

**Ристо Малчески
Златко Петковски
Самоил Малчески**

**СОЈУЗНИ НАТПРЕВАРИ ПО
МАТЕМАТИКА ЗА
УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО
ОБРАЗОВАНИЕ 1970 – 1991**

Скопје, 2021

Рецензенти

СОДРЖИНА

Предговор	5
1. Сојузен1970	7
2. Сојузен1971	10
3. Сојузен1972	15
4. Сојузен1973	21
5. Сојузен1974	26
6. Сојузен1975	31
7. Сојузен1976	36
8. Сојузен1977	40
9. Сојузен1978	45
10. Сојузен1979	50
11. Сојузен1980	55
12. Сојузен1981	60
13. Сојузен1982	65
14. Сојузен1983	70
15. Сојузен1984	74
16. Сојузен1985	79
17. Сојузен1986	84
18. Сојузен1987	88
19. Сојузен1988	93
20. Сојузен1989	97
21. Сојузен1990	102
22. Сојузен1991	106
Литература	112

ПРЕДГОВОР

Во ооранешната држава Југославија Сојузните натпревари по математика за основното образование се започнати во 1970 година и таа година натпреварот е одржан само за учениците од осмо одделение. Веќе од следната година на Сојузниот натпревар учествуваат и учениците од седмо одделение. Учениците од Р. Македонија на Сојузниот натпревар учествуваа се до распадот на Југославија во 1991 година, т.е. тоа е последната година на која учество зедаа македонските ученици. Токму затоа, во оваа мала по обем, но значајна како содржински, така и од гледна точка на традицијата на натпревари по математика на кои учествувале учениците од основното образование од нашата држава, се дадени сојузните натпревари до 1991 година. Всушност во книгата се поместени 215 решени задачи кои на првите 22 сојузни натпревари се задавани за учениците од седмо и осмо одделение во основното образование, кое во тие години беше осумгодишно.

Што се однесува до самиот Сојузен натпревар, тој по правило секоја година се организираше во различна република или покраина на тогашната држава, па така на натпреварот учествуваа осум екипи од шесте републики и двете покраини. Изборот на задачите за натпреварот го правеше Комисија составена од водачите на екипите, а со Комисијата претседаваше колега од републиката, односно покраината домаќин. Оттука може да се каже дека начинот на организацијата и работата на самиот натпревар во голема мера наликуваше на начинот според кој денес се организира Јуниорската балканска олимпијада, со таа разлика што на самиот натпревар немаше поканети екипи од други држави.

Како што рековме во книгава се дадени решенијата на сите задачи задавани на Сојузните натпревари во разгледуваниот период. Стандардно, книгава содржи список на користената литература.

За крај, и покрај вложениот напор, свесни сме дека се можни подобрувања на оваа мала книга, која покрај содржинско има и историско значење. Ова посебно се однесува на евентуалните грешки, кои за жал не го одминуваат издавањето на било кој ракопис. Затоа однапред сме благодарни на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе допринесе да се подобри книгава.

Јануари 2022
Скопје

Авторите

Сојузен натпревар 1970

1. Дешифрирај го равенството

$$\overline{abcd} = (5c+1)^2.$$

Решение. Според условот на задачата важи

$$1000a + 110b + 10c + d = 25c^2 + 10c + 1,$$

т.е.

$$25(40a + 4b - c^2) = 1 - d.$$

Левата страна е делива со 25, па затоа $25|1-d$, од каде добиваме $d=1$. Според тоа, $40a + 4b - c^2 = 0$, т.е. $4(10a + b) = c^2$, од каде добиваме $4|c^2$. Но, a, b, c се цифри и како $a \neq 0$ одма се добива дека $c^2 = 64$ и $10a + b = 16$. Значи, $c=8, b=6, a=1$ и бараниот број е $\overline{abcd} = 1681$.

2. Авион летал од A во B и тоа прво со брзина 180 km/h , а кога му преостанало да прелета 320 km помалку отколку што веќе прелетал, ја зголемил брзината на 250 km/h . На тој начин просечната брзина на авионот на целиот пат од A до B била 200 km/h . Определи ја должината на патот од A до B .

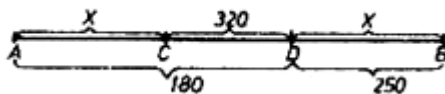
Решение. Времето да се помине

патот од A до D е $\frac{x+320}{180}$, а

времето да се помине патот од

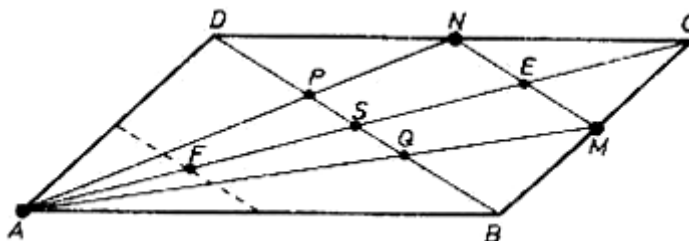
D до B е $\frac{x}{250}$. Затоа важи $2x + 320 = 200(\frac{x+320}{180} + \frac{x}{250})$, од каде добиваме

$x = 400 \text{ km}$. Според тоа, должината на патот од A до B е $2x + 320 = 1120 \text{ km}$.



3. Милан нацртал паралелограм $ABCD$, со M ја означил средината на страната BC , со N ја означил средината на страната CD и потоа излегол од собатра. Тогаш неговата сестра Нада дошла до масата и на цртежот избришала се освен точките A, M и N . Помогни му на Милан да го реконструира цртежот, т.е. да ги најде точките B, C и D .

Решение. *Прв начин.* Искористи го фактот дека средината E на отсечката MN лежи на дијагоналата AC и ја дели во однос $3:1$, т.е. $CE = ES = SF = AF$, односно $AE = 3EC$ (види цртеж).

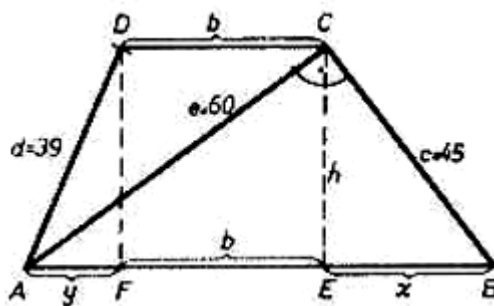


Втор начин. Точката P е тежиште на $\triangle ACD$, па затоа $AP:PN = 2:1$, па точката P може да се определи. Слично, $\triangle ABC$, па точката Q може да се определи. Со тоа се определени правите на кои лежат дијагоналите и нивниот пресек S . Понатаму, $SC = AS$, CN во пресекот со PQ ја дава точката D , а CM во пресекот со PQ ја дава точката B .

Трет начин. Прво докажи дека отсечките AM и AN ја делат дијагоналата BD на три еднакви дела и дека $AP:PN = 2:1$ и $AQ:QN = 2:1$. Понатаму, $PQ \parallel NM$ итн. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

4. Краците на трапезот се 39 mm и 45 mm , а дијагоналата која е нормална на подолгиот крак има должина 60 mm . Конструирај го овој трапез, а потоа пресметај ги неговиот периметар и плоштина.

Решение. Прво ќе ги пресметаме плоштината и периметарот на трапезот. Од правоаголникот $\triangle ABC$ за основата $AB = a$ имаме $a^2 = 60^2 + 45^2$, односно $a = 75\text{ mm}$. Понатаму, за висината h на трапезот важи $\frac{75h}{2} = \frac{60 \cdot 45}{2}$, т.е.



