ако во последното неравенство последователно ставиме

$$a=\frac{a_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}},\ b=\frac{b_i}{(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}},\text{ за } i=1,2,...,n,$$

ги добиваме неравенствата

$$\frac{a_ib_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}}\le\frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}+\frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q},\text{ за } i=1,2,...,n. \tag{4}$$

Со собирање на неравенствата (4) го добиваме неравенството

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_ib_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}}\le\frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}+\frac{1}{q}\frac{\sum_{i=1}^n b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

кое е еквивалентно на неравенството на Холдер.

За $p=q=2$ неравенството на Холдер има облик

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\le(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^n b_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

и тоа во литературата е познато како неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц.

в) (Неравенство на Минковски). Докажете дека, ако $a_i, b_i > 0$, за $i = 1,...,n$ и $p > 1$ важи неравенството

$$(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^p)^{\frac{1}{p}}.$$

За $p > 1$, наоѓаме $q = \frac{p}{p-1} > 1$ таков што $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. За вака најденото q со примена на неравенството на Холдер го добиваме неравенството

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p &= \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i + b_i)^{p-1}\\ &\leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{(p-1)q})^{\frac{1}{q}} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{(p-1)q})^{\frac{1}{q}}\\ &\leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p)^{1-\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p)^{1-\frac{1}{p}}\\ &\leq [(\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^p)^{\frac{1}{p}}](\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p)(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p)^{-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Ако последното неравенство го поделиме со $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p > 0$, а потоа го помножиме со $(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{p}} > 0$ го добиваме неравенството на Минковски. ♦

15.12. Теорема. Нека $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ и за секој $x \in (a,b)$ постои $f''(x)$. Функцијата f е конвексна на (a,b) ако и само ако за секој $x \in (a,b)$ важи $f''(x) \geq 0$. Функцијата f е строго конвексна на (a,b) ако и само ако $f''(x) \geq 0$, за секој $x \in (a,b)$ и не постои интервал $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$ таков што за секој $x \in (\alpha, \beta)$ важи $f''(x) = 0$.

Доказ. Според теорема 15.10 функцијата f е конвексна на (a,b) ако и само ако f' монотоно расте на (a,b). Но, според теоремата 13.1, f' монотоно расте на (a,b) ако и само ако $f''(x) \geq 0$, за секој $x \in (a,b)$.

Според теорема 15.10, функцијата f е строго конвексна на (a,b) ако и само ако f' строго монотоно расте на (a,b). Но, според теорема 13.2 функцијата f' строго монотоно расте на (a,b) ако и само ако $f''(x) \geq 0$, за секој $x \in (a,b)$ и не постои интервал $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$ таков што за секој $x \in (\alpha, \beta)$ важи $f''(x) = 0$. ♦

15.13. Забелешка. Во лема 15.5 в) дадовме услов кога композицијата на конвексни функции е конвексна функција. Меѓутоа, во општ случај композиција на конвексни функции не мора да биде конвексна функција. Навистина, лесно се гледа дека за функциите

$$f(x) = x\ln x \text{ и } g(x) = x^{\frac{3}{2}},$$

определени на интервалот $(0,+\infty)$, важи $f''(x) > 0$ и $g''(x) > 0$, за секој $x \in (0,+\infty)$, што според теорема 15.12 значи дека тие се строго конвексни на $(0,+\infty)$. Но, за функцијата

$$h(x) = f(g(x)) = \tfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}\ln x$$

имаме

$$h'(x) = \tfrac{3}{4}x^{\frac{1}{2}}(3\ln x + 2) \text{ и } h''(x) = \tfrac{3}{8}\frac{\ln x^3 e^8}{\sqrt{x}},$$

што значи дека за $x^3 e^8 > 1$, т.е. на интервалот $(e^{-\frac{8}{3}},+\infty)$ таа е строго конвексна, а на интервалот $(0,e^{-\frac{8}{3}})$ не е конвексна.

Слично, ако функцијата f е конвексна, во општ случај функцијата $f(f(x))$ не мора да биде строго конвексна. Навистина доволно е да ја разгледаме функцијата $f(x) = x^3 - 1$ на интервалот $(0,+\infty)$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

15.14. На крајот од оваа точка ќе го докажеме неравенството на Јенсен кое има важна улога при докажувањето на бројни неравенства, односно при користењето на конвексните функции.

Теорема (неравенство на Јенсен). Ако f е конвексна функција на (a,b), тогаш за секој $n \ge 2$, за секои $x_1, x_2, ..., x_n \in (a,b)$ и за секои $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in [0,1]$ такви, што $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$ е исполнето неравенството

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n). \qquad (5)$$

Ако функцијата f е строго конвексна, тогаш во (5) важи знак за строго неравенство при што броевите $x_1, x_2, ..., x_n \in (a,b)$ не се сите меѓусебно еднакви, а броевите $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in [0,1]$ се позитивни.

Доказ. За $n = 2$ неравенството (5) се совпаѓа со неравенството од дефиницијата на конвексна функција.

Нека претпоставиме дека неравенството (5) е точно за произволен избор на $n-1$ точка од интервалот (a,b) и за $n-1$ ненегативни броеви чиј збир е еднаков на еден. Нека $n \ge 3$ и нека се дадени $x_1, ..., x_n \in (a,b)$, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in [0,1]$, $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$. Од броевите $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, најмалку еден е различен од 1. Без ограничување на општоста, можеме да земеме дека $\alpha_1 < 1$. Тогаш, од индуктивната претпоставка, имаме

$$f(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) = f(\alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1)\sum_{k=2}^{n} \tfrac{\alpha_k}{1-\alpha_1} x_k) \le \alpha_1 f\left(x_1\right) + (1-\alpha_1) f(\sum_{k=2}^{n} \tfrac{\alpha_k}{1-\alpha_1} x_k)$$

$$\leq \alpha_1 f(x_1) + (1-\alpha_1) \sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_1} f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k).$$

Според тоа, неравенството (5) важи и за n точки, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n. ♦

15.15. Пример. За функцијата $f(x) = -\ln x$, на интервалот $(0, +\infty)$ имаме $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, што, според теорема 15.12 значи дека таа е строго конвексна на интервалот $(0, +\infty)$. Затоа, согласно со неравенството на Јенсен, за $\alpha_1 = ... = \alpha_n = \frac{1}{n}$ и за секои $x_1, x_2, ..., x_n \in (0, +\infty)$ важи

$$-\ln(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k) \leq -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln x_k \text{ т.е. } \ln(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln x_k$$

од што по средувањето добиваме $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \geq (\prod_{k=1}^{n} x_k)^{1/n}$.

Ова, всушност, е уште еден доказ на неравенството на Коши меѓу аритметичката и геометриската средина. ♦

15.16. Пример. Докажете дека, ако $x_i \in (0, \frac{\pi}{2})$, за $i = 1, 2, ..., n$, тогаш

$$\sqrt[n]{\sin x_1 \sin x_2 ... \sin x_n} \leq \sin \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}. \tag{6}$$

Решение. За функцијата $f(x) = -\ln \sin x$, дефинирана на интервалот $(0, \frac{\pi}{2})$, важи $f'(x) = -\operatorname{ctg} x$ и $f''(x) = \frac{1}{\sin^2 x} > 0$, за секој $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Значи, функцијата f е строго конвексна на $(0, \frac{\pi}{2})$.

Земаме, $x_i \in (0, \frac{\pi}{2})$, за $i = 1, 2, ..., n$ и $\alpha_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогаш, од неравенството на Јенсен, имаме:

$$\begin{aligned} -\ln \sin \frac{x_1 + ... + x_n}{n} &= f(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}) \leq \frac{f(x_1) + ... + f(x_n)}{n} \\ &= -\frac{\ln \sin x_1 + ... + \ln \sin x_n}{n} \\ &= -\ln \sqrt[n]{\sin x_1 \sin x_2 ... \sin x_n}. \end{aligned}$$

Според тоа,

$$\ln \sin \frac{x_1 + ... + x_n}{n} \geq \ln \sqrt[n]{\sin x_1 \sin x_2 ... \sin x_n}$$

и бидејќи функцијата ln е монотоно растечка, добиваме дека важи неравенството (6). ♦

16. ПРЕВОЈНИ ТОЧКИ

16.1. Дефиниција. Нека функцијата f е диференцијабилна во точката x_0 и нека $y = L(x)$ е равенката на тангентата на графикот на функцијата f во точката $(x_0, f(x_0))$. Ако разликата $f(x) - L(x)$ го менува знакот при премин низ точката x_0, тогаш x_0 ја нарекуваме *превојна точка на функцијата* f.

16.2. Пример. Да ја разгледаме функцијата $f(x) = x^3$. Равенката на тангентата на графикот на функцијата во точката $(0,0)$ е $y = 0$. Затоа, бидејќи за $x < 0$ важи $f(x) < 0$, а за $x > 0$ важи $f(x) > 0$, добиваме дека точката $x_0 = 0$ е превојна точка за функцијата $f(x) = x^3$. ♦

16.3. Теорема. Ако во точката на превој x_0 на функцијата f постои $f''(x_0)$, тогаш $f''(x_0) = 0$.

Доказ. Нека во точката x_0 функцијата f има втор извод и нека $y = L(x)$ е равенката на тангентата на графикот на функцијата f во точката $(x_0, f(x_0))$, т.е.

$$L(x) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Тогаш,

$$f(x_0) - L(x_0) = 0, \;\; f'(x_0) - L'(x_0) = 0 \;\text{ и }\; f''(x_0) - L''(x_0) = f''(x_0)$$

па од Тејлоровата формула добиваме

$$f(x) - L(x) = \tfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), \qquad x \to x_0\,.$$

Ако $f''(x_0) \neq 0$, тогаш знакот на $f(x) - L(x)$ во некоја околина на точката x_0 се совпаѓа со знакот на бројот $f''(x_0)$, па затоа точката x_0 не е превојна точка. Според тоа, ако x_0 е превојна точка на функцијата f, тогаш $f''(x_0) = 0$. ♦

16.4. Теорема. Ако функцијата f е диференцијабилна во некоја околина $U(x_0) \equiv (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ на точката x_0, двапати диференцијабилна во $U(x_0) \setminus \{x_0\}$ и нејзиниот втор извод го менува знакот при премин на аргументот низ точката x_0, тогаш x_0 е превојна точка за функцијата f.

Доказ. Нека $y = L(x)$ е равенката на тангентата на графикот на функцијата f во точката $(x_0, f(x_0))$. Тогаш

$$f(x) - L(x) = [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Од теоремата на Лагранж, применета на разликата $f(x) - f(x_0)$, добиваме

$$f(x)-L(x)=f'(\xi)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=[f'(\xi)-f'(x_0)](x-x_0)$$

каде ξ лежи меѓу x и x_0. Ако уште еднаш ја примениме теоремата на Лагранж на разликата $f'(\xi)-f'(x_0)$, добиваме

$$f(x)-L(x)=f''(\eta)(\xi-x_0)(x-x_0),$$

при што точките ξ,η и x лежат на иста страна од точката x_0, па затоа

$$(\xi-x_0)(x-x_0)>0,\ x\neq x_0.$$

Јасно, ако точката x минува низ точката x_0, тогаш и точката η минува низ точката x_0.

Од досега изнесеното следува дека разликата $f(x)-L(x),\ x\neq x_0$ го има истиот знак како и изводот $f''(\eta)$ и бидејќи тој при премин низ точката x_0 го менува знакот, заклучуваме дека и разликата $f(x)-L(x)$ при премин низ точката x_0 го менува знакот. Според тоа, x_0 е превојна точка за функцијата f. ♦

16.5. Теорема. Ако $f''(x_0)=0$, а $f'''(x_0)\neq 0$, тогаш x_0 е превојна точка за функцијата f.

Доказ. Нека $f''(x_0)=0$ и $f'''(x_0)\neq 0$. Од Тејлоровата формула добиваме

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3),\qquad x\to x_0.$$

Според тоа,

$$f(x)-L(x)=(x-x_0)^3[\frac{f'''(x_0)}{3!}+\frac{o((x-x_0)^3)}{(x-x_0)^3}],\qquad x\to x_0$$

и бидејќи во некоја околина на точката x_0 изразот во заградата во претходното равенство го има истиот знак како и $\frac{f'''(x_0)}{3!}$, (зошто?), а множителот $(x-x_0)^3$ при премин низ точката x_0 го менува знакот, заклучуваме дека разликата $f(x)-L(x)$ при премин низ точката x_0 го менува знакот. Според тоа, x_0 е превојна точка за функцијата f. ♦

16.6. Пример. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=x^2e^{-x^2}$. Имаме,

$$f'(x)=(2x-2x^3)e^{-x^2},$$

$$f''(x)=(4x^4-10x^2+2)e^{-x^2},$$

$$f'''(x)=(-8x^5+36x^3-24x)e^{-x^2}.$$

Од теорема 16.3 следува дека превојните точки на оваа функција треба да ги бараме како решенија на равенката $f''(x)=0$. Бидејќи $e^{-x^2}\neq 0$ за секој $x\in\mathbf{R}$, последната равенка е еквивалентна на биквадратната равенка $4x^4 - 10x^2 + 2 = 0$ чии решенија се

$$x_1 = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}},\ x_2 = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}},\ x_3 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}\ \text{ и }\ x_4 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}}\ .$$

Со непосредни пресметувања добиваме дека $f'''(x_i) \neq 0,$ за $i = 1,2,3,4$, што според теорема 16.5 значи дека точките x_i, $i = 1,2,3,4$ се превојни точки за разгледуваната функција. ♦

16.7. Забелешка. Во теорема 16.4 докажавме дека ако вториот извод на функцијата f го менува знакот при премин на аргументот низ точката x_0, тогаш x_0 е превојна точка за функцијата f. Од теорема 15.12 следува дека x_0 е превојна точка за функцијата f ако и само ако при премин низ точката x_0 функцијата преминува од конвексна во конкавна или обратно.

17. АСИМПТОТИ

17.1. Дефиниција. Нека функцијата f е определена за секој $x > 0$ (соодветно за секој $x < 0$). Ако постои права

$$y = kx + l \tag{1}$$

таков што

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (kx + l)] = 0 \tag{2}$$

(соодветно кога $x \to -\infty$), тогаш оваа права ја нерекуваме *асимптота на функцијата* f кога $x \to +\infty$ (соодветно кога $x \to -\infty$).

17.2. Коментар. Јасно дека не секоја функција има асимптота. Постоењето асимптота на функцијата f означува дека кога $x \to +\infty$ (или кога $x \to -\infty$) таа се разликува од линеарната функција (1) за произволно мали вредности.

Ќе го објасниме методот за наоѓање на асимптотата (1), при што ќе го разгледаме само случајот кога $x \to +\infty$, бидејќи кога $x \to -\infty$ асимптотата се наоѓа аналогно. Нека графикот на функцијата f има асимптота (1). Бидејќи $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, од условот (2) добиваме

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)-(kx+l)}{x} = 0\text{, т.е. } \lim_{x \to +\infty} (\frac{f(x)}{x} - k - \frac{l}{x}) = 0$$

од што следува

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k\ . \tag{3}$$

Ако k е определено, тогаш вредноста на l ја наоѓаме од условот (2) и добиваме

$$l = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx]. \tag{4}$$

Очигледно, точно е и обратното тврдење: ако постојат такви броеви k и l, што се исполнети (3) и (4), тогаш правата (1) е асимптота на функцијата f кога $x \to +\infty$, бидејќи од условот (4) следува условот (2).

Јасно, од единственоста на границата (2), доколку таа постои, следува дека, кога $x \to +\infty$, функцијата f има единствена асимптота.

17.3. Пример. а) Ќе ја определиме асимптотата на функцијата

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}.$$

Ако ги искористиме формулите (3) и (4), добиваме

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x+1}{x(x-1)} = 1 \text{ и } l = \lim_{x\to\pm\infty} (\frac{x^2+x+1}{x-1} - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$$

од што следува дека правата $y = x+2$ е асимптота на разгледуваната функција и кога $x \to +\infty$ и кога $x \to -\infty$.

б) Ќе ја определиме асимптотата на функцијата $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$. Ако ја искористиме формулата (3), добиваме

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-2}{x\sqrt{x^2+2}} = 0.$$

Но, од формулата (4), кога $x \to +\infty$ имаме

$$l = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = 1,$$

што значи, кога $x \to +\infty$ правата $y = 1$ е асимптота на разгледуваната функција. Ако $x \to -\infty$, тогаш од формулата (4) имаме

$$l = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = -1,$$

што значи, кога $x \to -\infty$ правата $y = -1$ е асимптота на разгледуваната функција. ♦

17.4. Забелешка. Претходниот пример покажува дека функција може да има различни асимптоти кога $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, па затоа неопходно е при испитувањето на функциите нив посебно да ги побараме.

17.5. Дефиниција. Нека функцијата f е дефинирана на пресекот на некоја околина на точката a со интервалот $(a,+\infty)$, односно со интервалот $(-\infty,a)$. Ако за функцијата f е исполнет еден од условите

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty\,, \tag{5}$$

односно

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty\,, \tag{6}$$

тогаш правата $x=a$ ја нарекуваме *вертикална асимптота* на функцијата f.

17.6. Пример. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=e^{1/x}-x$. Функцијата е определена за секој реален број, освен за $x=0$. Ако ги искористиме формулите (5) и (6), добиваме

$$\lim_{x\to 0^+}[e^{1/x}-x]=+\infty \text{ и } \lim_{x\to 0^-}[e^{1/x}-x]=0\,,$$

што според дефиниција 17.5 значи дека за разгледуваната функција правата $x=0$ е вертикална асимптота оддесно, а додека одлево таа не е вертикална асимптота. Да забележиме дека

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{1/x}-x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{e^{1/x}}{x}-1)=-1 \text{ и } \lim_{x\to\pm\infty}[e^{1/x}-x-(-1)x]=1\,,$$

следува дека правата $y=-x+1$ е асимптота на разгледуваната функција. ♦

18. КОНСТРУИРАЊЕ ГРАФИК НА ФУНКЦИЈА

18.1. Испитувањето на дадена функција и скицирањето на нејзиниот график со помош на претходно развиениот аналитички апарат во целост може да се постигне со следниве постапки:

а) ја наоѓаме дефиниционата област на функцијата и точките на прекин,

б) ја определуваме парноста и периодичноста на функцијата,

в) ги наоѓаме пресечните точки на кривата со координатните оски (доколку постојат),

г) ги определуваме асимптотите на функцијата,

д) ги наоѓаме локалните екстреми на функцијата,

ѓ) ги наоѓаме интервалите на растење и опаѓање на функцијата,

е) ја испитуваме конвексноста и конкавноста и ги определуваме превојните точки на функцијата и

ж) го скицираме графикот на функцијата.

18.2. Пример. Ќе го испитаме текот на графикот на функцијата $y=f(x)$, каде $f(x)=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$.

а) Дробно рационална функција е дефинирана за сите вредности на аргументот за кои именителот е различен од нула, па затоа треба да е $4(x-1)\neq 0$, т.е. $x\neq 1$. Според тоа, дефиниционата област е множеството $\mathbf{R}\setminus\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, а точката $x=1$ е точка на прекин.

б) Бидејќи дефиниционата област не е симетрично множество во однос на координатниот почеток функцијата, не е ниту парна ниту непарна, а не е ниту периодична.

в) За $x=0$, добиваме $f(x)=-\frac{9}{4}$, а ако ставиме $f(x)=0$, добиваме $x=3$. Според тоа, кривата ги сече координатните оски во точките $(0,-\frac{9}{4})$ и $(3,0)$.

г) Од

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-3)^2}{4x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{4}\frac{x^2-6x+9}{x^2-x}=\frac{1}{4} \text{ и}$$

$$l=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\frac{1}{4}x]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{4}\frac{x^2-6x+9-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{4}\frac{-5x+9}{x-1}=-\frac{5}{4}$$

следува дека правата $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$ е асимптота на кривата и кога $x\to+\infty$ и кога $x\to-\infty$.

Од

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}=+\infty \text{ и } \lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}=-\infty$$

следува дека правата $x=1$ е вертикална асимптота на кривата, при што одлево функцијата тежи кон $-\infty$, а оддесно кон $+\infty$.

д) За првиот и вториот извод на функцијата имаме

$$f'(x)=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2} \text{ и } f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Решенија на равенката $f'(x)=0$ се $x_1=3$ и $x_2=-1$. Од $f''(3)=\frac{1}{4}>0$ следува дека $(3,0)$ е точка на локален минимум, а од $f''(-1)=-\frac{1}{4}<0$ следува дека $(-1,-2)$ е точка на локален максимум.

ѓ) За да ги определиме интервалите на монотоност на функцијата, дефиниционата област ја разбиваме на интервали со најдените екстремни вредности и на овие интервали го испитуваме знакот на првиот извод. Притоа, имаме

интервали	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$\pm f'(x)$	+	-	-	+
монотоно	*расте*	*опаѓа*	*опаѓа*	*расте*

е) Вториот извод на функцијата $f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$ е различен од нула за секој $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, па затоа кривата нема превојни точки. Од $f''(x)>0$ за секој $x>1$ следува дека функцијата е конвексна на интервалот $(1,+\infty)$, а од $f''(x)<0$ за секој $+\infty$ следува дека функцијата е конкавна на интервалот $x\in(-\infty,1)$.

ж) На читателот му препуштаме самостојно да го скицира графикот на оваа функција. ♦

18.3. Развиениот апарат може да се искористи и за конструирање на график на функција $y = f(x)$ зададена со параметарски равенки $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Притоа, нема да претпоставуваме дека парот функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ еднозначно определува една функција од обликот $y = f(x)$ или $x = g(y)$, туку под график на параметарски зададената функција ќе ја подразбираме унијата на графиците од сите функции од обликот $y = f(x)$ и $x = g(y)$ зададени со формулите $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Претходно ќе дадеме неколку забелешки. За наоѓање на асимптотите паралелни на оската Oy треба да ги определиме оние вредности t_0 на параметарот t за кои постојат конечни гранични вредности $\lim\limits_{t \to t_0^-} x(t) = a$ или $\lim\limits_{t \to t_0^+} x(t) = a$, а граничните вредности $\lim\limits_{t \to t_0^-} y(t)$ соодветно $\lim\limits_{t \to t_0^+} y(t)$, се еднакви на $+\infty$ или $-\infty$. Ако таква вредност t_0 на параметарот t постои, тогаш $x = a$ е равенката на бараната асимптота.

Аналогно за да најдеме асимптота паралелна на оската Ox, треба да определиме вредност t_0 на параметарот t, за која постојат конечни гранични вредности $\lim\limits_{t \to t_0^-} y(t) = b$ или $\lim\limits_{t \to t_0^+} y(t) = b$, а граничните вредности $\lim\limits_{t \to t_0^-} x(t)$ соодветно $\lim\limits_{t \to t_0^+} x(t)$ се еднакви на $+\infty$ или $-\infty$. Ако таква вредност t_0 на параметарот t постои, тогаш $y = b$ е равенката на бараната асимптота.

На крајот, за да најдеме асимптота која не е паралелна ниту со оската Oy, ниту со оската Ox, треба да најдеме вредност t_0 на параметарот t за која граничните вредности

$$\lim_{t \to t_0^+} x(t) \text{ и } \lim_{t \to t_0^+} y(t) \text{ (или } \lim_{t \to t_0^-} x(t) \text{ и } \lim_{t \to t_0^-} y(t)\text{)}$$

се еднакви на $+\infty$ или $-\infty$ и постои конечната гранична вредност

$$\lim_{t \to t_0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = k \neq 0 \text{ (соодветно } \lim_{t \to t_0^-} \frac{y(t)}{x(t)} = k \neq 0\text{)}.$$

Ако за оваа вредност, освен тоа, постои конечната гранична вредност

$$\lim_{t \to t_0^+} [y(t) - kx(t)] = l, \text{ (соодветно } \lim_{t \to t_0^-} [y(t) - kx(t)] = l\text{)},$$

тогаш правата $y = kx + l$ е асимптота на графикот на разгледуваната функција.

При конструкција график на функција, зададена параметарски, често пати е корисно прво одделно да се конструираат графиците на функциите $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

За да ги определиме интервалите на монотоност на функција, зададена параметарски, и да ги најдеме нејзините екстреми, превојните точки, а исто така и интервалите на конвексност и конкавност, ги користиме изразите за изводите $y_x^{'}$ и $y_{xx}^{"}$, зададени со помош на изводите $x_t^{'}, x_{tt}^{"}, y_t^{'}, y_{tt}^{"}$. Притоа, треба да се има предвид дека равенките $x = x(t)$ и $y = y(t)$, воопшто зборувано, не определуваат еднозначна функција од обликот $y = y(x)$, па затоа понекогаш е корисно и x да се разгледува како функција од y.

18.4. Пример. Ќе го конструираме графикот на функцијата

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3} \tag{1}$$

Лесно се гледа дека оваа функција нема асимптоти паралелни со координатните оски. Бидејќи кога $t \to -1$ важи $x \to \infty$, $y \to \infty$, заклучуваме дека може да постои асимптота која не е паралелна со координатните оски. Притоа, имаме

$$k = \lim_{t \to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to -1} t = -1$$

и

$$l = \lim_{t \to -1} [y(t) - kx(t)] = \lim_{t \to -1} [\frac{3t^2}{1+t^3} + \frac{3t}{1+t^3}] = \lim_{t \to -1} \frac{3t}{t^2-t+1} = -1\,,$$

што значи дека правата $y = -x - 1$ е асимптота на функцијата (1).

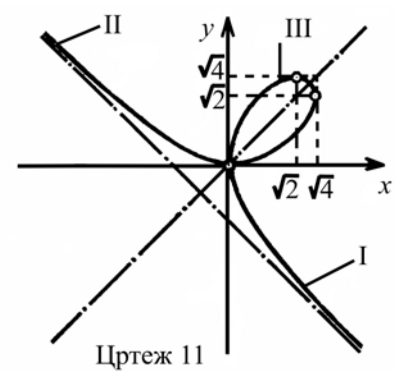
Од $x = \frac{3t}{1+t^3}$ следува дека $x_t^{'} = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$, што значи дека функцијата $x(t)$ строго расте на интервалот $(-\infty, -1)$ од 0 до $+\infty$ и на интервалот $(-1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ од $-\infty$ до $\sqrt[3]{4}$, а строго опаѓа на интервалот $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty)$ од $\sqrt[3]{4}$ до 0. На секој од овие интервали функцијата има инверзна, па затоа функциите $x(t)$ и $y(t)$ определуваат функција $y = y(x)$ кога $x \in (0, +\infty)$, прв дел од кривата, кога $x \in (-\infty, \sqrt[3]{4})$, втор дел од кривата и кога $x \in (0, \sqrt[3]{4})$, трет дел од кривата. Наоѓаме $y_t^{'} = \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$ и

$$y_x^{'} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} \tag{2}$$

и

$$y_{xx}^{"} = \frac{2(1+t^3)^4}{3(1-2t^3)^3} \tag{3}$$

Од (2) и (3) следува дека $y' < 0$ кога $t \in (-\infty, -1)$, што значи дека $y(x)$ опаѓа кога x расте од 0 до $+\infty$, прв дел од кривата, а бидејќи $y" > 0$, добиваме дека кривата е конвексна. Кога $t \in (-1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ функцијата $y(x)$ има минимум при $t = 0$, т.е. $x = 0$. Кога x расте од $-\infty$ до $\sqrt[3]{4}$ вредностите на $y(x)$ опаѓаат од $+\infty$ до 0, а потоа растат од 0 до $\sqrt[3]{2}$. Притоа, $y'' > 0$, па затоа кривата е конвексна. Бидејќи $\lim\limits_{t\to\frac{1}{\sqrt[3]{2}}^{+}} y' = -\infty$ и $\lim\limits_{t\to\frac{1}{\sqrt[3]{2}}^{-}} y' = +\infty$ тангентата на кривата во точката $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ е вертикална.



Цртеж 11

На третиот интервал $t \in (\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty)$ функцијата $y(x)$ има максимум за $t = \sqrt[3]{2}$, и тоа е точката $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$. Бидејќи, $y'' < 0$ функцијата на овој интервал е конкавна. Ако $x \to 0^{+}$, што соодветствува на тоа дека $t \to +\infty$, добиваме дека $y' \to +\infty$, што значи дека во точката (0,0) кривата ја допира оската Oy.

Графикот на функцијата е даден на цртеж 11.

Со елименација на параметарот, добиваме дека оваа функција има имплицитно претставување $x^3 + y^3 = 3xy$. ♦

18.5. Нека е даден правоаголен координатен систем Oxy и точка M во рамнината. Како што знаеме (III 13.25), ако оската Ox ја земеме за поларна оска, а координатниот почеток O за пол, тогаш врската меѓу декартовите (x, y) и поларните (r, φ) координати на точката M е дадена со равенките

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{4}$$

Притоа, да забележиме дека на дадена точка и соодветствуваат бесконечно многу поларни агли кои заради периодичноста на функциите $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ се разликуваат за целоброен множител на 2π.

Нека $r = f(\varphi)$ е дадена функција. Тогаш од (4) добиваме

$$x = f(\varphi)\cos\varphi \text{ и } y = f(\varphi)\sin\varphi,$$

што значи дека секоја функција зададена во поларни координати, всушност, е параметарски зададена функција, каде што параметарот е поларниот агол φ. Затоа при цртањето на графиците на функциите зададени во поларни координати важат методите за цртање график на параметарски зададени функции.

Во некои случаи поларното растојание може да има негативна вредност и тогаш него го нанесуваме од полот на полуправата која со поларата зафаќа агол φ, но во спротивна насока.

Во овој дел ќе се задржиме само на постоењето на асимптотите на функција зададена во поларни координати.

Асимптотите паралелни со оската Oy ги наоѓаме за вредности φ_0 на поларниот агол φ за кои постојат конечните гранични вредности

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0^+} r(\varphi)\cos\varphi = a \text{ или } \lim_{\varphi\to\varphi_0^-} r(\varphi)\cos\varphi = a ,$$

а граничните вредности

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0^+} r(\varphi)\sin\varphi \text{, соодветно } \lim_{\varphi\to\varphi_0^-} r(\varphi)\sin\varphi ,$$

се еднакви на $+\infty$ или $-\infty$. Ако постои таква вредност φ_0 на поларниот агол φ, тогаш правата $x = a$ е равенката на бараната асимптота.

Аналогно, за да најдеме асимптота паралелна на оската Ox, треба да определиме вредност φ_0 на поларниот агол φ за која постојат конечни гранични вредности

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0^+} r(\varphi)\sin\varphi = b \text{ или } \lim_{\varphi\to\varphi_0^-} r(\varphi)\sin\varphi = b ,$$

а граничните вредности

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0^+} r(\varphi)\cos\varphi \text{ соодветно } \lim_{\varphi\to\varphi_0^-} r(\varphi)\cos\varphi$$

се еднакви на $+\infty$ или $-\infty$. Ако таква вредност φ_0 на параметарот φ постои, тогаш $y = b$ е равенката на бараната асимптота.

На крајот, за да најдеме асимптота која не е паралелна ниту со оската Oy ниту со оската Ox, треба да најдеме вредност φ_0 на поларниот агол φ за која граничните вредности

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0^+} r(\varphi)\cos\varphi \text{ и } \lim_{\varphi\to\varphi_0^+} r(\varphi)\sin\varphi$$

или

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0^-} r(\varphi)\cos\varphi \text{ и } \lim_{\varphi\to\varphi_0^-} r(\varphi)\sin\varphi$$

се еднакви на $+\infty$ или $-\infty$ и постои конечната гранична вредност

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0^+} \operatorname{tg}\varphi = k \neq 0$$

или, соодветно,

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0^-} \operatorname{tg}\varphi = k \neq 0 .$$

Ако за оваа вредност, освен тоа, постои конечната гранична вредност

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0^+} [r(\varphi)\sin\varphi - kr(\varphi)\cos\varphi] = l ,$$

или, соодветно,

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0^-}[r(\varphi)\sin\varphi - kr(\varphi)\cos\varphi] = l\ ,$$

тогаш правата $y = kx + l$ е асимптота на графикот на разгледуваната функција.

18.6. Пример. Ќе го испитаме текот на графикот на функцијата

$$\varphi = \arccos\tfrac{r-1}{r^2}\ .$$

Од својствата на функцијата аркускосинус следува дека функцијата е дефинирана за оние $r \in \mathbf{R}$ такви, што $|\frac{r-1}{r^2}| \leq 1$. Последното неравенство е еквивалентно на двојното неравенство $-1 \leq \frac{r-1}{r^2} \leq 1$, т.е. на неравенствата

$$r^2 - r + 1 \geq 0 \text{ и } r^2 + r - 1 \geq 0\ .$$

Неравенството $r^2 - r + 1 \geq 0$ е точно за секој $r \in \mathbf{R}$, а од неравенството $r^2 + r - 1 \geq 0$ и условот $r \geq 0$ добиваме дека разгледуваната функција е дефинирана на интервалот $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty)$. Притоа, имаме

$$\lim_{r\to\frac{\sqrt{5}-1}{2}^+}\varphi(r) = \lim_{r\to\frac{\sqrt{5}-1}{2}^+}\arccos\tfrac{r-1}{r^2} = \arccos(-1) = \pi \text{ и}$$

$$\lim_{r\to+\infty}\varphi(r) = \lim_{r\to+\infty}\arccos\tfrac{r-1}{r^2} = \arccos 0 = \tfrac{\pi}{2}\ .$$

Бидејќи $r^2 \neq r - 1$, функцијата $\varphi(r)$ нема нули и таа е строго позитивна. Понатаму, $\varphi'(r) = \frac{r-2}{r\sqrt{r^4-(r-1)^2}}$, што значи дека точката $r = 2$ е стационарна за функцијата. Лесно се гледа дека во оваа точка функцијата достигнува минимум кој е еднаков на $\arccos\frac{1}{4}$. Бидејќи точката $r_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ е крајна точка, добиваме дека на интервалот $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 2)$ функцијата $\varphi(r)$ монотоно опаѓа, а на интервалот $(2, +\infty)$ функцијата $\varphi(r)$ монотоно расте.

Од $\cos\varphi = \frac{r-1}{r^2}$ добиваме $x = r\cos\varphi = r\cdot\frac{r-1}{r^2}$, па затоа

$$\lim_{r\to+\infty} r\cos\varphi = \lim_{r\to+\infty}\tfrac{r^2-r}{r^2} = 1\ ,$$

од што следува дека правата $x = 1$ е вертикална асимптота.

Скицирањето на графикот на оваа функција го оставаме на читателот за вежба. ♦

19. ЗАДАЧИ

А) Поим за извод. Основни својства

1. Нека функцијата f има извод во точката x_0. Пресметајте ги границите

а) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$, б) $\lim\limits_{n\to\infty} n[f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)]$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{f(x_0+\frac{1}{n})}{f(x_0)}]^n$, ако $f(x_0)>0$, и

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$, каде $x_n\to x_0, n\to\infty$ и $x_n\neq x_0, n\geq 1$.

2. Пресметајте $f'(x)$, ако:

а) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, б) $f(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x^2+1}$,

в) $f(x)=(1+x^3)(5-\frac{1}{x^2})$, г) $f(x)=(x^3-x)^6$,

д) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, ѓ) $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$,

е) $f(x)=(\frac{1+x}{1+x^2})^7$, и ж) $f(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.

3. Пресметајте $f'(x)$, ако:

а) $f(x)=\frac{x}{1-\cos x}$, б) $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$,

в) $f(x)=\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x-\mathrm{tg}x+x$, и г) $f(x)=\sin\sqrt{1+x^2}$.

4. Пресметајте $f'(x)$, ако:

а) $f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$, б) $f(x)=\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,x$,

в) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}-\mathrm{arctg}\,x$, г) $f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$,

д) $f(x)=\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, ѓ) $f(x)=\arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$,

е) $f(x)=\arccos\frac{2}{x}$, и ж) $f(x)=\mathrm{arctg}(x+\sqrt{1+x^2})$.

5. Пресметајте $f'(x)$, ако:

а) $f(x)=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$, б) $f(x)=x^n\ln x$,

в) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, г) $f(x)=\ln\mathrm{tg}\frac{x}{2}$, и

д) $f(x)=\ln\cos x$.

6. Пресметајте $f'(x)$, ако:

а) $f(x)=(x^2-2x+3)e^x$, б) $f(x)=\frac{e^x}{1+x^2}$, в) $f(x)=a^x x^a$, и г) $f(x)=\sin e^{x^2+1}$.

7. Пресметајте $f'(x)$, ако:

а) $f(x)=x^{x^2}$, $x>0$, б) $f(x)=x^{\ln x}$, $x>0$,

в) $f(x)=(\sin x)^{\cos x}$, $x\in(0,\pi)$, г) $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, $x>0$,

д) $f(x)=x^{x^x}$, $x>0$, и ѓ) $f(x)=(\frac{x}{1+x})^x$, $x>0$.

8. За параметарските функции $x=x(t),\ y=y(t)$ пресметајте $y'(x)$:

а) $x=\ln(1+t^2),\ y=t-\operatorname{arctg} t$, б) $x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t$

в) $x=\frac{1+t^3}{t^2-1},\ y=\frac{t}{t^2-1}$, г) $x=2\operatorname{tg} t,\ y=2\sin^2 t+\sin 2t$,

д) $x=3(2\cos t-\cos 2t), y=3(2\sin t-\sin 2t)$.

9. За имплицитно зададената функција $F(x,y)=0$ пресметајте $y'(x)$:

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $x\in(-a,a)$, б) $x^3+y^3-3axy=0$,

в) $2y\ln y=x$, г) $y=1+xe^y$,

д) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, ѓ) $x^y=y^x$.

10. Пресметајте ги збировите:

а) $\sum\limits_{k=2}^{n}k(k-1)x^{k-2}, x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$, б) $\sum\limits_{k=1}^{n}kC_n^k$.

11. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и за секој $x\in\mathbf{R}$ постои $f'(x)$. Докажете дека:

а) ако функцијата f е парна, тогаш функцијата f' е непарна;

б) ако функцијата f е непарна, тогаш функцијата f' е парна;

в) ако функцијата f е периодична со период $T>0$, тогаш и функцијата f' е периодична со истиот период.

12. Пресметајте $f'_-(0)$ и $f'_+(0)$, ако:

а) $f(x)=|\sin 3x|$, б) $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & \text{ako } x\neq 0\\ 0, & \text{ako } x=0\end{cases}$,

в) $f(x)=\sqrt[3]{x^3+6x^2}$ и г) $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2-1}$.

13. Докажете дека функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ определена со

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

има конечен извод во секоја точка x од $\mathbf{R}$, но изводот не е ограничен на $[-1,1]$.

14. Докажете дека функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ определена со

$$f(x)=\begin{cases} x^4e^{-x^2/4}\sin\frac{8}{x^3}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

има конечен и ограничен извод во секоја точка x од $\mathbf{R}$, но изводот не го достигнува ниту својот максимум, ниту својот минимум на интервалот $[-1,1]$.

Б) Тангента и нормала

15. За функцијата $f(x)=\frac{8a^3}{4a^2+x^2}$ составете ги равенките на тангентата и нормалата во точка со апциса $x_0=2a$.

16. За цисоидата $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ составете ги равенките на тангентата и нормалата во точката $M(x_0,y_0)$.

17. Тетивата на параболата $y=x^2-2x+5$ поврзува две точки со апциси $x_1=1$ и $x_2=3$. Составете ја равенката на онаа тангента на параболата која е паралелна на тетивата.

18. Составете ја равенката на онаа нормала на параболата $y=x^2-6x+6$ која е нормална на правата што ги соединува координатниот почеток и темето на параболата.

19. Докажете дека тангентите на кривата $y=\frac{1+3x^2}{3+x^2}$, повлечени во точки за кои $y_0=1$, се сечат во координатниот почеток.

20. Најдете ги равенките на тангентата на елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ во точката $M(x_0,y_0)$.

21. Докажете дека отсечката на тангентата на астроидата $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$ која лежи меѓу координатните оски има константна должина a.

22. **Агол меѓу две криви** $y=f(x)$ и $y=g(x)$ е аголот меѓу тангентите

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \text{ и } y-y_0=g'(x_0)(x-x_0)$$

на кривите во пресечната точка $M(x_0,y_0)$. Според тоа, за аголот φ меѓу кривите $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имаме $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{f'(x_0)-g'(x_0)}{1+f'(x_0)g'(x_0)}$.

Најдете го аголот под кој се сечат кривите:

а) $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$ и $g(x)=\frac{x^2+4x+8}{16}$, б) $f(x)=\frac{x^2}{4a}$ и $g(x)=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$,

в) $x^2+y^2=8$ и $2y=x^2$, г) $x^2+y^2=8ax$ и $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$.

23. Докажете дека кривите $f(x)=e^{kx}\sin mx$ и $g(x)=e^{kx}$ се допираат во секоја точка која им е заедничка.

24. Низ точката $M(x_0, f(x_0))$ повлекуваме тангента и нормала на кривата $y=f(x)$. Нека T_1 е пресекот на тангентата со $x-$оската, а N е пресекот на нормалата со $x-$оската и нека $T(x_0,0)$. Должината на отсечката $\overline{TT_1}$ ја нарекуваме *суптангента,* а должината на отсечката $\overline{TN}$ *субнормала* и ги означуваме со s_t и s_n, соодветно. Докажете дека $s_t=\left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right|$ и $s_n=|f(x_0)f'(x_0)|$.

25. Докажете дека суптангентата во секоја точка на кривата $f(x)=ae^{bx}$, $a,b\in\mathbf{R}$ има иста должина.

26. Докажете дека субнормалата во секоја точка на кривата $f(x)=x\ln x$ е четврта пропорционала за апцисата, ординатата и збирот на апцисата и ординатата на таа точка.

В) Основни теореми на диференцијалното сметање

27. Докажете дека, ако $\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$, каде $a_i\in\mathbf{R}$, $i=1,2,\ldots,n$, тогаш равенката $a_ox^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$ има барем еден корен меѓу 0 и 1.

28. Нека функциите $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ и $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ ги задоволуваат условите:
    1) $f,g\in\mathbf{C}([a,b])$,
    2) $f(x)>0$, за секој $x\in[a,b]$,
    3) за секој $x\in(a,b)$ постојат $f'(x)$ и $g'(x)$ и
    4) $f(a)=f(b)$ и $g(a)=g(b)$.

    Докажете дека постои $c\in(a,b)$ таков што $f'(c)+f(c)g'(c)=0$.

29. Нека $a_i,b_i\in\mathbf{R}$, $i=1,2,\ldots,n$ и $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix^{b_i}$ е таква што постои $x_0>0$, $f(x_0)\neq 0$. Докажете дека функцијата f не може да има повеќе од $(n-1)-$на позитивна реална нула.

30. Нека функциите $f_i:[a,b]\to\mathbf{R}$, $i=1,2,3$ се такви, што
    а) за секој $x\in(a,b)$ постои $f_i'(x)$, и
    b) $f_i\in\mathbf{C}([a,b])$, $i=1,2,3$.

    Докажете дека постои $c\in(a,b)$ таков што

$$\begin{vmatrix} f_1(a) & f_1(b) & f_1'(c) \\ f_2(a) & f_2(b) & f_2'(c) \\ f_3(a) & f_3(b) & f_3'(c) \end{vmatrix}=0.$$

31. Нека $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ има конечен извод f' во секоја точка од интервалот (a,b) и нека $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$. Докажете дека постои $c\in(a,b)$ таков што $f'(c)=0$.

32. Ако $f\in\mathbf{C}^1((0,+\infty))$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, тогаш за функцијата
$$g(x)=f(x+1)-f(x)$$
важи $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$. Докажете!

33. За функцијата $f(x)=x^2+px+q$, $x\in[a,b]$ да се определи $c\in(a,b)$ од теоремата на Лагранж.

34. Нека функцијата $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ ги задоволува условите:
   а) $f\in\mathbf{C}([a,b])$,
   б) за секој $x\in(a,b)$ постои $f'(x)$ и
   в) постои $L\in\mathbf{R}$ таков што за секој $x\in(a,b)$ важи $|f'(x)|\le L$.
   Докажете дека за секои $x',x''\in[a,b]$ важи $|f(x')-f(x'')|\le L|x'-x''|$.

35. Докажете дека, ако функцијата f е диференцијабилна во интервалот $(a,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, тогаш $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

36. Функцијата f е дефинирана и непрекината на интервалот $[0,1]$ и важи $|f'(x)|\le|f(x)|$, за секој $x\in[0,1]$. Докажете дека:
   а) ако $f(0)=0$, тогаш $f(x)=\text{const}$ и
   б) ако наместо $|f'(x)|\le|f(x)|$ важи поопштиот услов: постои $K>0$ таков што $|f'(x)|\le K|f(x)|$, тогаш $f(x)=\text{const}$.

37. Докажете дека, ако функцијата f е диференцијабилна, но не е ограничена на конечниот интервал (a,b), тогаш и нејзиниот извод f' не е ограничен на интервалот (a,b).

38. Докажете дека за секои $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ е исполнето неравенството
$$|\operatorname{arctg}x_2-\operatorname{arctg}x_1|\le|x_1-x_1|.$$

39. За функциите $f:(a,b)\to(0,+\infty)$ и $g:(a,b)\to(0,+\infty)$ постојат f' и g' на (a,b) и за секој $x\in(a,b)$ важи $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)}$. Докажете дека постои $L\in\mathbf{R}$ таков што $f(x)=Lg(x)$, за секој $x\in(a,b)$.

40. Нека за функцијата $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ се исполнети условите
   а) $f\in\mathbf{C}([a,b])$ и
   б) за секој $x\in(a,b)$ постои $f'(x)$.
   Докажете дека постои $c\in(a,b)$ таков што

$$f(b)-f(a)=e^{-c}f'(c)(e^b-e^a).$$

41. Нека за функцијата $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, $ab>0$ се исполнети условите:
    а) $f\in\mathbf{C}([a,b])$ и
    б) за секој $x\in(a,b)$ постои $f'(x)$.
    Докажете дека постои $c\in(a,b)$ таков што
    $$\tfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(c)-cf'(c).$$

42. Нека за функциите $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ и $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ се исполнети условите:
    а) $f,g\in\mathbf{C}([a,b])$,
    б) за секој $x\in(a,b)$ постојат $f'(x)$ и $g'(x)$ и
    в) за секој $x\in(a,b)$ важи $g(x)\neq 0$ и $g'(x)\neq 0$.
    Докажете дека постои $c\in(a,b)$ таков што
    $$\tfrac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(a)-g(b)}=\tfrac{f(c)g'(c)-g(c)f'(c)}{g'(c)}.$$

43. Докажете дека, ако f е строго монотоно растечка диференцијабилна функција и $|g'(x)|<f'(x)$, за секој $x\geq x_0$, тогаш
    $$|g(x)-g(x_0)|\leq f(x)-f(x_0),\text{ за секој } x\geq x_0.$$

44. **(Обопштено неравенство на Бернули).** Нека $\alpha>1$. Докажете дека за секој $x>-1$ важи $(1+x)^\alpha>1+\alpha x$, при што знакот за равенство важи само за $x=0$.

45. Докажете дека за секој $x>-1$ важи $\frac{x}{1+x}\leq\ln(1+x)\leq x$. Знакот за равенство важи ако и само ако $x=0$.

Г) Изводи од повисок ред. Лајбницова формула

46. Нека $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n),\ x_1<x_2<...<x_n$. Докажете дека
    $$f(x)f''(x)<(f'(x))^2.$$

47. Докажете дека функцијата:
    а) $y=\frac{x-3}{x+4}$ ја задоволува релацијата $2y'^2=(y-1)y''$,
    б) $y=\cos e^x+\sin e^x$ ја задоволува релацијата $y''-y'+ye^{2x}=0$,
    в) $y=e^{\alpha\arcsin x}$ ја задоволува релацијата $(1-x^2)y''-xy''-\alpha^2y=0$ и
    г) $y=(x+\sqrt{1+x^2})^k$ ја задоволува релацијата $(1+x^2)y''+xy''-k^2y=0$.

48. Докажете дека параметарски зададената функција:
    а) $x=3t^2,\ y=3t-t^3$ ја задоволува релацијата $36y''(y-\sqrt{3x})=x+3$.
    б) $x=\sin t,\ y=\sin kt$ ја задоволува релацијата $(1-x^2)y''-xy'+k^2y=0$.

49. Докажете дека, ако сите нули на полиномот

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+....+a_{n-1}x+a_n\,,\ a_i\in\mathbf{R}, i=0,1,2,...,n,\ a_0\neq 0$$

се реални, тогаш неговите последователни изводи $P', P'', ..., P^{(k)}$, $k<n$, исто така, имаат само реални нули.

50. Докажете дека за полиномите на Лежандр $P_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$ важи:

а) $P_{n+1}(x)-2(2n+1)xP_n(x)+4n^2P_{n-1}(x)=0$ и

b) сите нули се реални и се наоѓаат во интервалот $(-1,1)$.

51. Докажете дека за полиномите на Хермит $H_n(x)=e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ важи:

а) $H_{n+1}(x)+2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0$,

b) $H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0$ и

c) сите негови нули се реални.

52. Докажете дека за полиномите на Лагер $L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})$ важи:

а) $L_{n+1}(x)-(2n+1-x)L_n(x)+n^2L_{n-1}(x)=0$,

b) $xL_n''(x)+(1-x)L_n'(x)+nL_n(x)=0$ и

c) сите нули на полиномите на Лагер се позитивни.

53. Докажете дека функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ определена со

а) $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2(1-x^2)}, & x\in(0,1)\\ 0, & x\notin(0,1),\end{cases}$

припаѓа на класата $\mathbf{C}^{(\infty)}(\mathbf{R})$.

54. Докажете дека функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ определена со

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{(1-x)^2}}},\ \ x\in(0,1);\ \ f(x)=0,\ \ x\le 0;\ \ f(x)=1,\ \ x\ge 1$$

припаѓа на класата $\mathbf{C}^{(\infty)}(\mathbf{R})$ и строго монотоно расте на интервалот $(0,1)$.

Д) Тејлорова формула и Лопиталово правило

55. Најдете ја Маклореновата формула со остаточен член во облик на Пеано за функцијата $f(x)=(1+x)^{\alpha}$.

56. Најдете ги Маклореновите формули со остаточен член во облик на Пеано, за функциите:

а) $f(x)=\frac{1}{1-x}$, б) $f(x)=\ln(1-x)$,

в) $f(x)=e^{\frac{x}{3}+1}$, г) $f(x)=\frac{1}{3x+5}$,

д) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ и ѓ) $f(x)=\ln(7-2x)$.

57. Најдете ги Маклореновите формули до $o(x^n)$ за функциите:

а) $f(x)=(x^2+2)e^{3x}$, б) $f(x)=\ln\frac{2+x}{3-x}$,

в) $f(x)=e^x\ln(1+x),\ n=5$, г) $f(x)=\frac{x^2+4x+7}{x^2+3x+2}$,

д) $g(x)=\sin^2 2x\cos^2 2x$, ѓ) $f(x)=\cos^3 x$.

58. Разложете ги според Маклореновата формула до $o(x^6)$ функциите:

а) $f(x)=\operatorname{tg}x$ и б) $f(x)=\frac{e^x}{\cos x}$.

59. Разложете ги според Маклореновата формула функциите:

а) $f(x)=e^{x\cos x}$, до $o(x^3)$, б) $f(x)=\sin(xe^x)$, до $o(x^3)$,

в) $f(x)=\frac{x^2}{1+\sin x}$, до $o(x^6)$ и г) $f(x)=\ln\cos x$, до $o(x^7)$.

60. Разложете ги според Тејлоровата формула функциите:

а) $f(x)=\ln(2x-x^2+3)$ во околина на точката $x_0=2$ до $o((x-2)^n)$,

б) $f(x)=\sqrt{x}$ во околина на точката $x_0=1$ до $o((x-1)^3)$.

61. Разложете ги според Тејлоровата формула со остаточен член во форма на Лагранж до првите четири членови функциите:

а) $f(x)=\frac{x+3}{3+x^2}$ во околина на точката $x_0=1$ и

б) $f(x)=x\sqrt{2+x}$ во околина на точката $x_0=-1$.

62. Користејќи ја Маклореновата формула со остаточен член во форма на Лагранж пресметајте:

а) $\sqrt[3]{29}$ со точност до 10^{-3} и

б) $\sin 12^0$ со точност до 10^{-6}.

63. Нека

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+...+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)$$

каде $0<\theta<1$ и $f^{(n+1)}(x)\neq 0$. Докажете дека $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$.

64. Нека $f\in\mathbf{C}^2([0,1])$ и $f(0)=f(1)=0$, и нека постои $M>0$ таков што $|f''(x)|\leq M$, за секој $x\in(0,1)$. Докажете дека $|f'(x)|\leq\frac{M}{2}$, за секој $x\in[0,1]$.

65. Користејќи ја Тејлоровата формула пресметајте ги границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{arctg}x}-\frac{1}{1-x}+\frac{x^2}{2}}{\ln\frac{1-x}{1+x}+2x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(xe^{2x})-\ln(1-x)-x)^{\operatorname{ctg}x^3}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{2\operatorname{tg}x}{x+\sin x})^{\frac{2}{1-\cos x}}$ и

ѓ) $\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt{5-x}+\ln\frac{x}{4})^{\frac{1}{\sin(x-4)}}$

66. Користејќи го Лопиталовото правило пресметајте ги границите:

а) $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta},\ a>0,\ \alpha,\beta\in\mathbf{R}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\alpha\beta}-\cos\beta x},\ \alpha,\beta\in\mathbf{R}$,

в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(1+\ln x)-x}{1-x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}$,

д) $\lim\limits_{x\to e}\frac{(\ln x)^\alpha-(\frac{x}{e})^\beta}{x-e},\ \alpha,\beta\in\mathbf{R}$ и

ѓ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^\alpha x}{\sin^2 x}$.

67. Користејќи го Лопиталовото правило пресметајте ги границите:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)-\ln(x-1)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$ и

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x)$.

68. Пресметајте ги границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^\varepsilon\ln x,\ \varepsilon>0$,

б) $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x\cdot\ln(\ln x)$,

в) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$,

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x)^x$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2x+\sin x}$ и

ѓ) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{x^x-1}$.

Ѓ) Конвексни функции

69. Нека f е конвексна функција на (a,b). Докажете дека за секој $n\geq 2$, за секои $x_i\in(a,b)$, $i=1,2,...,n$ и за секои $p_i\geq 0$, $i=1,2,...,n$ такви што $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i>0$ важи

$$f(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i/\sum_{i=1}^{n}p_i)\leq\sum_{i=1}^{n}p_if(x_i)/\sum_{i=1}^{n}p_i\ .$$

70. Докажете дека:

а) За секој $p>1$, за секои $\alpha_i\in[0,1], i=1,2,...,n$ такви, што $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ и за секои $x_i>0, i=1,2,...,n$ е исполнето неравенството

$$(\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i)^p\leq\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i^p\ .$$

б) За секој $p > 1$ и за секои $x_i > 0, i = 1,2,...,n$ е исполнето неравенството

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^p \le n^{p-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^p \ .$$

в) За секои $x_i > 0, i = 1,2,...,n$ е исполнето неравенството

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \le \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \ .$$

71. Нека $a_i > 0, i = 1,2,...,n$ и $\alpha_i \in [0,1], i = 1,2,...,n$ се такви, што $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Докажете дека

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i} \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \ .$$

72. Нека $\alpha_i \in [0,1], i = 1,2,...,n$ се такви, што $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Докажете дека

$$\alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} ... \alpha_n^{\alpha_n} \ge \frac{1}{n} \ .$$

73. Докажете дека за секој $n \ge 2$, за секои $a_i > 0$, $i = 1,2,...,n$, и за секои $p_i \ge 0$, $i = 1,2,...,n$ такви, што $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i > 0$ важи

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i}} \le (\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i})^{1/\sum_{i=1}^{n} p_i} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \ .$$

74. Нека f е конвексна и ограничена функција на $(-\infty, +\infty)$. Докажете дека $f = \text{const}$.

75. Докажете дека, ако f е конвексна и периодична функција, тогаш $f = \text{const}$.

76. Докажете дека, ако $f \in \mathbf{C}((a,b))$ и ако за секои $x_1, x_2 \in (a,b)$ важи

$$f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \le \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)) ,$$

тогаш f е конвексна на (a,b).

Е) Монотоност на функција. Локални екстреми

77. Докажете ги неравенствата:

а) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x)$, за секој $x > 0$,

б) $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x$, за секој $x > 0$ и

в) $x + \frac{x^3}{3} < \operatorname{tg} x$, за секој $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

78. Докажете ги неравенствата:

а) $(x^{\alpha}+y^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} > (x^{\beta}+y^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}$, за секои $x, y > 0$ и $0 < \alpha < \beta$ и

б) $\ln(1+x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)}$, за секој $x > 0$.

79. Докажете го неравенството

$$1+\alpha \ln x \le x^{\alpha}, x > 0, \alpha > 2.$$

80. Најдете ги екстремните вредности на функциите:

а) $f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ и

б) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

81. а) Најдете го радиусот на основата на цилиндар со најголем волумен впишан во сфера со радиус R.

б) Во конус со радиус R и висина H е впишан цилиндар со најголем волумен. Најдете ги радиусот на основата и висината на цилиндарот.

в) Од сите цилиндри со дадена плоштина P, најдете го оној кој има максимален волумен.

г) Најдете го односот на радиусот на основата и висината на цилиндарот кој при даден волумен V има најмала вкупна плоштина.

д) Од сите цилиндри впишани во сфера со радиус R, најдете го оној кој има максимална вкупна плоштина.

ѓ) Од сите цилиндри со периметар на оскиниот пресек a, најдете го оној со максимален волумен.

е) Од сите цилиндри впишани во коцка со страна a такви, што оската на цилиндрите се совпаѓа со дијагоналата на коцката, а кружниците на основите допираат две страни, најдете го оној со најголем волумен.

82. а) Најдете ја висината на конус со максимален волумен, впишан во сфера со радиус R.

б) Најдете ја висината на конус со најмал волумен, опишан околу сфера со радиус R.

83. Најдете ги екстремните вредности на параметарски зададените функции:

а) $x(t) = \frac{t^3}{t^2+1}, y(t) = \frac{t^3-2t^2}{t^2+1}$ и

б) $x(t) = te^{t}, y(t) = te^{-t}$.

84. Испитајте ги и скицирајте ги графиците на функциите:

а) $y = \frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$, б) $y = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$,

в) $y = x + \frac{\ln x}{x}$, г) $y = x^2 e^{-x}$,

д) $y = e^{\frac{1}{x}} - x$, ѓ) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$,

е) $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$ и ж) $y = \frac{x^2-4}{x} e^{-\frac{5}{3x}}$.

85. Испитајте ги и скицирајте ги графиците на функциите:

а) $x(t) = te^{t}$, $y(t) = te^{-t}$ и

б) $x(t) = \frac{3t(1-t)}{1+t^3}$, $y(t) = \frac{3t}{1-t+t^2}$.

V ГЛАВА

ИНТЕГРАЛНО СМЕТАЊЕ НА ФУНКЦИЈА ОД ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

1. ПОИМ ЗА ПРИМИТИВНА ФУНКЦИЈА И НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

1.1. Ако функцијата $f: A \to \mathbf{R}$ е диференцијабилна за секој $x \in A$, тогаш со операцијата диференцирање на функцијата f и придруживме нова функција $f': A \to \mathbf{R}$ која ја нарековме извод на функцијата f. Едно од можните физички толкувања на оваа операција беше да се определи брзината на движење на материјална точка кога е зададена промената на патот во зависност од времето. Од физичка гледна точка природно се јавува и обратната операција. Имено, да се најде промената на патот во зависност од времето кога е позната брзината на движењето како функција од времето. Всушност, последната операција е наоѓање на функција кога е даден нејзиниот извод.

Во следните разгледувања со I ќе го означуваме едно од следниве множества во $\mathbf{R}$:

$$[a,b], (a,b], [a,b), (a,b), (-\infty,a], (-\infty,a), [b,+\infty), (b,+\infty), (-\infty,+\infty),$$

кога $a < b$. Освен тоа, за функцијата $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ ставаме

$$f'(a) = f_+'(a) \text{ и } f'(b) = f_-'(b).$$

1.2. Дефиниција. Нека $f: I \to \mathbf{R}$. За функцијата $F: I \to \mathbf{R}$ ќе велиме дека е *примитивна функција* на f на I, ако за секој $x \in I$ постои $F'(x)$ и

$$F'(x) = f(x). \tag{1}$$

1.3. Забелешка. Од дефиниција 1.2 следува дека, ако функцијата F е примитивна за функцијата f на интервалот I, тогаш F е непрекината на I.

1.4. Пример. а) Функцијата $F(x) = \frac{x^5}{5}$ е примитивна функција за функцијата $f(x) = x^4$ на целата реална права.

б) Функцијата $F(x) = e^x$ е примитивна за функцијата $f(x) = e^x$ на целата реална права.

в) Според пример IV.4.2. г) функцијата

$$F(x) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

е примитивна за функцијата $f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$, за $x \neq \pm a$.

г) Нека $I = (-1,1)$ и

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Ќе докажеме дека функцијата f нема примитивна функција на интервалот I .

Навистина, нека претпоставиме дека тврдењето не е точно. Нека F е таква што за секој $x \in I$ важи $F'(x) = f(x)$. За интервалот $[0,x], 0 < x < 1$ и функцијата F од теоремата на Лагранж следува дека постои $\xi \in (0,x)$ таков што

$$F(x) - F(0) = F'(\xi)x = f(\xi)x = x .$$

Од последното равенство следува $F_+^{'}(0) = 1$, што противречи на фактот дека

$$F_+^{'}(0) = F'(0) = f(0) = 0 ,$$

па затоа функцијата f нема примитивна функција на интервалот I . ♦

1.5. Како што видовме во пример 1.4 г) дури и многу едноставни функции не мора да имаат примитивна функција. Затоа треба да се определат услови кои ќе гарантираат постоење на примитивна функција. Овие услови ќе ги определиме подоцна. Овде ќе забележиме дека за да се разгледуваат и такви функции како во примерот 1.4. г), понекогаш се користи следнава дефиниција за примитивна функција, која е поопшта од дефиниција 1.2.

Дефиниција. Нека $f: I \to \mathbf{R}$. Функцијата $F: I \to \mathbf{R}$ ја нарекуваме *примитивна* за функцијата f на I ако:

а) $F \in \mathbf{C}(I)$;

б) постои најмногу пребројливо множество A такво, што за секој $n \in \mathbf{N}$ множеството $A \cap [-n,n]$ е конечно и за секој $x \in I \setminus A$ постои $F'(x) = f(x)$.

Во натамошните разгледувања, ако не е поинаку кажано, ќе ја користиме дефиниција 1.2.

1.6. Лема. Функциите $G(x)$ и $F(x)$, диференцијабилни на интервалот I , се примитивни функции на I за една иста функција ако и само ако

$$G(x) = F(x) + C, \quad x \in I, \ C = \text{const} . \tag{2}$$

Доказ. Нека на интервалот I , $G(x)$ и $F(x)$ се примитивни функции за функцијата $f(x)$. Тогаш $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = f(x)$, за секој $x \in I$. Значи, $F'(x) = G'(x)$, за секој $x \in I$. Сега од последицата IV 10.9. б) следува дека постои константа C таква што важи (2).

Обратно, ако на интервалот I функцијата $F(x)$ е примитивна за функцијата $f(x)$, тогаш $F'(x) = f(x)$, за секој $x \in I$. Но, тогаш за секоја константа C важи $(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$, за секој $x \in I$ од што следува дека секоја функција $G(x) = F(x)+C,\quad x \in I,\ C = \text{const}$ е примитивна за функцијата $f(x)$. ♦

1.7. Дефиниција. Нека функцијата f е определена на некој интервал I. Фамилијата од сите нејзини примитивни функции на интервалот I ја нарекуваме *неопределен интеграл* на функцијата f и ја означуваме со $\int f(x)dx$. Симболот $\int$ го нарекуваме *знак за интегралот,* а функцијата f ја нарекуваме *подинтегрална функција.*

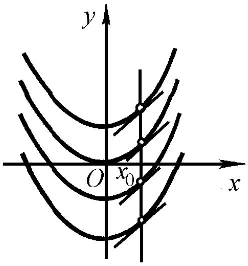
1.8. Коментар. Од лема 1.6 следува дека, ако F е произволна примитивна функција на функцијата f на интервалот I, тогаш

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \qquad C \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Од досега изнесеното е јасно дека секое равенство, во кое на двете страни имаме неопределени интеграли, е равенство меѓу множества.

На црт. 1 е претставен неопределениот интеграл $x^2 + C$ на функцијата $f(x) = 2x$, т.е. фамилијата параболи $y = x^2 + C$.

Како што рековме, интегралот $\int f(x)dx$ е фамилијата примитивни функции на функцијата f, па затоа наместо да велиме дека функцијата има примитивна функција, ќе велиме дека интегралот $\int f(x)dx$ постои. Постапката за наоѓање примитивна функција или неопределен интеграл за функцијата f ќе ја нарекуваме *интегрирање* на f.



Цртеж 1

Во следниве неколку леми ќе ги докажеме основните својства на неопределениот интеграл.

1.9. Лема. Ако функцијата F е диференцијабилна на интервалот I, тогаш на I важи $\int dF(x) = F(x)+C$, т.е. важи

$$\int F'(x)dx = F(x)+C. \tag{4}$$

Доказ. Непосредно следува од дефиницијата на неопределениот интеграл како фамилија од сите диференцијабилни функции чиј диференцијал стои под знакот на интегралот. ♦

1.10. Лема. Ако функцијата f има примитивна функција на интервалот I, тогаш за секој $x \in I$ важи

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx\ . \tag{5}$$

Доказ. Најпрво да забележиме дека во ова равенство под интеграл $\int f(x)dx$ се подразбира произволна примитивна функција F на функцијата f. Затоа равенството (5) можеме да го запишеме во облик $dF(x) = f(x)dx$. Бидејќи F е примитивна функција за функцијата f, важи $F'(x) = f(x)$. Од својствата на диференцијалот имаме $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$, од што следува точноста на равенството (5). ♦

1.11. Лема (линеарност на интегралот). Ако функциите f_1 и f_2 имаат примитивни функции на интервалот I и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ се такви што $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, тогаш функцијата $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, исто така, има примитивна функција на интервалот I и притоа важи

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx\ . \tag{6}$$

Доказ. Нека F_1 и F_2 се примитивни функции на функциите f_1 и f_2 на интервалот I, соодветно. Тогаш, за секој $x \in I$ важи $F_1'(x) = f_1(x)$ и $F_2'(x) = f_2(x)$. Да ставиме $F(x) = \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x)$. Тогаш, на интервалот I функцијата F е примитивна за функцијата $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, бидејќи

$$F'(x) = (\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x))' = \lambda_1 F_1'(x) + \lambda_2 F_2'(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\ ,$$

за секој $x \in I$. Затоа интегралот $\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))dx$ се состои од сите функции $\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C$, каде C е произволна константа. Од друга страна имаме

$$\begin{aligned}\lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx &= \lambda_1 (F_1(x) + C_1) + \lambda_2 (F_2(x) + C_2) \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2,\end{aligned}$$

каде C_1 и C_2 се произволни константи. Од произволноста на константите C, C_1 и C_2 следува дека фамилиите

$$\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \text{ и } \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C$$

се совпаѓаат, т.е. точно е равенството (6). ♦

1.12. Таблични интеграли. Од секоја формула за извод на некоја функција

$$F'(x) = f(x) \tag{7}$$

следува формулата за неопределен интеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C\ . \tag{8}$$

Притоа за да се провери точноста на формулата (8) за конкретни функции, доволно е за тие функции да се провери формулата (7) во сите точки на разгледуваниот интервал. Така, може да се докаже точноста на следниве формули, кои ги нарекуваме таблични интеграли:

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq 1,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \ |x| < a,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\arccos \frac{x}{a} + C, \ |x| < a,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C, \ |x| > |a|.$$

Со помош на табличните интеграли и претходно докажаните својства на неопределениот интеграл може да се најдат интегралите и на посложени елементарни функции. Ќе разгледаме неколку примери.

1.11. Пример. а)

$$\int (4\sin x + 3 - 5x^4 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2+1}) dx = 4\int \sin x dx + 3\int dx - 5\int x^4 dx + \int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -4\cos x + 3x - x^5 + \ln|x| - 2\operatorname{arctg} x + C.$$

б) За секој полином од $n-$ти степен постои примитивна функција и тоа е полином од $(n+1)-$ви степен. Имено

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) dx = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \ldots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + C. \ \blacklozenge$$

1.12. Пример. Дадена е функцијата

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 1) \\ x^2, & x \in [1, +\infty) \end{cases}.$$

Најдете примитивна функција на функцијата $f(x)$.

Решение. Ако $F(x)$ е примитивна функција на функцијата $f(x)$, тогаш

$$F(x) = \begin{cases} \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1, & x \in (-\infty, 1) \\ \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_2, & x \in [1, +\infty) \end{cases},$$

каде C_1 и C_2 се константи. Но, функцијата $F(x)$ е непрекината, па затоа

$$F(1)=\tfrac{1}{3}+C_2=\tfrac{1}{2}+C_1,$$

од каде наоѓаме $C_2=C_1+\frac{1}{6}$. ♦

1.13. Пример. Пресметајте го интегралот $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

Решение. Ќе ја трансформираме подинтегралната функција

$$I=\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}(1+\tfrac{1}{x^2})dx=\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d[\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\frac{1}{x})]}{[\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\frac{1}{x})]^2+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\tfrac{1}{x})+\begin{cases}C', & x<0,\\ C'', & x>0.\end{cases}$$

Понатаму, бидејќи примитивната функција мора да биде непрекината, добиваме дека $I(0^-)=I(0^+)$, па затоа

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C'=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C''.$$

Според тоа, $C'=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C$ и $C''=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C$, каде C е произволна константа. Ако ставиме $I(0)=C$, тогаш условот $I(0^-)=I(0^+)=I(0)$ ќе биде исполнет и јасно

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\tfrac{1}{x})+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\operatorname{sgn}x+C,\ x\neq 0,\quad I(0)=\lim_{x\to 0}I(x).\ ♦$$

1.14. Пример. Пресметајте го интегралот

$$\int\frac{[x]}{x^{a+1}}dx,\ a\in\mathbf{R},\ x\geq 1.$$

Решение. Прво ќе го разгледаме случајот $a\neq 0$. Ако $n\leq x<n+1, n\in\mathbf{N}$, тогаш $[x]=n$ и за примитивната функција на интервалот $[n,n+1)$ наоѓаме

$$I(x)=\int\frac{ndx}{x^{a+1}}=-\frac{n}{ax^a}+C_n.$$

Од непрекинатоста на примитивната функција следува $I(n)=I(n^-)$, па затоа

$$-\frac{n}{an^a}+C_n=-\frac{n-1}{an^a}+C_{n-1},\ n\in\mathbf{N},$$

што значи

$$C_n=\frac{1}{an^a}+C_{n-1}=\frac{1}{an^a}+\frac{1}{a(n-1)^a}+C_{n-2}=\ldots=\frac{1}{a}(\frac{1}{n^a}+\frac{1}{(n-1)^a}+\ldots+\frac{1}{2^a}+1)+C.$$

Бидејќи $n=[x]$, со замена во $I(x)=\int\frac{ndx}{x^{a+1}}=-\frac{n}{ax^a}+C_n$ наоѓаме

$$I(x)=\int\frac{[x]dx}{x^{a+1}}=-\frac{[x]}{ax^a}+\frac{1}{a}(\frac{1}{n^a}+\frac{1}{(n-1)^a}+\ldots+\frac{1}{2^a}+1)+C.$$

Нека $a=0$. Тогаш, за $n \le x < n+1, n \in \mathbf{N}$ имаме $[x]=n$ и затоа

$$I(x)=\int \tfrac{ndx}{x} = n\ln x + C_n .$$

Аналогно на претходниот случај, заради непрекинатоста на примитивната функција, наоѓаме

$$I(x)=\int \tfrac{[x]dx}{x} = [x]\ln x - \ln([x]!) + C . \ \blacklozenge$$

2. ЗАМЕНА НА ПРОМЕНЛИВИ

2.1. Во оваа и во следната точка ќе разгледаме две својства на неопределениот интеграл кои имаат огромна примена при наоѓањето на примитивните функции.

2.2. Теорема. Нека функциите $f(x)$ и $\varphi(t)$ се определени на интервалите I_x и I_t, при што $\varphi(I_t) \subset I_x$. Ако функцијата f на интервалот I_x има примитивна функција $F(x)$, т.е. ако

$$\int f(x)dx = F(x)+C , \tag{1}$$

а функцијата φ е диференцијабилна на I_t, тогаш функцијата $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на I_t има примитивна функција $F(\varphi(t))$ и важи

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx\,|_{x=\varphi(t)} . \tag{2}$$

Доказ. Функциите $f(x)$ и $F(x)$ се определени на интервалот I_x. Од $\varphi(I_t) \subset I_x$ следува дека сложените функции $f(\varphi(t))$ и $F(\varphi(t))$ се добро дефинирани. Притоа, бидејќи $F'(x)=f(x),\ x \in I_x$ од правилото за диференцирање на сложена функција, добиваме

$$\tfrac{dF(\varphi(t))}{dt} = \tfrac{dF}{dx}\,|_{x=\varphi(t)} \cdot \tfrac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in I_t .$$

Според тоа, функцијата $F(\varphi(t))$ е примитивна функција за функцијата $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Оттука, согласно со дефиницијата на неопределен интеграл, имаме

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))+C . \tag{3}$$

Ако во (1) ставиме $x=\varphi(t)$, добиваме

$$\int f(x)dx\,|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))+C . \tag{4}$$

Десните страни во (3) и (4) се еднакви, па затоа се еднакви и левите, т.е. важи (2). ♦

2.3. Коментар. Формулата (2) ја нарекуваме *формула за интегрирање со замена на променливата.* Оваа формула може да се запише и во видот

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(x)dx\,|_{x=\varphi(t)}\,. \qquad (5)$$

Нејзината примена се состои во тоа што наместо да го пресметуваме интегралот $\int f(\varphi(t))d\varphi(t)$, го пресметуваме интегралот $\int f(x)dx$ и потоа ставаме $x=\varphi(t)$.

Формулата (2) може целисходно да биде искористена и во обратен редослед. Имено, понекогаш полесно може наместо интегралот $\int f(x)dx$, со помош на соодветна смена на променливата $x=\varphi(t)$, да се пресмета интегралот $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Ако функцијата φ на интервалот I_t има инверзна функција φ^{-1}, тогаш со замената $t=\varphi^{-1}(x)$ во (2) преминуваме кон променлива x, и добиваме

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,|_{t=\varphi^{-1}(x)}\,. \qquad (6)$$

Всушност, оваа формула обично се нарекува формула за интегрирање со замена на променливата.

Јасно, за да постои функцијата φ^{-1}, инверзна на φ, потребно е дополнување на условот на теорема 2.2. Ова дополнување може да биде, на пример, строга монотоност на функцијата φ на интервалот I_t, при што, како што е познато, постои инверзната функција φ^{-1}.

2.4. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}dx$.

Од

$$(1+3x^3-x^6)' = 9x^2-6x^5 = 3(3x^2-2x^5) = -3(2x^5-3x^2),$$

следува замената $t=1+3x^3-x^6$. Имаме, $-\frac{1}{3}dt=(2x^5-3x^2)dx$, па затоа

$$\int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}dx = -\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t} = -\frac{1}{3}\ln|t|+C = C-\frac{1}{3}\ln|1+3x^3-x^6|\,. \ \blacklozenge$$

2.5. Забелешка. Постапката применета во пример 2.4 може да се примени за решавање на секој интеграл од видот $\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx,\ \ g(x)\neq 0$. Имено, со замената $g(x)=t,\ \ g'(x)dx=dt$, добиваме

$$\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx = \int\frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln|g(x)|+C\,. \ \blacklozenge$$

2.6. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int\frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}dx$.

Ја трансформираме подинтегралната функција

$$\int\frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}dx = \int\frac{x(x+\sqrt{x^2-1})}{x^2-(\sqrt{x^2-1})^2}dx = \int x(x+\sqrt{x^2-1})dx = \int(x^2+x\sqrt{x^2-1})dx$$

$$=\int x^2dx+\int x\sqrt{x^2-1}dx=\tfrac{x^3}{3}+\int x\sqrt{x^2-1}dx=(*)$$

Воведуваме замена $x^2-1=t^2$, $xdx=tdt$, и добиваме:

$$(*)=\tfrac{x^3}{3}+\int t^2dt=\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{t^3}{3}+C=\tfrac{x^3}{3}+\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3}+C\,.$$

Значи,

$$\int\frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}dx=\tfrac{x^3}{3}+\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3}+C\,.\ ♦$$

2.7. Пример. Ќе докажеме дека од $\int f(x)dx=F(x)+C$ следува

$$\int f(ax+b)dx=\tfrac{1}{a}F(ax+b)+C,\quad a\neq 0\,. \tag{7}$$

Ја воведуваме замената $t=ax+b$, $dx=\tfrac{1}{a}dt$, и добиваме

$$\int f(ax+b)dx=\tfrac{1}{a}\int f(t)dt=\tfrac{1}{a}F(t)+C=\tfrac{1}{a}F(ax+b)+C\,.$$

Ако се искористат табличните интеграли со помош на (7) може да се пресметаат голем број интеграли од елементарните функции. Така, на пример,

$$\int\cos(ax+b)dx=\tfrac{1}{a}\sin(ax+b)+C,\qquad \int\tfrac{dx}{ax+b}=\tfrac{1}{a}\ln|ax+b|+C \text{ итн. } ♦$$

2.8. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$.

Воведуваме замена $x=t^6$, $dx=6t^5dt$, и добиваме

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx&=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}dt=6\int\frac{t^5}{t^3+t^2}dt=6\int(t^2-t+1-\tfrac{1}{t+1})dt\\&=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C\\&=2\sqrt[6]{x^3}-3\sqrt[6]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C\\&=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C.\end{aligned}$$

Според тоа,

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C\,.\ ♦$$

2.9. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int\frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}$.

Ќе ја трансформираме подинтегралната функција

$$\int\frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}=\int\frac{e^xdx}{e^x(3e^x+1)}=\int\frac{3e^xdx}{3e^x(3e^x+1)}=(*)\,.$$

Воведуваме замена $3e^x=t$, $3e^xdx=dt$, и добиваме

$$(*)=\int\frac{dt}{t(t+1)}=\int\frac{t+1-t}{t(t+1)}dt=\int(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1})dt=\ln|t|-\ln|t+1|+C$$

$$=\ln|\frac{t}{t+1}|+C=\ln\frac{3e^x}{3e^x+1}+C.$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}=\ln\frac{3e^x}{3e^x+1}+C\ .\ \blacklozenge$$

2.10. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$.

Ќе ја трансформираме подинтегралната функција

$$\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}(1-\frac{1}{x^2})dx=\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$=\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2})(x+\frac{1}{x}+\sqrt{2})}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2})-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(x+\frac{1}{x}+\sqrt{2})+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+1-x\sqrt{2}}{x^2+1+x\sqrt{2}}+C\ .\ \blacklozenge$$

2.11. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.

Ќе ја трансформираме подинтегралната функција

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}}=(*)$$

Воведуваме замена $3x-1=t,\quad dx=\frac{dt}{3}$, и добиваме:

$$(*)=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{3}\ln(t+\sqrt{t^2+1})+C=\frac{1}{3}\ln(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2})+C\ .$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}=\frac{1}{3}\ln(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2})+C\ .\ \blacklozenge$$

2.12. Забелешка. Постапката применета во пример 2.11 може да се употреби за решавање на секој интеграл од обликот $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ a>0$. Имено, ако извадиме $\frac{1}{\sqrt{a}}$ пред интегралот и ставиме $\frac{b}{a}=p$ и $\frac{c}{a}=q$, тогаш решавањето на овој интеграл се сведува на решавањето на интегралот $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$. Последниот интеграл се сведува на табличен на следниов начин

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}}=\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}}$$

каде $t = x+\frac{p}{2},\quad k^2 =| q-\frac{p^2}{4}|$. ♦

2.13. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$.

Ќе ја трансформираме подинтегралната функција

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{1-(x^2-4x+4)}} = \int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = (*)\ .$$

Воведуваме замена $x-2=t,\quad dx = dt$ и добиваме

$$(*) = \int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin(x-2)+C$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}} = \arcsin(x-2)+C\ .\ ♦$$

2.14. Забелешка. Постапката применета во пример 2.13 може да се употреби за решавање на интеграли од обликот $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad a<0$. Имено, ако извадиме $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ пред интегралот и ставиме $\frac{b}{|a|}=p$ и $\frac{c}{|a|}=q$, тогаш решавањето на овој интеграл се сведува на решавањето на интегралот $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}$. Последниот интеграл го трансформираме на следниов начин $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}} = \int\frac{d(x-p/2)}{\sqrt{(q+\frac{p^2}{4})-(x-\frac{p}{2})^2}}$. Ако $q+\frac{p^2}{4}>0$, тогаш при $x-\frac{p}{2}=t,\ k^2 = q+\frac{p^2}{4}$, овој интеграл се сведува на табличниот интеграл $\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}$. ♦

3. ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА

3.1. Теорема (парцијална интеграција). Ако функциите $u(x)$ и $v(x)$ се диференцијабилни на некој интервал и на тој интервал постои интегралот $\int vdu$, тогаш на овој интервал постои и интегралот $\int udv$ и притоа важи

$$\int udv = uv - \int vdu\ . \tag{1}$$

Доказ. Нека функциите u и v се диференцијабилни на интервалот I. Од својствата на диференцијалот за секоја точка на интервалот I важи

$$d(uv) = udv + vdu\ ,$$

па затоа

$$udv = d(uv) - vdu\ .$$

Од лема 1.9 следува дека постои интегралот од првиот собирок на десната страна во последното равенство и притоа важи $\int d(uv) = uv + C$, а интегралот од вториот собирок постои според условот на теоремата. Сега од лема 1.11 следува дека постои интегралот $\int udv$ и притоа важи

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu\ . \tag{2}$$

Конечно, ако на десната страна во (2) го замениме $\int d(uv)$ со $uv + C$ и сметаме дека произволната константа се однесува на интегралот $\int vdu$, ја добиваме формулата (1). ♦

3.2. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \ln(x^2+1)dx$.

Овој интеграл ќе го решиме со парцијална интеграција. Земаме,

$$\begin{array}{l} u = \ln(x^2+1) \\ dv = dx \end{array} \quad \text{и добиваме} \quad \begin{array}{l} du = \frac{2x}{x^2+1}dx \\ v = \int dv = \int dx = x \end{array}.$$

Со замена во формулата (1) наоѓаме

$$\begin{aligned}\int \ln(x^2+1)dx &= x\ln(x^2+1) - 2\int \tfrac{x^2}{x^2+1}dx = x\ln(x^2+1) - 2\int \tfrac{x^2+1-1}{x^2+1}dx \\ &= x\ln(x^2+1) - 2\int (1 - \tfrac{1}{x^2+1})dx = x\ln(x^2+1) - 2(x - \operatorname{arctg} x) + C.\end{aligned}$$

Значи,

$$\int \ln(x^2+1)dx = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C\ .\ ♦$$

3.3. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$.

Воведуваме парцијална интеграција со

$$\begin{array}{l} u = \arcsin\sqrt{x} \\ dv = \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx \end{array} \quad \text{и добиваме} \quad \begin{array}{l} du = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ v = \int dv = \int \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = -2\sqrt{1-x} \end{array}$$

Со замена во формулата (1) наоѓаме

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx = -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C\ .$$

Значи,

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx = -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C, \quad |\,x\,| < 1\ .\ ♦$$

3.4. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int x \operatorname{arctg}(x+1)dx$

Со примена на методот за парцијална интеграција при

$$u = \operatorname{arctg}(x+1) \quad du = \frac{1}{x^2+2x+2}dx$$
имаме
$$dv = xdx \quad v = \int dv = \int xdx = \frac{x^2}{2}$$

од што следува

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{arctg}(x+1)dx &= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+2x+2}dx \\ &= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{1}{2}\int (1 - \frac{2x+2}{x^2+2x+2})dx \\ &= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx = (*)\end{aligned}$$

Сега замена $x^2 + 2x + 2 = t$, од што добиваме $(2x+2)dx = dt$, па затоа

$$(*) = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 2) + C .$$

Значи,

$$\int x \operatorname{arctg}(x+1)dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 2) + C . \ \blacklozenge$$

3.5. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

Прво воведуваме замена $x = t^2$. Имаме $dx = 2tdt$, па затоа

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \int e^t 2tdt = 2\int te^t dt = (*)$$

Ќе направиме парцијална интеграција со

$$u = t \quad du = dt$$
од што следува
$$dv = e^t dt \quad v = \int dv = \int e^t dt = e^t .$$

Имаме,

$$(*) = 2(te^t - \int e^t dt) = 2(te^t - e^t) + C = 2(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}) + C .$$

Значи,

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}) + C , \ x > 0 . \ \blacklozenge$$

3.6. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$

Ќе направиме парцијална интеграција со

$$u = x \quad du = dx$$
од што следува
$$dv = \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx \quad v = \int dv = -\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} = \frac{1}{2\cos^2 x} .$$

Добиваме

$$\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx = \frac{x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}x + C \ .$$

Значи,

$$\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx = \frac{x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\,. \ ♦$$

3.7. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \sin\sqrt{x}dx$

Воведуваме смена $x = t^2$ и добиваме $dx = 2tdt$, односно

$$\int \sin\sqrt{x}dx = \int 2t\sin tdt = (*)$$

Сега со парцијална интеграција, при

$$\begin{array}{lcl} u = t & & du = dt \\ & \text{добиваме} & \\ dv = \sin tdt & & v = \int dv = \int \sin tdt = -\cos t \end{array},$$

од што следува

$$(*) = 2\left(-t\cos t + \int \cos tdt\right) = 2\left(-t\cos t + \sin t\right) + C = 2\sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C\ .$$

Значи,

$$\int \sin\sqrt{x}dx = 2\sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C, \quad x > 0\,. \ ♦$$

3.8. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{x\mathrm{arctg}x}{(1+x^2)^2}dx$.

Со примена на методот за парцијална интеграција при

$$\begin{array}{lcl} u = \mathrm{arctg}x & & du = \frac{dx}{1+x^2} \\ & \text{добиваме} & \\ dv = \frac{xdx}{(1+x^2)^2} & & v = \int dv = \int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(1+x^2)} \end{array},$$

од што следува

$$\begin{aligned} \int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{(1+x^2)^2}dx &= -\frac{\mathrm{arctg}\,x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{\mathrm{arctg}\,x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}dx \\ &= -\frac{\mathrm{arctg}\,x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{1+x^2} - \int x\frac{x}{(1+x^2)^2}dx\right) \\ &= -\frac{\mathrm{arctg}\,x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int x\frac{x}{(1+x^2)^2}dx = (*) \end{aligned}$$

Воведуваме нова парцијална интеграција со

$$\begin{array}{lcl} u = x & & du = dx \\ dv = \frac{xdx}{(1+x^2)^2} & \text{и добиваме} & v = \int dv = \int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(1+x^2)} \end{array},$$

т.е.

$$(*)=-\frac{\mathrm{arctg}x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}\right)=-\frac{\mathrm{arctg}x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\mathrm{arctg}x+\frac{x}{4(1+x^2)}+C\,.$$

Значи,

$$\int\frac{x\mathrm{arctg}x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{\mathrm{arctg}x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\mathrm{arctg}x+\frac{x}{4(1+x^2)}+C\,.\ \blacklozenge$$

4. ИНТЕГРИРАЊЕ НА РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

4.1. Во III 11 ги разгледавме рационалните функции и ја докажавме следнава теорема (III 11.9) која е основна при интегрирањето на рационалните функции.

Теорема. Нека $\frac{P(x)}{Q(x)}$ е правилна рационална функција, каде полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ се со реални коефициенти. Ако

$$Q(x)=(x-a_1)^{k_1}...(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}...(x^2+p_sx+q_s)^{t_s}\,,$$

каде $a_i,\ i=1,...,r$ се попарно различни реални корени на полиномот $Q(x)$, со кратности $k_i,\ i=1,...,r$, соодветно,

$$x^2+p_jx+q_j=(x-z_j)(x-\bar{z}_j)\,,$$

каде $z_j,\bar{z}_j,\ j=1,2,...,s$ се попарно различни комплексни корени на полиномот $Q(x)$, со кратности $t_j,\ j=1,2,...,s$, тогаш постојат реални броеви

$$A_i^{(k)},\quad i=1,...,r,\ k=1,...,k_i\,,\ M_j^{(t)},N_j^{(t)}\quad j=1,...,s;\quad t=1,...,t_j$$

такви што

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}&=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{k_1-1}}+...+\frac{A_1^{(k_1)}}{x-a_1}+\frac{A_2^{(1)}}{(x-a_2)^{k_2}}+\frac{A_2^{(2)}}{(x-a_2)^{k_2-1}}+...+\frac{A_2^{(k_2)}}{x-a_2}+...\\&+\frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{k_r}}+...+\frac{A_r^{(k_r)}}{x-a_r}+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}}+\frac{M_1^{(2)}x+N_1^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{t_1-1}}+...+\frac{M_1^{(t_1)}x+N_1^{(t_1)}}{x^2+p_1x+q_1}+...\\&+\frac{M_2^{(1)}x+N_2^{(1)}}{(x^2+p_2x+q_2)^{t_2}}+\frac{M_2^{(2)}x+N_2^{(2)}}{(x^2+p_2x+q_2)^{t_2-1}}+...+\frac{M_2^{(t_2)}x+N_2^{(t_2)}}{x^2+p_2x+q_2}+...\\&+\frac{M_s^{(1)}x+N_s^{(1)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{t_s}}+\frac{M_s^{(2)}x+N_s^{(2)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{t_s-1}}+...+\frac{M_s^{(t_s)}x+N_s^{(t_s)}}{x^2+p_sx+q_s}.\ \blacklozenge\end{aligned}$$

4.2. Користејќи ја претходната теорема, ќе ја докажеме следнава важна теорема за рационалните функции.

Теорема. Неопределениот интеграл од секоја рационална функција на секој интервал, на кој именителот на функцијата е различен од нула, постои и тој може да се изрази со помош на елементарните функции.

Доказ. Бидејќи секоја рационална функција е збир на полином и правилна рационална функција, доволно е теоремата да ја докажеме за правилна рационална дропка. Според теорема 4.1 функцијата $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можеме да ја претставиме како конечен збир од елементарни дропки, па затоа доволно е да докажеме дека неопределениот интеграл од секоја елементарна дропка постои на секој интервал на кој именителот на дропката е различен од нула.

Ако елементарната дропка е од видот $\frac{A}{(x-a)^n}$, $n=1,2,\dots$, тогаш од табличните интеграли и од пример 2.7 следува дека за $n=1$ важи

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a|+C,$$

а за $n>1$ важи

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C.$$

Ако елементарната дропка е од видот $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, $n=1,2,3,\dots$, каде $\frac{p^2}{4}-q<0$, тогаш дропката ја запишуваме во видот $\frac{Mx+N}{[(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}]^n}$, $n=1,2,\dots$.

Сега, ако ставиме $t=x+\frac{p}{2}$, $a^2=q-\frac{p^2}{4}$, тогаш таа можеме да ја запишеме во видот

$$\frac{Mt}{(t^2+a^2)^n}+(N-\frac{Mp}{2})\frac{1}{(t^2+a^2)^n},\ n=1,2,\dots .$$

Ќе докажеме дека тврдењето на теоремата важи за дропките $\frac{t}{(t^2+a^2)^n}$ и $\frac{1}{(t^2+a^2)^n}$, $n=1,2,\dots$. За $n=1$ имаме

$$\int \frac{t}{t^2+a^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2)+C \text{ и } \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C,$$

а кога $n>1$ за првата дропка добиваме

$$\int \frac{t}{(t^2+a^2)^n}dt = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+C.$$

На крајот со помош на парцијална интеграција ќе докажеме дека интегралот

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n},\ n=1,2,3,\dots$$

постои. Од $u=\frac{1}{(t^2+a^2)^n}$, $dv=dt$, следува $du=-\frac{2ntdt}{(t^2+a^2)^{n+1}}$, $v=t$, па затоа

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{(t^2+a^2)^n}+2n\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}dt = \frac{t}{(t^2+a^2)^n}+2n\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}dt \\ &= \frac{t}{(t^2+a^2)^n}+2n\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}-2na^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n+1}} = \frac{t}{(t^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}. \end{aligned}$$

Според тоа,

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{t}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n, \qquad n = 1,2,\dots .$$

Веќе докажавме дека интегралот I_1 може да се реши, па сега од претходната формула и од принципот на математичка индукција следува дека секој интеграл од обликот $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$, $n = 1,2,3,\dots$ може да се реши. ♦

4.3. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4} dx$.

Подинтегралната функција е рационална функција, при што степенот на броителот е помал од степенот на именителот. Неа ќе ја разложиме на прости дропки

$$\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4} = \frac{x^2}{x^2(x+1)+4x(x+1)+4(x+1)} = \frac{x^2}{(x+1)(x^2+4x+4)} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} = \frac{(A+B)x^2+(4A+3B+C)x+4A+2B+C}{(x+1)(x+2)^2}$$

од што добиваме $x^2 = (A+B)x^2 + (4A+3B+C)x + (4A+2B+C)$. Од последното равенство го добиваме системот

$$A+B=1, \qquad 4A+3B+C=0, \qquad 4A+2B+C=0$$

чие решение е $A=1,\ B=0,\ C=-4$. Според тоа, разложувањето гласи

$$\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4} = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} \ ,$$

па затоа

$$\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4} dx = \int \frac{dx}{x+1} - 4\int \frac{dx}{(x+2)^2} = \ln|x+1| + \frac{4}{x+2} + C . \ ♦$$

4.4. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$.

Ако го поделиме броителот со именителот на дропката, добиваме

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2 + x + 4 + 4\frac{x^2+4x-2}{x(x-2)(x+2)} .$$

Ја разложуваме правилната рационална дропка и добиваме

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2 + x + 4 + 4(\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{5}{4}\frac{1}{x-2} - \frac{3}{4}\frac{1}{x+2}) .$$

Според тоа,

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx = \int (x^2 + x + 4 + 4(\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{5}{4}\frac{1}{x-2} - \frac{3}{4}\frac{1}{x+2}))dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C . \ ♦$$

4.5. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx$.

Ако го поделиме броителот со именителот на дропката, добиваме

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2} = x + \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} .$$

Сега правилната дропка ја разложуваме на прости дропки и добиваме

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2} = x - \frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1} .$$

Конечно,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx &= \int xdx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{xdx}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C. \ \blacklozenge\end{aligned}$$

5. ИНТЕГРИРАЊЕ НА НЕКОИ ИРАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

5.1. Во примерите со кои го илустриравме методот на замена на променливите видовме дека со овој метод може да се интегрираат некои ирационални функции. Иако не постои метод со кој може да се интегрира произволна ирационална функција, сепак постојат специјални случаи на ирационални функции кои можат да се интегрираат. Во оваа точка ќе се задржиме на интегрирањето на овие функции.

5.2. Дефиниција. *Полином* од m *реални променливи* $x_1,....,x_m$ ја нарекуваме функцијата $P:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ определена со подредена $m-$торка $(n_1,...,n_m)$ позитивни цели броеви и множество реални броеви

$$\{a_{i_1 i_2 ... i_m} \mid 0 \le i_j \le n_j,\ j = 1,2,...,m\}$$

на следниов начин

$$P(\mathbf{x}) = P(t_1,t_2,...,t_m) = \sum_{\substack{0\le i_j \le n_j \\ j=1,2,...,m}} a_{i_1 i_2 ... i_m} t_1^{i_1} t_2^{i_2} ... t_m^{i_m} ,$$

за $\mathbf{x} = (t_1,....,t_m) \in \mathbf{R}^m$.

Нека P и Q се два полиноми од m променливи и $A = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m \mid Q(\mathbf{x}) \ne 0\}$. Функцијата $R : A \to \mathbf{R}$ дефинирана со

$$R(\mathbf{x}) = \frac{P(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{x})}, \mathbf{x} \in A \qquad (1)$$

ја нарекуваме *рационална функција од* m *променливи* $t_1, t_2, ..., t_m$.

Ако во (1) променливите $t_1, t_2, ..., t_m$ се функции од x, т.е. $t_i = \varphi_i(x)$, за $i = 1, 2, ..., m$, тогаш функцијата $R(\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x))$ ја нарекуваме *рационална функција од* $\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$.

5.3. Да го разгледаме интегралот

$$\int R(x, (\tfrac{ax+b}{cx+d})^{r_1}, ..., (\tfrac{ax+b}{cx+d})^{r_n})dx, \qquad (2)$$

каде R е рационална функција, $r_1, ..., r_n$ се рационални броеви и a, b, c, d се константи.

Ако $ad - bc = 0$, тогаш коефициентите a, b се пропорционални на коефициентите c, d, па затоа дропката $\frac{ax+b}{cx+d}$ нема да зависи од x, т.е. функцијата R е рационална функција од x, за која во претходната точка докажавме дека може да се интегрира.

Нека $ad - bc \neq 0$, $m = \text{NZS}(r_1, ..., r_n)$ и $r_i = \frac{p_i}{m}$, $i = 1, 2, .., n$. Јасно, броевите p_i, $i = 1, 2, ..., n$ се цели броеви. Ставаме $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$, т.е. $x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} = \varphi(t)$. Бидејќи $\varphi(t)$ е рационална функција од t добиваме дека и $\varphi'(t)$ е рационална функција од t. Понатаму,

$$dx = \varphi'(t)dt, (\tfrac{ax+b}{cx+d})^{r_i} = t^{mr_i} = t^{p_i}, \ i = 1, 2, ..., n$$

и со замена во (2) добиваме

$$\int R(x, (\tfrac{ax+b}{cx+d})^{r_1}, ..., (\tfrac{ax+b}{cx+d})^{r_n})dx = \int R(\tfrac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, ..., t^{p_n})\varphi'(t)dt = \int R_1(t)dt,$$

каде $R_1(t)$ е рационална функција од t. Според тоа, пресметувањето на интегралот (2) се сведува на интегрирање на рационалната функција $R_1(t)$, при што за да се најде интегралот (2) треба да се направи обратната замена на променливата $t = (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{m}}$ со што се враќаме на првобитната променлива x.

5.4. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

Ја трансформираме подинтегралната функција и добиваме

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}(x+2)(x-1)}.$$

Според 5.3 со замената

$$\tfrac{x+2}{x-1}=t^4,\quad x=\tfrac{2+t^4}{t^4-1},\quad dx=\tfrac{-12t^3}{(t^4-1)^2}dt$$

за дадениот интеграл имаме

$$I=\int\tfrac{1}{t}\tfrac{t^4-1}{3t^4}\tfrac{t^4-1}{3}\tfrac{-12t^3}{(t^4-1)^2}dt=-\tfrac{12}{9}\int\tfrac{1}{t^2}dt=\tfrac{4}{3}\tfrac{1}{t}+C=\tfrac{4}{3}\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}}+C=\tfrac{4}{3}\sqrt[4]{\tfrac{x-1}{x+2}}+C\ .$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}=\tfrac{4}{3}\sqrt[4]{\tfrac{x-1}{x+2}}+C\ .\ \blacklozenge$$

5.5. Интегрирање на биномен диференцијал. Интегралот од видот

$$I=\int x^m(a+bx^n)^p\,dx\,, \tag{3}$$

каде m,n и p се рационални броеви и a и b се реални броеви го нарекуваме *интеграл од биномен диференцијал* (*биномен интеграл*). Ако во (3) ставиме

$$x^n=t,\qquad x=t^{1/n},\qquad dx=\tfrac{1}{n}t^{(1-n)/n}\,,$$

тогаш интегралот (3) го добива видот

$$I=\tfrac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p\,dt\ . \tag{4}$$

Ќе разгледаме три случаи.

а) Нека p е цел број. Ако $\frac{m+1}{n}$ е рационален број еднаков на $\frac{r}{s}$, тогаш со замената $t=z^s$, $dt=sz^{s-1}dz$ добиваме

$$I=\tfrac{s}{n}\int z^{r-s}(a+bz^s)^p\,z^{s-1}dz=\int R(z)dz\ ,$$

$R(z)$ е рационална функција.

б) Нека $\frac{m+1}{n}$ е цел број. Ако p е рационален број еднаков на $\frac{r}{s}$, тогаш $t^{\frac{m+1}{n}}$ е рационална функција помножена со $(a+bt)^{\frac{r}{s}}$, што значи дека подинтегралната функција во (4) е рационална функција од t и од $\sqrt[s]{a+bt}$ и според а) интегралот (4) е решлив.

в) Нека $\frac{m+1}{n}+p$ е цел број. Ако p е рационален број еднаков на $\frac{r}{s}$, тогаш множејќи ја и делејќи ја подинтегралната функција со t^p во (4) добиваме

$$I=\tfrac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}(\tfrac{a+bt}{t})^p\,dt\ .$$

Јасно, во последниот интеграл првиот множител е рационална функција, па затоа интегралот може да се реши со замената $\frac{a+bt}{t}=z^s$, од што добиваме $I=\int R(z)dz$, каде $R(z)$ е рационална функција.

Од досега изнесеното следува точноста на следнава теорема.

Теорема. Биномниот интеграл (3) може да го изразиме со помош на елементарните функции, ако еден од броевите p, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n}+p$ е цел број. ♦

5.6. Пример. Ќе го пресметаме интегралот: $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx$

Подинтегралната функција ќе ја запишеме во видот:

$$\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^4\,dx = (*)$$

Бидејќи $m=\frac{1}{2}, n=\frac{1}{3}, p=4$, ова е биномен интеграл, и бидејќи $p=4\in\mathbf{Z}$, добиваме дека за да го интегрираме треба да постапиме како во случајот под а) од претходната теорема. Ја воведуваме замената $x=t^6$, $dx=6t^5dt$ и добиваме:

$$\begin{aligned}(*) &= \int t^3(1+t^2)^4 6t^5dt = 6\int t^8(1+4t^2+6t^4+4t^6+t^8)dt\\ &= 6\int (t^8+4t^{10}+6t^{12}+4t^{14}+t^{16})dt = \tfrac{6}{9}t^9+\tfrac{24}{11}t^{11}+\tfrac{36}{13}t^{13}+\tfrac{24}{15}t^{15}+\tfrac{6}{17}t^{17}+C\\ &= 6\sqrt{x^3}\,(\tfrac{1}{9}+\tfrac{4}{11}\sqrt[3]{x}+\tfrac{6}{13}\sqrt[3]{x^2}+\tfrac{4}{15}x+\tfrac{1}{17}\sqrt[3]{x^4})+C.\end{aligned}$$

Значи,

$$\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4 = 6\sqrt{x^3}\,(\tfrac{1}{9}+\tfrac{4}{11}\sqrt[3]{x}+\tfrac{6}{13}\sqrt[3]{x^2}+\tfrac{4}{15}x+\tfrac{1}{17}\sqrt[3]{x^4})+C\ . \ ♦$$

5.7. Пример. Ќе го пресметаме интегралот: $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Подинтегралната функција ќе ја запишеме во видот:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int (1+x^4)^{-\frac{1}{4}}\,dx = (*)$$

Бидејќи $m=0,\ n=4,\ p=-\frac{1}{4}$, ова е биномен интеграл и од $p=-\frac{1}{4}\notin\mathbf{Z}$, а $\frac{m+1}{n}+p=0\in\mathbf{Z}$ добиваме дека за да го интегрираме треба да постапиме како во случајот под в) од претходната теорема. Имаме:

$$x^{-4}+1=t^4,\quad \frac{1}{x^4}=t^4-1,\quad x^4=\frac{1}{t^4-1},\quad x^3dx=-\frac{t^3dt}{(t^4-1)^2}\ ,$$

па затоа

$$\begin{aligned}(*) &= \int \frac{x^3dx}{x^4\sqrt[4]{x^{-4}+1}}dx = \int \frac{t^4-1}{t}\frac{-t^3}{(t^4-1)^2}dt = -\int \frac{t^2}{t^4-1}dt = \int \frac{t^2}{1-t^4}dt\\ &= \frac{1}{2}\int (\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2})dt = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{2}(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t})-\frac{1}{1+t^2})dt\\ &= \frac{1}{4}\ln|1+t|-\frac{1}{4}\ln|1-t|-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}t+C = \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{x^4+1}+x}{\sqrt[4]{x^4+1}-x}-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}+C\ . \ ♦\end{aligned}$$

5.8. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} dx$.

Подинтегралната функција ќе ја запишеме во видот:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \int x^{-1}(1+x^5)^{-\frac{1}{3}} dx = (*).$$

Бидејќи $m=-1, n=5, p=-\frac{1}{3} \notin \mathbf{Z}$, а $\frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{5} = 0 \in \mathbf{Z}$, заклучуваме дека овој интеграл е биномен и постапката за негово решавање е дадена во претходната теорема под б). Воведуваме замена

$$1+x^5 = t^3, \quad x^5 = t^3 - 1, \quad 5x^4 dx = 3t^2 dt$$

и добиваме

$$(*) = \frac{1}{5}\int \frac{5x^4}{x^5\sqrt[3]{1+x^5}} dx = \frac{1}{5}\int \frac{3t^2}{(t^3-1)t} dt = \frac{3}{5}\int \frac{t}{t^3-1} dt = \frac{3}{5}\int \frac{t}{(t-1)(t^2+t+1)} dt$$
$$= \frac{3}{5}\int (\frac{1}{3}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{3}\frac{t-1}{t^2+t+1}) dt = \frac{1}{5}\int \frac{1}{t-1} dt - \frac{1}{10}\int \frac{2t+1-3}{t^2+t+1} dt$$
$$= \frac{1}{5}\ln|t-1| - \frac{1}{10}\ln(t^2+t+1) + \frac{3}{10}\int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dt = (**)$$

Воведуваме замена $t+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}z, \qquad dt = \frac{\sqrt{3}}{2}dz$ и добиваме:

$$(**) = \frac{1}{5}\ln|t-1| - \frac{1}{10}\ln(t^2+t+1) + \frac{3}{10}\int \frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2}z)^2+\frac{3}{4}} \frac{\sqrt{3}}{2} dz =$$
$$= \frac{1}{5}\ln|t-1| - \frac{1}{10}\ln(t^2+t+1) + \frac{3}{10}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{4}{3}\int \frac{dz}{z^2+1}$$
$$= \frac{1}{5}\ln|t-1| - \frac{1}{10}\ln(t^2+t+1) + \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg} z + C$$
$$= \frac{1}{5}\ln|t-1| - \frac{1}{10}\ln(t^2+t+1) + \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Останува да се вратиме на старата променлива $t = \sqrt[3]{1+x^5}$. ♦

5.9. Ојлерови замени. Интегралите од типот

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx, \tag{5}$$

каде R е рационална функција од x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$, се решаваат со таканаречените *Ојлерови замени*. Точна е следнава теорема.

Теорема. Со замените

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}, \qquad a > 0 \tag{6}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t, \tag{7}$$

кога равенката $ax^2+bx+c=0$ има реален корен α, и

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}, \qquad c>0, \tag{8}$$

интегралот (5) може да се сведе на интеграл од рационална функција.

Доказ. Ќе го разгледаме случајот кога $a>0$. Другите случаи се докажуваат аналогно. Ако квадрираме во (6) последователно, добиваме

$$ax^2+bx+c = t^2 \pm 2xt\sqrt{a} + ax^2\,,\ (b \mp 2t\sqrt{a})x = t^2-c,\ \ x = \frac{t^2-c}{b\mp 2t\sqrt{a}},$$

$$x = (\frac{t^2-c}{b\mp 2t\sqrt{a}})'\,dt \ \text{ и } \sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \frac{t^2\sqrt{a}-c\sqrt{a}}{b\mp 2t\sqrt{a}}\,.$$

Сега, ако замениме во (5), добиваме

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R(\frac{t^2-c}{b\mp 2t\sqrt{a}}, t \pm \frac{t^2\sqrt{a}-c\sqrt{a}}{b\mp 2t\sqrt{a}})(\frac{t^2-c}{b\mp 2t\sqrt{a}})'\,dt\,.$$

Јасно, фунцијата

$$R(\frac{t^2-c}{b\mp 2t\sqrt{a}}, t \pm \frac{t^2\sqrt{a}-c\sqrt{a}}{b\mp 2t\sqrt{a}}) \cdot (\frac{t^2-c}{b\mp 2t\sqrt{a}})'$$

е рационална функција по t, што и требаше да докажеме. ♦

5.10. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Бидејќи $a=1>0$ ја воведуваме замената $\sqrt{x^2+x+1} = -x+t$ и добиваме

$$x = \frac{t^2-1}{1+2t},\ \ dx = \frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}\,,$$

односно

$$I = \int \frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\,dt\,.$$

Разложувањето на подинтегралната функција има облик

$$\frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^1} = \frac{A}{(1+2t)^2} + \frac{B}{1+2t} + \frac{C}{t}\,,$$

од каде наоѓаме $A=-3,\ B=-3,\ C=2$. Според тоа,

$$I = \int \frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^1}\,dt = -3\int\frac{dt}{(1+2t)^2} - 3\int\frac{dt}{1+2t} + 2\int\frac{dt}{t} = \frac{3}{2(1+2t)} + \frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|1+2t|^3} + C\,,$$

каде $t = x+\sqrt{x^2+x+1},\ x \neq -1$. ♦

5.11. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Бидејќи $C=1>0$, ја применуваме третата Ојлерова замена

$$xt-1 = \sqrt{1-2x-x^2}$$

и добиваме

$$I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=\int\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)}dt\ .$$

Разложувањето на подинтегралната функција има облик

$$\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}\ ,$$

од каде наоѓаме $A=-1,\ B=1,\ C=0,\ D=-2$. Според тоа,

$$\int\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)}dt=-\int\frac{dt}{t}+\int\frac{dt}{t-1}+2\int\frac{dt}{t^2+1}=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|-2\mathrm{arctg}t+C\ ,$$

каде $t=\frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x}$. ◆

5.12. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $I=\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$.

Бидејќи $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ ја применуваме втората Ојлерова замена $\sqrt{x^2+3x+2}=(x+1)t$, од каде што добиваме $x=\frac{2-t^2}{t^2-1},\quad dx=-\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}$ и

$$I=\int\frac{-2t^2-4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}dt=-\frac{1}{6(t+1)^2}-\frac{5}{18(t+1)}-\frac{17}{108}\ln|t+1|+\frac{3}{4}\ln|t-1|-\frac{16}{27}\ln|t-2|+C$$

каде $t=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$, (деталите ги оставаме на читателот за вежба). ◆

5.13. Метод на Остроградски. При решавањето на интегралите од видот $\int\frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, каде $P(x)$ е полином, се користи методот на Остроградски кој се состои во следново.

Претпоставуваме дека важи

$$\int\frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=(a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0)\sqrt{ax^2+bx+c}+a_n\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ ,$$

каде $a_0,a_1,\ldots,a_n$ се коефициенти кои треба да ги определиме. Последното равенство го диференцираме и добиваме

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=[(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+(n-2)a_{n-2}x^{n-3}+\ldots+a_1]\sqrt{ax^2+bx+c}$$
$$+[a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0]\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\frac{a_n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Ако во последното равенство помножиме со $\sqrt{ax^2+bx+c}$, тогаш на двете страни добиваме полиноми од $n-$степен и сега непознатите коефициенти $a_0,a_1,\ldots,a_n$ ги определуваме со изедначување на коефициентите пред истите степени на x .

5.14. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$.

Ако го искористиме методот на Остроградски, добиваме

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = (ax^2+bx+c)\sqrt{1+2x-x^2}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Последното равенство го диференцираме и по сведувањето под заеднички именител и изедначувањето на коефициентите добиваме

$$x^3 = (2ax+b)(1+2x-x^2)+(ax^2+bx+c)(1-x)+\lambda,$$

од каде го наоѓаме системот равенки

$$-3a=1,\quad 5a-2b=0,\quad 2a+3b-c=0,\quad b+c+\lambda=0$$

чие решение е

$$a=-\tfrac{1}{3},\ b=-\tfrac{5}{6},\ c=-\tfrac{19}{3},\ \lambda=4.$$

Според тоа, ако $|x-1|<\sqrt{2}$ добиваме

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx &= -\frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}\\ &= -\frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C,\end{aligned}$$

што и требаше да се определи. ♦

6. ИНТЕГРИРАЊЕ НА НЕКОИ ТРАНСЦЕДЕНТНИ ФУНКЦИИ

6.1. Со замената $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ -\pi<x<\pi$ интегралите од типот

$$\int R(\sin x,\cos x)dx$$

се сведуваат на интеграли од рационални функции. Навистина, од

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2z}{1+z^2},\qquad \cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-z^2}{1+z^2},\qquad (1)$$

$$x=2\operatorname{arctg}z,\qquad dx=\frac{2dz}{1+z^2}$$

следува дека

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R(\frac{2z}{1+z^2},\frac{1-z^2}{1+z^2})\frac{2dz}{1+z^2},$$

т.е. добивме интеграл од рационална функција.

6.2. Пример. а) Ќе го пресметаме интегралот:

$$\int \frac{1}{5-4\sin x+3\cos x}dx \ .$$

Ако ја искористиме наведената замена, добиваме

$$\int \frac{1}{5-4\sin x+3\cos x}dx = \int \frac{1}{5-\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{2t^2-8t+8}dt$$

$$= \int \frac{1}{t^2-4t+4}dt = -\frac{1}{t-2}+C = C-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}.$$

Значи,

$$\int \frac{1}{5-4\sin x+3\cos x}dx = C-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2} \ .$$

б) Ќе го пресметаме интегралот: $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.

Ако ја искористиме наведената замена, добиваме

$$\int \frac{dx}{5-3\cos x} = \int \frac{1}{5-3\frac{1-z^2}{1+z^2}}\frac{2}{1+z^2}dz = \int \frac{1}{1+4z^2}dz = \frac{1}{2}\int \frac{d(2z)}{1+(2z)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2z + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}) + C.$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{5-3\cos x} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}) + C \ . \ ♦$$

6.3. Во 6.1 докажавме дека разгледуваните интеграли секогаш можат да се сведат на интеграли од рационални функции. Меѓутоа, понекогаш наместо замената (1) погодно е да се користат замените:

$$z = \sin x, \qquad dz = \cos x dx, \tag{2}$$

$$z = \cos x, \qquad dz = -\sin x dx \ , \tag{3}$$

$$z = \operatorname{tg} x, \qquad dz = \frac{dx}{\cos^2 x}. \tag{4}$$

Ќе разгледаме неколку примери.

6.4. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x)dx$.

Прво ќе ја трансформираме подинтегралната функција. Имаме:

$$\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x)dx = \int \operatorname{tg}^2 x(1+\operatorname{tg}^2 x)dx = \int \operatorname{tg}^2 x\frac{dx}{\cos^2 x} = (*)$$

Ако ја искористиме замената (4), добиваме

$$(*) = \int z^2 dz = \frac{1}{3}z^3 + C = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C \ .$$

Значи,

$$\int (\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x)dx = \tfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + C \ . \ ♦$$

6.5. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$.

Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos x}} \sin x dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\sqrt{\cos x}} \sin x dx = (*)$$

Ако ја искористиме замената (3), добиваме

$$(*) = \int \frac{z^2-1}{\sqrt{z}} dz = \int (z^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{z}})dz = \tfrac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - 2\sqrt{t} + C = \tfrac{2}{5}\sqrt{\cos x}(\cos^2 x - 5) + C \ .$$

Значи,

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx = \tfrac{2}{5}\sqrt{\cos x}(\cos^2 x - 5) + C \ . \ ♦$$

6.6. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$.

Прво ќе ја трансформираме подинтегралната функција. Имаме

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \cos x dx = \int \frac{\sin^3 x}{1-\sin^2 x} \cos x dx = (*)$$

Ако ја искористиме замената (2), добиваме

$$(*) = \int \frac{z^3}{1-z^2} dz = \int \frac{z^3-z+z}{1-z^2} dz = \int (-t + \tfrac{1}{2}\tfrac{2z}{1-z^2})dz = -\int z dz - \tfrac{1}{2}\int \frac{d(1-z^2)}{1-z^2}$$
$$= C - \tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{2}\ln|1-t^2| = C - \tfrac{1}{2}\sin^2 x - \tfrac{1}{2}\ln|1-\sin^2 x| = C - \tfrac{1}{2}\sin^2 x - \ln|\cos x| \ .$$

Значи,

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = C - \tfrac{1}{2}\sin^2 x - \ln|\cos x| \ . \ ♦$$

6.7. Интегралот разгледан во претходниот пример е од типот

$$\int \sin^m x \cos^n x dx \ .$$

Нека m и n се рационални броеви. Ќе докажеме дека со смените (2) и (3) овој интеграл се сведува на биномен интеграл. Навистина, ако ја искористиме замената (2) добиваме

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = (1-z^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad dx = \frac{dz}{\cos x} = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} dz \ ,$$

што значи дека

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int z^m (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz \ .$$

Според тоа, дали може интегралот $\int \sin^m x \cos^n x dx$ да се изрази со помош на елементарни функции, зависи од тоа дали тоа својство го има добиениот биномен интеграл.

Јасно, ако еден од броевите m и n е позитивен непарен број, на пример $m = 2k+1$, тогаш со замената (2) разгледуваниот интеграл се сведува на интеграл од рационална функција (пример 6.6).

Ако $m = 2k+1$ и $n = 2p+1$, тогаш пожелно е да се искористи замената $z = \cos 2x$ и притоа добиваме

$$\begin{aligned}\int \sin^{2k+1} x \cos^{2p+1} x dx &= \tfrac{1}{2}\int \sin^{2k} x \cos^{2p} x \cdot 2\sin x \cos x dx\\ &= \tfrac{1}{2^2}\int (\tfrac{1-\cos 2x}{2})^k (\tfrac{1+\cos 2x}{2})^p \sin 2x d(2x)\\ &= -\tfrac{1}{2^{k+p+2}}\int (1-z)^k (1+z)^p dz,\end{aligned}$$

што значи дека повторно добиваме интеграл од рационална функција. Јасно, броевите m и n можат да бидат како позитивни така и негативни.

Ако броевите m и n се позитивни парни броеви, тогаш користејќи ги формулите

$$\sin^2 x = \tfrac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \tfrac{1+\cos 2x}{2}, \tag{5}$$

интегралот $\int \sin^m x \cos^n x dx$ го сведуваме на интеграл од истиот тип со тоа што степените m и n се намалуваат.

Ако броевите $m = -2k$ и $n = -2p$ се негативни парни броеви, тогаш користејќи ги формулите

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}, \qquad \sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}\, x}{1+\mathrm{tg}^2 x}, \tag{6}$$

добиваме

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^{-2k} x \cos^{-2p} x dx = \int \frac{(1+\mathrm{tg}^2 x)^{k+p-1}}{(\mathrm{tg}^2 x)^k} \frac{dx}{\cos^2 x},$$

што значи, со смената (4) разгледуваниот интеграл се сведува на интеграл од рационална функција кој, како што гледаме, е елементарен.

6.8. Пример. а) Ќе го пресметаме интегралот: $\int \sin^4 x dx$.

Ако ги искористиме формулите (5) добиваме

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 dx = \int (\tfrac{1-\cos 2x}{2})^2 dx = \tfrac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx\\ &= \tfrac{1}{4}\int dx - \tfrac{1}{4}\int \cos 2x d(2x)x + \tfrac{1}{8}\int (1+\cos 4x) dx\\ &= \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{1}{32}\int \cos 4x d(4x) = \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{1}{32}\sin 4x + C.\end{aligned}$$

б) Ќе го пресметаме интегралот $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$.

Ако ги искористиме формулите (6), добиваме

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} dx = \int \frac{(1+\mathrm{tg}^2 x)^2}{\mathrm{tg}^4 x}(1+\mathrm{tg}^2 x)^2 \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{(1+\mathrm{tg}^2 x)^3}{\mathrm{tg}^4 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = (*) \, .$$

Ако ја искористиме замената (4) добиваме:

$$(*) = \int \frac{(1+z^2)^3}{z^4} dz = \int (\frac{1}{z^4} + \frac{3}{z^2} + 3 + z^2) dt$$

$$= -\frac{1}{3z^3} - \frac{3}{z} + 3z + \frac{z^3}{3} + C = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{tg}^6 x - 1}{\mathrm{tg}^3 x} + 3\frac{\mathrm{tg}^2 x - 1}{\mathrm{tg}\, x} + C.$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{tg}^6 x - 1}{\mathrm{tg}^3 x} + 3\frac{\mathrm{tg}^2 x - 1}{\mathrm{tg}\, x} + C \, . \blacklozenge$$

6.9. Интегралите

$\int \sin\alpha x \cos\beta x dx, \ \int \sin\alpha x \sin\beta x dx, \ \int \cos\alpha x \cos\beta x dx$, каде $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

можеме да ги решиме ако ги искористиме тригонометриските формули:

$$\begin{aligned} \sin\alpha x \cos\beta x &= \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x] \\ \sin\alpha x \sin\beta x &= \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x] \qquad (7) \\ \cos\alpha x \cos\beta x &= \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x] \end{aligned}$$

што може да се види од следниов пример.

6.10. Пример. а) Ако ја искористиме првата формула во (7) добиваме

$$\int \cos x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int [\sin 4x + \sin 2x] dx = \frac{1}{2}[-\frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 2x}{2}] + C \, .$$

б) Ако ја искористиме втората формула во (7) добиваме

$$\int \sin 5x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int [\cos 3x - \cos 7x] dx = \frac{1}{2}[\frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 7x}{7}] + C \, .$$

в) Ако ја искористиме третата формула во (7) добиваме

$$\int \cos 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int [\cos x + \cos 5x] dx = \frac{1}{2}[\sin x + \frac{\sin 5x}{5}] + C \, . \blacklozenge$$

6.11. На крајот од оваа точка да забележиме дека со замената $z = \mathrm{th}\frac{x}{2}$ интегралите од обликот $\int R(\mathrm{sh}\, x, \mathrm{ch}\, x) dx$ се сведуваат на интеграли од рационални функции.

Навистина, при наведената замена на променливата добиваме

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{2z}{1-z^2}, \qquad \mathrm{ch}\, x = \frac{1+z^2}{1-z^2}, \qquad dx = \frac{2dz}{1-z^2},$$

па затоа

$$\int R(\mathrm{sh}\, x, \mathrm{ch}\, x) dx = \int R(\frac{2z}{1-z^2}, \frac{1+z^2}{1-z^2}) \frac{2dz}{1-z^2} \, .$$

Слично, за интегралите од обликот $\int \operatorname{sh}^m x \operatorname{ch}^n x dx$, каде m и n се рационални броеви, можеме да ги користиме замените $z = \operatorname{sh} x$ или $z = \operatorname{ch} x$.

7. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ЗАМЕНИ

7.1. Во теорема 5.9 докажавме дека со помош на Ојлеровите замени интегралите:

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx, \tag{1}$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx, \text{ и} \tag{2}$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx \tag{3}$$

можат да се изразат со помош на елементарните функции.

Меѓутоа, интегралите (1), (2) и (3) можат да се решат и со тригонометриските замени

$$x = a\sin z,\ dx = a\cos z dz,\ \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos z, \tag{4}$$

$$x = a \operatorname{tg} z,\ dx = \tfrac{adz}{\cos^2 z},\ \sqrt{a^2 + x^2} = \tfrac{a}{\cos z} \text{ и} \tag{5}$$

$$x = \tfrac{a}{\cos z},\ dx = \tfrac{a\sin z dz}{\cos^2 z},\ \sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{tg} z, \tag{6}$$

соодветно, при што тие се сведуваат на интеграли од видот

$$\int R(\sin z, \cos z)dz$$

за кои во 6.1 докажавме дека можат да се изразат со помош на елементарни функции. Ќе разгледаме неколку примери.

7.2. Пример. Ќе го пресметаме интегралот: $\int x^2\sqrt{4 - x^2}dx$.

Подинтегралната функција е рационална функција од x и $\sqrt{4 - x^2}$. Бидејќи $a = 2$ ја воведуваме замената

$$x = 2\sin z,\ dx = 2\cos z dz \text{ и } \sqrt{4 - x^2} = 2\cos z$$

и добиваме

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{4 - x^2}dx &= 4\int 4\sin^2 z\cos z\cos z dz = 4\int \sin^2 2z dz = 2\int (1 - \cos 4z)dz \\ &= 2z - \tfrac{\sin 4z}{2} + C = 2z - \sin 2z\cos 2z + C = 2z - 2\sin z\cos z(1 - 2\sin^2 z) \\ &= 2z - 2\sin z\sqrt{1 - \sin^2 z}(1 - 2\sin^2 z) + C = 2\arcsin\tfrac{x}{2} + \tfrac{x\sqrt{4 - x^2}(x^2 - 2)}{4} + C\end{aligned}$$

Значи,

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}\,(x^2-2)}{4}+C\,.\ \blacklozenge$$

7.3. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$.

Ако ја искористиме замената (6) добиваме

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}=\int\frac{\cos^3 z}{a^3\sin^3 z}\,\frac{a\sin z}{\cos^2 z}\,dz=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos z}{\sin^2 z}\,dz=(*)$$

Воведуваме нова замена $\sin z = p,\ \cos z dz = dp$ при што добиваме

$$(*)=\frac{1}{a^2}\int\frac{dp}{p^2}=-\frac{1}{a^2}\frac{1}{p}+C=C-\frac{1}{a^2}\frac{1}{\sin p}=C-\frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 z}}=C-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}=C-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,.$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}=C-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,.\ \blacklozenge$$

7.4. Пример. Ќе го пресметаме интегралот $\int\frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{13}}\,dx$.

Прво ја трансформираме подинтегралната функција

$$\int\frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{13}}\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{16}}\,4x^3dx=\frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{1+(x^4)^2}}{(x^4)^4}\,d(x^4)=\frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{1+z^2}}{z^4}\,dz=(*)$$

каде $z=x^4$. Воведуваме нова замена $z=\operatorname{tg}v,\ dz=\frac{dv}{\cos^2 v}$ и добиваме

$$(*)=\frac{1}{4}\int\frac{\cos v}{\sin^4 v}\,dv=\frac{1}{4}\int\frac{d(\sin v)}{\sin^4 v}=-\frac{1}{12}\frac{1}{\sin^3 v}+C=C-\frac{1}{12}\frac{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2 v)^3}}{\operatorname{tg}^3 v}$$

$$=C-\frac{1}{12}\frac{\sqrt{(1+z^2)^3}}{z^3}=C-\frac{1}{12}\frac{\sqrt{(1+x^8)^3}}{x^{12}}.$$

Значи,

$$\int\frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{13}}\,dx=C-\frac{1}{12}\frac{\sqrt{(1+x^8)^3}}{x^{12}}\,.\ \blacklozenge$$

8. БЕЛЕШКА ЗА ИНТЕГРАЛИ КОИ НЕ МОЖАТ ДА СЕ ИЗРАЗАТ СО ПОМОШ НА ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

8.1. Во претходните точки разгледавме некои класи елементарни функции и ги најдовме нивните примитивни функции кои, исто така, се елементарни функции. Меѓутоа не секоја елементарна функција има, за примитивна елементарна функција. Еден таков пример е биномниот интеграл во кој подинтегралната функција е елементарна и постојат случаи кога примитивната функција не може да се изрази со помош на елементарни функции.

Може да се докаже дека интегралите $\int \frac{e^x}{x^n}dx,\ \int \frac{\sin x}{x^n}dx,\ \int \frac{\cos x}{x^n}dx$, каде n е природен број, исто така, не може да се изразат со помош на елементарни функции. Меѓу ваквите интеграли има и такви кои имаат важна улога како во математичката анализа така и во нејзината примена. Еден ваков интеграл е и интегралот $\int e^{-x^2}dx$ кој има важна улога во теоријата на веројатност и математичката статистика.

8.2. Елиптични интеграли. Важна класа елементарни функции, чии примитивни функции не можат да се изразат со помош на елементарни функции, се функциите од видот $R(x,\sqrt{P(x)})$, каде $P(x)$ е полином од трет или четврт степен. Имено, интегралите од видот $\int R(x,\sqrt{P(x)})dx$, каде $P(x)$ е полином од трет или четврт степен, во литературата се познати како *елиптични интеграли* и овие интеграли во општ случај не може да се изразат со помош на елементарни функции. Може да се докаже дека решавањето на овие интеграли се сведува на решавање на интеграли од видот

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\ \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \text{ и } \int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad 0<k<1, h\in \mathbf{R}$$

кои во литературата се познати како *елиптични интеграли од* I, II и III *вид*. Понатаму, со замената $x=\sin z$, првите два интеграли се сведуваат на линеарна комбинација на интегралите

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-k^2\sin^2 z}} \text{ и } \int \sqrt{1-k^2\sin^2 z}dz,\qquad 0<k<1,$$

а третиот на интегралот

$$\int \frac{dz}{(1+h\sin^2 z)\sqrt{1-k^2\sin^2 z}}.$$

Тие во литературата се познати како *елиптични интеграли од* I, II и III *вид во облик на Лежандр.*

9. ДЕФИНИЦИЈА И ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА РИМАНОВИОТ ИНТЕГРАЛ

9.1. Во претходните параграфи од оваа глава го разгледавме неопределениот интеграл. Во следните параграфи ќе се задржиме на определениот интеграл, односно Римановиот интеграл и неговата примена.

Дефиниција. Секое конечно множество точки $\pi=\{x_i\}_{i=0}^{k_\pi}$ од интервалот $[a,b]$, $a,b\in \mathbf{R}$, такви што $a=x_0<x_1<...<x_{k_\pi-1}<x_{k_\pi}=b$, го нарекуваме *поделба* на интервалот $[a,b]$.

Броевите x_i, $i=0,1,...,k_\pi$ ги нарекуваме *точки на поделбата* π, а интервалите $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,...,k_\pi$ ги нарекуваме *интервали на поделбата* π и нивните должини ги означуваме со $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1,...,k_\pi$. Бројот $d(\pi)=\max\limits_{i=1,...,k_\pi} \Delta x_i$ го нарекуваме *дијаметар* на поделбата π.

Ако се дадени две поделби π_1 и π_2 на интервалот, тие во општ случај се неспоредливи, но ако $\pi_2 \subset \pi_1$, тогаш ќе велиме дека поделбата π_1 е *пофина* (*поситна*) од поделбата π_2 и притоа ќе пишуваме $\pi_1 \succ \pi_2$.

9.2. Лема. а) Ако $\pi_1 \succ \pi_2$ и $\pi_2 \succ \pi_3$, тогаш $\pi_1 \succ \pi_3$.

б) За секои две поделби π_1 и π_2 постои поделба π таква што $\pi \succ \pi_1$ и $\pi \succ \pi_2$.

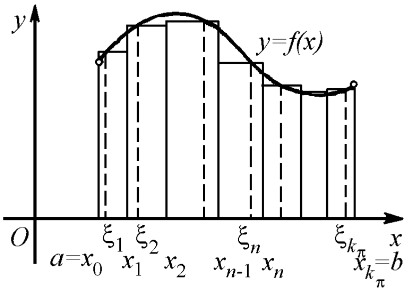
Доказ. а) Навистина, од $\pi_1 \succ \pi_2$ и $\pi_2 \succ \pi_3$ следува $\pi_2 \subset \pi_1$ и $\pi_3 \subset \pi_2$. Според тоа, $\pi_3 \subset \pi_1$, што значи $\pi_1 \succ \pi_3$.

б) Доволно е за точки на поделбата π да ги земеме сите точки од поделбите π_1 и π_2. ♦

9.3. Дефиниција. Нека функцијата f е определена на интервалот $[a,b]$, $a<b$ и $\pi=\{x_i\}_{i=0}^{k_\pi}$ е произволна поделба на овој интервал. Сумата од облик

$$\sigma_\pi = \sigma_\pi(f;\xi_1,\xi_2,...,\xi_{k_\pi}) = \sum_{i=1}^{k_\pi} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad \xi_i \in [x_{i-1},x_i],\ i=1,2,...,k_\pi$$

ја нарекуваме *интегрална сума на Риман* за функцијата f (цртеж 2).



Цртеж 2

Функцијата f ја нарекуваме *интеграбилна според Риман на интервалот* $[a,b]$, ако постои реален број L таков што за секоја низа поделби $\pi_n=\{x_i^{(n)}\}_{i=0}^{k_{\pi_n}}$, $n=1,2,...$ на интервалот $[a,b]$, за која важи $\lim\limits_{n\to\infty} d(\pi_n)=0$, низата од интегрални суми

$$\sigma_{\pi_n}(f;\xi_1^{(n)},...,\xi_{k_{\pi_n}}^{(n)})$$

конвергира кон L, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_{\pi_n}} f(\xi_i^{(n)})\Delta x_i^{(n)} = L,$$

за секој избор на точки $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$, $i=1,2,...,k_{\pi_n}$, $n=1,2,...$, каде

$$\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)},\ i=1,2,...,k_{\pi_n},\quad n=1,2,...$$

Бројот L го нарекуваме *Риманов интеграл од функцијата* f на интервалот $[a,b]$ и го означуваме со $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Множеството функции интеграбилни по Риман на интервалот $[a,b]$ ќе го означуваме со $\mathbf{R}([a,b])$.

9.4. Забелешка. Римановиот интеграл од функцијата f на интервалот $[a,b]$ може да се дефинира и на следниов начин:

> бројот L го нарекуваме *Риманов интеграл од функцијата* f на интервалот $[a,b]$, ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што за секој поделба $\pi = \{x_i\}_{i=0}^{k_\pi}$ на интервалот $[a,b]$ со својство $|d(\pi)| < \delta$ е исполнето неравенството $|\sigma(f;\xi_1,...,\xi_{k_\pi}) - L| < \varepsilon$, за секои точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1,2,...,k_\pi$.

Доказот за еквивалентноста на овие две дефиниции е аналоген на доказот за границата на функција во термини на низи и околини.

9.5. Забелешка. Во досегашните излагања го дефиниравме Римановиот интеграл од функцијата f на интервалот $[a,b]$ кога $a < b$. Оваа дефиниција ја дополнуваме со следните усогласувања.

Ако функцијата f е определена во точката $x = a$, тогаш по дефиниција земаме дека

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0 .$$

Ако функцијата $f \in \mathbf{R}([a,b])$, $a > b$ тогаш по дефиниција ставаме

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx .$$

9.6. Теорема. Ако фунцијата $f \in \mathbf{R}([a,b])$, тогаш f е ограничена на $[a,b]$.

Доказ. Нека $f \in \mathbf{R}([a,b])$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = L$.

Да фиксираме произволен $\varepsilon > 0$, на пример $\varepsilon = 1$. Тогаш, согласно со забелешка 9.4 постои $\delta > 0$ таков што за секоја интегрална сума σ_π , соодветна на поделба π со дијаметар $|d(\pi)| < \delta$, е исполнето неравенството $|\sigma_\pi - L| < 1$, т.е. неравенството $L - 1 < \sigma_\pi < L + 1$, што значи дека множеството вредности на интегралните суми $\{\sigma_\pi \mid d(\pi) < \delta\}$ на функцијата f е ограничено.

Нека претпоставиме дека постои функција f, $f \in \mathbf{R}([a,b])$ која е неограничена на $[a,b]$. Да земеме произволна поделба $\pi = \{x_i\}_{i=0}^{k_\pi}$ на интервалот $[a,b]$. Бидејќи функцијата f е неограничена на интервалот $[a,b]$, таа е неограничена барем на еден од интервалите на поделбата π. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека f е неограничена на интервалот $[x_0,x_1]$. Според тоа, за секој $n \in \mathbf{N}$ постои точка $\xi_1^{(n)} \in [x_0,x_1]$ таква што $|f(\xi_1^{(n)})| > n$, што значи дека важи

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_1^{(n)}) = \infty . \tag{1}$$

Да фиксираме точки ξ_i во преостанатите интервали на поделбата π, т.е. $\xi_i \in [x_{i-1},x_i],\ i = 2,3,...,k_\pi$. Тогаш сумата

$$\sum_{i=2}^{k_\pi} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{2}$$

има точно определена вредност. Ако на оваа сума го додадеме собирокот $f(\xi_1^{(n)})\Delta x_1$, ја добиваме интегралната сума $\sigma_\pi(f;\xi_1^{(n)},\xi_2,...,\xi_{k_\pi})$. Сега, од (1) и (2) следува

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_\pi(f;\xi_1^{(n)},\xi_2,...,\xi_{k_\pi}) = \lim_{n\to\infty}[f(\xi_1^{(n)})\Delta x_1 + \sum_{i=2}^{k_\pi} f(\xi_i)\Delta x_i] = \infty$$

што значи дека за секоја поделба π множеството вредности на интегралните суми $\sigma_\pi(f;\xi_1^{(n)},\xi_2,...,\xi_{k_\pi})$ е неограничено. Според тоа, неограничено е и множеството $\{\sigma_\pi \mid d(\pi) < \delta\}$, што е противречност. ♦

9.7. Пример. а) Да ја разгледаме функцијата $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ определена со

$$f(x) = C,\ x \in [a,b].$$

Нека $\pi = \{x_i\}_{i=0}^{k_\pi}$ е произволна поделба на $[a,b]$. Тогаш за секои $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ имаме $f(\xi_i) = C,\ i = 1,2,...,k_\pi$, па затоа

$$\sigma_\pi(f;\xi_1,\xi_2,...,\xi_{k_\pi}) = \sum_{i=1}^{k_\pi} f(\xi_i)\Delta x_i = C(b-a),$$

од што следува дека $\int_a^b C dx = C(b-a)$.

б) Да ја разгледаме *функцијата на Дирихле*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ е рационален број} \\ 0, & x \text{ е ирационален број} \end{cases}$$

За секој интервал $[a,b]$ и секоја негова поделба $\pi=\{x_i\}_{i=0}^{k_\pi}$, ако сите точки $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ ги избереме да се рационални, тогаш од $f(\xi_i)=1$, $i=1,2,...,k_\pi$ добиваме

$$\sigma_\pi(f;\xi_1,\xi_2,...,\xi_{k_\pi})=\sum_{i=1}^{k_\pi}f(\xi_i)\Delta x_i=b-a\ ,$$

а ако сите точки $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ ги избереме да се ирационални, тогаш од $f(\xi_i)=0$, $i=1,2,...,k_\pi$ добиваме

$$\sigma_\pi(f;\xi_1,\xi_2,...,\xi_{k_\pi})=\sum_{i=1}^{k_\pi}f(\xi_i)\Delta x_i=0\ .$$

Затоа интегралните суми σ_π на функцијата на Дирихле немаат граница кога $\lim\limits_{n\to\infty} d(\pi)=0$.

Функцијата на Дирихле е пример на ограничена функција на секој интервал која не е интеграбилна на тој интервал. ♦

10. СУМИ НА ДАРБУ И НИВНИТЕ СВОЈСТВА

10.1. Дефиниција. Нека функцијата f е определена на интервалот $[a,b]$, $\pi=\{x_i\}_{i=0}^{k_\pi}$ е поделба на тој интервал, $\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. Ставаме

$$M_i=\sup_{x\in\Delta_i}f(x),\qquad m_i=\inf_{x\in\Delta_i}f(x),\quad i=1,2,...,k_\pi \tag{1}$$

$$S_\pi=S_\pi(f)=\sum_{i=1}^{k_\pi}M_i\Delta x_i,\qquad s_\pi=s_\pi(f)=\sum_{i=1}^{k_\pi}m_i\Delta x_i\ . \tag{2}$$

Сумата S_π ја нарекуваме *горна сума на Дарбу,* а сумата s_π - *долна сума на Дарбу* за функцијата f .

10.2. Коментар. Очигледно, ако функцијата f е ограничена на интервалот $[a,b]$, тогаш при секоја поделба π инфимумите m_i и супремумите M_i се конечни, па затоа сумите на Дарбу (4) примаат конечни вредности при секоја поделба π. Во натамошните разгледувања ќе претпоставуваме дека функцијата f е ограничена, бидејќи нас не интересираат својствата на интегралот, а тој според теорема 9.6 постои само за ограничени функции.

Од неравенствата $m_i\le M_i$, $i=1,2,...,k_\pi$ следува дека за секоја поделба π е исполнето неравенството

$$s_\pi\le S_\pi\ . \tag{3}$$

Исто така, од дефиницијата на m_i и M_i следува дека за секој $\xi_i\in\Delta_i$ важи

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i,\, i = 1,2,\dots,k_\pi \,,$$

што значи дека е точно неравенството

$$s_\pi \leq \sigma_\pi = \sigma_\pi(f;\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{k_\pi}) \leq S_\pi \,.$$

10.3. Лема. За секои поделби π_1 и π_2 на интервалот $[a,b]$ важи

$$s_{\pi_1} \leq S_{\pi_2} \,. \tag{4}$$

Доказ. Нека претпоставиме дека $\pi^* \succ \pi$, $\pi = \{x_i\}_{i=0}^{k_\pi}$, $\pi^* = \{x_j^*\}_{j=0}^{t_{\pi^*}}$ се поделби на интервалот $[a,b]$ и нека

$$\Delta_i = [x_{i-1}, x_i],\ m_i = \inf_{x\in\Delta_i} f(x),\ i = 1,2,\dots,k_\pi \text{ и}$$

$$\Delta_j^* = [x_{j-1}, x_j],\ m_j^* = \inf_{x\in\Delta_j^*} f(x),\ j = 1,2,\dots,t_{\pi^*} \,.$$

Условот $\pi^* \succ \pi$ означува дека секој интервал Δ_i на поделбата π е унија на некои интервали на поделбата π^*. Овие интервали да ги означиме со $\Delta_{j_i}^*$. Тогаш, $\Delta_i = \bigcup_{j_i} \Delta_{j_i}^*$ каде унијата е земена по сите индекси j_k такви што $\Delta_{j_i}^* \subset \Delta_i$. Оттука следува дека $\Delta x_i = \bigcup_{j_i} \Delta x_{j_i}^*$. Освен тоа, од својствата на инфимумот следува дека

$$m_i \leq m_{j_i}^* \,. \tag{5}$$

Сега лесно можеме да го докажеме неравенството

$$s_\pi \leq s_{\pi^*} \,. \tag{6}$$

Навистина, од неравенството (5) следува

$$s_\pi = \sum_{i=1}^{k_\pi} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k_\pi} m_i \sum_{j_i} \Delta x_{j_i}^* \leq \sum_{i=1}^{k_\pi} \sum_{j_i} m_{j_i}^* \Delta x_{j_i}^* = \sum_{j=1}^{t_{\pi^*}} m_j^* \Delta x_j^* = s_\pi^* \,.$$

Аналогно се докажува неравенството

$$S_{\pi^*} \leq S_\pi \,. \tag{7}$$

Нека сега π_1 и π_2 се две поделби на интервалот $[a,b]$. Да земеме произволна поделба π која е пофина од поделбите π_1 и π_2, т.е. $\pi \succ \pi_1$ и $\pi \succ \pi_2$. Конечно, од неравенствата (6), (3) и (7) добиваме $s_{\pi_1} \leq s_\pi \leq S_\pi \leq S_{\pi_2}$, т.е. неравенството (4) е исполнето. ♦

10.4. Лема. Ако $\sigma_\pi = \sigma_\pi(f;\xi_1,\dots,\xi_{k_\pi})$ е произволна интегрална сума на Риман, соодветна на поделбата π, тогаш

$$s_\pi = \inf_{\xi_1,\dots,\xi_{k_\pi}} \sigma_\pi, \qquad S_\pi = \sup_{\xi_1,\dots,\xi_{k_\pi}} \sigma_\pi . \tag{8}$$

Доказ. Нека $\pi = \{x_i\}_{i=0}^{k_\pi}$ е поделба на интервалот и $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, за $i = 1, 2, \dots, k_\pi$.

Ако се дадени произволни бројни множества X_i, $i = 1, 2, \dots, k_\pi$ и константи $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, k_\pi$, тогаш од својствата на супремум и инфимум следува дека за множеството $X = \{x \,|\, x = \sum_{i=1}^{k_\pi} a_i x_i,\ x_i \in X_i,\ i = 1, \dots, k_\pi\}$ се исполнети равенствата

$$\sup X = \sum_{i=1}^{k_\pi} a_i \sup X_i, \quad \inf X = \sum_{i=1}^{k_\pi} a_i \inf X_i .$$

Значи,

$$\begin{aligned} s_\pi &= \sum_{i=1}^{k_\pi} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k_\pi} [\inf_{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi_i)] \Delta x_i \\ &= \inf_{\substack{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \\ i = 1, 2, \dots, k_\pi}} \sum_{i=1}^{k_\pi} f(\xi_i) \Delta x_i = \inf_{\substack{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \\ i = 1, 2, \dots, k_\pi}} \sigma_\pi(f; \xi_1, \dots, \xi_{k_\pi}) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} S_\pi &= \sum_{i=1}^{k_\pi} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k_\pi} [\sup_{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi_i)] \Delta x_i \\ &= \sup_{\substack{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \\ i = 1, 2, \dots, k_\pi}} \sum_{i=1}^{k_\pi} f(\xi_i) \Delta x_i = \sup_{\substack{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \\ i = 1, 2, \dots, k_\pi}} \sigma_\pi(f; \xi_1, \dots, \xi_{k_\pi}) \end{aligned},$$

т.е. точни се равенствата (8). ♦

10.5. Ако на интервалот $[a, b]$ е определена ограничена функција f, тогаш горната и долната сума на Дарбу се функции определени на множеството $\{\pi\}$ од сите поделби на интервалот $[a, b]$. За овие функции, аналогно на поимот за граница на интегралните суми на Риман, може да се дефинира нивната граница.

Нека $F(\pi)$ е функција на множеството $\{\pi\}$ од сите поделби на интервалот $[a, b]$.

Дефиниција. Бројот A го нарекуваме *граница на функцијата* $F(\pi)$ кога $d(\pi) \to 0$, ако за секоја низа поделби $\{\pi_n\}_{n=1}^{\infty}$ на интервалот $[a, b]$ таква што $\lim_{n\to\infty} d(\pi_n) = 0$ е исполнето равенството $\lim_{n\to\infty} F(\pi_n) = A$. Притоа пишуваме

$$\lim_{d(\pi)\to 0} F(\pi) = A . \tag{9}$$

Може да се докаже дека бројот A е граница на функцијата $F(\pi)$ кога $d(\pi)\to 0$, ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што за секоја поделба π на интервалот $[a,b]$ за која $d(\pi) < \delta$ е исполнето неравенството $|F(\pi) - A| < \varepsilon$.

Од досега изнесеното е јасно дека на границата (9) се пренесуваат обичните својства на границите, па затоа е можно да се премине кон границата (9) (кога таа постои) во неравенства.

Во смисла на границата (9), во натамошните излагања ќе говориме за граници на горните и долните Дарбоови суми, т.е. за границите $\lim\limits_{d(\pi)\to 0} s_\pi$ и $\lim\limits_{d(\pi)\to 0} S_\pi$.

10.6. Дефиниција. Нека функцијата f е определена на интервалот $[a,b]$. Броевите $I_* = \sup\limits_{\pi} s_\pi$, $I^* = \inf\limits_{\pi} S_\pi$ ги нарекуваме *долен и горен Риманов интеграл на функцијата* f на интервалот $[a,b]$, соодветно.

10.7. Лема. Ако функцијата f е ограничена на интервалот $[a,b]$, тогаш нејзиниот горен и долен Риманов интеграл се конечни и за нив важи неравенството

$$I_* \le I^* . \tag{10}$$

Доказ. Ако во неравенството (4)земеме супремум по сите поделби π_1, добиваме дека за секоја поделба π_2 важи неравенството $I_* \le S_{\pi_2}$. Сега, ако во последното неравенство земеме инфимум по сите поделби π_2, го добиваме неравенството (10). ♦

10.8. Доказот на следното тврдење го оставаме на читателот за вежба.

Лема. Ако функцијата $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ е ограничена, тогаш

$$I_* = \lim_{d(\pi)\to 0} s_\pi \text{ и } I^* = \lim_{d(\pi)\to 0} S_\pi . \ ♦$$

11. КРИТЕРИУМИ ЗА ИНТЕГРАБИЛНОСТ СПОРЕД РИМАН

11.1. Теорема. Нека функцијата f е ограничена на интервалот $[a,b]$. Тогаш, $f \in \mathbf{R}([a,b])$ ако и само ако за сумите на Дарбу е исполнет условот

$$\lim_{d(\pi)\to 0} (S_\pi - s_\pi) = 0 . \tag{1}$$

Доказ. Нека ограничената функција $f \in \mathbf{R}([a,b])$ и $I = \int_a^b f(x)dx$. Тогаш, $\lim_{d(\pi)\to 0} \sigma_\pi = I$. Затоа, за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што за секоја поделба $\pi = \{x_i\}_{i=1}^{k_\pi}$ на интервалот $[a,b]$ со дијаметар $d(\pi) < \delta$ и за секои точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,...,k_\pi$ за сумата $\sigma_\pi = \sigma_\pi(f;\xi_1,...,\xi_{k_\pi})$ важи неравенството $|\sigma_\pi - I| < \varepsilon$, т.е. важат неравенствата

$$I - \varepsilon < \sigma_\pi < I + \varepsilon . \tag{2}$$

Ако во неравенствата (2) преминеме кон супремум и инфимум во однос на точките $\xi_1,...,\xi_{k_\pi}$ од лема 10.4, следува $I - \varepsilon \le s_\pi \le S_\pi \le I + \varepsilon$. Значи, ако $d(\pi) < \delta$, тогаш $0 \le S_\pi - s_\pi \le 2\varepsilon$, од што следува условот (1).

Нека функцијата f е ограничена на интервалот $[a,b]$ и нека за сумите на Дарбу е исполнет условот (1). Од дефиницијата на долниот Риманов интеграл I_* и горниот Риманов интеграл I^* и од неравенството $I_* \le I^*$ следува

$$s_\pi \le I_* \le I^* \le S_\pi . \tag{3}$$

Затоа $0 \le I^* - I_* \le S_\pi - s_\pi$. Од условот (1) следува дека $I^* - I_* = 0$. Означуваме $I^* = I_* = I$. Од (3) следува дека $s_\pi \le I \le S_\pi$, па затоа

$$0 \le I - s_\pi \le S_\pi - s_\pi \text{ и } 0 \le S_\pi - I \le S_\pi - s_\pi .$$

Од овие неравенства и од условот (1) следува

$$\lim_{d(\pi)\to 0} s_\pi = \lim_{d(\pi)\to 0} S_\pi = I \tag{4}$$

Бидејḱи за секоја поделба $\pi = \{x_i\}_{i=0}^{k_\pi}$ и за секој избор на точките $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,...,k_\pi$ е исполнето неравенството

$$s_\pi \le \sigma_\pi = \sigma_\pi(f;\xi_1,\xi_2,...,\xi_{k_\pi}) \le S_\pi ,$$

од равенствата (4) следува $\lim_{d(\pi)\to 0} \sigma_\pi = I$, што значи $f \in \mathbf{R}([a,b])$. ♦

11.2. Последица (Дарбу). Нека функцијата $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ е ограничена. Тогаш, $f \in \mathbf{R}([a,b])$ ако и само ако $I^* = I_*$.

Доказ. Ако f е ограничена и $I^* = I_*$, тогаш од лема 10.8 имаме

$$\lim_{d(\pi)\to 0} (S_\pi - s_\pi) = \lim_{d(\pi)\to 0} S_\pi - \lim_{d(\pi)\to 0} s_\pi = I^* - I_* = 0 ,$$

па од теорема 11.1 следува $f \in \mathbf{R}([a,b])$.

Обратно, ако $f \in \mathbf{R}([a,b])$, тогаш од доказот на теорема 11.1 имаме $I^* = I_*$. ♦

11.3. Последица (Риман). Нека функцијата $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ е ограничена. Тогаш, $f \in \mathbf{R}([a,b])$ ако и само ако за секој $\varepsilon > 0$ постои поделба π на $[a,b]$ таква што $S_\pi - s_\pi < \varepsilon$.

Доказ. Ако $f \in \mathbf{R}([a,b])$, тогаш од лема 10.8 и последица 11.2 следува $\lim\limits_{d(\pi)\to 0} S_\pi = I^* = I_* = \lim\limits_{d(\pi)\to 0} s_\pi$, т.е. $\lim\limits_{d(\pi)\to 0} (S_\pi - s_\pi) = 0$. Затоа, за секој $\varepsilon > 0$ постои поделба π на $[a,b]$ таква што $S_\pi - s_\pi < \varepsilon$.

Ако за секој $\varepsilon > 0$ постои поделба π на $[a,b]$ таква што $S_\pi - s_\pi < \varepsilon$, тогаш од неравенството (3) имаме $0 \le I^* - I_* < \varepsilon$, па од последица 11.2 следува $f \in \mathbf{R}([a,b])$. ♦

11.4. Последица. Ако функцијата $f \in \mathbf{R}([a,b])$ и s_π, S_π се нејзините суми на Дарбу, тогаш

$$\lim_{d(\pi)\to 0} s_\pi = \lim_{d(\pi)\to 0} S_\pi = \int_a^b f(x)dx . \tag{5}$$

Доказ. Ако функцијата $f \in \mathbf{R}([a,b])$, тогаш според теорема 11.1 е исполнет условот (1). При доказот на теорема 11.1 докажавме дека во тој случај е исполнет условот (4), кој заради точноста на равенството $I = \lim\limits_{d(\pi)\to 0} \sigma_\pi = \int_a^b f(x)dx$ се совпаѓа со условот (5). ♦

11.5. Теорема. Ако $f \in \mathbf{C}([a,b])$, тогаш $f \in \mathbf{R}([a,b])$.

Доказ. Ако $f \in \mathbf{C}([a,b])$, тогаш таа е ограничена и рамномерно непрекината на $[a,b]$. Според тоа, за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што за секои $x, x' \in [a,b]$ такви што $|x - x'| < \delta$ важи $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Нека $\pi = \{x_i\}_{i=0}^{k_\pi}$ е произволна поделба на интервалот $[a,b]$ со дијаметар $d(\pi) < \delta$. Тогаш, за секои точки x и x' кои припаѓаат на еден ист интервал од поделбата π, $x, x' \in [x_{i-1}, x_i]$ е исполнето неравенството

$$|x - x'| \le x_i - x_{i-1} = \Delta x_i < \delta ,$$

па затоа важи

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon .$$

Значи,

$$S_\pi - s_\pi = \sum_{i=1}^{k_\pi}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k_\pi}[\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x'\in[x_{i-1},x_i]} f(x')]\Delta x_i$$
$$= \sum_{i=1}^{k_\pi}\sup_{x,x'\in[x_{i-1},x_i]}[f(x)-f(x')]\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{k_\pi}\varepsilon\Delta x_i = \varepsilon\sum_{i=1}^{k_\pi}\Delta x_i = \varepsilon(b-a).$$

Од произволноста на ε следува дека $\lim\limits_{d(\pi)\to 0}(S_\pi - s_\pi) = 0$, па од теорема 11.1 следува $f \in \mathbf{R}([a,b])$. ♦

11.6. Пример. На интервалот $[a,b]$, $0 < a < b$ да ја разгледаме функцијата $f(x) = x^m$, $m \neq -1$, $m \in \mathbf{R}$. Оваа функција е непрекината на $[a,b]$, па од теорема 11.5 следува дека $f \in \mathbf{R}([a,b])$, што значи дека $\lim\limits_{d(\pi)\to 0} \sigma_\pi$ постои и не зависи од изборот на точките ξ_i. Да избереме поделба $\pi = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ на интервалот $[a,b]$ таква што должините на интервалите $[x_{i-1}, x_i]$ формираат геометриска прогресија и да земеме $\xi_i = x_{i-1}$. Тогаш,

$$x_i = x_0 q^i,\ i = 1,2,...,n\ , x_0 = a,\ x_n = b,\ q = \sqrt[n]{\tfrac{b}{a}},\ \xi_i = a\sqrt[n]{(\tfrac{b}{a})^{i-1}},$$
$$\Delta x_i = a\sqrt[n]{(\tfrac{b}{a})^{i-1}}(\sqrt[n]{\tfrac{b}{a}} - 1)$$

и

$$\sigma_\pi = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = a^{m+1}(\sqrt[n]{\tfrac{b}{a}} - 1)\sum_{i=1}^{n}(\tfrac{b}{a})^{\frac{(m+1)(i-1)}{n}} = (b^{m+1} - a^{m+1})\frac{\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1}{\sqrt[n]{\frac{b}{a}}^{m+1} - 1}. \tag{6}$$

Бидејќи $d(\pi) \to 0$ кога $n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1}{\sqrt[n]{\frac{b}{a}}^{m+1} - 1} = \frac{1}{m+1},$$

од равенството (6) добиваме

$$\int_a^b x^m dx = \lim_{d(\pi)\to 0}\sigma_\pi = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}. ♦$$

11.7. Теорема. Ако функцијата f е монотона на интервалот $[a,b]$, тогаш $f \in \mathbf{R}([a,b])$.

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека функцијата f монотоно расте на интервалот $[a,b]$. Тогаш, за секој $x \in [a,b]$ важи $f(a) \le f(x) \le f(b)$, па затоа функцијата f е ограничена на $[a,b]$. Од монотоноста на функцијата f следува дека за секоја поделба $\pi = \{x_i\}_{i=1}^{k_\pi}$ се точни равенствата

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_i), \qquad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_{i-1}), \qquad i=1,2,\dots,k_\pi .$$

Понатаму, од $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i \le d(\pi), \quad i=1,2,\dots,k_\pi$ и од $x_0 = a, \ x_{k_\pi} = b$ следува

$$\begin{aligned} S_\pi - s_\pi &= \sum_{i=1}^{k_\pi}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k_\pi}[f(x_i) - f(x_{i-1})]\Delta x_i \\ &\le [f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_{k_\pi}) - f(x_{k_\pi - 1})]d(\pi) \\ &= [f(b) - f(a)]d(\pi), \end{aligned}$$

т.е. $\lim\limits_{d(\pi)\to 0}(S_\pi - s_\pi) = 0$. Сега, од теорема 11.1 следува $f \in \mathbf{R}([a,b])$. ♦

11.8. Пример. Множеството $\mathbf{Q}\cap[0,1]$ е пребројливо па затоа неговите елементи можат да се запишат во низа $\{a_n\}_{n=1}^\infty$. Со помош на низите $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ и $p_n = \frac{1}{2^n}$, $n=1,2,\dots$ дефинираме функција $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ таква што

$$f(x) = \sum_{a_n \le x} p_n \text{, за секој } x\in[0,1],$$

каде се собираат само оние членови на низата $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ за чиј индекс важи $a_n \le x$. Ако $x_1, x_2 \in [0,1]$ и $x_1 < x_2$, тогаш постои a_n таков што $x_1 < a_m < x_2$, па затоа $f(x_2) - f(x_1) \ge p_m > 0$, што значи дека f монотоно расте на $[0,1]$. Конечно, од теорема 11.7 следува дека $f \in \mathbf{R}([0,1])$. ♦

12. ОСЦИЛАЦИЈА НА ФУНКЦИЈА

12.1. Во овој параграф ќе го воведеме поимот осцилација на функција. Притоа, за осцилацијата на функција ќе докажеме неколку основни својства.

Дефиниција. Ако $f: A\to\mathbf{R}$, тогаш

$$\omega(f;A) = \sup_{x,x'\in A}(f(x) - f(x')) \tag{1}$$

го нарекуваме *осцилација на функцијата* f *на множеството* A.

12.2. Лема. Нека $f: A\to\mathbf{R}$.

а) Ако $A_1 \subset A$, тогаш $\omega(f;A_1) \le \omega(f;A)$.

б) Ако $A', A'' \subset A$ и $A'\cap A'' \ne \varnothing$, тогаш

$$\omega(f;A'\cup A'') \le \omega(f;A') + \omega(f;A'').$$

Доказ. Непосредно следува од својствата на супремумот. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

12.3. Дефиниција. Ако $f: A \to \mathbf{R}$ и $x_0 \in A$, тогаш

$$\omega(f;x_0) = \inf_{A \cap U(x_0)} \omega(f; A \cap U(x_0)), \tag{2}$$

каде $U(x_0)$ е произволна околина на x_0, го нарекуваме *осцилација на функцијата* f *во точката* x_0.

12.4. Лема. Ако $f: A \to \mathbf{R}$ и $|f(x)| \leq C$, за секој $x \in A$, тогаш

$$\omega(f;x_0) \leq 2C \text{, за секој } x_0 \in A.$$

Доказ. Од (2), (1) и неравенството $f(x) - f(x') \leq |f(x)| + |f(x')|$ за секои $x, x' \in A$ следува

$$\begin{aligned}\omega(f;x_0) &= \inf_{A \cap U(x_0)} \omega(f; A \cap U(x_0)) = \inf_{A \cap U(x_0)} \sup_{x,x' \in A \cap U(x_0)} (f(x) - f(x')) \\ &\leq \inf_{A \cap U(x_0)} \sup_{x,x' \in A \cap U(x_0)} (|f(x)| + |f(x'|) \leq 2C,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

12.5. Лема. Функцијата $f: A \to \mathbf{R}$ е непрекината во точката $x_0 \in A$ ако и само ако

$$\omega(f;x_0) = 0. \tag{3}$$

Доказ. Нека функцијата f е непрекината во точката x_0 и $\varepsilon > 0$ е дадено. Од теорема III 4.10 следува дека постои $\delta > 0$ таков да за секои $x, x' \in A \cap U(x_0;\delta)$ важи $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Според тоа,

$$\begin{aligned}\omega(f;x_0) &= \inf_{A \cap U(x_0)} \omega(f; A \cap U(x_0)) \leq \omega(f; A \cap U(x_0;\delta)) \\ &= \sup_{x,x' \in A \cap U(x_0;\delta)} (f(x) - f(x')) \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Конечно, од произволноста на ε следува равенството (3).