$h = 36\text{ mm}$. Сега за проекциите на краците на основата AB имаме $x^2 = c^2 - h^2$ и $y^2 = d^2 - h^2$, односно $x = 27\text{ mm}$ и $y = 15\text{ mm}$. Затоа $b = a - (x + y) = 33\text{ mm}$. Според тоа, периметарот на трапезот е

$$O = a + b + c + d = 192 \text{ mm},$$

а неговата плоштина е

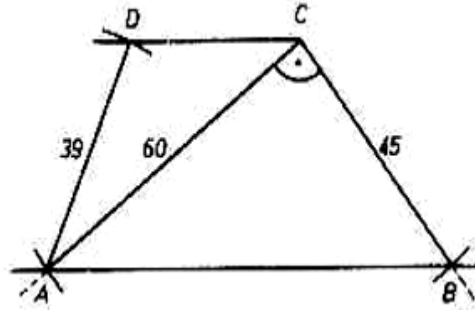
$$P = \frac{a+b}{2} h = 1944 \text{ mm}^2.$$

Конструкција: 1) Го конструираме правоаголникот $ABCD$ (дадени се катетите).

2) Низ точката C повлекуваме права $p \parallel AB$.

3) Од точката A опишуваме кружен лак со радиус $r = 39 \text{ mm}$ и во пресек со правата p ја определуваме точката D .

Траpezот $ABCD$ е бараниот траpez.



5. Плоштината на правилна четиристрана пирамида е $5a^2$, каде a е должината на работ на основата на таа пирамида.

а) Изрази го волуменот на оваа пирамида во функција од a .

б) Пресметај го волуменот на пирамидата ако $a = 6 \text{ dm}$.

Решение. а) За плоштината на пирамидата има

$$P = a^2 + 4 \cdot \frac{ah}{2} = a^2 + 2ah,$$

па затоа $a^2 + 2ah = 5a^2$, од каде добиваме $h = 2a$. Понатаму, од Питагоровата теорема добиваме

$$H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{15a^2}{4},$$

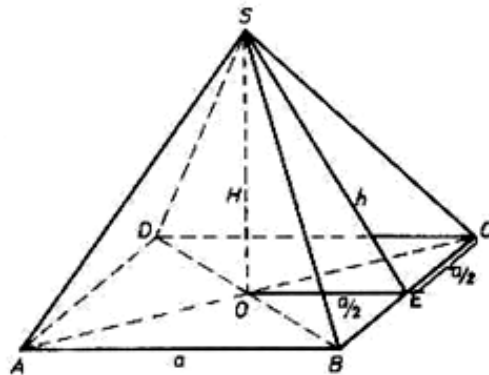
па затоа $H = \frac{a}{2} \sqrt{15}$.

Според тоа,

$$V = \frac{BH}{3} = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a}{2} \sqrt{15} = \frac{\sqrt{15}}{6} a^3.$$

б) За $a = 6 \text{ dm}$ имаме:

$$V = \frac{\sqrt{15}}{6} \cdot 6^3 = 36\sqrt{15} \text{ dm}^3.$$

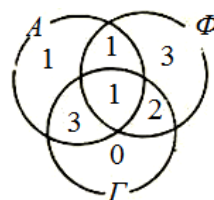


Сојузен натпревар 1971

Седмо одделение

- Во соба се наоѓаат неколку луѓе кои знаат барем еден од трите јазици: англиски, француски и германски. Шестмина од нив знаат англиски, шестмина знаат германски, седуммина знаат француски, четворица знаат англиски и германски, тројца знаат германски и француски, двајца француски и англиски и еден ги знае сите три јазици. Колку луѓе има во собата? Колку од нив знаат само англиски?

Решение. Задачата наједноставно се решава со Венов дијаграм. Ако со A , Φ и Γ ги означиме множествата ученици кои говорат англиски, француски и германски, тогаш од условот на задачата лесно го добиваме дијаграмот прикажан на цртежот десно. Според тоа, во собата имало



$$1+1+3+2+1+3+0=11$$

луѓе кои кои знаат барем еден јазик, а во собата немало други луѓе заклучуваме дека во собата имало вкупно 11 луѓе, а само англиски знае еден човек.

- Двоцифрен број собран со бројот запишан со истите цифри но во обратен редослед, дава број кој е квадрат на некој природен број. Определи ги сите такви двоцифрени броеви?

Решение. Даден број е $10a+b$, а бројот запишан со истите цифри но во обратен редосле е $10b+a$. Нивниот збир е еднаков на

$$10+a+10b+a=11(a+b).$$

Ако $11(a+b)$ е квадрат на некој број, тогаш $a+b=11k^2$ и како a и b се цифри, добиваме $a+b=11$. Можни се следниве случаи:

$$a=2, b=9; a=3, b=8; a=4, b=7; a=5, b=6;$$

$$a=6, b=5; a=7, b=4, a=8, b=3, a=9, b=2.$$

Според тоа, бараните броеви се: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 и 92.

- Наставникот му дал на ученикот да подели еден број со друг број. Ученикот добил количник 74 и остаток 22. Потоа направил проверка: го помножил количникот со делителот и на добиениот производ го додал остатокот, па така добил 30214. Се покажало дека има грешка.

Ученикот при ова множење (при проверката) во делителот на местото на десетките една шестка прочитал како нула. Определи ги деленикот и делителот.

Решение. Да го означиме деленикот со x , а делителот со y . Според тоа, $x = 74y + 22$. При проверката, т.е. при пресметувањето $74y + 22$ ученикот згрешил и добиениот број не е точен, што значи дека треба да се поправи. Како? Во множењето $74y$ во y земајќи на местото на десетките нула наместо шестка, ученикот како да не množел со 6 десетки, па затоа неговиот пробен резултат е помал за $74 \cdot 60 = 4440$. Значи, резултатот треба да се зголеми за 4440, па е

$$74y + 22 = 30214 + 4440, \text{ т.е. } y = 468.$$

Конечно, делителот е 468, а деленикот е 34654.

4. Даден е четириаголник $ABCD$. Конструирај паралелограм $DBCM$. Докажи дека плоштината на триаголникот ACM е еднаква на плоштината на дадениот четириаголник $ABCD$.

Решение. Нека нормалата во A на правата CM ја сече CM во точката L , а правата BD ја сече во точката K (направи цртеж). Тогаш

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{1}{2} AK \cdot BD + \frac{1}{2} KL \cdot BD = \frac{1}{2} BD \cdot (AK + KL) \\ &= \frac{1}{2} BD \cdot AL = \frac{1}{2} CM \cdot AL = P_{ACM}. \end{aligned}$$

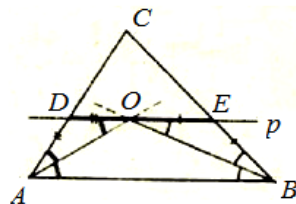
5. Даден е триаголник ABC . Конструирај права p паралелна со страната AB така што $AD + EB = DE$, каде D е пресечната точка на бараната права со AC , а E е пресечната точка на правата p со страната BC на триаголникот ABC .

Решение. *Анализа.* Да претпоставиме дека задачата е решена, т.е. дека $DE \parallel AB$ и $AD + EB = DE$. Нека O е точка од p таква што $DO = AD$ и $OE = EB$. Тогаш $\triangle ADO$ е рамнокрак, па затоа

$$\angle DAO = \angle DOA = \angle OAB,$$

при што последното равенство следува од еднаквоста на агли со паралелни краци. Според тоа, AO е симетрала на $\angle BAC$. Аналогно, BO е симетрала на $\angle ABC$.

Конструкција:



1) Ги конструираме симетралите на $\angle BAC$ и $\angle ABC$, и ја определуваме пресечната точка O на овие симетрали,

2) Низ точката O повлекуваме права $p \parallel AB$.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има едно и единствено решение.

Осмо одделение

1. Шест ученици, да ги наречеме A, B, C, D, E, F , решавале некоја задача. Задачата ја решиле двајца. На прашањето: Кој ја реши задачата?, тие дале пет одговори, т.е. изјавиле дека задачата ја решиле:

- 1) A и C ,
- 2) B и F ,
- 3) F и A ,
- 4) B и E ,
- 5) D и A .

Во четири од овие пет одговори еден дел е точен, а другиот е неточен, додека во еден одговор двата дела се неточни. Кои ученици ја решиле задачата?

Решение. Заради поедноставно запишување за исказот: Ученикот A ја решил задачата ќе пишуваме со $A=1$, а исказот: Ученикот A не ја решил задачата ќе пишуваме $A=0$. Слично пишуваме и за исказите за другите ученици.

Според условот на задачата во еден од петте одговори двата искази се неточни, т.е. двете букви се еднакви на 0, а во пресотанатите четири едната е еднаква на 0, а другата на 1.

- 1) Нека претпоставиме дека двата искази во првиот одговор се неточни, т.е. $A=0$ и $C=0$. Тогаш од третиот и петтиот одговор имаме $F=1$ и $D=1$. Сега, од вториот одговор имаме $B=0$, а од четвртиот одговор имаме $E=1$. Така добивме дека три ученици точни ја решиле задачата (F, D, E), што противречи на условот дека задачата ја решиле двајца.
- 2) Нека претпоставиме дека двата искази во вториот одговор се неточни, т.е. $B=0$ и $F=0$. Сега од третиот и четвртиот одговор добиваме $A=1$ и $E=1$, па од првиот одговор следува $C=0$, а од петтиот $D=0$. Значи, задачата ја решиле учениците A и E .

Сите други претпоставки доведуваат до противречност дека двајца ученици ја решиле задачата.

Конечно, задачата точно ја решиле учениците A и E .

2. Ученик замислил еден број, од десно му допишал 2 и на така добиениот број му додал 14. На бројот кој така го добил од десно му допишал 3 и така добиениот број го собрал со 52. Кога вака добиениот број го поделил со 60, добил количник кој е за 6 поголем од замислениот број, а остатокот од делењето бил двоцифрен број запишан со исти цифри и тоа такви што бројот на десетките бил еднаков на замислениот број. Определи го замислениот број.

Решение. Нека x е замислениот број. Ученикот прво го добил бројот $10x+2$, потоа го добил бројот $10x+16$, па бројот $10(10x+16)+3$ и на крајот го добил бројот $10(10x+16)+3+52=10(10x+16)+55$. Кога последниот број го поделил со 60 добил количник $x+6$ и остаток $10x+x=11x$. Според тоа,

$$10(10x+16)+55=60(x+6)+11x,$$

од каде добиваме $x=5$.

3. Висината на рамнокрак трапез е еднаква на h , а неговата плоштина е еднаква на h^2 . Определи го аголот меѓу дијагоналите на овој трапез.

Решение. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез ($AD=BC$), CE е нормалата повлечена од C кон основата AB , т.е. $CE=h$ (направи цртеж).

Од условот на задачата следува $\frac{a+b}{2}h=h^2$, од каде добиваме дека

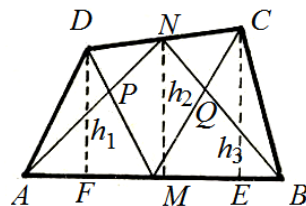
$$\frac{a+b}{2}=h \text{ е средната линија на трапезот. Тогаш}$$

$$AE=AB-BE=a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}=h,$$

па затоа $\angle EAC = \angle ABD = 45^\circ$. Аголот меѓу дијагоналите како трет агол на $\triangle ABO$, O е пресек на дијагоналите, е еднаков на 90° , што значи дека дијагоналите се сечат под прав агол.

4. Во четириаголникот $ABCD$ точките M и N се соодветно средини на спротивните страни AB и DC . Отсечките MD и AN се сечат во точката P , а отсечките MC и CN се сечат во точката Q . Докажи дека плоштината на четириаголникот $MQNP$ е еднаква на збирот на плоштините на триаголниците APD и BCQ .

Решение. Нека h_1, h_2, h_3 се висините на триаголниците AMD, ABN, MBC (види цртеж). Тогаш $h_2 = \frac{1}{2}(h_1 + h_3)$, како средна линија во правоаголниот трапез $ECDF$. Нека $AB = a$. Имаме



$$\begin{aligned}
 P_{MQNP} &= P_{ABN} - P_{AMP} - P_{MBQ} \\
 &= P_{ABN} - (P_{AMD} - P_{APD}) - (P_{BMC} - P_{BCQ}) \\
 &= \frac{1}{2}ah_2 - \frac{1}{2}\frac{a}{2}h_1 + P_{APD} - \frac{1}{2}\frac{a}{2}h_3 + P_{BCQ} \\
 &= \frac{a}{2}(h_2 - \frac{1}{2}(h_1 + h_3)) + P_{APD} + P_{BCQ} \\
 &= P_{APD} + P_{BCQ}.
 \end{aligned}$$

5. Основата на права призма е правоаголник со страни 5 cm и 8 cm , а плоштината на омотачот на оваа призма е еднаква на $408,2\text{ cm}^2$. Определи ја плоштината на омотачот на оној цилиндар чиј радиус на основата е 4 cm , ако волуменот на тој цилиндар е 64% од волуменот на дадената призма. (Да се земе $\pi \approx 3.14$.)

Решение. Нека M_p е плоштината на омотачот, O е периметарот на основата на призмата и H е нејзината висина. Имаме $M_p = O \cdot H$, па затоа $408,2 = 26H$, т.е. $H = \frac{408,2}{26}\text{ cm}$. Според тоа, волуменот на призмата е $V_p = B \cdot H = 8 \cdot 5 \cdot \frac{408,2}{26}\text{ cm}^3$, па волуменот на цилиндарот е $V_c = \frac{64}{100}V_p = \frac{64 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 408,2}{100 \cdot 26}\text{ cm}^3$. Но, $V_c = \pi r^2 H_c = 16\pi H_c$, па затоа важи $16\pi H_c = \frac{64 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 408,2}{100 \cdot 26}$, т.е. $H_c = \frac{64 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 408,2}{100 \cdot 26 \cdot 16\pi}\text{ cm}$. Плоштината на омотачот на цилиндарот е:

$$M_c = 2\pi r H_c = 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{64 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 408,2}{100 \cdot 26 \cdot 16\pi} = 200,96\text{ cm}^2.$$

Сојузен натпревар 1972

Седмо одделение

1. Членовите на математичката секција во едно училиште се договориле за време на празникот Нова година секој од нив да напише по една разгледница на секој од преостанатите членови. Вкупно биле напишани 342 разгледници. Колку членови имала математичката секција во ова училиште?

Решение. Нека секцијата има n ленови. Секој член напишал $n-1$ разгледница, што значи дека сите заедно пратиле $n(n-1)$ разгледници. Имаме

$$n(n-1)=342, \text{ т.е. } n(n-1)=2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19=19 \cdot 18,$$

од каде наоѓаме $n=19$. Значи, секцијата имала 19 членови.

2. На писмената работа по математика првата задача не ја решиле 12% од учениците, 32% делимично ја решиле задачата, а остатокот од 14 ученици точно ја решиле задачата. Колку ученици имало во ова одделение?

Решение. Бројот на учениците кои точно ја решиле задача изнесува $100\% - (32\% + 12\%) = 56\%$ од вкупниот број ученици. Значи, ако во одделението имало x ученици, тогаш $0,56x=14$, од каде добиваме $x=25$.

3. Упрости го изразот:

$$A=[(4a+5b)^2]^2 - [(4a-5b)^2]^2 - 160ab(4a-5b)^2.$$

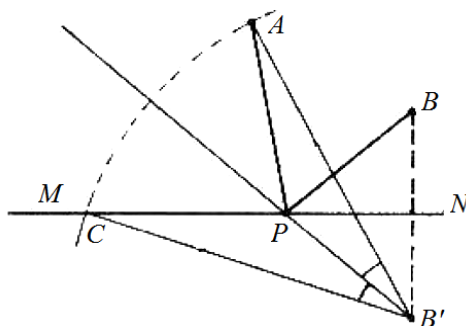
Направи проверка за $a=1, b=-2$.