Нека е исполнето равенството (3). Тогаш, за секој $\varepsilon > 0$ постои околина $U(x_0)$ на точката x_0 таква што $\omega(f; A \cap U(x_0)) < \varepsilon$. За околината $U(x_0)$ постои $\delta > 0$ таков што $U(x_0;\delta) \subset U(x_0)$. Сега, за секој $x \in U(x_0;\delta)$ важи

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \omega(f; A \cap U(x_0;\delta)) \leq \omega(f; A \cap U(x_0)) < \varepsilon,$$

т.е. функцијата f е непрекината во точката x_0. ♦

12.6. Во натамошните разгледувања важна улога имаат множествата од видот $A_\varepsilon = \{x \in A \mid \omega(f;x) \geq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.

Јасно, ако $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, тогаш од неравенството $\omega(f;x) \geq \varepsilon_1$ следува $\omega(f;x) \geq \varepsilon_2$, па затоа $A_{\varepsilon_1} \subset A_{\varepsilon_2}$.

12.7. Последица. Ако A_0 е множеството точки на прекин на функцијата $f : A \to \mathbf{R}$, тогаш $A_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_{\frac{1}{i}}$.

Доказ. Ако $x_0 \in A_0$, тогаш од лема 12.5 следува дека $\varepsilon = \omega(f; x_0) > 0$, па затоа $x_0 \in A_\varepsilon$. Според тоа, $A_0 = \bigcup\limits_{\varepsilon>0} A_\varepsilon$. Јасно, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_{\frac{1}{i}} \subset \bigcup\limits_{\varepsilon>0} A_\varepsilon$ бидејќи секое множество $A_{\frac{1}{i}}$ од левата страна се јавува и на десната страна при $\varepsilon = \frac{1}{i}$. Од друга страна, за секој $\varepsilon > 0$ постои $i \in \mathbf{N}$ таков што $\frac{1}{i} < \varepsilon$. Сега од 12.6 следува $A_\varepsilon \subset A_{\frac{1}{i}}$, па затоа $\bigcup\limits_{\varepsilon>0} A_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_{\frac{1}{i}}$. Според тоа, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_{\frac{1}{i}} = \bigcup\limits_{\varepsilon>0} A_\varepsilon = A_0$. ♦

12.8. Теорема. Нека $f : A \to \mathbf{R}$ и A е компактно множество. Тогаш, за секој $\varepsilon > 0$ множеството A_ε е компактно.

Доказ. Бидејќи за секој $\varepsilon > 0$ важи $A_\varepsilon \subset A$ од лема I.25.7 следува дека доволно е да докажеме дека множеството A_ε е затворено.

Нека x_0 е точка на натрупување за множеството A_ε и $U(x_0)$ е произволна околина на x_0. За околината $U(x_0)$ постои $\delta > 0$ таков, што $U(x_0;\delta) \subset U(x_0)$. Бидејќи x_0 е точка на натрупување, за A_ε постои точка $x_\delta \in A_\varepsilon$ таква, што

$$x_\delta \in U(x_0;\delta) \cap A_\varepsilon \subset U(x_0;\delta) \cap A \subset U(x_0) \cap A.$$

Да земеме $\delta_1 = \min\{|x_0 - x_\delta|, \delta - |x_0 - x_\delta|\}$. Тогаш,

$$U(x_\delta;\delta_1) \cap A \subset U(x_0;\delta) \cap A \subset U(x_0) \cap A,$$

па од својствата на супремумот и инфимумот и фактот дека $x_\delta \in A_\varepsilon$ следува

$$\begin{aligned}
\omega(f;U(x_0)\cap A) &= \sup_{x,x' \in U(x_0)\cap A} (f(x) - f(x')\\
&\geq \sup_{x,x' \in U(x_0;\delta)\cap A} (f(x) - f(x')\\
&\geq \sup_{x,x' \in U(x_\delta;\delta_1)\cap A} (f(x) - f(x'))\\
&= \omega(f;U(x_\delta;\delta_1)\cap A)\\
&\geq \inf_{U(x_\delta)\cap A} \omega(f;U(x_\delta)\cap A)\\
&= \omega(f;x_\delta) \geq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ако во неравенството $\omega(f;U(x_0)\cap A) \geq \varepsilon$земеме инфимум по сите множества $U(x_0)\cap A$, добиваме

$$\omega(f;x_0) = \inf_{U(x_0)\cap A} \omega(f;U(x_0)\cap A) \geq \varepsilon.$$

Значи, $x_0 \in A_\varepsilon$, па од теорема I.22.4 следува дека множеството A_ε е затворено. ♦

12.9. Теорема. Ако $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ и постои $\varepsilon>0$ таков, што за секој $x\in[a,b]$ важи

$$\omega(f;x)<\varepsilon, \tag{4}$$

тогаш постои поделба $\pi=\{x_i\}_{i=0}^{k_\pi}$ на $[a,b]$ таква, што за секој $i=1,2,...,k_\pi$ е исполнето неравенството

$$\omega(f;[x_{i-1},x_i])<\varepsilon. \tag{5}$$

Доказ. Од условот (4) следува дека за секој $t\in[a,b]$ постои околина $U(t;\delta_t)$ таква, што $\omega(f;U(t;\delta_t)\cap[a,b])<\varepsilon$. Фамилијата

$$U(t;\frac{\delta_t}{2}),\, t\in[a,b] \tag{6}$$

е отворена покривка на $[a,b]$ и притоа, согласно со лема 12.2, за множеството $\Delta_t=[t-\frac{\delta_t}{2},t+\frac{\delta_t}{2}]\cap[a,b]$ важи

$$\omega(f;\Delta_t)\le\omega(f;U(t;\delta_t)\cap[a,b])<\varepsilon. \tag{7}$$

Покривката (6) содржи конечна потпокривка $U(t_i;\frac{\delta_{t_i}}{2}), i=1,2,...,n$ на $[a,b]$. Да ги означиме краевите на интервалите $U(t_i;\frac{\delta_{t_i}}{2})\cap[a,b]$ со α_i и β_i, $i=1,2,...,n$.

Нека $\pi=\{x_i\}_{i=0}^{k_\pi}$ е поделбата на $[a,b]$ составена од точките α_i и β_i, $i=1,2,...,n$. Секој интервал $[x_{i-1},x_i]$ од оваа поделба го има еден од следниве видови $[\alpha_j,\beta_k],[\alpha_j,\alpha_k],[\beta_j,\alpha_k],[\beta_j,\beta_k]$, $k=1,...,n$, $j=1,...,n$ и исцело се содржи во еден од интервалите $\Delta_{t_i}, i=1,2,...,n$. Според тоа, за секој интервал $[x_{i-1},x_i]$ постои интервал Δ_{j_i}, $1\le j_i\le n$ таков, што $[x_{i-1},x_i]\subset\Delta_{j_i}$. Сега, од лема 12.2 и од (7) следува

$$\omega(f;[x_{i-1},x_i])\le\omega(f;\Delta_{j_i})<\varepsilon,$$

што и требаше да се докаже. ♦

13. КРИТЕРИУМ НА ЛЕБЕГ

13.1. Множества со Лебегова мера нула. Еден од наједноставните критериуми за интеграбилност според Риман е критериумот на Лебег. Пред да преминеме на разгледување на овој критериум, ќе ги разгледаме множествата со Лебегова мера нула и ќе докажеме едно својство за овие множества кое ни е потребно во доказот на критериумот на Лебег.

Збирот на бесконечен број собироци подетално ќе го разгледаме во глава VI. Овде само да забележиме дека, ако $a_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, тогаш *збир* ја нарекуваме конечната или бесконечната граница $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ и ја означуваме со $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Бидејќи низата $\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно расте, границата $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ постои и таа е или конечна или $+\infty$. Значи, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

Дефиниција. За множеството A ќе велиме дека е *множество со Лебегова мера нула,* ако за секој $\varepsilon > 0$ постои отворена покривка на A од конечна или пребројлива фамилија отворени интервали чиј збир на должини е помал од ε.

Јасно, секое подмножество на множество со Лебегова мера нула е множество со Лебегова мера нула.

13.2. Пример. а) Секое конечно множество е множество со Лебегова мера нула.

Навистина, ако $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $\varepsilon > 0$, тогаш фамилијата интервали $(a_i - \frac{\varepsilon}{3n}, a_i + \frac{\varepsilon}{3n}), i = 1, 2, \ldots, n$ е отворена покривка на A и нивните должина се $m_i = \frac{2\varepsilon}{3n}, i = 1, 2, \ldots, n$, соодветно. Според тоа, збирот на должините на интервалите е еднаков на

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = n \cdot \frac{2\varepsilon}{3n} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

т.е. A е множество со Лебегова мера нула.

б) Секое пребројливо множество е множество со Лебегова мера нула.

Навистина, нека $A = \{a_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ е произволно пребројливо множество и $\varepsilon > 0$ е дадено. Очигледно, фамилијата отворени интервали $(a_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}, a_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+2}})$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ го покрива множеството A и нивните должини се $m_i = \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, i = 1, 2, 3, \ldots$, соодветно. Според тоа, збирот на должините на интервалите е еднаков на $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m_i = \frac{\varepsilon}{4} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, т.е. A е множество со Лебегова мера нула. ♦

13.3. Лема. Унија на најмногу пребројлива фамилија множества со Лебегова мера нула е множество со Лебегова мера нула.

Доказ. Нека $A_i, i = 1, 2, \ldots$ е пребројлива фамилија множества со Лебегова мера нула, $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ и $\varepsilon > 0$ е дадено. За секој $i = 1, 2, 3, \ldots$, множеството A_i го покриваме со конечно или пребројливо многу отворени интервали чиј збир на должини е помал од $\frac{\varepsilon}{2^i}$. Тогаш, множеството A го покриваме со преброива фамилија отворени интервали (теорема I.13.7) чиј збир на должини е помал од $\sum\limits_{i=}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i}=\varepsilon$. Според тоа множеството A е множество со Лебегова мера нула. ♦

13.4. Теорема (Лебег). Нека функцијата $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ е ограничена. Тогаш, $f\in\mathbf{R}([a,b])$ ако и само ако множеството од нејзините точки на прекин е множество со Лебегова мера нула.

Доказ. *Условот е доволен.* Нека $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ е ограничена функција, т.е. постои $C>0$ таков, што $|f(x)|\leq C$, за секој $x\in[a,b]$ и нека A_0 е множеството точки на прекин на функцијата f кое по претпоставка има Лебегова мера нула. Ако $A_0=\varnothing$, тогаш тврдењето следува од теорема 11.5.

Нека $A_0\neq\varnothing$. Според последица 12.7 постои $\varepsilon>0$ таков, што множеството $A_\varepsilon=\{x\in[a,b]\,|\,\omega(f;x)\geq\varepsilon\}\neq\varnothing$. Од $A_\varepsilon\subset A_0$, следува дека множеството A_ε има Лебегова мера нула, т.е. за секој $\delta>0$ постои најмногу пребројлива фамилија отворени интервали која го покрива A_ε и чиј збир на должини е помал од δ. Според теорема 12.8, множеството A_ε е компактно, што значи дека постои конечна фамилија отворени интервали која го покрива A_ε и чиј збир на должини е помал δ.

Нека $\varepsilon>0$ и да земеме $\delta=\frac{\varepsilon}{4C}$. Тогаш, постои конечна фамилија отворени интервали $(a_i,b_i), i=1,2,...,n$ таква, што $A_{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\frac{\varepsilon}{4C}$. Унијата на интервалите $[a_i,b_i], i=1,2,...,n$ може да се запише како конечна унија на заемно дисјунктни интервали $[\alpha_j,\beta_j],\ j=1,2,...,m$ чии крајни точки се или a_i или b_i, $i=1,2,...,n$ и притоа важи $\sum\limits_{j=1}^{m}(\beta_j-\alpha_j)\leq\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\frac{\varepsilon}{4C}$. Од последното не-равенство и од неравенството $\sup\limits_{x,x'\in[\alpha_j,\beta_j]}(f(x)-f(x')\leq 2C$ добиваме

$$\sum_{j=1}^{m}(\beta_j-\alpha_j)\sup_{x,x'\in[\alpha_j,\beta_j]}(f(x)-f(x')\leq 2C\sum_{j=1}^{m}(\beta_j-\alpha_j)<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Множеството $[a,b]\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$ е унија од конечно многу затворени интервали $[c_j,d_j],\ j=1,...,p$ и од $A_{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$ следува дека за секој $x\in[c_j,d_j]$

важи $\omega(f;x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Сега, од теорема 12.9 следува дека за секој интервал $[c_j, d_j]$, $j = 1,2,...,p$ постои поделба $\pi_j = \{t_{k_j}\}_{k_j=0}^{k_{\pi_j}}$ таква, што

$$\sum_{k_j=1}^{k_{\pi_j}} \omega(f;[t_{k_{j-1}}, t_{k_j}])(t_{k_j} - t_{k_{j-1}}) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(d_j - c_j) . \qquad (2)$$

Нека $\pi = \{x_l\}_{l=1}^{l_\pi}$ е поделбата на интервалот $[a,b]$ која се состои од сите точки α_i, β_i, $i = 1,2,...,m$, $t_{k_j}, k_j = 1,2,...,k_{\pi_j}$, $j = 1,2,...,p$. Тогаш, од (1) и (2) следува

$$\begin{aligned}
S_\pi - s_\pi &= \sum_{l=1}^{l_\pi} \sup_{x,x' \in [x_{l-1}, x_l]} (f(x) - f(x'))\Delta x_l \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sup_{x,x' \in [\alpha_i, \beta_l]} (f(x) - f(x'))(\beta_i - \alpha_i) + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k_j=1}^{k_{\pi_j}} \sup_{x,x' \in [t_{k_j-1}, t_{k_j}]} (f(x) - f(x'))(t_{k_j} - t_{k_j-1}) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k_j=1}^{k_{\pi_j}} \omega(f;[t_{k_j-1}, t_{k_j}])(t_{k_j} - t_{k_j-1}) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^{p} (d_j - c_j) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon
\end{aligned}$$

па од последица 11.3 следува дека $g \in \mathbf{R}([a,b])$.

Условот е потребен. Нека $f \in \mathbf{R}([a,b])$ и $\varepsilon > 0$. Да го разгледаме множеството $A_\sigma = \{x \in [a,b] \mid \omega(f;x) \geq \sigma\}$, $\sigma > 0$. Според последица 11.3 постои поделба $\pi = \{x_i\}_{i=1}^{k_\pi}$ на $[a,b]$ таква, што $S_\pi - s_\pi < \varepsilon\sigma$.

Секоја точка на множеството A_σ или е внатрешна точка за интервалот $[x_{i-1}, x_i]$ или е негова крајна точка. Точките од A_σ кои се крајни за интервалите $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,...,k_\pi$ се конечно многу, па затоа Лебеговата мера на множеството е нула. Ако $t \in A_\sigma$ и t е внатрешна за интервалот $[x_{i-1}, x_i]$, тогаш земаме околина $U(t;\delta) \subset [x_{i-1}, x_i]$. Ставаме

$$M_\delta = \sup_{x \in U(t;\delta)} f(x) \text{ и } m_\delta = \inf_{x \in U(t;\delta)} f(x)$$

и добиваме

$$M_i - m_i \geq M_\delta - m_\delta \geq \omega(f;t) \geq \sigma .$$

Од последното равенство и од равенството $S_\pi - s_\pi < \varepsilon\sigma$ добиваме

$$\varepsilon\sigma > S_\pi - s_\pi = \sum_{i=1}^{k_\pi}(M_i - m_i)\Delta x_i \geq \sum{}'(M_i - m_i)\Delta x_i \geq \sigma \sum{}'\Delta x_i \tag{3}$$

каде сумирањето во $\sum{}'$ е извршено само по оние сегменти кои како внатрешна точка содржат најмалку една точка од A_σ. Ако во (3) скратиме со $\sigma > 0$, добиваме дека $\varepsilon > \sum{}'\Delta x_i$, што според дефиниција 13.1 значи дека множеството точки од A_σ кои се внатрешни за интервалите $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,...,k_\pi$ има Лебегова мера нула. Сега од лема 13.3 следува дека множеството A_σ има Лебегова мера нула.

Конечно, за секој $i = 1,2,...$ множеството $A_{\frac{1}{i}}$ има Лебегова мера нула. Од лема 12.7 имаме $A_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{\frac{1}{i}}$, т.е. тоа е пребројлива унија на множества со Лебегова мера нула, па од лема 13.3 следува дека A_0 има Лебегова мера нула. ♦

13.5. Пример. *Римановата функција*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ако } x \in \mathbf{Q},\, x = \frac{m}{n},\ \text{НЗД}(m,n) = 1 \\ 0, & \text{ако } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

е непрекината во секоја ирационална точка, а е прекината во секоја рационална точка. Бидејќи множеството рационални броеви е пребројливо, добиваме дека Римановата функција на секој интервал $[a,b]$ има пребројливо многу прекини. Според пример 13.2 множеството прекини на оваа функција е множество со Лебегова мера нула, па од теорема 13.4 следува дека $f \in \mathbf{R}([a,b])$, за секој интервал $[a,b]$. ♦

13.6. Лема. Ако важи $f \in \mathbf{R}([a,b])$, $f([a,b]) \subset [c,d]$ и $g \in \mathbf{C}([c,d])$, тогаш $g \circ f \in \mathbf{R}([a,b])$.

Доказ. Композицијата $g \circ f : [a,b] \to \mathbf{R}$ е определена и непрекината во сите точки на интервалот $[a,b]$ во кои е определена и непрекината функцијата f. Значи, множеството прекини на функцијата $g \circ f$ е множество со Лебегова мера нула, па затоа $g \circ f \in \mathbf{R}([a,b])$. ♦

13.7. Забелешка. Функцијата $g(x) =| \text{sgn}(x) |$ е еднаква на 1 за $x \neq 0$ и на нула за $x = 0$. Со непосредна проверка се покажува дека ако на интервалот $[1,2]$ функцијата f е функцијата на Риман, тогаш композицијата $g \circ f$ е функцијата на Дирихле, за која во примерот 9.7 б) докажавме дека не е интеграбилна според Риман. Како што гледаме, функцијата g има само една точка на прекин и функцијата $g \circ f$ не е интеграбилна. Значи, условот за непрекинатост на функцијата g во лема 13.6 не може да се изостави.

13.8. Забелешка. Точноста на теоремите 11.5 и 11.7 непосредно следува од теоремата на Лебег. Имено, непрекината функција на $[a,b]$ нема точки на прекин, а монотона функција има најмногу пребројливо многу точки на прекин (теорема III 9.5), па затоа нивните множества точки на прекин се множества со Лебегова мера нула (пример 13.2). Според тоа,

a) ако $f \in \mathbf{C}([a,b])$, тогаш $f \in \mathbf{R}([a,b])$ и

b) ако g е монотона на $[a,b]$, тогаш $g \in \mathbf{R}([a,b])$.

14. СВОЈСТВА НА ИНТЕГРАБИЛНИТЕ ФУНКЦИИ

14.1. Лема. Ако функцијата $f \in \mathbf{R}([a,b])$ и $[c,d] \subset [a,b]$, тогаш $f \in \mathbf{R}([c,d])$.

Доказ. Од $f \in \mathbf{R}([a,b])$ следува дека f е ограничена на $[a,b]$ и множеството нејзини прекини A_0 е множество со Лебегова мера нула (теорема 13.4). Според тоа, функцијата f е ограничена на интервалот $[c,d] \subset [a,b]$ и множеството нејзини прекини на интервалот $[c,d]$ кое е подмножество од A_0, е множество со Лебегова мера нула. Сега од теорема 13.4 следува дека $f \in \mathbf{R}([c,d])$. ♦

14.2. Теорема. Ако $f \in \mathbf{R}([a,b])$ и $a < c < b$, тогаш

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx . \tag{1}$$

Доказ. Ако π_a^c и π_c^b се поделби на интервалите $[a,c]$ и $[b,c]$, соодветно, тогаш $\pi = \pi_a^c \cup \pi_c^b$ е поделба на $[a,b]$ и притоа важи

$$d(\pi_a^c) \le d(\pi), \qquad d(\pi_c^b) \le d(\pi) . \tag{2}$$

Нека $\sigma_{\pi_a^c}$ и $\sigma_{\pi_c^b}$ се произволни интегрални Риманови суми на функцијата f кои соодветствуваат на поделбите π_a^c и π_c^b. Тогаш,

$$\sigma_\pi = \sigma_{\pi_a^c} + \sigma_{\pi_c^b} \tag{3}$$

е интегрална Риманова сума за функцијата f на интервалот $[a,b]$. Според теорема 14.1 од $f \in \mathbf{R}([a,b])$ следува дека $f \in \mathbf{R}([a,c])$ и $f \in \mathbf{R}([c,b])$. Од условот (2) следува дека кога $d(\pi) \to 0$, интегралните суми $\sigma_\pi, \sigma_{\pi_a^c}$ и $\sigma_{\pi_c^b}$ имаат конечни граници и дека

$$\lim_{d(\pi)\to 0} \sigma_\pi = \int_a^b f(x)dx, \qquad \lim_{d(\pi_a^c)\to 0} \sigma_{\pi_a^c} = \int_a^c f(x)dx, \qquad \lim_{d(\pi_c^b)\to 0} \sigma_{\pi_c^b} = \int_c^b f(x)dx .$$

Конечно, ако во равенството (3) преминеме кон граница ја добиваме формулата (1). ♦

14.3. Забелешка. Нека функцијата f е интеграбилна на интервалите $[a,c]$ и $[c,b]$, $a<c<b$. Од теорема 13.4 следува дека множествата од нејзините точки на прекин на интервалите $[a,c]$ и $[c,b]$ се множества со Лебегова мера нула. Според тоа, множеството точки на прекин на функцијата f на интервалот $[a,b]$ е множество со Лебегова мера нула. Но, функцијата f е ограничена на интервалот $[a,b]$, па од теорема 13.4 следува дека функцијата f е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ и согласно со теорема 14.2 важи формулата (1).

Од ова својство следува интеграбилноста на таканаречените по делови непрекинати на интервал функции.

Функцијата f ја нарекуваме *по делови непрекината на интервал* ако таа на интервалот има само конечно многу точки на прекин од прв ред. Притоа, функцијата f може, но не мора, да биде определена на краевите на интервалот.

Според тоа, функцијата f е непрекината по делови на интервалот $[a,b]$, ако постои поделба $\pi=\{x_i\}_{i=0}^{k_\pi}$ на $[a,b]$ таква, што функцијата f е непрекината на секој интервал (x_{i-1},x_i), $i=1,...,k_\pi$ и постојат конечни граници $f(x_{i-1}+0)$ и $f(x_i-0)$. Притоа, во точките x_i функцијата не мора да биде определена.

Ако ставиме

$$f_i(x)=\begin{cases} f(x_{i-1}+0), & x=x_{i-1} \\ f(x), & x_{i-1}<x<x_i \\ f(x_i-0), & x=x_i, \end{cases}$$

тогаш функцијата f_i е непрекината на интервалот $[x_{i-1},x_i]$. Според тоа, за $i=1,...,k_\pi$ функцијата f_i е интеграбилна на интервалот $[x_{i-1},x_i]$. Лесно се докажува дека оттука следува интеграбилноста на функцијата f на интервалот $[a,b]$ и притоа дека важи формулата

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{k_\pi}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)dx.$$

14.4. Теорема. Ако $f,g\in\mathbf{R}([a,b])$, тогаш $\lambda f+\mu g\in\mathbf{R}([a,b])$ за секои $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ и притоа важи

$$\int_a^b[\lambda f(x)+\mu g(x)]dx=\lambda\int_a^b f(x)dx+\mu\int_a^b g(x)dx. \tag{4}$$

Доказ. За секоја поделба $\pi=\{x_i\}_{i=0}^{k_\pi}$ на $[a,b]$ и за секои точки $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $i=1,...,k_\pi$ имаме

$$\begin{aligned}\sigma_\pi(\lambda f+\mu g) &= \sum_{i=1}^{k_\pi}[\lambda f(\xi_i)+\mu g(\xi_i)]\Delta x_i \\ &= \lambda\sum_{i=1}^{k_\pi} f(\xi_i)\Delta x_i + \mu\sum_{i=1}^{k_\pi} g(\xi_i)\Delta x_i \ . \\ &= \lambda\sigma_\pi(f)+\mu\sigma_\pi(g).\end{aligned}$$

Но, $f,g\in \mathbf{R}([a,b])$, па затоа постои границата на десната страна на последното равенство кога $d(\pi)\to 0$. Според тоа, постои и границата на левата страна $\lim\limits_{d(x)\to 0}\sigma_\pi(\lambda f+\mu g)$, што значи дека $\lambda f+\mu g\in \mathbf{R}([a,b])$. Ако во последното равенство преминеме кон граница кога $d(\pi)\to 0$ ќе ја добиеме формулата (4). ♦

14.5. Пред да преминеме на разгледување на нови својства на функциите интеграбилни според Риман ќе дадеме уште еден критериум за интеграбилност според Риман.

За функцијата $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ дефинираме ненегативни функции

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\} \text{ и } f^-(x)=-\min\{f(x),0\}.$$

Лесно се покажува дека $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$, за секој $x\in[a,b]$.

Теорема. Ако $f:[a,b]\to \mathbf{R}$, тогаш $f\in \mathbf{R}([a,b])$ ако и само ако

$$f^+,f^-\in \mathbf{R}([a,b]).$$

Доказ. Ако $f^+,f^-\in \mathbf{R}([a,b])$, тогаш од $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$, за секој $x\in[a,b]$ и од теорема 14.4 следува дека $f\in \mathbf{R}([a,b])$.

Обратното тврдење следува од теорема 13.4 и фактот дека множествата точки на прекин на функциите f^+ и f^- се подмножества од множеството точки на прекин на функцијата f, (зошто?). ♦

14.6. Теорема. Ако $f\in \mathbf{R}([a,b])$ и $f(x)\geq 0$, за секој $x\in[a,b]$, тогаш

$$\int_a^b f(x)dx\geq 0\ . \tag{5}$$

Доказ. Ако $f(x)\geq 0$, за секој $x\in[a,b]$, тогаш за секоја поделба $\pi=\{x_i\}_{i=0}^{k_\pi}$ на $[a,b]$ важи

$$\sigma_\pi=\sum_{i=1}^{k_\pi} f(\xi_i)\Delta x_i\geq 0,\quad \xi_i\in[x_{i-1},x_i]\ .$$

Ако во последното неравенство преминеме кон граница кога $d(\pi)\to 0$ го добиваме неравенството (5). ♦

14.7. Последица. Ако функциите $f, g \in \mathbf{R}([a,b])$ и $f(x) \geq g(x)$, за секој $x \in [a,b]$, тогаш

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \,. \tag{6}$$

Доказ. Од $f(x) \geq g(x)$, за секој $x \in [a,b]$ следува $f(x) - g(x) \geq 0$, за секој $x \in [a,b]$. Сега од теоремите 14.4 и 14.6 добиваме

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \geq 0$$

т.е. важи неравенството (6). ♦

14.8. Теорема. Ако $f \in \mathbf{R}([a,b])$, $f(x) \geq 0$, за секој $x \in [a,b]$, и ако постои точка $c \in [a,b]$, во која функцијата f е непрекината и $f(c) > 0$, тогаш $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Доказ. Ако функцијата f е непрекината во точката $c \in [a,b]$ и $f(c) > 0$, тогаш согласно со лема III.6.2 постои интервал $[\alpha, \beta]$, таков што $c \in [\alpha, \beta] \subset [a,b]$, $\alpha \neq \beta$ и за секоја точка $x \in [\alpha, \beta]$ е исполнето неравенството

$$f(x) \geq \tfrac{f(c)}{2} \,. \tag{7}$$

Тогаш, од својствата на определениот интеграл и од неравенството (7) имаме

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \tfrac{f(c)}{2} \int_\alpha^\beta dx = \tfrac{f(c)}{2}[\beta - \alpha] > 0. \; ♦$$

14.9. Пример. Докажете дека $\int_k^{k+2} \tfrac{1}{x} dx < \tfrac{2}{k}$ за секој $k > 0$.

Решение. Имаме

$$\int_k^{k+2} \tfrac{1}{x} dx = \int_k^{k+1} \tfrac{1}{x} dx + \int_{k+1}^{k+2} \tfrac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \tfrac{1}{k} dx + \int_{k+1}^{k+2} \tfrac{1}{k+1} dx = \tfrac{1}{k} \int_k^{k+1} dx + \tfrac{1}{k+1} \int_{k+1}^{k+2} dx = \tfrac{1}{k} + \tfrac{1}{k+1} < \tfrac{2}{k}$$

. ♦

14.10. Теорема. Ако $f \in \mathbf{R}([a,b])$, тогаш $|f| \in \mathbf{R}([a,b])$ и притоа важи

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \,. \tag{8}$$

Доказ. За функцијата $g(x)=|x|$ важи $g\in\mathbf{C}([a,b])$ и бидејќи $f\in\mathbf{R}([a,b])$, од лема 13.6 следува дека $|f|=g\circ f\in\mathbf{R}([a,b])$.

За секој $x\in[a,b]$ важи

$$-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|.$$

Од последните неравенства и од последица 14.7 следуваат неравенствата

$$-\int_a^b|f(x)|\,dx\leq\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b|f(x)|\,dx$$

кои се еквивалентни на неравенството (8). ♦

14.11. Последица. Ако $f\in\mathbf{R}([a,b])$ и $p>0$, тогаш $|f|^p\in\mathbf{R}([a,b])$.

Доказ. Нека $f\in\mathbf{R}([a,b])$. Од теорема 14.10 имаме $|f|\in\mathbf{R}([a,b])$. Но, функцијата $g(x)=x^p$, $p>0$ е непрекината на $[0,+\infty)$, па затоа од лема 13.6 следува дека $|f|^p=g\circ f\in\mathbf{R}([a,b])$. ♦

14.12. Теорема. Ако $f,g\in\mathbf{R}([a,b])$, тогаш $fg\in\mathbf{R}([a,b])$.

Доказ. Нека $f,g\in\mathbf{R}([a,b])$. Од теорема 14.4 следува

$$f+g\in\mathbf{R}([a,b])\text{ и }f-g\in\mathbf{R}([a,b]).$$

Сега, од последица 14.11 следува $(f+g)^2\in\mathbf{R}([a,b])$ и $(f-g)^2\in\mathbf{R}([a,b])$, од што со повторна примена на теорема 14.4 добиваме

$$fg=\tfrac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4}\in\mathbf{R}([a,b]).\ ♦$$

14.13. Пример. а) (неравенство на Холдер). Докажете од $f,g\in\mathbf{R}([a,b])$ и $p,q>1$ се такви што $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, следува

$$\int_a^b|f(x)g(x)|\,dx\leq[\int_a^b|f(x)|^p\,dx]^{1/p}[\int_a^b|f(x)|^q\,dx]^{1/q}.\qquad(12)$$

б) (Неравенство на Минковски). Докажете дека ако $p>1$ и $f,g\in\mathbf{R}([a,b])$, тогаш

$$[\int_a^b|f(x)+g(x)|^p\,dx]^{1/p}\leq[\int_a^b|f(x)|^p\,dx]^{1/p}+[\int_a^b|g(x)|^p\,dx]^{1/p}.\qquad(13)$$

Решение. Од теоремите 14.4 и 14.12 и последица 14.11 следува дека постојат интегралите во неравенствата (12) и (13).

а) Да означиме

$$A=[\int_a^b |f(x)|^p\ dx]^{1/p},\ B=[\int_a^b |f(x)|^q\ dx]^{1/q}.$$

Во неравенството на Јанг, пример IV 15.11, $ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},\ a,b\ge 0$ за секој $x\in[a,b]$ ставаме $a=\frac{|f(x)|}{A},\ b=\frac{|g(x)|}{B}$ и добиваме дека за секој $x\in[a,b]$ важи

$$\frac{|f(x)g(x)|}{AB}\le \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{A^p}+\frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{B^q}.$$

Од последното неравенство и од последица 14.7 го добиваме неравенството

$$\frac{1}{AB}\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \frac{1}{pA^p}\int_a^b |f(x)|^p\ dx+\frac{1}{qB^q}\int_a^b |g(x)|^q\ dx=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

кое е еквивалентно на неравенството (12).

б) Наоѓаме $q>1$ таков што $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Од својствата на апсолутната вредност и од последица 14.7 следува неравенството

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)+g(x)|^{\,p}dx &= \int_a^b |f(x)+g(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{\,p-1}dx\\ &\le \int_a^b |f(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{\,p-1}dx+\int_a^b |g(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{\,p-1}dx.\end{aligned}$$

Ако на интегралите на десната страна од последното неравенство го примениме неравенството на Холдер и земеме предвид дека $q(p-1)=p$, го добиваме неравенството

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)+g(x)|^{\,p}dx &\le \{[\int_a^b |f(x)|^{\,p}dx]^{1/p}+[\int_a^b |g(x)|^{\,p}dx]^{1/p}\}[\int_a^b |f(x)+g(x)|^{\,q(p-1)}dx]^{1/q}\\ &= \{[\int_a^b |f(x)|^{\,p}dx]^{1/p}+[\int_a^b |g(x)|^{\,p}dx]^{1/p}\}[\int_a^b |f(x)+g(x)|^{\,p}dx]^{1/q}.\end{aligned}$$

Ако во последното неравенство поделиме со $[\int_a^b |f(x)+g(x)|^{\,p}dx]^{1/q}$ и земеме предвид дека $\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}$, го добиваме неравенството (13). ♦

14.14. Забелешка. Ако во неравенството на Холдер ставиме $p=q=2$, го добиваме неравенството на *Коши-Буњаковски-Шварц*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le (\int_a^b |f(x)|^2\ dx)^{1/2}\bullet(\int_a^b |g(x)|^2\ dx)^{1/2}.$$

14.15. Забелешка. Во теорема 14.12 докажавме дека, ако $f,g\in\mathbf{R}([a,b])$, тогаш $fg\in\mathbf{R}([a,b])$. Природно е да се запрашаме дали во општ случај од $f,g\in\mathbf{R}([a,b])$ следува $\frac{f}{g}\in\mathbf{R}([a,b])$. Согласно со теорема 14.12 доволно е да дадеме одговор на прашањето дали во општ случај од $g\in\mathbf{R}([a,b])$ следува $\frac{1}{g}\in\mathbf{R}([a,b])$. Одговорот на последното прашање е негативен, што може да се види од следниов пример.

Функцијата

$$g(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,1]\\ 1, & x=0\end{cases}$$

е интеграбилна според Риман на $[0,1]$. Меѓутоа, функцијата $\frac{1}{g}$ не е ограничена на $[0,1]$, па од теорема 9.6 следува дека $\frac{1}{g}$ не е интеграбилна според Риман на интервалот $[0,1]$.

Во врска со претходните разгледувања точна е следнава теорема.

Теорема. Ако $f,g\in\mathbf{R}([a,b])$ и постои $\delta>0$ таков што за секој $x\in[a,b]$ важи $|\,g(x)|\geq\delta>0$, тогаш $\frac{f}{g}\in\mathbf{R}([a,b])$.

Доказ. Согласно со теорема 14.12 доволно е да докажеме дека $\frac{1}{g}\in\mathbf{R}([a,b])$. Од $|\,g(x)|\geq\delta>0$ за секој $x\in[a,b]$ следува дека $\frac{1}{|g(x)|}\leq\frac{1}{\delta}$ за секој $x\in[a,b]$, па затоа

$$|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(t)}|\leq\frac{|g(x)-g(t)|}{\delta^2}$$

за секои $x,t\in[a,b]$.

Нека $\varepsilon>0$. Бидејќи $g\in\mathbf{R}([a,b])$ од последица 11.3 следува дека постои поделба $\pi=\{x_i\}_{i=1}^{k_\pi}$ таква што

$$\sum_{i=1}^{k_\pi}\sup_{x,x'\in[x_{i-1},x_i]}(g(x)-g(x'))\Delta x_i<\varepsilon\delta^2.$$

Понатаму, за оваа поделба имаме

$$\begin{aligned}S_\pi-s_\pi&=\sum_{i=1}^{k_\pi}\sup_{x,x'\in[x_{i-1},x_i]}(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x')})\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k_\pi}\sup_{x,x'\in[x_{i-1},x_i]}|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x')}|\,\Delta x_i\\&\leq\frac{1}{\delta^2}\sum_{i=1}^{k_\pi}\sup_{x,x'\in[x_{i-1},x_i]}|\,g(x)-g(x')\,|\,\Delta x_i=\frac{1}{\delta^2}\sum_{i=1}^{k_\pi}\sup_{x,x'\in[x_{i-1},x_i]}(g(x)-g(x')\Delta x_i<\varepsilon.\end{aligned}$$

Конечно, од последица 11.3 следува дека $\frac{1}{g}\in\mathbf{R}([a,b])$. ♦

15. ИНТЕГРАЛНА ТЕОРЕМА ЗА СРЕДНА ВРЕДНОСТ

15.1. Теорема. Ако $f \in \mathbf{R}([a,b])$, тогаш функциите

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt, \qquad G(x)=\int_x^b f(t)dt$$

се непрекинати на $[a,b]$.

Доказ. Од $f \in \mathbf{R}([a,b])$ следува дека f е ограничена на $[a,b]$, т.е. постои константа $C>0$ таква што за секој $x \in [a,b]$ важи $|f(x)| \le C$. Ако $x, x+\Delta x \in\ [a,b]$, тогаш

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\,,$$

па затоа

$$|\Delta F(x)| = |F(x+\Delta x)-F(x)| = |\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt|$$

$$= |\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt| \le C|\int_x^{x+\Delta x} dt| = C|\Delta x|,$$

од што следува дека $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta F(x)=0$, т.е. функцијата $F(x)$ е непрекината на интервалот $[a,b]$.

За функцијата $G(x)$ имаме

$$G(x)=\int_x^b f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^b f(t)dt - F(x)$$

и бидејќи $\int_a^b f(t)dt$ е константа, а функцијата $F(x)$ е непрекината на интервалот $[a,b]$ добиваме дека и функцијата $G(x)$ е непрекината на интервалот $[a,b]$. ♦

15.2. Последица. Ако $f \in \mathbf{R}([a,b])$, тогаш

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \qquad 0<\varepsilon<b-a\,.$$

Доказ. Нека $c \in (a,b)$. Тогаш, од теорема 15.1 применета на интервалите $[a,c]$ и $[c,b]$ имаме

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}[\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx + \int_c^{b-\varepsilon} f(x)dx] = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_c^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

$$=\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

што и требаше да се докаже. ♦

15.3. Теорема (Прва теорема за средна вредност). Нека

1) функциите $f, g \in \mathbf{R}([a,b])$,

2) $m \le f(x) \le M$, за секој $x \in [a,b]$ и

3) функцијата g не го менува знакот на $[a,b]$.

Тогаш, постои реален број μ, $m \le \mu \le M$ таков што

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx\,. \tag{1}$$

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме во случај кога $g(x) \ge 0$, за секој $x \in [a,b]$. Случајот $g(x) \le 0$, за секој $x \in [a,b]$ се разгледува аналогно.

Ако неравенството $m \le f(x) \le M$ го помножиме со $g(x)$, добиваме дека за секој $x \in [a,b]$ важи

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)\,.$$

Ако ги интегрираме овие неравенства ги добиваме неравенствата

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx\,. \tag{2}$$

Ако $\int_a^b g(x)dx = 0$, тогаш од (2) следува дека и $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, што значи дека равенството (1) важи за секој $\mu, m \le \mu \le M$.

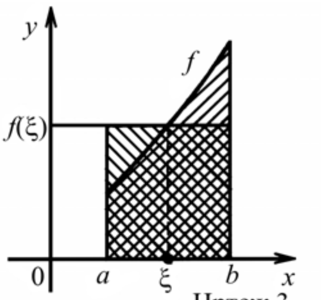
Ако $\int_a^b g(x)dx \ne 0$, тогаш бидејќи $g(x) \ge 0$, добиваме дека $\int_a^b g(x)dx > 0$ и ако во (2) го поделиме со $\int_a^b g(x)dx$, добиваме

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M\,.$$

Ставаме

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

и добиваме дека равенството (1) е исполнето, при што важи $m \le \mu \le M$. ♦



Цртеж 3

15.4. Последица. Ако функциите f и g ги задоволуваат условите од теорема 15.3 и функцијата f е непрекината на интервалот $[a,b]$, тогаш постои точка $\xi \in (a,b)$ таква што

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx . \qquad (3)$$

Ако $g(x) \equiv 1$ на $[a,b]$, тогаш

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)(b-a),\, a < \xi < b ,$$

(цртеж 3).

Доказ. Ако $\int_a^b g(x)dx = 0$, тогаш од (1) имаме $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, што значи дека равенството (3) важи за секој $\xi \in (a,b)$.

Нека претпоставиме дека $\int_a^b g(x)dx \neq 0$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $g(x) \geq 0$, за секој $x \in [a,b]$. Според тоа $\int_a^b g(x)dx \geq 0$. Од досега изнесеното следува дека

$$\int_a^b g(x)dx > 0 . \qquad (4)$$

Броевите m и M да ги избереме така што $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Бројот μ од теорема 15.3 ги задоволува условите $m \leq \mu \leq M$, па затоа се можни три случаи $m < \mu < M$, $\mu = M$ и $\mu = m$.

Ако $m < \mu < M$, тогаш од теоремата на Вaерштрас (III.7.5), следува дека постојат $\alpha, \beta \in [a,b]$ такви што $f(\alpha) = m,\ \ f(\beta) = M$. Сега од теоремата на Коши (III.7.8), следува дека на интервалот со крајни точки α и β постои точка ξ таква што $f(\xi) = \mu$. Јасно, $\xi \in (a,b)$.

Ако $\mu = M$, тогаш (1) има вид

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = M\int_a^b g(x)dx ,$$

па затоа

$$\int_a^b [M - f(x)]g(x)dx = 0 . \qquad (5)$$

Сега од равенството (4) и последица 15.2 следува дека постои $\varepsilon > 0$ таков што

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)dx > 0. \tag{6}$$

Ако во интервалот (a,b) не постои точка ξ таква што $f(\xi) = M$, тогаш непрекинатата функција $M - f(\xi)$ е позитивна на интервалот $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, па затоа таа е позитивна во точката x_0 за која

$$M - f(x_0) = \min_{x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]} [M - f(x)].$$

Според тоа, $M - f(x_0) > 0$, па затоа од (6) следува

$$\int_a^b [M - f(x)]g(x)dx \geq \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} [M - f(x)]g(x)dx \geq [M - f(x_0)] \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)dx > 0,$$

што противречи на условот (5).

Случајот $\mu = m$ се разгледува аналогно. ♦

15.5. Пример. Определете го знакот на интегралот:

$$I = \int_0^{2\pi} F(x)dx, F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Решение. Од својството на адитивност на интегралот следува дека

$$I = \int_0^{2\pi} F(x)dx = \int_0^{\pi} F(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} F(x)dx = \pi\int_0^{\pi} \frac{F(x)}{x+\pi} dx .$$

Користејќи ја последица 15.4 добиваме

$$I = \pi F(\xi)\int_0^{\pi} \frac{dx}{x+\pi} = \pi \frac{\sin\xi}{\xi} \ln 2, \quad 0 < \xi < \pi ,$$

што значи $I > 0$. ♦

16. ВРСКА МЕЃУ ОПРЕДЕЛЕН И НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

16.1. Во теорема 15.1 докажавме дека ако $f \in \mathbf{R}([a,b])$, тогаш функциите

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \ G(x) = \int_x^b f(t)dt$$

се непрекинати на интервалот $[a,b]$. Во врска со овие функции ќе докажеме уште две теореми.

16.2. Теорема. Ако функцијата $f \in \mathbf{R}([a,b])$ и е непрекината во точката $x_0 \in [a,b]$, тогаш функцијата $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ е диференцијабилна во таа точка и

$$F'(x_0) = f(x_0). \tag{1}$$

Доказ. За нараснувањето $\Delta F(x_0)$ имаме

$$\Delta F(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt, \quad x_0, x_0 + \Delta x \in [a,b].$$

Исто така $\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = 1$, па затоа

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \frac{f(x_0)}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]dt\right|. \tag{2}$$

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од непрекинатоста на функцијата f во точката x_0 следува дека постои $\delta > 0$ таков што од $|x - x_0| < \delta, \quad x \in [a,b]$ следува

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ако Δx е таков што $|\Delta x| < \delta$, тогаш за секоја точка t која припаѓа на интервалот со крајни точки x_0 и $x_0 + \Delta x$ важи $|t - x_0| \leq |\Delta x| < \delta$, па затоа $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Сега од неравенството (2) следува

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|\Delta x|}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\, dt \leq \frac{\varepsilon}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt\right| = \varepsilon,$$

што значи $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$, т.е. важи (1). ♦

16.3. Забелешка. Од доказот на теорема 15.2 следува дека за функцијата

$$G(x) = \int\limits_x^b f(t)dt$$

во точката x_0 имаме $G'(x_0) = -f(x_0)$. Јасно, ако функцијата f е непрекината на интервалот $[a,b]$, тогаш за секоја точка x се точни формулите

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = f(x), \qquad \frac{d}{dx}\int\limits_x^b f(t)dt = -f(x).$$

16.4. Теорема. Ако функцијата f е непрекината на интервалот $[a,b]$, тогаш на $[a,b]$ таа има примитивна функција и притоа ако $x_0 \in [a,b]$, тогаш со равенството

$$F(x)=\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt, \qquad x\in[a,b] \qquad (3)$$

се задава една од примитивните функции на функцијата f на интервалот $[a,b]$.

Доказ. Доволно е да провериме дека функцијата (3) навистина е примитивна функција за функцијата f. Ако $x>x_0$, $x\in[a,b]$, тогаш од равенството (3) и од теорема 16.2 следува дека $F'(x)=f(x)$, што значи дека функцијата (3) е примитивна за функцијата f.

Ако $x<x_0$, $x\in[a,b]$, тогаш

$$F'(x)=\tfrac{d}{dx}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt=-\tfrac{d}{dx}\int\limits_{x}^{x_0} f(t)dt=-(-f(x))=f(x)\,. \blacklozenge$$

16.5. Забелешка. Множеството примитивни функции на функцијата f на интервалот $[a,b]$ е неопределениот интеграл $\int f(x)dx,\ \ x\in[a,b]$, а функцијата (3) е една примитивна функција за функцијата f на интервалот $[a,b]$. Бидејќи секои две примитивни функции се разликуваат за константа, добиваме

$$\int f(x)dx=\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt+C\,.$$

16.6. Пример. а) Нека $f\in\mathbf{C}([0,+\infty))$ и за секој $x>0$ важи $f(x)\neq 0$

$$(f(x))^2=2\int\limits_0^x f(t)dt\,.$$

Докажете дека $f(x)=x$, за секој $x\geq 0$.

б) Нека $f\in\mathbf{C}([0,1])$ и f монотоно не опаѓа на $[0,1]$. Докажете дека за секој $\alpha\in(0,1]$ важи

$$\int\limits_0^1 f(x)dx\leq\tfrac{1}{\alpha}\int\limits_0^{\alpha} f(x)dx\,.$$

Решение. а) За $x=0$ добиваме $(f(0))^2=2\int\limits_0^0 f(t)dt=0$, па затоа $f(0)=0$. Понатаму, од $f\in\mathbf{C}([0,+\infty))$, $f(x)\neq 0$, за $x>0$ и од условот на задачата следува дека $f(x)>0$, за секој $x>0$. Сега од теоремата 16.4 следува дека функцијата

$$F(x)=2\int\limits_0^x f(t)dt$$

е диференцијабилна и ненегативна, па затоа и функцијата $f(x)=\sqrt{F(x)}$ е диференцијабилна. Со диференцирање на

$$(f(x))^2 = 2\int_0^x f(t)dt$$

добиваме $2f(x)f'(x)=2f(x)$, за секој $x>0$ и бидејќи $f(x)>0$, за секој $x>0$, добиваме $f'(x)=1$, за секој $x>0$. Конечно, од последното равенство, ако се искористи дека $f(0)=0$, следува $f(x)=x$, за секој $x\geq 0$.

б) Да ја разгледаме функцијата $F(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)dx$, за $\alpha\in(0,1]$. Имаме

$$F'(\alpha)=-\frac{1}{\alpha^2}\int_0^\alpha f(x)dx+\frac{1}{\alpha}f(\alpha).$$

Од последица 15.4, при $g(x)=1$, добиваме

$$\int_0^\alpha f(x)dx=(\alpha-0)f(0+\theta\alpha)=\alpha f(\theta\alpha),\text{ за } 0<\theta<1.$$

Сега од теорема 16.4 следува $F'(\alpha)=-\frac{1}{\alpha}(f(\alpha)-f(\theta\alpha))$ и бидејќи функцијата f монотоно не опаѓа, добиваме $F'(\alpha)\leq 0$. Според тоа, функцијата F монотоно не расте, па затоа $F(1)\leq F(\alpha)$, т.е.

$$\int_0^1 f(x)dx=F(1)\leq F(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)dx.\ \blacklozenge$$

16.7. Теорема (Њутн-Лајбницова формула). Ако функцијата f е непрекината на интервалот $[a,b]$, тогаш за секоја нејзина примитивна функција F на $[a,b]$ важи

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a). \tag{4}$$

Доказ. Од теорема 16.4 следува дека $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ е примитивна за функцијата на $[a,b]$. Ако функцијата F е произволна примитивна функција за функцијата f на $[a,b]$, тогаш за секој $x\in[a,b]$ важи $\int_a^x f(t)dt=F(x)+C$. Во последното равенство ставаме $x=a$ и од $\int_a^a f(t)dt=0$ добиваме $C=-F(a)$. Значи,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a),$$

и ако во ова равенство ставиме $x = b$ ја добиваме формулата (4). ♦

16.8. Пример. Функцијата $f:[-1,1] \to \mathbf{R}$ определена со

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

на интервалот $[-1,1]$ има примитивна функција

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Функцијата f не е ограничена на интервалот $[-1,1]$, па од теорема 9.6 следува дека таа не е интеграбилна според Риман. Според тоа, за примена на Њутн-Лајбницовата формула не е доволна само егзистенцијата на примитивната функција, т.е. условот за непрекинатост на функцијата f од кој следуваат ограниченоста на f и егзистенцијата на примитивната функција F не може да се изостави. ♦

16.9. Пример. Користејќи ја Њутн-Лајбницовата формула ќе го пресметаме интегралот $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Бидејќи функцијата $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ е непрекината на интервалот $[1,2]$ и функцијата $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ е примитивна за функцијата $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (проверете!), од теорема 16.7 добиваме

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_1^2 = \ln(2+\sqrt{5}) - \ln(1+\sqrt{2}) = \ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}. \ ♦$$

16.10. Коментар. Теоремата 16.7 е позната и под името основна теорема на интегралното сметање, за која постојат уште две варијанти и тоа:

> "*Ако функцијата $f(x)$ е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ и ако таа има примитивна функција $F(x)$ на $[a,b]$, тогаш точна е формулата* (4)."

и

> "*Ако функцијата $f(x)$ е интеграбилна на интервалот $[a,b]$, а функцијата $F(x)$ е непрекината на $[a,b]$ и има извод $F'(x)$, еднаков на $f(x)$ во сите точки на интервалот $[a,b]$, со исклучок, можда во конечно многу*

точки, тогаш Римановиот интеграл на $f(x)$ *може да се пресмета според формулата* (4).”

Без да ги коментираме овие три варијанти на основната теорема на интегралното сметање, овде ќе забележиме само дека трите варијанти на оваа теорема се меѓусебно независни.

17. СМЕНА НА ПРОМЕНЛИВИ И ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА КАЈ ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

17.1. Теорема. Нека:

a) функцијата $f(x)$ е непрекината на интервалот (a,b),

b) функцијата $\varphi(t)$ е определена и непрекината заедно со својот прв извод $\varphi'(t)$ на интервалот (α,β), при што за секој $t\in(\alpha,\beta)$ е исполнето неравенството $a<\varphi(t)<b$ (цртеж 4).

Тогаш, ако

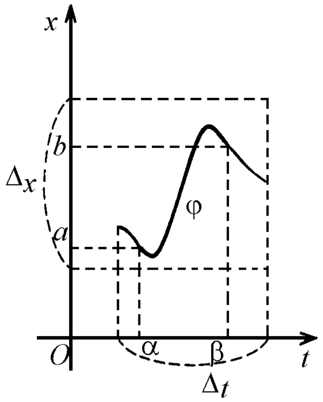
$$\alpha_0,\beta_0\in(\alpha,\beta),\ a_0=\varphi(\alpha_0),\ b_0=\varphi(\beta_0)$$

важи

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)dx=\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,. \tag{1}$$

Доказ. Пред се да забележиме дека според условот функцијата f е определена на множеството вредности на функцијата φ, па затоа има смисла сложената функција $f(\varphi(t))$. Бидејќи и во двете страни на равенството (5) подинтегралните функции се непрекинати заклучуваме дека постојат и двата интеграла во ова равенство.

Нека $F(x)$ е произволна примитивна функција за функцијата $f(x)$ на интервалот (a,b). Тогаш за секој $t\in(\alpha,\beta)$ има смисла сложената функција $F(\varphi(t))$ која е примитивна за функцијата $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ бидејќи



Цртеж 4

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t))=F_{\varphi}^{'}(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)\,.$$

Сега од теоремата на Њутн-Лајбниц добиваме

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(\beta_0))-F(\varphi(\alpha_0))=F(b_0)-F(a_0)=\int_{a_0}^{b_0} f(x)dx\,.\ \blacklozenge$$

17.2. Теорема. Ако функциите $u(x)$ и $v(x)$ се непрекинато диференцијабилни на интервалот $[a,b]$, тогаш

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu\,. \qquad (2)$$

Доказ. Имаме

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b (uv'+vu')dx = \int_a^b udv + \int_a^b vdu\,,$$

при што постојат сите интеграли во последната низа равенства бидејќи подинтегралните функции се непрекинати. Од Њутн-Лајбницовата формула следува

$$\int_a^b (uv)'dx = uv\Big|_a^b$$

и ако замениме во претходното равенство, ја добиваме формулата (2). ♦

17.3. Пример. а) Ќе го пресметаме интегралот $\int_1^2 \ln xdx$.

Имаме,

$$\int_1^2 \ln xdx = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = (x\ln x - x)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1\,.$$

б) Ќе го пресметаме интегралот $\int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx$.

Ја воведуваме замената $t=\cos x$ и добиваме $\sin xdx = -dt$, при што за $x=0$ добиваме $t=\cos 0 = 1$ и за $x=\pi$ добиваме $t=\cos\pi = -1$. Според тоа,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx = -\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}dt = \int_{-1}^1\sqrt{1+t^2}dt = \int_{-1}^1 \tfrac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt \\ &= \int_{-1}^1 \tfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt + \int_{-1}^1 t\tfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt = \ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 td(\sqrt{1+t^2}) \\ &= \ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_{-1}^1 + t\sqrt{1+t^2}\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1\sqrt{1+t^2}dt = 2\ln(1+\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} - I, \end{aligned}$$

од што следува дека

$$I = \int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx = \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}\,.$$

в) Ќе го пресметаме интегралот $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x}\sqrt{\cos x - \cos^3 x}}{e^{\sin x}+1}dx$.

Прво ќе докажеме дека ако $f \in \mathbf{C}([-a,a])$, $a>0$, тогаш

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]dx .$$

Навистина, од $f \in \mathbf{C}([-a,a])$ следува дека на интервалот $[-a,a]$ функцијата f има примитивна функција F. Значи $F'(x)=f(x)$, за секој $x\in[-a,a]$ и тогаш

$$\int_0^a [f(x)+f(-x)]dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(-x)dx = \int_0^a f(x)dx - \int_0^{-a} f(z)dz$$

$$= F(a)-F(0)-[F(-a)-F(0)] = F(a)-F(-a) = \int_{-a}^{a} f(x)dx.$$

Користејќи го претходното тврдење за дадениот интеграл имаме

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}}{e^{\sin x}+1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^{\sin x}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}}{e^{\sin x}+1} + \frac{e^{-\sin x}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}}{e^{-\sin x}+1}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sqrt{\cos x}dx = -\frac{\cos^{\frac{3}{2}} x}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Забелешка. Ако $f \in \mathbf{C}([-a,a])$ и функцијата f е непарна, т.е. ако за секој $x\in[-a,a]$ важи $f(-x)=-f(x)$, тогаш

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]dx = \int_0^a [f(x)-f(x)]dx = 0\cdot a = 0 .$$

Ако $f \in \mathbf{C}([-a,a])$ и функцијата f е парна, т.е. ако за секој $x\in[-a,a]$ важи $f(-x)=f(x)$, тогаш

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]dx = 2\int_0^a f(x)dx . \ \blacklozenge$$

17.4. Пример. а) Докажете дека, ако $f \in \mathbf{R}([0,\pi])$, тогаш

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx .$$

б) Решете го интегралот $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Решение. а) Воведуваме замена $x=\pi-z$ и добиваме:

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\pi - z)f(\sin(\pi - z))d(\pi - z)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - x)f(\sin x)dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

и

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin(\pi - z))d(\pi - z)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin z)dz = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx.$$

Сега тврдењето следува од последните две равенства.

б) Нека, $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$. Од тврдењето под а) добиваме

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x} = -\frac{\pi}{2} \operatorname{arctg}(\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}.$$ ♦

17.5. Теорема (Тејлорова формула со остаточен член во интегрална форма). Ако $f \in \mathbf{C}^{(n+1)}((\alpha, \beta))$, тогаш за секој $a \in (\alpha, \beta)$ важи

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \tag{3}$$

каде

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt\,. \tag{4}$$

Доказ. Со примена на теорема 17.2 од равенството (4) при

$$\begin{matrix} (x-t)^n = u & & u' = -n(x-t)^{n-1} \\ & \text{и} & \\ f^{(n+1)}(t) = v' & & v = f^{(n)}(t), \end{matrix}$$

добиваме

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt = \frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n)}(t)\Big|_{t=a}^{t=x} + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt$$

$$= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt.$$

Со последователна примена на теорема 17.2 на остаточните членови $R_{n-1}(x)$, $R_{n-2}(x),\dots,R_1(x)$ ја добиваме формулата (3). ♦

17.6. Теорема (Втора теорема за средна вредност). Ако f е непрекината, а g е монотоно растечка непрекинато диференцијабилна функција на $[a,b]$, тогаш постои $\xi \in [a,b]$ таква што

$$\int_a^b g(x)f(x)dx = g(b)\int_\xi^b f(x)dx \,. \tag{5}$$

Доказ. Од теорема 16.4 следува дека функцијата

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt, \quad a \le x \le b$$

е диференцијабилна на $[a,b]$. Според тоа, F е непрекината на $[a,b]$, па затоа постојат $m = \min\limits_{x\in[a,b]} F(x)$ и $M = \max\limits_{x\in[a,b]} F(x)$. Од $F(b)=0$ и $dF(x) = -f(x)dx$ со парцијална интеграција наоѓаме

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)f(x)dx &= -\int_a^b g(x)dF(x) = -g(x)F(x)\Big|_a^b + \int_a^b g'(x)F(x)dx \\ &= g(a)F(a) + \int_a^b g'(x)F(x)dx\end{aligned} \tag{6}$$

Функцијата g монотоно расте, па затоа $g'(x) \ge 0$, за секој $x \in [a,b]$ и бидејќи $g(a) \ge 0$ и $m \le F(x) \le M$ за секој $x \in [a,b]$, добиваме

$$g(a)F(a) + \int_a^b g'(x)F(x)dx \le Mg(a) + M\int_a^b g'(x)dx = Mg(b) \text{ и}$$

$$g(a)F(a) + \int_a^b g'(x)F(x)dx \ge mg(a) + m\int_a^b g'(x)dx = mg(b) \,.$$

Сега од равенството (6) добиваме

$$mg(b) \le \int_a^b g(x)f(x)dx \le Mg(b) \,.$$

Ако $g(b)=0$, тогаш од ненегативноста и монотоноста на функцијата g следува $g(x)=0$ за секој $x\in[a,b]$ и притоа формулата (5) важи за секој $\xi \in [a,b]$. Ако $g(b) > 0$, тогаш

$$m \le \frac{1}{g(b)}\int_a^b g(x)f(x)dx \le M \,.$$

Функцијата F е непрекината на $[a,b]$, па затоа постои $\xi \in [a,b]$ таков што

$$F(\xi)=\frac{1}{g(b)}\int_a^b g(x)f(x)dx\,,$$

т.е. важи (5). ♦

17.7. Теорема (Боне). Ако f е непрекината, а g е монотона непрекинато диференцијабилна функција на $[a,b]$, тогаш постои $\xi\in[a,b]$ таква што

$$\int_a^b g(x)f(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx\,. \qquad (7)$$

Доказ. Ако g монотоно расте на $[a,b]$, тогаш функцијата

$$F(x)=g(x)-g(a)\,,\ x\in[a,b]$$

е ненегативна монотоно растечка непрекинато диференцијабилна функција. Според теорема 17.6 постои $\xi\in[a,b]$ таков што

$$\int_a^b F(x)f(x)dx=F(b)\int_\xi^b f(x)dx\,.$$

Ако во последното равенство замениме за F го добиваме равенството

$$\int_a^b [g(x)-g(a)]f(x)dx=[g(b)-g(a)]\int_\xi^b f(x)dx\,.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)f(x)dx&=g(a)\int_a^b f(x)dx-g(a)\int_\xi^b f(x)dx+g(b)\int_x^b f(x)dx\\&=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_x^b f(x)dx.\end{aligned}$$

Аналогно се разгледува случајот кога g монотоно опаѓа. ♦

17.8. Забелешка. Теорема 17.7 важи и при послаби услови за функциите f и g. Имено, за функцијата f доволно е таа да е интеграбилна според Риман, а функцијата g да е монотона. Аналогно важи и за теорема 17.6 за која е доволно f да е интеграбилна според Риман, а g да е ненегативна неопаѓачка функција.

Може да се докаже и следново тврдење:

ако f е интеграбилна според Риман на $[a,b]$, а g е ненегативна монотоно нерастечка функција на $[a,b]$, тогаш постои $\xi\in[a,b]$ таква што

$$\int_a^b g(x)f(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx\,. \qquad (8)$$

Формулите (5), (7) и (8) во литературата се познати како формули на Боне.

18. ПРИМЕНА НА ОПРЕДЕЛЕНИОТ ИНТЕГРАЛ

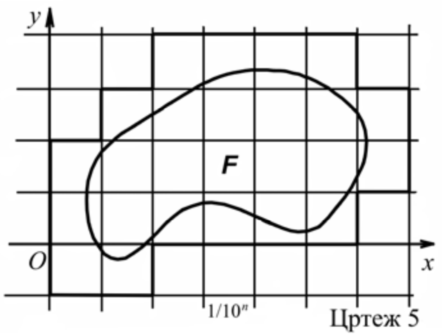
а) Плоштина на рамнинска фигура

18.1. Поим за плоштина на рамнинска фигура. Во овој параграф прво ќе се осврнеме на прашањето што е тоа плоштина на рамнинска фигура. Притоа, ова прашање нема целосно да го разработиме, туку ќе се осврнеме само на основните својства кои ни се потребни за разгледувањата во овој параграф.

Нека во рамнината Oxy е дадена фигурата $\boldsymbol{F}$. За секој $n \in \mathbf{N}$ системот прави

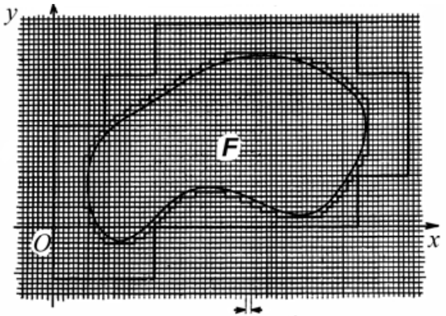
$$x = \frac{p}{10^n},\ y = \frac{q}{10^n},\ p, q \in \mathbf{Z},$$

паралелни со координатните оски, го нарекуваме *десетична мрежа од ранг* n. Овие прави ја делат рамнината Oxy на квадрати со страна $h_n = \frac{1}{10^n}$ и плоштинита на секој од квадратите е еднаква на h_n^2. Со S_n да го означиме множеството квадрати на мрежата со ранг n кои имаат заеднички точки со $\boldsymbol{F}$ (цртеж 5). Јасно, $\boldsymbol{F} \subseteq S_n$ за секој $n \in \mathbf{N}$. Сите квадрати на мрежата со ранг $n+1$ кои имаат заеднички точки со $\boldsymbol{F}$ се содржат во квадратите со ранг n, но може да постојат квадрати од мрежата со ранг $n+1$ кои се содржат во S_n, а немаат заеднички точки со $\boldsymbol{F}$. Затоа $S_{n+1} \subseteq S_n$, цртеж 6. Според тоа,



Цртеж 5

$$S_0 \supseteq S_1 \supseteq ... \supseteq S_n \supseteq ... \supseteq \boldsymbol{F} \tag{1}$$



Цртеж 6

Секој S_n се состои од конечно или бесконечно множество квадрати од ранг n. Ако S_n има конечно множество квадрати, тогаш со $\mu(S_n)$ ќе го означиме збирот на плоштините на квадратите кои припаѓаат на S_n и бројот $\mu(S_n)$ ќе го наречеме плоштина на S_n. Ако S_n се состои од бесконечно многу квадрати, тогаш S_n не може да има конечна плоштина и во овој случај ставаме $\mu(S_n) = +\infty$.

Од (1) следува

$$\mu(S_0) \geq \mu(S_1) \geq \mu(S_2) \geq ...\mu(S_n) \geq ... \tag{2}$$

што значи низата $\{\mu(S_n)\}$ чии членови во општ случај припаѓаат на $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, монотоно опаѓа. Ако множеството $\boldsymbol{F}$ не се простира во бесконечност, т.е. ако постои круг со центар во координатниот почеток и доволно голем радиус кој го содржи $\boldsymbol{F}$, тогаш секое од множествата S_n се состои од конечно многу квадрати, па затоа $\{\mu(S_n)\}$ е монотоно опаѓачка низа реални броеви. Бидејќи $\mu(S_n) > 0$ добиваме дека низата $\{\mu(S_n)\}$ конвергира, т.е. постои конечната граница

$$S = \lim_{n\to\infty} \mu(S_n)\,. \tag{3}$$

Бројот S го нарекуваме *плоштина на фигурата* $\boldsymbol{F}$ и го означуваме со $S = \mu(\boldsymbol{F})$. Да забележиме дека $\mu(\boldsymbol{F}) \geq 0$.

Во натамошните разгледувања ќе се осврнеме само на множества кои не се простираат во бесконечност.

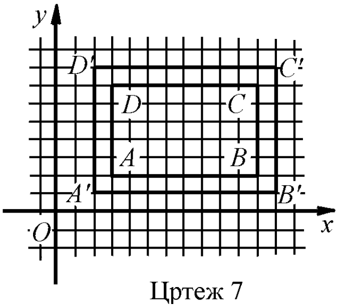
18.2. Лема. Ако $\boldsymbol{F}' \subseteq \boldsymbol{F}''$, тогаш $\mu(\boldsymbol{F}') \leq \mu(\boldsymbol{F}'')$

Доказ. Ако $S_n^{'}$ и $S_n^{''}$ се множествата квадрати со десетичен ранг n кои имаат заеднички точки со $\boldsymbol{F}'$ и $\boldsymbol{F}''$, тогаш очигледно $S_n^{'} \subseteq S_n^{''}$, па затоа $\mu(S_n^{'}) \leq \mu(S_n^{''})$. Ако во последното равенство преминеме кон граница кога $n \to \infty$, добиваме $\mu(\boldsymbol{F}') \leq \mu(\boldsymbol{F}'')$. ♦

18.3. Лема. Плоштината на правоаголник е еднаква на производот на должините на неговите страни.

Доказ. Без ограничување на општоста можеме даземеме дека страните на правоаголникот се паралелни со координатните оски.

Нека е даден правоаголникот $ABCD$ (цртеж 7). Квадратите со десетичен ранг n , кои имаат заеднички точки со правоаголникот $ABCD$ формираат правоаголник $A'B'C'D'$, за кој на едната основа лежат p квадрати, а на другата основа q квадрати. Тогаш,



Цртеж 7

$$\mu(S_n) = pqh_n^2 = ph_nqh_n = \overline{A'B'}\cdot\overline{B'C'}\,.$$

Од својствата на реалните броеви имаме

$$\lim_{n\to\infty} \overline{A'B'} = \overline{AB} \text{ и } \lim_{n\to\infty} \overline{B'C'} = \overline{BC}\,,$$

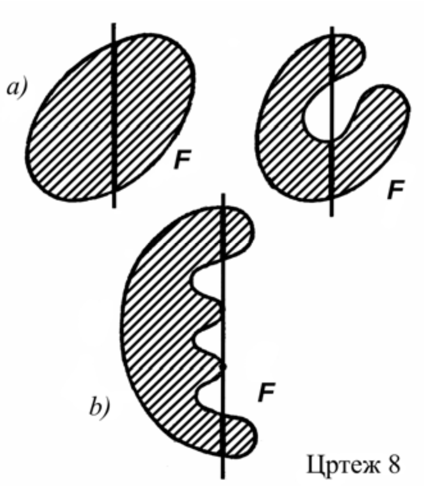
па затоа

$$\mu(ABCD) = \lim_{n\to\infty} \mu(S_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{A'B'}\cdot \lim_{n\to\infty} \overline{B'C'} = \overline{AB}\cdot\overline{CD}\,. \ ♦$$

18.4. Лема. Ако фигурата $\boldsymbol{F}$ со помош на права, паралелна на оската Oy , (оската Ox) е поделена на две фигури $\boldsymbol{F}'$ и $\boldsymbol{F}''$, тогаш

$$\mu(\boldsymbol{F}) = \mu(\boldsymbol{F}') + \mu(\boldsymbol{F}'')\,.$$

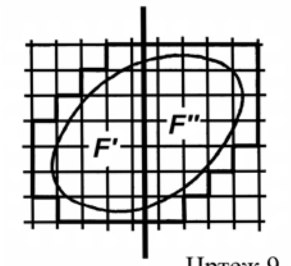
Доказ. Со E да го означиме множеството точки на пресечната права кои се заеднички со фигурата $\boldsymbol{F}$. Множеството E може да е составено од една или повеќе отсечки (цртеж 8 a)), но може да има и посложена структура (цртеж 8 b)).



Цртеж 8

Со S_n да го означиме множеството квадрати со десетичен ранг n кои имаат заеднички точки со фигурата $\boldsymbol{F}$, а со $S_n^{'}, S_n^{''}$ и $S_n^{'''}$ да ги означиме множествата квадрати со десетичен ранг n кои имаат заеднички точки со $\boldsymbol{F}', \boldsymbol{F}''$ и E. Тогаш, бидејќи квадратите кои имаат заеднички точки со E фигурираат и во $\boldsymbol{F}'$ и во $\boldsymbol{F}''$, добиваме.

$$\mu(S_n) = \mu(S_n^{'}) + \mu(S_n^{''}) - \mu(S_n^{'''}) . \qquad (4)$$



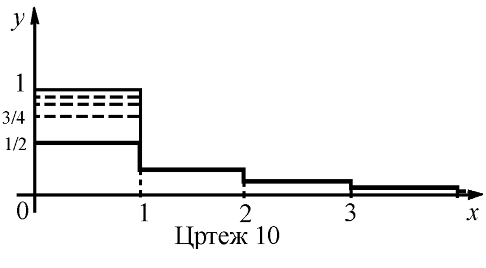
Цртеж 9

Но, множеството E секогаш може да се смести внатре во правоаголник со страни паралелни на координатните оски, при што едната страна може да има константна должина l, а другата во мрежа со десетичен ранг n да има должина $\frac{2}{10^n}$ (цртеж 9), па затоа $\mu(E) \le \frac{2l}{10^n}$, за секој $n \in \mathbf{N}$, т.е. $\mu(E) = 0$. Сега, ако во равенството (4) преминеме кон граница кога $n \to \infty$, го добиваме равенството

$$\mu(\boldsymbol{F}) = \mu(\boldsymbol{F}') + \mu(\boldsymbol{F}'') . \ \blacklozenge$$

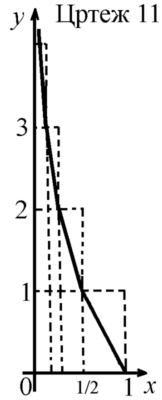
18.5. Забелешка. Тврдењето од лема 18.4 важи и кога секантата е произволна права, произволна непрекината крива зададена со $y = f(x), x \in [a,b]$ или со $x = g(y), \ \ y \in [c,d]$, или со параметарските равенки $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$, каде φ и ψ се непрекинато диференцијабилни функции. Меѓутоа, тврдењето од лема 18.4 не е точно за произволна секанта без какви било ограничувања.

18.6. Пример на неограничено множество со конечна плоштина. Како што видовме, секое ограничено множество има конечна плоштина. Меѓутоа, постојат и неограничени множества со конечна плоштина. Така, секоја права е множество со ограничена плоштина (зошто?). Ќе дадеме пример на нео-



Цртеж 10

граничено множество со позитивна плоштина.



Цртеж 11

Секое од множествата

$$E_i = \{(x,y) \mid i-1 \le x \le i, 0 \le y < \frac{1}{2^i}\},\ i = 1,2,...$$

е правоаголник со плоштина $\mu(E_i) = \frac{1}{2^i}$ (цртеж 10). Согласно со доказот на лема 18.4, плоштината на заедничка отсечки на секои два правоаголника е еднаква на нула. Јасно, множеството $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ е неограничено, меѓутоа

$$\mu(E) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^i} + ... = 1 .$$

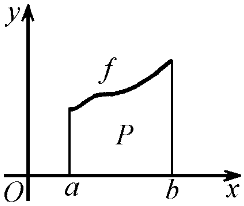
Не е тешко да се најде и бесконечно множество со конечна плоштина, ограничена со графикот на непрекината функција на интервалот $(0,1]$, позитивниот дел на $y-$оската и интервалот $[0,1]$ на $x-$оската. Графикот на една таква функција е даден на цртеж 11. Да забележиме дека оваа функција не е интеграбилна според Риман, бидејќи е неограничена.

б) Пресметување плоштина на рамнинска фигура

18.7. Дефиниција. Нека $f \in \mathbf{C}([a,b])$ и $f(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$. Множеството

$$P = \{(x,y) \mid a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\} \qquad (5)$$

го нарекуваме *криволиниски трапез* определен со графикот на функцијата f (цртеж 12).



Цртеж 12

18.8. Теорема. Ако $f \in \mathbf{C}([a,b])$ и $f(x) \ge 0$ за $x \in [a,b]$, тогаш за плоштината $S = \mu(P)$ на криволинискиот трапез имаме

$$S = \int_a^b f(x)dx . \qquad (6)$$

Доказ. Нека $\pi = \{x_k\}_{k=0}^{k_\pi}$ е поделба на $[a,b]$, $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$m_k = \inf_{x \in \Delta_k} f(x) \text{ и } M_k = \sup_{x \in \Delta_k} f(x),\ k = 1,2,...,k_\pi .$$

Со p_π и P_π да ги означиме фигурите составени од сите правоаголници од видот

$$p_{\pi,k} = \{(x,y)\} \mid x_{k-1} \le x \le x_k, 0 \le y \le m_k\} \qquad (7)$$

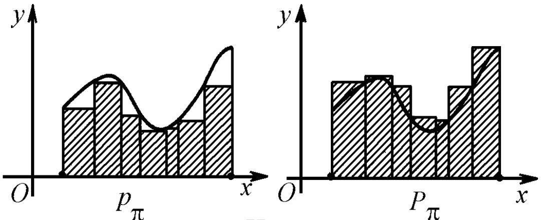
$$P_{\pi,k} = \{(x,y)\} \mid x_{k-1} \le x \le x_k, 0 \le y \le M_k\} \qquad (8)$$

(цртеж 13), т.е.

$$p_\pi = \bigcup_{k=0}^{k_\pi} p_{\pi,k} \text{ и } P_\pi = \bigcup_{k=0}^{k_\pi} P_{\pi,k} \,. \tag{9}$$

Од дефиницијата на m_k и M_k следува дека за секоја поделба π важи $p_\pi \subseteq P \subseteq P_\pi$, па затоа

$$\mu(p_\pi) \le \mu(P) \le \mu(P_\pi)\,. \tag{10}$$



Цртеж 13

Од (7) и (8) и од лема 18.3 следува дека

$$\mu(p_{\pi,k}) = m_k \Delta x_k\,,$$
$$\mu(P_{\pi,k}) = M_k \Delta x_k$$

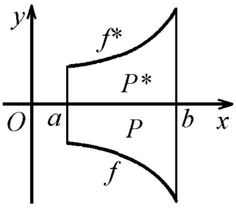
и бидејќи правоаголниците $p_{\pi,k}$, односно $P_{\pi,k}$, имаат заеднични точки само на страните од (9) и лема 18.4, следува

$$\mu(p_\pi) = \sum_{k=0}^{k_\pi} \mu(p_{\pi,k}) = \sum_{k=0}^{k_\pi} m_k \Delta x_k = s_\pi \text{ и } \mu(P_\pi) = \sum_{k=0}^{k_\pi} \mu(P_{\pi,k}) = \sum_{k=0}^{k_\pi} M_k \Delta x_k = S_\pi \,.$$

Сега, од неравенствата (1) следува $s_\pi \le \mu(P) \le S_\pi$ и бидејќи

$$\lim_{d(\pi)\to 0} s_\pi = \lim_{d(\pi)\to 0} S_\pi = \int_a^b f(x)dx$$

од последното неравенство добиваме дека важи (6). ♦



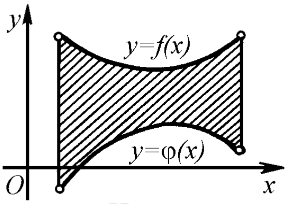
Цртеж 14

18.9. Последица. Ако $f \in \mathbf{C}([a,b])$ и $f(x) \le 0$ и $x \in [a,b]$, тогаш за плоштината $S = \mu(P)$ на криволинискиот трапез важи

$$S = -\int_a^b f(x)dx\,. \tag{11}$$

Доказ. Нека $f^*(x) = -f(x)$ за секој $x \in [a,b]$ и P^* е множеството симетрично на P во однос на $x-$ оската (цртеж 14). Тогаш, од теоремата 18.8 следува

$$S = \mu(P) = \mu(P^*) = \int_a^b f^*(x)dx = -\int_a^b f(x)dx\,. \text{ ♦}$$

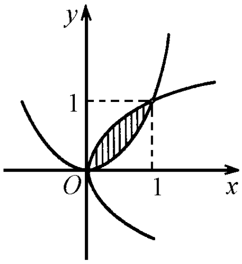


Цртеж 15

18.10. Забелешка. Од лема 18.4 и теорема 18.8 непосредно следува дека плоштината на фигурата определена со кривите $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ и правите $x = a$, $y = b$, $a \le b$ во случај кога

$f(x) \geq \varphi(x)$ за секој $x \in [a,b]$ (цртеж 15) се пресметува според формулата

$$S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx .$$

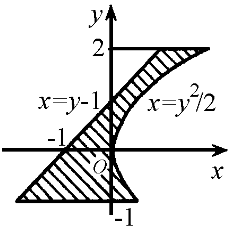


Цртеж 16

18.11. Пример. а) Ќе ја пресметаме плоштината на фигурата ограничена со кривите $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ (цртеж 16). Решенијата на равенката $\sqrt{x} = x^2$ се $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, па затоа дадените криви се сечат во точките $(0,0)$ и $(1,1)$. Бидејќи на интервалот $[0,1]$ важи $\sqrt{x} \geq x^2$ од забелешка 18.10 имаме

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = (\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{x^3}{3})\Big|_0^1 = \tfrac{1}{3} .$$

б) Да ја пресметаме плоштината на фигурата ограничена со правите $y = -1$, $y = 2$, $y - x = 1$ и кривата $y^2 = 2x$ (цртеж 17).