Решение. Имаме:

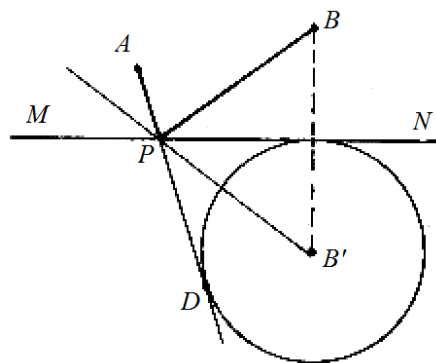
$$\begin{aligned} A &= [(4a+5b)^2]^2 - [(4a-5b)^2]^2 - 160ab(4a-5b)^2 \\ &= ((4a+5b)^2 - (4a-5b)^2)((4a+5b)^2 + (4a-5b)^2) - 160ab(4a-5b)^2 \\ &= 8a \cdot 10b(16a^2 + 40ab + 25b^2 + 16a^2 - 40ab + 25b^2) - 160ab(4a-5b)^2 \\ &= 160ab(16a^2 + 25b^2) - 160ab(16a^2 - 40ab + 25b^2) \\ &= 160ab(16a^2 + 25b^2 - 16a^2 + 40ab - 25b^2) \\ &= 160ab \cdot 40ab = 6400a^2b^2. \end{aligned}$$

4. Дадени се права MN и точки A и B на иста страна од таа права. На дадената права определи точка P така што $\angle MPA = 2\angle NPB$.

Решение. *Прв начин.* Конструираме точка B' симетрична на точката B во однос на правата MN и на правата MN определуваме точка C таква што $B'A = B'C$ (цртеж десно). Ја конструираме симетралата на $\angle CB'A$ и во пресек со правата MN ја определуваме точката P , која е бараната точка. На ч исправноста на оваа конструкција решенијата.



Втор начин. Како и во првиот начин на решавање конструираме точка B' симетрична на B во однос на правата MN . Потоа конструираме кружница $k(B', \frac{BB'}{2})$ и конструираме тангента AD на k од точката A (види цртеж). Нека правите MN и AD се сечат во точката P . Тогаш P е бараната точка. На читателот му препуштаме да ја докаже исправноста на кусија за бројот на решенијата.



5. Во квадрат со страна a впишан е друг квадрат чии темиња лежат на страните на првиот квадрат, но така што страните на дадениот и впишаниот квадрат формираат агли од 30° . Колкав дел од плоштината на дадениот квадрат покрива плоштината на впишаниот квадрат? Изрази го овој однос во проценти.

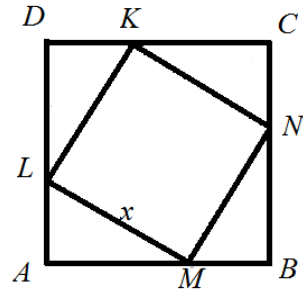
Решение. Нека x е должината на страната на впишаниот квадрат (види цртеж). Бидејќи $\angle LMA = 30^\circ$, правоаголниот триаголник е половина од рамностран триаголник со должина на страна $LM = x$. Оттука следува дека $AL = \frac{x}{2}$ и $AM = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Според тоа, должината на страната на почетниот квадрат е

$$\begin{aligned} AB &= AM + MB = AM + AL \\ &= \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2} = \frac{x(\sqrt{3}+1)}{2}. \end{aligned}$$

Значи,

$$\begin{aligned} P_{KLMN} &= x^2 \text{ и} \\ P_{ABCD} &= \frac{x^2(\sqrt{3}+1)^2}{4} = \frac{x^2(2+\sqrt{3})}{2}. \end{aligned}$$



Според тоа,

$$P_{KLMN} : P_{ABCD} = x^2 : \frac{x^2(2+\sqrt{3})}{2} = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2(2-\sqrt{3}).$$

Значи

$$P_{KLMN} = 2(2-\sqrt{3})P_{ABCD} \approx 0,535898P_{ABCD}.$$

Со други зборови плоштината на впишаниот квадрат е приближно 53,5898% од плоштината на почетниот квадрат.

Осмо одделение

- Во празните полиња на дадената табела запиши броеви така што збирот на било кои три последователни полиња, како хоризонтално, така и вертикално, е еднаков на 12.

	5						
					1		
6							
			2				

Решение. Нека a, b, c, d се четири последователни броеви запишани во еден ред (колона) на табелата. Според условот $a+b+c=b+c+d$, па затоа $a=d$. Значи во секој ред (колона) по две прескокнати полиња се повторува бројот од првото поле. Ако ова го примениме на редовите ја добиваме табелата:

	5			5			5
		1			1		
6			6			6	
2			2			2	

Сега, ако на добиената табела истото правило го примениме на колоните, ја добиваме табелата:

2	5		2	5		2	5
		1			1		
6			6			6	
2	5		2	5		2	5

Преостанатите броеви ги определуваме од условот збирот на броевите запишани во секои три последователни полиња во ред (колона) да е еднаков на 12. Така ја добиваме дабелата:

2	5	5	2	5	5	2	5
4	7	1	4	7	1	4	7
6	0	6	6	0	6	6	0
2	5	5	2	5	5	2	5

2. Хеликоптер и авион истовремено полетале во пресрет еден кон друг. До моментот на средбата хеликоптерот прелетал 100 km помалку од авионот и на местото на полетување на авионот хеликоптерот стигнал 3 часа по средбата. Авионот стигнал на местото на полетување на хеликоптерот 1 час и 20 минути по средбата. Определи ги брзините на хеликоптерот и авионот и растојанието меѓу местата на полетување.

Решение. Нека хеликоптерот до средбата прелетал $x\text{ km}$. Тогаш авионот до средбата прелетал $(x+100)\text{ km}$. Брзината на хиликоптерот е $\frac{x+100}{3}\text{ km/h}$, а брзината на авионот е $\frac{x}{1\frac{1}{3}}\text{ km/h}$. Ов слоето место на

полетување до средбата хеликоптерот летал $x: \frac{x+100}{3} = \frac{3x}{x+100}$ часа, а од своето место на полетување до средбата авионот летал $\frac{1\frac{1}{3}(x+100)}{x}$ часа. Тие до средбата летале исто време, па затоа

$$\frac{1\frac{1}{3}(x+100)}{x} = \frac{3x}{x+100}, \text{ т.е. } \left(\frac{x+100}{x}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Оттука, бидејќи $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2$, добиваме

$$\frac{x+100}{x} = \frac{3}{2} \text{ или } \frac{x+100}{x} = -\frac{3}{2}.$$

Но, $\frac{x+100}{x} > 0$, па затоа $\frac{x+100}{x} = \frac{3}{2}$, од каде добиваме $x = 200\text{ km}$.

Значи, хеликоптеро прелетал 200 km , авионот прелетал 300 km , брзината на хеликоптерот е 100 km/h , а на авионот е 150 km/h . Растојанието меѓу местата на полетување е 500 km .

3. Бригата трактористи треба да изора две ниви, такви што плоштината на едната нива е двапати поголема од плоштината на другата нива. Првиот ден сите трактористи ја орале првата нива. Вториот ден половина од бригадата го довршила орањето на првата (поголема) нива, а втората половина од бригадата ја орала другата нива. Втората половина од бригадата не можела за еден ден да ја изора втората нива, па за да се заврши нејзиното орање еден тракторист морал да ора уште два дена. Колку трактористи имало во бригадата? (Се претпоставува дека сите трактористи работата под исти услови и имаат иста продуктивност.)

Решение. Нека во бригадата има x трактористи. Од условите на задачата следува дека за орање на првата нива се потребни $x + \frac{x}{2}$ работни денови на еден тракторист, а за орање на втората нива се потребни $\frac{x}{2} + 2$ работни денови на еден тракторист. Сега, бидејќи првата нива е двапати поголема од втората нива добиваме

$$x + \frac{x}{2} = 2\left(\frac{x}{2} + 2\right),$$

од каде наоѓаме $x = 8$. Значи, бригаата броела 8 трактористи.

4. Конвексен шестаголник $ABCDEF$ е составен од рамнокрак трапез $ACDF$ и два рамнокраки триаголници ABC и FDE со еднакви висини ($h = 12\text{ cm}$). Ако $AB = 15\text{ cm}$, $AF = 25\text{ cm}$ и $FE = 20\text{ cm}$, конструирај го шестаголникот во размер 1:5 и пресметај ја неговата плоштина.

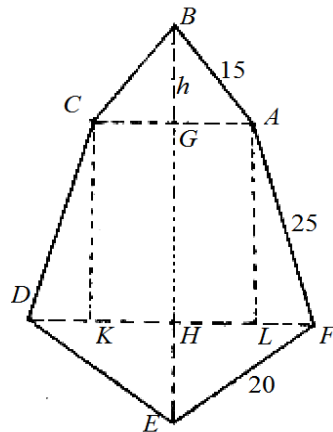
Решение. Со примена на Питагоровата теорема, лесно се добива дека $AG = 9\text{ cm}$, $FH = 16\text{ cm}$.

Сеега, $FL = 7\text{ cm}$, па повторно од Питагоровата теорема следува $AL = 24\text{ cm}$.

Според тоа, плоштината на дадениот шестаголник е еднаква на

$$\begin{aligned} P &= P_{ABC} + P_{DFAC} + P_{DFE} \\ &= 9 \cdot 12 + 16 \cdot 12 + (16 + 9) \cdot 24 \\ &= 900\text{ cm}^2. \end{aligned}$$

На читателот, според дадените и добиените податоци му препуштаме самостојно да го конструира шестаголникот.



5. Дадена е права правилна еднакворабна тристрана призма чија основа има плоштина $6,25\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

а) Пресметај го работ на дадената призма.

б) Определи го односот на волумените на опишаниот и впишаниот цилиндар на оваа призма. Дали овој однос е еднаков за секоја права правилна еднакворабна тристрана призма?

Решение. а) Од $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6,25\sqrt{3}$ добиваме $a = 5 \text{ cm}$.

б) Радиусот на впишаниот цилиндар е $r = \frac{1}{3}h$, а радиусот на опишаниот цилиндар е $R = \frac{2}{3}h = 2r$, каде h е висината на основата. Разгледуваните цилиндри се со еднакви висини, па затоа

$$V_1 : V_2 = R^2 \pi H : r^2 \pi H,$$

т.е.

$$V_1 : V_2 = R^2 : r^2 = (2r)^2 : r^2 = 4:1,$$

каде V_1 е волуменот на опишаниот, а V_2 е волуменот на впишаниот цилиндар. Значи, за сите вакви призми односот на разгледуваните волумени е константен.

Сојузен натпревар 1973

Седмо одделение

1. Определи го најмалиот природен број со кој треба да се помножи бројот 8316 за да се добие број кој е точен квадрат на природен број. На кој број?

Решение. Бидејќи $8316 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$ најмалиот природен број со кој треба да се помножи за да се добие квадрат на природен број е производот $3 \cdot 7 \cdot 11$. Тогаш

$$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 8316 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = (2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11)^2 = 1386^2.$$

2. По намалувањето на цената за 20%, за 240 денари може да се купи 1 метар платно повеќе отколку што пред намалувањето можело да се купи за 270 денари. Определи ја цената на платното пред намалувањето.

Решение. Нека x е бројот на метрите кои биле купени по цена од y денари по метар за 270 денари. Тогаш од условот на задачата следува $xy = 270$, $(x+1)\frac{80y}{100} = 240$, од каде добиваме $x=9$ и $y=30$.

3. Од градовите A и B , кои се оддалечени 250 km , истовремено во пресрет еден кон друг тргнале два моторцикли. Брзината на едниот од нив е за 10 km/h поголема од брзината на другиот. По два часа патување до средбата им преостанале уште 30 km . Определи ја брзината на секој моторциклист.

Решение. Нека брзината на првиот мотоциклист $v\text{ km/h}$. Тогаш вториот се движи со брзина $(v-10)\text{ km/h}$. Сега имаме

$$2v + 2(v-10) = 220, \text{ т.е. } v = 60\text{ km/h}.$$

4. Во рамнокрак трапез средната линија е s , а дијагоналата е двапати подолга од средната линија. Определи ја плоштината на овој трапез.

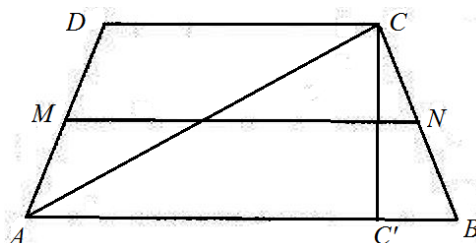
Решение. Нека $ABCD$ е дадениот трапез и нека MN е неговата средна линија (види цртеж). Имаме $MN=s$ и $AC=2s$. Сега, бидејќи

$$AC' = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = MN = s, \text{ добиваме}$$

$$\begin{aligned} CC' &= \sqrt{AC^2 - AC'^2} \\ &= \sqrt{4s^2 - s^2} = s\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Конечно,

$$\begin{aligned} P &= \frac{AB+CD}{2} \cdot CC' = MN \cdot CC' \\ &= s^2 \sqrt{3}. \end{aligned}$$



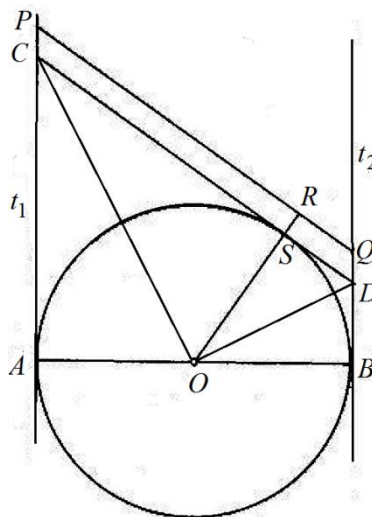
5. Дадена е кружница s со центар O и дијаметар $AB = 4 \text{ cm}$.

а) Конструирај три тангенти на оваа кружница, од кои две се во точките A и B , а третата таква што отсечокот CD меѓу првите две тангенти е со должина 5 cm .

б) Определи го $\angle COD$.

в) Определи ја плоштината на ликот ограничен со конструираниите тангенти и дадената кружница.

Решение. а) Нека t_1 и t_2 се тангентите на дадената кружница конструирани во точките A и B (цртеж десно). Околу произволна точка P на тангентата t_1 опишуваме кружница со радиус $r = 5 \text{ cm}$ и во пресек со t_2 ја наоѓаме точката Q . Од точката O повлекуваме нормала OR на правата PQ и во пресекот на оваа нормала со дадената кружница ја наоѓаме точката S . Во точката S повлекуваме права паралелна со права та PQ и тоа е бараната трета тангента на кружницата.



б) Имаме:

$$\angle COD = \angle COS + \angle SOD = \frac{1}{2}(\angle AOS + \angle SOB) = 90^\circ.$$

в) Бараната плоштина се добива кога од плоштината на трапезот $ABDC$ се одземе плоштината на половина круг со радиус $r = 2 \text{ cm}$.

Имаме

$$P_1 = \frac{AC+BD}{2} \cdot AB = \frac{CS+DS}{2} \cdot AB = \frac{CD}{2} \cdot AB = 10 \text{ cm}^2 \text{ и } P_2 = \frac{4\pi}{2} = 2\pi \text{ cm}^2,$$

$$\text{па е } P = P_1 - P_2 = (10 - 2\pi) \text{ cm}^2.$$

Осмо одделение

1. Нека a и b се произволни природни броеви. Докажи дека барем еден од броевите $a+b$, $a-b$ и ab е делив со 3.