Цртеж 17

Често пати, како што е случај во овој пример, за поедноставно пресметување на плоштина на дадена фигура може да се заменат улогите на променливите x и y. Притоа, формулата од забелешка 18.10 го добива обликот

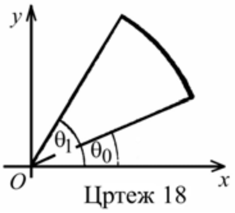
$$S = \int_c^d [g(y) - \psi(y)]dy$$

Во нашиот случај имаме

$$S = \int_{-1}^2 (\frac{y^2}{2} - y + 1)dy = (\frac{y^3}{6} - \frac{y^2}{2} + y)\Big|_{-1}^2 = 3 .$$

в) За плоштината на кружниот исечок на кругот $x^2 + y^2 = r^2$ ограничен со радиусите $\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta_1$, $0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ (цртеж 18) имаме

$$S(\theta_0, \theta_1) = S(0, \theta_1) - S(0, \theta_0) ,$$

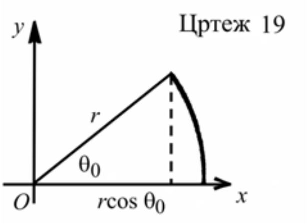


Цртеж 18

па затоа доволно е да определиме $S(0, \theta_0)$, кога $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, (црт. 19). Бараната плоштина ќе ја пресметаме како збир на две плоштини од кои едната е определена со

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\theta_0 \,, x \in [0, r\cos\theta_0] ,$$

а другата со


Цртеж 19

$$y=\sqrt{r^2-x^2}\ ,\ x\in[r\cos\theta_0,r]\,,$$

т.е.

$$S(0,\theta_0)=\int\limits_0^{r\cos\theta_0} x\,\mathrm{tg}\,\theta_0 dx+\int\limits_{r\cos\theta_0}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx\ .$$

За вториот интеграл воведуваме замена $x=r\cos\theta$, $dx=-r\sin\theta$, $y=r\sin\theta$, при што $\theta\in[0,\theta_0]$ и добиваме

$$\begin{aligned}S(0,\theta_0)&=\mathrm{tg}\,\theta_0\int\limits_0^{r\cos\theta_0} xdx-r^2\int\limits_{\theta_0}^{0}\sin^2\theta d\theta\\&=\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{r\cos\theta_0}\mathrm{tg}\,\theta_0+r^2\int\limits_0^{\theta_0}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta\\&=\frac{r^2\cos^2\theta_0}{2}\mathrm{tg}\,\theta_0+\frac{r^2}{2}\theta_0-\frac{r^2\sin2\theta}{4}\bigg|_0^{\theta_0}=\frac{r^2}{2}\theta_0.\end{aligned}$$

Според тоа,

$$S(\theta_0,\theta_1)=\frac{r^2}{2}(\theta_1-\theta_0)\,. \tag{11}$$

Може да се докаже дека формулата (11) е точна за секој исечок со агол $\theta_1-\theta_0\in[0,2\pi)$, од што следува дека плоштината на круг со радиус r е еднаква на πr^2. ♦

18.12. Нека фигурата P е определена со кривата зададена во поларни координати $\rho=\rho(\varphi),\alpha\le\varphi\le\beta$ и отсечките $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$ кои може да дегенерираат во точки (цртеж 20), т.е.

$$P=\{(\rho,\varphi)\mid\ \alpha\le\varphi\le\beta,0\le\rho\le\rho(\varphi)\}\,.$$

Да ја определиме плоштината $S=\mu(P)$ на фигурата P.

Нека $\pi=\{\varphi_k\}_{k=0}^{k_\pi}$ е поделба на интервалот $[\alpha,\beta]$ и да ставиме

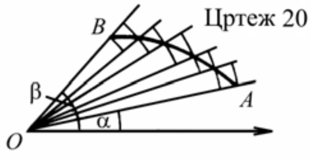
$$\Delta_k=[\varphi_{k-1},\varphi_k]\,,\ m_k=\inf_{\varphi\in\Delta_k}\rho(\varphi)\,,\ M_k=\sup_{\varphi\in\Delta_k}\rho(\varphi)\,,\ \Delta\varphi_k=\varphi_k-\varphi_{k-1}$$

$$p_{\pi,k}=\{(\rho,\varphi)\mid\varphi_{k-1}\le\varphi\le\varphi_k,0\le\rho\le m_k\}\,,\ p_\pi=\bigcup_{k=0}^{k_\pi}p_{\pi,k}\ ,$$

$$P_{\pi,k}=\{(\rho,\varphi)\mid\varphi_{k-1}\le\varphi\le\varphi_k,0\le\rho\le M_k\}\ \text{и}\ P_\pi=\bigcup_{k=0}^{k_\pi}P_{\pi,k}$$

Множествата $p_{\pi,k}$ и $P_{\pi,k}$ се кружни исечоци со агол $\Delta\varphi_k$ и радиуси m_k и M_k, соодветно, а множествата p_π и P_π се степенести фигури составени од споменатите исечоци и се впишани во фигурата P и опишани околу фигурата P (цртеж 20), т.е. важи $p_\pi \subseteq P \subseteq P_\pi$, што значи

$$\mu(p_\pi) \le \mu(P) \le \mu(P_\pi)\,. \qquad (12)$$



Цртеж 20

Од формулата (11) добиваме

$$\mu(p_{\pi,k}) = \tfrac{m_k^2\Delta\varphi_k}{2} \text{ и } M(p_{\pi,k}) = \tfrac{M_k^2\Delta\varphi_k}{2}\,.$$

Сега, од лема 18.4 следува

$$\mu(p_\pi) = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{k_\pi} m_k^2\Delta\varphi_k \text{ и } \mu(P_\pi) = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{k_\pi} M_k^2\Delta\varphi_k\,.$$

Добиените суми соодветствуваат на горната и долната сума на Дарбу, s_π и S_π за функцијата $\frac{1}{2}\rho^2$. Сега, од неравенствата (12) следува $s_\pi \le \mu(P) \le S_\pi$ и, бидејќи

$$\lim_{d(\pi)\to 0} s_\pi = \lim_{d(\pi)\to 0} S_\pi = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi\,,$$

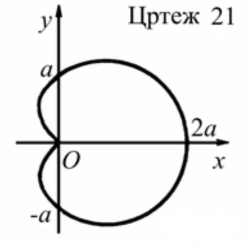
од последното неравенство добиваме дека важи

$$S = \mu(P) = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi\,. \,\blacklozenge \qquad (13)$$

18.13. Пример. а) Ќе ја определиме плоштината на фигурата ограничена со кардиоидата

$$\rho = a(1+\cos\varphi),\ 0 \le \varphi < 2\pi\,,$$

(цртеж 21). Со примена на формулата (12) наоѓаме

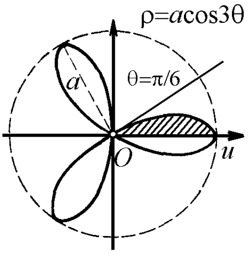


Цртеж 21

$$S = \tfrac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi$$
$$= \tfrac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\varphi + \tfrac{1+\cos 2\varphi}{2})d\varphi = \tfrac{3a^2}{2}.$$

б) Ќе ја пресметаме плоштината на фигурата ограничена со кривата $\rho = a\cos 3\theta,\ a > 0$.

Графикот на дадената крива, чија конструкција нема да ја разгледуваме, но ќе напоменеме дека таа може да се изведе со помош на алгоритамот разработен во глава IV, при што треба да се има предвид периодичноста на функцијата $\cos 3\theta$, е даден на црт. 22.



Цртеж 22

Плоштината на фигурата е шест пати поголема од плоштината на шрафираниот дел кој соодветствува на промената на аголот θ од 0 до $\frac{\pi}{6}$. Според тоа, користејќи ја формулата (13) добиваме

$$S=6\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}a^2\cos^2 3\theta d\theta=a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta d(3\theta)$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{\pi a^2}{4}$$

што значи дека бараната плоштина е еднаква на четвртина од плоштината на кругот со радиус a . ♦

в) Волумен на тело

18.14. Поим за волумен на тело. Поимот волумен на тело се воведува аналогно како и поимот плоштина на рамнинска фигура.

Нека во просторот $Oxyz$ е дадено тело $\boldsymbol{T}$. За секој $n\in\mathbf{N}$, системот рамнини

$$x=\frac{p}{10^n},\ y=\frac{q}{10^n},\ z=\frac{r}{10^n},\ p,q,r\in\mathbf{Z}\ ,$$

паралелни со координатните рамнини, го нарекуваме *десетична мрежа од ранг* n . Овие рамнини го делат просторот Oxy на коцки со страна $h_n=\frac{1}{10^n}$ и волуменот на секоја коцка е еднаква на h_n^3 . Со V_n да го означиме множеството квадрати на мрежата со ранг n кои имаат заеднички точки со $\boldsymbol{T}$. Јасно, $\boldsymbol{T}\subseteq V_n$ за секој $n\in\mathbf{N}$. Сите коцки на мрежата со ранг $n+1$ кои имаат заеднички точки со $\boldsymbol{T}$ се содржат во коцките со ранг n , но може да постојат коцки од мрежата со ранг $n+1$ кои се содржат во V_n , а немаат заеднички точки со $\boldsymbol{T}$. Затоа $V_{n+1}\subseteq V_n$. Според тоа,

$$V_0\supseteq V_1\supseteq\cdots\supseteq V_n\supseteq\cdots\supseteq\boldsymbol{F} \tag{14}$$

Секој V_n се состои од конечно или бесконечно множество коцки од ранг n . Ако V_n има конечно множество коцки, тогаш со $\mu(V_n)$ ќе го означиме збирот на волумените на коцките кои припаѓаат на V_n и бројот $\mu(V_n)$ ќе го наречеме волумен на V_n . Ако V_n се состои од бесконечно многу коцки, тогаш V_n не може да има конечен волумен и во овој случај ставаме $\mu(V_n)=+\infty$.

Од (14) следува

$$\mu(V_0)\geq\mu(V_1)\geq\mu(V_2)\geq\ldots\mu(V_n)\geq\ldots \tag{15}$$

што значи низата $\{\mu(V_n)\}$ чии членови во општ случај припаѓаат на $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ монотоно опаѓа. Ако множеството $\boldsymbol{T}$ не се простира во бесконечност, т.е. ако постои топка со центар во координатниот почеток и доволно голем радиус која го содржи $\boldsymbol{T}$, тогаш секое од множествата V_n се состои од конечно многу коцки, па затоа $\{\mu(V_n)\}$ е монотоно опаѓачка низа реални броеви. Бидејќи $\mu(V_n) > 0$ добиваме дека низата $\{\mu(V_n)\}$ конвергира, т.е. постои конечната граница

$$V = \lim_{n\to\infty} \mu(V_n). \tag{16}$$

Бројот V го нарекуваме *волумен на телото* $\boldsymbol{T}$ и го означуваме со $V = \mu(\boldsymbol{T})$. Да забележиме дека $\mu(\boldsymbol{T}) \geq 0$.

Аналогно како и во случајот на плоштина на рамнинска фигура се докажуваат следниве тврдења. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

18.15. Лема. Ако $\boldsymbol{T}' \subseteq \boldsymbol{T}''$, тогаш $\mu(\boldsymbol{T}') \leq \mu(\boldsymbol{T}'')$. ♦

18.16. Лема. Волуменот на прав цилиндар е еднаков на производот на плоштината на основата и должината на висината. ♦

18.17. Лема. Ако телото $\boldsymbol{T}$ со помош на рамнина, паралелна на една од координатните рамнини, е поделено на две тела $\boldsymbol{T}'$ и $\boldsymbol{T}''$, тогаш

$$\mu(\boldsymbol{T}) = \mu(\boldsymbol{T}') + \mu(\boldsymbol{T}''). \ ♦$$

г) Пресметување на волумен на ротационо тело

18.18. Теорема. Ако $f \in \mathbf{C}([a,b])$ и $f(x) \geq 0$, за $x \in [a,b]$, а Q е телото добиено со ротација на криволинискиот трапез P определен со графикот на функцијата $y = f(x)$, тогаш за волуменот $V = \mu(Q)$ на тоа тело имаме

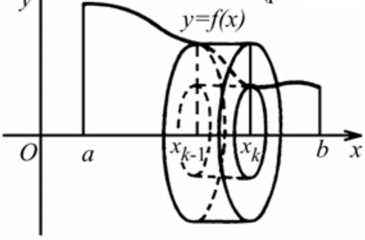
$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\, dx. \tag{17}$$

Доказ. Нека q_τ и Q_τ се телата добиени со ротација околу $x-$оската на степенестите фигури p_τ и P_τ кои соодветствуваат на некоја поделба τ на интервалот $[a,b]$. Од инклузијата $p_\tau \subseteq P \subseteq P_\tau$ следува инклузијата $q_\tau \subseteq Q \subseteq Q_\tau$, што значи

$$\mu(q_\tau) \leq \mu(Q) \leq \mu(Q_\tau). \tag{18}$$

Волумените $\mu(q_\tau)$ и $\mu(Q_\tau)$ се еднакви на сумите на волумените на цилиндрите од кои се составени и кои се добиваат со ротација на правоаголниците $p_{\tau,k}$ и $P_{\tau,k}$ (цртеж 23), и

$$\mu(q_\tau) = \sum_{k=0}^{k_\tau} \pi m_k^2 \Delta x_k\ ,\ \mu(Q_\tau) = \sum_{k=0}^{k_\tau} \pi M_k^2 \Delta x_k\ .$$



Цртеж 23

Од последните две равенства следува дека

$\mu(q_\tau)$ и $\mu(Q_\tau)$ се горна и долна сума на Дарбу за функцијата $\pi[f(x)]^2$ и затоа

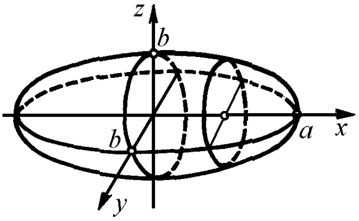
$$\lim_{d(\tau)\to 0}\mu(q_\tau)=\lim_{d(\tau)\to 0}\mu(Q_\tau)=\pi\int_a^b[f(x)]^2\,dx\,.$$

Конечно, формулата (17) следува од последните равенства и од неравенствата (18). ♦

18.19. Пример. а) При ротација на елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ околу $x-$оската, согласно со формулата (17) за волуменот на ротационото тело што се добива, имаме

$$V=\pi\int_{-a}^{+a}y^2dx=\pi\int_{-a}^{+a}b^2(1-\frac{x^2}{a^2})dx$$

$$=\pi b^2(x-\frac{x^3}{3a^2})\Big|_{-a}^{+a}=\frac{4}{3}\pi ba^2.$$



Цртеж 24

Лесно се гледа дека, ако ротацијата е околу $y-$оската, тогаш волуменот на телото е $\frac{4}{3}\pi ab^2$. Во случај кога $a=b$, всушност имаме ротација на круг со радиус a и притоа се добива топка со радиус a чиј волумен е еднаков на $\frac{4}{3}\pi a^3$.

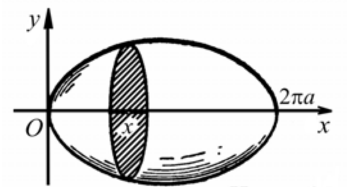
б) Ќе го пресметаме волуменот на телото кое се добива со ротација на првиот свод на циклоидата

$$x(t)=a(t-\sin t),y(t)=a(1-\cos t)$$

околу $x-$оската (цртеж 25).

Според формулата (17) имаме

$$V=\pi\int_0^{2\pi a}[f(x)]^2dx\,.$$



Цртеж 25

Воведуваме замена

$$x(t)=a(t-\sin t)\quad dx=a(1-\cos t)\,,\ y=a(1-\cos t)\,,$$

$t\in[0,2\pi]$ и добиваме

$$V=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=5\pi^2a^3\,.\ ♦$$

д) Плоштина на ротациона површина

18.20. Нека функцијата f е ненегативна на интервалот $[a,b]$, а $\tau=\{x_k\}_{k=0}^{k_\tau}$ е поделба на $[a,b]$. Во графикот на функцијата f ќе впишеме искршена линија γ_τ која соодветствува на поделбата τ (цртеж 26), т.е. искршена линија со темиња (x_k, y_k) каде

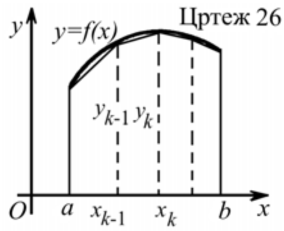
$$y_k = f(x_k), k = 0,1,2,...,k_\tau . \qquad (19)$$

Делот на оваа искршена линија со краеви во точките (x_{k-1}, y_{k-1}) и (x_k, y_k), кој го нарекуваме $k-$ти дел на γ_τ, при ротација околу $x-$оската опишува обвивка на потсечен конус (во случајот кога $y_{k-1} = y_k$ тоа е обвивка на цилиндар) чија плоштина е еднаква на $\pi(y_{k-1} + y_k)\Delta(\gamma_\tau)_k$, каде y_{k-1} и y_k се радиусите на основите, а $\Delta(\gamma_\tau)_k$ е должината на $k-$ти дел на γ_τ. Ако ставиме

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} , \ \Delta y_k = y_k - y_{k-1} ,$$

тогаш

$$\Delta(\gamma_\tau)_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} .$$



Според тоа, плоштината L_τ на површината добиена со ротација на искршената линија околу $x-$оската се изразува со формулата

$$L_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} \pi(y_{k-1} + y_k)\Delta(\gamma_\tau)_k = \pi\sum_{k=1}^{k_\tau} (y_{k-1} + y_k)\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} . \qquad (20)$$

Ако постои $L = \lim\limits_{d(\tau)\to 0} L_\tau$, тогаш бројот L го нарекуваме *плоштина на ротационата површина* добиена со ротација на f околу $x-$оската над интервалот $[a,b]$.

Нека функцијата f е непрекинато диференцијабилна на интервалот $[a,b]$. Од теоремата на Лагранж имаме

$$\Delta y_k = f'(\xi_k)\Delta x_k , \quad x_{k-1} \le \xi_k \le x_k , \ k = 1,2,...,k_\tau ,$$

па затоа

$$L_\tau = \pi\sum_{k=1}^{k_\tau} (y_{k-1} + y_k)\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k .$$

Да ја споредиме сумата L_τ со сумата

$$\sigma_\tau = 2\pi\sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k$$

која е интегрална сума за функцијата $2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$.

Функцијата f е непрекината на $[a,b]$, па затоа таа е рамномерно непрекината на $[a,b]$, т.е. за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што за секои $x, x' \in [a,b]$ за кои $|x' - x| < \delta$ важи $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Затоа, ако поделбата τ е таква што $d(\tau) < \delta$, тогаш $|y_{k-1} - f(\xi_k)| < \varepsilon$ и $|y_k - f(\xi_k)| < \varepsilon$. Функцијата $f'(x)$ е ограничена на $[a,b]$, па затоа и функцијата $\sqrt{1+f'^2(x)}$ е ограничена на $[a,b]$, т.е. постои $C>0$ таков што $\sqrt{1+f'^2(x)} \le C$ за секој $x\in[a,b]$. Сега имаме

$$\begin{aligned}
|L_\tau - \sigma_\tau| &\le \pi\sum_{k=1}^{k_\tau} |y_{k-1}+y_k-2f(\xi_k)|\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k \\
&\le \pi C\sum_{k=1}^{k_\tau} |y_{k-1}+y_k-2f(\xi_k)|\Delta x_k \\
&\le \pi C\sum_{k=1}^{k_\tau} (|y_{k-1}-f(\xi_k)|+|y_k-f(\xi_k)|)\Delta x_k \\
&\le 2\pi\varepsilon C\sum_{k=1}^{k_\tau} \Delta x_k = 2\pi\varepsilon C(b-a)
\end{aligned}$$

што значи $\lim\limits_{d(\tau)\to 0}(L_\tau - \sigma_\tau) = 0$ и бидејќи

$$\lim_{d(\tau)\to 0} \sigma_\tau = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$$

наоѓаме

$$L = \lim_{d(\tau)\to 0} L_\tau = \lim_{d(\tau)\to 0} \sigma_\tau = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\ .\ \blacklozenge$$

18.21. Пример. Плоштината на ротационото тело кое се добива со ротација на еден свод на функцијата $y=\sin x$ изнесува

$$L = 2\pi\int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx = -2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}dt = 2\pi[\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}]\ .\ \blacklozenge$$

ѓ) Должина на лак на крива

18.22. На изучувањето на рамнинските и просторните криви посебно ќе се навратиме, а овде ќе се осврнеме само на примената на Римановиот интеграл за пресметување на должината на лак на рамнинска крива.

Нека $\varphi,\psi\in \mathbf{C}([a,b])$. Множеството точки во рамнината

$$\Gamma = \{(x,y)\,|\, x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in[a,b]\}$$

го нарекуваме *непрекината рамнинска крива.*

Нека $\pi=\{t_i\}_{i=0}^{k_\pi}$ е поделба на интервалот $[a,b]$ и Γ_π е искршената линија која се добива со поврзување на паровите соседни точки $(\varphi(t_i),\psi(t_i))$ и $(\varphi(t_{i+1}),\psi(t_{i+1}))$ на Γ со отсечки. Должината на Γ_π е еднаква на

$$l(\Gamma_\pi)=\sum_{i=0}^{k_\pi-1}\sqrt{(\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i))^2+(\psi(t_{i+1})-\psi(t_i))^2}\ .$$

Ако постои конечната граница

$$\lim_{d(\pi)\to 0} l(\Gamma_\pi)=l(\Gamma)\,, \tag{21}$$

тогаш кривата Γ ја нарекуваме *мерлива*, а границата $l(\Gamma)$ ја нарекуваме *должина на кривата* Γ.

18.23. Теорема. Ако $\varphi,\psi\in\mathbf{C}^{(1)}([a,b])$, тогаш

$$l(\Gamma)=\int_a^b\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt\ .$$

Доказ. Од теоремата на Лагранж следува дека за секој $i=0,1,2,...,k_\pi-1$ постојат $\xi_i,\eta_i\in[t_i,t_{i+1}]$ такви што

$$\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)=\varphi'(\xi_i)\Delta t_i,\quad \psi(t_{i+1})-\psi(t_i)=\psi'(\eta_i)\Delta t_i\,,$$

каде $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$. Според тоа,

$$l(\Gamma_\pi)=\sum_{i=0}^{k_\pi-1}\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(\eta_i))^2}\,\Delta t_i=\sum_{i=0}^{k_\pi-1}\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(\xi_i))^2}\,\Delta t_i+r_\pi\,, \tag{22}$$

каде

$$r_\pi=(\sum_{i=0}^{k_\pi-1}\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(\eta_i))^2}-\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(\xi_i))^2}\,)\Delta t_i\,.$$

Јасно, $\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}\in\mathbf{C}([a,b])$, па од теорема 11.5 имаме $\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}\in\mathbf{R}([a,b])$ и притоа важи

$$\lim_{d(\pi)\to 0}\sum_{i=0}^{k_\pi-1}\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(\xi_i))^2}\,\Delta t_i=\int_a^b\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt\ . \tag{23}$$

Освен тоа, ако се искористи дека за секои $u,v,w\in\mathbf{R}$ е исполнето неравенството

$$|\sqrt{u^2+v^2}-\sqrt{u^2+w^2}\,|\le|\,v-w\,|,$$

тогаш за r_π добиваме

$$|\,r_\pi\,|\le\sum_{i=0}^{k_\pi-1}|\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(\eta_i))^2}-\sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2+(\psi'(\xi_i))^2}\,|\,\Delta t_i$$
$$\le\sum_{i=0}^{k_\pi-1}|\,\psi'(\eta_i)-\psi'(\xi_i)\,|\Delta t_i\le\sum_{i=0}^{k_\pi-1}\omega_i(\psi')\Delta t_i\,,$$

па затоа

$$\lim_{d(\pi)\to 0} r_\pi = 0 . \tag{24}$$

Конечно, од равенствата (22), (23) и (24) следува

$$l(\Gamma) = \lim_{d(\pi)\to 0} l(\Gamma_\pi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt . \ \blacklozenge$$

18.24. Забелешка. Може да се докажат следниве тврдења:

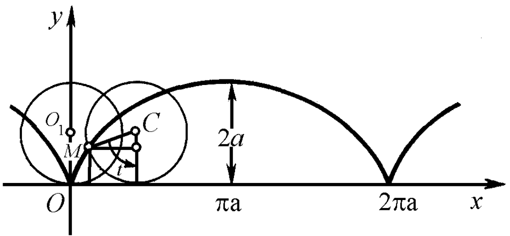
а) ако $f \in \mathbf{C}^{(1)}([a,b])$ и $\Gamma = \{(x,y) \mid y = f(x), x \in [a,b]\}$, тогаш кривата Γ е мерлива и притоа важи $l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$;

б) ако $\rho \in \mathbf{C}^{(1)}([\theta_1,\theta_2])$ и $\Gamma = \{(\theta,\rho) \mid \rho = \rho(\theta), \theta \in [\theta_1,\theta_2]\}$ е крива зададена во поларни координати, тогаш кривата Γ е мерлива и притоа важи

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\, d\theta .$$

Доказите на последните две тврдења ги оставаме на читателот за вежба.

18.25. Пример. а) Ако во координатниот почеток, на x – оската поставиме кружница со радиус a и таа се тркала без лизгање, тогаш точката која на почетокот се совпаѓа со координатниот почеток опишува крива која во литературата е позната како циклоида, чии параметарски равенки се



Цртеж 27

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t) ,$$

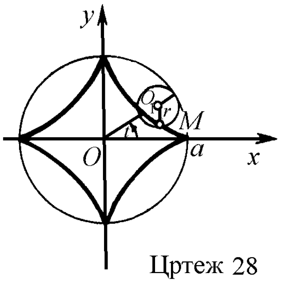
(цртеж 27).

Ќе ја определиме должината на лакот на првиот свод на циклоидата. Имаме, $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t, t \in [0, 2\pi]$, па од теорема 18.23 следува дека

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} 2a \sin\tfrac{t}{2}\, dt = 8a .$$

б) Ќе ја определиме вкупната должина на астроидата

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} . \tag{25}$$



Цртеж 28

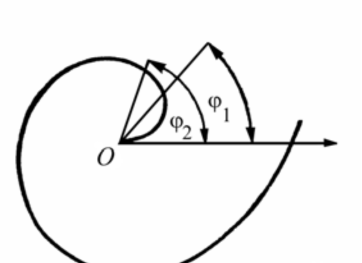
Релацијата (25) е парна и по променливата x и по променливата y, што значи дека астроидата се состои од четири лакови кои имаат еднаква должина, (цртеж 28). Според тоа, доволно е да ја пресметаме должината на лакот на кривата $y=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ кој се наоѓа во првиот квадрант. Имаме,

$$y'=-x^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}},\ \sqrt{1+y'^2}=a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}},\ x\in[0,a]$$

па затоа

$$l=4L=4\int\limits_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx=6a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}\Big|_0^a=6a\ .$$

в) Спиралата на Архимед $\rho=a\varphi$ е траекторија на материјална точка која рамномерно се движи по поларната оска и истовремено рамномерно ротира околу полот (цртеж 29). Ќе ја пресметаме должината на првиот завој.



Цртеж 29

Имаме,

$$\rho=a\varphi,\ \rho'=a,\ \varphi\in[0,2\pi]\ ,$$

па затоа

$$l=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(a\varphi)^2+a^2}\,d\varphi=a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi=a\int\limits_0^{2\pi}(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}+\frac{\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}})d\varphi$$

$$=\frac{a}{2}[\varphi\sqrt{1+\varphi^2}+\ln(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2})]\Big|_0^{2\pi}=\frac{a}{2}[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})].$$

19. ЗАДАЧИ

А) Неопредел интеграл

1. Пресметајте го интегралот $\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

2. Пресметајте го интегралот $I=\int\frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}$.

3. Со методот на смена на променливи пресметајте ги интегралите:

   а) $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$, б) $\int\frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$, в) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$,

   г) $\int\frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}dx$, д) $\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x^2}$ и ѓ) $\int\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\sin x\cos x}dx$.

4. Решете го интегралот $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}}$.

5. Пресметајте го интегралот $\int\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}dx$.

6. Користејќи го методот на парцијална интеграција решете ги интегралите:

а) $\int x\sin\sqrt{x}dx$, б) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$, в) $\int e^{2x}\sin^2 xdx$,

г) $\int x^3 \ln xdx$, д) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$ и ѓ) $\int \frac{\arcsin x}{x^3}dx$.

7. Пресметајте ги интегралите:

а) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$, б) $\int \frac{xdx}{x^3-3x+2}$, в) $\int \frac{dx}{x^3+1}$,

г) $\int \frac{dx}{x^3-1}$, д) $\int \frac{dx}{x^4+1}$ и ѓ) $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

8. Пресметајте ги интегралите:

а) $\int \sqrt{x^3+x^4}dx$, б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$ и в) $\int \sqrt[3]{3x-x^3}dx$.

9. Пресметајте ги интегралите:

а) $\int \frac{8x^4+7x^3+6x^2+2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$, б) $\int \frac{xdx}{(x+2)^3\sqrt{x^2+1}}$,

в) $\int \frac{2x^3-x^2+x+1}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}dx$ и г) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. Пресметајте ги интегралите:

а) $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$, в) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$,

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$, д) $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$, ѓ) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

е) $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx,\ x\neq -1$, ж) $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(4-x)}}$ и з) $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$.

11. Пресметајте ги интегралите:

а) $\int \operatorname{tg}^3 xdx$, б) $\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$, в) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$,

г) $\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$, д) $\int \frac{dx}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ и ѓ) $\int \frac{\cos^4 xdx}{\sin^3 x}$.

Б) Определен интеграл

12. Пресметајте $\int\limits_0^{\sqrt{a_n}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, каде a_n е $n-$от член на низата

$$a_0=\frac{1}{2},\ a_n=4a_{n-1}-4a_{n-1}^2,\ n=1,2,\dots.$$

13. Решете ја по x равенката $\int\limits_{\sqrt{2}}^{x} \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}}=\frac{\pi}{12}$.

14. Пресметајте го интегралот $I=\int\limits_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}dx}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(3+x)}}$.

15. Најдете ја најголемата вредност на интегралот

$$\int_0^y \sqrt{x^4+(y-y^2)^2}\,dx,\ y\in[0,1].$$

16. Користејќи дека $\int_0^{\pi} x\ln\sin x dx = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$, пресметајте $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$.

17. Нека $r\in\mathbf{N}$. Докажете дека

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2r+1)\varphi}{\sin\varphi}d\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ и } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2r\varphi}{\sin\varphi}d\varphi = 2[1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+...+\tfrac{(-1)^{r-1}}{2r-1}].$$

18. Нека

$$f_1\in\mathbf{R}([0,M]) \text{ и } f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)dt,\ n=1,2,....$$

Докажете дека функцијата $\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ е определена и непрекината на интервалот $[0,M]$, со исклучок можеби во точките на прекин на функцијата $f_1(x)$. Најдете едноставен израз за функцијата $\varphi(x)$.

19. Најдете ги сите функции $f\in\mathbf{C}^{(1)}(\mathbf{R})$ такви што

$$(f(x))^2=\int_0^x[(f(t))^2+(f'(t))^2]dt+2000, \text{ за секој } x\in\mathbf{R}.$$

20. Нека $a>0, b>0$ и $f(x)$ е нелинеарна функција определена на $[0,a]$ таква што $f(0)=0$, $f(a)=b$ и $f(x)\geq 0, f''(x)\geq 0$, за секој $x\in[0,a]$. Докажете го неравенството

$$2\pi\int_0^a f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx<\pi b\sqrt{a^2+b^2}.$$

21. Докажете дека $I=\int_0^{2\pi}\sin x^2 dx>0$.

22. а) Докажете дека ако $f\in\mathbf{C}(\mathbf{R})$ и f е периодична со период T, тогаш

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx.$$

б) Пресметајте го интегралот

$$I=\int_0^{2000\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx.$$

23. Докажете дека ако $f\in\mathbf{C}(\mathbf{R})$ и f е периодична со период T, тогаш функцијата

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt,\ x\in\mathbf{R},$$

во општ случај е збир на линеарна функција и периодична функција со период T.

24. Нека

$$f\in\mathbf{C}([0,1]),\ \int_0^1 f(x)dx=0 \text{ и } \int_0^1 xf(x)dx=0.$$

Докажете дека функцијата f има барем две нули.

25. Дали постои ненегативна, непрекината и ненулта функција $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ таква што $\int_0^x f(t)dt\geq f(x)$, за секој $x\in[0,1]$.

26. Нека $f\in\mathbf{C}([a,b])$. Докажете дека следниве тврдења се еквивалентни:

a) за секој $x\in(a,b)$ и за секој $\varepsilon>0$ таков што $[x-\varepsilon,x+\varepsilon]\subseteq[a,b]$ важи

$$2f(x)=f(x-\varepsilon)+f(x+\varepsilon);$$

b) за секој $x\in(a,b)$ и за секој $\varepsilon>0$ таков што $[x-\varepsilon,x+\varepsilon]\subseteq[a,b]$ важи

$$f(x)=\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)dt;$$

в) $f(x)=kx+l$, за секој $x\in[a,b]$.

27. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е позитивна, непрекината и периодична функција со период 1. Докажете дека за секој $\alpha\in\mathbf{R}$ важи $\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+\alpha)}dx\geq 1$.

28. Нека $f:[0,6]\to\mathbf{R}$ ги задоволува условите

1) $|f(x)|\leq 1$, за секој $x\in[0,6]$,

2) $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$, за секои $x,y\in[0,6]$,

3) $\int_0^6 f(x)dx=0$ и

4) $\int_0^6 f^2(x)dx=\frac{14}{3}$.

Докажете дека $f(3)=0$.

29. Нека $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ е ненегативна, непрекината и конкавна функција таква што $f(0)=1$. Докажете дека

$$\int_0^1 xf(x)dx\leq\frac{2}{3}[\int_0^1 f(x)dx]^2.$$

30. Нека $f\in\mathbf{C}([a,b])$ и

$$\lim_{h\to 0} h^{-2}\int_0^h [f(x+u)-f(x)]du = 0,$$

за секој $x \in (a,b)$. Докажете дека $f = \text{const}$.

31. Нека $f, g \in \mathbf{C}([a,b])$. Докажете дека ако за секој $x \in [a,b]$ важи

$$f(x) = \int_a^x f(t)g(t)dt,$$

тогаш $f(x) = 0$ за секој $x \in [a,b]$.

32. Нека $f \in \mathbf{C}([a,b])$ и

$$\lim_{h\to 0} h^{-3}\int_0^h [f(x+u)-2f(x)+f(x-u)]du = 0,$$

за секој $x \in (a,b)$. Докажете дека f е линеарна функција.

33. Нека

$$f \in \mathbf{C}([0,1]) \text{ и } \int_0^1 x^k f(x)dx = 0 \text{, за } k = 0,1,2,...,n-1.$$

Докажете дека функцијата f има барем n нули на интервалот $[0,1]$.

34. Нека

$$f \in \mathbf{C}([0,1]) \text{ и } \int_0^1 x^k f(x)dx = 0,$$

за секој $n \in \mathbf{N}$. Докажете дека функцијата $f(x) = 0$ за секој $x \in [0,1]$.

35. Користејќи ја интегралната теорема за средна вредност, определете го знакот на интегралот:

$$I = \int_{-2}^{2} x^3 2^x dx$$

36. Согласно со интегралната теорема за средна вредност, ако $f \in \mathbf{C}([a,b])$, тогаш постои $\xi \in [a,b]$ таков што

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

Испитајте кога ќе имаме две различни точки ξ за кои е точно горното р-авенство, ако $f(x) = px^2 + qx + r,\ p \neq 0$.

37. Нека $f(x)$ е непрекината, ненегативна и монотоно растечка функција определена на интервалот $[a,b]$. Од интегралната теорема за средна вредност следува дека за секој $p > 0$ постои еден и само еден реален број $x_p \in [a,b]$ таков што

$$f^p(x_p)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(t)dt\,.$$

Најдете $\lim\limits_{p\to\infty} x_p$.

38. Нека $f,\varphi\in \mathbf{C}(\mathbf{R})$, функцијата f е конвексна функција и $C>0$. Докажете дека

$$f(\frac{1}{C}\int_0^C \varphi(x)dx)\le \frac{1}{C}\int_0^C f(\varphi(x))dx\,.$$

39. а) Нека $\varphi\in \mathbf{C}([a,b])$, $\varphi([a,b])=[m,M]$, $f\in \mathbf{C}([m,M])$ и f е конвексна функција. Докажете дека

$$f(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)dx)\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varphi(x))dx\,.$$

б) Нека $g\in \mathbf{C}([a,b])$ и $g(x)>0$, за секој $x\in[a,b]$. Докажете дека

$$e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln g(x)dx}\le \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\,.$$

в) Нека $g\in \mathbf{C}([a,b])$ и $g(x)\ge\alpha>0$, за секој $x\in[a,b]$. Докажете дека

$$\frac{b-a}{\int_a^b \frac{dx}{g(x)}}\le e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln g(x)dx}\,.$$

Забелешка. Броевите

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx,\ e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln g(x)dx}\ \text{ и }\ \frac{b-a}{\int_a^b \frac{dx}{g(x)}}$$

ги нарекуваме *аритметичка, геометриска и хармониска вредност на функцијата* f на интервалот $[a,b]$ и ги означуваме со $A(g), G(g)$ и $H(g)$, соодветно. Според тоа, важи $H(g)\le G(g)\le A(g)$.

40. Нека $f,p\in \mathbf{C}([a,b])$, $p(x)\ge 0, \int_a^b p(x)dx>0, f([a,b])=[m,M]$ и ограничената функција φ е конвексна на $[m,M]$. Докажете дека

$$\varphi(\int_a^b f(x)p(x)dx/\int_a^b p(x)dx)\le \int_a^b p(x)\varphi(f(x))dx/\int_a^b p(x)dx\,.$$

41. Нека f е непрекината и конвексна функција на $[a,b]$. Докажете дека

$$f(\frac{a+b}{2})(b-a)\le \int_a^b f(x)dx\le \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\,.$$

42. Докажете дека ако функцијата f е монотоно растечка на $[a,b]$, тогаш функцијата $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ е конвексна на $[a,b]$.

43. Докажете дека ако $f\in \mathbf{C}^{(1)}([a,b])$ и $f(a)=0$, тогаш

$$M^2\leq (b-a)\int\limits_a^b [f'(x)]^2dx,$$

каде $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

44. Пресметајте го нтегралот:

а) $\int\limits_{0,5}^{31,5}[x]dx$, б) $\int\limits_0^2[e^x]dx$,

в) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}$ и г) $\int\limits_0^{\frac{3}{4}}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

45. Докажете дека:

а) $\int\limits_0^6[x]\sin\frac{\pi x}{6}dx=\frac{30}{\pi}$ и б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{11\pi}{2}}x\,\mathrm{sgn}(\cos x)dx=-\frac{93}{32}\pi$.

46. Пресметајте $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ ако:

а) $S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$ и б) $S_n=\frac{1}{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+...+\sqrt{1+\frac{n}{n}})$

47. Пресметајте ја должината на лакот на кривата зададена со:

а) $\Gamma=\{(x,y)\,|\,x=\frac{y^2}{4}-\frac{1}{2}\ln y,\ y\in[1,e]\}$,

б) $\Gamma=\{\rho=\frac{p}{1+\cos\varphi},\ \varphi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\}$,

в) $\Gamma=\{\rho=\frac{a}{\varphi},\ \varphi\in[0,2\pi]\}$,

г) $\Gamma=\{\rho=a(1+\cos\varphi),\ 0\leq\varphi\leq 2\pi\}$,

д) $\Gamma=\{(x,y)\,|\,x=a(\cos t-\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t),\ t\in[0,2\pi]\}$ и

ѓ) $\Gamma=\{(x,y)\,|\,x=2a\cos\frac{t}{3}+a\cos\frac{2t}{3},\ y=2a\sin\frac{t}{3}-a\sin\frac{2t}{3}\}$.

48. а) Пресметајте ја плоштината на фигурата ограничена со кривите $y=\frac{8}{4+x^2}$ и $y=\frac{x^2}{4}$.

б) Пресметајте ја плоштината на фигурата ограничена со Декартовиот лист, кој е определен со $x^3+y^3-3axy=0$.

в) Докажете дека плоштината на фигурата ограничена со два последователни свиока на Архимедовата спирала $\rho=a\varphi$ е еднаква на $8\pi^3a^2$.

г) Пресметајте ја плоштината на фигурата ограничена со лемискатата на Бернули, дефинирана со $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$.

д) Пресметајте ја плоштината на фигурата ограничена со $x-$оската и првиот свод на циклоидата $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

ѓ) Пресметајте ја плоштината на фигурата ограничена со астроидата $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

49. а) Пресметајте ја плоштината и волуменот на торус, тело кое се добива со ротација на кружницата $x^2 + (y-a)^2 = R^2,\ a > R$ околу $x-$оската.

    б) Пресметајте го волуменот и плоштината на телото добиено со ротација на првиот свод на циклоидата $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ околу $x-$оската.

    в) Пресметајте го волуменот и плоштината на телото добиено со ротација на астроидата $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ околу $x-$оската.

    г) Пресметајте го волуменот и плоштината на телото добиено со ротација на кардиоидата $x = 2a\cos t - R\cos 2t,\ y = 2a\sin t - a\sin 2t$, $t \in [0, 2\pi]$ околу $x-$оската.

VI ГЛАВА

БРОЈНИ РЕДОВИ

1. ПОИМ ЗА РЕД. ОСНОВНИ СВОЈСТВА

1.1. Дефиниција. Нека е дадена низата реални броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Формираме нова низа $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n = 1,2,\ldots$. Парот низи $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ го нарекуваме *броен ред со општ член* a_n и го означуваме со

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,. \tag{1}$$

Членовите на почетната низа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ги нарекуваме *членови на редот* (1), а членовите на низата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *-парцијални суми на редот.* Притоа a_n го нарекуваме $n-$*ти член на редот,* а конечниот збир S_n го нарекуваме $n-$*та парцијална сума на редот.*

1.2. Дефиниција. Редот чии членови се членовите на редот (1), почнувајќи од $(k+1)-$от член на редот (1), земени во истиот редослед како и во почетниот ред, го нарекуваме $k-$*ти остаток на редот* (1) и го означуваме со $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$.

1.3. Дефиниција. Ако низата парцијални суми на редот (1) конвергира, тогаш за редот ќе велиме дека е *конвергентен,* а ако дивергира, тогаш ќе велиме дека е *дивергентен ред.*

Ако редот (1) конвергира, тогаш границата $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ја нарекуваме *сума на редот* (1) и пишуваме $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

1.4. Забелешка. Ако редот (1) конвергира, тогаш ќе користиме еден ист симбол $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ како за означување на редот, така и за означување на неговата сума.

1.5. Пример. Да го разгледаме геометрискиот ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \tag{2}$$

чии членови се членовите на геометриската прогресија $\{q^n\}_{n=0}^{\infty}$.

Ако $q=1$, тогаш $S_n = n$, па од $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ следува дека редот (2) дивергира.

Ако $q=-1$, тогаш $S_{2n}=1,\ S_{2n+1}=0,\ n=0,1,...$, што значи дека низата парцијални суми нема граница, т.е. редот (2) дивергира.

Ако $q \neq \pm 1$, тогаш

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{1-q} = 0$ за $|q|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{1-q} = \infty$ за $q>1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{1-q}$ не постои за $q<-1$ заклучуваме дека редот (2) конвергира за $|q|<1$, при што $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, и дивергира за $|q|\geq 1$. ♦

1.6. Ако $k-$от остаток на редот (1) конвергира, тогаш неговиот збир ќе го означиме со R_k, т.е.

$$R_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \tag{3}$$

и едноставно ќе го нарекуваме *остаток на редот.*

1.7. Теорема. Редот (1) е конвергентен ако и само ако редот $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ е конвергентен.

Доказ. Нека $S_m = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n$ и $T_m = \sum\limits_{n=k+1}^{m} a_n,\ m \geq k$. Тогаш важи равенството $T_m = S_m - \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$. Бидејќи збирот $\sum\limits_{n=1}^{k} a_n$ е константен, добиваме дека низата $\{T_m\}_{m=k+1}^{\infty}$ конвергира ако и само ако низата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, што значи редот $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако редот (1) конвергира. ♦

1.8. Теорема. Ако редот (1) конвергира, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказ. Ако редот (1) конвергира, тогаш низата парцијални суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Тогаш, од равенствата $a_n = S_n - S_{n-1}$, $n=2,3,...$ следува дека

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0 \,. \ \blacklozenge$$

1.9. Забелешка. Од претходната теорема непосредно следува дека геометрискиот ред разгледан во пример 1.5 е дивергентен за $|q| \geq 1$.

Теорема 1.8 дава потребен, но не и доволен услов за да еден ред конвергира. Имено, за хармонискиот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ важи

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \,,$$

но тој не е конвергентен, во што подоцна ќе се увериме.

1.10. Теорема. Ако редовите $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергираат, при што нивните суми се еднакви на S' и S'', соодветно, тогаш за секои $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$, исто така, конвергира и ако S е неговата сума, тогаш $S = \alpha S' + \beta S''$.

Доказ. Нека

$$S_n' = \sum_{k=1}^{n} a_k , \quad S_n'' = \sum_{k=1}^{n} b_k \ \text{ и } \ S_n = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) \,.$$

Тогаш,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k = \alpha S_n' + \beta S_n''$$

и бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n''$ постојат, добиваме дека и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ постои, т.е. редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ конвергира и притоа важи

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (\alpha S_n' + \beta S_n'') = \alpha \lim_{n\to\infty} S_n' + \beta \lim_{n\to\infty} S_n'' = \alpha S' + \beta S'' \,. \ \blacklozenge$$

1.11. Пример. Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, каде

$$a_n = \frac{2^{n+1} + 3^n}{6^n}, \ n \in \mathbf{N} \,.$$

Редовите

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n , \ b_n = \frac{1}{3^n}, \ n \in \mathbf{N} \ \text{ и } \ \sum_{n=1}^{\infty} c_n , \ c_n = \frac{1}{2^n}, \ n \in \mathbf{N}$$

се конвергентни и притоа важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 .$$

Бидејќи

$$a_n = \frac{2^{n+1}+3^n}{6^n} = 2\cdot\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n} = 2b_n + c_n, \text{ за секој } n \in \mathbf{N},$$

од претходно изнесеното и од теорема 1.10 следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2\cdot\frac{3}{2} + 2 = 5 . \ ♦$$

1.12. Последица. Редот (1) дивергира ако и само ако за секој $\alpha \neq 0$ редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ дивергира.

Доказ. Нека претпоставиме дека редот (1) дивергира и $\alpha \neq 0$. Ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ конвергира, тогаш од теорема 1.10 следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha}\alpha a_n$, т.е. редот (1) конвергира, што е противречност.

Обратно, нека претпоставиме дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ дивергира. Ако редот (1) конвергира, тогаш од теорема 1.10 следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ конвергира, што е противречност. ♦

2. ОПШТ КОШИЕВ КРИТЕРИУМ ЗА КОНВЕРГЕНЦИЈА НА БРОЕН РЕД

2.1. Теорема (Коши). Редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи

$$| a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p} | < \varepsilon . \qquad (1)$$

Доказ. За редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ја разгледуваме низата парцијални суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Од Кошиевиот критериум за конвергенција на низа применет на низата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$

следува дека оваа низа конвергира ако и само ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Но,

$$S_{n+p} - S_n = a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} - (a_1 + \ldots + a_n) = a_{n+1} + \ldots + a_{n+p},$$

па затоа низата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи неравенството (1). ♦

2.2. Пример. Да го разгледаме *хармонискиот ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Нека $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Тогаш, за секој $n \in \mathbf{N}$ при $p = n$ имаме

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= |S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \\ &> \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ пати}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon, \end{aligned}$$

т.е. неравенството (1) не е исполнето, од што следува дека хармонискиот ред е дивергентен. ♦

2.3. Пример. Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\alpha^n}{n^2}$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Ќе определиме $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Имаме,

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= \left| \frac{\cos\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{\cos\alpha^{n+2}}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{\cos\alpha^{n+p}}{(n+p)^2} \right| \\ &\le \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Според тоа, ако ставиме $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, тогаш $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, што според теорема 2.1 значи дека разгледуваниот ред конвергира. ♦

2.4. Забелешка. Од теорема 2.1 при $p = 1$ следува дека ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, тогаш за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ важи $|a_{n+1}| < \varepsilon$, што значи

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

Јасно, ова е уште еден доказ на потребниот услов за да редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, т.е. може да се каже дека теорема 1.8 е последица од теорема 2.1.

3. РЕДОВИ СО НЕНЕГАТИВНИ ЧЛЕНОВИ

3.1. Лема. Нека сите членови на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ се ненегативни, т.е.

$$a_n \ge 0,\ n = 1,2,... \tag{1}$$

Редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако низата од парцијални суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ содржи барем една конвергентна подниза.

Доказ. Од условот (1) следува дека $S_{n+1} = S_n + a_n \ge S_n$, т.е. низата парцијални суми на разгледуваниот ред монотоно расте. Сега тврдењето на лемата следува од фактот дека монотоно растечка низа е конвергентна ако и само ако содржи барем една конвергентна подниза. ♦

3.2. Пример. а) Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, $a > 1$. Ќе докажеме дека овој ред конвергира. За таа цел ќе ја разгледаме низата $\{S_{2^k}\}_{k=1}^{\infty}$ која е подниза од низата парцијални суми на редот $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Имаме,

$$S_{2^k-1} = S_{2^{k-1}-1} + \frac{1}{(2^{k-1})^a} + \frac{1}{(2^{k-1}+1)^a} + ... + \frac{1}{(2^k-1)^a} > S_{2^{k-1}-1} ,$$

што значи дека низата $\{S_{2^k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ монотоно расте. Од друга страна,

$$S_{2^k-1} = 1 + (\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a}) + (\frac{1}{4^a} + \frac{1}{5^a} + \frac{1}{6^a} + \frac{1}{7^a}) + ... + \underbrace{(\frac{1}{(2^{k-1})^a} + ... + \frac{1}{(2^k-1)^a})}_{2^{k-1} \text{ собирци}}$$

$$< 1 + \frac{2}{2^a} + ... + \frac{2^{k-1}}{2^{(k-1)a}} = 1 + \frac{1}{2^{a-1}} + ... + \frac{1}{2^{(k-1)(a-1)}}$$

$$< \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{(a-1)})^{m-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{a-1}}} = \frac{2^{a-1}}{2^{a-1}-1} .$$

Значи, $\{S_{2^k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ е монотона и ограничена, па затоа е конвергентна.

Според тоа, низата парцијални суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$, $a>1$ кој е со ненегативни членови содржи конвергентна подниза $\{S_{2^k-1}\}_{k=1}^{\infty}$. Конечно, од теорема 3.1 следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$, $a>1$ конвергира.

б) Ќе докажеме дека ако редовите $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ конвергираат, тогаш и редовите $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ конвергираат.

Имаме $|a_nb_n|\le\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$, за секој $n\ge 1$, па затоа

$$\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\le\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2+b_k^2}{2}=\tfrac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\sum_{k=1}^{n}b_k^2)\le\tfrac{1}{2}(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2+\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2)=c\,,$$

и бидејќи низата парцијални суми на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ е монотоно растечка, добиваме дека овој ред е конвергентен.

За низата парцијални суми на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ имаме

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2&=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2+2\sum_{k=1}^{\infty}|a_kb_k|+\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2\\&\le 2(c+\sum_{k=1}^{\infty}|a_kb_k|)\end{aligned}$$

и бидејќи таа е монотоно растечка, добиваме дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ конвергира.

в) Редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ конвергира, па од б) следува дека ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ конвергира, тогаш и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ конвергира. ♦

3.3. Теорема (за споредување). Нека $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ се редови со ненегативни членови и нека

$$a_n\le b_n,\ \text{за секој }n\in\mathbf{N}\,. \tag{2}$$

а) Ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, тогаш и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

б) Ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира, тогаш и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергира.

Доказ. Нека $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ и $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Од $a_n \geq 0$ и $b_n \geq 0$, за $n = 1,2,...$ следува дека низите парцијални суми $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ се монотоно растечки, а од (2) следува дека $s_n \leq S_n$, за $n = 1,2,...$.

а) Ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, тогаш низата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена одгоре, т.е. постои $M \in \mathbf{R}$ таков што $S_n < M$, за $n = 1,2,...$. Но, тоа значи дека $s_n < M$, за $n = 1,2,...$, т.е. монотоно растечката низа $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена одгоре, па затоа таа е конвергентна, што значи дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

б) Нека претпоставиме дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира. Тогаш, од а) следува дека и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, што е противречност. ♦

3.4. Пример. Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, $a < 1$. Бидејќи $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^a}$, за $n = 1,2,...$ и хармонискиот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира од претходната теорема следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, $a < 1$ дивергира. ♦

3.5. Последица. Ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е конвергентен ред со ненегативни членови и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена низа позитивни реални броеви, тогаш редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ е конвергентен.

Доказ. Ако $b_n \leq M$, за $n \in \mathbf{N}$, тогаш $a_n b_n \leq M a_n$, за $n \in \mathbf{N}$. Од теорема 1.10 следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M a_n$ е конвергентен. Сега тврдењето непосредно следува од теорема 3.3. ♦

3.6. Последица. Нека $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ се редови со ненегативни членови, $b_n > 0,\ n = 1,2,...$ и

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{a_n}{b_n} = t \text{, каде } 0 < t < \infty .$$

Тогаш редовите $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ истовремено се или конвергентни или дивергентни.

Доказ. Нека $\varepsilon < t$. Од условот $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = t$ следува дека постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ е исполнето неравенството $| \frac{a_n}{b_n} - t | < \varepsilon$, т.е. неравенството

$$(t-\varepsilon)b_n < a_n < (t+\varepsilon)b_n, \qquad n > n_0 . \tag{4}$$

Ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, тогаш од теорема 1.10 следува дека конвергира и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (t+\varepsilon)b_n$. Понатаму, од десното неравенство во (4) и од теорема 3.3 следува дека редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$ конвергира. Конечно, од теорема 1.7 следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

Ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, тогаш од теорема 1.7 следува дека и редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$ конвергира. Понатаму, од левото неравенство во (4) и од теорема 3.3 следува дека и редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (t-\varepsilon)b_{n_0+k}$ конвергира. Сега од теорема 1.10 следува дека редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{n_0+k}$ конвергира. Конечно, од теорема 1.7 заклучуваме дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира.

Ако наместо теорема 1.10 се искористи последица 1.12, тогаш останатиот дел од последицата се докажува аналогно. ♦

3.7. Пример. Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$. Бидејќи редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n})^n = 1$$

од последица 3.6 следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ е дивергентен. ♦

3.8. Теорема. Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ се редови со строго позитивни членови и нека

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad n = 1, 2, ... \tag{5}$$

Тогаш,

а) ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, тогаш и редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира,

б) ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира, тогаш и редот $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергира.

Доказ. Ако ги помножиме неравенствата $\frac{a_{k+1}}{a_k} \le \frac{b_{k+1}}{b_k}, \quad k = 1, 2, ..., n-1$ го добиваме неравенството $\frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1}$, односно неравенството $a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n$. Ставаме $\frac{a_1}{b_1} = M$ и добиваме $a_n \le M b_n$, за $n = 1, 2, ...$. Сега тврдењето на теоремата следува од теоремите 1.10 и 3.3 и последица 1.12. ♦

4. КРИТЕРИУМИ ЗА КОНВЕРГЕНЦИЈА НА РЕД СО НЕНЕГАТИВНИ ЧЛЕНОВИ

4.1. Во оваа точка ќе разгледаме некои специјални критериуми за конвергенција на редови со ненегативни членови.

Теорема (критериум на Коши). Нека за редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,, \; a_n \ge 0, \; n = 1, 2, ... \tag{1}$$

постои границата

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r \,. \tag{2}$$

Тогаш, од $r < 1$ следува дека редот (1) конвергира, од $r > 1$ следува дека редот (1) дивергира, а ако $r = 1$, тогаш не може да се тврди дали редот конвергира или дивергира.

Доказ. Нека $r < 1$ и нека q е таков што $r < q < 1$. Тогаш, од условот (2) следува дека постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ важи $\sqrt[n]{a_n} < q$, т.е. за секој $n > n_0$ важи $a_n < q^n$. Бидејќи редот $\sum_{k=1}^{\infty} q^{n_0+k}$ конвергира, од теорема 3.3 следува дека редот $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$ конвергира, па од теорема 1.7 добиваме дека редот (1) конвергира.

Ако $r > 1$, тогаш од условот (2) следува дека постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ важи $\sqrt[n]{a_n} > 1$, т.е. за секој $n > n_0$ важи $a_n > 1$. Според тоа, општиот член на редот (1) не тежи кон нула, па од теорема 1.8 добиваме дека редот (1) дивергира.

За комплетирање на доказот доволно е да разгледаме примери на конвергентен и дивергентен ред за кој $r = 1$. Така, на пример, за редовите $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ важи

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

но првиот е дивергентен, а вториот конвергентен. ♦

4.2. Пример. а) Да го разгледаме редот $\sum_{n=2}^{\infty} (\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$. Неговиот општ член е $a_n = (\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$, $n \geq 2$. Имаме,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n-1}{n+1})^{n-1} = e^{-2} < 1.$$

Од Кошиевиот критериум следува дека разгледуваниот ред конвергира.

б) Кошиевиот критериум во претходно изнесената форма не може да се примени на конвергентниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(5+(-1)^n)^n}$, бидејќи

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \text{ и } \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3}.$$

Исто така, овој критериум не може да се примени и на дивергентниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+(-1)^n)^n}{2^n}$ бидејќи

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 3 \text{ и } \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 2.$$

Кошиевиот критериум може да биде засилен на следниов начин:

- ако $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} < 1$*, тогаш редот* (1) *конвергира,*

- ако $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} > 1$*, тогаш редот* (1) *дивергира.*

Да забележиме дека Кошиевиот критериум во засилена форма не го решава прашањето на конвергентност на редот во случај кога $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = 1$, што може да се види од хармонискиот ред и од редот разгледан во пример 3.2. ♦

4.3. Теорема (критериум на Даламбер). Нека за редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ ,\ a_n > 0,\ n = 1,2,... \tag{3}$$

постои границата

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = r\ . \tag{4}$$

Тогаш, од $r < 1$ следува дека редот (1) конвергира, од $r > 1$ следува дека редот (1) дивергира, а ако $r = 1$, тогаш не може да се тврди дали редот конвергира или дивергира.

Доказ. Нека $r < 1$ и нека q е таков што $r < q < 1$. Тогаш, од условот (4) следува дека постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ важи $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, т.е. за секој $n > n_0$ важи $a_{n+1} < qa_n$. Според тоа,

$$a_{n_0+1} < qa_{n_0}, \qquad a_{n_0+2} < qa_{n_0+1} < q^2 a_{n_0},\ \ ..., \qquad a_{n_0+k} < q^k a_{n_0},\ \ ...$$

Бидејќи редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k a_{n_0}$ конвергира, од теорема 3.3 следува дека редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$, па од теорема 1.7 добиваме дека редот (3) конвергира.

Ако $r > 1$, тогаш од условот (4) следува дека постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ важи $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1$, т.е. за секој $n > n_0$ важи $a_{n+1} > a_n$. Според тоа, $a_{n_0} < a_{n_0+1} < a_{n_0+2} < ... < a_{n_0+k} < ...$, па затоа општиот член на редот (3) не тежи кон нула. Конечно, од теорема 1.8 добиваме дека редот (4) дивергира.

За комплетирање на доказот доволно е да разгледаме примери на конвергентен и дивергентен ред за кој $r = 1$. Така, на пример, за редовите $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, важи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

но првиот е дивергентен, а вториот конвергентен. ♦

4.4. Пример. а) Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)!)^2}{2^{n^2}}$. Од

$$a_{n+1} = \frac{((n+2)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \text{ и } a_n = \frac{((n+1)!)^2}{2^{n^2}}$$

следува

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}((n)!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0 < 1,$$

што според критериумот на Даламбер значи дека разгледуваниот ред конвергира.

б) Даламберовиот критериум во претходно изнесената форма не може да се примени на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$, бидејќи $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$, а $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8}$. Меѓутоа, овој ред, согласно со Кошиевиот критериум, е конвергентен (проверете!). Исто така, овој критериум не може да се примени и на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-(-1)^n}$, бидејќи $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 8$, а $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$. Меѓутоа, овој ред, согласно со Кошиевиот критериум, е дивергентен (проверете!).

Даламберовиот критериум може да биде засилен на следниот начин:

- *ако* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *тогаш редот* (1) *конвергира,*

- *ако* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *тогаш редот* (1) *дивергира.*

Да забележиме дека Даламберовиот критериум во засилена форма не го решава прашањето на конвергентност на редот во случај кога

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

за што погоре дадовме пример на ред за кој важат стриктни неравенства. ♦

4.5. Теорема (критериум на Кумер). Редот (3) конвергира ако и само ако постои позитивна низа $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} > t > 0, \tag{5}$$

каде t не зависи од n.

Доказ. Прво ќе докажеме дека условот (5) е потребен. Нека редот (3) конвергира и нека за низата парцијални суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ важи $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Низата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ дефинирана со $b_n = \frac{S-S_n}{a_n}$ е позитивна. Тогаш,

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{S-S_n}{a_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{S-S_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{S_{n+1}-S_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1 > 0 ,$$

т.е. исполнет е условот (5).

Ќе докажеме дека условот (5) е доволен. Нека постои позитивна низа $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, така што условот (5) е исполнет. Ако неравенствата

$$b_1 \frac{a_1}{a_2} - b_2 > t, \quad b_2 \frac{a_2}{a_3} - b_3 > t, \quad ..., \quad b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} > t,$$

ги помножиме со $a_2, a_3, ..., a_{n+1}$ соодветно, ги добиваме неравенствата

$$b_1 a_1 - b_2 a_2 > t a_2, \quad b_2 a_2 - b_3 a_3 > t a_3, \quad ..., \quad b_n a_n - b_{n+1} a_{n+1} > t a_{n+1},$$

со чие собирање добиваме $b_1 a_1 - b_{n+1} a_{n+1} > t \sum\limits_{k=2}^{n+1} a_k$. Од последното неравенство следува неравенството $b_1 a_1 > t \sum\limits_{k=2}^{n+1} a_k$, односно неравенството

$$a_1 + \frac{b_1 a_1}{t} > \sum_{k=1}^{n+1} a_k .$$

Значи, низата парцијални суми на редот (3) е ограничена и бидејќи е монотона растечка заклучуваме дека е конвергентна. Според тоа, редот (3) конвергира. ♦

4.6. Теорема. Нека $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k}$, $b_k > 0$ е дивергентен ред. Ако

$$\lim_{n \to \infty} (b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}) = r < 0 , \tag{6}$$

тогаш редот (3) дивергира.

Доказ. Ако е исполнет условот (6), тогаш постои n_0 таков што кога $n > n_0$ важи $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \leq 0$. Според тоа, постои n_0 таков што кога $n > n_0$ важи $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{b_{n+1}}}{\frac{1}{b_n}}$. Сега од теорема 3.8 следува дека редот $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ дивергира, што според теорема 1.7 значи дека и редот (3) дивергира. ♦

4.7. Теорема (критериум на Рабе). Нека за редот (3) постои границата

$$\lim_{n \to \infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = r . \tag{7}$$

Тогаш, од $r > 1$ следува дека редот (3) конвергира, а од $r < 1$ следува дека редот (3) дивергира.

Доказ. Нека $r > 1$ и нека $r = 1 + t,\ t > 0$. Тогаш, постои n_0 таков што кога $n > n_0$ важи

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)>1+t\ ,$$

т.е. важи

$$n\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)>t>0\,.$$

За низата $b_n=n,\ n=n_0+1,n_0+2,n_0+3,...$ е исполнет условот од теорема 4.5, па затоа редот $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ конвергира. Сега од теорема 1.7 следува дека редот (3) конвергира.

Нека $r<1$. Тогаш, постои n_0 таков што кога $n>n_0$ важи $n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)\le 1$, т.е. важи $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$, кога $n>n_0$. Но, хармонискиот ред дивергира, па затоа од теорема 3.8 следува дека редот $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ дивергира, што според теорема 1.7 значи дека и редот (3) дивергира. ♦

4.8. Пример. Да го разгледаме *Гаусовиот хипергеометриски ред*

$$1+\sum\frac{a(a+1)...(a+k-1)b(b+1)...(b+k-1)}{k!c(c+1)...(c+k-1)}x^k,\qquad a,b,c,x>0\,. \tag{8}$$

Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a(a+1)...(a+n-1)(a+n)b(b+1)...(b+n-1)(b+n)}{(n+1)!c(c+1)...(c+k-1)}x^{n+1}}{\dfrac{a(a+1)...(a+k-1)b(b+1)...(b+n-1)}{n!c(c+1)...(c+n-1)}x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+n)(b+n)x}{(n+1)(c+n)}=x$$

од критериумот на Даламбер заклучуваме дека редот (8) конвергира за $x<1$, а дивергира за $x>1$.

Ако $x=1$, тогаш од критериумот на Рабе имаме

$$\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty}n(\frac{(n+1)(c+n)}{(a+n)(b+n)}-1)=\lim_{n\to\infty}n\frac{(c+1-a-b)n+c-ab}{(a+n)(b+n)}=1+c-a-b$$

Значи, ако $x=1$ и $c>a+b$, тогаш редот е конвергентен, а ако $x=1$ и $c\le a+b$ Гаусовиот хипергеометриски ред е дивергентен. ♦

4.9. Теорема (критериум на Гаус). Нека е даден редот (3) и нека постои природен број n_0 таков што за секој $n>n_0$ важи

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=r+\frac{p}{n}+\frac{A_n}{n^{1+\alpha}}, \tag{9}$$

каде $|A_n|<K,$ за $n>n_0$ и $\alpha>0$.

Редот (3) е конвергентен ако $r>1$ или $r=1$ и $p>1$, а е дивергентен ако е $r<1$ или $r=1$ и $p\le 1$.

Доказ. Од равенството (9) следува $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = r$, па од критериумот на Даламбер заклучуваме дека редот (3) конвергира ако $r > 1$, а дивергира ако $r < 1$.

Нека $r = 1$. Тогаш од (9) добиваме $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = p + \frac{A_n}{n^\alpha}$, од каде добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = p$. Од критериумот на Рабе следува дека редот (3) конвергира ако $r = 1$ и $p > 1$, а дивергира ако $r = 1$ и $p < 1$.

Останува да го разгледаме случајот $r = p = 1$. Да ја разгледаме низата $b_n = n\ln n,\ n = 1,2,3,...$. Имаме

$$b_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = n\ln n\cdot(1 + \frac{1}{n} + \frac{A_n}{n^{1+\alpha}}) - (n+1)\ln(n+1) = \frac{A_n\ln n}{n^\alpha} - \ln(1 + \frac{1}{n})^{n+1}.$$

Сега од

$$|A_n| < K,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha} = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\ln(1 + \frac{1}{n})^{n+1} = 1$$

следува

$$\lim_{n\to\infty}(b_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}) = -1 < 0.$$

Конечно, од теорема 4.6 следува дека за $r = p = 1$ редот (3) дивергира. ♦

4.10. Пример. Испитајте ја конвергенцијата на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, каде

$$a_n = [\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2n}]^2.$$

Решение. За дадениот ред имаме

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = (\frac{2n+2}{2n+1})^2 = \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+4n+1} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{A_n}{n^2}.$$

Според тоа, во Гаусовиот критериум имаме $r = 1$, $p = 1$, што значи дека разгледуваниот ред дивергира. ♦

4.11. Теорема (логаритамски критериум). Нека за редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0,\ n = 1,2,... \tag{10}$$

постои границата

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = r,\quad -\infty \le r \le +\infty. \tag{11}$$

Тогаш, од $r < 1$ следува дека редот (11) дивергира, а од $r > 1$ следува дека редот (11) конвергира.

Доказ. Прво да забележиме дека за секој $n \geq 1$ важи

$$(1+\tfrac{1}{n})^n < e < (1+\tfrac{1}{n})^{n+1}$$

и како функцијата $\ln x$ монотоно расте на целата дефинициона област добиваме дека дека за секој $n \geq 1$ важи

$$\ln(1+\tfrac{1}{n})^n < \ln e = 1 < \ln(1+\tfrac{1}{n})^{n+1}\,. \tag{12}$$

Нека $r > 1$ и $1 < t < r$. Од дефиницијата на граница на низа следува дека постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ важи $n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq t$. Од последното неравенство и од (12) следува дека постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ важи

$$n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq t > t \ln(1+\tfrac{1}{n})^n = nt \ln(1+\tfrac{1}{n}) = n \ln(1+\tfrac{1}{n})^t\,,$$

односно постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ важи $\frac{a_n}{a_{n+1}} > (\frac{n+1}{n})^t$. Според тоа, постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ важи $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^t}}{\frac{1}{n^t}}$ и како редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}$, $t > 1$ конвергира од теорема 3.8 следува дека редот (10) конвергира.

Нека $r < 1$. Од дефиницијата на граница на низа следува дека постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ важи

$$n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 < \ln(1+\tfrac{1}{n-1})^n = n \ln(1+\tfrac{1}{n-1})\,,$$

односно постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ важи $\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n}{n-1}$. Според тоа, постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ важи $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$ и како редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, дивергира од теорема 3.8 следува дека редот (10) дивергира. ♦

4.12. Пример. Редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{e^n n!}$ конвергира, бидејќи

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} n \ln \frac{n^{n-1} e^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^n e^n n!} = \lim_{n\to\infty} n \ln \frac{n^{n-1} e}{(n+1)^{n-1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} n[1 - \ln(1+\tfrac{1}{n})^{n-1}] = \tfrac{3}{2} > 1.\ ♦\end{aligned}$$

4.13. Коментар. Критериумот на Рабе непосредно следува од логаритамскиот критериум. Обидете се да го докажете ова тврдење.

5. КОШИЕВ ИНТЕГРАЛЕН КРИТЕРИУМ ЗА КОНВЕРГЕНЦИЈА НА РЕДОВИ СО НЕНЕГАТИВНИ ЧЛЕНОВИ

5.1. Ако за даден ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ за секој $n \in \mathbf{N}$ може да се избере функција $f(x)$, дефинирана за $x \geq 1$ и таква што $a_n = f(n),$ тогаш при определени услови за конвергентноста или дивергентноста на дадениот ред може да се заклучува според тоа дали е конечна или е бесконечна границата $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_1^x f(t)dt$. Така, ја имаме следнава теорема.

5.2. Теорема (интегрален критериум на Коши). Нека претпоставиме дека функцијата $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ ги задоволува условите:

а) $f(x) \geq 0$, за секој $x \geq 1$ и

б) f монотоно опаѓа на интервалот $[1, +\infty)$.

Ако $a_n = f(n),\ \ n \geq 1$, тогаш редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{1}$$

конвергира или дивергира во зависност од тоа, дали е конечна или бесконечна границата

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)dt\ . \tag{2}$$

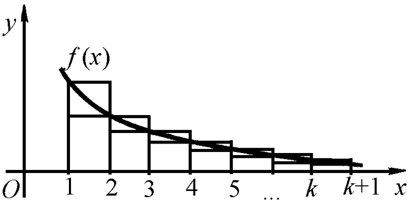
Доказ. Дефинираме функција

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt, \text{ за секој } x \geq 1.$$

Нека $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ и $x_1 < x_2$. Функцијата f е монотона на $[1, +\infty)$, па затоа таа е интеграбилна по Риман на интервалот $[x_1, x_2]$ и како $f(x) \geq 0$, за секој $x \geq 1$ од теоремите V 14.2 и V 14.6 следува

$$F(x_2) = \int_1^{x_2} f(t)dt = \int_1^{x_1} f(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt = F(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \geq F(x_1),$$

т.е. функцијата F монотоно расте на интервалот $[1, +\infty)$. Но, тоа значи дека границата $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ е конечна ако и само ако границата $\lim\limits_{n\to\infty} F(n)$ е конечна, т.е. ако и само ако $\sup\limits_{n\geq 1} F(n) < +\infty$.



Цртеж 1

Парцијалните суми на редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n,\ \ b_n = F(n+1)-F(n) = \int_n^{n+1} f(t)dt,\ \ n\geq 1$$

се

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = F(n+1)-F(1),\ \ n\geq 1$$

и затоа тој конвергира ако и само ако границата $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, т.е. границата (2) е конечна. Освен тоа, бидејќи $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$, за секој $x\in[n,n+1]$, цртеж 1, добиваме дека

$$f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1)dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \int_n^{n+1} f(n)dt = f(n)\text{, за секој } n\geq 1,$$

т.е.

$$f(n+1)\leq F(n+1)-F(n)\leq f(n)\text{, за секој } n\geq 1.$$

Ако неравенствата (3) ги собереме за $k=1,2,...,n$ добиваме

$$s_{n+1}-f(1)\leq S_n\leq s_n\text{, за секој } n\geq 1.$$

Од последните неравенства и од теорема 3.3 следува дека редот (1) конвергира ако и само ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, т.е. ако и само ако границата (2) е конечна. ♦

5.3. Пример. Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$. Лесно се гледа дека функцијата $f(x)=\frac{1}{x\ln^p x}$, $x>1$ е ненегативна и дека за секој p таа на интервалот (e^{-p},∞) монотоно опаѓа. Затоа, за испитување на конвергенцијата на дадениот ред може да се примени интегралниот критериум на Коши. Ако $p\neq 1$, тогаш

$$\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{dt}{t\ln^p t} = \int_2^x \frac{d(\ln t)}{\ln^p t} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1-p)\ln^{p-1}x} - \frac{1}{(1-p)\ln^{p-1}2} = \begin{cases} \frac{1}{(p-1)\ln^{p-1}2} < \infty, & \text{ако } p>1 \\ +\infty, & \text{ако } p<1, \end{cases}$$

а ако $p=1$, тогаш имаме

$$\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{dt}{t\ln t} = \lim_{x\to+\infty} \ln\ln x - \ln\ln 2 = +\infty .$$

Според тоа, редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$ конвергира за $p>1$ и дивергира за $p\leq 1$. ♦

5.4. Што се однесува до критериумот на Коши, може да се каже дека важи следниов попрецизен резултат.

Теорема. Нека претпоставиме дека функцијата $f \in \mathbf{C}([1,+\infty))$ ги задоволува условите:

а) $f(x) \geq 0$, за секој $x \geq 1$ и

б) f монотоно опаѓа на интервалот $[1,+\infty)$.

Тогаш граничната вредност

$$\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n} f(x)dx)$$

постои и е конечна.

Доказ. Да означиме $a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n} f(x)dx$. Ако ги собереме левите неравенства во неравенствата

$$f(k) \geq \int_{k}^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1),\ k = 1,2,...,n-1,$$

добиваме $\int_{1}^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(n)$, од што следува

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n} f(x)dx \geq f(n) > 0,$$

т.е. низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена оддолу.

Понатаму, за секој $n \in \mathbf{N}$ важи

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_{n}^{n+1} f(x)dx < 0,$$

што значи дека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа.

Конечно, низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа и е ограничена од долу, па затоа граничната вредност $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n} f(x)dx)$ постои и е конечна. ♦

5.5. Пример. Да ја разгледаме функција $f(x) = \frac{1}{x}$. Оваа функција ги задоволува условите од теорема 5.4, па затоа постои граничната вредност

$$\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_{1}^{n} \frac{dx}{x}) = \gamma\,. \qquad (3)$$

Бројот $\gamma = 0,5772156649...$ е познат како константа на Ојлер. Интересно е дека се уште не е утврдено дали овој број е алгебарски или трансцедентен. ♦

6. АЛТЕРНАТИВНИ РЕДОВИ

6.1. Дефиниција. Редот чии членови се наизменично позитивни и негативни (или обратно) го нарекуваме *алтернативен.*

Според тоа, редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е алтернативен ако $a_n a_{n+1} < 0, \quad n = 1,2,\dots$.

6.2. Теорема (критериум на Лајбниц). Ако

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{1}$$

и

$$a_n \ge a_{n+1} > 0,\ n = 1,2,\dots, \tag{2}$$

тогаш алтернативниот ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \tag{3}$$

конвергира. Притоа, ако S_n е парцијална сума на редот (3) и S е неговата сума, тогаш $|S - S_n| \le a_{n+1}$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

Доказ. Да ги разгледаме парните парцијални суми на редот (3). Имаме,

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Од неравенствата (3) следува дека низата $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ е монотоно растечка. Од друга страна, повторно од неравенствата (3) следува

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n-1} < a_1,$$

што значи дека низата $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена.

Според тоа, низата $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ е монотоно растечка и е ограничена, па затоа е конвергентна. Нека, $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$. За непарните парцијални суми имаме

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}.$$

Според тоа,

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S.$$

Конечно, од $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$ и $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$ следува $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, што значи редот (3) е конвергентен.

Бидејќи низата $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно расте и $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$, добиваме дека

$$S_{2n} \le S,\ \ n = 1,2,\dots.$$

Од друга страна, бидејќи

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \le S_{2n-1},\ n = 1,2,...$$

добиваме дека $\{S_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа и бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$, имаме

$$S \le S_{2n-1},\ n = 1,2,....$$

Од досега изнесеното следува дека

$$S_{2n} \le S \le S_{2n-1},\ n = 1,2,... \tag{4}$$

Од неравенствата (4) следуваат неравенствата

$$S - S_{2n} \le S_{2n+1} - S_{2n} \le a_{2n+1} \text{ и } S_{2n-1} - S \le S_{2n-1} - S_{2n} \le a_{2n},\ n = 1,2,...,$$

што значи дека за секој $n \in \mathbf{N}$ важи $|S - S_n| \le a_{n+1}$. ♦

6.3. Пример. Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n}}{2n-1}$. Бидејќи $\frac{\sqrt{n}}{2n-1} > 0$, за секој $n \in \mathbf{N}$, добиваме $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n}}{2n-1} > 0$, за секој $n \in \mathbf{N}$, што значи разгледуваниот ред е алтернативен. Од друга страна за секој $n \in \mathbf{N}$ е исполнето неравенството $\frac{\sqrt{n+1}}{2(n+1)-1} < \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$, па од монотоноста на функцијата $\operatorname{arctg} x$ добиваме

$$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n}}{2n-1} > \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n+1}}{2(n+1)-1} > 0, \text{ за секој } n \in \mathbf{N},$$

што значи дека е исполнет условот (2) од теорема 6.2. Од непрекинатоста на функцијата $\operatorname{arctg} x$ добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n}}{2n-1} = 0,$$

што значи дека е исполнет условот (1) од теорема 6.2.

Конечно, според критериумот на Лајбниц, теорема 6.2, следува дека алтернативниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n}}{2n-1}$ е конвергентен. ♦

6.4. На крајот од овој дел ќе ги разгледаме критериумите на Дирихле и Абел за редови чии членови се со произволен знак. За таа цел најпрво ќе ја разгледаме следнава лема.

Лема (равенства на Абел). Нека се $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ две низи и нека

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Тогаш, за секој $n \ge 1$ важи

$$a_1b_1 + ... + a_nb_n = s_1b_1 + (s_2 - s_1)b_2 + ... + (s_n - s_{n-1})b_n \tag{5}$$

и

$$a_1b_1+\ldots+a_nb_n=s_1(b_1-b_2)+s_2(b_2-b_3)+\ldots+s_{n-1}(b_{n-1}-b_n)+s_nb_n \qquad (6)$$

Доказ. Равенството (5) непосредно следува од равенствата $s_1=a_1$ и $a_n=s_n-s_{n-1}$, а равенството (6) се добива со прегрупирање на членовите во конечниот збир на десната страна на равенството (5). ♦

6.5. Теорема (критериум на Дирихле). Нека $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е позитивна опаѓачка низа и нека $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. Ако низата парцијални суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ е ограничена, тогаш редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ е конвергентен.

Доказ. Бидејќи позитивната низа $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ опаѓа и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, добиваме дека за секој $\varepsilon>0$ постои $n_0\in\mathbf{N}$ таков што $b_n=|b_n|<\varepsilon$, кога $n>n_0$.

Нека $|S_n|<M$, $n=1,2,3,\ldots$. Тогаш, од равенството (5) добиваме

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k| &= |S_n(b_n-b_{n+1})+\ldots+S_{n+p-1}(b_{n+p-1}-b_{n+p})+S_{n+p}b_{n+p}-S_nb_n|\\
&= |S_{n+1}(b_{n+1}-b_{n+2})+\ldots+S_{n+p-1}(b_{n+p-1}-b_{n+p})-S_n(b_{n+1}-b_{n+2})-S_n(b_{n+2}-b_{n+3})\\
&\qquad -\ldots-S_n(b_{n+p-1}-b_{n+p})-S_nb_{n+p}+S_{n+p}b_{n+p}|\\
&= |(S_{n+1}-S_n)(b_{n+1}-b_{n+2})+\ldots+(S_{n+p-1}-S_n)(b_{n+p-1}-b_{n+p})+(S_{n+p}-S_n)b_{n+p}|\\
&\le |S_{n+1}-S_n|(b_{n+1}-b_{n+2})+\ldots+|S_{n+p-1}-S_n|(b_{n+p-1}-b_{n+p})+|S_{n+p}-S_n|b_{n+p}\\
&\le 2M(b_{n+1}-b_{n+2})+2M(b_{n+2}-b_{n+3})+\ldots+2M(b_{n+p-1}-b_{n+p})+2Mb_{n+p}\\
&= 2Mb_{n+1}<2M\varepsilon,
\end{aligned}$$

за секој $n>n_0$ и за секој природен број p. Сега, од теорема 2.1 следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ е конвергентен. ♦

6.6. Последица. Ако низата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е негативна и монотоно расте и ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ ги задоволува условите од теорема 6.5, тогаш редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ е конвергентен.

Доказ. Навистина, од теорема 6.5 следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(-b_n)$ е конвергентен, што значи дека и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ е конвергентен. ♦

6.7. Пример. а) Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$. За низата парцијални суми на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{4}$ важи

$$|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{n\pi}{4}|=\frac{|\sin\frac{n\pi}{8}\sin\frac{(n+1)\pi}{8}|}{\sin\frac{\pi}{8}}\leq\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}},$$

т.е. таа е ограничена. Од друга страна, бидејќи за $n\geq 3$ важи $n^{n+1}>(n+1)^n$, добиваме $\frac{\ln n}{n}>\frac{\ln(n+1)}{n+1}$, што значи дека позитивната низа $b_n=\frac{\ln n}{n}$, почнувајќи од третиот член, монотоно опаѓа и притоа важи

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0\,.$$

Конечно, од критериумот на Дирихле следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$ е конвергентен.