Решение. Секој природен број може да се запише во еден од облиците $3k$, $3k+1$, $3k+2$, $k \in \mathbb{N}$. Можни се следниве случаи:

- Ако барем еден од броевите a и b е од облик $3k$, тогаш нивниот производ е делив со 3.
- Ако двата броја a и b се од облик $3k+1$ или $3k+2$, тогаш нивната разлика е делива со 3.
- Ако едниот од броевите a и b е од облик $3k+1$, а другиот е од облик $3k+2$, тогаш нивниот збир е делив со 3.

2. По намалувањето на цената за 20%, за 240 денари може да се купи 1 метар платно повеќе отколку што пред намалувањето можело да се купи за 270 денари. Определи ја цената на платното пред намалувањето.

Решение. Види го решението на задачата 2 од седмо одделение.

3. Во рамнината на правоаголен координатен систем XOY конструирај правоаголник $ABCD$, ако се познати координатите на три негови темиња: $A(-3, -1)$, $B(5, -1)$, $C(5, 3)$. Определи ги:

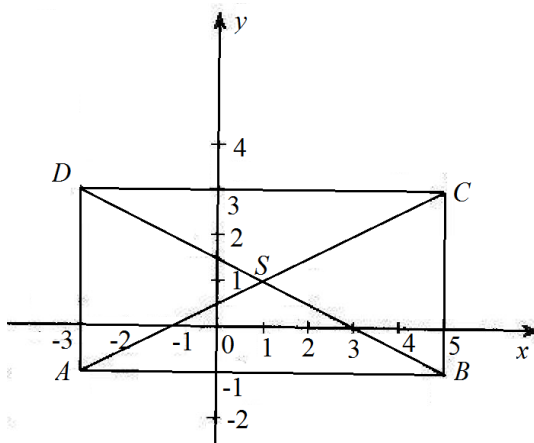
- а) координатите на четвртото теме,
- б) координатите на пресекот на правите AC и BD .
- в) равенките на правите на кои припаѓаат страните и дијагоналите на овој правоаголник.

Решение. а) Координатите на четвртото теме D се $(-3, 4)$.

б) Координатите на пресечната точка S на отсечките AC и BD се

$$x_s = \frac{-3+5}{2} = 1, y_s = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

в) Равенките на правите на кои лежат страните на правоаголникот се



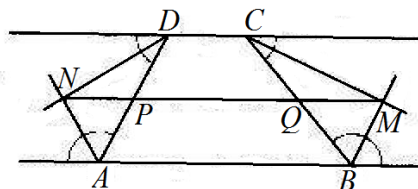
$$x = -3, x = 5, y = -1, y = 3.$$

Равенките на правите на кои лежат дијагоналите на правоаголникот се:

$$y + 1 = \frac{3+1}{5+3}(x+3), y + 1 = \frac{3+1}{-3-5}(x-5), \text{ т.е. } x - 2y + 1 = 0, x + 2y - 3 = 0.$$

4. Основите AB и CD на траpezот $ABCD$ се продолжени на двете страни. Симетралите на надворешните агли на траpezот во темињата A и D се сечат во точката M , а симетралите на надворешните агли во темињата B и C се сечат во точката N . Определи го периметарот на траpezот $ABCD$ ако $MN = 2k$.

Решение. Бидејќи точката M лежи на симетралите на аглите во темињата B и C , таа е еднакво оддалечена од правата AB и од правата CD , што значи дека припаѓа на средната линија на траpezот $ABCD$.



Аналогно, точката N припаѓа на средната линија на траpezот $ABCD$. Понатаму, триаголниците NAP и NDP се рамнокраки (Зошто?), па затоа $NP = AP = PD$. Слично, $MQ = BQ = CQ$. Конечно, за периметарот на траpezот добиваме:

$$\begin{aligned} AB + CD + AD + BC &= 2 \cdot \left(\frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} + AP + BQ \right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{AB + CD}{2} + NP + QM \right) \\ &= 2(PQ + NP + QM) \\ &= 2MN = 4k. \end{aligned}$$

5. Врвот на прав конус е во центарот на едната основа на цилиндар. Другата основа на цилиндарот и основата на конусот лежат во иста рамнина и имаат заеднички центар. Волумените на конусот и цилиндарот се еднакви. Радиусот на основата на цилиндарот е r , а висината на цилиндарот е h .

а) Определи го радиусот на основата на конусот (изразен преку r).

б) Колкав е волуменот на делот од цилиндарот кој е во конусот (изразен со помош на r и h).

Решение. Нека радиусот на основата на конусот е R . Од $V_k = V_c$ следува

$$\frac{R^2 h}{3} = r^2 h, \text{ т.е. } R = r\sqrt{3}.$$

Сега, од сличноста на триагониците BQN и OQS добиваме

$$\frac{BN}{OS} = \frac{R-r}{R},$$

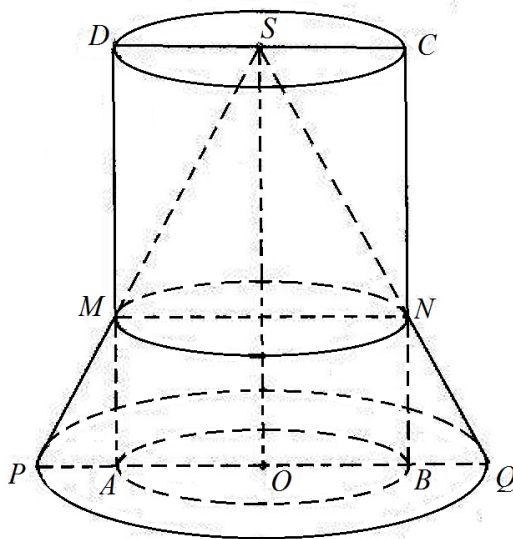
па затоа

$$BN = OS \frac{r\sqrt{3}-r}{r\sqrt{3}},$$

$$h_1 = h \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = h \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

Затоа волуменот на делот од цилиндарот кој се наоѓа во конусот е:

$$V = \pi r^2 h \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$



Сојузен натпревар 1974

Седмо одделение

1. Со делење на некој број со бројот 72 се добива количник n и остаток 68. Определи ги количникот и остатокот ако истиот тој број се подели со 24.

Решение. Дадениот број може да се запише во видот $72n + 68$. Оттука $(72n + 68) : 24$ дава количник $3n + 2$ и остаток 20.

2. Даден е трицифрен број. Со разместување на неговите цифри добиени се сите броеви запишани со тие цифри. Збирот на сите овие броеви е 1998. Со кои цифри е запишан дадениот трицифрен број? Определи ги сите решенија.

Решение. Дадениот број може да има две еднакви цифри и третата да е различна или сите три негови цифри да се различни (сите се различни од нула).

а) Ако сите цифри се различни, да кажеме: a, b, c , тогаш го добиваме дека збирот на броевите

$$100a + 10b + c, 100c + 10a + b, 100b + 10c + a,$$

$$100a + 10c + b, 100b + 10a + c, 100c + 10b + a$$

е еднаков на 1998, т.е. го добиваме равенството

$$222a + 222b + 222c = 1998$$

од каде

$$a + b + c = 9.$$

Според тоа, дадениот број може да биде запишан со цифрит 1, 2, 6 или 1, 3, 5 или 2, 3, 4.

б) Ако дадениот број има само две различни цифри, да кажеме x и y , тогаш збирот на броевите

$$100x + 10x + y, 100x + 10y + x, 100y + 10x + x$$

е еднаков на 1998, односно

$$222x + 111y = 1998,$$

од каде

$$2x + y = 18.$$

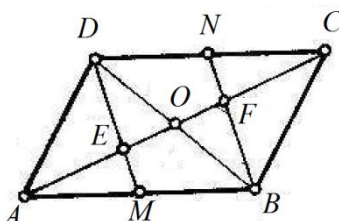
Според тоа, дадениот број може да биде запишан со цифрите 5, 5, 6 или 7, 7, 4 или 8, 8, 2.