б) Ќе докажеме дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ конвергира за секој $x\in\mathbf{R}$.

Навистина, ако $x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, тогаш тврдењето е очигледно. Нека $x\neq k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. За низата парцијални суми на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$ имаме

$$|\sum_{k=1}^{n}\sin kx|=\frac{1}{2|\sin\frac{x}{2}|}|\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\sin kx|=\frac{1}{2|\sin\frac{x}{2}|}|\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x|\leq\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|},\ n\geq 1\,.$$

Од друга страна, низата $b_n=\frac{1}{n}$, $n\geq 1$ монотоно опаѓа и важи

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

па од критериумот на Дирихле следува дека за секој $x\in\mathbf{R}$ редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ е конвергентен. ♦

6.8. Теорема (критериум на Абел). Ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ е конвергентен и низата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотона и ограничена, тогаш редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ е конвергентен.

Доказ. Нека $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ и $c_n=b-b_n$. Тогаш,

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n = S_nb - (a_1c_1 + a_2c_2 + ... + a_nc_n)\,. \tag{7}$$

Јасно, низата $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотона, ограничена и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. Од друга страна низата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, бидејќи е конвергентна, т.е. постои реален број M таковшто $|S_n| \le M$, $n = 1,2,3,...$. Од теорема 6.5 и последица 6.6 следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nc_n$ е конвергентен, т.е. постои $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, каде

$$s_n = a_1c_1 + a_2c_2 + ... + a_nc_n, \qquad n = 1,2,3,...\ . \tag{8}$$

Нека $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Од равенствата (7) и (8) имаме

$$\sum_{k=1}^{n} a_kb_k = S_nb - s_n, \quad n = 1,2,3,...$$

и бидејќи

$$\lim_{n\to\infty} (S_nb - s_n) = Sb - s$$

добиваме дека низата парцијални суми на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ конвергира, што значи дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ е конвергентен. ♦

6.9. Пример. Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$. Имаме,

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^n \cos(\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi n) = (-1)^n \cos\frac{\pi n}{n+1}$$

па затоа дадениот ред можеме да го запишеме во обликот $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi n}{n+1}$. Од критериумот на Лајбниц следува дека редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$ конвергира и бидејќи низата $b_n = \cos\frac{\pi n}{n+1}$, $n = 1,2,3,...$ е монотона и ограничена од критериумот на Абел добиваме дека разгледуваниот ред конвергира. ♦

7. АПСОЛУТНО КОНВЕРГЕНТНИ РЕДОВИ

7.1. Дефиниција. За редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

ќе велиме дека *апсолутно конвергира* ако редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} | a_n | \tag{2}$$

конвергира. Во натамошните разгледувања ако редот (1) конвергира ќе велиме дека тој *конвергира обично*.

7.2. Пример. Од критериумот на Лајбниц следува дека *редот на Лајбниц* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ конвергира, но тој не конвергира апсолутно, бидејќи редот чии членови се апсолутните вредности на дадениот ред е хармонискиот ред за кој докажавме дека е дивергентен. ♦

7.3. Лема. Редот (1) апсолутно конвергира ако и само ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таковшто за секој $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи $\sum_{k=n}^{n+p} | a_k | < \varepsilon$.

Доказ. Непосредно следува од општиот Кошиев критериум за конвергенција на броен ред (теорема 2.1). ♦

7.4. Теорема. Ако редот (1) апсолутно конвергира, тогаш тој конвергира и обично.

Доказ. Нека редот (1) конвергира апсолутно, т.е. нека конвергира редот (2). Од лема 7.3 следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таковшто за секој $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи $\sum_{k=n}^{n+p} | a_k | < \varepsilon$. Но, тоа значи дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таковшто за секој $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи $| \sum_{k=n}^{n+p} a_k | \le \sum_{k=n}^{n+p} | a_k | < \varepsilon$. Конечно, од теорема 2.1 следува дека редот (1) конвергира обично. ♦

7.5. Со

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^* \tag{3}$$

да го означиме редот чии членови се членовите на редот (1) земени, воопшто зборувано, во друг редослед.

Теорема. Ако редот (1) апсолутно конвергира, тогаш и редот (3) апсолутно конвергира и двата реда имаат една иста сума.

Доказ. Нека редот (1) конвергира апсолутно. Според теорема 7.4 редот (1) конвергира обично и нека неговата сума е S ,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{4}$$

Нека

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n = 1,2,3,\dots, \; S_m^* = \sum_{k=1}^{m} a_k^*, \quad m = 1,2,3,\dots,$$

$$\overline{S} = \sum_{n=1}^{\infty} | a_n | \text{ и } \overline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} | a_k |, \quad n = 1,2,3,\dots \; .$$

Бидејќи редот (1) апсолутно конвергира, добиваме дека за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таковшто

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} | a_n | = \overline{S} - \overline{S}_{n_0} < \tfrac{\varepsilon}{2}, \tag{5}$$

па затоа е исполнето неравенството

$$| S - S_n | = | \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n | \le \sum_{n=n_0+1}^{\infty} | a_n | < \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Понатаму, да избереме природен број m_0 таковшто парцијалната сума $S_{m_0}^*$ на редот (3) во себе ги содржи сите членови на редот (1) кои влегуваат во парцијалната сума S_{n_0}. Нека $m \ge m_0$. Ставаме $S_m^{**} = S_m^* - S_{n_0}$. Бидејќи апсолутната вредност на S_m^{**} е помала или еднаква на збирот од апсолутните вредности на собироците кои влегуваат во S_m^{**} и бидејќи сите тие имаат индекс кој е поголем од n_0, добиваме дека сите тие се содржат во збирот $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} | a_n |$. Сега, од неравенството (5) следува

$$| S_m^{**} | \le \sum_{n=n_0+1}^{\infty} | a_n | < \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Конечно, ако ги искористиме неравенствата (6) и (7), добиваме дека за $m \ge m_0$ важи

$$| S - S_m^* | = | S - (S_{n_0} + S_m^{**}) | \le | S - S_{n_0} | + | S_m^{**} | < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

што значи $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^* = S$.

Останува да докажеме дека редот (3) исто така апсолутно конвергира. Ова следува од веќе докажаното тврдење, ако го примениме на редот (2). Навистина, овој ред очигледно апсолутно конвергира и затоа редот $\sum_{m=1}^{\infty} | a_m^* |$, чии членови се апсолутните вредности на членовите на редот (3), не само што конвергира туку и неговата сума е еднаква на сумата на редот (2). ♦

7.6. Пример. а) Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. Од критериумот на Лајбниц следува дека овој ред е конвергентен, но бидејќи $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$, за $n > 1$ и хармонискиот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира, заклучуваме дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ не е апсолутно конвергентен.

Ќе докажеме како членовите на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ може да се земат во друг редослед, така што да се добие дивергентен ред. Да го разгледаме редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv (1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{4}})+\ldots+(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}})+\ldots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}})$$

кој од дадениот ред се добива така, што по три позитивни членови следува еден негативен и

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}},\ n \geq 1.$$

Притоа $8n > 6n-1, n \geq 1$, па затоа

$$\frac{2}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}} > 0$$

што значи

$$\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{2}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{1}{\sqrt{6n-5}} > 0,\ n \geq 1.$$

Според тоа, $a_n > \frac{1}{\sqrt{6n-5}} > \frac{1}{6n}$, $n \geq 1$ и бидејќи хармонискиот ред е дивергентен добиваме дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е дивергентен.

б) Во пример 7.2 видовме дека редот на Лајбниц $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ конвергира обично. Прво ќе ја определиме неговата сума. Нека

$$s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n},\ \gamma_n = s_n - \ln n \text{ и } S_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ n \geq 1.$$

Според пример 5.5 имаме

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n) = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\int_1^n\frac{dx}{x}) = \gamma$$

и како за секој $k \geq 1$ важи

$$\begin{aligned}S_{2k} &= 1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-...+\tfrac{1}{2k-1}-\tfrac{1}{2k} = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+...+\tfrac{1}{2k-1}+\tfrac{1}{2k}-2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+...+\tfrac{1}{2k})\\ &= s_{2k}-s_k = \ln 2k+\gamma_{2k}-\ln k-\gamma_k = \ln 2+\gamma_{2k}-\gamma_k\end{aligned}$$

добиваме

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = \ln 2 .$$

Понатаму, од

$$S_{2k+1} = S_{2k} + \tfrac{1}{2k+1}$$

следува

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \ln 2 ,$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \ln 2 .$$

Според тоа, редот на Лајбниц конвергира и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 . \tag{8}$$

Ќе докажеме дека при промена на редоследот на членовите од редот на Лајбниц може да се добие конвергентен ред кој има друга сума. Навистина, да го разгледаме редот

$$1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4}+...+\tfrac{1}{4k-3}+\tfrac{1}{4k-1}-\tfrac{1}{2k}+... \tag{9}$$

кој се добива од редот на Лајбниц со прегрупирање на собирците. За парцијалната сума S_{3k}^* на редот (9) имаме

$$\begin{aligned}S_{3k}^* &= 1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4}+...+\tfrac{1}{4k-3}+\tfrac{1}{4k-1}-\tfrac{1}{2k}\\ &= 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+...+\tfrac{1}{4k-1}+\tfrac{1}{4k}-(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+...+\tfrac{1}{4k})-(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+...+\tfrac{1}{2k})\\ &= s_{4k}-\tfrac{1}{2}s_{2k}-\tfrac{1}{2}s_k = \gamma_{4k}+\ln 4k-\tfrac{1}{2}\gamma_{2k}-\tfrac{1}{2}\ln 2k-\tfrac{1}{2}\gamma_k-\tfrac{1}{2}\ln k.\end{aligned}$$

Од последното равенство следува $\lim\limits_{k\to\infty} S_{3k}^* = \tfrac{3}{2}\ln 2$ и како

$$\lim_{k\to\infty} S_{3k+1}^* = \lim_{k\to\infty}(S_{3k}^* + \tfrac{1}{4k+1}) = \tfrac{3}{2}\ln 2$$

и

$$\lim_{k\to\infty} S_{3k+2}^* = \lim_{k\to\infty}(S_{3k}^* + \tfrac{1}{4k+1}+\tfrac{1}{4k+3}) = \tfrac{3}{2}\ln 2$$

заклучуваме дека

$$1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4}+...+\tfrac{1}{4k-3}+\tfrac{1}{4k-1}-\tfrac{1}{2k}+... = \tfrac{3}{2}\ln 2 .$$

Коментар. Овој пример покажува дека, ако редот (1) не е апсолутно конвергентен, но е конвергентен обично, тогаш ако членовите на редот се земат во друг редослед, може да се добие дивергентен или конвергентен ред кој има друга сума, што значи дека во општ случај не смее да се менува редоследот на членовите на даден ред. ♦

7.7. Теорема. Ако редот (1) апсолутно конвергира и $c \in \mathbf{R}$, тогаш редот и $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ апсолутно конвергира.

Доказ. Јасно, ако $c = 0$, тогаш тврдењето на теоремата важи.

Нека $c \neq 0$ и $\varepsilon > 0$ е дадено. Бидејќи редот (1) апсолутно конвергира, од лема 7.3 следува дека постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таковшто за секој природен број $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи $\sum_{k=n}^{n+p} |a_k| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Според тоа, за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таковшто за секој природен број $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи

$$\sum_{k=n}^{n+p} | ca_k | = | c | \sum_{k=n}^{n+p} | a_k | < | c | \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon ,$$

па од лема 7.3 следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ апсолутно конвергира. ♦

7.8. Теорема. Ако редовите $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ апсолутно конвергираат, тогаш и нивниот збир $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ апсолутно конвергира.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Бидејќи редовите $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ апсолутно конвергираат, од лема 7.3 следува дека постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таковшто за секој природен број $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи $\sum_{k=n}^{n+p} | a_k | < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\sum_{k=n}^{n+p} | b_k | < \frac{\varepsilon}{2}$.

Според тоа, за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таковшто за секој природен број $n > n_0$ и за секој $p \in \mathbf{N}$ важи

$$\sum_{k=n}^{n+p} | a_k + b_k | \leq \sum_{k=n}^{n+p} | a_k | + \sum_{k=n}^{n+p} | b_k | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

па од лема 7.3 следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ апсолутно конвергира. ♦

7.10. Нека се дадени два конвергентни реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{10}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{11}$$

чии суми се A и B соодветно. Аналогно на правилото за множење на конечни суми, ќе ги разгледаме сите парови од производи на членовите на овие редови $a_m b_n$ и од нив ќе ја составиме бесконечната матрица

$$\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots & a_ib_1 & \dots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \dots & a_ib_2 & \dots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_ib_3 & \dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \\ a_1b_k & a_2b_k & a_3b_k & \dots & a_ib_k & \dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \end{bmatrix} \tag{12}$$

Од овие производи можеме на повеќе начини да образуваме низа реални броеви, како на пример

$$a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_1b_3,\ a_2b_2,\ a_3b_1,\ a_1b_4,\ a_2b_3,\ a_3b_2,\ a_4b_1,\ \dots \tag{13}$$

и

$$a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_2,\ a_2b_1,\ a_1b_3,\ a_2b_3,\ a_3b_3,\ a_3b_2,\ a_3b_1,\ \dots \tag{14}$$

Теорема. Ако редовите (10) и (11) се апсолутно конвергентни, тогаш редот $\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{k_s}$ формиран од сите производи (12), земени во произволен редослед, е конвергентен и неговата сума е еднаква на AB.

Доказ. Од апсолутната конвергентност на редовите (10) и (11) следува дека редовите $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ се конвергентни и нивните суми да ги означиме со A^* и B^*, соодветно. Ќе докажеме дека редот $\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{k_s}$ апсолутно конвергира. Да ја разгледаме p – та парцијална сума на редот

$$\sum_{s=1}^{\infty} |a_{i_s} b_{k_s}| = |a_{i_1} b_{k_1}| + |a_{i_2} b_{k_2}| + |a_{i_3} b_{k_3}| + |a_{i_4} b_{k_4}| + |a_{i_5} b_{k_5}| + \dots \tag{15}$$

и со t да го означиме најголемиот од индексите $i_1, i_2, \dots, i_p, k_1, k_2, \dots, k_p$. Тогаш, очигледно важи

$$\sum_{s=1}^{p} |a_{i_s} b_{k_s}| \le (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_t|)(|b_1| + |b_2| + \dots + |b_t|) \le A^* B^*,$$

што значи дека редот (15) конвергира. Бидејќи редоследот на собирците е произволен, од теорема 7.4 следува дека редот $\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{k_s}$ формиран од сите производи (12), земени во произволен редослед, е конвергентен.

Останува да ја најдеме неговата сума. За таа цел неговите членови ќе ги запишеме во редослед како во низата (14) и ќе ги групираме во последователни групи на следниов начин

$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_3+a_3b_3+a_3b_2+a_3b_1)+... \qquad (16)$$

и изразите во заградите ќе ги сметаме за членови на редот (16). Ако со A_n и B_m ги означиме парцијалните суми на редовите (10) и (11), соодветно, тогаш низата парцијални суми на редот (16) ќе биде

$$A_1B_1,\ A_2B_2,\ A_3B_3,\ A_4B_4,\ ...,\ A_kB_k,\ ....$$

Од $\lim\limits_{n\to\infty} A_nB_n = AB$ следува дека сумата на редот (16) е еднаква на AB. ♦

7.10. Забелешка. При фактичкото множење на редовите (10) и (11) често пати е погодно производот да се претстави во облик на збир на низата (13) и притоа ако редовите (10) и (11) се апсолутно конвергентни, од претходната теорема добиваме

$$AB=a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+...=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\ , \qquad (17)$$

каде

$$c_n=\sum_{j=1}^{n} a_jb_{n-j+1}, \qquad n\in\mathbf{N}\,. \qquad (18)$$

Производот на редовите (10) и (11) во обликот (17) е познат под името *Кошиев производ*. Што се однесува до Кошиевиот производ Мартсен докажал:

> *ако редовите* (10) *и* (11) *се конвергентни и барем еден од нив е апсолутно конвергентен, тогаш и нивниот Кошиев производ е конвергентен ред.*

Следните примери покажуваат дека ако редовите (10) и (11) се конвергентни, но ниту еден од нив не е апсолутно конвергентен, тогаш нивниот Кошиев производ може но не мора да е конвергентен ред.

7.11. Пример. Како што знаеме, редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ е конвергентен, но не е апсолутно конвергентен. Ако го искористиме равенството (18), тогаш за $n-$от член на Кошиевиот производ на овој ред добиваме

$$c_n=\sum_{j=1}^{n} a_jb_{n-j+1}=\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{\sqrt{j}}\frac{(-1)^{n-j}}{\sqrt{n-j+1}}=(-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j(n-j+1)}}, \qquad n\in\mathbf{N}\,.$$

Од очигледното неравенство

$$n^2+j^2\ge 2nj\ge nj+j\,,\ \text{за секој}\ n\in\mathbf{N},\quad j=1,2,...,n$$

следува

$$\tfrac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{j(n-j+1)}}, \text{ за секој } n \in \mathbf{N}, \ j = 1, 2, ..., n$$

што значи дека

$$| c_n | = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j(n-j+1)}} \geq n \cdot \tfrac{1}{n} = 1, \text{ за секој } n \in \mathbf{N},$$

т.е. редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ дивергира. ♦

7.12. Пример. Редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ е конвергентен, но не е апсолутно конвергентен. Ако го искористиме равенството (18), тогаш за n – от член на Кошиевиот производ на овој ред добиваме

$$c_n = (-1)^{n-1}(\tfrac{1}{1\cdot n} + \tfrac{1}{2\cdot(n-1)} + ... + \tfrac{1}{j\cdot(n-j+1)} + ... + \tfrac{1}{n\cdot 1}) = \tfrac{(-1)^{n-1}\cdot 2}{n+1}(1 + \tfrac{1}{2} + ... + \tfrac{1}{n}), \qquad n \in \mathbf{N}$$

и бидејќи

$$\lim_{n\to\infty} | c_n | = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}{n+1} = 0$$

од критериумот на Лајбниц следува дека алтернативниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ конвергира. ♦

8. СЕМИКОНВЕРГЕНТНИ РЕДОВИ

8.1. Дефиниција. За конвергентниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ќе велиме дека е *семиконвергентен* (*условно конверегентен*) ако не е апсолутно конвергентен.

8.2. Да го разгледаме семиконвергентниот ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,. \tag{1}$$

Со $a_1^+, a_2^+, ..., a_n^+, ...$ да ги означиме неговите ненегативни, а со $-a_1^-, -a_2^-, ..., -a_n^-, ...$ неговите негативни членови, земени во истиот редослед као што се распоредени и во редот (1). Бидејќи редот (1) не е апсолутно конвергентен, и двете множества $\{a_n^+\}$ и $\{a_n^-\}$ се бесконечни. Да ги разгледаме редовите со ненегативни членови

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \tag{2}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \,. \tag{3}$$

Точна е следната лема.

Лема. За семиконвергентниот ред (1), редовите (2) и (3) се дивергентни.

Доказ. Да ставиме

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \overline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} |\, a_k \,|, \qquad S_n^+ = \sum_{k=1}^{n} a_k^+, \qquad S_n^- = \sum_{k=1}^{n} a_k^- \,. \tag{4}$$

Сите собирци во последните три збирови на (4) се ненегативни, па затоа низите $\{\overline{S}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S_n^+\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S_n^-\}_{n=1}^{\infty}$ се монотоно растечки, што значи дека тие имаат конечни или бесконечни граници. За збировите S_n и $\overline{S}_n$ имаме

$$S_n = S_m^+ - S_k^-, \qquad \overline{S}_n = S_m^+ + S_k^-, \qquad n = m + k\,, \tag{5}$$

при што, бидејќи редот (1) е семиконвергентен, добиваме дека условот $n \to \infty$ е еквивалентен на условот $m, k \to \infty$.

Бидејќи редот (1) не е апсолутно конвергентен, добиваме $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_n = +\infty$, од што следува дека

$$\lim_{n\to\infty} S_n^+ = +\infty \text{ или } \lim_{n\to\infty} S_n^- = +\infty\,.$$

Но, тогаш од првото равенство во (5), во кое парцијалната сума S_n има конечна граница, (редот (1) конвергира), следува дека

$$\lim_{n\to\infty} S_n^+ = \lim_{n\to\infty} S_n^- = +\infty\,. \ \blacklozenge$$

8.3. Теорема (Риман). Нека се дадени два дивергентни реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ со позитивни членови таквишто $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Тогаш, за секој реален број A може да се конструира ред од облик

$$a_1 + \ldots + a_{k_1} - b_1 - \ldots - b_{p_1} + a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \ldots + a_{k_2} - b_{p_1+1} - b_{p_1+2} - \ldots - b_{p_2} + \ldots \tag{6}$$

чија сума е еднаква на A.

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $A > 0$. Броевите $k_1 < k_2 < \ldots$ и $p_1 < p_2 < \ldots$ ги избираме како најмали природни броеви за кои последователно се исполнети неравенствата

$$A_1 = \sum_{i=1}^{k_1} a_i > A,\ \ A_2 = A_1 - \sum_{i=1}^{p_1} b_i < A,\ \ A_3 = A_2 + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} a_i > A,\ \ A_4 = A_3 - \sum_{i=p_1+1}^{p_2} b_i < A, \ldots$$

Можноста за избор на овие броеви k_i, p_i, $i = 1,2,\ldots$ следува од дивергентноста на позитивните редови $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Сега, од конструкцијата на низата $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ следува дека

$$0 < A_{2t-1} - A < a_{k_t} \text{ и } 0 < A - A_{2t} < b_{p_t}, \ t = 1,2,\ldots .$$

и бидејќи

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A . \ ♦$$

8.4. Последица. Ако редот (1) е семиконвергентен, тогаш секој реален број A е сума на ред чии членови се членовите на редот (1), во општ случај земени во друг редослед.

Доказ. Нека за редот (1) ги формираме редовите (2) и (3). Согласно со лема 8.2 имаме

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^{+} = +\infty \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-} = +\infty .$$

Сега тврдењето следува од теоремата на Риман. ♦

8.5. Забелешка. Во пример 7.6 разгледавме семиконвергентен ред од кој, по пренумерирањето на членовите добивме дивергентен ред. Во општ случај може да се докаже дека членовите на редот може да се пренумерираат така, што неговата сума ќе биде $+\infty, -\infty$, а исто така низата парцијални суми да нема ниту конечна, ниту бесконечна граница. Обидете се да ги докажете овие тврдења.

9. ПОВТОРНИ И ДВОЈНИ РЕДОВИ

9.1. Во овој дел ќе ги разгледаме редовите од обликот $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$, каде a_{mn} се дадени реални броеви нумерирани со два индекса m и n, од кои секој независно еден од друг, се менува во множеството природни броеви.

Пред да дадеме прецизна дефиниција за двоен ред, ќе ги воведеме поимите за двојна низа и граница на двојна низа.

9.2. Дефиниција. Секое пресликување $f : \mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathbf{R}$ го нарекуваме *двојна низа* од реални броеви. Елементите $f(m,n)$, $m,n \in \mathbf{N}$ на двојната низа ги означуваме со f_{mn}, а низата ја означуваме со $\{f_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$.

9.3. Дефиниција. Бројот $a \in \mathbf{R}$ го нарекуваме *граница* на двојната низа $\{f_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ и пишуваме $\lim\limits_{m,n\to\infty} f_{mn} = a$ ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секои $m, n > n_0$ важи $|f_{mn} - a| < \varepsilon$.

Ако двојната низа има граница, тогаш за неа велиме дека е *конвергентна*.

За двојната низа $\{f_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ велиме дека *тежи кон* $+\infty$ и пишуваме $\lim\limits_{m,n\to\infty} f_{mn} = +\infty$, ако за секој $c > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секои $m, n > n_0$ важи $f_{mn} > c$.

Аналогно се дефинира

$$\lim_{m,n\to\infty} f_{mn} = -\infty \text{ и } \lim_{m,n\to\infty} f_{mn} = \infty .$$

Како и обично, ако не е поинаку кажано, под граница на двојна низа ќе подразбираме конечна граница.

9.4. Дефиниција. Нека е дадена двојната низа $\{f_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$. Ја формираме двојната низа

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{ij} . \tag{1}$$

Парот низи $\{f_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$, $\{S_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ го нарекуваме *двоен ред* и го означуваме со

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} . \tag{2}$$

Елементите на двојната низа $\{f_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ ги нарекуваме *членови* на редот (2), а елементите на двојната низа $\{S_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ ги нарекуваме *парцијални суми* на редот (2).

9.5. Дефиниција. За двојниот ред (2) ќе велиме дека е *конвергентен* ако низата од неговите парцијални суми конвергира. Нејзината граница ќе ја наречеме *сума* на редот. Притоа, ако

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = S , \tag{3}$$

тогаш ќе пишуваме $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} = S$. Ако границата (3) не постои, тогаш ќе велиме дека двојниот ред (2) *дивергира*. Ако постои една од бесконечните граници

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = +\infty , \quad \lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = -\infty , \tag{4}$$

тогаш ќе пишуваме $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} = +\infty$, $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} = -\infty$, соодветно.

9.6. Пример. Нека $|p|<1,\ |q|<1$. Ќе докажеме дека двојниот ред $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} p^m q^n$ конвергира. Навистина, во овој случај имаме

$$S_{mn} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} p^i q^j = \sum_{i=0}^{m} p^i \sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-p^{m+1}}{1-p}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Затоа постои границата $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn} = \frac{1}{1-p}\frac{1}{1-q}$, од што следува

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} p^m q^n = \frac{1}{1-p}\frac{1}{1-q}, \text{ кога } |p|<1, |q|<1.\ ♦$$

9.7. Многу тврдења за еднократните редови важат и за двојните редови. Така важи следнава лема, чиј доказ е наполно аналоген како и за еднократните редови, и на читателот му препорачуваме неа самостојно да ја докаже за вежба.

Лема. а) Ако редот $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}$ конвергира и S е негова сума, тогаш $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \lambda f_{mn} = \lambda S$, за секој реален број λ.

б) Ако редовите $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}$ и $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} g_{mn}$ конвергираат и S и S_1 се нивните суми, соодветно, тогаш $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} (f_{mn}+g_{mn}) = S+S_1$. ♦

9.8. Теорема. Ако редот (2) конвергира, тогаш $\lim\limits_{m,n\to\infty} f_{mn} = 0$.

Доказ. Навистина, од равенството $f_{mn} = S_{mn} - S_{m-1n} - S_{mn-1} + S_{m-1n-1}$ и од условот (3), следува $\lim\limits_{m,n\to\infty} f_{mn} = 0$. ♦

9.9. Теорема. Ако сите членови на редот (2) се ненегативни, т.е.

$$f_{mn} \ge 0, \quad m,n = 1,2,..., \tag{5}$$

тогаш секогаш постои конечна или бесконечна граница на низата парцијални суми $\{S_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ и притоа важи

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = \sup_{m,n\in\mathbf{N}} S_{mn}. \tag{6}$$

Доказ. Ако е исполнет условот (5), тогаш $S_{m'n'} \ge S_{mn}$, за $m' > m$ и $n' > n$, т.е. низата парцијални суми е монотоно растечка, па затоа има конечна или бесконечна граница.

Равенството (6) непосредно следува од дефиниција 9.3 и својствата на супремумот. ♦

9.10. Забелешка. Јасно, ако се исполнети условите од теорема 9.9, тогаш двојниот ред (2) конвергира ако и само ако низата парцијални суми $\{S_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ е ограничена.

9.11. Теорема. Ако двојниот ред (2) конвергира и постои $C>0$ таков што за секои $m,n\geq 1$ важи $0\leq a_{mn}\leq Cf_{mn}$, тогаш и двојниот ред $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ конвергира.

Доказ. Непосредно следува од забелешка 9.10 и фактот дека

$$0\leq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\leq C\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}\text{, за секои } m,n\geq 1\text{. ♦}$$

9.12. Дефиниција. За двојниот ред (2) ќе велиме дека *апсолутно конвергира* ако конвергира двојниот ред $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} |f_{mn}|$.

9.13. Теорема. Ако двојниот ред (2) апсолутно конвергира, тогаш тој конвергира и обично.

Доказ. Нека

$$p_{mn}=\frac{|a_{mn}|+a_{mn}}{2} \text{ и } q_{mn}=\frac{|a_{mn}|-a_{mn}}{2}\text{, за секои } m,n\in\mathbf{N}.$$

Тогаш, $0\leq p_{mn}\leq |a_{mn}|$ и $0\leq q_{mn}\leq |a_{mn}|$, за секои $m,n\in\mathbf{N}$. Сега, од теорема 9.11 следува дека двојните редови $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} p_{mn}$ и $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} q_{mn}$ конвергираат. Но,

$$a_{mn}=p_{mn}-q_{mn}\text{, за секои } m,n\in\mathbf{N},$$

па од лема 9.7 б) следува дека двојниот ред (2) конвергира обично. ♦

9.14. Нека е дадена двојната низа $\{f_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$. Ако во двојната низа последователно го фиксираме вториот индекс n, добиваме пребројливо многу низи $\{f_{mn}\}_{m=1}^{\infty}$, $n=1,2,\ldots$. Секоја од овие низи дефинира ред од облик $\sum\limits_{m=1}^{\infty} f_{mn}$, со што добиваме бесконечна низа редови од облик

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_{mn}\text{ , } n=1,2,\ldots. \tag{7}$$

Со помош на низата редови (7) формално дефинираме ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{mn} \tag{8}$$

кој го нарекуваме *повторен ред* определен со двојната низа $\{f_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$. Да забележиме дека низата $\{f_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ дефинира уште еден повторен ред

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \tag{9}$$

кој се добива на ист начин со последователно фиксирање на првиот индекс m.

За повторниот ред (8) ќе велиме дека е *конвергентен*, ако

a) за секој $n = 1,2,...$ редот $\sum_{m=1}^{\infty} f_{mn}$ конвергира и неговиот збир да го означиме со A_n, $n = 1,2,...$, соодветно и

b) редот $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ конвергира.

9.15. Коментар. Природно е да запрашаме дали во случај кога повторните редови (8) и (9) се конвергентни, тогаш нивните граници се еднакви. Одговорот на ова прашање е негативен, што може да се види од следниот едноставен пример. Да ја разгледаме двојната низа $\{f_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ каде m го означува редот, а n колоната на следнава бесконечна матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \dots \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots. & \dots \end{bmatrix}.$$

Тогаш, $\sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} = 2^{-m} + 2^{-m-1} + 2^{-m-2} + ... = 2^{-m+1}$, $m = 1,2,3,...$, па затоа

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} = 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + ... = 2 .$$

Аналогно се добива

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{mn} = -1 - 2^{-1} - 2^{-2} - 2^{-3} - ... = -2 .$$

Според тоа, најдовме двојна низа за која повторните редови (8) и (9) конвергираат, но нивните граници се различни.

9.16. Елементите на двојната низа $\{f_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ можеме на произволно многу начини да ги запишеме во облик на еднократна низа $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ со чија помош дефинираме ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \, . \tag{10}$$

Обратно, секоја еднократна низа $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ на произволно многу начини може да се запише како двојна низа $\{f_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ и од неа да се формира повторниот ред (8). Природно се наметнува прашањето за врската меѓу редовите (8) и (10) кои се состојат од едни и исти членови. Одговор на ова прашање дава следнава теорема.

Теорема. Ако редот (10) апсолутно конвергира, тогаш за секоја двојна низа $\{f_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ добиена од низата $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, повторниот ред (8) конвергира, при што и двата реда имаат иста сума.

Доказ. Нека претпоставиме дека редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} | a_k |$ конвергира и неговата сума да ја означиме со A^*. Тогаш, за секои p и n важи $\sum\limits_{m=1}^{p} | f_{mn} | \leq A^*$, што значи дека за секој $n = 1, 2, ...$ редот $\sum\limits_{m=1}^{\infty} f_{mn}$ конвергира. Според теорема 7.4 редот (10) конвергира и обично и неговата сума да ја означиме со A.

Редот (10) апсолутно конвергира, па затоа за секој $\varepsilon > 0$ постои k_0 таков што

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} | a_k | < \varepsilon \tag{11}$$

што значи дека

$$| A - \sum_{k=1}^{k_0} a_k | = | \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k | \leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} | a_k | < \varepsilon \tag{12}$$

Од конструкцијата на двојната низа $\{f_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ следува дека постојат $m_0, n_0 \in \mathbf{N}$ такви што

$$\{a_t \mid t = 1, 2, ..., k_0\} \subseteq \{f_{ij} \mid i = 1, 2, ..., m_0 ; \; j = 1, 2, ..., n_0\} \, .$$

Сега, од неравенството (11) следува дека за секои $m > m_0$ и $n > n_0$ важи

$$| \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} f_{ij} - \sum_{k=1}^{k_0} a_k | \leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} | a_k | < \varepsilon \, .$$

Ако во последното неравенство земеме $m \to \infty$, тогаш добиваме дека за секој $n > n_0$ важи

$$|\sum_{j=1}^{n} A_j - \sum_{k=1}^{k_0} a_k| \le \varepsilon .$$

Конечно, од добиеното неравенство и од неравенството (12) следува

$$|A - \sum_{j=1}^{n} A_j| = |A - \sum_{k=1}^{k_0} a_k - (\sum_{j=1}^{n} A_j - \sum_{k=1}^{k_0} a_k)| \le |A - \sum_{k=1}^{k_0} a_k| + |\sum_{j=1}^{n} A_j - \sum_{k=1}^{k_0} a_k| < 2\varepsilon$$

што значи дека повторниот ред (8) конвергира и неговата сума е A . ♦

9.17. Да забележиме дека обратната теорема на теорема 9.15 не важи, но при дополнителни претпоставки за повторниот ред таа е исполнета.

Теорема. Нека е даден повторниот ред (8). Ако конвергира редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} |f_{mn}|$, тогаш редот (8) конвергира и конвергира секој ред (10) кој има исти членови како и редот (8), земени во произволен редослед.

Доказ. Нека $A^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} |f_{mn}|$. Тогаш, за секои m и n важи

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |f_{ji}| \le A^* . \tag{13}$$

Земаме произволна парцијална сума $\sum\limits_{k=1}^{k_0} |a_k|$ на $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Постојат $m_0, n_0 \in \mathbf{N}$ такви што

$$\{a_t \mid t = 1,2,...,k_0\} \subseteq \{f_{ij} \mid i = 1,2,...,m_0;\ j = 1,2,...,n_0\} .$$

Тогаш, од (13), при $m > m_0$ и $n > n_0$, следува

$$\sum_{k=1}^{k_0} |a_k| \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |f_{ji}| \le A^* ,$$

што значи дека редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ конвергира, т.е. редот (10) конвергира апсолутно. Сега тврдењето следува од теорема 9.13. ♦

9.18. Непосредна последица од претходните две теореми е следната теорема која наоѓа честа примена.

Теорема. Нека е дадена двојната низа $\{f_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$. Ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} |f_{mn}|$ конвергира, тогаш конвергираат последователните редови (8) и (9) и тие имаат иста сума, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} f_{mn} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{mn}$. ♦

9.19. Природно, се поставува прашањето каква е врската меѓу двоен ред и последователен ред составени од исти членови. Пред да одговориме на ова прашање ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема. Нека двојниот ред (2) и редот (10) се составени од исти членови. Тогаш, редот (10) апсолутно конвергира ако и само ако двојниот ред (2) апсолутно конвергира.

Доказ. Нека претпоставиме дека двојниот ред (2) апсолутно конвергира и нека неговата сума е F^*. За секој природен број r да ја формираме парцијалната сума A_r^* на редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Како и во доказот на теорема 9.16, лесно се докажува дека $A_r^* \le F^*$, што значи дека редот (10) апсолутно конвергира.

Нека сега претпоставиме дека редот (10) апсолутно конвергира и нека сумата на редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ја означиме со A^*. За секоја парцијална сума $F_{mn}^* = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} |f_{ji}|$ на редот $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} |f_{mn}|$ постои природен број r таков што сите собирци на F_{mn}^* се содржат во парцијалната сума $A_r^* = \sum\limits_{k=1}^{r} |a_k|$ на редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$, па затоа $F_{mn}^* \le A_r^* \le A^*$. Сега од забелешка 9.10 следува дека редот $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} |f_{mn}|$ конвергира, што значи дека двојниот ред (2) конвергира апсолутно. ♦

9.20. Последица. Нека двојната низа $\{f_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ и низата $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ се состојат од едни исти членови. Ако еден од двојниот ред (2), последователните редови (8) или (9) или редот (10) апсолутно конвергира, тогаш преостанатите три реда апсолутно конвергираат кон една иста сума.

Доказ. Непосредно следува од теоремите 9.15, 9.16 и 9.18. ♦

9.21. Пример. а) Ќе ја испитаме конвергентноста на двојниот ред $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^a n^b}$, $a > 0, b > 0$.

Разгледуваниот двоен ред се добива со множење на редовите $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^a}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^b}$ кои конвергираат за $a > 1$ и $b > 1$, па затоа и двојниот ред во овој случај конвергира.

Меѓутоа, ако $a \leq 1$, односно $b \leq 1$, тогаш двојниот ред дивергира, бидејќи при секој фиксиран n_0, односно m_0, обичниот ред $\frac{1}{n_0^b}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^a}$, односно $\frac{1}{m_0^a}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^b}$, дивергира.

б) Ќе ја испитаме конвергентноста на редот $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty}\frac{1}{(i+j)^a}$, $a > 0$.

Дадениот ред ќе го запишеме во видот

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i+j=n}\frac{1}{(i+j)^a} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n^a}.$$

Ако очигледното неравенство $\frac{n}{2} \leq n-1 < n$ го поделиме со n^a добиваме

$$\frac{1}{2n^{a-1}} \leq \frac{n-1}{n^a} < \frac{1}{n^a},$$

што значи дека редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n^a}$ конвергира за $a > 2$, а дивергира за $a \leq 2$. Од теорема 9.18 следува дека и двојниот ред конвергира кога $a > 2$.

в) Да го разгледаме редот

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{\infty}\frac{1}{(Ai^2+2Bij+Cj^2)^a},\ a > 0,$$

каде квадратната форма $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ е позитивно определена, т.е. $A, C > 0$ и $\Delta = AC - B^2 > 0$.

Ако $L = \max\{A, C, |B|\}$, тогаш

$$Ai^2 + 2Bij + Cj^2 \leq L(i+j)^2,$$

па затоа $a_{ij} \geq \frac{1}{L^a}\cdot\frac{1}{(i+j)^{2a}}$, од што следува дека

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} \geq \frac{1}{L^a}\sum_{i,j=1}^{\infty}\frac{1}{(i+j)^{2a}}.$$

Сега, од б) следува дека при $a \leq 1$ разгледуваниот ред дивергира.

Од друга страна имаме

$$Ai^2 + 2Bij + Cj^2 = \frac{1}{C}[(AC - B^2)i^2 + (Bi + Cj)^2] \geq \frac{\Delta}{C}i^2,$$

па затоа $a_{ij} \leq \frac{C^a}{\Delta^a}\cdot\frac{1}{i^{2a}}$ и аналогно $a_{ij} \leq \frac{A^a}{\Delta^a}\cdot\frac{1}{j^{2a}}$, од што добиваме

$$a_{ij} \leq \left(\frac{\sqrt{AC}}{\Delta}\right)^a \cdot \frac{1}{i^a j^a}.$$

Сега, од а) следува дека за $a > 1$ разгледуваниот ред конвергира. ♦

10. ДВОСТРАНИ РЕДОВИ

10.1. Дефиниција. Пресликувањето $a : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ го нарекуваме *двострана низа реални броеви.* Елементите $a(n), n \in \mathbf{Z}$ ги означуваме со $a_n, n \in \mathbf{Z}$, а низата ја означуваме со $\{a_n\}_{-\infty}^{+\infty}$.

Ја формираме двојната низа

$$S_{mn} = \sum_{i=-m}^{n} a_i \,. \tag{1}$$

Парот низи $\{a_n\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\{S_{mn}\}_{m,n=0}^{\infty}$ го нарекуваме *двостран ред* и го означуваме со

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_k \,. \tag{2}$$

Елементите на двостраната низа $\{a_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ ги нарекуваме *членови* на редот (2), а елементите на двојната низа $\{S_{mn}\}_{m,n=0}^{\infty}$ -*парцијални суми* на редот (2).

10.2. Дефиниција. За двостраниот ред (2) ќе велиме дека е *конвергентен* ако низата од неговите парцијални суми конвергира. Нејзината граница ќе ја наречеме *сума* на редот. Притоа, ако

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = S \,, \tag{3}$$

тогаш ќе пишуваме $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n = S$. Ако границата (3) не постои, тогаш ќе велиме дека двостраниот ред (2) *дивергира*. Ако постои една од бесконечните граници

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = +\infty \,, \quad \lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = -\infty \,, \tag{4}$$

тогаш ќе пишуваме $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} f_{mn} = +\infty$, $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} f_{mn} = -\infty$, соодветно.

10.3. Теорема. Редот (2) конвергира ако и само ако конвергираат редовите $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{-k}$. Ако, притоа, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = A$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{-k} = B$, тогаш $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_k = A + B$.

Доказ. Нека претпоставиме дека редовите $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{-k}$ конвергираат. Тогаш, за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за $m, n > n_0$ важи

$$| A-\sum_{k=0}^{n} a_k |< \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ и } | B-\sum_{k=1}^{m} a_{-k} |< \tfrac{\varepsilon}{2} .$$

Но, тогаш

$$| A+B-S_{mn} |=| A+B-\sum_{k=-m}^{n} a_k |=| A-\sum_{k=0}^{n} a_k +B-\sum_{k=1}^{m} a_{-k} |$$

$$\leq| A-\sum_{k=0}^{n} a_k |+| B-\sum_{k=1}^{m} a_{-k} |< \varepsilon,$$

што значи дека редот (2) конвергира и неговата сума е $A+B$.

Обратно, ако конвергира редот (2) и неговата сума е еднаква на S , тогаш за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што при $m,n > n_0$ важи

$$| S-\sum_{i=-m}^{n} a_i |=| S-S_{mn} |< \varepsilon .$$

Сега за $n > n_0$ и $q > 0$ имаме

$$| \sum_{k=p}^{p+q} a_k |=| (S-\sum_{k=-m}^{p-1} a_k)-(S-\sum_{k=-m}^{p+q} a_k) |< 2\varepsilon ,$$

што според теорема 2.1 значи дека редот $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ конвергира. Аналогно се докажува конвергентноста на редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{-k}$. ♦

10.4. Дефиниција. Двостраниот ред (2) го нарекуваме *симетрично збирлив,* ако постои граница на неговите симетрични парцијални суми

$$S_{nn} = \sum_{k=-n}^{n} a_k, \quad n = 0,1,2,3,\ldots . \tag{5}$$

Притоа, границата S на сумите (5) ја нарекуваме *симетрична сума* на редот (2).

10.5. Забелешка. Ако редот (2) конвергира во смисла на дефиниција 10.2, тогаш очигледно тој е симетрично збирлив и неговата симетрична сума се совпаѓа со обичната сума. Но, не секој симетрично збирлив ред е конвергентен во смисла на дефиниција 10.2. На пример, двостраниот ред $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_k$, $a_0 = 0, a_k = 1, a_{-k} = -1$, за $k \neq 0$ е симетрично збирлив и неговата симетрична сума е еднаква на 0, но тој не е конвергентен во смисла на дефиниција 10.2.

10.6. Теорема. Двостраниот ред (2) е симетрично збирлив ако и само ако конвергира редот

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + a_{-k}) . \tag{6}$$

Доказ. Теоремата следува од фактот дека $n-$та парцијална сума на редот (6) е еднаква на $n-$та симетрична парцијална сума на редот (2). ♦

11. БЕСКОНЕЧНИ ПРОИЗВОДИ

11.1. Дефиниција. Нека е дадена низата реални броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Формираме нова низа $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, каде

$$p_n = a_1 a_2 ... a_n ,\ n = 1,2,... . \qquad (1)$$

Парот низи $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ го нарекуваме *бесконечен производ* и го означуваме со

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \ . \qquad (2)$$

Членовите на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ги нарекуваме *множители* на бесконечниот производ (2), а членовите на низата $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ *-парцијални производи* на бесконечниот производ.

11.2. Дефиниција. Нека низата $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана со (1). Ако постои $p = \lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$, $p \in \mathbf{R}$, $p \neq 0$, тогаш ќе велиме дека производот (2) *конвергира* кон p и ќе пишуваме $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n = p$. Ако $p = +\infty$ или $p = -\infty$ или $p = 0$, тогаш ќе велиме дека производот (2) *одредено дивергира* кон $+\infty$ или $-\infty$ или 0, соодветно. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ не постои, тогаш ќе велиме дека производот (2) *дивергира неодредено.*

11.3. Пример. а) Бесконечниот производ $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$ е конвергентен бидејќи

$$p_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n}{2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n+1)} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot ... \cdot (n+3)}{3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n+2)} = \frac{n+3}{3(n+1)} \ \text{и} \ \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{3} \neq 0 .$$

б) Според задачата III б) 11 низата $a_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$, $n = 1,2,...$ конвергира и нејзината граница е Ојлеровата константа γ . Според тоа, постои низа $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и за секој $n = 1,2,...$ важи

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \alpha_n .$$

Да го разгледаме бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}$. За овој производ низата парцијални производи е

$$p_n=\frac{e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}{n+1},\ n=1,2,\ldots.$$

Од досега изнесеното имаме

$$p_n=\frac{e^{\ln n+\gamma+\alpha_n}}{n+1}=\frac{ne^{\gamma+\alpha_n}}{n+1}\to e^{\gamma},\ n\to\infty \text{ т.е. } \prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}=e^{\gamma}.\ ♦$$

11.4. Нека $a_n>0$, $n\in\mathbf{N}$. Имаме

$$p_n=\prod_{k=1}^{n}a_k=\prod_{k=1}^{n}e^{\ln a_k}=e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln a_k}.$$

Сега од непрекинатоста на функцијата $f(x)=e^x$ следува:

Теорема. а) Редот $\sum_{k=1}^{\infty}\ln a_k$ е конвергентен ако и само ако бесконечниот производ (2) е конвергентен.

б) Редот $\sum_{k=1}^{\infty}\ln a_k$ дивергира кон $+\infty$ ако и само ако бесконечниот производот (2) дивергира кон $+\infty$.

в) Редот $\sum_{k=1}^{\infty}\ln a_k$ дивергира кон $-\infty$ ако и само ако бесконечниот производот (2) дивергира кон 0. ♦

11.5. Теорема. Ако бесконечниот производ (2) конвергира, тогаш

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1.$$

Доказ. Нека $p=\lim\limits_{n\to\infty}p_n\neq 0$. Од равенството $a_{n+1}=\frac{p_{n+1}}{p_n}$, $n\geq 1$ следува

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}p_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}p_n}=\frac{p}{p}=1.\ ♦$$

11.6. Забелешка. Условот $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ е потребен за да конвергира производ (2) конвергира, но не е и доволен. Имено, ако $a_n=1+\frac{1}{n}, n=1,2,3,\ldots$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$, но $p_n=n+1$, што значи дека бесконечниот производ дивергира кон $+\infty$.

Често пати бесконечните производи се запишуваат во видот $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, бидејќи вака запишаниот бесконечен производ полесно се доведува во врска со соодветен ред. Јасно, притоа, потребниот услов од теорема 11.5 е $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Да забележиме дека ако бесконечниот производ $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ конвергира, тогаш конвергира и бесконечниот производ $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}$, при што

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)}.$$

Навистина, ако $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа парцијални производи на конвергентниот бесконечен производ $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, тогаш $\{\frac{1}{p_n}\}_{n=1}^{\infty}$ е низа парцијални производи на бесконечниот производ $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}$ и притоа важи $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{p_n}=\frac{1}{p}$, што значи

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{p}=\frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)}.$$

11.7. Теорема. Нека за низата реални броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ важи

$$0<a_n<1,\ n=1,2,3,\dots.$$

Редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ е конвергентен ако и само ако бесконечниот производ $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ е конвергентен, ако и само ако бесконечниот производ $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ е конвергентен.

Доказ. Од конвергентноста на редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ и од конвергентноста на бесконечните производи следува $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, што значи дека

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{-\ln(1-a_n)}{a_n}=1.$$

Понатаму, од $0<a_n<1,\ n=1,2,3,\dots$ следува дека

$$\ln(1+a_n)>0 \text{ и } -\ln(1-a_n)>0.$$

Од последица 3.6 следува дека редот $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ е конвергентен ако и само редот $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ е конвергентен и редот $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ е конвергентен ако и само ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1-a_n)$ е конвергентен. Сега тврдењето следува од теорема 11.4 а). ♦

11.8. Пример. а) Да го разгледаме производот $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^a}), a>0$. Според пример 3.2, редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ конвергира при $a>1$, а дивергира при $a \leq 1$. Од теорема 11.7 следува дека производот $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^a})$ конвергира за $a>1$, а дивергира за $a \leq 1$.

б) Да го разгледаме производот $\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)$, $0<q<1$. Од пример 1.5 следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, $0<q<1$ конвергира, што повторно според теорема 11.7 значи дека разгледуваниот производ конвергира. ♦

11.9. Теорема. Ако редовите $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ се конвергентни, тогаш и бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ е конвергентен.

Доказ. Од конвергентноста на редот $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следува дека $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Но,

$$\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2},$$

што значи дека

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\ln(1+a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}.$$

Сега од последица 3.6 следува дека редот $\sum_{k=1}^{\infty}[a_k - \ln(1+a_k)]$ е конвергентен. Понатаму, од конвергентноста на редот $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ е конвергентен, што според теорема 11.4 значи дека бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ е конвергентен. ♦

11.10. Пример. Нека $a>0$. Според теорема 6.2 алтернативниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^a}$ конвергира. Понатаму, за $a>\frac{1}{2}$ редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2a}}$ конвергира. Сега, од теорема 11.9, при $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n^a}$, $n=1,2,...$ следува дека за $a>\frac{1}{2}$ бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^a})$ конвергира. ♦

11.11. Дефиниција. За бесконечниот производ

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \tag{3}$$

ќе велиме дека е *апсолутно конвергентен* ако бесконечниот производ

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|) \tag{4}$$

е конвергентен.

11.12. Во врска со апсолутно конвергентните бесконечни производи ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема. а) Бесконечниот производ (3) е апсолутно конвергентен ако и само ако редот $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+|a_k|)$ е конвергентен.

б) Бесконечниот производ (3) е апсолутно конвергентен ако и само ако секој од редовите $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+a_k)$ и $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ е апсолутно конвергентен.

Доказ. а) Според дефиниција 11.11 бесконечниот производ (3) е апсолутно конвергентен ако и само ако бесконечниот производ (4) е конвергентен. Сега тврдењето следува од теорема 11.7.

б) Од а) имаме дека бесконечниот производ (3) е апсолутно конвергентен ако и само ако редот $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+|a_k|)$ е конвергентен, па од забелешка 11.6 имаме $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, што значи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+|a_n|)}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|}=1\,.$$

Од последица 3.6 следува дека редовите

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+|a_k|),\ \sum_{k=1}^{\infty}|\ln(1+a_k)|\ \text{и}\ \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$$

или истовремено конвергираат или истовремено дивергираат, па затоа производот (3) апсолутно конвергира ако и само ако секој од редовите

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+a_k)\ \text{и}\ \sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

е апсолутно конвергентен. ♦

11.13. Последица. Ако бесконечниот производ (3) е апсолутно конвергентен, тогаш тој е конвергентен.

Доказ. Нека бесконечниот производ (3) е апсолутно конвергентен. Тогаш, според теорема 11.12 редот $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ е апсолутно конвергентен, од што според 7.4 следува дека редот $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ конвергира обично. Конечно од теорема 11.7 следува дека производот (3) конвергира. ♦

11.14. Забелешка. Обратното тврдење на последица 11.13 не важи. Навистина, во пример 11.10 докажавме дека за $\frac{1}{2}<a\leq 1$ бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^a})$ конвергира. Меѓутоа, тој не конвергира апсолутно, бидејќи во спротивно од теорема 11.12 б) ќе следува дека за $\frac{1}{2}<a\leq 1$ редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ конвергира, што противречи пример 3.4 и фактот дека хармонискиот ред дивергира. ♦

12. ЗАДАЧИ

1. Нека $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е произволен ред со позитивни членови. Докажете дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ е конвергентен.

2. Нека $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ е позитивна низа реални броеви. Докажете дека ако редот $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е конвергентен, тогаш и редот $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\frac{n}{n+1}}$ е конвергентен.

3. Докажете, дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$ е дивергентен.

4. Нека $p \in \mathbf{N}$. Докажете дека

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)...(n+p)} = \frac{1}{pp!}.$$

5. Докажете, дека редовите

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \text{ и } a_1 + 0 + a_2 + 0 + a_3 + 0 + ... + 0 + a_n + 0 + ...$$

се истовремено конвергентни или дивергентни.

6. Докажете, дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2}{n^2}$ конвергира.

7. Нека низата $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ го задоволува условот $0 < a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1}$, за секој $n \in \mathbf{N}$. Докажете дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира.

8. Докажете, дека ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ конвергира, тогаш и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ конвергира.

9. Докажете, дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{n+1}{n})^n \frac{1}{n^2}$ конвергира.

10. Докажете, дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$ конвергира.

11. Докажете, дека редот е конвергентен:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln(1 + \frac{1}{n})$, б $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \cos\frac{1}{n})$ и в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n(n+1)}$.

12. За кои вредности на $a > 0$ редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^{f(n)}}{n^2}$, каде $f(n)$ е бројот на нулите во десетичниот запис на n, конвергира.

13. Докажете, дека за секоја низа $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што $d_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$ и $\lim\limits_{n \to \infty} d_n = +\infty$, постои конвергентен ред со ненегативни членови $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ таков што редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n a_n$ е дивергентен.

14. Нека $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k, \sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (1-\frac{k}{n+1})a_k$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} | s_n - \sigma_n |^a < \infty$ за секој $a > 0$. Докажете, дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

15. Докажете, дека $n-1 = \sum\limits_{r=1}^{\infty} [\frac{n+2^{r-1}-1}{2^r}]$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

16. Испитајте ја конвергенцијата на редовите:

а) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+...$ и б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

17. Испитајте ја конвергенцијата на редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}$.

18. Испитајте ја конвергенцијата на редовите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$,

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n!)}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ и ѓ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!e^n}$.

19. Испитајте ја конвергенцијата на редовите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\frac{n+1}{n})^{n^2}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$.

20. Нека за редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ постоја низа $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $n_0 \in \mathbf{N}$ такви што редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ дивергира и за секој $n > n_0$ важи $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \leq 0$. Докажете, дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира.

21. Нека $a_{2n} = (\frac{n}{2n+1})^{2n}, a_{2n-1} = (\frac{n}{2n-1})^{2n-1}, n \in \mathbf{N}$.

а) Докажете, дека $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$ и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира според критериумот на Коши.

b) Докажете, дека за редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ред не се исполнети условите од критериумот на Даламбер, бидејќи $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} > \frac{3}{2}$.

22. Испитајте ја конвергенцијата на редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ ,\ a_n = \left(\frac{an}{n+1}\right)^n,\ a \in \mathbf{R}\,.$$

23. Нека редот со ненегативни членови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира. Докажете ја конвергентноста на редот:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

24. Докажете, дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} \cos(b \ln n)$ дивергира за секој $a \le 1$, независно од вредноста на b .

25. Нека $a_n > 0$, за $n \ge 1$. Докажете, дека:

а) ако $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1$, тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, а ако $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$, тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира.

b) ако $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, ако $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира.

26. Испитајте ја конвергенцијата на редовите:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$ и б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$.

27. Испитајте ја конвергенцијата на редовите:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p + \ldots$. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{q(q+1)\ldots(q+n-1)}\right)^a$, $p,q > 0$.

28. Испитајте ја конвергенцијата на редовите:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!n^q}$ и в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\right)^p \frac{1}{n^q}$.

29. Испитајте ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$.

30. Докажете, дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ конвергира.

31. Користејќи го интегралниот критериум на Коши, испитајте ја конвергенцијата на редовите:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n \ln^2 (\ln n)}$ и б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$.

32. Испитајте ја конвергенцијата на редовите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx$ и в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} e^{-x} dx$

33. Испитајте ја апсолутната и условната конвергенција на редовите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln \sqrt{2})^n}{\sqrt{n}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}$ и ѓ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

34. Користејќи го критериумот на Дирихле, докажете ја конвергенцијата на редовите:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin na}{\ln n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$ и в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$.

35. Користејќи го критериумот на Абел, докажете ја конвергенцијата на редовите:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \frac{\sqrt{n}}{n+a}$, $a > 0$ б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt[n]{n}}{\ln n}$ и

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 + \frac{1}{n})^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$.

36. Нека $a_n > 0, n \geq 1$ и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира. Ако $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n > 1$, $n \geq 1$, докажете дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{s_n \ln s_n}$ дивергира, а редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n \ln^2 s_n}$ конвергира.

37. Определете ги оние вредности на α за кои конвергира редот:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)^{\alpha}, a > 0$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^{\alpha}$,

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ((1 + \frac{1}{n})^{n+1} - e)^{\alpha}$ и г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - n \sin \frac{1}{n})^{\alpha}$.

38. **(Критериум на Коши).** Нека претпоставиме, дека за секој $n \geq 2$ важи $a_{n-1} \geq a_n \geq 0$. Докажете, дека редовите $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ истовремено конвергираат или дивергираат.

39. Нека $a_n \geq 0$, $n \geq 1$ и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира. Докажете, дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ конвергира.

40. Нека $a_n \geq 0$, $n \geq 1$ и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира. Испитајте ја конвергентноста на редот:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n^2}$,

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ и г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$.

41. Нека $a_n \geq 0$, $n \geq 1$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \ln\sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{e}$. Докажете, дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

42. Нека $a_n \geq 0$, $n \geq 1$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \ln\ln\sqrt[n]{na_n} < \frac{1}{e}$. Докажете, дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

43. Нека $\ln_{(k)}$ е *$k-$та итерација на природниот логаритам*, т.е.

$$\ln_{(1)} = \ln \text{ и } \ln_{(k+1)} = \ln \circ \ln_{(k)}.$$

Докажете дека за секој $k \in \mathbf{N}$ редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln_{(2)} n \ldots \ln_{(k)} n}$ дивергира.

44. Докажете, дека:

а) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots=\frac{1}{2}\ln 6$,

б) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots=\frac{1}{2}\ln 2$ и

в) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{1}{2}\ln 2$.

45. Да го земеме првиот член на хармонискиот ред со знак плус, следните два со знак минус, следните три со знак плус итн. Докажете дека вака модифицираниот хармониски ред конвергира.

46. Изведете го критериумот на Лајбниц како последица од критериумот на Дирихле.

47. Нека броевите $a_n \geq 0$, $n \geq 1$ ги задоволуваат условите од теорема 6.2. Докажете, дека конвергира редот

$$a_1 - \frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2+a_3}{3} - \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} + \ldots.$$

48. Докажете ја конвергентноста на редот:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2x\sin nx}{n},\ x\in\mathbf{R}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^2x\sin nx}{n},\ x\in\mathbf{R}$

49. Докажете, дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\sin nx}{n},\ x\in\mathbf{R}$ конвергира.

50. Докажете, дека за $x\neq k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ е семиконвергентен.

51. Најдете за кои вредности на $x\in\mathbf{R}$ конвергира редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2x\cos nx}{n}$.

52. Докажете го *критериумот на Бертранд* за конвергенција на ред од видот

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ ,\ a_n>0\,.$$

а) Ако постојат $\alpha>1$ и $n_0\in\mathbf{N}$ такви што

$$(n(\tfrac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1)\ln n\geq\alpha\text{ , за }n>n_0\,,$$

тогаш редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ конвергира.

b) Ако постојат $\beta<1$ и $n_0\in\mathbf{N}$ такви што

$$(n(\tfrac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1)\ln n\leq\beta\text{ , за }n>n_0\,,$$

тогаш редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ дивергира.

53. Проверете дека производот на двата дивергентни реда

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}(\tfrac{3}{2})^n\ \text{ и }\ 1+\sum_{n=1}^{\infty}(\tfrac{3}{2})^{n-1}(2^n+\tfrac{1}{2^{n+1}})$$

е апсолутно конвергентен ред.

54. Користејќи го правилото на Коши, помножете ги следниве редови и определете ја нивната сума.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ и в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{}{n(n+1)}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

55. Користејќи ги двојните редови докажете го равенството

$$\sum_{p=1}^{\infty}pk^{p-1}=\frac{1}{(1-k)^2},\quad |\,k\,|<1\,.$$

56. Докажете дека

а) $\sum\limits_{m,n=2}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^m}=\frac{1}{p+1},\ (p>-1)$, б) $\sum\limits_{m=2,n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^m}=\ln 2$, в) $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m+1}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{2}$, г) $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m}} = \frac{\ln 2}{4}$ и

д) $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-2)^{2m}} = \frac{\pi}{8}$.

57. Нека $a_n > 0, b_n > 0$, за $n \geq 1$. Дали од конвергенцијата на производите $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следува конвергенцијата на производите:

а) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, б) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)$ и в) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

58. Докажете ја формулата на Валис

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2},$$

а потоа користејќи ја неа докажете дека

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{4n^2}) = \frac{2}{\pi} \text{ и } \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{(2n+1)^2}) = \frac{\pi}{4}.$$

59. Пресметајте ги бесконечните производи:

а) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n}$, б) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + 2^{-2^n})$,

в) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}$ и г) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n}$.

60. Испитајте ја конвергентноста на бесконечните производи:

а) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$, б) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$, в) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})$,

г) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} n \ln(1 + \frac{1}{n})$ и д) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} \frac{x^2 dx}{1+x^2}$.

VII ГЛАВА

ФУНКЦИОНАЛНИ НИЗИ И РЕДОВИ

Во оваа глава ќе разгледаме редови чии членови се функции. Пред да ги разгледаме овие редови ќе ги разгледаме функционалните низи, за кои ќе ги докажеме основните својства.

1. ФУНКЦИОНАЛНИ НИЗИ

1.1. Дефиниција. Нека $D \subset \mathbf{R}$ и за секој природен број n е дадена функција $f_n : D \to \mathbf{R}$. Тогаш, ќе велиме дека на множеството D е определена *функционална низа*

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}. \tag{1}$$

1.2. Забелешка. Јасно, за фиксиран $x_0 \in D$ со низата (1) е зададена бројна низа

$$\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty} \tag{2}$$

која може да биде конвергентна или дивергентна.

1.3. Дефиниција. За низата (1) ќе велиме дека е *рамномерно ограничена* на множеството D, ако постои реален број $M > 0$ таков што за секој $x \in D$ и за секој $n \in \mathbf{N}$ важи $|f_n(x)| \leq M$.

1.4. Дефиниција. За низата (1) ќе велиме дека *опаѓа* (*расте*) на множеството D, ако за секој $x \in D$ и за секој $n \in \mathbf{N}$ се исполнети неравенствата $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$, (соодветно $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$).

1.5. Дефиниција. За низата (1) ќе велиме дека *конвергира во точката* $x_0 \in D$, ако бројната низа $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира.

За низата (1) ќе велиме дека *конвергира на множеството* D, ако таа конвергира во секоја точка од D. Во овој случај дефинираме функција

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in D \tag{3}$$

и ќе велиме дека низата (1) на множеството D *обично конвергира кон функцијата* $f(x)$, *(конвергира по точки).*

1.6. Забелешка. Основна задача, која се поставува во врска со воведените поими е дали при граничната операција (3) се зачувуваат најважните својства на функциите. На пример, ако функциите f_n се непрекинати, диференцијабилни или интеграбилни, дали тоа е точно и за граничната функција? Каква е, на пример, зависноста меѓу f_n' и f' или меѓу интегралите од f_n и f ?

Функцијата f е непрекината во точката x_0 ако и само ако

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) .$$

Според тоа, прашањето дали границата од една функционална низа од непрекинати функции е непрекината функција е еквивалентно на прашањето дали

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) , \tag{4}$$

т.е. дали редоследот по кој се извршуваат граничните операции во однос на прашањето за непрекинатост е небитен за крајниот резултат. Следниов пример покажува дека во општ случај редоследот по кој се извршуваат граничните операции влијае на крајниот резултат.

1.7. Пример. а) Да ја разгледаме низата $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$, $n = 1,2,...$, $x \in (-\infty,\infty)$. Границата на оваа низа е функцијата

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} .$$

Јасно, за секој $n = 1,2,...$ функцијата $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ е непрекината на множеството $(-\infty,\infty)$. Меѓутоа, нејзината граница е прекината во точката $x_0 = 0$.

б) Да ја разгледаме функцијата $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ определена со

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, \text{ ако } x = \frac{p}{q}, \text{НЗД}(p,q) = 1 \\ 0, \text{ ако } x \in \mathbf{I} \cup \{0\} \end{cases} \tag{5}$$

која е рестрикција на Римановата функција на интервалот $[0,1]$ и за која во пример III 5.9 докажавме дека е прекината во секоја рационална точка различна од 0.

Ќе конструираме низа функции $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, $n = 2,3,...$ таква што за секој $x \in [0,1]$ важи

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{6}$$

Нека $n \ge 2$ е дадено. На интервалите од видот $(\frac{p}{q} - \frac{1}{2n^2}, \frac{p}{q})$, каде $1 \le q < n$, $0 \le p \le q$, ставаме

$$f_n(x) = \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{q} + 2n^2(x - \frac{p}{q})\} ,$$

на интервалите од видот $(\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \frac{1}{2n^2})$, каде $1 \le q < n$, $0 \le p \le q$, ставаме

$$f_n(x) = \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{q} - 2n^2(x - \frac{p}{q})\}$$

и во оние точки од интервалот $[0,1]$ во кои функцијата f_n уште не е определена ставаме $f_n(x) = \frac{1}{n}$.

Лесно се гледа, дека за секој $x \in [0,1]$ важи (6) и дека $f_n \in \mathbf{C}([0,1])$, за секој $n = 2, 3, 4, \ldots$. Меѓутоа, граничната функција (5) е прекината во секоја точка од множеството $\mathbf{Q} \cap (0,1]$ кое е секаде густо во множеството $[0,1]$. ♦

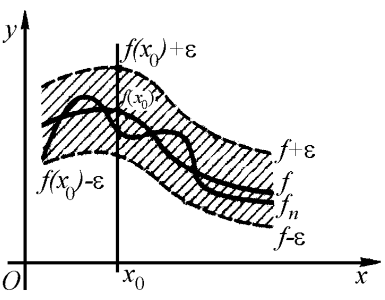
2. РАМНОМЕРНА КОНВЕРГЕНТНОСТ НА ФУНКЦИОНАЛНИ НИЗИ

2.1. Дефиниција. Нека функцијата f и низата функции

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \tag{1}$$

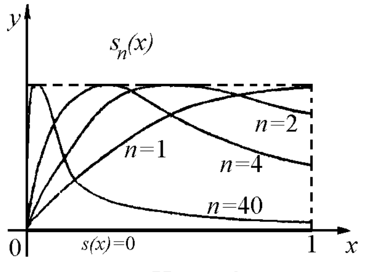
се определени на множеството D. За низата (1) ќе велиме дека *рамномерно конвергира кон функцијата* f *на множеството* D, ако за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таков што за секој $n > n_0$ важи

$$| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon \text{, за секој } x \in D. \tag{2}$$



Цртеж 1

2.2. Коментар. Очигледно, ако низата (1) рамномерно конвергира кон функцијата f на множеството D, тогаш таа конвергира и обично. Разликата меѓу обичната конвергенција дадена во дефиницијата 1.5 и рамномерната конвергенција е во следново: ако низата (1) конвергира обично кон функцијата f на множеството D, тогаш за секој $\varepsilon > 0$ и за секој фиксиран $x \in D$ постои природен број n_0 кој зависи од ε и x таков што за секој $n > n_0$ е исполнето неравенството (2), а ако конвергенцијата е рамномерна, тогаш бројот n_0 зависи само од ε и неравенството (2) е исполнето за секој $n > n_0$ и за секој $x \in D$, цртеж 1. Да разгледаме два примери.



Цртеж 2

2.3. а) Нека $D = [0,1]$. Да ја разгледаме функционалната низа $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ со општ член $s_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Лесно се гледа дека оваа низа конвергира за секој фиксиран x и дека $s(x)=0$, за секој $x\in[0,1]$ (цртеж 2). Навистина, од

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ x\neq 0}} s_n(x)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ x\neq 0}}\frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2}=\frac{0}{x^2}=0 \text{ и } s_n(0)=0$$

добиваме $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=0=s(x)$, што значи дека при фиксирано $x\in[0,1]$, за секој $\varepsilon>0$ постои $n_0=n_0(\varepsilon;x)$ таков што за секој $n>n_0$ важи

$$\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}-0\right|<\varepsilon. \tag{3}$$

Ќе докажеме дека не можеме да избереме n_0 кој не зависи од x таков што да е исполнето неравенството (3), т.е. дека низата $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не конвергира рамномерно кон функцијата $s(x)=0$, $x\in[0,1]$.

Нека претпоставиме дека постои таков n_0 и да фиксираме некој $n>n_0$. Тогаш од (3) следува $\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}-0\right|<\frac{1}{nx}<\varepsilon$ за секој $x\in[0,1]$. Но, при фиксирано n последното неравенство сигурно не важи за доволно мали x. На пример, за $\varepsilon=\frac{1}{2}$ и $x=\frac{1}{n}$ добиваме $1<\frac{1}{2}$, што е противречност.

б) Нека $D=[0,1]$. Да ја разгледаме функционалната низа $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ со општ член

$$s_n(x)=\frac{1}{n+x}.$$

Ќе докажеме дека оваа низа рамномерно конвергира кој функцијата $s(x)=0$, $x\in[0,1]$ (цртеж 3).

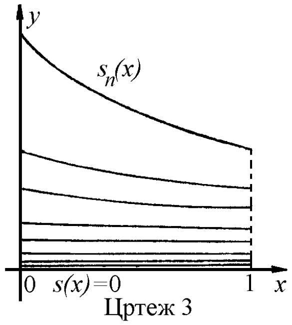
Навистина, нека $\varepsilon>0$ е произволен и даземеме $n_0=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$. Тогаш, за секој $n>n_0$ имаме $n>[\frac{1}{\varepsilon}]+1>\frac{1}{\varepsilon}$, па затоа

$$|s_n(x)-0|=\left|\frac{1}{n+x}-0\right|=\frac{1}{n+x}\leq\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

што значи дека функционалната низа

$$s_n(x)=\frac{1}{n+x},\ n=1,2,...$$

рамномерно конвергира кон функцијата $s(x)=0$ на интервалот $[0,1]$. ♦



Цртеж 3

2.4. Лема. Ако низите $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергираат на множеството D кон функциите f и g, соодветно и $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$, тогаш и низата $\{\lambda f_n(x)+\mu g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на множеството D кон функцијата $\lambda f+\mu g$.

Доказ. Ако $\lambda=\mu=0$, тогаш тврдењето е очигледно. Нека претпоставиме дека $|\lambda|+|\mu|>0$. Тогаш, од рамномерната конвергенција на низите $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на множеството D следува дека за секој $\varepsilon>0$ постои $n_0\in\mathbf{N}$ таков што за секој $n>n_0$ и за секој $x\in D$ се исполнети неравенствата

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{|\lambda|+|\mu|} \text{ и } |g_n(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{|\lambda|+|\mu|}.$$

Според тоа, за секој $\varepsilon>0$ постои $n_0\in\mathbf{N}$ таков што за секој $n>n_0$ и за секој $x\in D$ е исполнето неравенството

$$\begin{aligned}|\lambda f_n(x)+\mu g_n(x)-(\lambda f(x)+\mu g(x))| &\leq |\lambda|\cdot|f_n(x)-f(x)|+|\mu|\cdot|g_n(x)-g(x)|\\ &<\frac{\varepsilon|\lambda|}{|\lambda|+|\mu|}+\frac{\varepsilon|\mu|}{|\lambda|+|\mu|}=\varepsilon,\end{aligned}$$

што значи дека низата $\{\lambda f_n(x)+\mu g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на множеството D кон функцијата $\lambda f+\mu g$. ♦

2.5. Лема. Ако низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на множеството D кон функцијата $f(x)$, а функцијата $g(x)$ е ограничена на множеството D, тогаш низата $\{g(x)f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на множеството D кон функцијата $f(x)g(x)$.

Доказ. Бидејќи функцијата $g(x)$ е ограничена на множеството D постои реален број $M>0$ таков што $|g(x)|<M$, за секој $x\in D$. Ако $\varepsilon>0$ тогаш од рамномерната конвергентност на низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на множеството D следува дека постои $n_0\in\mathbf{N}$ таков што за секој $n>n_0$ и за секој $x\in D$ е исполнето неравенството $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{M}$. Според тоа, за секој $\varepsilon>0$ постои $n_0\in\mathbf{N}$ таков што за секој $n>n_0$ и за секој $x\in D$ е исполнето неравенството

$$|g(x)f_n(x)-g(x)f(x)|=|g(x)|\cdot|f_n(x)-f(x)|<M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

што значи дека низата $\{g(x)f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на множеството D кон функцијата $f(x)g(x)$. ♦

2.6. Пример. Нека $D=[0,1]$ и $k>0$. Ќе докажеме дека функционалната низа $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ со општ член $f_n(x)=\frac{x^k}{n+x}$ рамномерно конвергира на D.

Според пример б) од 2.2 функционалната низа $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ со општ член $s_n(x)=\frac{1}{n+x}$ рамномерно конвергира на множеството $D=[0,1]$ кон функцијата $s(x)=0$, $x\in[0,1]$. Од друга страна, степенската функција $g(x)=x^k$ е ограничена на множеството $D=[0,1]$. Сега, од лема 2.5 следува дека низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

рамномерно конвергира на множеството $D=[0,1]$ кон функцијата $s(x)g(x)=0$, $x\in[0,1]$. ♦

2.7. Теорема (Кошиев критериум). Низата (1) определена на множеството D, рамномерно конвергира на тоа множество ако и само ако за секој $\varepsilon>0$ постои природен број n_0 таков што за секои $m,n>n_0$ и за секој $x\in D$ важи

$$|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon. \tag{4}$$

Доказ. Нека низата (1) рамномерно конвергира на множеството D. Тогаш, постои функција f таква што за секој $\varepsilon>0$ постои природен број n_0 таков што за секој $n>n_0$ и за секој $x\in D$ е исполнето неравенството $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Од последното неравенство имаме дека за секои $m,n>n_0$ и за секој $x\in D$ важи

$$|f_m(x)-f_n(x)|\le|f_m(x)-f(x)|+|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

што значи дека условот (4) е исполнет.

Обратно, ако е исполнет условот (4), тогаш за секој фиксиран $x\in D$ бројната низа

$$f_n(x),\qquad n=1,2,3,... \tag{5}$$

е Кошиева, па затоа таа е конвергентна. За секој $x\in D$ со $f(x)$ да ја означиме границата на низата (5). Тогаш, f е функција определена на множеството D. Ќе докажеме дека низата (1) рамномерно конвергира кон функцијата f на множеството D. Навистина, од условот (4) следува дека за секој $\varepsilon>0$ постои природен број n_0 таков што за секои $m,n>n_0$ и за секој $x\in D$ е исполнето неравенството $|f_m(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Но, $\lim\limits_{m\to\infty}f_m(x)=f(x)$, и ако во последното неравенство земеме $m\to\infty$, добиваме дека за секој $\varepsilon>0$ постои природен број n_0 таков што за секој $n>n_0$ и за секој $x\in D$ важи

$$|f(x)-f_n(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

т.е. низата (1) рамномерно конвергира кон функцијата f на множеството D. ♦

2.8. Теорема. Низата функции (1) определени на множеството D рамномерно конвергира на тоа множество кон функцијата f ако и само ако

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0. \tag{6}$$

Доказ. Нека е исполнет условот (6). Тогаш, од дефиницијата на граница на низа следува дека за секој $\varepsilon>0$ постои природен број n_0 таков што за секој $n>n_0$ важи $\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. Според тоа, за секој $n>n_0$ и за секој $x\in D$ важи $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, што значи дека низата (1) рамномерно конвергира кон функцијата f на множеството D.

Обратно, нека низата (1) рамномерно конвергира кон функцијата f на множеството D. Тогаш, за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таков што за $n > n_0$ и за секој $x \in D$ е исполнето неравенството $| f_n(x) - f(x) | < \frac{\varepsilon}{2}$. Според тоа, за најдениот n_0, при $n > n_0$ ќе важи $\sup\limits_{x \in D} | f_n(x) - f(x) | \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Сега равенството (6) следува од дефиницијата за граница на бројна низа. ♦

2.9. Последица. Низата функции (1) определени на множеството D рамномерно конвергира на тоа множество кон функцијата f ако и само ако постои ненегативна низа реални броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \tag{7}$$

и постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ и за секој $x \in D$ важи

$$| f_n(x) - f(x) | \leq a_n . \tag{8}$$

Доказ. Нека низата функции (1) определени на множеството D, рамномерно конвергира на тоа множество кон функцијата f. Тогаш, постои природен број n_0 таков што множеството реални броеви

$$\{\sup_{x \in D} | f_n(x) - f(x) | \mid n > n_0\}$$

е ограничено. Нека земеме произволни реални броеви $a_1, a_2, ..., a_{n_0}$ и да ставиме

$$a_n = \sup_{x \in D} | f_n(x) - f(x) |, \; n > n_0 .$$

Тогаш, за $n > n_0$ условот (8) е исполнет и од теорема 2.8 следува равенството (7).

Обратно, нека постои ненегативна низа реални броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што условите (7) и (8) се исполнети. Тогаш, од условот (8) следува дека постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ е исполнето неравенството

$$\sup_{x \in D} | f_n(x) - f(x) | \leq a_n .$$

Ако во последното неравенство преминеме кон граница добиваме

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in D} | f_n(x) - f(x) | = 0 ,$$

што според теорема 2.8 значи дека низата функции (1) определени на множеството D, рамномерно конвергира на тоа множество кон функцијата f. ♦

2.10. Пример. а) Да ја разгледаме функционалната низа

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \qquad n \in \mathbf{N}, \; x \in \mathbf{R} .$$

За $n \to \infty$ добиваме $f_n(x) \to |x|$ за секој $x \in \mathbf{R}$ и притоа важи

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \left|f_n(x)-f(x)\right| = \sup_{x\in\mathbf{R}} |\sqrt{x^2+\tfrac{1}{n^2}}-|x||= \sup_{x\in\mathbf{R}} \frac{1}{n^2(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|)} = \frac{1}{n}$$

од што следува $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} \left|f_n(x)-f(x)\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, што според теорема 2.8 значи дека разгледуваната низа рамномерно конвергира кон функцијата $f(x) = |x|$ на целата реална права.

б) Да ја разгледаме функционалната низа

$$f_n(x) = n(\sqrt{x+\tfrac{1}{n}}-\sqrt{x}), \qquad n \in \mathbf{N},\ \ x > 0\,.$$

За $n \to \infty$ добиваме $f_n(x) \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$ за секој $x > 0$. Бидејќи

$$\sup_{x>0} |f_n(x)-f(x)|= \sup_{x>0} \frac{1}{2n\sqrt{x}(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x})^2} = +\infty$$

од теорема 2.8 следува дека разгледуваната низа не конвергира рамномерно кон $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на множеството $(0,+\infty)$. ♦

2.11. Во следниве три теореми ќе дадеме одговор на некои од прашањата поставени во забелешка 1.6.

Теорема. Нека членовите на низата (1) се непрекинати функции на множеството D. Ако таа на множеството D рамномерно конвергира кон функцијата $f(x)$, тогаш функцијата $f(x)$ е непрекината на множеството D.

Доказ. Нека $x_0 \in D$. Од рамномерната конвергентност на низата (1) на множеството D следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ и за секој $x \in D$ е исполнето неравенството

$$|f_n(x)-f(x)|< \tfrac{\varepsilon}{3},$$

па затоа за n_0+1 и за секој $x \in D$ важи

$$|f_{n_0+1}(x)-f(x)|< \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Функцијата $f_{n_0+1}(x)$ е непрекината во точката x_0, што значи дека постои $\delta > 0$ таков што

$$|f_{n_0+1}(x)-f_{n_0+1}(x_0)|< \tfrac{\varepsilon}{3}, \text{ кога } |x-x_0|< \delta\,.$$

Според тоа, за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што кога $|x-x_0|< \delta$ важи

$$\begin{aligned} |f(x)-f(x_0)| &=| f(x)-f_{n_0+1}(x)+f_{n_0+1}(x)-f_{n_0+1}(x_0)+f_{n_0+1}(x_0)-f(x_0)| \\ &\le| f(x)-f_{n_0+1}(x)|+|f_{n_0+1}(x)-f_{n_0+1}(x_0)|+|f_{n_0+1}(x_0)-f(x_0)| \\ &< 3\tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

од што следува дека функцијата $f(x)$ е непрекината во точката x_0. Од произволноста на точката $x_0 \in D$ следува дека функцијата $f(x)$ е непрекината на множеството D. ♦

2.12. Забелешка. Тврдењето, обратно на теорема 2.11, не е точно. Со други зборови, една низа од непрекинати функции може да конвергира кон непрекината функција, дури и кога конвергенцијата не е рамномерна. Навистина, во примерот 2.10 б) докажавме дека низата

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\tfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right), \quad n \in \mathbf{N}, x > 0$$

конвергира кон непрекинатата функција $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$, но исто така видовме дека конвергенцијата не е рамномерна.

Што се однесува до рамномерната конвергенција и непрекинатоста, можно е функционална низа секаде прекинати функции рамномерно да конвергира кон непрекината функција. Имено, лесно се гледа дека за секој $n \in \mathbf{N}$ функцијата

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

е секаде непрекината на интервалот $(-\infty, +\infty)$, меѓутоа

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \text{ за секој } x \in (-\infty, +\infty)$$

при што конвергенцијата е рамномерна.

2.13. Теорема. Нека $a, b \in \mathbf{R}$ и членовите на низата (1) се непрекинати функции на интервалот $[a,b]$. Ако низата (1) рамномерно конвергира кон функцијата $f(x)$ на интервалот $[a,b]$, тогаш функцијата $f(x)$ е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ и притоа важи

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx. \tag{9}$$

Доказ. Бидејќи членовите на низата (1) се непрекинати функции на интервалот $[a,b]$, од теорема 2.11 следува дека и нејзината рамномерна граница $f(x)$ е непрекината на интервалот $[a,b]$, па затоа таа е интеграбилна на $[a,b]$. Според тоа, интегралот $\int_a^b f(x)dx$ постои.

Од рамномерната конвергентност на низата (1) на интервалот $[a,b]$ следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ и за секој $x \in [a,b]$ е исполнето неравенството

$$| f_n(x) - f(x) | < \tfrac{\varepsilon}{b-a} .$$

Значи, постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ важи

$$| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx | = | \int_a^b [f_n(x) - f(x)]dx | \le \int_a^b | f_n(x) - f(x) | \, dx$$

$$< \int_a^b \tfrac{\varepsilon}{b-a} dx = \tfrac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

од што следува равенството (9). ♦

2.14. Пример. а) Ако низата (1) не е рамномерно конвергентна на интервалот $[a,b]$, тогаш тврдењето од претходната теорема може да не е точно. Имено, да ја разгледаме функционалната низа:

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad n \in \mathbf{N}, \ x \in [0,1] .$$

Ако одделно ги разгледаме случаите $x > 0$ и $x = 0$ добиваме

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2} = 0, \qquad x \in [0,1] ,$$

што значи дека $f(x) \equiv 0$. Меѓутоа, оваа низа не е рамномерно конвергентна бидејќи

$$\sup_{x\in[0,1]} | f_n(x) - f(0) | \ge f_n(\tfrac{1}{\sqrt{n}}) = \tfrac{\sqrt{n}}{e} \to +\infty \text{ кога } n \to \infty .$$

Од друга страна, имаме

$$\int_0^1 f_n(x)dx = n\int_0^1 xe^{-nx^2} dx = -\tfrac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}(1 - e^{-n}) \to \tfrac{1}{2}, \text{ кога } n \to \infty \quad \text{и} \quad \int_0^1 f(x)dx = 0 ,$$

што значи дека при граничниот премин под знакот на интегралот рамномерната конвергентност на низата (1) е задолжителен услов.

б) Да ја разгледаме функционалната низа $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, $n = 1,2,...$ определена со

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & x \in [0, \tfrac{1}{2n}) \\ n - 2n^2(x - \tfrac{1}{2n}), & x \in [\tfrac{1}{2n}, \tfrac{1}{n}) \\ 0, & x \in [\tfrac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Лесно се гледа дека $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x), \ x \in [0,1]$. Меѓутоа,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \quad \text{и} \quad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0 \bullet dx = 0 ,$$

и како функциите $f, f_n, n = 1, 2, \ldots$ се непрекинати од теорема 2.13 следува дека низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не конвергира рамномерно кон граничната функција $f(x)$. ♦

2.15. Пред да ја формулираме и докажеме последната теорема во овој параграф, ќе разгледаме уште еден пример.

Пример. а) Нека е дадена функционалната низа $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ со општ член $s_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $x \in [0, \pi]$. Бидејќи

$$| s_n(x) - 0 | = | \tfrac{\sin nx}{\sqrt{n}} - 0 | = \tfrac{|\sin nx|}{\sqrt{n}} \leq \tfrac{1}{\sqrt{n}} = a_n, \ a_n > 0 \text{ и } \lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

од последица 2.9 следува дека оваа низа рамномерно конвергира кон функцијата $s(x) = 0$, $x \in [0, \pi]$. Очигледно, дадената низа е диференцијабилна и низата формирана од изводите е $s_n'(x) = \sqrt{n} \cos nx$, $n = 1, 2, \ldots$. Но, низата $\{s_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не само што не е рамномерно конвергентна на интервалот $[0, \pi]$, туку не е конвергентна ниту обично. На пример, за $x = 0$ ја добиваме реалната низа $s_n'(0) = \sqrt{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ која е дивергентна. ♦

2.16. Теорема. Нека $a, b \in \mathbf{R}$ и низата (1) од непрекинато диференцијабилни функции на интервалот $[a, b]$ конвергира барем во една точка $x_0 \in [a, b]$, а низата $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на $[a, b]$. Тогаш, низата (1) рамномерно конвергира на $[a, b]$ кон функцијата $f(x)$ која е непрекинато диференцијабилна на интервалот $[a, b]$ и притоа важи

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x), \tag{10}$$

за секој $x \in [a, b]$.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Бидејќи низата $\{f_n(x_0)\}$ конвергира, а низата $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на $[a, b]$, од Кошиевите критериуми за конвергенција на реална и функционална низа следува дека постои природен број n_0 таков што за секои $m, n > n_0$ и за секој $t \in [a, b]$ важи

$$| f_n(x_0) - f_m(x_0) | < \tfrac{\varepsilon}{2} \tag{11}$$

и

$$| f_n'(t) - f_m'(t) | < \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{12}$$

Од теоремата на Лагранж, применета на функцијата $f_n(x) - f_m(x)$ и од неравенството (12) следува дека за секои $x, t \in [a, b]$ и за секои $m, n > n_0$ важи

$$| f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t) | < \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)} | x - t | \leq \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)} (b - a) = \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

Од досега изнесеното и од неравенствата (11) и (13) следува дека n_0 таков што за секои $m,n > n_0$ и за секој $t \in [a,b]$, важи

$$| f_n(x) - f_m(x) | \le | f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0) | + | f_n(x_0) - f_m(x_0) | < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

што според Кошиевиот критериум значи дека низата (1) рамномерно конвергира на $[a,b]$.

Нека $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n^{'}(x)$, за $x \in [a,b]$ и x е произволна точка од интервалот $[a,b]$. Бидејќи низата $\{f_n^{'}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на $[a,b]$, таа рамномерно конвергира и на интервалот со крајни точки x_0 и x. Од теорема 2.13 следува дека

$$\int_{x_0}^{x} g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n^{'}(x)dx = \lim_{n\to\infty} [f_n(x) - f_n(x_0)] = f(x) - f(x_0)\,.$$

Ако го диференцираме равенството

$$\int_{x_0}^{x} g(x)dx = f(x) - f(x_0)\,,$$

тогаш од својствата на определениот интеграл добиваме $g(x) = f'(x)$, за секој $x \in [a,b]$, т.е. за секој $x \in [a,b]$ равенството (10) е исполнето. ♦

3. ФУНКЦИОНАЛНИ РЕДОВИ

3.1. Дефиниција. Редот чии членови се елементите на функционалната низа $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определена на множеството $D \subset \mathbf{R}$ го нарекуваме *функционален ред* и го означуваме со

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,. \tag{1}$$

Низата парцијални суми на редот (1) ја означуваме со

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x),\ \ x \in D,\ n \ge 1\,.$$

За редот (1) ќе велиме дека *конвергира во точката* $x_0 \in D$ ако конвергира бројниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$. За редот (1) ќе велиме дека *конвергира на множеството* D ако тој конвергира во секоја точка од D.

Множеството од сите точки $x \in D,$ во кои редот (1) конвергира, го нарекуваме *област на конвергенција на редот* (1).

3.2. Дефиниција. Ќе велиме дека функционалниот ред (1) *рамномерно конвергира* на множеството $A \subset D$ ако низата парцијални суми $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in A$ рамномерно конвергира на множеството A.

3.3.Забелешка. Рамномерната конвергентност на редот (1) означува дека постои таква функција $s(x)$ кон која низата парцијални суми $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на множеството A. Од рамномерната конвергенција следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = s(x),$ за секој $x \in A$, па затоа $s(x)$ е сума на редот (1).

Да ставиме

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) .$$

Тогаш, $s(x) - s_n(x) = r_n(x)$, па затоа редот (1) рамномерно конвергира кон функцијата $s(x)$ ако и само ако низата $\{r_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон функцијата $g(x) = 0,\ \ x \in A$.

3.4. Теорема. Редот (1) рамномерно конвергира кон функцијата $s(x)$ на множеството $A \subset D$ ако и само ако

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} | s_n(x) - s(x) | = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} | r_n(x) | = 0 .$$

Доказ. Непосредно следува од теорема 2.8. ♦

3.5. Теорема. Ако редот (1) рамномерно конвергира на множеството $A \subset D$, тогаш низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ од неговите членови рамномерно конвергира кон нула на множеството A, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} | f_n(x) | = 0 .$$

Доказ. Нека редот (1) рамномерно конвергира на множеството A. Тогаш, за секој $\varepsilon > 0$ постои n_0 таков што за секој $n > n_0$ и за секој $x \in A$ важи

$$| s_n(x) - s(x) | < \tfrac{\varepsilon}{2} .$$

Затоа, за секој $\varepsilon > 0$ постои n_0 таков што за секој $n > n_0$ и за секој $x \in A$ важи

$$| f_{n+1}(x) | = | s_{n+1}(x) - s_n(x) | \le | s_{n+1}(x) - s(x) | + | s_n(x) - s(x) | < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

т.е. низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон нула на множеството A, односно $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in A} | f_n(x) | = 0$. ♦

3.6. Пример. Да го разгледаме редот

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{((k-1)x+1)(kx+1)}, \qquad x\in(0,\infty)\ .$$

За $n-$та парцијална сума на редот имаме

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{((k-1)x+1)(kx+1)}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{(k-1)x+1}-\frac{1}{kx+1})=1-\frac{1}{nx+1}\ ,$$

од што добиваме дека $s(x)=\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{nx+1})=1,\ \ x\in(0,\infty)$. Понатаму, бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,\infty)}|r_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,\infty)}\frac{1}{nx+1}=1\ ,$$

од теорема 3.4 следува дека овој ред конвергира, но не конвергира рамномерно. ♦

3.7. Пример. Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)...(1+nx)}$, кога

а) $x\in[0,\varepsilon],\ \ \varepsilon>0$ и б) $x\in[\varepsilon,\infty),\ \ \varepsilon>0$.

Ако општиот член $f_n(x)$ на редот го запишеме во видот

$$\frac{nx}{(1+x)(1+2x)...(1+nx)}=\frac{1}{(1+x)(1+2x)...(1+(n-1)x)}-\frac{1}{(1+x)(1+2x)...(1+nx)}\ ,$$

тогаш за $n-$та парцијална сума на редот имаме

$$s_n(x)=1-\frac{1}{(1+x)(1+2x)...(1+nx)}\ .$$

Оттука следува дека

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{(1+x)(1+2x)...(1+nx)})=\begin{cases}1, & \text{ако } x>0,\\ 0, & \text{ако } x=0.\end{cases}$$

Понатаму, во случајот под а) имаме

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,\varepsilon]}|r_n(x)|=|s(0^+)-s_n(0^+)|=1\ ,$$

што значи дека во овој случај редот конвергира, но не конвергира рамномерно.

Во случајот под б) наоѓаме

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[\varepsilon,\infty)}|r_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)...(1+n\varepsilon)}=0\ ,$$

што значи дека во овој случај редот конвергира рамномерно. ♦

3.8. Дефиниција. За редот (1) ќе велиме дека *апсолутно конвергира на множеството* D ако на множеството D конвергира редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$.

3.9. Теорема (Ваерштрас). Нека се дадени функционалниот ред (1) чии членови се определени на множеството D и бројниот ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n \geq 0, n = 1,2,3,\dots. \tag{2}$$

Ако редот (2) конвергира и се исполнети неравенствата

$$|f_n(x)| \leq a_n, \qquad n = 1,2,\dots, \text{ за секој } x \in D, \tag{3}$$

тогаш редот (1) апсолутно и рамномерно конвергира на множеството D.

Доказ. Ако редот (2) конвергира, тогаш од признакот на срамнување и од неравенствата (3) следува дека редот (1) апсолутно конвергира на множеството D. Јасно, редот (1) конвергира.

Нека $s(x)$ е сумата на редот (1) и $s_n(x)$ е неговата парцијална сума. Од конвергентноста на редот (2) следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои n_0 таков што за секој $n > n_0$ е исполнето неравенството $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$. Но, тогаш за секој $n > n_0$ и за секој $x \in D$ важи

$$|s_n(x) - s(x)| = |r_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon,$$

што значи дека редот (1) рамномерно конвергира на множеството D. ♦

3.10. Пример. Да го разгледаме редот

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}), \qquad |x| < a. \tag{4}$$

Ако го искористиме неравенството $\ln(1+x) \leq x$, за $x \geq 0$, добиваме

$$0 \leq \ln(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}) \leq \frac{x^2}{n \ln^2 n} < \frac{a^2}{n \ln^2 n}$$

и бидејќи бројниот ред $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{a^2}{n \ln^2 n}$ конвергира, од претходната теорема следува дека редот (4) рамномерно конвергира. ♦

3.11. Теорема (Кошиев критериум). Редот (1) рамномерно конвергира на множеството D ако и само ако за секој $\varepsilon > 0$ постои n_0 таков што за секој $n > n_0$, за секој $p \geq 0$ и за секој $x \in D$ е исполнето неравенството

$$|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Доказ. Непосредно следува од теоремата 2.7. ♦

3.12. Теорема (признак на Дирихле-Харди). Ако функционалната низа $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in D$ рамномерно конвергира кон нула на множеството D и во секоја точка $x \in D$ таа е монотона, а функционалната низа $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in D$ е таквашто низата парцијални суми на редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \tag{6}$$

е ограничена на D, тогаш редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \tag{7}$$

рамномерно конвергира на D.

Доказ. Од условот на теоремата следува дека парцијалните суми

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x), \qquad n = 1,2,...$$

на редот (6) се ограничени на множеството D, па затоа постои константа $B > 0$ таква што за секој $x \in D$ и за секој $n = 1,2,...$ е исполнето неравенството $| B_n(x) | \le B$. Според тоа, за секој $x \in D$, за секој $n = 2,3,4,...$ и за секој $p = 0,1,2,...$ важи

$$| \sum_{k=n}^{n+p} b_k(x) | = | B_{n+p}(x) - B_{n-1}(x) | \le | B_{n+p}(x) | + | B_{n-1}(x) | \le 2B . \tag{8}$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Бидејќи низата $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон нула на множеството D, добиваме дека постои n_0 таков што за секој $x \in D$ и за секој $n > n_0$ важи $| a_n(x) | < \frac{\varepsilon}{6B}$. Според тоа, за секој $x \in D$, за секој $n > n_0$ и за секој $p = 0,1,2,...$, согласно со равенството на Абел и монотоноста на низата $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ во секоја точка од множеството D добиваме

$$\begin{aligned} | \sum_{k=n}^{n+p} b_k(x) a_k(x) | &\le | a_{n+p}(x) B_{n+p}(x) + \sum_{k=n}^{n+p-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x)) B_j(x) | \\ &\le | a_{n+p}(x) | \cdot | B_{n+p}(x) | + \sum_{k=n}^{n+p-1} | a_k(x) - a_{k+1}(x) | \cdot | B_j(x) | \\ &\le 2B(| a_{n+p}(x) | + \sum_{k=n}^{n+p-1} | a_k(x) - a_{k+1}(x) |) \\ &= 2B(| a_{n+p}(x) | + | \sum_{k=n}^{n+p-1} a_k(x) - a_{k+1}(x) |) \\ &= 2B(| a_{n+p}(x) | + | a_n(x) - a_{n+p}(x) |) \\ &\le 2B(2 | a_{n+p}(x) | + | a_n(x) |) < 2B(\tfrac{\varepsilon}{6B} + \tfrac{2\varepsilon}{6B}) = \varepsilon \end{aligned}$$

Сега тврдењето на теоремата следува од Кошиевиот критериум (теорема 3.11). ♦

3.13. Пример. Ќе ја испитаме рамномерната конвергентност на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ на множествата

а) $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon], \qquad 0<\varepsilon<\pi$ б) $[0, 2\pi]$

Решение. а) Парцијалните суми $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx$ се ограничени, т.е.

$$|\sum_{k=1}^{n}\sin kx|=|\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}|\le\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\le\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}},$$

а низата $a_n(x)=\frac{1}{n},\ n=1,2,...$ е монотона и таа рамномерно конвергира кон нула на целата реална права (зошто?), па затоа од теорема 3.12 следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ рамномерно конвергира на множеството $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon], \qquad 0<\varepsilon<\pi$.

б) Од признакот на Дирихле следува дека за секој фиксиран $x\in(0,2\pi)$ редот конвергира, а конвергентноста за $x=0$ и $x=2\pi$ е очигледна. Користејќи го Кошиевиот критериум, ќе докажме дека овој ред не конвергира рамномерно на множеството $[0,2\pi]$. Нека $\varepsilon=0,1$. Да ја oцениме разликата

$$|s_{2n}(x)-s_n(x)|_{x=\frac{1}{n}}=|\frac{\sin(n+1)x}{n+1}+\frac{\sin(n+2)x}{n+2}+...+\frac{\sin 2nx}{2nx}|_{x=\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{\sin(1+\frac{1}{n})}{n+1}+\frac{\sin(1+\frac{2}{n})}{n+2}+...+\frac{\sin 2}{2n}\ge\frac{\sin 1}{2}>\varepsilon,$$

за секој природен број n, што значи дека редот не конвергира рамномерно. ♦

3.14. Теорема (признак на Абел-Харди). Ако низата функции $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена на множеството D и монотона во секоја точка $x\in D$, а редот (6) рамномерно конвергира на D, тогаш и редот (7) рамномерно ковергира на множеството D.

Доказ. Бидејќи низата $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена на множеството D постои константа $A>0$ таквашто за секој $x\in D$ и секој $n=1,2,3,...$ е исполнето неравенството $|a_n(x)|<A$.

Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Од рамномерната конвергенција на редот (6) следува дека постои природен број n_0 таков што за секој $x\in D$, за секој $n>n_0$ и за секој $p=0,1,2,...$ е исполнето неравенството

$$|\sum_{k=n}^{n+p}b_k(x)|<\varepsilon .$$

Аналогно на доказот на теорема 3.12 имаме

$$|\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x)a_k(x)| \leq \tfrac{\varepsilon}{3A}(|a_n(x)|+2|a_{n+p}(x)|) < \tfrac{\varepsilon}{3A}(A+2A) = \varepsilon .$$

Сега тврдењето на теоремата следува од Кошиевиот критериум (теорема 3.11). ♦

3.15. Пример. Редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$, $x > 0$ рамномерно конвергира на множеството $[a,+\infty)$, каде $a > 0$. Навистина, ако ставиме

$$a_n(x) = \tfrac{1}{n^{x-a/2}}, \qquad b_n(x) = \tfrac{(-1)^{n+1}}{n^{a/2}}, \qquad x \geq a, n \geq 1 ,$$

тогаш лесно се гледа дека условите од претходната теорема се исполнети, што значи дека разгледуваниот ред рамномерно конвергира. ♦

4. СВОЈСТВА НА РАМНОМЕРНО КОНВЕРГЕНТНИ РЕДОВИ

4.1. Теорема. Ако функциите $a_n(x),\ n = 1,2,...$ се непрекинати во точката $x_0 \in D \subset \mathbf{R}$ и редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \tag{1}$$

рамномерно конвергира на D, тогаш неговата сума $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ исто така, е непрекината во точката x_0.

Доказ. Тврдењето непосредно следува од теорема 2.11 применета на низата парцијални суми $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ на редот (1). ♦

4.2. Пример. Ќе докажеме дека Римановата ѕета функција

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \tag{2}$$

е непрекината на множеството $(1,+\infty)$.

Нека $x \geq x_0 > 1$. Тогаш, бидејќи редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0}}$ конвергира, од неравенството

$$\frac{1}{n^x} \le \frac{1}{n^{x_0}}, \; n = 1, 2, ...$$

и критериумот на Ваерштрас следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ конвергира за секој $x \ge x_0 > 1$. Бидејќи секоја од функциите $a_n(x) = n^{-x}$, $n = 1, 2, ...$ е непрекината за $x \ge x_0 > 1$, т.е. кога $x > 1$ од теорема 4.1 следува дека функцијата (2) е непрекината на $(1, +\infty)$. ♦

4.3. Теорема. Нека функциите $a_n(x), \; n = 1, 2, ...$ се непрекинати на интервалот $[a, b]$ и редот (1) рамномерно конвергира на $[a, b]$. Тогаш, за секоја точка $c \in [a, b]$ редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x a_n(t) dt$$

рамномерно конвергира на $[a, b]$ и, ако

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \tag{3}$$

тогаш

$$\int_c^x [\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)] dt = \int_c^x s(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x a_n(t) dt, \qquad x \in [a, b].$$

Доказ. Тврдењето на теоремата непосредно следува од теорема 2.13 применета на низата парцијални суми $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ на редот (1). ♦

4.4. Теорема. Нека функциите $a_n(x), \; n = 1, 2, ...$ се непрекинато диференцијабилни на интервалот $[a, b]$ и редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$$

рамномерно конвергира на интервалот $[a, b]$. Тогаш, ако редот (1) конвергира барем во една точка $c \in [a, b]$, тој конвергира рамномерно на целиот интервал $[a, b]$, неговата сума (3) е непрекинато диференцијабилна и притоа важи

$$[\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)]' = s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x).$$

Доказ. Тврдењето на теоремата непосредно следува од теорема 2.15 применета на низата парцијални суми $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ на редот (1). ♦

4.5. Пример. Ќе докажеме дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$ може член по член да се диференцира.

Функциите $f_n(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$, $n \in \mathbf{N}$ се непрекинато диференцијабилни за $(-\infty, +\infty)$. На овој интервал функционалниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$ конвергира, (зошто?). Освен тоа, од критериумот на Ваерштрас следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{'}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}$ рамномерно конвергира на интервалот $(-\infty, +\infty)$. Сега од теорема 4.4 следува дека разгледуваниот ред може член по член да се диференцира. ♦

5. ПОИМ ЗА СТЕПЕНСКИ РЕД

5.1. Во овој дел ќе ги разгледаме степенските редови кои, всушност, се функционални редови, но нив посебно ќе ги проучиме заради важноста што ја имаат во изучувањето на функциите.

Дефиниција. Функционалниот ред од видот

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad x, x_0 \in \mathbf{R}, \quad a_n \in \mathbf{R}, \ n = 0,1,2,... \tag{1}$$

го нарекуваме *степенски ред.* Броевите $a_n \in \mathbf{R}$, $n = 0,1,2,...$ ги нарекуваме *коефициенти* на степенскиот ред.

Со помош на смената $t = x - x_0$, редот (1) можеме да го запишеме во видот

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \tag{2}$$

па затоа ќе се ограничиме само на разгледување на редот (2).

5.2. Теорема (Абел). а) Ако степенскиот ред (2) конвергира за $x = p$, $p \neq 0$, тогаш тој апсолутно конвергира за секој x таков што $|x| < |p|$.

б) Ако степенскиот ред (2) дивергира за $x = q$, тогаш тој дивергира за секој x таков што $|x| > |q|$.

Доказ. а) Ако $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k p^k$ конвергира, тогаш $\lim\limits_{n \to \infty} a_n p^n = 0$, па затоа постои константа $M > 0$ таква што $|a_n p^n| \leq M$, за секој $n = 1,2,...$. Тогаш, од $p \neq 0$ следува дека

$$|a_n x^n| = |a_n p^n| |\tfrac{x}{p}|^n \le M |\tfrac{x}{p}|^n .$$

Ако $|x| < |p|$, тогаш геометрискиот ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M |\frac{x}{p}|^n$ конвергира, па затоа и редот (2) апсолутно конвергира.

б) Нека редот $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k q^k$ дивергира. Ако редот (2) конвергира за некој x_0 таков што $|x_0| > |q|$, тогаш од а) ќе следува дека тој конвергира за секој x таков што $|x| < |x_0|$, па значи и за q, што е противречност. ♦

5.3. Коментар. Да го разгледаме редот (2). Тој конвергира во точката $x = 0$. Со X да го означиме множеството реални броеви за кои редот (2) конвергира. Од $0 \in X$ следува дека $X \neq \varnothing$, па затоа постои

$$R = \sup X . \tag{3}$$

Јасно, $0 \le R \le +\infty$.

Ако $R > 0$ и $x \in \mathbf{R}$ е таков што $|x| < R$, тогаш од дефиницијата на супремум следува дека постои $p \in X$, таков што $|x| < p < R$ и бидејќи во секоја точка $p \in X$ редот (2) конвергира, од теорема 5.2 следува дека редот (2) апсолутно конвергира во точката x.

Ако $R < +\infty$ и $x \in \mathbf{R}$ е таков што $|x| > R$, тогаш од (3) следува дека во секоја точка $p > 0$ таква што $R < p < |x|$ редот (2) дивергира.

5.4. Дефиниција. Бројот $R \ge 0$ го нарекуваме *радиус на конвергенција* на редот (2) ако за секој $x \in \mathbf{R}$ таков што $|x| < R$ редот (2) конвергира, а за секој $x \in \mathbf{R}$ таков што $|x| > R$ редот (2) дивергира. Интервалот $(-R, R)$ го нарекуваме *област на конвергенција* на редот (2).

5.5. Теорема. За секој степенски ред (2) постои радиус на конвергенција R, $0 \le R \le +\infty$ и, притоа, ако $|x| < R$, тогаш во точката x редот (2) апсолутно конвергира, а ако $0 < r < R$, тогаш на интервалот $[-r, r]$ редот (2) конвергира рамномерно.

Доказ. Егзистенцијата на радиусот на конвергенција на редот (2) е докажана во претходниот коментар и тој се определува според формулата (3).

Ќе докажеме дека ако $0 < r < R$, тогаш редот (2) рамномерно конвергира на интервалот $[-r, r]$. Навистина, од $|x| \le r$ следува дека $|a_n x^n| \le |a_n| r^n$. Бидејќи $0 < r < R$, од дефиницијата на радиусот на конвергенција следува дека редот (2) конвергира за $x = r$. Сега, од теорема 3.9 следува дека редот (2) рамномерно конвергира за секој $x \in [-r, r]$. ♦

5.6. Последица. Ако R е радиусот на конвергенција на редот (2), тогаш сумата на овој ред е непрекината функција на секој интервал $[-r,r]$, каде $0<r<R$.

Доказ. Непосредно следува од непрекинатоста на секој член на редот (2) и теоремите 5.5 и 4.1. ♦

5.7. Забелешка. За да го определиме радиусот на конвергенција на редот (2), можеме да ги искористиме Кошиевиот и Даламберовиот критериум.

За степенскиот ред (2) го формираме количникот

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|.$$

Според Даламберовиот критериум, редот (2) конвергира ако

$$|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1,$$

т.е. ако

$$|x|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|},$$

а дивергира ако $|x|>\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$. Значи, ако постои

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\neq\begin{cases}0\\+\infty\end{cases}$$

имаме $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$. Притоа, ако $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$, земаме $R=+\infty$, а ако $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=+\infty$, земаме $R=0$.

Слично, од Кошиевиот критериум заклучуваме дека редот (2) конвергира ако $|x|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$, а дивергира ако $|x|>\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$. Значи, ако постои

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\neq\begin{cases}0\\+\infty\end{cases}$$

имаме $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$. Притоа, ако $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$, имаме $R=+\infty$, а ако $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=+\infty$, земаме $R=0$.

5.8. Примери. а) Да го разгледаме степенскиот ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^n$. За да ја испитаме неговата апсолутна конвергентност, ќе го искористиме Даламберовиот критериум. Имаме,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)|x|=\begin{cases}+\infty, & \text{ако } x\neq 0\\ 0, & \text{ако } x=0.\end{cases}$$

Според тоа, разгледуваниот ред конвергира само за $x=0$, па затоа $R=0$.

б) За редот $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ имаме

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!x^{n+1}}{(n+1)!x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0,$$

па затоа $R=+\infty$.

в) Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^{[\lg n]+1}}{n}(1-x)^n$. Имаме,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{10^{[\lg n]+1}}{n}}=1$$

од што следува дека радиусот на конвергенција на овој ред е $R=1$. Според тоа, редот конвергира за $|x-1|<1$, т.е. за $0<x<2$.

Од неравенствата

$$n=10^{\lg n}<10^{[\lg n]+1}\leq 10^{\lg n+1}=10n$$

заклучуваме дека во точките $x=0$ и $x=2$ редот дивергира, бидејќи во овие точки општиот член на редот не тежи кон нула. ♦

5.9. Теорема (Абел). Ако R е радиусот на конвергенција на степенскиот ред (2) и ако тој конвергира во точката $x=R$, тогаш тој рамномерно конвергира на интервалот $[0,R]$.

Доказ. Имаме

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nR^n\left(\tfrac{x}{R}\right)^n.$$

Од условот на теоремата следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nR^n$ конвергира, па бидејќи тој е броен ред, разгледуван како функционален ред рамномерно конвергира на интервалот $[0,R]$. Низата $(\frac{x}{R})^n$, $n=1,2,...$ е ограничена на интервалот $[0,R]$ и е монотона за секој $x\in[0,R]$. Сега, од Абеловиот признак за рамномерна конвергентност на функционален ред следува дека редот (2) рамномерно конвергира на интервалот $[0,R]$. ♦

5.10. Последица. Ако редот (2) конвергира за $x=R$, тогаш неговата сума е непрекината функција на $[0,R]$.

Доказ. Непосредно следува од непрекинатоста на секој член на редот (2) на интервалот $[0, R]$ и докажаната рамномерна непрекинатост на редот (2) на овој интервал. ♦

5.11. На крајот од овој дел ќе дадеме општа формула за наоѓање на радиусот на конвергенција на произволен степенски ред со помош на неговите коефициенти.

Теорема (Коши-Адамар). Ако R е радиусот на конвергенција на степенскиот ред (2), тогаш

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \,. \tag{4}$$

Доказ. Да ставиме $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Најпрво ќе го разгледаме случајот кога $\rho = 0$. Ќе докажеме дека во овој случај редот (2) конвергира за секој x. Нека $x \neq 0$ е произволен и ε е таков што $0 < \varepsilon < 1$. Тогаш постои $n_1 \in \mathbf{N}$ таков што $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\varepsilon}{|x|}$, за секој $n > n_1$, т.е.

$$|a_n| \cdot |x|^n < \varepsilon^n \text{, за секој } n > n_1 \,.$$

Сега од принципот на споредување следува дека редот (2) во точката x апсолутно конвергира, па затоа тој конвергира и обично. Од произволноста на точката x следува дека $R = +\infty$.

Нека $\rho = +\infty$. Ќе докажеме дека во овој случај редот (2) дивергира за секој $x \neq 0$. Навистина, ако $\rho = +\infty$, тогаш постои низа природни броеви n_k, $k = 1, 2, \ldots$ таква што $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty$. Затоа за секој $x \neq 0$ постои природен број k_x таков што при $k > k_x$ важи $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq \frac{1}{|x|}$ односно $|a_{n_k} x^{n_k}| \geq 1$. Според тоа, не е исполнет потребниот услов за да конвергира редот (2), што значи дека за секој $x \neq 0$ редот (2) дивергира, т.е. $R = 0$.

Нека $0 < \rho < +\infty$. Ќе докажеме дека за секој x таков што $|x| < \frac{1}{\rho}$ редот (2) конвергира. Ако за $\varepsilon > 0$ важи $|x| < \frac{1}{\rho + \varepsilon}$, тогаш бројот $q = (\rho + \varepsilon)|x|$ го задоволува неравенството $q < 1$. Од својствата на лимес супериор следува дека постои природен број $n_1 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_1$ важи $\sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \varepsilon$, од што следува дека за секој $n > n_1$ важи $|x| \sqrt[n]{|a_n|} < (\rho + \varepsilon)|x| = q$. Според тоа, за секој $n > n_1$ е исполнето неравенството

$$|a_n x^n| < q^n, \qquad 0 < q < 1 \,.$$

Сега тврдењето следува од признакот за споредување.

Ќе докажеме дека редот (2) дивергира за секој x таков што $|x|>\frac{1}{\rho}$. Нека $\varepsilon>0$ е таков што $|x|>\frac{1}{\rho-\varepsilon}>0$, т.е. $|x|(\rho-\varepsilon)>1$. Од својствата на лимес супериор следува дека постои низа природни броеви n_k, $k=1,2,\ldots$ таква што

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}>\rho-\varepsilon, \qquad k=1,2,\ldots,$$

што значи

$$|x|\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}>(\rho-\varepsilon)|x|>1, \qquad k=1,2,\ldots,$$

од што следува дека $|a_{n_k}x^{n_k}|>1$.

Според тоа, не е исполнет потребниот услов за да конвергира редот (2), што значи дека за разгледуваниот ред (2) дивергира.

Конечно, за $|x|>\frac{1}{\rho}$ редот (2) дивергира, а за $|x|<\frac{1}{\rho}$ конвергира, па затоа $R=\frac{1}{\rho}$. ♦

5.12. Пример. а) Да го разгледаме редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}x^n$. Според теорема 5.11 имаме

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{3+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}=\lim_{k\to\infty}\frac{4}{\sqrt[2k]{2k}}=4.$$

Оттука следува дека за секој x таков што $|x|<\frac{1}{4}$ редот конвергира.

Бидејќи за поднизата $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ на низата парцијални суми на бројниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3+(-1)^n)^n}{4^n n}$ е исполнето неравенството $S_{2n}\geq\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, заклучуваме дека во точката $x=\frac{1}{4}$ редот дивергира. Аналогно, во точката $x=-\frac{1}{4}$ имаме

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{2k-1}(2k-1)}.$$

Според тоа, во оваа точка важи $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=+\infty$, што значи дека редот дивергира.

б) За редот $1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots\frac{x^{2n-1}}{3^{2n-1}}+\frac{x^{2n}}{2^{2n}}+\ldots$ наоѓаме

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & n=2k\\ \frac{1}{3}, & n=2k+1\end{cases}.$$

Според тоа, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ не постои, но $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{2}$, па затоа $R=2$ ♦

6. АНАЛИТИЧКИ ФУНКЦИИ ВО РЕАЛНА ОБЛАСТ

6.1. Во оваа точка ќе разгледаме една класа функции кои во литературата се познати како аналитички функции во реална област. Најпрво ќе ја докажеме следнава лема која има важна улога во натамошните разгледувања.

6.2. Лема. Радиусите на конвергенција R, R_1 и R_2 на редовите

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \ \text{и} \tag{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{3}$$

соодветно, се еднакви.

Доказ. Од неравенството $|\frac{a_n}{n+1} x^{n+1}| = \frac{1}{n+1} |x| \cdot |a_n x^n| \le |x| \cdot |a_n x^n|$, за секој $n \in \mathbf{N}$ следува дека ако во точката x редот (1) апсолутно конвергира, тогаш во таа точка апсолутно конвергира и редот (2), што значи $R \le R_1$. Од неравенството $|a_n x^n| \le n |a_n x^n| = |x| \cdot |n a_n x^{n-1}|$, за секој $n \in \mathbf{N}$ следува дека ако во точката $x \ne 0$ редот (3) апсолутно конвергира, тогаш во таа точка апсолутно конвергира и редот (1), што значи $R_2 \le R$. Според тоа

$$R_2 \le R \le R_1 . \tag{4}$$

Ќе докажеме дека $R_1 \le R_2$. Нека $x_0 \ne 0$ е произволна точка во која конвергира редот (2). Бидејќи $|x_0| < R_1$, постои реален број $r > 0$ таков што

$$|x_0| < r < R_1 . \tag{5}$$

Имаме

$$|n a_n x_0^{n-1}| = \frac{n(n+1)}{|x_0|^2} \left| \frac{a_n r^{n+1}}{n+1} \right| \cdot \left| \frac{x_0}{r} \right|^{n+1}, \text{ за секој } n \in \mathbf{N} . \tag{6}$$

Бидејќи редот (2) конвергира за $x = r$, добиваме дека низата членови на овој ред тежи кон нула, па затоа таа е ограничена, т.е. постои константа $C > 0$ таква што за секој $n = 0,1,2,...$ важи

$$\left| \frac{a_n r^{n+1}}{n+1} \right| \le C . \tag{7}$$

Ставаме $q = |\frac{x_0}{r}|$. Од (5), (6) и (7) добиваме

$$|n a_n x_0^{n-1}| \le C \frac{n(n+1)}{|x_0|^2} q^{n+1}, \qquad 0 < q < 1, \text{ за секој } n \in \mathbf{N} .$$

Од критериумот на Даламбер следува дека редот

$$\sum_{n=0}^{\infty} C\frac{n(n+1)}{|x_0|^2}q^{n+1}, \qquad 0<q<1$$

конвергира, па затоа и редот (3) апсолутно конвергира за $x=x_0$. Значи, $R_1 \le R_2$, што заедно со (4) дава $R=R_1=R_2$. ♦

6.3. Коментар. Во натамошните разгледувања ќе се задржиме на редот

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \ . \tag{8}$$

Јасно, ако R е радиусот на конвергенција на редот (1), тогаш R е радиус на конвергенција и на редот (8) и овој ред конвергира ако $|x-x_0|<R$, а дивергира ако $|x-x_0|>R$. Интервалот (x_0-R, x_0+R) го нарекуваме *интервал на ковергентност на редот* (8).

6.4. Дефиниција. Функцијата $f(x)$ ја нарекуваме *аналитичка во точката* x_0 ако постои $R>0$ таков што на интервалот (x_0-R, x_0+R) таа може да се претстави во степенски ред (8), т.е. постојат реални броеви a_n, $n=0,1,2,...$ такви што

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad x\in(x_0-R, x_0+R)\,. \tag{9}$$

6.5. Теорема. Ако функцијата f можеме да ја разложиме во околина на точката x_0 во степенски ред (9) со радиус на конвергенција R, $R>0$, тогаш:

а) во интервалот (x_0-R, x_0+R) функцијата f има изводи од произволен ред и тие се наоѓаат од редот (9) со диференцирање член по член;

б) за секој $x\in(x_0-R, x_0+R)$ важи

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1},$$

т.е. редот (9) може член по член да се интегрира на интервалот (x_0-R, x_0+R);

в) редовите добиени од редот (9) со диференцирање или интегрирање член по член имаат ист радиус на конвергенција како и редот (9).

Доказ. Од лема 6.2 следува дека радиусите на конвергенција на редовите $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ и $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ добиени со почлено диференцирање и интегрирање на редот (9), се еднакви на радиусот на конвергенција на овој ред.

Од теорема 3.5 следува дека трите реда рамномерно конвергираат на интервалот $[x_0-r, x_0+r]$, $0<r<R$, па затоа делот од тврдењето на теоремата за

диференцирање и интегрирање член по член на редот (9) следува од општите теореми за диференцирање и интегрирање на функционални редови. ♦

6.6. Пример. Користејќи го диференцирањето член по член, ќе ја определиме сумата на редот

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\dots .$$

Лесно се гледа дека дадениот ред има радиус на конвергенција $R=1$. Според теорема 6.5, овој ред може член по член да се диференцира внатре во интервалот на конвергентност. Имаме

$$(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\dots)'=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\dots=\frac{1}{1+x^2}, \qquad |x|<1 .$$

Оттука со интегрирање добиваме

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\dots=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg}x .$$

Да забележиме дека на краевите на интервалот на конвергентност овој ред конвергира. Затоа, согласно со теоремата на Абел, сумата на овој ред е непрекината функција на интервалот $[-1,1]$. Бидејќи функцијата $f(x)=\operatorname{arctg}x$, исто така, е непрекината на овој интервал, заклучуваме дека последното равенство важи за секој $x\in[-1,1]$. ♦

6.7. Пример. Општиот член на редот

$$1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\dots$$

е даден со $a_n(x)=n(n+1)x^n$, па затоа неговиот радиус на конвергенција е

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n(n+1)}}=1 .$$

Според тоа, овој ред конвергира кон својата сума за $|x|<1$. Сумата на редот да ја означиме со $S(x)$. Ако разгледуваниот ред двапати член по член го интегрираме во интервалот $(-1,1)$ добиваме

$$\int\frac{dx}{x^2}\left(\int S(x)dx\right)=x+x^2+x^3+x^4+\dots-\frac{A}{x}+B=\frac{x}{1-x}-\frac{A}{x}+B , \tag{10}$$

каде A и B се интеграциони константи и $x\neq 0$.

Ако равенството (10) го диференцираме двапати и земеме предвид дека $S(0)=0$, добиваме $S(x)=\frac{2x}{(1-x)^3}$, $\quad |x|<1$. ♦

6.8. Теорема. Ако функцијата f е аналитичка во точката x_0, т.е. може да се претстави во околина на таа точка во редот (9), тогаш

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \qquad n=0,1,2,\dots \tag{11}$$

т.е. точна е формулата

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \ . \qquad (12)$$

Доказ. Ако m пати го диференцираме равенството (9), добиваме

$$f^{(m)}(x)=m(m-1)...2\cdot 1a_m+(m+1)m\cdot ...\cdot 2a_{m+1}(x-x_0)+(m+2)(m+1)\cdot ...\cdot 3a_{m+2}(x-x_0)^2+...$$

Во последното равенство ставаме $x=x_0$ и добиваме

$$f^{(m)}(x_0)=m!a_m,\, m=0,1,...,$$

т.е. точна е формулата (11). Единственоста на разложувањето (9) следува од фактот дека коефициентите a_n, $n=0,1,...$ се зададени со формулата (11). ♦

7. РАЗЛОЖУВАЊЕ НА ФУНКЦИЈА ВО СТЕПЕНСКИ РЕД

7.1. Дефиниција. Нека реалната функција f е определна во некоја околина на точката x_0 и нека во x_0 има изводи од произволен ред. Тогаш редот

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \ . \qquad (1)$$

го нарекуваме *Тејлоров ред.* Ако $x_0=0$, тогаш редот (1) го нарекуваме *Маклоренов ред.*

7.2. Забелешка. Согласно со теоремите 6.5 и 6.8 секоја аналитичка функција во точката x_0 има извод од произволен ред во околина на таа точка и во разгледуваната околина е еднаква на сумата на својот Тејлоров ред.

Меѓутоа, ако функцијата има извод од произволен ред во некоја точка, може да се случи сумата на нејзиниот Тејлоров ред во ниедна околина на таа точка да не е еднаква на вредноста на функцијата. Ќе разгледаме пример на таква функција.

7.3. Пример. Да ја разгледаме функцијата

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Ако $x\neq 0$, тогаш

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2},\ f''(x)=(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4})e^{-1/x^2}$$

и воопшто

$$f^{(n)}(x)=P_n(\tfrac{1}{x})e^{-1/x^2}\ ,\ n=1,2,3,... \qquad (2)$$

каде $P_n(t)$ е полином од t, (n е ознака, а не степенот на полиномот). Значи

$$f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} \sum_{k=0}^{m_n} \frac{\lambda_k}{x^k}, \qquad \lambda_k \in \mathbf{R},\ m_n \in \mathbf{N}\,.$$

Имаме,

$$\lim_{x\to 0} \left| \frac{1}{x^m} e^{-1/x^2} \right| = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{m/2}}{e^t} = 0\,,$$

па затоа од (2) следува дека

$$\lim_{x\to\pm 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to\pm 0} P_n(\tfrac{1}{x}) e^{-1/x^2} = 0\,. \tag{3}$$

Од (3) за $n=0$ и $n=1$ следува $\lim\limits_{x\to\pm 0} f(x) = 0 = f(0)$ и $\lim\limits_{x\to\pm 0} f'(x) = 0$, па затоа $f'(0)$ постои, $f'(0)=0$ и f' е непрекината во $x=0$. Повторувајќи ја постапката наоѓаме $f^{(n)}(0)=0,\ n=0,1,2,\ldots$. Според тоа, сите членови во Тејлоровиот ред за оваа функција се еднакви на нула и бидејќи $f(x)\neq 0$, за $x\neq 0$, добиваме дека функцијата не е еднаква на сумата на Тејлоровиот ред во ниедна околина на точката $x=0$. ♦

7.4. Коментар. Нека функцијата f во точката x_0 има извод од произволен ред, со (1) е даден нејзиниот Тејлоров ред,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{4}$$

се парцијалните суми на редот (1) и

$$r_n(x) = f(x) - S_n(x) \tag{5}$$

е остаточниот член од Тејлоровата формула за функцијата f во точката x_0 (а не збирот на остатокот на редот (1)). Значи,

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x) \tag{6}$$

е Тејлоровата формула за функцијата f.

Јасно, за да е еднаква функцијата f на збирот на нејзиниот Тејлоров ред во некоја околина на точката x_0, потребно и доволно е во таа околина да важи

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0\,, \tag{7}$$

и тогаш од (6) добиваме

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,,$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{4}$$

се парцијалните суми на редот (1) и

$$r_n(x) = f(x) - S_n(x) \tag{5}$$

е остаточниот член од Тејлоровата формула за функцијата f во точката x_0 (а не збирот на остатокот на редот (1)). Значи,

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x) \tag{6}$$

е Тејлоровата формула за функцијата f.

Јасно, за да е еднаква функцијата f на збирот на нејзиниот Тејлоров ред во некоја околина на точката x_0, потребно и доволно е во таа околина да важи

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \tag{7}$$

и тогаш од (6) добиваме

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

т.е. $f(x)$ е сума на редот (1).

За да ги испитаме својствата на остатокот $r_n(x)$, да се потсетиме дека важи следнава теорема.

7.5. Теорема. Ако функцијата f е $n+1$ пати непрекинато диференцијабилна на интервалот $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, тогаш остаточниот член во Тејлоровата формула (6) за секој $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ може да се запише во еден од следниве три видови

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt, \tag{8}$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \xi = x_0 + \theta(x-x_0),\ 0 < \theta < 1 \tag{9}$$

и

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{10}$$

7.6. Пред да разгледаме примери за разложување на функции во Тејлоров ред, ќе дадеме еден потребен услов за разложливост на функција во степенски ред.

Теорема. Нека функцијата f има изводи од произволен ред на интервалот $(x_0 - h, x_0 + h)$ и нека постои константа $C > 0$ таква што за секој $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ и за секој $n = 0,1,2,...$ важи

$$|f^{(n)}(x)| \le C. \tag{13}$$

Тогаш, на интервалот $(x_0 - h, x_0 + h)$ функцијата f може да се разложи во Тејлоров ред и

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \ . \tag{14}$$

Доказ. За да ја докажеме формулата (14) доволно е да докажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$, каде $r_n(x)$ е остаточниот член во Тејлоровата формула за функцијата f во точката x_0. Ако го земеме $r_n(x)$ во облик на Лагранж, добиваме

$$|\, r_n(x)\,|=|\,\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,|\le C\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\ ,$$

каде x и ξ се такви што $|\,\xi-x_0\,|<|\,x-x_0\,|<h$, па затоа

$$\lim_{n\to\infty}|\, r_n(x)\,|\le C\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\le C\lim_{n\to\infty}\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}=0\ ,$$

од што следува $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$. ♦

7.7. Пример. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=e^x$.

Бидејќи $f^{(n)}(x)=e^x$, $n=0,1,2,\ldots$, добиваме дека за секој фиксиран $a>0$, за секој $x\in(-a,a)$ и за секој $n=0,1,2,\ldots$ е исполнето неравенството $0<f^{(n)}(x)<e^a$. Според тоа, на интервалот $(-a,a)$ за функцијата $f(x)=e^x$, при $x_0=0$ се исполнети условите на теорема 7.6, па затоа оваа функција на секој конечен интервал, а со самото тоа и на целата реална права, може да се развие во Тејлоров ред. Притоа, важи

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ . \tag{15}$$

Ако во формулата (15) наместо x ставиме $-x$, добиваме

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}\ . \tag{16}$$

Ако ги собереме и одземеме равенствата (15) и (16), а потоа поделиме со 2, добиваме

$$\mathrm{ch}\, x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ \text{ и }\ \mathrm{sh}\, x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ .\ ♦$$

7.8. Пример. Ако $f(x)=\sin x$, тогаш

$$f^{(n)}(x)=\sin(x+\tfrac{n\pi}{2}),\qquad n=0,1,2,\ldots,$$

па затоа

$$|\, f^{(n)}(x)\,|\le 1,\ \ n=0,1,2,\ldots,\ \ x\in\mathbf{R}\ .$$

Според теорема 7.6 функцијата $f(x)=\sin x$ може да се развие во степенски ред на целата реална права. Од Тејлоровата формула за оваа функција наоѓаме

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Со аналогни размислувања добиваме

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} . \ ♦$$

7.9. Пример. За функцијата $f(x)=\ln(1+x)$, од Тејлоровата формула, имаме

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + r_n(x) ,$$

Остаточниот член $r_n(x)$ го запишуваме во облик на Лагранж и добиваме

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \qquad 0<\theta<1$$

при што θ зависи од x и n. Ако $0 \le x \le 1$, тогаш $0 < \frac{1}{1+\theta x} \le 1$, па затоа $| r_n(x) | \le \frac{1}{n+1}$, што значи $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ кога $0 \le x \le 1$.

Ако $-1 < x < 0$, тогаш остаточниот член $r_n(x)$ го запишуваме во облик на Коши

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n (1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1} ,$$

при што $0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} = \frac{1-\theta}{1-\theta|x|} < 1$ и $\frac{1-\theta}{1+\theta x} = \frac{1-\theta}{1-\theta|x|} < \frac{1}{1-|x|}$. Затоа

$$| r_n(x) | = \left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right|^n \frac{1}{|1+\theta x|} | x |^{n+1} \le \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$$

и бидејќи $| x | < 1$, добиваме $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ кога $-1 < x < 0$.

Според тоа, за секој $x \in (-1,1]$ е точно разложувањето

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n . \tag{17}$$

За $x=-1$ редот на десната страна на (17) од хармонискиот ред се разликува само во знакот, па затоа тој дивергира. Ако $| x | > 1$, тогаш општиот член на редот на десната страна на (17) не тежи кон нула, па затоа овој ред дивергира при $| x | > 1$. ♦

7.10. Пример. Тејлоровата формула за функцијата

$$f(x)=(1+x)^a$$

има вид

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n+r_n(x)\,. \qquad (18)$$

Соодветниот ред, кој го нарекуваме биномен ред со степен a, има вид

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n\,. \qquad (19)$$

Ако a е природен број, тогаш редот (19) содржи само конечен број членови различни од нула и, всушност, се добива Њутновата биномна формула

$$(1+x)^a=\sum_{n=0}^{a}C_a^n x^n\,.$$

Нека a не е природен број и нека $x\neq 0$. Тогаш, сите членови на редот (19) се различни од нула. Од критериумот на Даламбер наоѓаме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\frac{a(a-1)\ldots(a-n)}{(n+1)!}x^{n+1}|}{|\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n|}=\lim_{n\to\infty}|\frac{a-n}{n+1}|\bullet|x|=|x|,$$

што значи дека при $|x|<1$ редот (19) конвергира, а при $|x|>1$ дивергира.

Ќе докажеме дека сумата на редот (19) на интервалот $(-1,1)$ е еднаква на вредноста на функцијата $f(x)=(1+x)^a$. За таа цел треба да докажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$. Остатокот од Тејлоровата формула ќе го запишеме во облик на Коши. Имаме

$$r_n(x)=\frac{a(a-1)\ldots(a-n)(1+\theta x)^{a-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}, \qquad 0<\theta<1\,.$$

Ако ставиме

$$a_n(x)=\frac{(a-1)[(a-1)-1]\ldots[(a-1)-n+1]}{n!}x^n, \qquad b_n(x)=ax(1+\theta x)^{a-1}, \qquad c_n(x)=(\frac{1-\theta}{1+\theta x})^n,$$

тогаш

$$a>-1\ r_n(x)=a_n(x)b_n(x)c_n(x), \qquad n=1,2,3,\ldots\,.$$

Множителот $a_n(x)$ е член на биномниот ред со степен $a-1$ и бидејќи секој биномен ред конвергира на интервалот $(-1,1)$, добиваме $\lim\limits_{n\to\infty}a_n(x)=0$. Понатаму, од неравенствата

$$1-|x|<1-\theta|x|\leq 1+\theta x\leq 1+\theta|x|<1+|x|, \qquad |x|<1$$

следува дека

$$|ax|(1-|x|)^{a-1} <|b_n(x)|<|ax|(1+|x|)^{a-1},$$

т.е. низата $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена за секој $x \in (-1,1)$. Што се однесува до низата $\{c_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, таа е рамномерно ограничена на интервалот $(-1,1)$ бидејќи

$$|c_n(x)|=(\tfrac{1-\theta}{1-\theta x})^n \le (\tfrac{1-\theta}{1-\theta|x|})^n <1.$$

Конечно,

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0 \text{, за } x\in(-1,1),$$

што значи дека

$$(1+x)^a = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!}x^n .$$

Конвергентноста на редот (19) во точките -1 и 1 треба дополнително да се испитува. Може да се докаже дека во точката $x=1$ за биномниот ред конвергира, а за $a\le -1$ дивергира. Во точката $x=-1$ за $a \ge 0$ редот (19) апсолутно конвергира, а за $a<0$ тој дивергира.

Притоа, секогаш кога биномниот ред (19) конвергира, неговата сума е еднаква на $(1+x)^a$. ♦

7.11. Забелешка. Степенските редови можеме да ги искористиме за претставување на функции кои не можат да се запишат во конечен облик и за пресметување на некои определени интеграли кои не може да се решат во конечен облик.

На пример, познато е дека интегралот $\int_0^x e^{-t^2}dt$ не може да се реши во конечен облик. Меѓутоа, бидејќи за секој $t\in \mathbf{R}$ важи

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}t^{2k},$$

по интегрирањето го добиваме равенството

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}x^{2k+1}$$

кое важи за секој $x\in \mathbf{R}$ (зошто?).

Слично, од развојот

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

за $x\ne 0$ добиваме

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!},$$

па затоа

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = \lim_{a\to 0}\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = \lim_{a\to 0}\int_a^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}\Big)dt$$

$$= \lim_{a\to 0}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}\Bigg|_a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)},$$

при што последното равенство важи за секој $x \in \mathbf{R}$ (зошто?). Функцијата

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$$

се нарекува *интегрален синус* и се означува со $\mathrm{Si}(x)$.

8. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАБЕЛЕШКИ ЗА СТЕПЕНСКИТЕ РЕДОВИ

8.1. Во оваа точка ќе се осврнеме на некои прашања сврзани со операциите со степенските редови, како што се: операциите над степенските редови, замената на степенски ред во ред и делењето на степенски редови.

8.2. Собирање и множење на степенски редови. Да ги разгледаме редовите

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{и} \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \tag{2}$$

за кои радиусите на конвергенција се различни од нула и помалиот од нив да го означиме со r . Тогаш, за $|x|< r$ овие редови можат почлено да се собираат, одземаат и множат, при што важи

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)x^n \ , \tag{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0)x^n \ . \tag{4}$$

Ако во равенството (4) земеме дека редовите (1) и (2) се еднакви, тогаш за квадратот на редот (1) ја добиваме следнава формула

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \dots + a_n a_0)x^n \ .$$

Ако последниот ред, според укажаното правило повторно го помножиме со редот (1) и постапката ја повториме конечен број пати, добиваме дека од степенскиот ред (1) може да се најде произволен степен m, $m \in \mathbf{N}$, при што резултатот може да се запише во обликот

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} x^n, \qquad m = 1,2,3,\dots . \tag{5}$$

Коефициентите $a_n^{(m)}$ зависат од коефициентите

$$a_i, \quad i = 0,1,2,\dots,n$$

на почетниот ред и како што може да се види од (4) тие се добиваат од нив со конечно многу собирања и множења. Се разбира претходно кажаното важи во интервалот на конвергентност на редот (1).

Пред да се осврнеме на прашањето за замена на степенски ред во ред, ќе се осврнеме на прашањето на сумирање на низа од степенски редови. Нека е дадена низата степенски редови

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} x^n, \qquad m = 0,1,2,\dots \tag{6}$$

од кои го составуваме повторниот ред

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} x^n \} . \tag{7}$$

Притоа, важи следнава теорема.

Теорема. Ако за некој x повторниот ред (7) апсолутно конвергира, тогаш за тоа x конвергира и редот (7), при што неговата сума $S(x)$ може да биде разложена во степенски ред $\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n$, каде $A_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}$, за $n = 1,2,\dots$.

Доказ. Непосредно следува од VI 9.18. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

8.3. Замена на ред во ред. Да ја разгледаме функцијата $y = f(x)$, која на интервалот $(-R,R)$ се разложува во степенски ред (1) и нека е дадена функцијата $\varphi(y)$, која исто така на интервалот $(-\rho,\rho)$ може да се разложи во степенски ред

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_m y^m . \tag{8}$$

Ако $|a_0| = |f(0)| < \rho$, тогаш при доволно мали вредности на променливата x важи $|f(x)| < \rho$, па затоа има смисла сложената функција $\varphi(f(x))$.

Теорема. Ако $|a_0| < \rho$, тогаш функцијата $\varphi(f(x))$ во околина на точката $x = 0$ може да се разложи во ред по степени од x, ако во редот (8) променливата

y ја замениме со редот (1) и согласно со (5) и теоремата 8.2 ги извршиме операциите степенување и собирање на степенски редови.

Доказ. Нека $|x|< R$ и да го разгледаме редот

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\cdot|x|^n .$$

Од непрекинатоста на сумата на овој ред и условот $|a_0|< \rho$ следува дека за доволно мали вредности на x важи

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\cdot|x|^n < \rho , \tag{9}$$

што значи дека редот

$$|h_0|+\sum_{m=1}^{\infty}|h_m|(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|x|^n)^m$$

конвергира. Понатаму, аналогно на (5), имаме

$$(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|x|^n)^m = \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n^{(m)}|\cdot|x|^n ,$$

па затоа претходниот ред можеме да го запишеме во видот

$$|h_0|+\sum_{m=1}^{\infty}|h_m|(\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n^{(m)}|\cdot|x|^n) .$$

Бидејќи $\alpha_n^{(m)}$ се добива со собирање и множење на $|a_0|,|a_1|,...,|a_n|$, на наполно ист начин како и $a_n^{(m)}$ од $a_0,a_1,...,a_n$, добиваме $|a_n^{(m)}|\leq \alpha_n^{(m)}$. Затоа за споменатите вредности на x конвергира и редот

$$|h_0|+\sum_{m=1}^{\infty}|h_m|(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n^{(m)}|\cdot|x|^n) .$$

Сега тврдењето на теоремата следува ако на редот

$$h_0+\sum_{m=1}^{\infty}h_m(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)^m = h_0+\sum_{m=1}^{\infty}h_m(\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(m)}x^n)$$

ја примениме теорема 8.2. ♦

Пример. Ќе ги определиме првите шест членови на разложувањето на функцијата $\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ по степени на x.

За $|x|<1$ имаме

$$\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots} = 1+(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^5}{6}+\dots)+$$

$$+\frac{1}{2}(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-...)^2+\frac{1}{6}(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-...)^3+$$

$$+\frac{1}{24}(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-...)^4+\frac{1}{120}(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-...)^5+...$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\frac{2447}{5760}x^4-\frac{959}{2304}x^5+...$$

и согласно со претходната теорема ова е бараното разложување. ♦

8.4. Делење на степенски редови. Важен пример на теоремата за замена на ред во ред е делењето на степенските редови.

Нека слободниот член a_0 на редот (1) е различен од 0. Тогаш редот можеме да го запишеме во обликот

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_0}x^n) = a_0(1+y)\text{, каде } y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_0}x^n .$$

Добиваме

$$\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n} = \frac{1}{a_0}\cdot\frac{1}{1+y} = \frac{1}{a_0}(1-y+y^2-y^3+...+(-1)^m y^m+...) ,$$

и последниот ред ја има улогата на редот (8) од теорема 8.3, според која $\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$ може да се разложи по степени на x :

$$\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

за доволно мали вредности на x, на пример за оние вредности кои го задоволуваат неравенството $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\frac{a_n}{a_0}|\cdot|x|^n<1$.

Да го разгледаме редот (2) чиј радиус на конвергенција е различен од нула. Тогаш, за доволно мали вредности на x имаме

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n} = (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n) .$$

Согласно со претходните разгледувања, производот на левата страна во последното равенство може да се претстави со ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, па од последното равенство го добиваме равенството

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

во кое коефициентите $a_i, b_i, i = 0,1,2,...$ се познати. Ако редовите на десната страна ги помножиме според правилото од 8.2, а потоа ги изедначиме коефициентите пред соодветните степени, го добиваме ситемот равенки

$$a_0 d_0 = b_0,\ a_0 d_1 + a_1 d_0 = b_1,\ a_0 d_2 + a_1 d_1 + a_2 d_0 = b_2, ...,\ \sum_{i=0}^{n} a_i d_{n-i} = b_n, ...$$

Конечно, од последниот систем, бидејќи $a_0 \neq 0$, ги наоѓаме непознатите коефициенти $d_i, i = 0,1,2,...$.

Пример. Ќе ги определиме првите четири члена на развојот во степенски ред на количникот $\frac{x}{-\ln(1-x)}$. Од

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

добиваме

$$\frac{x}{-\ln(1-x)} = \frac{x}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}} = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}},$$

па затоа првите четири равенки за определување на коефициентите $d_i, i = 0,1,2,...$ имаат облик

$$d_0 = 1,\ d_1 + \tfrac{1}{2} d_0 = 0,\ d_2 + \tfrac{1}{2} d_1 + \tfrac{1}{3} d_0 = 0 \text{ и } d_3 + \tfrac{1}{2} d_2 + \tfrac{1}{3} d_1 + \tfrac{1}{4} d_0 = 0,$$

од каде што наоѓаме $d_0 = 1$, $d_1 = -\frac{1}{2}$, $d_2 = -\frac{1}{12}$ и $d_3 = -\frac{1}{24}$. Според тоа,

$$\frac{x}{-\ln(1-x)} = 1 - \tfrac{1}{2} x - \tfrac{1}{12} x^2 - \tfrac{1}{24} x^3 - \dots \ \blacklozenge$$

8.5. Единственост на тригонометриските функции. Од разложувањата

$$f(x) = \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{10}$$

и

$$g(x) = \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \tag{11}$$

дадени во пример 7.8 следува единственоста на тригонометриските функции кои во III.13 ги определивме како решение на функционалните равенки (1)-(3) и неравенствата (4). За комплетирање на доказот треба да докажеме дека разложувањата (10) и (11) ги задоволуваат функционалните равенки:

$$f^2(x) + g^2(x) = 1, \tag{12}$$

$$f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y), \tag{13}$$

$$g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y) \tag{14}$$

и неравенството

$$0 < f(x) < x < \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{15}$$

за доволно мали вредности на x, $x > 0$.

Ќе го докажеме неравенството (15). Од (10) следува дека

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} A = x(1 - \frac{x^2}{6} A), \tag{16}$$

каде $A \to 1$ кога $x \to 0$. Затоа, при доволно мали вредности на x, $x > 0$ важи $0 < \sin x$ и изразот во заградата на (16) е помал од 1, од што следува дека $\sin x < x$. Понатаму, од (11) следува дека

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} A_1, \tag{17}$$

каде $A_1 \to 1$ кога $x \to 0$. Од (16) и (17) добиваме

$$\frac{\sin x}{\cos x} = x(1 - \frac{x^2}{6} A)(1 - \frac{x^2}{2} A_1)^{-1} = x(1 - \frac{x^2}{6} A)(1 + \frac{x^2}{2} A^*) = x(1 + \frac{x^2}{3} E)$$

каде $E \to 1$ кога $x \to 0$, (зошто?). Според тоа, при доволно мали вредности на x изразот на десната страна во последното равенство е поголем од 1, од што следува дека $x < \frac{\sin x}{\cos x}$. Затоа, за доволно мали вредности на x, $x > 0$ важат неравенствата (15).

Најпосле, користејќи ги правилата во 8.2 за собирање и множење на степенски редови, со непосредна проверка можеме да се убедиме дека функциите (10) и (11) ги задоволуваат функционалните равенки (12)-(14). Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

8.6. Стирлингова формула. Разложувањето на функцијата $\ln(1+x)$ во степенски ред ни овозможува да најдеме асимптотска формула за $n!$ кога $n \to \infty$. Оваа формула се нарекува *Стирлингова формула* и истата има вид

$$n! \sim \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}, \quad n \to \infty. \tag{18}$$

Навистина, ако $|x| < 1$, тогаш

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{x^n}{n}) = 2x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k+1}.$$

Ставаме $x = \frac{1}{2n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ и добиваме

$$\ln(1+\frac{1}{n}) = \ln \frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}} = \frac{2}{2n+1}(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots) > \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}},$$

што значи

$$(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n}) > 1,$$

Од каде ако се земе предвид монотоноста на функцијата $\ln x$ и равенството $\ln e = 1$ следува

$$(1+\tfrac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}} > e\,. \qquad (19)$$

Да ја разгледаме низата

$$x_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}},\ n \in \mathbf{N}\,. \qquad (20)$$

Од неравенството (19) следува дека за секој $n \in \mathbf{N}$ важи

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \tfrac{1}{e}(1+\tfrac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}} > 1\,,$$

што значи дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа. Освен тоа, таа е ограничена од долу, бидејќи $x_n > 0, n \in \mathbf{N}$. Според тоа, низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна и да ставиме

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,. \qquad (21)$$

Ќе докажеме дека $a \neq 0$. Бидејќи

$$\tfrac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\tfrac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots < \tfrac{1}{3}(\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots) = \tfrac{1}{3}\frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{1}{12n(n+1)}$$

добиваме

$$(n+\tfrac{1}{2})\ln(1+\tfrac{1}{n}) = 1+\tfrac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\tfrac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots < 1+\frac{1}{12n(n+1)}\,,$$

па затоа

$$(1+\tfrac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}\,,$$

од што следува дека

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \tfrac{1}{e}(1+\tfrac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}},$$

т.е.

$$x_n e^{-\frac{1}{12n}} < x_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}}\,. \qquad (22)$$

Низата $y_n = x_n e^{-\frac{1}{12n}}, n \in \mathbf{N}$ е производ на две конвергентни низи, па затоа таа е конвергентна и притоа важи

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n e^{-\frac{1}{12n}} = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{12n}} = a\,.$$

Понатаму, од неравенството (22) следува дека низата $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно расте, па затоа $y_n < a, n \in \mathbf{N}$ и како $y_n > 0, n \in \mathbf{N}$ заклучуваме дека $a > 0$.

Сега, од равенството (21) следува

$$x_n = a(1+\varepsilon_n), \tag{23}$$

каде $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Ако го искористиме (23), тогаш од (2) добиваме

$$n! = \frac{x_n n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} = a\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}(1+\varepsilon_n)\,. \tag{24}$$

За да го определиме a, ќе се потсетиме дека според формулата на Валис имаме

$$\tfrac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2n+1}[\tfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}]^2\,. \tag{25}$$

Сега, од (24) следува

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = a\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{(1+\varepsilon_n)^2}{1+\varepsilon_{2n}}$$

и ако замениме во (25) добиваме

$$\tfrac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}a^2\,\frac{n}{2}\,\frac{(1+\varepsilon_n)^4}{(1+\varepsilon_{2n})^2} = \frac{a^2}{4}\,,$$

т.е. $a = \sqrt{2\pi}$. Според тоа,

$$n! = \sqrt{2\pi}\,\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}(1+\varepsilon_n), \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0\,,$$

Со што ја докажавме Стирлинговата формула.

9. ЗАДАЧИ

1. Испитајте ја рамномерната конвергентност на функционалната низа $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

   а) $f_n(x) = x^n - x^{n+1},\ x\in[0,1]$,

   б) $f_n(x) = x^n - x^{2n},\ x\in[0,1]$,

   в) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n},\ x\in\mathbf{R}$,

   г) $f_n(x) = \sin\frac{x}{n},\ x\in\mathbf{R}$,

   д) $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2},\ x\in\mathbf{R}$.

2. Нека $f_n(x) = n\ln(1+\frac{x}{n})$, $x\geq 0$, $n = 1,2,3,...$. Најдете ја границата по точки на низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и докажете, дека таа конвергира рамномерно на секое множество $B = [0,c]$, каде $c>0$, а не конвергира рамномерно на $[0,+\infty)$.

3. Нека f е произволна функција определена на интервалот $[a,b]$ и низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$, $n\in\mathbf{N}$ и $x\in[a,b]$. Докажете дека низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон функцијата f на $[a,b]$.

4. Испитајте ја рамномерната конвергентност на функционалната низа $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, ако:

а) $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$, $x\in[-1,1]$, б) $f_n(x)=2n^2x^2e^{-n^2x^2}$, $x\in[0,1]$,

в) $f_n(x)=\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$, $x\in\mathbf{R}$, г) $f_n(x)=n(nx-1)e^{-n(nx-1)^2}$, $x\in[-1,0]$ и

д) $f_n(x)=n(nx-1)e^{-n(nx-1)^2}$, $x\in[0,1]$.

5. Дали низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, дадена со $f_n(x)=n^2\sin x\cos^{2n}x$, рамномерно конвергира на $[0,\frac{\pi}{2}]$.

6. Нека низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е дадена со $f_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2}$, $x\in[0,+\infty)$. За $x>0$ пресметајте $\int\limits_0^x \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)dt$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^x f_n(t)dt$ и објаснете ги добиените резултати.

7. Нека низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е дадена со $f_n(x)=n^2xe^{-nx}$, $x\in[0,1]$. Пресметајте $\int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)dt$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(t)dt$ и објаснете ги добиените резултати.

8. Користејќи ја теорема 2.13 докажете дека функционалната низа $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определена со

$$f_n(x)=\begin{cases}2n^3x, & x\in[0,\frac{1}{2n})\\ n^2-2n^3(x-\frac{1}{2n}), & x\in[\frac{1}{2n},\frac{1}{n})\\ 0, & x\in[\frac{1}{n},1]\end{cases}$$

не е рамномерно конвергентна.

9. Дадете пример на низа $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ која не конвергира рамномерно кон функција $f(x)$, на интервал $[a,b]$, но сепак важи

$$\int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(t)dt.$$

10. Докажете, дека за функционалната низа $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определена со

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2},\ x\in[-1,1],\ n=1,2,3,...$$

границата на првите изводи $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ не е еднаква на првиот извод од граничната функција $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

11. Ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ рамномерно конвергира на секое од множествата A и B, тогаш тој рамномерно конвергира на $A\cup B$. Докажете!

12. Испитајте ја рамномерната конвергентност на редот во соодветниот интервал:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x^n + 1}{n^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}}$, $x \in [0, +\infty)$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{2n(x^2+1)}}$, $x \in \mathbf{R}$,

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 + n^3}$, $x \in \mathbf{R}$ и г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^3 \sin^2 nx}{2 + n^3 x^6}$, $x \in [0, +\infty)$.

13. Испитајте ја рамномерната конвергентност на редот во соодветниот интервал:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n (1-x) \sin x \sin nx$, $x \in [0,1]$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n+x^2}}$, $x \in \mathbf{R}$ и

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin x}{\sqrt{n+x}}$, $x \in [0, +\infty)$.

14. Испитајте ја рамномерната конвергентност на редот во соодветниот интервал:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+x^n)}$, $x \in (0,1]$ и б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\sqrt{n+x} \ln \ln(2\sqrt{n}+1)}$, $x \in [0, +\infty)$.

15. Најдете ја областа на конвергентност и апсолутна конвергентност на редот:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$,

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^x}$ и г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (3^{-n(1+x)} + 2^{nx})$.

16. Докажете, дека редот рамномерно конвергира на целата реална права:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-n^2 x^2}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx^2)}{1+n^3 x^2}$,

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n|x|} \sin(x^2 \sqrt{n})$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$,

ѓ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n(x-n)^2}$ и е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2} \operatorname{arctg} nx$

17. Докажете, дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{2n})$ не е рамномерно конвергентен.

18. Докажете, дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x \sin nx}{n+x^2}$, $x \in \mathbf{R}$ рамномерно конвергира на целата реална права.

19. Докажете, дека редот:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbf{R}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \operatorname{arctg} nx}{n}$, $x \in \mathbf{R}$

рамномерно конвергира на интервалот $[\delta, 2\pi - \delta]$, каде $0 < \delta < \pi$.

20. Докажете, дека:

а) $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

21. Нека

$$f_1(x)=x,\ f_n(x)=x^{\frac{1}{2n-1}}-x^{\frac{1}{2n-3}},\ x\in[-1,1],\ n\ge 2.$$

Докажете, дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$, $x\in[-1,1]$ не конвергира рамномерно на $[-1,1]$.

22. Пресметајте $\int\limits_0^{2\pi}S(x)dx$ ако $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n\cos nx$, $0<a<1$.

23. Нека $s_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ е збирот на првите n членови на хармонискиот ред. Најдете функција f таква што $s_n=f^{(n)}(0)$. Изразете ја функцијата $f(x)$ со помош на елементарни функции и нивни примитивни функции.

24. Докажете, дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n^2\sin nx}{3^n+1}$ може почлено да се диференцира на интервалот $(-\infty,+\infty)$.

25. а) Докажете, дека функција $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2 x}$ е диференцијабилна за $x>0$.

б) Докажете, дека $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-(x-n)^2}\in\mathbf{C}^{(\infty)}((-1,1))$.

26. Докажете дека функцијата

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}\in\mathbf{C}((0,\infty))$$

и пресметајте $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5}f(x)dx$.

27. Нека производот $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ конвергира. Пресметајте ја границата

$$\lim_{x\to 1^-}\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n x^n).$$

28. Нека $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$. Докажете, дека f' може да се најде со почлено диференцирање.

29. Да се најде радиусот на конвергенција на степенскиот ред и да се испита однесувањето на редот во крајните точки на интервалот на конвергентност:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\sqrt[3]{2n+1}}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+n+1}}(x+1)^2$,

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{n^2}}{n^n}$ и д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+(-3)^n}{n}x^n$.

30. Да се најде радиусот на конвергенција на степенскиот ред и да се испита однесувањето на редот во крајните точки на интервалот на конвергентност:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^{2n}x^n}{(2n)!}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!}{(2n)!(n+1)}x^n$,

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{n^2}}{n^n}$ и г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+(-5)^n}{4n+3}x^n$.

31. Нека радиусот на конвергенција на редот $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ е $r>0$. Докажете, дека радиусот на конвергенција на секој од редовите

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n x^n$, б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2+1)a_n x^n$ и в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+3}x^n$

исто така е еднаков на r. Најдете ги радиусите на конвергенција на редовите

г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n a_n x^n$, д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}x^n$ и ѓ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$.

32. Најдете го множеството на конвергенција на редот:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{\sqrt{n}}x^n$, б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ и в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n(x+1)^{n^2}$.

33. Докажете, дека Маклореновиот ред на бесконечно диференцијабилната функција $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!}$ е диверегентен.

34. Најдете ги Маклореновите развои на функциите:

а) $\sin^2 x$, б) $\ln(1+3x+2x^2)$

35. Развијте ги во Тејлоров ред функциите:

а) $f(x)=\frac{1}{(x^2-2x+3)^2}$, околу точката 1 и

б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-6x+18}}$, околу точката 3.

36. Најдете го Маклореновиот развој на функциите:

а) $f(x)=\frac{1}{(x+3)(x-1)}$ и б) $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$.

37. Развијте ја во Маклоренов ред функцијата $f(x)=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.

38. Користејќи го Тејлоровиот развој, најдете го $n-$от извод на функцијата e^{x^2} .

39. Во точката 0 најдете го $n-$от извод на функциите:

а) $f(x)=\ln^2(1-x)$, б) $f(x)=\arcsin^2 x$ и

в) $f(x)=\mathrm{arctg}^2\, x$.

40. Пресметајте ги збировите на следниве степенски редови:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$, б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$,

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$,

д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+1)x^{3n}}{n!}$ и ѓ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

41. Најдете го збирот на редот $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$, $x\in\mathbf{R}$.

42. Најдете го збирот на рекурентниот степенски ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, каде $a_0=a_1=1$ и $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$, за $n\geq 2$.

43. Најдете го збирот на рекурентниот степенски ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, каде $a_0=1; a_1=2$ и $a_n=\frac{1}{2}a_{n-2}+\frac{1}{2}a_{n-1}$, за $n\geq 2$.

44. Пресметајте ги збировите:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}$, б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ и в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(3n+1)}$.

45. За секој природен број n , со $a(n)$ е означен бројот на нулите во записот на n во броен систем со основа 3. Најдете ги сите позитивни реални броеви x за кои редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{a(n)}}{n^3}$ е конвергентен.

46. Најдете ги сите реални броеви x за кои редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n\sin\frac{1}{n}}-1)^x$ конвергира.

47. Пресметајте ја границата $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t(x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n})(1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(2n)^2})dx$.

48. Докажете, дека функцијата $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n}\cos(n^2x), x\in\mathbf{R}$ припаѓа на класата $\mathbf{C}^{(\infty)}$ и дека нејзиниот Тејлотов ред во точката 0 конвергира само во една точка.

УПАТСТВА И РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

IV ГЛАВА

А) Поим за извод. Основни својства

1. а) Имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+(-\Delta x))-f(x_0)}{-\Delta x}=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0).$$

б) Кога $n\to\infty$ имаме $\frac{1}{n}\to 0$ од што следува

$$\lim_{n\to\infty} n[f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)]=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)}{\frac{1}{n}}=f'(x_0)\,.$$

в) $e^{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}}$,

г) $f'(x_0)$. ♦

2. а) Имаме $f'(x)=(\frac{x}{x^2+1})'=\frac{(x)'(x^2+1)-(x^2+1)'x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x\cdot x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

б) Имаме $f'(x)=(\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x^2+1})'=(\frac{1}{x+2})'+(\frac{3}{x^2+1})'=\frac{-1}{(x+2)^2}-\frac{6x}{(x^2+1)^2}$.

в) Имаме

$$f'(x)=[(1+x^3)(5-\frac{1}{x^2})]'=(1+x^3)'(5-\frac{1}{x^2})+(5-\frac{1}{x^2})'(1+x^3)$$

$$=3x^2(5-\frac{1}{x^2})+\frac{2}{x^3}(1+x^3)=15x^2-1+\frac{2}{x^3}.$$

г) Имаме

$$f'(x)=[(x^3-x)^6]'=6(x^3-x)^5(x^3-x)'=6(x^3-x)^5(3x^2-1)\,.$$

д) $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$,

ѓ) $f'(x)=\frac{x^3+2xa^2}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}}$,

е) $f'(x)=7(\frac{1+x}{1+x^2})^6\frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}$,

ж) $f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$. ♦

3. а) Имаме $f'(x)=(\frac{x}{1-\cos x})'=\frac{(x)'(1-\cos x)-(1-\cos x)'x}{(1-\cos x)^2}=\frac{1-\cos x-x\sin x}{(1-\cos x)^2}$.

б) $f'(x)=(\frac{\sin x}{1+\cos x})'=\frac{(\sin x)'(1+\cos x)-(1+\cos x)'\sin x}{(1+\cos x)^2}=\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin x\sin x}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{1+\cos x}$.

в) $f'(x)=\mathrm{tg}^4 x$ и

г) $f'(x)=\frac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$. ♦

4. а) Имаме

$$f'(x)=(x\arcsin x+\sqrt{1-x^2})'=(x)'\arcsin x+x(\arcsin x)'+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)'$$

$$=\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x.$$

б) $f'(x)=\frac{\operatorname{arctg}x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$, в) $f'(x)=\frac{-2x^2}{(1+x^2)^2}$,

г) $f'(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$, д) $f'(x)=\frac{-1}{(x+1)\sqrt{2x-2x^2}}$,

ѓ) $f'(x)=\frac{-2}{\sqrt{2+4x-4x^2}}$, е) $f'(x)=\frac{2}{x\sqrt{x^2-4}}$ и

ж) $f'(x)=\frac{1}{2(1+x^2)}$. ♦

5. а) Имаме $f'(x)=(\frac{1-\ln x}{1+\ln x})'=\frac{(1-\ln x)'(1+\ln x)-(1+\ln x)'(1-\ln x)}{(1+\ln x)^2}=\frac{-2}{x(1+\ln x)^2}$.