3. Збирот на два броја е 135, а 35% од едниот број се еднакви на 28% на другиот број. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека едниот број е a . Тогаш другиот е $135 - a$. Според условот $\frac{35a}{100} = \frac{28(135-a)}{100}$. Оттука добиваме $a = 60$, па другиот број е 75.

4. Даден е паралелограм $ABCD$. Точката M е средина на страната AB , а точката N е средина на страната CD . Докажи дека правите DM и BN ја делат дијагоналата AC на три еднакви дела.

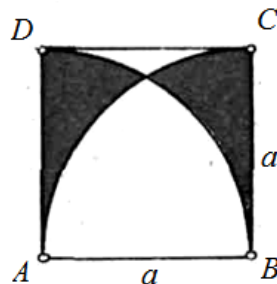
Решение. Нека E, O и F се соодветно пресечните точки на отсечките DM, BD и BN со дијагоналата AC . Бидејќи $ABCD$ е паралелограм, точката O е средина на дијагоналите AC и BD . Бидејќи M е средина на отсечката AB ,



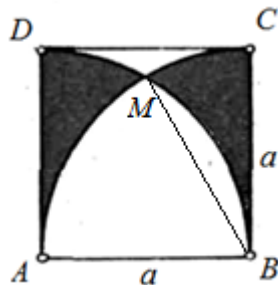
следува дека E е тежиште на триаголникот ABD . Аналогно F е тежиште на триаголникот BCD . Од својствата на тежиштето следува $AE = \frac{2}{3}AO$ и $CF = \frac{2}{3}CO$, па затоа $AF = FC$. Бидејќи $OE = \frac{1}{3}AO$ и $FO = \frac{1}{3}CO$, добиваме $EF = EO + OF = \frac{1}{3}AO + \frac{1}{3}CO = \frac{2}{3}AO = AE = FC$, што и требаше да се докаже.

5. Определи ја плоштината на осенчениот дел на квадратот прикажан на цртежот десно. Центрите на кружниците се точките A и B .

Решение. Половината од осенчената фигура ќе ја добиеме ако од четвртина од површината на кругот со радиус a ги одземеме иеочокот ABM (со агол од 60°) и отсечокот



над тетивата BM од истиот круг (повторно со агол 60°), цртеж лево.



Според тоа плоштината на осенчената фигура е еднаква на

$$P = 2\left(\frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{6} - \left(\frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)\right) = \frac{a^2(3\sqrt{3}-\pi)}{6}.$$

Осмо одделение

1. Основата на права четиристрана призма е ромб со плоштина $\frac{2}{3}k^2$.

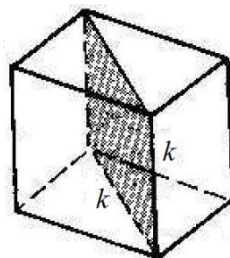
Помалиот дијагонален пресек на призмата е квадрат со плоштина k^2 .

а) Пресметај ја плоштината и волуменот на призмата изразени со помош на k .

б) Определи го k ако мерните броеви на плоштината и волуменот на призмата се еднакви.

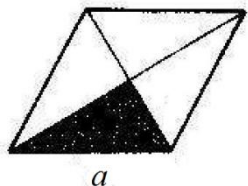
Решение. Од плоштината на малиот дијагонал-
лен пресек заклучуваме дека помалата дијаго-
нала на ромбот и висината имаат должина k
(цртеж десно). Од плоштината на ромбот ја
добиваме непознатата дијагонала:

$$\frac{dk}{2} = \frac{2}{3}k^2, \text{ т.е. } d = \frac{4}{3}k.$$



Страната на ромбот ја пресметуваме од осен-
чениот правоаголен триаголник на цртежот лево. Имаме

$$a^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2 + \left(\frac{2k}{3}\right)^2, \text{ т.е. } a = \frac{5}{6}k.$$



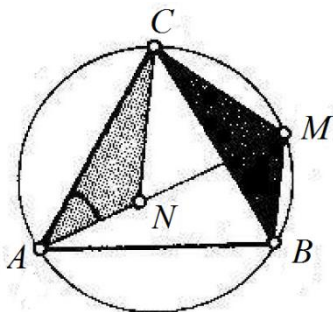
а) За волуменот и плоштината на призмата
имаме:

$$V = \frac{2}{3}k^2k = \frac{2}{3}k^3 \text{ и } P = 2 \cdot \frac{2}{3}k^2 + 4 \cdot \frac{5}{6}k^2 = \frac{14}{3}k^2.$$

б) Имаме $V = P$, односно $\frac{2}{3}k^3 = \frac{14}{3}k^2$, од каде добиваме $k = 7$.

2. Во кружница е впишан рамностран триаголник ABC . Произволна
точка M припака на лакот BC кој не ја содржи точката A . Докажи
дека $BM + CM = AM$.

Решение. Нека N е точка од отсечката
 AM таква што $MN = CM$. Имаме
 $\angle AMC = \angle ABC$, како агли над иста те-
тива во кружница, па затоа триаголникот
 CMN е рамностран, односно $CN = CM$.
За триаголниците ACN и BCM имаме:
 $CN = CM$, $AC = BC$ и $\angle CAN = \angle CBM$,
како агли над истат тетива CM , па затоа
тие се складни. Од складноста на овие



триаголници следува $AN = BM$. Конечно,

$$AM = AN + NM = BM + CM,$$

што и требаше да се докаже.

3. На кружна патека долга 1650 m со константни брзини се движат два моторциклисти. Ако моторциклистите се движат во спротивни насоки се среќаваат секоја минута, а ако се движат во иста насока моторциклистот кој има поголема брзина го стигнува другиот моторциклист секои единаесет минути. Определи ги брзините на моторциклистите.

Решение. Нека побрзиот мотоциклист минува x метри во минута, а поспориот минува y метри во минута. Од првиот услов имаме $x + y = 1650$, а од вториот $x - y = \frac{1650}{11} = 150$. Решението на добиениот систем равенки е $x = 900\text{ m/min}$ и $y = 700\text{ m/min}$. Значи, првиот мотоциклист се движел со брзина 54 km/h , а вториот со брзина 45 km/h .

4. Во правоаголен координатен систем се дадени прави p_1 и p_2 чии равенки се:

$$p'_1: y = x - 4 \quad \text{и} \quad p_2: y - 2x + 2 = 0.$$

а) Пресметај ја плоштината на фигурата определена со правите p_1 и p'_1 и координатните оски.

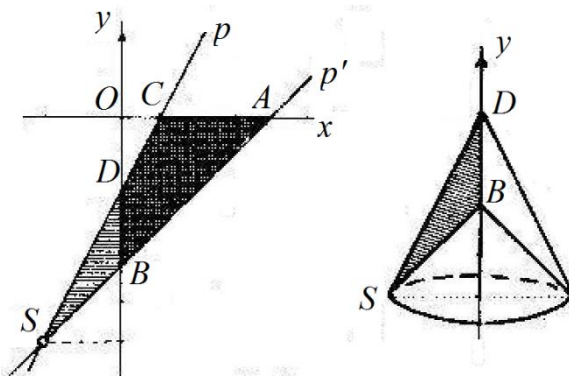
б) Пресметај го волуменот на ротационото тело кое настанува кога триаголникот ограничен со правите p_1 и p'_1 и ординатната оска ротира околу ординатната оска.