б) $f'(x)=x^{n-1}(n\ln x+1)$, в) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

г) $f'(x)=\frac{1}{\sin x}$ и д) $f'(x)=-\operatorname{tg}x$. ♦

6. а) Имаме

$$f'(x)=[(x^2-2x+3)e^x]'=(x^2-2x+3)'e^x+(e^x)'(x^2-2x+3)=(x^2+1)e^x.$$

б) $f'(x)=e^x(\frac{x-1}{x^2+1})^2$, в) $f'(x)=a^x x^{a-1}(a+x\ln a)$ и

г) $f'(x)=2xe^{x^2+1}\cos e^{x^2+1}$. ♦

7. а) $f'(x)=x^{x^2}[2x\ln x+x]$, б) $f'(x)=2x^{\ln x-1}\ln x$,

в) $f'(x)=(\sin x)^{\cos x-1}[\cos^2 x-\sin^2 x\ln\sin x]$, г) $f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$

д) $f'(x)=x^{x^x}[x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}]$ и ѓ) $f'(x)=(\frac{x}{1+x})^x[\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}]$. ♦

8. а) Имаме $x'(t)=\frac{2t}{1+t^2}$, $y'(t)=1-\frac{1}{1+t^2}=\frac{t^2}{1+t^2}$ и со замена во $y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}$, добиваме $y'(x)=\frac{t}{2}$.

б) $y'(x)=\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}$, в) $y'(x)=\frac{t^2+1}{2t+3t^2-t^4}$,

г) $y'(x)=\cos^2 t(\sin 2t+\cos 2t)$ и д) $y'(x)=\frac{\cos t-\cos 2t}{\sin 2t-\sin t}$. ♦

9. а) Функцијата $F(x,y)\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ ја диференцираме и наоѓаме

$$\frac{dF(x,y)}{dx}\equiv\frac{d}{dx}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1)=\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'(x)}{b^2}.$$

Според тоа, $\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'(x)}{b^2}=0$, па затоа $y'(x)=-\frac{xb^2}{ya^2}$, за $x\in(-a,a)$ и $y>0$.

б) $y'(x)=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$, в) $y'(x)=\frac{1}{2\ln y+2}$,

г) $y'(x)=\frac{e^y}{1-xe^y}$, д) $y'(x)=-\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}$.

ѓ) Од $x^y = y^x$ имаме $e^{y\ln x} = e^{x\ln y}$, па затоа $y\ln x = x\ln y$. Функцијата

$$F(x,y) = x\ln y - y\ln x$$

ја диференцираме и наоѓаме

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = \frac{xy'(x)}{y} + \ln y - y'(x)\ln x - \frac{y}{x},$$

од што следува $y'(x) = \frac{y^2 - xy\ln y}{x^2 - xy\ln x}$. ♦

10. а) Имаме

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} = (\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1})' = (\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2})' = \frac{2-n(+1)x^{n-1}+2(n^2-1)x^n-n(n-1)x^{n+1}}{(x-1)^3}.$$

б) За секој $x \in \mathbf{R}$ имаме

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^{k-1} = (\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k)' = [(1+x)^n]' = n(1+x)^{n-1}.$$

Ако во последното равенство ставиме $x = 1$, наоѓаме $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n \cdot 2^{n-1}$. ♦

12. а) Од дефиницијата на еднострани изводи добиваме:

$$f_-^{'}(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\sin 3\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} -\frac{\sin 3\Delta x}{\Delta x} = -3 \text{ и}$$

$$f_+^{'}(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\sin 3\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\sin 3\Delta x}{\Delta x} = 3,$$

што значи дека $f'(0)$ не постои.

б) $f_-^{'}(0) = 0$, $f_+^{'}(0) = +\infty$, в) $f_-^{'}(0) = -\infty$, $f_+^{'}(0) = +\infty$ и

г) $f_-^{'}(0) = +\infty$, $f_+^{'}(0) = -\infty$. ♦

Б) Тангента и нормала

15. За $x_0 = 2a$ наоѓаме $f(x_0) = \frac{8a^3}{4a^2+4a^2} = a$, т.е. точката во која минуваат тангентата и нормалата е $M(2a,a)$.

Од друга страна, $f'(x) = (\frac{8a^3}{4a^2+x^2})' = -\frac{16xa^3}{(4a^2+x^2)^2}$, што значи

$$f'(x_0) = -\frac{16 \cdot 2aa^3}{(4a^2+4a^2)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Со замена во $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ за равенката на тангентата наоѓаме

$$y - a = -\frac{1}{2}(x - 2a).$$

Со замена во $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ за равенката на нормалата наоѓаме

$$y - a = 2(x - 2a).\ ♦$$

16. Од $y'(x)=\frac{x^2(3a-x)}{y(2a-x)^2}$, следува $y'(x_0)=\frac{x_0^2(3a-x_0)}{y_0(2a-x_0)^2}$. Сега, со замена во

$$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0) \text{ и } y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)$$

за равенката на тангентата и нормалата во точката $M(x_0,y_0)$ добиваме

$$y-y_0=\frac{x_0^2(3a-x_0)}{y_0(2a-x_0)^2}(x-x_0) \text{ и } y-y_0=\frac{y_0(2a-x_0)^2}{x_0^2(x_0-3a)}(x-x_0),$$

соодветно. ♦

17. Одговор. $y-5=2(x-2)$.

18. Одговор. $y+\frac{11}{4}=x-\frac{5}{2}$.

19. За $y_0=1$ имаме $1=\frac{1+3x^2}{3+x^2}$, т.е. $x_0=-1$ и $x_1=1$. Од друга страна $y'(x)=\frac{16x}{(3+x^2)^2}$, па затоа $y'(1)=1$ и $y'(-1)=-1$. Со замена во равенката за тангента $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$ за тангентите во точките $M_0(-1,1)$ и $M_1(1,1)$ добиваме $y=-x$ и $y=x$, соодветно. Јасно, овие прави се сечат во координатниот почеток. ♦

20. Бидејќи точката $M(x_0,y_0)$ лежи на елипсата, добиваме дека важи $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$. Ако за првиот извод $y'(x_0)=-\frac{x_0b^2}{y_0a^2}$ замениме во равенката на тангентата, добиваме $y-y_0=-\frac{x_0b^2}{y_0a^2}(x-x_0)$ и ако го искористиме горното равенството за равенката на тангентата, добиваме $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.♦

22. а) Пресечните точки на кривите се $A(0,\frac{1}{2})$ и $B(-6,\frac{5}{4})$. За дадените функции имаме $f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$ и $g'(x)=\frac{x+2}{8}$, па затоа $f'(0)=\frac{1}{4}$, $g'(0)=\frac{1}{4}$, $f'(-6)=\frac{1}{16}$ и $g'(-6)=\frac{-1}{2}$.

Ако замениме во формулата за агол меѓу криви, тогаш во точката $A(0,\frac{1}{2})$ наоѓаме $\varphi_0=\operatorname{arctg}0=0$, што значи дека во оваа точка кривите се допираат. За аголот меѓу кривите во точката $B(-6,\frac{5}{4})$ наоѓаме $\varphi_1=\operatorname{arctg}\frac{18}{31}$.

б) Две пресечни точки $A(2a,a)$ и $B(-2a,a)$ и $\varphi_0=\varphi_1=\operatorname{arctg}3$.

в) Две пресечни точки $A(2,2)$ и $B(-2,2)$ и $\varphi_0=\varphi_1=\operatorname{arctg}3$.

г) Три пресечни точки $A(0,0)$, $B(\frac{8a}{5},-\frac{16a}{5})$ и $C(\frac{8a}{5},\frac{16a}{5})$ и агли $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$ и $\varphi_1=\varphi_2=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, соодветно. ♦

23. Од $f(x)=g(x)$ следува $\sin mx=1$, т.е. $mx=\frac{\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbf{Z}$. Според тоа заедничките точки на кривите се точките $A_n(\frac{\pi}{2m}+\frac{2n\pi}{m}, e^{\frac{k\pi}{2m}+\frac{2nk\pi}{m}})$, $n\in\mathbf{Z}$.

За првите изводи на функциите имаме $f'(x)=ke^{kx}\sin mx+me^{kx}\cos mx$ и $g'(x)=ke^{kx}$. Со непосредна проверка наоѓаме дека $f'(\frac{\pi}{2m}+\frac{2n\pi}{m})=g'(\frac{\pi}{2m}+\frac{2n\pi}{m})$ за секој $n\in\mathbf{Z}$, што значи дека кривите $f(x)$ и $g(x)$ се допираат во секоја точка која што е заедничка. ♦

В) Основни теореми на диференцијалното сметање

27. Упатство. Разгледајте ја функцијата

$$f(x)=\frac{a_0x^{n+1}}{n+1}+\frac{a_1x^n}{n}+\ldots+\frac{a_{n-1}x^2}{2}+a_nx\,,\ x\in[0,1]$$

и искористете ја теоремата на Рол.

28. Упатство. Разгледајте ја функцијата $h(x)=g(x)+\ln f(x)$, $x\in[a,b]$ и искористете ја теоремата на Рол.

29. Нека претпоставиме дека $a_i, b_i\in\mathbf{R}$, $i=1,2,\ldots,n$ и $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix^{b_i}$ е таква што постои $x_0>0$, $f(x_0)\neq 0$ и f има најмалку n позитивни реални нули. Ставаме $x=e^t$ и добиваме функција $f(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ie^{b_it}$, $t\in\mathbf{R}$ таква што постои $t_0\in\mathbf{R}$, $f(t_0)\neq 0$ и f има најмалку n реални нули, што е противречност. Значи, $f(x)$ има најмногу $(n-1)-$ позитивна реална нула. ♦

32. Од $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ следува дека за секој $\varepsilon>0$ постои $M>0$ таков што за секој $\xi>M$ важи $-\varepsilon<f'(\xi)<\varepsilon$. Сега, од теоремата на Лагранж применета на функцијата f на произволен интервал $(x,x+1)$, $x>M$ следува дека постои $\xi\in(x,x+1)$ таков што

$$|g(x)|=|f(x+1)-f(x)|=|f'(\xi)|<\varepsilon\,.$$

Според тоа, за секој $x>M$ важи $|g(x)|<\varepsilon$ т.е.

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=0\,.\ ♦$$

33. Одговор. $c=\frac{a+b}{2}$. ♦

34. Нека $x',x''\in[a,b], x'<x''$. За рестрикцијата $f_{|[x',x'']}=f_0$ важат условите од теоремата на Лагранж, па затоа постои таков што

$$f_0(x'')-f_0(x')=f_0'(c)(x''-x')\,.$$

Но,

$$f_0(x'') = f(x''),\ f_0(x') = f(x') \text{ и } |f_0^{'}(c)| = |f'(c)| \le L,$$

па затоа

$$|f(x') - f(x'')| \le L\,|x' - x''|,$$

што и требаше да се докаже. ♦

35. Нека $\{x_n\}$ е произволна низа во $(a, +\infty)$ таква што $x_n \to +\infty$, $n \to \infty$. Тогаш, за секој $\varepsilon > 0$ постои $N \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > N$ важи $|f'(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Нека избереме фиксно $n_0 > N$ и да ја разгледаме функцијата f на интервалот $[x_{n_0}, x_n]$. Од теоремата на Лагранж следува дека постои $\alpha_{nn_0} \in (x_{n_0}, x_n)$ таков што $|f'(\alpha_{nn_0})| = |\frac{f(x_n) - f(x_{n_0})}{x_n - x_{n_0}}|$. Но, тоа значи дека $|\frac{f(x_n) - f(x_{n_0})}{x_n - x_{n_0}}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Од последното неравенство следува

$$\frac{f(x_{n_0})}{x_n} - (1 - \frac{x_{n_0}}{x_n})\frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x_n)}{x_n} < \frac{f(x_{n_0})}{x_n} + (1 - \frac{x_{n_0}}{x_n})\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

При доволно големи n важи $-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x_{n_0})}{x_n} < \frac{\varepsilon}{2}$ и при $n > n_0$ точно е неравенството $(1 - \frac{x_{n_0}}{x_n})\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ако замениме во (1) добиваме $-\varepsilon < \frac{f(x_n)}{x_n} < \varepsilon$, што значи $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Сега тврдењето следува од произволноста на низата $\{x_n\}$. ♦

36. а) Нека $f(x) = 0$ кога $0 \le x \le x_0$, каде $0 \le x_0 \le 1$. Ако $x_0 = 1$, тогаш нема што да се докажува. Нека $x_0 < 1$ и да претпоставиме дека $f(x)$ не е еднаква на константа во целиот интервал $[0,1]$. Тогаш постои $\varepsilon > 0,\ \ \varepsilon < 1 - x_0$ таков што $f(x_0 + \varepsilon) \ne 0$, на пример $f(x_0 + \varepsilon) > 0$. Од непрекинатоста на $f(x)$ следува дека $f(x) > 0$ за секој $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon]$. Од теоремата на Лагранж следува дека постои $\xi \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ таков што $\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{x_0 + \varepsilon - x_0} = f'(\xi)$, т.е. $f(x_0 + \varepsilon) = \varepsilon f'(\xi)$. Но, од условот на задачата имаме $|f'(x)| \le |f(x)|$, па затоа $f(x_0 + \varepsilon) \le \varepsilon f(\xi)$. Од $f'(\xi) = \frac{f(x_0 + \varepsilon)}{\varepsilon} > 0$ следува дека $f(x)$ е строго монотоно растечка функција и затоа $f(x_0 + \varepsilon) \le \varepsilon f(\xi) < \varepsilon f(x_0 + \varepsilon)$. Од последното равенство добиваме $1 < \varepsilon$, што е противречност.

Според тоа, претпоставката дека $f(x)$ не е константа во интервалот $[0,1]$ доведува до противречност, па затоа $f(x) = \text{const}$, т.е. $f(x) = 0$, за секој $x \in [0,1]$.

б) Ги повторуваме разгледувањата во а) и при истите ознаки избираме позитивен број $\varepsilon < \min\{1 - x_0, \frac{1}{K}\}$. Ако допуштиме дека $f(x_0 + \varepsilon) > 0$ добиваме

$$f(x_0 + \varepsilon) = \varepsilon f'(\xi) \le K\varepsilon f(\xi) < K\varepsilon f(x_0 + \varepsilon).$$

Од последното равенство добиваме $\varepsilon > \frac{1}{K}$, што противречи на изборот на ε, па затоа $f(x) = \text{const}$, т.е. $f(x) = 0$, за секој $x \in [0,1]$.

До истата противречност доведува и претпоставката $f(x_0 + \varepsilon) < 0$. ♦

37. Нека f е диференцијабилна на (a,b), $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$ и $\{x_n\}$ е произволна монотона растечка низа која конвергира кон b одлево. Од $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$ следува дека за секој $A>0$ постои $N\in\mathbf{N}$ таков што $f(x_n)>A$, за секој $n>N$. Го фиксираме секој од броевите $m>N$ и при $n>m$ ја разгледуваме функцијата f на интервалот $[x_m,x_n]$. Од теоремата на Лагранж следува дека постои $c_{mn}\in(x_m,x_n)$ таков што $|\frac{f(x_n)-f(x_m)}{x_n-x_m}|=|f'(c_{mn})|$. При доволно големи n левата страна на последното равенство е поголема од произволно зададен $A>0$, т.е. $|f'(c_{mn})|>A$. Значи, f' не е ограничен кога $x\to b^-$.

Забелешка. Обратното тврдење на претходната задача не е точно. Имено, $f:(0,1)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$ има неограничен извод, а $|f(x)|<1$, за секој $x\in(0,1)$. ♦

38. Упатство. За функцијата $f(x)=\operatorname{arctg}x$ применете ја теоремата на Лагранж.

39. Упатство. Разгледајте ги функциите $h_1(x)=\ln f(x)$ и $h_2(x)=\ln g(x)$ и искористете ја последицата 10.9 б). ♦

40. Упатство. За функциите $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ и $g:[a,b]\to\mathbf{R}$, $g(x)=e^x$ применете ја теоремата на Коши. ♦

41. Упатство. За функциите $h:[a,b]\to\mathbf{R}$, $h(x)=\frac{f(x)}{x}$ и $g:[a,b]\to\mathbf{R}$, $g(x)=\frac{ab}{x}$ применете ја теоремата на Коши. ♦

42. Упатство. За функциите $h:[a,b]\to\mathbf{R}$, $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ и $k:[a,b]\to\mathbf{R}$, $k(x)=\frac{1}{g(x)}$ применете ја теоремата на Коши. ♦

43. Функциите f и g на интервалот $[x_0,x]$ ги задоволуваат условите од теоремата на Коши, па затоа постои $c\in(x_0,x)$ таков што

$$\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{f(x)-f(x_0)}\right|=\left|\frac{g'(c)}{f'(c)}\right|<1,$$

т.е.

$$|g(x)-g(x_0)|<|f(x)-f(x_0)|=f(x)-f(x_0),\text{ за секој } x\ge x_0.\ ♦$$

44. Упатство. Функциите $f(u)=(1+u)^\alpha$ и $g(u)=\alpha u$ разгледајте ги одделно на интервалите $[0,x]$ и $[x,0]$ при $x>0$ и $-1<x<0$, соодветно, и применете ја теоремата на Коши. ♦

45. Упатство. За да го докажете десното неравенство за функциите $f(u)=\ln(1+u)$ и $g(u)=u$ применете ја теоремата на Коши одделно на интервалите $[0,x]$ и $[x,0]$ при $x>0$ и $-1<x<0$, соодветно.

За да го докажете левото неравенство за функциите $f(u) = \ln(1+u)$ и $g(u) = \frac{u}{1+u}$ применете ја теоремата на Коши одделно на интервалите $[0, x]$ и $[x, 0]$ при $x > 0$ и $-1 < x < 0$, соодветно. ♦

Г) Изводи од повисок ред. Лајбницова формула

46. Да ја разгледаме функцијата $g(x) = \ln|f(x)|, x \neq x_i, i = 1, 2, ..., n$. Имаме

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \ln|x - x_i|,\ g'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} \text{ и } g''(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x - x_i)^2} < 0 .$$

Од друга страна $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ и $g''(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2}$, па затоа

$$f(x)f''(x) < (f'(x))^2 .$$

Ако $f(x_i) = 0$, тогаш $f'(x_i) \neq 0$, па затоа $0 = f(x_i)f''(x_i) < (f'(x_i))^2$. ♦

50. а) Ставаме $y_n = (x^2 - 1)^n$. Тогаш,

$$y_{n+1}^{'} = 2(n+1)xy_n ,\ y_n^{'} = 2nxy_{n-1} \text{ и } y_{n+1}^{''} = (4n+2)xy_n^{'} + 2(n+1)y_n - 2nxy_n^{'} .$$

Според тоа, за $y_{n+1}^{''}$ добиваме $y_{n+1}^{''} = (4n+2)xy_n^{'} + 2(n+1)y_n - 4n^2 y_n - 4n^2 y_{n-1}$. Сега, бараното равенство следува, ако последното равенство го диференцираме $n-1$ пати.

б) Полиномот $y_n = (x^2 - 1)^n$ има на сегментот $[-1, 1]$ точно $2n$ реални нули: $x_1 = x_2 = ... = x_n = -1$ и $x_{n+1} = x_{n+2} = ... = x_{2n} = 1$. Од задачата 49 следува дека полиномот $P_n(x)$ има n реални нули кои според теоремата на Рол се наоѓаат во интервалот $(-1, 1)$. ♦

51. а) Согласно со Лајбницовата формула, имаме

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{-x^2}) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\frac{d}{dx}(e^{-x^2}) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(-2xe^{-x^2}) \\ &= -2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \end{aligned}$$

односно $H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$.

б) Очигледно $H_n^{'} = 2xH_n + H_{n+1}$ и $H_n^{''} = 2H_n + 2xH_n^{'} + H_{n+1}^{'}$. Од првото равенство и од а) следува $H_n^{'} + 2nH_{n-1} = 0$. Ако место n ставиме $n+1$, имаме $H_{n+1}^{'} = -2(n+1)H_n$ и ако замениме во $H_n^{''} = 2H_n + 2xH_n^{'} + H_{n+1}^{'}$, го добиваме бараното равенство.

в) Да ја разгледаме функцијата $y(x) = e^{-x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Бидејќи

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$$

од задача 31 следува дека постои $\alpha_1 \in (-\infty, +\infty)$ таков, што $y'(\alpha_1) = 0$. Очигледно $\lim_{x \to -\infty} y'(x) = \lim_{x \to +\infty} y'(x) = 0$, па затоа согласно со задача 31, постојат $\alpha_2 \in (-\infty, \alpha_1)$

и $\alpha_3 \in (\alpha_1, +\infty)$ такви што $y''(\alpha_i) = 0$, за $i = 2,3$. Продолжувајќи ја постапката, добиваме дека $y^{(n-1)}$ има $(n-1)-$на реална нула $c_1, c_2, ..., c_{n-1}$ и важи

$$\lim_{x\to-\infty} y^{(n-1)}(x) = \lim_{x\to+\infty} y^{(n-1)}(x) = 0.$$

Ако на интервалите

$$(-\infty, c_1), (c_1, c_2), ..., (c_{n-2}, c_{n-1}), (c_{n-1}, +\infty)$$

ја примениме задачата 31, за функцијата $y^{(n-1)}$ добиваме дека постојат $d_1, d_2, ..., d_n$ такви, што $y^{(n)}(d_i) = 0$, за $i = 1, 2, ..., n$. Бидејќи $H_n(x) = e^{x^2} y^{(n)}(x)$ е полином од $n-$ти степен, тој има n нули и тие се $d_1, ..., d_n$. ♦

52. а) Нека $y_n = x^n e^{-x}$. Тогаш, $y'_{n+1} = (n+1-x)y_n$ и

$$\begin{aligned} y''_{n+1} &= -y_n + (n+1-x)y'_n = (2n+1-x)y'_n - y_n - ny'_n \\ &= (2n+1-x)y'_n - y_n - n(n-x)y_{n-1} = (2n+1-x)y'_n - y_n - n^2 y_{n-1} + ny_n \end{aligned}$$

при што во последното равенство користиме дека $y'_n = (n-x)y_{n-1}$ и $xy_{n-1} = y_n$. Ако сега $n-1$ пати диференцираме и ја искористиме Лајбницовата формула, а потоа помножиме со e^x, ја добиваме бараната релација.

б) Ставаме $y_n = x^n e^{-x}$. Тогаш, $L_n(x) = e^x y_n^{(n)}$. Ако очигледното равенство $xy'_n = (n-x)y_n$ го диференцираме $n+1$ пати, при што ја користиме Лајбницовата формула, добиваме

$$xy_n^{(n+2)} + (1+x)y_n^{(n+1)} + (n+1)y_n^{(n)} = 0. \qquad (1)$$

Од друга страна, ако равенството $L_n(x) = e^x y_n^{(n)}$ го диференцираме два пати добиваме дека релацијата (1) е еквивалентна со бараната релација. Според тоа, од точноста на (1) следува точноста на бараната релација.

в) Да ја разгледаме функцијата $f(x) = x^n e^{-x}$, $x \in (0, +\infty)$. Бидејќи

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

од задачата 31 следува дека постои точка $\alpha_1 \in (0, +\infty)$ таква, што $f'(\alpha_1) = 0$. Очигледно $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, па затоа согласно со задачата 31 постојат $\alpha_2 \in (0, \alpha_1)$ и $\alpha_3 \in (\alpha_1, +\infty)$ такви, што $y''(\alpha_i) = 0$, $i = 1,2$. Аналогно, како во задачата 51 докажуваме дека полиномот на Лагер $L_n(x) = e^x y_n^{(n)}$, кој е од $n-$ти степен, има n реални нули $d_1, d_2, ..., d_n \in (0, +\infty)$, т.е. дека сите нули на полиномот на Лагер се позитивни. ♦

Забелешка. За полиномите на Лагер и Хермит од задачите 51 и 52 експлицитно не се гледа дека навистина се полиноми. Во тоа може да се увериме ако ги определиме H_1 и H_2, односно L_1 и L_2, а потоа ги примениме релациите под а) од задачите 51 и 51, соодветно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Д) Тејлорова формула и Лопиталово правило

55. Одговор. $(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} C_{\alpha}^{k} x^{k} + o(x^{n}), n \to \infty$, каде $C_{\alpha}^{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}$, за $k = 1,2,...,n$ и $C_{\alpha}^{0} = 1$. Да забележиме дека за $\alpha = -1$ имаме

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} x^{k} + o(x^{n}), n \to \infty \ ♦$$

56. Упатство. Бараните Маклоренови формули може да се најдат со помош на забелешката 11.12, примерот 11.9 и задачата 54. Меѓутоа, наместо забелешката 11.12 може да се користи следното тврдење, чиј доказ го оставаме на читателот за вежба.

Ако $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k} x^{k} + o(x^{n}), x \to 0$, *тогаш*

$$f(bx) = \sum_{k=0}^{n} b^{k} a_{k} x^{k} + o(x^{n}), x \to 0 .$$

а) $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^{k} + o(x^{n}), x \to 0$, б) $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k}}{k} + o(x^{n}), x \to 0$,

в) $e^{\frac{x}{3}+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{e}{3^{k} k!} x^{k} + o(x^{n}), x \to 0$, г) $\frac{1}{3x+5} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-3)^{k}}{5^{k+1}} x^{k} + o(x^{n}), x \to 0$,

д) $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} C_{\frac{-1}{2}}^{k} x^{k} + o(x^{n}), x \to 0$,

ѓ) $\ln(7-2x) = \ln 7 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k} x^{k}}{k 7^{k}} + o(x^{n}), x \to 0$.♦

57. Упатство. Бараните Маклоренови формули можете поедноставно да ги определите користејќи го следново тврдење:

ако

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k} (x-x_{0})^{k} + o((x-x_{0})^{n}), x \to x_{0} \ и$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{k} (x-x_{0})^{k} + o((x-x_{0})^{n}), x \to x_{0} ,$$

тогаш

$$f(x)+g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_{k}+b_{k})(x-x_{0})^{k} + o((x-x_{0})^{n}), x \to x_{0} \quad и$$

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{k} (x-x_{0})^{k} + o((x-x_{0})^{n}), x \to x_{0}, \ каде \ c_{k} = \sum_{i=0}^{k} a_{i} b_{k-i} .$$

чиј доказ го оставаме на читателот за вежба.

а) $(x^2+2)e^{3x} = x^2e^{3x}+2e^{3x} = 2+6x+\sum\frac{3^{k-2}}{k!}(k^2-k+18)x^k+o(x^n),\ x\to 0$,

б) $\ln\frac{2+x}{3-x} = \ln(2+x)-\ln(3-x) = \ln\frac{2}{3}+\sum\limits_{k=1}^{n}[\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}+\frac{1}{3^k}]\frac{x^k}{k}+o(x^n),\ x\to 0$,

в) $e^x\ln(1+x) = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{3x^5}{40}+o(x^5),\ x\to 0$,

г) $\frac{x^2+4x+7}{x^2+3x+2} = 1+\frac{x+5}{(x+1)(x+2)} = 1+\frac{4}{x+1}-\frac{3}{x+2} = 1+\sum(4-\frac{3}{2^{k+1}})(-1)^k x^k+o(x^n),\ x\to 0$,

д) $\sin^2 2x\cos^2 2x = \frac{1}{8}(1-\cos 8x) = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}8^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1}),\ x\to 0$,

ѓ) $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{3(-1)^k}{4(2k)!}(3^{2k-1}+1)x^{2k}+o(x^{2n+1}),\ x\to 0$. ♦

58. Упатство. Искористете го методот на неопределени коефициенти (забелешката 11.10).

а) $\operatorname{tg} x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^6),\ x\to 0$ и

б) $\frac{e^x}{\cos x} = 1+x+x^2+\frac{3x^3}{3}+\frac{x^4}{2}+\frac{3x^5}{10}+\frac{151x^6}{720}+o(x^6),\ x\to 0$.

59. Упатство. Искористете ја забелешката 11.12.

а) $e^{x\cos x} = 1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3),\ x\to 0$,

б) $\sin(xe^x) = x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\ x\to 0$,

в) $\frac{x^2}{1+\sin x} = x^2-x^3+x^4-\frac{5x^5}{6}+\frac{2x^6}{3}+o(x^6),\ x\to 0$ и

г) $\ln\cos x = \frac{1}{2}\ln(1-\sin^2 x) = -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^7),\ x\to 0$. ♦

60. Одговор. а) $\ln(2-x^2+3) = \ln 3+\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{(-1)^{k-1}}{3^k}-1)\frac{(x-2)^k}{k}+o((x-2)^n),\ x\to 2$,

б) $\sqrt{x} = 1+\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(x-1)^3}{16}+o((x-1)^3),\ x\to 1$. ♦

61. Одговор. а) $\frac{x+3}{3+x^2} = 1-\frac{x-1}{4}-\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(x-1)^3}{8}+\frac{f^{iv}(1+\theta(x-1))}{4!}(x-1)^4$,

б) $x\sqrt{2+x} = -1+\frac{x+1}{2}+\frac{5(x+1)^2}{8}-\frac{3(x+1)^3}{16}+\frac{f^{iv}(-1+\theta(x+1))}{4!}(x+1)^4$. ♦

62. Упатство. а) Запишете $\sqrt[3]{29} = 3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{27}}$ и потоа искористете ја функцијата $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$, со што ќе добиете $\sqrt[3]{29} \approx 3(1+\frac{2}{81}-\frac{2^2}{81^2}) = 3{,}072245085$.

б) $\sin 12^0 = \sin\frac{\pi}{15} \approx \frac{\pi}{15}-\frac{1}{6}(\frac{\pi}{15})^3+\frac{1}{120}(\frac{\pi}{15})^5 = 0{,}2079116943$. ♦

63. Бидејќи $f^{(n+1)}(x)$ постои, според Тејлоровата формула со остаточен член во форма на Пеано имаме

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+...+\tfrac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\tfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+o(h^{n+1}),\ h\to 0 \qquad (2)$$

Ако равенството (2) го одземеме од равенството (1), а потоа скратиме со $\frac{h^n}{n!}$, добиваме

$$\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{h}=\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}+\frac{o(h)}{h},$$

односно

$$\theta=(\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}+\frac{o(h)}{h})(\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h})^{-1}.$$

Ако во последното равенство преминеме кон граница кога $h\to 0$, при што ќе искористиме дека $f^{(n+1)}(x)\neq 0$ добиваме $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$. ♦

64. Од Тејлоровата формула со остаточен член во облик на Лагранж добиваме $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0+\theta(x-x_0))}{2!}(x-x_0)^2$, $0<\theta<1$. За $x=0$ и $0<\theta<1$ наоѓаме

$$f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{x_0^2}{2!}f''(\xi_1),\quad 0<\xi_1<x_0\leq 1 \qquad (1)$$

За $x=1$ и $0<\theta<1$ имаме

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{(1-x_0)^2}{2!}f''(\xi_2),\quad 0\leq x_0<\xi_2<1. \qquad (2)$$

Ако од (3) ја одземеме (2) при што користиме $f(0)=f(1)=0$ добиваме

$$f'(x_0)=\tfrac{1}{2}[f''(\xi_1)x_0^2-f''(\xi_2)(1-x_0)^2],\ 0<x_0<1.$$

Според тоа, $|f'(x_0)|\leq\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|x_0^2+|f''(\xi_2)|(1-x_0)^2]\leq\frac{M}{2}(2x_0^2-2x_0+1)$ и бидејќи $0\leq 2x_0^2-2x_0+1\leq 1$ кога $0\leq x_0\leq 1$, добиваме $|f'(x)|\leq\frac{M}{2}$, за секој $x\in[0,1]$. ♦

65. Одговор. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}=2$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{erctg}x}-\frac{1}{1-x}+\frac{x^2}{2}}{\ln\frac{1-x}{1+x}+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{7}{6}x^3+o(x^3)}{\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}=-\frac{7}{4}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{2x^3}=\frac{1}{2}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(xe^{2x})-\ln(1-x)-x)^{\operatorname{ctg}x^3}=\lim\limits_{x\to 0}(1-\frac{2}{3}x^3+o(x^3))^{\frac{1}{x^3+o(x^3)}}=e^{-\frac{2}{3}}$ и

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\operatorname{tg}x}{x+\sin x}\right)^{\frac{2}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)}{2-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)}\right)^{\frac{4}{x^2+o(x^2)}}=e^{\frac{10}{6}}$.

ѓ) Ставаме $x-4=t$ и добиваме

$\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt{5-x}+\ln\frac{x}{4})^{\frac{1}{\sin(x-4)}}=\lim\limits_{t\to 0}(\sqrt{1-t}+\ln(1+\frac{t}{4}))^{\frac{1}{\sin t}}=\lim\limits_{t\to 0}(1-\frac{t}{4}+o(t))^{\frac{1}{t+o(t)}}$ ♦

66. Одговор. а) $\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$, б) $\frac{\alpha}{\beta}$, в) -2, г) -2, д) $\frac{\alpha-\beta}{e}$, ѓ) $\frac{\alpha}{2}$. ♦

68. Одговор. а) 0, б) 0, в) 1, г) $e^{-\frac{2}{\pi}}$, д) $\frac{1}{2}$, ѓ) 1. ♦

Ѓ) Конвексни функции

69. Ставаме $\alpha_i=\frac{p_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}p_j}, i=1,2,...,n$ и добиваме $\alpha_i\in[0,1]$, за $i=1,2,...,n$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$. Сега бараното неравенство непосредно следува од неравенството на Јенсен. ♦

70. а) За функцијата $f(x)=x^p, p>1$ на интервалот $(0,+\infty)$ важи $f'(x)=px^{p-1}$. Јасно, f' е строго монотоно растечка функција на $(0,+\infty)$, па од теоремата 15.10 следува дека функцијата $f(x)=x^p, p>1$ е строго конвексна на интервалот $(0,+\infty)$.

Нека $\alpha_i\in[0,1], i=1,2,...,n$ се такви, што $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ и $x_i>0, i=1,2,...,n$. Тогаш, од неравенството на Јенсен применето на функцијата $f(x)=x^p$ следува

$$(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)^p=f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)\le\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^p ,$$

т.е. неравенството (1) е исполнето.

б) Бараното неравенство непосредно следува ако во неравенството (1) ставиме $\alpha_i=\frac{1}{n}, i=1,2,...,n$ и добиеното неравенство го помножиме со n^p.

в) Бараното неравенство непосредно следува од неравенството под б) ако во него земеме $p=2$.

Забелешка. Неравенството под в) во литературата е познато како неравенство меѓу аритметичката и квадратната средина. ♦

71. За функцијата $f(x)=-\ln x$, на интервалот $(0,+\infty)$ имаме $f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$, што според теоремата 15.10 значи дека таа е строго конвексна на интервалот $(0,+\infty)$. Затоа, согласно со неравенството на Јенсен, имаме

$$-\ln(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i)=f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i)\le\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(a_i)=-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln a_i=-\ln(\prod_{i=1}^{n}a_i^{\alpha_i}),$$

односно

$$\ln(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i) \geq \ln(\prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i})$$

и бидејќи функцијата ln е монотоно растечка последното неравенство е еквивалентно со бараното неравенство. ♦

72. Бараното неравенство следува од неравенството во задача 70 ако во него земеме $a_i = \frac{1}{\alpha_i}, i = 1,2,...,n$. ♦

73. Функцијата $f(x) = -\ln x$ е конвексна на интервалот $(0,+\infty)$, па затоа од задача 69 следува неравенството

$$-\ln\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \leq -\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \ln a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = -\ln(\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i})^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}} \qquad (2)$$

кое е еквивалентно со десното неравенство во (1), (зошто?).

Ако во неравенството (2) броевите a_i, $i = 1,2,...,n$ ги замениме со броевите $b_i = \frac{1}{a_i} > 0, i = 1,2,...,n$, го добиваме неравенството

$$-\ln\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i}}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \leq -\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \ln\frac{1}{a_i}}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = -\ln(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^{p_i}})^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}}$$

кое е еквивалентно на левото неравенство во (1), (зошто?).

Забелешка. Неравенството (1) всушност е генерализација на Кошиевите неравенства меѓу аритметичката, геометриската и хармониската средина, кои се добиваат од (1) за $p_i = 1, i = 1,2,...,n$. ♦

74. Нека $f \neq \text{const}$, т.е. постојат $x_1, x_2 \in (-\infty,+\infty)$, $x_1 < x_2$ такви, што $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ако $f(x_1) < f(x_2)$, тогаш од теоремата 15.9 следува

$$0 < L = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}, \text{ за секој } x > x_2,$$

т.е. $f(x) \geq f(x_1) + L(x - x_1)$, за секој $x > x_2$. Ако во последното неравенство земеме $x \to +\infty$ добиваме $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, што противречи на претпоставката дека функцијата f е ограничена.

Ако $f(x_1) > f(x_2)$, тогаш од теоремата 15.9 следува

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = L < 0, \text{ за секој } x < x_1,$$

т.е.

$f(x) \geq f(x_1) + L(x - x_1)$,

за секој $x < x_1$. Ако во последното неравенство земеме $x \to -\infty$ добиваме $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, што противречи на претпоставката дека функцијата f е ограничена. ♦

75. Нека f е конвексна и периодична функција и T е нејзиниот основен период. Заради периодичноста доволно е да ги разгледаме точки x_1 и x_2 такви што $x_1 < x_2 < x_1 + T$. Ако ја примениме теорема 15.9 и земеме предвид дека функцијата f е периодична, добиваме $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_1+T)-f(x_1)}{x_1+T-x_1} = 0$, т.е. $f(x_2) \le f(x_1)$.

Понатаму, од $x_1 < x_2 < x_1 + T$ имаме $x_2 < x_1 + T < x_2 + T$. Ако повторно ја примениме теорема 15.9 и земеме предвид дека функцијата f е периодична, добиваме

$$\frac{f(x_1+T)-f(x_2)}{x_1+T-x_2} \le \frac{f(x_2+T)-f(x_2)}{x_2+T-x_2} = 0, \text{ т.е. } f(x_1) \le f(x_2).$$

Конечно, од $f(x_2) \le f(x_1)$ и $f(x_1) \le f(x_2)$ следува $f(x_1) = f(x_2)$ и бидејќи точките x_1 и x_2 се произволни добиваме $f = \text{const}$. ♦

76. Нека $a < x < t < b$. Во неравенството

$$f(\tfrac{x_1+x_2}{2}) \le \tfrac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)) \tag{1}$$

ставаме $x_1 = x$ и $x_2 = \frac{x+t}{2}$ и добиваме

$$f(\tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{4}t) \le \tfrac{3}{4}f(x) + \tfrac{1}{4}f(t).$$

Ако во (1) ставиме $x_1 = \frac{x+t}{2}$ и $x_2 = t$ добиваме

$$f(\tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{4}t) \le \tfrac{1}{4}f(x) + \tfrac{3}{4}f(t).$$

Нека претпоставиме дека за секој $k = 1,3,5,\dots,2^n - 1$ важи

$$f(\tfrac{k}{2^n}x + (1-\tfrac{k}{2^n})t) \le \tfrac{k}{2^n}f(x) + (1-\tfrac{k}{2^n})f(t).$$

Користејќи го неравенството (1) и индуктивната претпоставка може да се докаже дека

$$f(\tfrac{k}{2^{n+1}}x + (1-\tfrac{k}{2^{n+1}})t) \le \tfrac{k}{2^{n+1}}f(x) + (1-\tfrac{k}{2^{n+1}})f(t), \text{ за } k = 1,3,5,\dots,2^{n+1}-1.$$

Нека $\lambda \in (0,1)$. Од 11.1 [25], следува дека постои низа $\{b_i\}$, $b_i = 0$ или 1, таква, што $\lambda = \lim\limits_{i\to\infty} r_i$, каде $r_i = \sum\limits_{j=1}^{i} \frac{b_j}{2^j}$. Членовите на низата $\{r_i\}$ имаат облик $r_i = \frac{k}{2^n}$, за некој $n \in \mathbf{N}^+$ и $k = 1,3,5,\dots,2^n - 1$. Значи,

$$r_i x + (1-r_i)t \to \lambda x + (1-\lambda)t \text{ кога } i \to \infty.$$

Ако ја искористиме непрекинатоста на функцијата f во неравенството

$$f(r_i x + (1-r_i)t) \le r_i f(x) + (1-r_i)f(t),$$

добиваме

$$f(\lambda x + (1-\lambda)t) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(t) \text{ за секои } x,t \in (a,b) \text{ и за секој } \lambda \in (0,1).$$

Јасно, последното неравенство важи и за $\lambda = 0$ и 1, што значи дека функцијата f е конвексна. ♦

Е) Монотоност на функција. Локални екстреми

77. Упатство. Искористете ја последицата 13.3. ♦

78. а) Даденото неравенство е еквивалентно на неравенството

$$((\tfrac{x}{y})^{\alpha}+1)^{\frac{1}{\alpha}} > ((\tfrac{x}{y})^{\beta}+1)^{\frac{1}{\beta}} .$$

Ставаме $\frac{x}{y}=a$ и ја разгледуваме функцијата $f(z)=(a^z+1)^{\frac{1}{z}}$. За оваа функција имаме

$$f\,'(z)=\frac{(a^z+1)^{\frac{1}{z}}}{z^2(a^z+1)}\ln\frac{(a^z)^{a^z}}{(a^z+1)^{(a^z+1)}}$$

и бидејќи $\frac{(a^z)^{a^z}}{(a^z+1)^{(a^z+1)}}<1$, за секој $z\in(0,+\infty)$, добиваме дека $f\,'(z)<0$, за секој $z\in(0,+\infty)$, што значи дека разгледуваната функција строго монотоно опаѓа на интервалот $(0,+\infty)$, т.е. $f(\alpha)>f(\beta)$, за $0<\alpha<\beta$. Според тоа, точно е неравенството $(a^{\alpha}+1)^{\frac{1}{\alpha}}>(a^{\beta}+1)^{\frac{1}{\beta}}$ кое, ако се земе во предвид дека $\frac{x}{y}=a$, е еквивалентно со даденото неравенство.

б) Да ја разгледаме функцијата $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x(x+2)}{2(x+1)}-\ln(1+x)$. За оваа функција имаме $f\,'(x)=\frac{x^2}{2(1+x)^2}>0$, за секој $x\in(0,+\infty)$, т.е. таа строго монотоно расте на разгледуваниот интервал, па затоа $f(x)>f(\alpha)$, за $0<\alpha<x<+\infty$. Од произволноста на α следува $f(x)>f(0)=0$ за секој $x\in(0,+\infty)$ т.е. $\ln(1+x)<\frac{x(x+2)}{2(x+1)}$ за секој $x>0$. ♦

79. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=1+\alpha\ln x-x^{\alpha}, x>0, \alpha>2$ Оваа функција има локален максимум во точката $x_0=1$ и притоа $f(1)=0$. Според тоа, за секој $x>0$ важи $0=f(1)\ge f(x)=1+\alpha\ln x-x^{\alpha}$, т.е. $1+\alpha\ln x\le x^{\alpha}, x>0, \alpha>2$, што и требаше да се докаже. ♦

80. а) Функцијата е определена и диференцијабилна на множеството $A=\mathbf{R}$ и важи $f\,'(x)=\frac{1-x}{1+x^2}$. Стационарна точка за дадената функција е $x_0=1$. Избираме $\delta=\frac{1}{2}$ и добиваме дека за секој $x\in(\frac{1}{2},1)$ важи $f\,'(x)>0$, а за секој $x\in(1,\frac{3}{2})$ важи $f\,'(x)<0$, т.е. изводот $f\,'$ го менува знакот во точката $x_0=1$ од “+” во “-“. Значи во $x_0=1$ функцијата има строг локален максимум $f(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$.

б) Имаме $f\,'(x)=2x(1-x^2)e^{-x^2}$, па затоа стационарни точки на функцијата се $x_0=0, x_1=1$ и $x_2=-1$. Лесно се гледа дека во $x_0=0$ функцијата има строг локален минимум $f(0)=0$, а во $x_1=1$ и $x_2=-1$ има строги локални максимуми $f(1)=f(-1)=e^{-1}$. ♦

81. Одговори. а) Ако со r го означиме радиусот на основата на цилиндарот и ставиме $x=r^2$, тогаш за волуменот добиваме $V=2\pi x\sqrt{R^2-x}$. Оваа функција има максимум за $x=\frac{2R^2}{3}$, т.е. $r=R\sqrt{\frac{2}{3}}$ и притоа $V_{\max}=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

б) Ако со r го означиме радиусот на основата на цилиндарот, а со h неговата висина, тогаш $h=\frac{H(R-r)}{R}$ и $V=\frac{\pi H}{R}(Rr^2-r^3)$. Волуменот е максимален за $r=\frac{2R}{3}$ и притоа $h=\frac{H}{3}, V_{\max}=\frac{4\pi R^2 H}{27}$.

в) $r=\sqrt{\frac{P}{6\pi}}, h=\frac{\sqrt{6\pi P}}{3\pi}, V_{\max}=\frac{P\sqrt{6\pi P}}{18\pi}$

г) $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, h=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}, r:h=1:2$

д) $r=R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}, P_{\max}=\pi R^2(\sqrt{5}+1)$

ѓ) $r=\frac{a}{6}, V_{\max}=\frac{\pi a^3}{216}$

е) $r=\frac{a\sqrt{6}}{6}, H=\frac{a\sqrt{3}}{3}, V_{\max}=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{16}$. ♦

82. Одговори. а) $h=\frac{4R}{3}, V_{\max}=\frac{32\pi R^3}{81}$, **б)** $h=4R, V_{\min}=\frac{8\pi R^3}{3}$. ♦

83. а) Функциите $x(t)$ и $y(t)$ се диференцијабилни за секој t, при што

$$x'(t)=\frac{t^2(t^2+3)}{(t^2+1)^2},\ y'(t)=\frac{t(t-1)(t^2+t+4)}{(t^2+1)^2}.$$

Затоа, имаме

$$y'(x)=\frac{(t-1)(t^2+t+4)}{t(t^2+3)}.$$

Значи, $y'(x)=0$ за $t=1$ т.е. $x_1=\frac{1}{2}$, а при $t\neq 0$ т.е. $x_0=0$ изводот не постои. Ако x припаѓа на некоја лева околина на точката $x_0=0$, тогаш t припаѓа на некоја лева околина на точката $t_0=0$ во која $y'(x)>0$. Ако x припаѓа на некоја десна околина на точката $x_0=0$, тогаш t припаѓа на некоја десна околина на точката $t_0=0$ во која $y'(x)<0$. Значи во точката $x_0=0$ првиот извод $y'(x)$ го менува знакот од "+" во "-", т.е. во $x_0=0$ функцијата има максимум $y(0)=0$. Со аналогни размислувања се докажува дека во точката $x_1=\frac{1}{2}$ функцијата има минимум $y(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$.

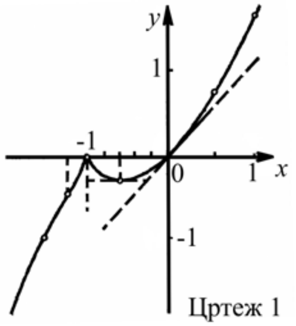
б) Функциите $x(t)$ и $y(t)$ се диференцијабилни за секој t, при што $x'(t)=(1+t)e^t$ и $y'(t)=(1-t)e^{-t}$.

За функцијата $x(t)$ точката $t_0=-1$ е точка на локален минимум (проверете!). Но, $x(t)$ е непрекината функција, па затоа во $t_0=-1$ функцијата $x(t)$ прима најмала вредност $x_0=-e^{-1}$. Значи, функцијата $y(x)$ е дефинирана на интервалот $[-e^{-1},+\infty)$.

Од $x((-\infty,-1))=(-e^{-1},0)$ и $x((-1,0))=(-e^{-1},0)$ следува дека функцијата $y(x)$ на интервалот $(-e^{-1},0)$ е двозначна и притоа $x((-1,0))=(-e,0)$ и $y((-\infty,-1))=(-\infty,-e)$.

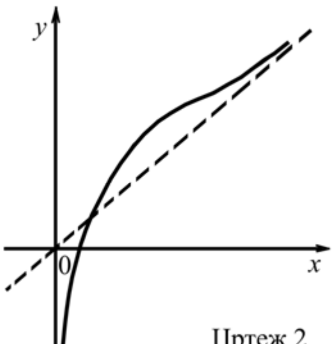
Имаме $y'(x)=\frac{1+t}{1-t}e^{-2t}$. Според тоа, за $t_0=1$, т.е. $x_0=e$ изводот $y'(x)$ не постои. Аналогно, како под а), се наоѓа дека $y'(x)$ го менува знакот од “+” во “-“, т.е. во $x_0=e$ функцијата има максимум $y(e)=e^{-1}$. Понатаму, $y'(x)=0$ за $t_1=-1$. Во околина на точката $t_1=-1$ важи $y'(t)>0$, па затоа заклучуваме дека функцијата $y(t)=te^{-t}$ монотоно расте, т.е. $y(x)$ во точката $x_1=-e^{-1}$ нема екстрем, иако $y'(x)$ во оваа точка го менува знакот. Да забележиме дека последното е во непосредна зависност од двозначноста на функцијата $y(x)$ на интервалот $(-e^{-1},0)$, за која претходно говоревме. ♦

84. Одговори. а) Функцијата е дефинирана за $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$. Правата $x=1$ е вертикална асимптота, а правата $y=x+4$ е хоризонтална асимптота. Точката $A(0,0)$ е точка на локален минимум, а точките $B(-1,\frac{1}{4})$ и $C(4,\frac{32}{3})$ се точки на локален максимум. Точката $D(-\frac{2}{7},\frac{16}{189})$ е превојна точка. Функцијата е конкавна на интервалот $(-\infty,0)$, а е конвексна на интервалите $(0,1)$ и $(1,+\infty)$.



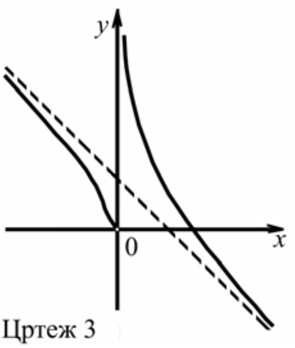
Цртеж 1

б) Функцијата е дефинирана и непрекината на $\mathbf{R}$ и нема асимптоти. Во точката $A(-1,0)$ првиот извод не е определен, но во нејзина околина тој го менува знакот и во оваа точка функцијата има максимум, а во точката $B(-\frac{3}{5},-\frac{3\sqrt[3]{20}}{25})$ функцијата има локален минимум. Точката $D(-\frac{6}{5},-\frac{6\sqrt[3]{5}}{25})$ е превојна точка. Функцијата е конкавна на интервалот $(-\infty,-1)$, а е конвексна на интервалот $(-1,+\infty)$. Графикот е даден на цртеж 1.



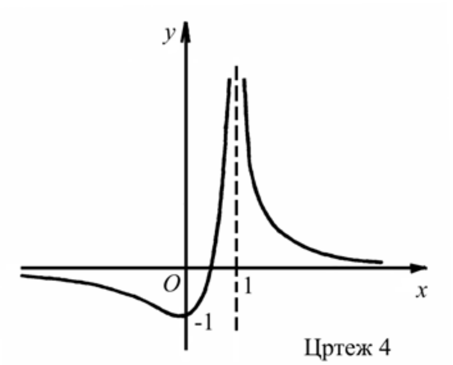
Цртеж 2

в) Функцијата е дефинирана и непрекината на интервалот $(0,+\infty)$. Правата $y=x$ е коса асимптота, а $y-$оската е хоризонтална асимптота. Првиот извод на функцијата е позитивен на целата дефинициона област, т.е. функцијата монотоно расте на $(0,+\infty)$. Точката $A(e^{\frac{3}{2}},e^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}})$ е превојна точка. На интервалот $(0,e^{\frac{3}{2}})$ функцијата е конкавна, а на интервалот $(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$ - конвексна. Графикот е даден на цртеж 2.



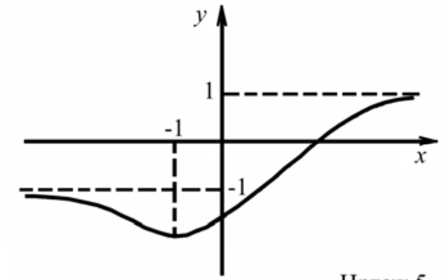
Цртеж 3

г) Функцијата е дефинирана и непрекината на $\mathbf{R}$. Позитивниот дел на $x-$оската е хоризонтална асимптота, а додека за $x<0$ функцијата нема асимптоти. Точката $A(0,0)$ е точка на локален минимум, а точката $B(2,4e^{-2})$ е точка на локален максимум. Превојни точки се $C(2+\sqrt{2},y_1)$ и $D(2-\sqrt{2},y_2)$. На интервалите $(-\infty,2-\sqrt{2})$ и $(2+\sqrt{2},+\infty)$ функцијата е конвексна, а на интервалот $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$ таа е конкавна.



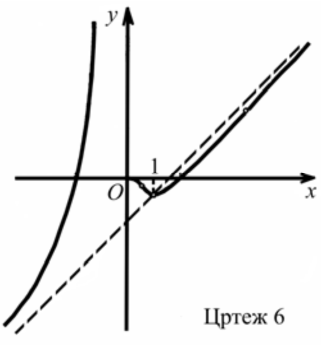
Цртеж 4

д) Функцијата е дефинирана на множеството $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Правата $x=0$ е вертикална асимптота оддесно, но не е и одлево. Правата $x+y=1$ е коса асимптота. Првиот извод на функцијата е негативен на целата дефинициона област, т.е. функцијата монотоно опаѓа на целата дефинициона област. Точката $A(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+e^{-2})$ е превојна точка. Функцијата е конкавна на интервалот $(-\infty,-\frac{1}{2})$, а конвексна на интервалите $(-\frac{1}{2},0)$ и $(0,+\infty)$. Графикот е даден на цртеж 3.



Цртеж 5

ѓ) Функцијата е дефинирана на множеството $\mathbf{R}\setminus\{1\}$. Правата $x=1$ е вертикална асимптота, а правата $y=0$ хоризонтална асимптота. Функцијата има локален минимум во точката $A(0,-1)$ и превој во точката $B(-\frac{1}{2},-\frac{8}{9})$. На интервалот $(-\infty,-\frac{1}{2})$ функцијата е конкавна, а на интервалите $(-\frac{1}{2},1)$ и $(1,+\infty)$ е конвексна. Графикот е даден на цртеж 4.

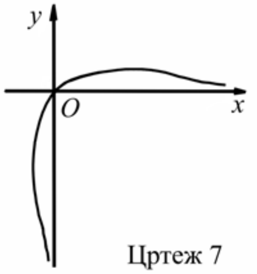


Цртеж 6

е) Функцијата е дефинирана на целата реална права. Асимптоти се правите $y=1$ и $y=-1$. Функцијата достигнува минимум во точката $A(-1,-\sqrt{3})$, а превојни точки се $B(1,-\frac{\sqrt{3}}{3})$ и $C(-2,-\frac{2\sqrt{6}}{3})$. Графикот е даден на црт. 5.

ж) Функцијата е дефинирана за $x\neq 0$. Правата $x=0$ е вертикална асимптота, а правата

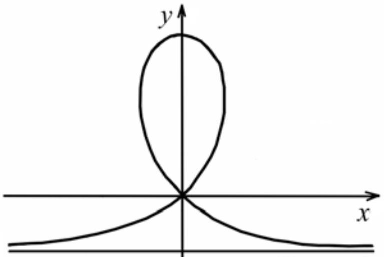
$y = x - \frac{5}{3}$ коса асимптота. Во точката $A(1, -3e^{-\frac{5}{3}})$ функцијата има минимум. Превојни точки на функцијата се $B(10^{\frac{12-\sqrt{97}}{47}}, y_1)$ и $C(10^{\frac{12+\sqrt{97}}{47}}, y_2)$. На интервалите $(-\infty, 0)$ и $(10^{\frac{12-\sqrt{97}}{47}}, 10^{\frac{12+\sqrt{97}}{47}})$ функцијата е конвексна, а на интервалите $(0, 10^{\frac{12-\sqrt{97}}{47}})$ и $(10^{\frac{12+\sqrt{97}}{47}}, +\infty)$ е конкавна. Графикот е даден на црт. 6. ♦



Цртеж 7

85. Одговор. а) Во задачата 83 докажавме дека за $x < -e^{-1}$ функцијата не е дефинирана и дека во $x_0 = e$ таа има максимум $y_0 = e^{-1}$. Исто така, покажавме дека на интервалот $(-e^{-1}, 0)$ функцијата е двозначна, а при $x > 0$ е еднозначна. Од $xy = t^2$ следува дека графикот на функцијата лежи во I и III квадрант и тој е симетричен во однос на правата $x + y = 0$. Превојни точки на функцијата се $(-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}, -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}})$ и $(\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}, -\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}})$. Координатните оски се асимптоти и тоа $x-$оската во позитивниот дел, а $y-$оската во негативниот. Графикот е даден на црт. 7.

б) Функцијата е дефинирана за секој $t \neq -1$. Максимум се достигнува во точката $A(0, 3)$. Правата $y = -1$ е асимптота и функцијата е симетрична во однос на $y-$ оската. Графикот е даден на црт. 8. ♦



Цртеж 8

V ГЛАВА

А) Неопредел интеграл

1. Имаме,

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)\cos^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C_n,$$

каде $n\pi - \frac{\pi}{2} < x < n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$. Од непрекинатоста на примитивната функција следува дека $I(n\pi - \frac{\pi}{2})^+ = I(n\pi + \frac{\pi}{2})^-$, $n \in \mathbf{Z}$, што значи дека

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_n = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_{n+1}.$$

Од последното равенство наоѓаме

$$C_{n+1} = C_n + \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \ldots = C_0 + \frac{n\pi}{\sqrt{2}}.$$

Понатаму, од неравенствата

$$n\pi - \frac{\pi}{2} < x < n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$$

следува $n < \frac{2x+\pi}{2\pi} < n+1, n \in \mathbf{Z}$, па затоа $n = [\frac{2x+\pi}{2\pi}]$. Според тоа,

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}[\frac{2x+\pi}{2\pi}] + C_0,\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ и } I(\frac{\pi}{2} + n\pi) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + n\pi} I(x). \blacklozenge$$

4. Имаме

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}} = \int \frac{(\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x})dx}{2e^x} = \frac{1}{2}(I_1 + I_2),$$

каде

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{1+e^x}\,dx}{e^x} \text{ и } I_2 = \int \frac{\sqrt{1-e^x}\,dx}{e^x}.$$

За решавање на интегралот I_1 последователно ги користиме смените $e^x = z$ и $1+z = u^2$ и добиваме

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{1+e^x}}{e^x} dx = -\frac{\sqrt{1+e^x}}{e^x} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C_1,$$

а за интегралот I_2 ги користиме смените $e^x = z$ и $1-z = v^2$ и добиваме

$$I_2 = \int \frac{\sqrt{1-e^x}}{e^x} dx = \frac{\sqrt{1-e^x}}{e^x} - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-e^x}}{1-\sqrt{1-e^x}} + C_2. \blacklozenge$$

5. Имаме $\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx = \int \frac{dx}{\ln x} - \int \frac{dx}{\ln^2 x}$. Но,

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \int \frac{1}{\ln x} dx = \frac{x}{\ln x} - \int x d(\ln x)^{-1} = \frac{x}{\ln x} + \int \frac{dx}{\ln^2 x},$$

па затоа $\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx = \frac{x}{\ln x} + C$. ♦

7. а) $x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3| + C,\ x \neq 0,2,3$

б) $-\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9}\ln|\frac{x-1}{x+2}| + C,\ x \neq -2,1$

в) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C,\ x \neq -1$

г) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C,\ x \neq 1$

д) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\varepsilon(x) + C$, каде $\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ 0, & |x| \leq 1 \\ -1, & x < -1 \end{cases}$

ѓ) $\frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C,\ x \neq 1$.

8. а) $\sqrt{x+x^2}\,\frac{8x^2+2x-3}{24} + \frac{1}{8}\ln\frac{\sqrt{1+x^{-1}}+1}{\sqrt{|x|}} + C$,

б) $\frac{3}{5}(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}})^5 - 2(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}})^2 + 3\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}} + C$ и

в) $\frac{3t}{2(t^3+1)} - \frac{1}{4}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C,\quad t = \frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x},\ 0 < x < \sqrt{3},\ x \leq -\sqrt{3}$.

11. а) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ б) $\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+\frac{1}{\cos x}+C,\ x\neq\frac{k\pi}{2}$

в) $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\operatorname{ctg}x+C$, г) $\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)-\frac{1}{2}\cos^2 x+C$,

д) $\frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^2(t^2+t+1)}{(t-1)^2(t^2-t+1)}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{3}}{1-t^2}+C$, каде $t^3=\sin x,\ x\neq\frac{k\pi}{2}$,

ѓ) $-\frac{3}{2}\cos x-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|,\ x\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

Б) Определен интеграл

12. Од $a_0=\frac{1}{2}$, $a_n=4a_{n-1}-4a_{n-1}^2,\ n=1,2,...$ наоѓаме $a_1=1$ и $a_k=0$ за $k>1$. Според тоа,

$$\int_0^{\sqrt{a_0}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\pi}{4},\quad \int_0^{\sqrt{a_1}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ \text{и}$$

$$\int_0^{\sqrt{a_k}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^0\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0,\ \text{за}\ k>1.\ ♦$$

13. Имаме,

$$\frac{\pi}{12}=\int_{\sqrt{2}}^{x}\frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}}=\int_{\sqrt{2}}^{x}\frac{dz}{z^2\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}}=-\int_{\sqrt{2}}^{x}\frac{d(\frac{1}{z})}{\sqrt{1-(\frac{1}{z})^2}}=-\arcsin\frac{1}{z}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{x}=\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{1}{x},$$

па затоа $\arcsin\frac{1}{x}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2}$, од што следува дека $x=2$. ♦

14. Воведуваме смена $x=6-y$ и добиваме

$$I=\int_4^2\frac{\sqrt{\ln(3+y)}d(-y)}{\sqrt{\ln(9-y)}+\sqrt{\ln(3+y)}}=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(3+y)}dy}{\sqrt{\ln(9-y)}+\sqrt{\ln(3+y)}},$$

што значи

$$2I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}dx}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(3+x)}}+\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(3+x)}dx}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(3+x)}}=\int_2^4 dx=2,$$

па затоа $I=1$. ♦

15. Да ја разгледаме функцијата

$$F(y)=\int_0^y\sqrt{x^4+(y-y^2)^2}\,dx,\ y\in[0,1].$$

Имаме

$$F'(y)=\sqrt{y^4+(y-y^2)^2}+\int_0^y\frac{(y-y^2)(1-2y)}{\sqrt{x^4+(y-y^2)^2}}dx.$$

Ако $y\in(0,\frac{1}{2}]$, тогаш очигледно $F'(y)>0$.

Нека $y\in(\frac{1}{2},1]$. Тогаш, неравенството $F'(y)>0$ е еквивалентно на неравенството

$$\sqrt{y^4+(y-y^2)^2} > (y-y^2)(2y-1)\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{x^4+(y-y^2)^2}} .$$

Од друга страна,

$$\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{x^4+(y-y^2)^2}} \le \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{(y-y^2)^2}} = \frac{y}{y-y^2} ,$$

па затоа ако за $y \in (\frac{1}{2},1]$ е исполнето неравенството $\sqrt{y^4+(y-y^2)^2} > y(2y-1)$, тогаш ќе биде исполнето и неравенството $F'(y) > 0$. Лесно се гледа дека неравенството $\sqrt{y^4+(y-y^2)^2} > y(2y-1)$ е еквивалентно со неравенството $y \le 1$, што е очигледно точно.

Според тоа, $F'(y) > 0$ за секој $y \in (0,1]$, што значи дека функцијата $F(y)$ монотоно расте на интервалот $[0,1]$ и нејзината најголема вредност е еднаква на $F(1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. ♦

16. При $f(\sin x) = \ln \sin x$, ако се искористи равенството

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

од пример 17.4 а) добиваме

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln \sin x dx = \frac{1}{\pi}(-\frac{\pi^2}{2}\ln 2) = -\frac{\pi}{2}\ln 2 . \ ♦$$

17. За да ги пресметаме интегралите, ќе го искористиме тригонометриското равенство

$$\sin n\varphi - \sin(n-2)\varphi = 2\sin\varphi\cos(n-1)\varphi .$$

т.е.

$$\sin n\varphi = 2\sin\varphi\cos(n-1)\varphi + \sin(n-2)\varphi .$$

Ставаме $n = 2r+1$ и за првиот интеграл добиваме

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2r+1)\varphi}{\sin\varphi} d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2r\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2r-1)\varphi}{\sin\varphi} d\varphi .$$

Првиот собирок на десната страна во последното равенство е еднаков на 0. Повторувајќи ја постапката за $n = 2r-1, n = 2r-3, ..., n = 2\cdot 2-1$, за почетниот интеграл наоѓаме

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2r+1)\varphi}{\sin\varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2r-1)\varphi}{\sin\varphi} d\varphi = ... = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\cdot 2-1)\varphi}{\sin\varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2} .$$

Во најдениот идентитет ставаме $n = 2r$ и за вториот интеграл наоѓаме

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2r\varphi}{\sin\varphi} d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2r-1)\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2r-2)\varphi}{\sin\varphi} d\varphi = 2\frac{(-1)^{r-1}}{2r-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2r-2)\varphi}{\sin\varphi} d\varphi .$$

Претходната постапка ја повторуваме r пати и наоѓаме

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2r\varphi}{\sin\varphi} d\varphi = 2[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{(-1)^{r-1}}{2r-1}],$$

што и требаше да се докаже. ♦

18. Со повеќекратна парцијална интеграција наоѓаме

$$\int_0^x e^{-t} f_1(t)dt = e^{-x}[f_2(x)+f_3(x)+...+f_n(x)]+\int_0^x e^{-t} f_n(t)dt \qquad (1)$$

Функцијата $f_2(t)$ е непрекината, што значи и ограничена на интервалот $[0,M]$. Ако $|f_2(t)|\le K$, тогаш со математичка индукција лесно се докажува дека $|f_n(t)|\le K\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}$. Според тоа, интегралот на десната страна во (1) тежи кон 0 и

$$\varphi(x) = f_1(x)+e^x\int_0^x e^{-t} f_1(t)dt,$$

од што следува тврдењето на задачата. ♦

19. Нека претпоставиме дека функцијата f ги задоволува условите на задачата. Ако го диференцираме равенството

$$(f(x))^2 = \int_0^x [(f(t))^2+(f'(t))^2]dt+2000,$$

добиваме $2f(x)f'(x) = (f(x))^2+(f'(x))^2$, т.е. $(f(x)-f'(x))^2 = 0$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Според тоа, $f(x) = f'(x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$, па затоа $f(x) = Ce^x$. Но, $f^2(0) = 2000$, па затоа $C = f(0) = \pm\sqrt{2000}$ и бидејќи f е непрекината функција добиваме $f(x) = \sqrt{2000}e^x$ или $f(x) = -\sqrt{2000}e^x$. ♦

20. Нека

$$F(x) = f(x)\sqrt{x^2+[f(x)]^2}$$

$$G(x) = 2f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}$$

$$\Delta x = \{x^2+[f(x)]^2\}\{[F'(x)]^2-[G(x)]^2\}.$$

Лесно се гледа дека

$$\Delta x = x^2\{xf'(x)\}^2+2f(x)\{2[f(x)]^2+x^2\}\{xf'(x)\}-[f(x)]^2\{3x^2+4[f(x)]^2\}.$$

Од условот на задачата следува дека изводот $f'(x)$ во интервалот $[0,a]$ е ненегативен и неопаѓачки. Според тоа, за секој $x\in[0,a]$ важи

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt \le x\cdot \max_{t\in[0,x]} f'(t) = xf'(x),$$

при што ова неравенство мора да биде вистинско во некој подинтервал. Значи, $\Delta(x)\ge 0$. Бидејќи изводот $F'(x)$ е позитивен, од последното неравенство следува дека $F'(x)\ge G(x)$, и ова неравенство мора да биде вистинско во некој подинтервал. Со интегрирање на последното неравенство, наоѓаме

$$F(a) > \int_0^a G(x)dx\,,$$

што и требаше да се докаже. ♦

21. Воведуваме смена $x^2 = t$, $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ и добиваме

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(z+\pi)}{\sqrt{z+\pi}} d(z+\pi)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin z}{\sqrt{z+\pi}} dz = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{\sin t}{\sqrt{t+\pi}})dt > 0,$$

бидејќи $\frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{\sin t}{\sqrt{t+\pi}} > 0$ за секој $t \in [0,\pi]$. ♦

22. а) Од адитивноста на интегралот и периодичноста на функцијата f , со помош на смената $x - T = t, dx = dt, x \in [T, a+T]$ добиваме:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x-T)dx$$

$$= \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(t)dt$$

$$= \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx,$$

што и требаше да се докаже.

б) Бидејќи

$$I = \int_0^{2000\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx = \sqrt{2}\int_0^{2000\pi} |\sin x|\, dx$$

и функцијата $f(x) = |\sin x|,\ x \in \mathbf{R}$ е периодична со период $T = \pi$ од а), добиваме

$$I = 2000\sqrt{2}\int_0^{\pi} |\sin x|\, dx = 2000\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin x dx = -2000\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi} = 4000\sqrt{2}\ .\ ♦$$

23. Јасно, функцијата F е диференцијабилна и притоа важи $F'(x) = f(x)$. Функцијата f е периодична па затоа $F'(x+T) = f(x)$. Интегрираме на интервалот $[x_0, x]$ и добиваме

$$F(x+T) - F(x_0+T) = F(x)\,.$$

Бидејќи

$$F(x_0+T) = \int_{x_0}^{x_0+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt = C = \text{const}\,,$$

добиваме дека $F(x+T) - F(x) = C$. Ако $C = 0$, тогаш $F(x+T) = F(x)$, т.е. F е периодична функција. Ако $C \neq 0$, тогаш ја разгледуваме функцијата

$$G(x) = F(x) - \frac{C}{T}x,\ x \in \mathbf{R}$$

која е периодична функција со период T, па затоа $F(x)=G(x)+ax$, $x\in\mathbf{R}$ и $a=\frac{C}{T}$ е збир на периодична и линеарна функција. ♦

24. Од $\int\limits_0^1 f(x)dx=0$ следува дека функцијата f го менува знакот на интервалот $[0,1]$ и бидејќи $f\in\mathbf{C}([0,1])$, добиваме дека таа има нула на интервалот $[0,1]$. Нека претпоставиме дека функцијата има нула само во точката $c\in[0,1]$ и нека $f(x)<0$ за $x\in[0,c)$ и $f(x)>0$ за $x\in(c,1]$. Тогаш,

$$0=\int\limits_0^1 xf(x)dx=\int\limits_0^1 xf(x)dx-c\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1 (x-c)f(x)dx>0, \tag{1}$$

бидејќи $(x-c)f(x)>0$ за $x\neq c$, што претставува противречност. Значи, функцијата f има барем две нули. ♦

25. Нека $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ е произволна ненегативна, непрекината и ненулта функција. Тогаш постои $a\in(0,1)$ таков, што $f(a)>0$. Ако функцијата f го достигнува својот максимум во точката $c\in[0,a]$, тогаш

$$\int\limits_0^c f(t)dt\le cf(c)\le af(c)<f(c),$$

што значи дека бараната функција не постои. ♦

26. а) $\Rightarrow$ б). Ја воведуваме смената $t=2x-u$ и добиваме

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)dt=-\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{x+\varepsilon}^{x-\varepsilon} f(2x-u)du=\frac{1}{2\varepsilon\cdot 2}[\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(2x-t)dt+\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)dt]$$

$$=\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{f(2x-t)+f(t)}{2}dt=\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(x)dt=f(x).$$

б) $\Rightarrow$ в). Да ја разгледаме функцијата $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ дефинирана со

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

за која важи $g(b)=g(a)=0$ и $\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} g(t)dt=g(x)$. Нека функцијата g го достигнува својот максимум M во точката c и нека $c\in[a,\frac{a+b}{2}]$, (слично се разгледува кога $c\in[\frac{a+b}{2},b]$). Ако $c=a$, тогаш $M=g(a)=0$. Ако $c\in(a,\frac{a+b}{2}]$, тогаш при $\delta=c-a>0$ важи $c+\delta\le b$ и $c-\delta=a$, па затоа $g(c)=\frac{1}{2\delta}\int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} g(t)dt$ од што следува $\frac{1}{2\delta}\int\limits_{c-\delta}^{c+\delta}[g(c)-g(t)]dt=0$ и бидејќи $g(c)-g(t)\ge 0$, за секој $t\in[a,b]$, добиваме дека $g(t)=g(c)$, за секој $t\in[a,c+\delta]$ и бидејќи $g(a)=0$, наоѓаме $M = \max\limits_{x\in[a,b]} g(x) = 0$. Аналогно се докажува дека $m = \min\limits_{x\in[a,b]} g(x) = 0$. Значи, $g(x) = 0$, за секој $x \in [a,b]$, од што следува дека $f(x) = kx + l$, каде

$$k = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ и } l = f(a) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} a .$$

б) $\Rightarrow$ в). Имаме,

$$f(x+\varepsilon) + f(x-\varepsilon) = k(x+\varepsilon) + l + k(x-\varepsilon) + l = 2(kx+l) = 2f(x) . \ ♦$$

27. Нека $\alpha = \frac{p}{q}, \ p,q \in \mathbf{Z}, q > 0$. Функцијата $\frac{f(x)}{f(x+\alpha)}$ е непрекината, па затоа постои $\int\limits_0^1 \frac{f(x)dx}{f(x+\alpha)}$. Од периодичноста на f следува дека за секој $i = 0,1,2,...,q-1$ важи

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x+\frac{i}{q})}{f(x+\frac{i}{q}+\frac{p}{q})} dx = \int\limits_{\frac{i}{q}}^{1+\frac{i}{q}} \frac{f(t)}{f(t+\frac{p}{q})} dt = \int\limits_0^1 \frac{f(t)}{f(t+\frac{p}{q})} dt$$

па затоа

$$\int\limits_0^1 \sum_{i=0}^{q-1} \frac{f(x+\frac{i}{q})}{f(x+\frac{i}{q}+\frac{p}{q})} dx = q\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{f(x+\frac{p}{q})} dx .$$

Понатаму, q последователни цели броеви $p, p+1,..., p+q-1$ при делење со q даваат остатоци $0,1,...,q-1$ (не мора во овој редослед), па од периодичноста на функцијата f следува дека броевите $f(x+\frac{i}{q}+\frac{p}{q})$, $i = 0,1,...,q-1$ се циклична пермутација на броевите $f(x+\frac{i}{q})$, $i = 0,1,...,q-1$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува дека

$$\sum_{i=0}^{q-1} \frac{f(x+\frac{i}{q})}{f(x+\frac{i}{q}+\frac{p}{q})} \geq q \cdot \sqrt[q]{\prod_{i=0}^{q-1} \frac{f(x+\frac{i}{q})}{f(x+\frac{i}{q}+\frac{p}{q})}} = q ,$$

па затоа

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{f(x+\frac{p}{q})} dx = \frac{1}{q} \int\limits_0^1 \sum_{i=0}^{q-1} \frac{f(x+\frac{i}{q})}{f(x+\frac{i}{q}+\frac{p}{q})} dx \geq q\int\limits_0^1 q dx = 1 .$$

Според тоа, тврдењето на задачата важи за секој $\alpha \in \mathbf{Q}$.

Да ја разгледаме функцијата $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, определена со

$$F(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{f(x+\alpha)} dx .$$

Подинтегралната функција е непрекината по α , па затоа и функцијата F е непрекината. Бидејќи $F(\alpha) \geq 1$, за секој $\alpha \in \mathbf{Q}$ од непрекинатоста следува дека $F(\alpha) \geq 1$, за секој $\alpha \in \mathbf{R}$. ♦

28. Од 3) следува дека функцијата f го менува знакот на интервалот $[0,6]$, а од 2) следува дека таа е непрекината. Понатаму, постои $c \in [1,5]$ таков, што $f(c) = 0$, бидејќи во спротивно ќе имаме

$$\int_0^6 f^2(x)dx = \int_0^1 f^2(x)dx + \int_1^5 f^2(x)dx + \int_5^6 f^2(x)dx \le 2 + \int_1^5 f^2(x)dx \le 2 + |\int_1^5 f(x)dx|$$

$$= 2 + |\int_0^1 f(x)dx + \int_5^6 f(x)dx| \le 4 < \tfrac{14}{3}$$

Според тоа, за секој $x \in [0,6]$ имаме

$$| f(x) | = | f(x) - f(c) | \le x - c ,$$

па затоа важи

$$| f(x) | \le \min\{| x - c |, 1\} .$$

Да ја разгледаме функцијата $g:[0,6] \to \mathbf{R}$ определена со $g(x) = \min\{| x - c |, 1\}$. Тогаш, $| f(x) | \le g(x)$, па затоа

$$\tfrac{14}{3} = \int_0^6 f^2(x)dx \le \int_0^6 g^2(x)dx = \int_0^{c-1} dx + \int_{c-1}^{c+1} (x-c)^2 dx + \int_{c+1}^6 dx = \tfrac{14}{3} ,$$

од што следува дека $| f(x) | = g(x)$. Значи,

$$\int_0^c g(x)dx = \int_0^c | f(x) | \, dx = | \int_0^c f(x)dx | = | -\int_c^6 f(x)dx | = \int_c^6 | f(x) | \, dx = \int_c^6 g(x)dx$$

и бидејќи

$$\int_0^c g(x)dx = \int_0^{c-1} g(x)dx + \int_{c-1}^c g(x)dx = c - \tfrac{1}{2} \text{ и } \int_c^6 g(x)dx = \int_c^{c+1} g(x)dx + \int_{c+1}^6 g(x)dx = \tfrac{11}{2} - c ,$$

добиваме $c - \frac{1}{2} = \frac{11}{2} - c$ т.е. $c = 3$. Конечно, $f(3) = f(c) = 0$. ♦

29. Да ја разгледаме функцијата $F:[0,1] \to \mathbf{R}$ определена со $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, која заради непрекинатоста на f е добро дефинирана. Од конкавноста на функцијата f и $f(0) = 1$ следува

$$f(\lambda x) = f((1-\lambda)0 + \lambda x) \ge (1-\lambda) f(0) + \lambda f(x) = 1 - \lambda + \lambda f(x) ,$$

за секој $x \in [0,1]$ и за секој $\lambda \in [0,1]$. Според тоа,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 x f(\lambda x) d\lambda \ge x \int_0^1 (1 - \lambda + \lambda f(x)) d\lambda$$

$$= x(\lambda - \tfrac{\lambda^2}{2}(1 - f(x)) |_0^1 = \tfrac{x}{2}(1 + f(x)),$$

од што следува

$$\int_0^1 x f(x)dx = \int_0^1 x dF(x) = xF(x) |_0^1 - \int_0^1 F(x)dx$$

$$= F(1) - \int_0^1 F(x)dx \le F(1) - \int_0^1 \tfrac{x}{2}(1 + f(x))dx$$

$$= F(1) - \tfrac{1}{2}\int_0^1 x dx - \tfrac{1}{2}\int_0^1 x f(x)dx$$

па затоа

$$\int_0^1 xf(x)dx \le \tfrac{2}{3}(F(1)-\tfrac{1}{4}) = \tfrac{2}{3}(F(1))^2 - \tfrac{2}{3}[(F(1))^2 - F(1)+\tfrac{1}{4}]$$

$$= \tfrac{2}{3}(F(1))^2 - \tfrac{2}{3}[F(1)-\tfrac{1}{2}]^2 \le \tfrac{2}{3}(F(1))^2 = \tfrac{2}{3}[\int_0^1 xf(x)dx]^2,$$

што и требаше да се докаже. ♦

36. Нека $f(x) = px^2 + qx + r,\ p \ne 0$. Постои барем една точка $\xi \in [a,b]$, таква што

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi),$$

каде $b-a \ne 0$. Ако го пресметаме интегралот на десната страна во последното равенство, по скратувањето со заедничкиот множител $b-a \ne 0$ и средувањето на изразот, ја добиваме квадратната равенка по ξ:

$$p\xi^2 + q\xi - (\tfrac{1}{3}p(a^2+ab+b^2) + \tfrac{1}{2}q(a+b)) = 0\,. \qquad (1)$$

Со $F(\xi)$ да ја означиме левата страна на равенката (1), а со D нејзината дискриминанта. Сега постојат две различни реални вредности на ξ кои припаѓаат на интервалот $[a,b]$, ако $D>0,\ a<\frac{\xi_1+\xi_2}{2}<b,\ pF(a)>0$ и $pF(b)>0$, односно

$$q^2 + 4p(\tfrac{1}{3}p(a^2+ab+b^2)+\tfrac{1}{2}q(a+b)) > 0,$$

$$a < -\frac{q}{2p} < b,$$

$$\tfrac{1}{6}p(a-b)(4pa+2bp+3q) > 0,$$

$$\tfrac{1}{6}p(b-a)(2pa+4bp+3q) > 0.\ ♦$$

37. Нека ε е даден реален број таков што $0<\varepsilon<\frac{b-a}{2}$. Бидејќи на интервалот $[a,b]$ функцијата $f(t)$ монотоно расте наоѓаме $\frac{f(b-\varepsilon)}{f(b-2\varepsilon)}>1$, па затоа постои природен број P таков, што за секој $p>P$ важи

$$[\tfrac{f(b-\varepsilon)}{f(b-2\varepsilon)}]^p > \tfrac{b-a}{\varepsilon},$$

односно

$$f^p(b-\varepsilon) > \tfrac{b-a}{\varepsilon} f^p(b-2\varepsilon)\,.$$

Освен тоа,

$$\int_a^b f^p(t)dt > \int_{b-\varepsilon}^b f^p(b-\varepsilon)dt\,,$$

па затоа

$$\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f^p(t)dt > \tfrac{1}{b-a}\int_{b-\varepsilon}^b f^p(b-\varepsilon)dt = \tfrac{\varepsilon}{b-a} f^p(b-\varepsilon) > f^p(b-2\varepsilon)\,.$$

Според тоа, бројот x_p ја задоволува релацијата $f^p(x_p)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f^p(t)dt$ ако и само ако е исполнето неравенството $x_p > b-2\varepsilon$. Значи, постои P таков, што за секој $p>P$ е исполнето неравенството $x_p > b-2\varepsilon$, од каде преминувајќи кон граница кога $p\to\infty$ наоѓаме $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = b$. ♦

38. Нека $\pi=\{x_i\}_{i=0}^n$, $x_i=\frac{iC}{n}$, е поделба на интервалот $[0,C]$. Притоа, имаме $\Delta x_i = x_{i+1}-x_i=\frac{C}{n}$, $i=0,1,...,n-1$. Од конвексноста на функцијата f следува

$$f(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\varphi(\xi_i)}{n})\le\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(\varphi(\xi_i))}{n}$$

за секои $\xi_i\in(x_i,x_{i+1}), i=0,1,...,n-1$, па затоа

$$f(\tfrac{1}{C}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(\xi_i)\tfrac{C}{n})\le\tfrac{1}{C}\sum_{i=0}^{n-1}f(\varphi(\xi_i))\tfrac{C}{n},$$

за секои $\xi_i\in(x_i,x_{i+1}), i=0,1,...,n-1$. Според тоа,

$$\lim_{n\to\infty} f(\tfrac{1}{C}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(\xi_i)\tfrac{C}{n})\le\tfrac{1}{C}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}f(\varphi(\xi_i))\tfrac{C}{n}$$

и бидејќи функцијата f е непрекината, добиваме

$$f(\tfrac{1}{C}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(\xi_i)\tfrac{C}{n})\le\tfrac{1}{C}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}f(\varphi(\xi_i))\tfrac{C}{n},$$

т.е.

$$f(\tfrac{1}{C}\int\limits_0^C\varphi(x)dx)\le\tfrac{1}{C}\int\limits_0^C f(\varphi(x))dx.$$

Забелешка. Тврдењето на задачата е точно и за $C<0$. Доказот е аналоген, со тоа што земаме предвид дека $\frac{1}{C}\int\limits_0^C\varphi(x)dx)=-\frac{1}{C}\int\limits_C^0\varphi(x)dx$. ♦

39. а) Постапете аналогно на решението на задачата 38.

б) Во задачата под а) земете $f(x)=e^x$ и $\varphi(x)=\ln g(x)$ и искористете дека $e^{\ln g(x)}=g(x)$.

в) Во задачата под а) земете $f(x)=e^{-x}$ и $\varphi(x)=\ln g(x)$ и искористете дека $e^{\ln g(x)}=g(x)$. ♦

40. Нека $\pi=\{x_i\}_{i=0}^n$, $x_i=a+\frac{i(b-a)}{n}$ е поделба на интервалот $[a,b]$. Притоа, имаме

$$\Delta x_i = x_{i+1}-x_i=\tfrac{b-a}{n}, i=0,1,...,n-1.$$

Од конвексноста на функцијата φ следува

$$\varphi(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} p(\xi_i) f(\xi_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} p(\xi_i)}) \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} p(\xi_i)\varphi(f(\xi_i))}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} p(\xi_i)},$$

за секои $\xi_i \in (x_i, x_{i+1}),\ \ i = 0,...,n-1$, па затоа

$$\varphi(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} p(\xi_i) f(\xi_i)\frac{b-a}{n}}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} p(\xi_i)\frac{b-a}{n}}) \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} p(\xi_i)\varphi(f(\xi_i))\frac{b-a}{n}}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} p(\xi_i)\frac{b-a}{n}},$$

за секои $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})\ \ i = 0,...,n-1$. Според тоа,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} p(\xi_i) f(\xi_i)\frac{b-a}{n}}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} p(\xi_i)\frac{b-a}{n}}) \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} p(\xi_i)\varphi(f(\xi_i))\frac{b-a}{n}}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} p(\xi_i)\frac{b-a}{n}}$$

и бидејќи конвексна и ограничена функција е непрекината, добиваме

$$\varphi(\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n-1} p(\xi_i) f(\xi_i)\frac{b-a}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n-1} p(\xi_i)\frac{b-a}{n}}) \le \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n-1} p(\xi_i)\varphi(f(\xi_i))\frac{b-a}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n-1} p(\xi_i)\frac{b-a}{n}},$$

што значи дека неравенството (1) е исполнето. ♦

41. Нека $x \in (a,b)$. Од конвексноста на функцијата f следува

$$f(x) = f(\tfrac{b-x}{b-a}a + \tfrac{x-a}{b-a}b) \le \tfrac{b-x}{b-a} f(a) + \tfrac{x-a}{b-a} f(b).$$

Со интеграција на последното равенство добиваме

$$\int_a^b f(x)dx \le f(a)\int_a^b \tfrac{b-x}{b-a}dx + f(b)\int_a^b \tfrac{x-a}{b-a}dx = \tfrac{f(a)}{b-a}\tfrac{(b-a)^2}{2} + \tfrac{f(b)}{b-a}\tfrac{(b-a)^2}{2} = \tfrac{f(a)+f(b)}{2}(b-a),$$

т.е. точно е десното неравенство.

Нека $x \in [0, b-a]$. Од конвексноста на функцијата f имаме

$$f(\tfrac{a+b}{2}) = f(\tfrac{a+x}{2} + \tfrac{b-x}{2}) \le \tfrac{1}{2} f(a+x) + \tfrac{1}{2} f(b-x).$$

Последното равенство го интегрираме на интервалот $[0, b-a]$ и добиваме

$$f(\tfrac{a+b}{2})(b-a) \le \tfrac{1}{2}\int_0^{b-a} f(a+x)dx + \tfrac{1}{2}\int_0^{b-a} f(b-x)dx.$$

За првиот интеграл во неравенството ја воведуваме смената $a + x = t$, а за вториот смената $b - x = z$ и добиваме

$$f(\tfrac{a+b}{2})(b-a) \le \tfrac{1}{2}\int_a^b f(t)dt + \tfrac{1}{2}\int_b^a f(z)d(-z) = \tfrac{1}{2}\int_a^b f(t)dt + \tfrac{1}{2}\int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(x)dx,$$

т.е. точно е и левото неравенство. ♦

42. Од теорема 15.1 следува дека функцијата $F \in \mathbf{C}([a,b])$. Доволно е да докажеме дека

$$F(\tfrac{u+v}{2}) \le \tfrac{F(u)+F(v)}{2}, \text{ за секои } u, v \in (a,b).$$

Нека $a<u<v<b$. Бидејќи f монотоно расте на $[a,b]$ точни се неравенствата $f(t)-f(\frac{u+v}{2})\geq 0$, за секој $t\in[\frac{u+v}{2},v]$ и $f(\frac{u+v}{2})-f(z)\geq 0$, за секој $z\in[u,\frac{u+v}{2}]$. Според тоа,

$$F(u)+F(v)-2F(\tfrac{u+v}{2})=F(v)-F(\tfrac{u+v}{2})-[F(\tfrac{u+v}{2})-F(u)]=\int\limits_{\frac{u+v}{2}}^{v}f(t)dt-\int\limits_{u}^{\frac{u+v}{2}}f(z)dz$$

$$=\int\limits_{\frac{u+v}{2}}^{v}f(t)dt-\tfrac{v-u}{2}f(\tfrac{v+u}{2})+\tfrac{v-u}{2}f(\tfrac{v+u}{2})-\int\limits_{u}^{\frac{u+v}{2}}f(z)dz$$

$$=\int\limits_{\frac{u+v}{2}}^{v}[f(t)-f(\tfrac{v+u}{2})]dt+\int\limits_{u}^{\frac{u+v}{2}}[f(\tfrac{v+u}{2})-f(z)]dz\geq 0$$

што и требаше да докажеме. ♦

43. Имаме $f(x)=f(x)-f(a)=\int\limits_{a}^{x}f'(x)dx$, за секој $x\in[a,b]$. Понатаму, функцијата $|f|$ е непрекината, па затоа постои $x_0\in[a,b]$ таков, што $|f(x_0)|=M$. Сега, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$M^2=|f(x_0)|^2=|\int\limits_{a}^{x_0}f'(x)dx|^2=|\int\limits_{a}^{x_0}f'(x)\cdot 1dx|^2\leq\int\limits_{a}^{x_0}[f'(x)]^2dx\cdot\int\limits_{a}^{x_0}dx$$

$$=(x_0-a)\int\limits_{a}^{x_0}[f'(x)]^2dx\leq(b-a)\int\limits_{a}^{x_0}[f'(x)]^2dx,$$

што и требаше да се докаже. ♦

44. а) Ако $a=-1$, тогаш $F(x)=x[x]-\frac{[x]([x]+1)}{2}$ е примитивна функција на функцијата $f(x)=[x]$. Користејќи ја Њутн-Лајбницовата формула, добиваме

$$\int\limits_{0,5}^{31,5}[x]dx=x[x]-\frac{[x]([x]+1)}{2}\Bigg|_{0,5}^{31,5}=31,5\cdot 31-31\cdot 16=480,5\,.\ ♦$$

б) Функцијата $f(x)=[e^x]$ има прикини во точките $x_n=\ln n, n=2,3,\dots$. Ако $x\in(x_n,x_{n+1})$, тогаш $\int[e^x]=nx+C_n, C_n\in\mathbf{R}, C_n=\text{const}$.

Ако $x\in(x_{n+1},x_{n+2})$, тогаш $\int[e^x]=(n+1)x+C_{n+1}, C_{n+1}\in\mathbf{R}, C_{n+1}=\text{const}$.

Од условот за непрекинатост на примитивната функција на $f(x)=[e^x]$ во точката x_n ја добиваме зависноста меѓу константите C_n и C_{n+1}:

$$C_{n+1}=C_n-\ln(n+1), n\in\mathbf{N},$$

од што добиваме $C_n=C-\ln n!, C=\text{const}$. Според тоа, функцијата

$$F(x)=[e^x]x-\ln([e^x]!)$$

е примитивна за функцијата $f(x)=[e^x]$, на интервалот $[0,+\infty)$. Конечно,

$$\int_0^2 [e^x]dx = [e^x]x - \ln([e^x]!)\,|_0^2 = 14 - \ln 7\,.$$

в) $2\sqrt{2}\pi$. г) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$ ♦

46. а) Имаме $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$. Ако за функцијата $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \in [0,1]$земеме поделба $\pi = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $x_i = \frac{i}{n}$ на интервалот $[0,1]$ и земеме $\xi_i = x_i$, тогаш

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln x\,|_0^1 = \ln 2\,.$$

б) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. ♦

VI ГЛАВА

1. Од $a_n > 0$, за секој $n \in \mathbf{N}$ следува $0 < \frac{a_n}{1+n^2 a_n} < \frac{1}{n^2}$, за секој $n \in \mathbf{N}$ и бидејќи редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ заклучуваме дека разгледуваниот ред конвергира. ♦

2. Да ставиме $A = \{n \mid a_n^{\frac{n}{n+1}} < 2a_n\}$. Ако $n \notin A$, тогаш

$a_n^{\frac{n}{n+1}} \geq 2a_n$,

од што добиваме

$$\frac{1}{2} \geq \frac{a_n}{a_n^{\frac{n}{n+1}}} = a_n^{1-\frac{n}{n+1}} = a_n^{\frac{1}{n+1}} \text{, т.е } \frac{1}{2^n} \geq a_n^{\frac{n}{n+1}}\,.$$

Со B да го означиме збирот на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Бидејќи броевите a_n се позитивни, за да докажеме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{n}{n+1}}$ конвергира, доволно е да докажеме дека низата со општ член $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{k}{k+1}}$ е ограничена. Имаме дека

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{k}{k+1}} = \sum_{\substack{k\notin A\\ k\leq n}} a_k^{\frac{k}{k+1}} + \sum_{\substack{k\in A\\ k\leq n}} a_k^{\frac{k}{k+1}} \leq 2\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{k}{k+1}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} < 2B+1\,,$$

што значи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{n}{n+1}}$ конвергира. ♦

7. Да ставиме

$$s_1 = a_1,\, s_2 = a_2 + a_3,\, s_3 = a_4 + a_5 + a_6 + a_7, \ldots, s_n = \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n - 1} a_k, \ldots$$

Бидејќи $a_i > 0$, за секој $i \ge 1$, добиваме дека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n$. Но,

$$s_n = \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} a_k \le (a_{2^n} + a_{2^n+1}) + \ldots + (a_{2^{n+1}-2} + a_{2^{n+1}-1}) = s_{n+1}$$

што значи

$$0 < a_1 = s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_k \le \ldots ,$$

па затоа

$$\lim_{k\to\infty} s_k \ge a_1 > 0 .$$

Според тоа, редот $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ не е конвергентен, па затоа и редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не е конвергентен. ♦

8. Низата парцијални суми на вториот ред монотоно не опаѓа, па затоа доволно е да докажеме дека таа е ограничена. Од $a_n \ge 0$ имаме

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \le (\sum_{k=1}^{n} a_k)^2 = S_n^2 \le \text{const} ,$$

што значи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ конвергира. ♦

14. Од $\sum_{n=1}^{\infty} | s_n - \sigma_n |^a < \infty$ следува дека $s_n - \sigma_n \to 0$, па затоа доволно е да се докаже дека низата $\{\sigma_n\}$ конвергира. Но,

$$\sigma_n - \sigma_{n-1} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k a_k = \frac{s_n - \sigma_n}{n} . \qquad (1)$$

Ако ги собереме десните и левите страни на (1) за $n = 1, 2, \ldots, N$, наоѓаме

$$\sigma_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{s_n - \sigma_n}{n} . \qquad (2)$$

Ако $a \le 1$, тогаш конвергентноста на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n - \sigma_n|}{n}$ е очигледна.

Ако $a > 1$, тогаш од неравенството на Холдер наоѓаме

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|s_n - \sigma_n|}{n} \le [\sum_{n=1}^{N} | s_n - \sigma_n |^a]^{\frac{1}{a}} [\sum_{n=1}^{N} n^{-b}]^{\frac{1}{b}} \le [\sum_{n=1}^{\infty} | s_n - \sigma_n |^a]^{\frac{1}{a}} [\sum_{n=1}^{\infty} n^{-b}]^{\frac{1}{b}} ,$$

каде $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Бидејќи и двата множитела на десната страна во последното неравенство се конвергентни, добиваме дека низата парцијални суми на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n - \sigma_n|}{n}$ е ограничена, па затоа овој ред конвергира. Според тоа, редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n - \sigma_n}{n}$ конвергира апсолутно, па затоа тој конвергира и обично, што значи дека низата $\{\sigma_n\}$ конвергира. ♦

15. Нека $n-1=\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_k, a_k=0,1$. Тогаш,

$$[\tfrac{n-1}{2^r}+\tfrac{1}{2}]=a_{r-1}+\sum_{m=r}^{\infty} 2^{m-r} a_m \,.$$

Со собирање на десните и левите страни на последното неравенство наоѓаме

$$\sum_{r=1}^{\infty}[\tfrac{n+2^{r-1}-1}{2^r}]=\sum_{m=0}^{\infty} a_m+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{m} 2^{m-r} a_m=\sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_m=n-1 .\blacklozenge$$

16. а) Бидејќи

$$\begin{aligned}S_{6n}-S_{3n}&=\tfrac{1}{3n+1}+\tfrac{1}{3n+2}-\tfrac{1}{3n+3}+\ldots+\tfrac{1}{6n-2}+\tfrac{1}{6n-1}-\tfrac{1}{6n}\\&>\tfrac{1}{3n+1}+\tfrac{1}{3n+4}+\tfrac{1}{3n+7}+\ldots+\tfrac{1}{6n-2}>\tfrac{n}{6n-2}\end{aligned}$$

од општиот Кошиев критериум, следува дека редот дивергира.

б) Докажете дека $S_{2n}-S_n>\frac{1}{4}$, од што, согласно со општиот Кошиев критериум, ќе следува дека редот дивергира. ♦

17. Нека $|a|<1$. Да ги разгледаме низите $a_n=\frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}$ и $b_n=\frac{a^{n-1}}{\ln n}$. Од $na^{n-1}\to 0$, кога $n\to\infty$, следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}|1+\frac{na^{n-1}}{\ln n}|=1$. Но, редот $b_n<|a|^{n-1}$, за $n\geq 3$, па затоа редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира. Сега, од претходното равенство следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира за $|a|<1$.

Ако $|a|\geq 1$, тогаш од $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=1$ следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира. ♦

18. а) Општиот член на редот е $a_n=\frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}>0$. Од

$$\tfrac{a_{n+1}}{a_n}=(\tfrac{3}{2})^n\sqrt{\tfrac{n}{n+1}}\to\infty,\ \text{кога } n\to\infty,$$

според Даламберовиот критериум добиваме дека редот дивергира.

б), в) и **г)** Редовите конвергираат. Искористете го Даламберовиот критериум. ♦

19. а) Општиот член на редот е $a_n=2^{-n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}>0$. Од

$$\sqrt[n]{a_n}=2^{-1}(\tfrac{n+1}{n})^n\to\tfrac{e}{2},\ \text{кога } n\to\infty,$$

според Кошиевиот критериум добиваме дека редот дивергира.

б) Имаме

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\tfrac{n^n}{a^{n^2}}|}=\lim_{n\to\infty}\tfrac{n}{|a|^n}=\begin{cases}0, & |a|>1\\ +\infty, & |a|\leq 1\end{cases},$$

па од Кошиевиот критериум следува дека за $|a|>1$ редот конвергира, а за $|a|\leq 1$ дивергира. ♦

22. Според Кошиевиот критериум, од $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = |a|$ следува дека за $|a| < 1$ редот конвергира, а за $|a| > 1$ дивергира.

За $|a| = 1$ имаме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e} > 0$, што значи дека редот дивергира. ♦

24. Очигледно дека при $b = 0$ редот дивергира. Нека $b \neq 0$. Тогаш, $|b| \ln n \to \infty$ кога $n \to \infty$ при што

$$|b| \ln(n+1) - |b| \ln n = |b| \ln(1 + \tfrac{1}{n}) < \tfrac{|b|}{n} \tag{1}$$

и разликата на левата страна на (1) тежи кон 0 монотоно. За секој природен број p избираме q и M така што да се исполнети неравенствата

$$|b| \ln(q-1) \leq (p - \tfrac{1}{3})\pi < |b| \ln q < |b| \ln(q+M) < (p + \tfrac{1}{3})\pi\,. \tag{2}$$

Тогаш, при $q \leq n \leq q+M$ функцијата $\cos(b \ln n)$ не го менува знакот, а $|\cos(b \ln n)| > \frac{1}{2}$. Според тоа, збирот на соодветните $M+1$ последователни членови на дадениот ред по апсолутна вредност не е помала од

$$\frac{1}{2} \sum_{n=q}^{q+M} n^{-a} > \frac{1}{2} \int\limits_{q}^{q+M} x^{-a} dx = \frac{q^{1-a}}{2} \int\limits_{1}^{1+\frac{M}{q}} \frac{dt}{t}\,. \tag{3}$$

Од (1) и (2) следува дека за M може да се земе $\frac{2\pi}{3}(q-1) - 3$, па затоа $\frac{M}{q} \to \frac{2\pi}{3}$ кога $q \to \infty$, што значи дека десната страна во (3) има граница различна од 0 кога $q \to \infty$. Сега, ако земеме дека кога $p \to \infty$, тогаш и $q \to \infty$, добиваме дека почетниот ред не го задоволува Кошиевиот критериум, што значи дека тој дивергира. ♦

26. а) Имаме,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{8k^3(\sqrt{2}+1)^{2k}}{3^{2k}}} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1\,,$$

што според обопштениот критериум на Коши значи дека разгледуваниот ред конвергира.

б) Докажете дека $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{(\frac{1+\cos n}{2+\cos n})^{2n-\ln n}} \leq \frac{4}{9}$, од што според обопштениот критериум на Коши ќе следува дека редот конвергира. ♦

27. Упатство. а) Искористете го критериумот на Гаус и докажете дека за $p > 2$ редот конвергира, а за $p \leq 2$ дивергира.

б) Искористете го критериумот на Гаус и докажете дека редот конвергира за $a(q-p) > 1$. ♦

28. Упатство. Искористете го признакот на Рабе и докажете дека:

а) редот конвергира за $p > \frac{3}{2}$, б) редот конвергира за $q > p$,

в) редот конвергира за $\frac{p}{2} + q > 1$. ♦

29. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{x+1}{x-1}$, $x\geq 2$. Лесно се гледа дека оваа функција е позитивна и дека монотоно опаѓа за $x\geq 2$. Прво со парцијална интеграција, а потоа со смената $\sqrt{x}=t$ наоѓаме

$$\lim_{t\to\infty}\int_2^t \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{x+1}{x-1}dx=\lim_{t\to\infty}(2\sqrt{t}\ln\frac{t+1}{t-1}+2\ln\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}+4\text{arctg}\sqrt{t}-2\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-4\text{arctg}\sqrt{2}-2\sqrt{2}\ln 3)$$

$$=2(\pi-\ln(3-2\sqrt{2})-\sqrt{2}\ln 3-2\text{arctg}\sqrt{2}),$$

што, според Кошиевиот интегрален критериум, значи дека разгледуваниот ред е конвергентен. ♦

31. Одговор. а) конвергира, **б)** дивергира.

32. а) Да земеме $a_n=\int\limits_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}dx$. Тогаш, парцијалната сума на редот е

$$S_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_k^{k+1} e^{-\sqrt{x}}dx=\int\limits_1^n e^{-\sqrt{x}}dx=-2(\sqrt{n}+1)e^{-\sqrt{n}}+\frac{4}{e}.$$

Сега, од

$$\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=\lim_{n\to\infty}[-2(\sqrt{n}+1)e^{-\sqrt{n}}+\frac{4}{e}]=\frac{4}{e}$$

следува дека разгледуваниот ред е конвергентен и неговата сума е $\frac{4}{e}$.

б) Земаме $a_n=\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin^3 x}{1+x}dx$. Од неравенствата $0<\frac{\sin^3 x}{1+x}<\sin^3 x<x^3$, за $x\neq 0,\pi$ следува дека

$$0<a_n=\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin^3 x}{1+x}dx<\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}}\sin^3 xdx<\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}}x^3dx=\frac{\pi^4}{4n^4}$$

и бидејќи редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^4}{4n^4}$ е конвергентен, заклучуваме дека и разгледуваниот ред е конвергентен.

в) Редот е конвергентен . ♦

33. Одговори. а) дивергира,

б) конвергира,

в) конвергира,

г) апсолутно конвергира,

д) апсолутно конвергира за $|x-k\pi|<\frac{\pi}{4}$, условно конвергира за $x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$,

ѓ) условно конвергира.

45. Да го разбиеме модифицираниот хармониски ред на делови кои содржат членови со ист знак. Нека u_i е збирот на i – от дел. Да го разгледаме редот

$$u_1-u_2+u_3-\ldots \qquad (1)$$

Лесно се гледа дека

$$u_n = \frac{2}{n^2-n+2}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)}, \quad u_{n+1} = \frac{2}{n^2+n+2}+\ldots+\frac{2}{n(n+3)}+\frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Според тоа, $0 < u_n < \frac{2n}{n^2-n+2}$ што значи дека $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Освен тоа,

$$u_n - u_{n+1} > n[\frac{2}{n(n+1)} - \frac{2}{n(n+3)}] - \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+2)(n+3)} > 0.$$

Од претходно изнесеното, согласно критериумот на Лајбниц заклучуваме дека редот (1) конвергира.

Ќе докажеме дека од конвергентноста на редот (1) следува конвергентноста на модифицираниот хармониски ред. Нека S_p е произволна парцијална сума на овој ред. Тогаш, при погодно избран n имаме $S_p = U_n + r_n$, каде U_n е $n-$та парцијална сума на редот (1) и $|r_n| < u_{n+1}$. Ако $p \to \infty$, тогаш $n \to \infty$ и U_n тежи кон збирот на редот (1), а $u_{n+1} \to 0$, кога $n \to \infty$. Значи, S_p конвергира кон некоја граница, т.е. модифицираниот хармониски ред конвергира. ♦

53. Лесно се гледа дека дадените редови се дивергентни. Ако се искористи правилото за множење на редови, при

$$a_1 = 1,\ a_n = -(\tfrac{3}{2})^n,\ b_1 = 1 \text{ и } b_n = (\tfrac{3}{2})^{n-1}(2^n + \tfrac{1}{2^{n+1}}), \text{ за } n > 1,$$

за производот на дадените редови добиваме

$$\begin{aligned} c_n &= a_1 b_n + a_n b_1 + \sum_{k=2}^{n-1} a_k b_{n-k+1} \\ &= (\tfrac{3}{2})^{n-2}(2^{n-1} + \tfrac{1}{2^n}) - (\tfrac{3}{2})^{n-1} - 4\cdot 3^{n-2}\sum_{k=2}^{n-1}\tfrac{1}{2^k} - \tfrac{3^{n-2}}{2^{2n-1}}\sum_{k=2}^{n-1} 2^k = (\tfrac{3}{4})^{n-1}, \end{aligned}$$

па затоа

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{3}{4})^{n-1} = 4. \ ♦$$

55. За $|k| < 1$ имаме

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{1}{1-k},\ \sum_{n=1}^{\infty} k^n = \frac{k}{1-k},\ \sum_{n=2}^{\infty} k^n = \frac{k^2}{1-k}, \ldots, \sum_{n=m}^{\infty} k^n = \frac{k^m}{1-k}, \ldots \qquad (1)$$

Аналогните равенства важат и ако на местото на k земеме $|k|$. Збирот на десните страни на овие равенства за $|k|$ претставуваат конвергентен ред, па од теорема 9.15 следува дека двојниот ред формиран со дијагонално поместување на елементите на обичните редови во (1) конвергира и од теорема 9.17 следува дека неговата сума е еднаква на сумата на повторниот ред, од што следува дека

$$\sum_{p=1}^{\infty} pk^{p-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty} k^m = \frac{1}{1-k}\sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1} = \frac{1}{(1-k)^2}. \ ♦$$

56. Упатство. Преминете кон повторни редови, почнувајќи со сумирање по m и искористете дека

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots = \ln 2 \text{ и } 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots = \tfrac{\pi}{4}. \ ♦$$

57. а) Од конвергенцијата на производите $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ не следува конвергенцијата на производот $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ бидејќи од $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ добиваме $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 2$, што противречи на теорема 11.5.

б) Од теорема 11.4 следува дека редовите $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln b_n$ конвергираат, па затоа и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n b_n$ конвергира. Сега повторно од теоремата 11.4 следува дека производот $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)$ конвергира.

в) Постапете аналогно како во доказот под б). ♦

58. Да земеме $I_m = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$. Од $0 < \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$, за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $n = 1, 2, ...$ следува $0 < I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$, па затоа ако ја искористиме рекурентната формула $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $n = 1, 2, ...$ чиј доказ го оставаме на читателот за вежба, наоѓаме $1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$, $n = 1, 2, ...$ Според тоа, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$. Сега, од $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ имаме $I_{2n} = \frac{\pi}{2} \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$ и $I_{2n+1} = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$. Од последните две равенства и од равенството $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$ следува $\frac{\pi}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \frac{2k+1}{2k} = 1$, т.е. формулата $\frac{\pi}{2} \prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2k} \frac{2k+1}{2k} = 1$, која е еквивалентна на формулата на Валис.

Од $\frac{\pi}{2} \prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2k} \frac{2k+1}{2k} = 1$ добиваме $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{2k})(1 + \frac{1}{2k}) = \frac{2}{\pi}$, т.е. формулата

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{4n^2}) = \frac{2}{\pi}.$$

Аналогно се добива и формулата $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{(2n+1)^2}) = \frac{\pi}{4}$ чиј доказ го оставаме на читателот за вежба. ♦

59. Одговор. а) $\frac{\sin x}{x}$, за $x \neq 0$ и 1 за $x = 0$. **б)** 2,

в) $\frac{1}{4}$ и **г)** 2.

VII ГЛАВА

3. Од дефиницијата на цел дел следува дека $[nf(x)] = nf(x) - a_n(x)$, каде $0 \le a_n(x) < 1$, па затоа $f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n} = f(x) - \frac{a_n(x)}{n}$. Од последното равенство следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ и

$$| f_n(x) - f(x) | = \frac{a_n(x)}{n} < \frac{1}{n} \to 0 \text{, кога } n \to \infty \text{,}$$

па затоа низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон функцијата $f(x)$. ♦

5. Лесно се гледа дека $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, за секој $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Од друга страна

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx = -n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x d(\cos x) = \frac{n^2}{2n+1} \to \infty \text{, кога } n \to \infty$$

и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \cdot dx = 0 \text{,}$$

што значи дека низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не конвергира рамномерно на интервалот $[0, \frac{\pi}{2}]$ кон функцијата $f(x) = 0$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. ♦

9. Да ја разгледаме функционалната низа $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определена со $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, која конвергира кон граничната функција $f(x) = 0$ на интервалот $[0,1]$, но конвергенцијата не е рамномерна (пример 2.3 а)). Меѓутоа,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{d(1+n^2t^2)}{1+n^2t^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt \text{ . ♦}$$

12. а) Од $\left| \frac{\sin x^n + 1}{n^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}} \right| \le \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$, согласно со критериумот на Ваерштрас, следува дека редот рамномерно конвергира.

б) Ако искористиме дека за доволно големи броеви n важи $e^{-\sqrt{2n}} < \frac{1}{n^2}$, добиваме дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{2n}}$ конвергира. Понатаму, од $| e^{-\sqrt{2n(x^2+1)}} | \le e^{-\sqrt{2n}}$, согласно со критериумот на Ваерштрас, следува дека дадениот ред рамномерно конвергира.

в) Од неравенството $| \text{arctg} x | \le | x |$ добиваме $\left| \text{arctg} \frac{x}{x^2+n^3} \right| \le \frac{|x|}{x^2+n^3}$. Понатаму, да ја разгледаме функцијата $f(x) = \frac{x}{x^2+n^3}$, $x > 0$. Лесно се гледа дека $f_{\max} = f(\sqrt{n^3}) = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$, па затоа $\left| \sum\limits_{n=1}^{\infty} \text{arctg} \frac{x}{x^2+n^3} \right| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ што, според критериумот на Ваерштрас, значи дека редот рамномерно конвергира.

г) Дадениот ред рамномерно конвергира. ♦

13. а) Парцијалните суми на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin x \sin nx$ се рамномерно ограничени, бидејќи

$$\sum_{n=1}^{n} \sin x \sin kx = 2\cos\tfrac{x}{2}\sin\tfrac{(n+1)x}{2}\sin\tfrac{nx}{2} \leq 2 \,.$$

Понатаму, низата функции $f_n(x) = x^n(1-x)$ рамномерно конвергира кон $f(x) = 0$ на $[0,1]$. Сега, од критериумот на Дирихле следува дека разгледуваниот ред рамномерно конвергира на $[0,1]$.

б) и в) Редовите се рамномерно конвергентни на разгледуваните интервали, соодветно. Искористете го критериумот на Дирихле. ♦

14. а) Редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ е конвергентен, а низата функции $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ е рамномерно ограничена со бројот 1 и при секој фиксиран $x \in (0,1]$ формира монотона низа. Сега, согласно со критериумот на Абел, разгледуваниот ред рамномерно конвергира.

б) Редот рамномерно конвергира. Применете го критериумот на Абел. ♦

17. Ако конвергентноста е рамномерна, тогаш од непрекинатоста на функциите $x^n - x^{2n}$ ќе следува непрекинатоста на збирот

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x^2}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases},$$

што не е точно бидејќи $\lim\limits_{x\to 1} S(x) = \infty$. ♦

22. Бидејќи редот $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$, $0 < a < 1$ конвергира, согласно со критериумот на Ваерштрас, редот $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx$ рамномерно конвергира на интервалот $[0,2\pi]$, па затоа тој може почлено да се интегрира. Според тоа,

$$\int_0^{2\pi} S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \int_0^{2\pi} \cos nx dx = 2\pi \text{ . ♦}$$

23. Функцијата $f(x)$ може да се запише во облик на ред

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^1 \frac{u^n - 1}{u-1} du \,,$$

затоа што $s_n = f^{(n)}(0)$. Бидејќи се исполнети доволните услови кои дозволуваат промена на редот на интегрирањето и сумирањето, добиваме

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^1 \frac{u^n - 1}{u-1} du = \int_0^1 \frac{1}{u-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ux)^n - x^n}{n!} du = \int_0^1 \frac{e^{ux} - e^x}{u-1} du = e^x \int_0^1 \frac{1 - e^{(u-1)x}}{1-u} du$$

$$= e^x \int_0^1 \frac{1 - e^{-vx}}{v} dv = e^x \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt$$

што и требаше да се определи. ♦

24. Овој ред е конвергентен за секој x бидејќи може да се мајорира со редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n^2}{3^n}$ кој, согласно со критериумот на Даламбер, е конвергентен. Редот од изводите на членовите на дадениот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n^3 \cos x}{3^n+1}$, согласно со критериумот на Ваерштрас, е рамномерно конвергентен, бидејќи може да се мајорира со конвергентниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n^3}{3^n}$ (критериум на Даламбер).

Според тоа, дадениот ред може почлено да се диференцира на интервалот $(-\infty,+\infty)$. ♦

29. а) Од критериумот на Даламбер следува дека разгледуваниот ред е конвергентен за секој x. Навистина,

$$\frac{\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{x^{2n}}{(2n)!}}=\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}\to 0,\, n\to\infty\,.$$

б) Имаме,

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\sqrt[3]{\frac{2n+3}{2n+1}}=1\,,$$

што значи дека редот конвергира за $|\,x-1\,|<1$, т.е. за $0<x<2$. За $x=0$ се добива алтернативен ред, кој е конвергентен, а за $x=2$ се добива редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{2n+1}}$, бидејќи може да се мајорира со редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2}n^{\frac{4}{3}}}$. Значи редот конвергира за $x\in[0,2]$.

в) Од

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\sqrt{\frac{n^2+3n+3}{n^2+n+1}}\cdot 3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{n^2+3n+3}{n^2+n+1}}\cdot 3^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}\to 1,\, n\to\infty$$

следува $R=1$, па затоа редот конвергира за $|\,x+1\,|<1$ т.е. за $-2<x<0$. Во крајните точки редот конвергира апсолутно, бидејќи општиот член е помал од $\frac{3^{-\sqrt{n}}}{n}$ кој за доволно големо n може да се мајорира со $\frac{1}{n^2}$.

г) Согласно со критериумот на Коши-Адамар, од

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|\,a_k\,|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\frac{1}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}=1$$

добиваме дека $R=1$ и разгледуваниот ред конвергира за $|\,x+2\,|<1$, т.е. за $-3<x<-1$. Лесно се гледа дека редот конвергира во крајните точки, па затоа тој конвергира за $x\in[-3,-1]$.

д) $R=\frac{1}{5}$ и редот конвергира за $x\in[-\frac{1}{5},\frac{1}{5})$. ♦

33. Прво ќе ја докажеме диференцијабилноста на функцијата $f(x)$. Редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin(2^n x+\frac{\pi}{2})}{n!}$ составен од првите изводи на члeновите на дадениот ред е рамномерно конвергентен во $\mathbf{R}$, бидејќи може да се мајорира со редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ кој, согласно критериумот на Даламбер, е конвергентен. Според тоа, $f\,'(x)$ постои и

$$f\,'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin(2^n x+\frac{\pi}{2})}{n!}.$$

Аналогно се докажува дека

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{nk} \sin(2^n x+\frac{k\pi}{2})}{n!}.$$

За $x = 0$ имаме

$$f(0) = f\,''(0) = \ldots = f^{(2k)}(0) = \ldots = 0 \text{ и } f^{(2k+1)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{(2k+1)n}}{n!} = (-1)^k [e^{2^{2k+1}} - 1]$$

Тогаш, Маклореновиот ред на функцијата е:

$$(e^2 - 1)x - \frac{e^{2^3} - 1}{2!} x^3 + \ldots + (-1)^k \frac{e^{2^{2k+1}} - 1}{k!} x^{2k+1} + \ldots$$

и тој, согласно со критериумот на Даламбер, е дивергентен за секој $x \neq 0$. ♦

34. а) Имаме,

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2}[1-1+\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \ldots + (-1)^2 \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}.$$

б) Функцијата ќе ја запишеме во обликот $\ln(1+x) + \ln(1+2x)$. Од Маклореновите развои

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, -1 < x \le 1 \text{ и } \ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n} x^n, -\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}$$

со собирање добиваме дека

$$f(x) = \ln(1+2x)(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(1+2^n)}{n} x^n, -\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}. \ ♦$$

35. а) Ставаме $t = x-1$. Тогаш, функцијата $f(x)$ го добива обликот

$$f(x) = \frac{1}{(x^2-2x+1+2)^2} = \frac{1}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{4}(\frac{t^2}{2}+1)^{-2}.$$

Според тоа, за $\alpha = -2$ имаме

$$f(x) = \frac{1}{4}[1+\sum_{n=1}^{\infty} \binom{-2}{n}(\frac{t^2}{2})^n] = \frac{1}{4}[1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)(x-1)^{2n}}{2^n}]$$

и овој ред конвергира за $|x-1| < \sqrt{2}$. За $|x-1| = \sqrt{2}$ се добива дивергентен ред (општиот член не тежи кон 0). ♦

36. а) Функцијата ја разложуваме на елементарни дропки и добиваме:

$$f(x) = \frac{1}{4}(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}) = \frac{1}{4}(\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{x}{3}} - \frac{1}{1-x}) = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} [\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} + 1]x^n.$$

Првиот развој е точен за $\frac{|x|}{3} < 1$, а вториот е точен за $| x |< 1$, па затоа добиениот развој е точен за $| x |< 1$. Ако $| x |= 1$, тогаш редот е дивергентен бидејќи општиот член не тежи кон нула.

б) Имаме $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x)\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{3n}$ итн. ♦

37. Нека $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ во некоја околина на точката 0. Имаме

$$1 - x + x^2 = (1 + x + x^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ,$$

што значи

$$\begin{aligned} 1 - x + x^2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n \quad + \ldots \\ + a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^n + \ldots \\ + a_0 x^2 + a_1 x^3 + \ldots + a_{n-2} x^n + \ldots \end{aligned}$$

Ако ги изедначиме коефициентите пред еднаквите степени во последното равенство, добиваме

$$a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = 2, a_3 = 0, a_4 = -2, a_5 = 2, a_6 = 0, a_7 = -2 \text{ итн.}$$

Според тоа, бараниот развој е

$$\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2} = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^4 + 2x^5 - 2x^7 + \ldots$$

и овој ред конвергира на интервалот $(-1,1)$, (проверете!). ♦

38. Ја користиме формулата $f(x+a) = f(a) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n$. Ќе ја развиеме функцијата $e^{(x+a)^2}$ во околина на точката a. Имаме,

$$\begin{aligned} e^{(x+a)^2} &= e^{a^2} e^{2xa^2} e^{x^2} = e^{a^2} [\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2a)^n x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}] \\ &= e^{a^2} [\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[1+(-1)^n]x^n}{2[\frac{n}{2}]!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n a^n x^n}{n!}] = e^{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \end{aligned}$$

каде

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{[1+(-1)^k]2^{n-k} a^{n-k}}{2[\frac{k}{2}]!(n-k)!} .$$

Од единственоста на развојот имаме

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = e^{a^2} c_n = e^{a^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{[1+(-1)^k]2^{n-k} a^{n-k}}{2[\frac{k}{2}]!(n-k)!} ,$$

од што следува $f^{(n)}(a) = e^{a^2} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{[1+(-1)^k]2^{n-k} a^{n-k} n!}{2[\frac{k}{2}]!(n-k)!}$. ♦

39. а) Го наоѓаме вториот степен на редот $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ и добиваме

$$\ln^2(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n x^n\ ,$$

каде $c_n=\frac{2}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})$. Понатаму, од

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

добиваме

$$f^{(n)}(0)=n!c_n=2(n-1)!(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})\ .$$

б) $f^{(2n+1)}(0)=0$ и $f^{(2n)}(0)=2^{2n-1}[(n-1)!]^2$. ♦

40. а) Го диференцираме редот во неговиот интервал на конвергентност $(-1,1]$. Добиваме

$$f\,'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\frac{1}{1+x^3}\ .$$

Тогаш,

$$f(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^3}=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\ ,$$

од каде за $x=0$ наоѓаме $C=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

б) Ако дадениот ред го интегрираме член по член, добиваме

$$\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}\ .$$

Нека $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}$. Тогаш,

$$\int_0^x g(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}=\frac{x^2}{1-x}\ .$$

Сега, $g(x)=\frac{1}{(1-x)^2}-1$, па затоа $f(x)=g\,'(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$, за $|\,x\,|<1$.

в) Со почлено диференцирање на равенството

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\text{, за }|\,x\,|<1$$

наоѓаме

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\ ,$$

па затоа

$$\sum_{n=0}^{\infty}2nx^n=\frac{2x}{(1-x)^2}\ .$$

Оттука,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{x+1}{(1-x)^2}\text{, за }|\,x\,|<1\ .$$

г) Ја разгледуваме функцијата

$$xf(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Со почлено диференцирање добиваме

$$[xf(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2},$$

од каде што наоѓаме $xf(x)=\mathrm{arctg}x+C$. Ставаме $x=0$ и добиваме $C=1$. Затоа,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\mathrm{arctg}x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}.\ \blacklozenge$$

44. а) Општиот член на низата да го означиме со a_n. Разложувајќи го a_n на елементарни дропки, наоѓаме

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$=-\ln(1+1)+2\mathrm{arctg}1=-\ln 2+\frac{\pi}{2}.\ \blacklozenge$$

45. Нека во записот на природниот број n во систем со основа 3 има $k+1$ цифра, т.е. $3^k\leq n<3^{k+1}$. Ќе го определиме бројот на сите такви n, за кои $a(n)=i,\ 0\leq i\leq k$. Јасно е, дека ако $n=\overline{a_0a_1...a_k}_{(3)}$, тогаш $a_0\neq 0$ па затоа нулите во записот на n можат да се поставаат на местата $1,2,...,k$ кои ги има точно k. Според тоа, распоредот на i нули може да се избере на $\binom{k}{i}$ начини и откако тие ќе бидат избрани, на останатите $k+1-i$ може да се постави секоја од цифрите 1 и 2. Значи бројот на оние броеви n, за кои $3^k\leq n<3^{k+1}$ и $a(n)=i$, е еднаков на $\binom{k}{i}\cdot 2^{k+1-i}$. Тогаш,

$$\sum_{n=3^k}^{3^k-1}x^{a(n)}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}2^{k+1-i}x^i=2(x+2)^k,$$

па затоа

$$\frac{2(x+2)^k}{3^{3k+3}}<\sum_{n=3^k}^{3^{k+1}-1}\frac{x^{a(n)}}{n^3}<\frac{2(x+2)^k}{3^{3k}}.$$

Оттука добиваме

$$\frac{2}{27}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{x+2}{27}\right)^k<\sum_{n=1}^{3^{m+1}-1}\frac{x^{a(n)}}{n^3}<2\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{x+2}{27}\right)^k,$$

што значи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{a(n)}}{n^3}$ конвергира ако и само ако $x>0$ и $\frac{x+2}{27}<1$, т.е. $0<x<25$. ♦

46. Нека $a_n=\frac{1}{n\sin\frac{1}{n}}-1$. Ако искористиме дека $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, добиваме дека

$$n\sin\frac{1}{n}=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+\frac{1}{120n^5}-...\right)=1-\frac{1}{6n^2}+\frac{1}{120n^4}-...,$$

па затоа

$$a_n = \frac{1}{n\sin\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{6n^2}+\frac{1}{120n^4}-\dots} - 1 = 1 + \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{n^2}g(n) - 1 = \frac{1}{n^2}(\frac{1}{6}+g(n)) ,$$

каде $g(n) \to 0$ кога $n \to \infty$. Избираме ε таков, што $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$. Тогаш, постои природен број N таков, што за секој природен број $n > N$ важи $-\varepsilon < g(n) < \varepsilon$, т.е.

$$\frac{1}{n^2}(\frac{1}{6}-\varepsilon) < a_n < \frac{1}{n^2}(\frac{1}{6}+\varepsilon) ,$$

односно $\frac{c}{n^2} < a_n < \frac{d}{n^2}$, каде c и d се реални броеви. Од последното неравенство следува дека за $x > \frac{1}{2}$ редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^x$ конвергира, бидејќи може да се мајорира (од определено место па натаму) од конвергентниот ред $d\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2x}}$. Јасно, за $0 < x \le \frac{1}{2}$ овој ред дивергира, бидејќи го мајорира (од определено место па натаму) дивергентниот ред $c\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2x}}$. Очигледно, за $x \le 0$ редот дивергира. ♦

47. Имаме,

$$x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} = x(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{2^n n!}) = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}(\frac{-x^2}{2})^n = xe^{\frac{-x^2}{2}}$$

и

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(2n)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2^n n!)^2} .$$

Тогаш интегралот е еднаков на

$$I = \int_0^{\infty} xe^{\frac{-x^2}{2}}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2^n n!)^2})dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2^n n!)^2}\int_0^{\infty} x^{2n+1}e^{\frac{-x^2}{2}}dx .$$

Сега, со парцијална интеграција наоѓаме дека

$$J_n = \int_0^{\infty} x^{2n+1}e^{\frac{-x^2}{2}}dx = 2nJ_{n-1} ,$$

па затоа

$$J_n = 2nJ_{n-1} = 2n(2n-2)J_{n-2} = \dots = 2n(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2J_0$$

и бидејќи

$$J_0 = \int_0^{\infty} xe^{\frac{-x^2}{2}}dx = -e^{\frac{-x^2}{2}}\Big|_0^{\infty} = 1$$

наоѓаме $J_n = 2n(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2 = 2^n n!$. Конечно,

$$I = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!} = \sqrt{e} .$$ ♦

ЛИТЕРАТУРА

1. **Adams, M.; Guillemin, V.:** *Measure Theory and Probability,* Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1996
2. **Adnadjević, S., Kadelburg, Z.:** *Matematička analiza* I, II, Nauka, Beograd, 1993
3. **Aljančić, S.:** *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu,* Građevinska knjiga, Beograd, 1968
4. **Anderson, J. A.; Lewis, J.; Saylor, O. D.:** *Discrete Mathematics with Combinatorics,* Pearson Education, Inc., 2004
5. **Apostol, T. M.:** *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974
6. **Axler, S.:** *Linear Algebra Done Right*, Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1999
7. **Beals, R.:** *Advanced Mathematical Analysis,* Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1973
8. **Beauzamy, B.:** *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford-Tokyo, 1988
9. **Berge, C.:** *Principles of Combinatorics*, Academic Press, New York, 1971
10. **Birkhoff, G.; Mac Lane, S.:** *A Survey of Modern Algebra*, Macmillan Co., New York, 1953
11. **Burrill, C. W.:** *Foundations of Real Numbers*, Mc Graw-Hill, New York, 1967
12. **Čerin, Z.:** *Metrički prostori,* PMF-Matematički oddel, Sveučilišta u Zagrebu, 2005
13. **Chakrabarti, A.:** *Elements of Ordinary Differential Equations and Special Functions*, New Age International Limited, New Delhi, 1996
14. **Cohen, L. W.; Ehrlich, G.:** *The Structure of the Real Number Sustem*, Van Nostrand, Princeton, N. J. 1963
15. **Cohen, P. J.:** *Set Theory and the Continuum Hypothesis,* W. A. Benjamin, Inc., New York, 1966
16. **Conway, J. B.:** *A Course in Functional Analysis*, Springer - Verlag, New York - Berlin – Heidelberg - Tokyo, 1985
17. **Conway, J. B.:** *Function of One Complex Variable*, Springer - Verlag, New York - Berlin - Heidelberg - Tokyo, 1991
18. **Conway, J. B.:** *Subnormal Operators*, Pitnam Advanced Publishing Program, Boston - London - Melbourne, 1981
19. **Conway, J. B.:** *The Theory of Subnormal Operators*, American Mathematical Society, Newe York, 1991
20. **De Souza, P. N.; Silva, J. N.:** *Berkeley Problems in Mathematics,* Springer, 1998
21. **Devide, V.:** *Zadaci iz apstraktne algebre*, Naučna knjiga, Beograd, 1968
22. **Dunkel, O.:** *Избранные задачи из журнала American mahematical monthly,* Мир, Москва, 1977
23. **Engelking, R.:** *General Topology*, Polish Sci. Publ., Warszawa, 1977
24. **Ferrar, W. L.:** *Finite matrices,* Oxford, 1960
25. **Fischer, G.:** *Lineare Algebra*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbade, 2005
26. **Foster, O.:** *Analysis* 1, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbade, 1976
27. **Foster, O.:** *Analysis* 3, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbade, 1981
28. **Franklin, J. N.:** *Matrix Theory,* Prentice-Hall, New Jersey, 1968
29. **Friedman, A.:** *Foundations of Modern Analysis*, Dover Publications, Inc. New York, 1970
30. **Friedrichs, K. O.:** *Spectral Theory of Operators in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag, New York - Berlin -Heidelberg-Tokyo, 1985
31. **Gilbert, J.; Gilbert, L.:** *Elements of Modern Algebra,* PWS, Boston, 1995
32. **Greub, W. H.:** *Linear Algebra,* Springer-Verlag, New York, 1967
33. **Halmos, P. R.:** *A Hilbert Space Problem Book,* D. Van Nostram Company, Princeton-New Jersey-Toronto-London, 1967

34. **Halmos, P. R.:** *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, Toronto, London, New York, 1956
35. **Halmos, P. R.:** *Naive Set Theory,* Van Nostrand, Princeton, N. J., 1960
36. **Halmos, P. R.; Sunder, V. S.:** *Bounded Integral Operators on L^2 Spaces,* Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1978
37. **Hu, S. T.:** *Elements of Real Analysis*, Holden Day, San Francisco, 1967
38. **Hu, S. T.:** *Introduction to General Topology,* Holden Day, San Francisco, 1966
39. **Istrăţescu, V. I.:** *Strict Convexity and Complex Strict Convexity,* Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1984
40. **Jain, P. K.; Ahuja, O. P.; Khali, A.:** *Functional Analysis,* New Age International Limited, New Delhi, 1995
41. **Jänich, K.:** *Topologie*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2005
42. **Jonson, L. W.; Riess, R. D.; Arnold, J. T.:** *Introduction to Linear Algebra,* Addison-Wesley, New York, 1989
43. **Kato, T.:** *Perturbation theory for linear operators,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966
44. **Knopp, K.:** *Theory and Apllication of Infinite Series*, Blackie and Son, London, 1951
45. **Kuiper, N. H.:** *Linear Algebra and Geometry,* North-Holand, Amsterdam, 1965
46. **Kuratowski, K.; Mostowski, A.:** *Set theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967
47. **Kurepa, Đ.:** *Viša algebra*, I, II, Školska knjiga, Zagreb, 1965
48. **Kurepa, S.:** *Funkcionalna analiza,* Školska knjiga, Zagreb, 1981
49. **Kurepa, S.:** *Konačnodimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967
50. **Kurepa, S.:** *Matematička analiza* 1, 2, 3, Tehnička knjiga, Zagreb, 1981, 1979, 1975
51. **Kurepa, S.:** *Uvod u linearnu algebra,* Školska knjiga, Zagreb, 1975
52. **Kurepa, S.:** *Uvod u matematiku – Skupovi, strukture i brojevi,* Tehnička knjiga, Zagreb, 1969
53. **Lang, S.:** *Analysis,* I, II, Addison-Wesley, Reading, Massachussetts, 1968, 1969
54. **Lang, S.:** *Linear Algebra*, Springer Verlag, 1987
55. **Limaye, B. V.:** *Functional Analysis*, New Age International Limited, New Delhi, 1996
56. **Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L.:** *Classical Banach Spaces* I *and* II, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977
57. **Lipschutz, S.:** *General Topology*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965
58. **Lipschutz, S.:** *Theory and Problems of Linear Algebra,* McGraw-Hill Book Company, 1968
59. **Maddox, I. J.:** *Elements of Functional Analysis,* Cambridge at the University press, 1970
60. **Malik, S. C.:** *Principles of Real Analysis*, New Age International Limited, New Delhi, 1982
61. **Marcus, M.; Minc, H.:** *Introduction to Linear Algebra*, Macmillan, London, 1965
62. **Mardešić, S.:** *Matematička analiza u n-dimenzionalnom relanom prostoru*, I, 1991, II, 1989, Školska knjiga, Zagreb
63. **Marjanović, M.:** *Matematička analiza* I, Naučna knjiga, Beograd, 1983
64. **Marjanović, M.:** *Metrički prostori, Stiltejsov i Lebesguevov integral,* Naučna knjiga, Beograd, 1968
65. **Maron, I. A.:** *Problems in Calculus of One Variable*, Mir, Moscow, 1988
66. **Marshall, H. Jr.:** *The Theory of Groups*, Chelsea Publishing Company, 1976
67. **Mendelson, B.:** *Introduction to Topology*, Dover Publications, New York, 1990
68. **Mendelson, E.:** *Introduction to Mathematical Logic,* Van Nostrand, Princeton, N. J., 1964
69. **Mircea, M.; Putinar, M.:** *Lectures on Hyponormal Operators*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1989
70. **Mitrinović, D. S.; Đoković, D. Ž.:** *Polinomi i matrice,* Naučna kniga, Beograd, 1991

71. **Nipp, K.; Stoffer, D.:** *Lineare Algebra*, ETH, Zürich, 1994
72. **Niven, I.; Zuckerman, H. S.:** *An introduction to the Theory of Numbers,* John Wiley & Sons, Inc., New York - London, 1962
73. **Olmsted, J. M. H.:** *The Real Number System,* Appleton-Century-Crofts, New York, 1962
74. **Radjavi, H.; Rosenthal, P.:** *Invariant Subspaces*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1973
75. **Rao, D. K. M.; Gustafson, K. E.:** *Numerical Range*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1996
76. **Rickart, C. E.:** *Banach Algebras*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, Toronto, London, New York, 1960
77. **Riesz, F.; Sz.-Nagy, B.:** *Functional Analysis,* Dover Publications, Inc., New York, 1990
78. **Rockafellar, R. T.:** *Convex Analysis,* Princeton University Press, Princeton, 1970
79. **Rosenblum, M.; Rovnyak, J.:** *Hardy Classes and Operator Theory*, Oxford University Press, New York, 1985
80. **Royden, H. L.:** *Real Analysis,* Macmillan, New York, 1963
81. **Rudin, W.:** *Functional Analysis,* McGraw-Hill Book Company, New York, 1991
82. **Rudin, W.:** *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964
83. **Rudin, W.:** *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill Book Company, New York, 1970
84. **Sarapa, N.:** *Teorija Vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002
85. **Shephard, G. C.:** *Vector Spaces of Finite Dimension,* Oliver&Boyd, New York, 1966
86. **Shoup, V.:** *A Compuaitional to Number Theory and Algebra,* Cambridge University Press, 2005
87. **Spivak, M.:** *Calculus on Manifolds,* W. A. Benjamin, New York, 1965
88. **Stanković, B.:** *Osnovi funkcionalne analize,* Naučna knjiga, Beograd, 1975
89. **Stojaković, Z.; Herceg, D.:** *Numeričke metode linearne algebra* (*zbirka zadataka*), Građevinska knjiga, Beograd, 1983
90. **Strang, G.:** *Linear Algebra and its Applications,* MIT, Academic Pres, 1976
91. **Tasković, M.; Aranđelković, D.:** *Teorija funkcija i funkcionalna analiza*, Književne novine, Beograd, 1981
92. **Taylor, S. J.:** *Introduction to Measure and Integration*, Cambridge University Press, London, 1973
93. **Uščumlić, M. P., Miličić, P. M.:** *Zbirka zadataka iz više matematike* I, II, Nauka, Beograd, 1994
94. **Valentine, F. A.:** *Convex Sets,* McGraw-Hill Book Company, New York, 1964
95. **Vrabec, J.:** *Metrični prostori,* DMFAS, Ljubljana, 1993
96. **Vujčić, V.; Ašić, M.; Miličić, N.:** *Matematičko programiranje,* Matematički institut, Beograd, 1980
97. **Walter, W.:** *Analysis* 1,2, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2002, 2000
98. **Wilcox, H. J.; Myers, D. L.:** *An Introduction to Lebesque Integration and Fourier Series,* Dover Publications, INC., New York, 1978
99. **Zhu, K.:** *Operator Theory in Function Spaces*, Marcel Dekker, New York – Basel, 1990
100. **Акилов, Г. П.; Дятлов, В. Н.:** *Основы математического анализа,* Наука, Сибирское отделение, Новосибирск, 1980
101. **Антоневич, А. Б.:** *Линейные функциональные уравнения*, Минск, 1988
102. **Архангельский, А. В.; Пономарев, В. И.:** *Основы общей топологии в задачах и упражнениях*, Наука, Москва, 1974
103. **Беллман, Р.:** *Введение в теорию матриц,* Наука, Москва, 1969
104. **Берман, Г. Н.:** *Сборник задач по курсу математического анализа,* Наука, Москва, 1969
105. **Боревич, З. И.; Шафаревич, И. Р.:** *Теория чисел,* Наука, Москва, 1964
106. **Брудно, А. Л.:** *Теория функций действительного переменного*, Наука, Москва, 1971

107. **Бурбаки, Н.:** *Функции действительного переменного* (*элементарная теория*), Наука, Москва, 1965
108. **Вейль, А.:** *Основы теории чисел*, Мир, Москва, 1972
109. **Воеводин, В. В.:** *Линейная алгебра,* Наука, Москва, 1974
110. **Вулих, Б. З.:** *Введение в функциональный анализ,* Физматгиз, Москва, 1958
111. **Вулих, Б. З.:** *Краткий курс теории функций вещественной переменной*, Наука, Москва, 1973
112. **Гантмахер, Ф. Р.:** *Теорияя матриц,* Москва, 1988
113. **Гелбаум, Б.; Олмстед, Дж.:** *Контрпримеры в анализе*, Мир, Москва, 1964
114. **Гелъфанд, И. М.:** *Лекции по линейной алгебре*, Наука, Москва, 1966
115. **Гофман, К.:** *Банаховы пространства аналитических функций*, Наука, Москва, 1963
116. **Гохберг, И. Ц.; Крейн, М. Г.:** *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве,* Наука, Москва, 1965
117. **Давидов, Л.:** *Конкурсите ПЬАТНАМ*, СМБ, София, 1998
118. **Данфорд, Н.; Шварц, Дж.:** *Линейные операторы,* I, II, III, Мир, Москва, 1962, 1966, 1974
119. **Демидович, Б. П.:** *Сборник задач и упражнений по математическому анализу,* Наука, Москва, 1984
120. **Дирихле, П. Г. Л.:** *Лекции по теория на числата,* Наука и изкуство, София, 1980
121. **Дойчинов, Д.:** *Математически анализ,* Наука и изкуство, София, 1983
122. **Дороговцев, А. Я.:** *Математическиѝ анализ,* Вища школа, Киев, 1985
123. **Дьедонне, Ж.:** *Линейная алгебра и элементарная геометрия,* Наука, Москва, 1972
124. **Дьедонне, Ж.:** *Основы современного анализа*, Мир, Москва, 1964
125. **Ефимов, Н. В.:** *Краткий курс аналитической геометрии*, Наука, Москва, 1975
126. **Зорич, В. А.:** *Математический анализ,* I, 1981, II, 1984, Наука, Москва,
127. **Ивановски, Н.:** *Реална анализа,* Просветно дело, Скопје, 1997
128. **Ивановски, Н.:** *Решени задачи по анализа* III*,* Унив. Св. Кирил и Методиј, Скопје, 1993
129. **Ивановски, Н.:** *Функционална анализа*, Природно-математички факултет, Скопје, 2003
130. **Ильин, В. А.; Позняк, Э. Г.:** *Основы математического анализа,* Наука, Москва, I 1971, II 1980
131. **Иосида, К.:** *Функциональпый анализ,* Мир, Москва, 1988
132. **Камке, Э.:** *Интеграл Лебега-Стилтьеса,* Наука, Москва, 1959
133. **Канатников, А. Н.; Крищенко, А. П.:** *Линейная алгебра*, Издательство МГТУ, Москва, 2002
134. **Канторович, Л. В.; Акилов, Г. П.:** *Функциональпый анализ,* Наука, Москва, 1969
135. **Карамата, Ј.:** *Теорија и пракса Stieltjes-ова интеграла*, Српска академија наука, Београд, 1949
136. **Карманов, В., Г.:** *Математическое программирование*, Наука, Москва, 1975
137. **Карташев, А. П., Рождественский, Б. Л.:** *Математический анализ,* Наука, Москва, 1984
138. **Карчиска, Д.:** *Конечно димензионални векторски простори,* Уни. Св. Кирил и Методиј, Скопје, 1985
139. **Келли, Дж. Л.:** *Общая топология*, Наука, Москва, 1981
140. **Кирилов, А. А; Гвишиани, А. Д.:** *Теоремы и задачи функционального анализа,* Наука, Москва, 1988
141. **Князев, П. Н.:** *Функциональпый анализ,* Вышэйшая школа, Минск, 1985
142. **Колмогоров, А. Н.; Фомин, С. В.:** *Элементы теории функций и функционального анализа,* Наука, Москва, 1989
143. **Кудреватов, Г. А.:** *Сборник задач по теории чисел*, Просвещение, Москва, 1970

144. **Кудрявцев, Л. Д.:** *Курс математического анализа,* I, II, III, Высшая школа, Москва, 1988
145. **Курант, Р.:** *Курс диференцијалног и интегралног рачуна,* Београд
146. **Курош, А. Г.:** *Курс высшей алгебры,* Физматгиз, Москва, 1962
147. **Курош, А. Г.:** *Лекции по общей алгебре*, Наука, Москва, 1973
148. **Кутателадзе, С. С.:** *Основы функционального анализа,* Наука, Новосибирск, 1983
149. **Любенова, Е., Недевски, П., Николов, К., Николова, Л., Попов, В.:** *Ръководство по математически анализ,* I, II, Унив. изд. "Св. Климент Охридски", София, 1991
150. **Люстерник, Л. А.; Соболев, В. И.:** *Элементы функционального анализа,* Наука, Москва, 1965
151. **Ляшко, И. И., Боярчук, А. К., Гай, Я. Г., Головач, Г. П.:** *Спровочное пособие по математическому анализу,* I, II, Вища школа, Киев, 1983
152. **Ляшко, И. И., Боярчук, А. К., Гай, Я. Г., Калайда, А. Ф.:** *Математический анализ,* I, II, Вища школа, Киев, 1983
153. **Ляшко, И. И., Емельянов, В. Ф.; Боярчук, А. К.:** *Основы классического и современного математического анализа*, Вища школа, Киев, 1988
154. **Макаров, И. П.:** *Дополнительные главы математического анализа,* Просвещение, Москва, 1968
155. **Мальцев, А. И.:** *Основы линейноы алгебры,* Наука, Москва, 1970
156. **Манолов, С.; Петрова-Данева, А.; Генов, А.; Шополов, Н.:** *Висша математика,* I, II, III, Техника, София, 1977
157. **Михелович, Ш. Х.:** *Теория чисел,* Вісшая школа, Москва, 1967
158. **Младеновиќ, П.:** *Вероватноћа и статистика*, Веста - Математички Факултет, Београд, 1995
159. **Морен, К.:** *Методы гильбертова пространства,* Мир, Москва, 1965
160. **Нагел, Т.:** *Увод в теорията на числата,* Наука и изкуство, София, 1971
161. **Наймарк, М. А.:** *Нормированные кольца*, Государственное издательство *технико-*теоретической литературы, Москва, 1956
162. **Натансон, И.:** *Теория функций вещественой переменной,* Наука, Москва, 1949
163. **Никольский, С. М.:** *Курс математического анализа*, I, II, Наука, Москва, 1983
164. **Полиа, Г.; Сеге, Г.:** *Задачи и теоремы из анализа,* I, II, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1956
165. **Проскуряков, И. В.:** *Сборник задач по линейной алгебре*, Наука, Москва, 1974
166. **Райков, Д. А.:** *Векторные пространства,* Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1962
167. **Рудин, У.:** *Теория функций в поликруге*, Мир, Москва, 1974
168. **Самарџиски, А.; Целакоски, Н.:** *Збирка задачи по алгебра, множества,* Уни. "Св. Кирил и Методиј", Скопје, 1996
169. **Смирнов, В. И.:** *Курс высшей математики* I, II, III, IV, V*,* Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1961
170. **Соболев, В. И.:** *Лекции по дополнительным главам математического анализа*, Наука, Москва, 1968
171. **Талдыкин, А.Т.:** *Элементы прикладного функционального анализа,* Высшая школа, 1982
172. **Толстов, Г.П.:** *Курс математического анализа*, I, II, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1957
173. **Тонков, Т. Т.:** *Студентски състезания по математика*, Издателска фирма "Тонко Тонков", София, 2000
174. **Треногин, В. А.; Писаревский, Б. М.; Соболева, Т. С.:** *Задачи и упражнения по функциональному анализу*, Наука, Москва, 1984
175. **Трибель, Х.:** *Теория функциональныц пространств*, Мир, Москва, 1986

176. **Трпеновски, Б.; Целакоски, Н.; Чупона, Ѓ.:** *Виша математика*, 1,2,3,4, Просветно дело, Скопје, 1995
177. **Тышкевич, Р. И.; Феденко, А. С.:** *Линейная алгебра и аналитическая геометрия,* Вышэйшая школа, Минск, 1968
178. **Улчар, Ј.:** *Аналитичка геометрија со векторска алгебра,* Нумерус, Скопје, 1995
179. **Фадеев, Д. К.; Фадеева, В. Н.:** *Вычислительные методы линейной алгебры*, Физматгиз, Москва, 1963
180. **Федерер, Г.:** *Геометрическая теория меры*, Наука, Москва, 1987
181. **Фихтенгольц, Г. М.:** *Курс дифференциального и интегрального исчисления,* I, II, III, Наука, Москва, 1969
182. **Халмош, П. Р.:** *Конечномерные векторниые пространства*, Физматгиз, Москва, 1963
183. **Целакоски, Н.:** *Задачи по линеарна алгебра*, Проосветно дело, Скопје, 1996
184. **Цубербиллер, О. Н.:** *Задачи и упражнения по аналитической геометрии*, Наука, Москва, 1966
185. **Чупона, Ѓ.:** *Алгебарски структури и реални броеви,* Просветно дело, Скопје, 1976
186. **Чупона, Ѓ.; Трпеновски, Б.:** *Алгебра*, Унив. Св. Кирил и Методиј, Скопје
187. **Шварц, Л.:** *Анализ,* I, II, Мир, Москва, 1972
188. **Шефер, Х.:** *Топологические векторные пространства*, Мир, Москва, 1971
189. **Шилов, Г. Е.:** *Математический анализ (функции нескольких вещественныцх переменныцх),* I, II Наука, Москва, 1969
190. **Шилов, Г. Е.:** *Математический анализ (функции одного переменного),* I, II, III Наука, Москва, 1969
191. **Шилов, Г. Е.:** *Математическиы анализ (конечномерные линейные пространства),* Наука, Москва, 1969
192. **Шилов, Г. Е.; Гуревич, Б. Л.:** *Интеграл, мера и производная*, Наука, Москва, 1964
193. **Ширяев, А. Н.:** *Вероятность,* Наука, Москва, 1989
194. **Эдвардс, Р.:** *Функциональный анализ*, Мир, Москва, 1969

ИНДЕКС НА ПОИМИ

ИНДЕКС НА ИМИЊА

Abel Niels Henrik (1802-1829), норвешки математичар
Abu Ja’far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780-850), арапски математичар
Александров Павел Сергеевич (1896-1982), руски математичар
Arhimed (287-212 пне), антички математичар
Arzelà Cesare (1847-1912), италијански математичар
Àscoli Giulio (1843-1896), италијански математичар

Baire René Louis (1874-1932), француски математичар
Banach Stefan (1892-1945), полски математичар
Бернштейн Сергей Натанович (1880-1968), руски математичар
Bernoulli Jacob (1654-1705), швајцарски математичар
Bernstein Felix (1878-1956), германски математичар
Bertrand Joseph Louis François (1822-1900), француски математичар
Bessel Friedrich Wilhelm (1784-1846), германски математичар и астроном
Bolzano Bernhard (1781-1848), чешки математичар, логичар и филозоф
Bonnet Pierre Ossaian (1819-1892), француски математичар
Boole George (1815-1864), англиски математичар и логичар
Borel Emile (1871-1956), француски математичар
Briggs Henry (1561-1630), англиски математичар
Brouwer Litzen Egbertus Jan (1881-1966), холандски математичар
Буняковский Виктор Яковлевич (1804-1889), руски математичар

Cantor Georg Ferdinand Ludwig Philipp (1845-1918), германски математичар
Carathéodory Constantin (1873-1950), германски математичар со грчко потекло
Cárleman Tage Yilles Torsten (1892-1949), шведски математичар
Carleson, Lennart (1928-?) шведски математичар
Cauchy Augustin Louis (1789-1857), француски математичар
Cavalieri Bonaventura (1598-1647), италијански математичар
Cesàro Ernesto (1859-1906), италијански математичар

D'Alembert Jean le Rond (1717-1783), француски математичар и филозоф
Daniell Percy John (1889-1946), англиски математичар
Darboux Gaston (1842-1917), француски математичар
De Fermat Pierre (1601-1665), француски математичар
De la Vallée-Poussin Charles-Jean (1866-1962), белгиски математичар
De Moivre Abraham (1667-1754), англиски математичар
De Morgan Augustus (1806-1871), англиски математичар и логичар
Dediking Julius Wilhelm Richard (1831-1916), германски математичар
Descartes René (1596-1650), француски филозоф, математичар и физичар
Dickson Leonard Eugene (1874-1954), ирско-американски математичар
Dini Ulisse (1845-1918), италијански математичар
Diokles (II век пне), антички математичар
Dirac Pol Adrien Moris (1902-1984), англиски математичар
Dirichlet Peter Gustav Lejeune (1805-1859), германски математичар

Evdoks (IV век пне), антички математичар

Егоров Дмитрий Федорович (1869-1931), руски математичар
Eratosten (274-194 пне.), антички математичар
Erdös Paul (1913-1996), унгарски математичар
Euklid (IV-III пне), антички математичар
Euler Leónhard (1707-1783), швајцарски математичар

Fatou Pierre Joseph Louis (1878-1929), француски математичар
Fejér Leopold (1880-1959), унгарски математичар
Fibonacci Leonardo Pisano (1170-1250), италијански математичар
Fischer Ernst (1875-1956), австриски математичар
Fourier Jean-Baptiste Joseph (1768-1830), француски математичар
Fredholm Ivar (1866-1927), шведски математичар
Frenet J. F. (1816-1900), француски математичар
Fresnel A. J. (1788-1827), француски физичар и математичар
Фреше М. Р. (1878-1973), француски математичар
Frobenius Georg (1849-1917), германски математичар
Fubini Guido Ghirin (1879-1943), италијански математичар

Galois Évariste (1811-1832), француски математичар
Gauss Carl Friedrich (1777-1855), германски математичар, физичар и астроном
Gram Jørgen Pedersen (1850-1916), дански математичар
Green George (1793-1841), англиски математичар

Hadamard Jacques (1865-1963), француски математичар
Hahn Hans (1879-1934), австриски математичар
Hamilton William Rowan (1805-1865), ирски математичар и астроном
Hardy Godfrey Harold (1877-1947), англиски математичар
Hausdorff Felix (1868-1942), германски математичар
Heine Eduard (1821-1884), германски математичар
Helli Eduard (1884-1943), австриски математичар
Hermite Charles (1822-1901), француски математичар
Hilbert David (1862-1943) германски математичар
Hölder Otto Ludwig (1859-1937), германски математичар

Jacobi Karl Gustav Jacob (1804-1851), германски математичар
Jenssen Johan Ludwig (1859-1925), дански математичар
Jordan Camille (1838-1922), француски математичар

Kahane Jean-Pierre, француски математичар
Katznelson Yitzhak, израелски математичар
Кавалиери Д. (1598-1677), италијански математичар
Knuth Donald (1938-), американски математичар
Koch Helge von (1870-1924), шведски математичар
Колмогоров Андрей Николаевич (1903-1987), руски математичар
Ковалевская С. В. (1850-1891), руска математичарка
Kronecker Leopold (1823-1891), германски математичар
Kummer Ernst Eduard (1810-1893), германски математичар

l’Hôpital G. H. (1661-1704), француски математичар

Lagrange Joseph Louis (1736-1813), француски математичар
Laplace Pierre Simon (1749-1827), француски математичар, физичар и филозоф
Лаврентьев М. А. (1900-1980), руски математичар
Lebesgue Henri Leon (1875-1941), француски математичар
Legendre Andrien-Marie (1752-1833), француски математичар
Lehmer Derrick (1905-1991), американски математичар
Leibniz Gottfried Wilhelm (1646-1716), германски математичар и филозоф
Levi Beppo (1875-1961), италијански математичар
Lindelöf Ernst Leonhard (1870-1946), шведски математичар
Liouville J. (1809-1882), француски математичар
Lipschitz Rudolf Otto Sigismund (1832-1903), германски математичар
Littlewood John Edensor (1885-1977), англиски математичар
Лобачевский Н. И. (1792-1856), руски математичар
Lucas François Edouard (1842-1891), француски математичар
Лузин Николай Николаевич (1883-1950), руски математичар
Ляпунов Л. М. (1857-1918), руски математичар

Maclaurin Colin (1698-1746), шкотски математичар
Mazur Stanislav (1905-1981), полски математичар
Марков А. А. (1856-1922), руски математичар
Meray Charles (1835-1911), француски математичар
Mersenne Marin (1588-1648), француски монах, филозоф и математичар
Mertens Franz Karl Joseph (1840-1927), австриски математичар
Meusnier J. B. M. (1754-1793), француски математичар
Minkowski Hermann (1864-1909), германски математичар и физичар
Möbius Augustus Ferdinand (1790-1868), германски математичар

Napier John (1550-1617), шкотски математичар
Newton Isaac (1643-1727), англиски математичар и физичар
Nikodym Otton Martin (1887-1974), американски математичар со полско потекло

Остроградский Махаил Васильевич (1801-1862), руски математичар

Parseval Marc Antoine (1755-1836), француски математичар
Pascal B. (1623-1662), француски математичар и филозоф
Peano Giuseppe (1858-1932), италијански математичар и логичар
Петровский Г. И. (1901-1973), руски математичар
Picard Emile (1856-1941), француски математичар
Pitagora (V век пне.), антички математичар
Poisson Simeon Denis (1781-1840), француски математичар и физичар
Пуанкаре Анри (1854-1912), француски математичар

Raabe Joseph Ludwig (1801-1859), швајцарски математичар
Radón Johann (1887-1956), австриски математичар
Reymond P. Du Bois (1831-1889), германски математичар
Riemann Bernhard (1826-1866), германски математичар
Riesz Frigyes (1880-1956), унгарски математичар
Rolle M. (1652-1719), француски математичар

Schanon Claude (1916-2001), американски математичар
Schmidt Erhard (1876-1959), германски математичар
Schur I. (1875-1941), германски математичар
Schwarz Karl Hermann Amandus (1843-1921), германски математичар
Sorgenfrey Robert Henry (1915-), американски математичар
Стеклов В. А. (1864-1926), руски математичар
Steinhaus Hugo (1879-1934), полски математичар
Stieltjes Thomas-Jan (1856-1894), холандски астроном и математичар
Stirling James (1692-1770), шкотски математичар
Stokes G. G. (1819-1903), англиски математичар
Stolz Otto (1842-1905), австриски математичар
Stone Arthur Harold (1916-?), англиско-американски математичар
Stone Marshall Harvey (1903-1989), американски математичар
Sylvester D. D. (1814-1897), англиски математичар
Суслин Михайл Яаковлевич (1894-1919), руски математичар

Teitze Heinrich (1880-1964), австриски математичар
Teoplitz Otto (1881-1940), германски математичар
Teylor Brook (1685-1731), англиски математичар
Тихонов Андрей Николаевич (1906-?), руски математичар
Tonelli Leonida (1885-1946), италијански математичар
Turing Alan (1912-1954), американски математичар

Ulam Stanislav (1909-1984), полско-американски математичар
Урысон Павел Самуилович (1898-1924), руски математичар

van der Waerden B. L. (1903-?), холандски математичар
Vandermonde A. T. (1735-1796), француски математичар
Viviani V. (1622-1703), италијански математичар и физичар
Виноградов И. М. (1891-1983), руски математичар
Volterra Vito (1860-1940), италијански математичар и физичар
von Koch Helge (1870-1924), шведски математичар
von Neumcann John (1903-1957), американски математичар со унгарско потекло

Weierstrass Karl Theodor Wilhelm (1815-1897), германски математичар

Zermelo Ernst (1871-1953), германски математичар

Чебышев Пафнутий Львович (1821-1894), руски математичар

ЗА АВТОРОТ

Ристо Малчески е роден на 9.8.1957 година во Р. Србија. Основно образование заврши во Прилеп, средно во Скопје и во 1980 година како најдобар студент во генерацијата, дипломираше на Математичкиот факултет во Скопје и за постигнатиот успех во текот на студирањето беше награден од Ректорот на Универзитетот "Св. Кирил и Методиј". Магистрираше и докторираше на теми од областа на функционалната анализа, која му претставува основна научна преокупација. По докторирањето беше избран за доцент по математичка анализа на Институтот за математика при Природно-математичкиот факултет во Скопје, на кој реализираше настава по наставни дисциплини од областите: математичка анализа, методика на наставата по математика, веројатност и статистика, а беше ангажиран и во реализирањето на последипломските студии. Во учебната 2003/04 година, со формирањето на Факултетот за општествени науки во Скопје, премина на истиот во звање вонреден професор и ги предаваше наставните дисциплини: Математика за бизнис и Статистика за бизнис. Од учебната 2006/07 година е редовен професор, во кое звање е и сега како професор од областа на математичките науки на ФОН универзитетот, каде во моментот е проректор за настава.

Проф. Малчески е автор и коавтор на осумдесеттина математички книги, меѓу кои:

- Математика 1,
- Математика 2,
- Математика 3,
- Математика 4,
- Основи на математичка анализа,
- Математичка анализа I,
- Математичка анализа II,
- Методика на наставата по математика (општ дел),
- Методика на наставата по аритметика и алгебра во основното образование
- Математика за бизнис,
- Основи на финансиската математика,
- Операциони истражувања,
- Статистика за бизнис и
- Теорија на веројатност.

Автор е и на 44 научни трудови од функционална анализа, 9 научни трудови од применета математика, 41 труд од методика на наставата по математика и на над 73 стручни статии. Во изминатите години учествуваше на десетина научни собири, како од национален, така и од меѓународен карактер.

Во периодот од 1987 до 2004 година активно работеше во Сојузот на математичарите на Македонија, чиј претседател беше од 1999 до 2004 година. Во овој период, покрај работата со надарените ученици за математика, учествуваше во организацијата и како главен координатор на тимот за оценување на Балканските математички олимпијади кои во нашата држава се одржаа во 1999, 2000 и 2008 година, на Вториот когрес конгрес на СММ и на третиот конгрес на МАСС

ЕЕ кои се одржаа во 2000 и 2009 година. Почнувајќи од 2012 година прод. Малчески повторно активно работеше во СММ се до 2019 година и во овој перидо покрај во организацијата на двата конгреси на СММ учествуваше како главен координатор и претседател на комисија за селекција на задачи на ЈБМО и БМО, како и на двете студентски олипијади во организација на МАССЕЕ. Дел од активностите на СММ е издавањето на списанијата “Нумерус” и “Сигма”, наменети за учениците од основното и средното образование, соодветно, со кои проф. Малчески активно соработува, а неколку години беше и главен и одговорен уредник на споменатите списанија, период во кој ја формираше библиотеката на списанието “Сигма”. Проф. Малчески триесетина години учествува во организацијата на натпреварите по математика во нашата држава, подготовките на нашите ученици за учество на меѓународните натпревари и во повеќе наврати, како водач и заменик водач на Македонската екипа, има учествувано на Меѓународните и на Балканските математички олимпијади, кои се одржуваа надвор од нашата држава. Исто така Ристо Малчески од 2014 до 2019 година бил ѕредник на Математичкиот билтен, период кога списанието кое до огаш нередовно излегуваше е стабилизирано и е поставено на неколку значајни научни бази, при што во воие пет години Математичкиот билтен излегуваше два пати годишно.