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{OAB} - P_{OCD} \\ &= 7\text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

б) Бараниот волумен е еднаков на разликата на волумените на двата конуси со темиња D и B (види цртеж десно). Според тоа:



$$V = V_1 - V_2 = \frac{2^2 \pi \cdot 4}{3} - \frac{2^2 \pi \cdot 2}{3} = \frac{8\pi}{3},$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

5. Реши ја равенката:

$$(0,8x - 0,5)^2 + (0,6x - 1,3)^2 = 4(0,5x - 0,7)(0,5x + 0,7) - 6(0,15x + 0,08)$$

Решение. Со квадрирање се добива линеарна равенка чие решение е $x = 3$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Сојузен натпревар 1975

Седмо одделение

1. Збирот на шест последователни природни броја, од кои ниту еден не е делив со 7, е делив со 21, но не е делив со 42. Докажи!

Опреди шести такви броеви, така што нивниот збир е четирицифрен број и е квадрат на некој природен број.

Решение. Броевите се $7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6$ и нивниот збир е $S=42n+21=21(2n+1)$. Јасно, $21|S$ и при делење на S со 42 се добива остаток 21, т.е. S не е делив со 42.

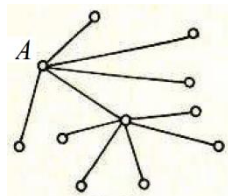
За да овој збир биде квадрат на природен број треба $2n+1=21k^2$, каде k е непарен природен број. За да овој збир биде четирицифрен број, мора $2 < k^2 < 23$. Последното е можно само за $k^2=9$. Сега добиваме $2n+1=21k^2=189$, односно $n=94$. Бараните броеви се: 659, 660, 661, 662, 663 и 664.

2. Опреди го оној двоцифрен број кој е еднаков на збирот на кубот на вредноста на цифрата на десетките и квадратот на вредноста на цифрата на единиците на тој двоцифрен број.

Решение. Нека бараниот број е $\overline{ab}$ ($a \neq 0$). Тогаш $10a+b=a^3+b^2$, па затоа $10a-a^3=b^2-b$, т.е. $a(10-a^2)=b(b-1)$. Очигледно $a \in \{1, 2, 3\}$. За $a=1$ добиваме $9=b(b-1)$ и за $a=3$ добиваме $3=b(b-1)$, што не е можно (Зошто?). За $a=2$ добиваме $12=b(b-1)$, од каде наоѓаме $b=4$. Конечно, бараниот број е 24.

3. Пет отсечки се конструирани од заедничка точка A . Потоа од некои од слободните крајни точки на овие отсечки (не од точката A) се конструирани пет нови отсечки и постапката е повторена неколку пати. На крајот Петар ги избројал слободните краеве и констатирал дека има вкупно 700 слободни краеве. Дали Петар добро ги пребројал слободните краеве?

Решение. Нека од било кој слободен крај се конструирани 5 нови отсечки. Тогаш наместо еден слободен крај добиваме 5 нови слободни краеве, што значи дека бројот на слободните краеве се



зголемил за 4. Со секоја нова конструкција на отсечки од неколку слободни краеве, бројот на слободните креви ќе се зголеми за $4k$, $k \in \mathbb{N}$. Според тоа, вкупниот број слободни краеве ќе биде $4n+5$, па како $700=4 \cdot 175$, заклучуваме дека во броењето е направена грешка.

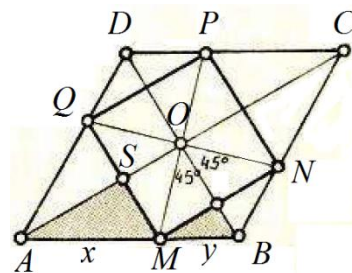
4. Даден е ромб $ABCD$ со $\angle BAD = 60^\circ$. Симетралите на аглите меѓу дијагоналите ги сечат страните на ромбот во точките M, N, P и Q .

а) На кој вид четириаголници припаѓа четириаголникот $MNPQ$?

б) Ако точката M припаѓа на страната AB , пресметај го односот $AM:MB$.

в) Определи го односот на оние отсечоци на големата и малата дијагонала на ромбот кои лежат надвор од четириаголникот $MNPQ$.

Решение. а) Од складноста на триаголниците OVM и OBN следова дека $OM=ON$, а од складноста на триаголниците OAM и OAN следува дека $OM=ON$ ((цртеж десно). На ист начин и $OQ=OP$. Од тука заклучуваме дека $MP=NQ$ и како $\angle MON$ е прав агол, следува дека четириаголникот $MNPQ$ е квадрат.



б) Триаголникот AMQ е рамностран. Страната на овој триаголник да ја означиме со x . Тогаш триаголникот BRM кој е половина од рамностран триаголник има висина $MR = \frac{x}{2}$. Оттука $MR = MB \frac{\sqrt{3}}{2}$, па ако ставиме $MB = y$, добиваме $\frac{x}{2} = y \frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $x = y\sqrt{3}$. Според тоа, $AM:MB = x:y = y\sqrt{3}:y = \sqrt{3}:1$.

в) Од триаголникот AMQ следува $AS = \frac{x\sqrt{3}}{2} = y\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3y}{2}$, а од триаголникот BRM следува $BR = \frac{y}{2}$. Според тоа, $AS:BR = \frac{3y}{2}:\frac{y}{2} = 3:1$.

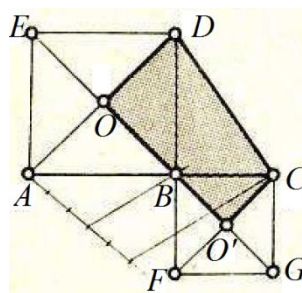
5. Отсечката $AC = a$ со нејзината внатрешна точка B е поделена во однос 3:2. Над отсечките AB и BC , од различни страни во однос на отсечката AC , се конструирани квадрати $ABDE$ и $CBFG$. Нека O и O' се пресеците на дијагоналите на овие квадрати. Определи го одно-

сот на плоштината на четириаголникот $OO'CD$ и плоштината на квадратот со должина на страна AC .

Решение. Четириаголникот $OO'CD$ е составен од три правоаголни триаголници, од кои OBD и $O'BC$ се четвртини од соодветни квадрати (цртеж десно). Бараната плоштина е

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{5}a\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{5}a\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{3a}{5} \cdot \frac{2a}{5} \\ &= \frac{9a^2}{100} + \frac{4a^2}{100} + \frac{6a^2}{50} = \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

а тоа е четвртина од плоштината на квадрат со должина на страна a . Значи бараниот однос е 1:4.



Осмо одделение

1. Елементите на множеството $A = \{a, b, c\}$ се било кои степени на произволни прости двоцифрени броеви помали од 20. Докажи дека меѓу елементите на множеството A постојат два броја такви што збирот или разликата на тие два броја е делива со 5.

Решение. Елементите на множеството A се некои степени на простите броеви 11, 13, 17 и 19. Сите степени на овие броеви завршуваат на една од цифрите 1, 3, 7 или 9. Но, множеството A има три елементи, па затоа меѓу овие броеви или има два броја со иста цифра на единиците, или сите три броја имаат различни цифри на единиците. Во првиот случај разликата, а во вториот случај збирот на два соодветни броја ($3+7$ или $1+9$) завршуваат на нула, а тоа е деливо со 5.

2. Определи ги броевите x, y и z за кои

$$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 4x - 6y - 8z + 3 = 0.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(2x-1)^2 + (3y-1)^2 + (4z-1)^2 = 0.$$

Бидејќи квадрат на реален број е поголем или еднаков на нула, а збир на ненегативни броеви е еднаков на нула само ако тие се еднакви на нула, добиваме $2x-1=3y-1=4z-1=0$, од каде наоѓаме $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ и $z = \frac{1}{4}$.

3. При изработка на еден метален клин отпадоците се 12,5% од употребениот материјал. На тој начин, од едно парче метал се направени точно 100000 такви клинови. Сите добиени отпадоци се повторно стопени во едно парче метал и од него на истиот начин се направени исти такви клинови. Оваа постапка се повторува се додека е можно од отпадоците да се направи барем еден таков клин. Определи го вкупниот број клинови кои се добиени, сметајќи ги и првите 100000 клинови.

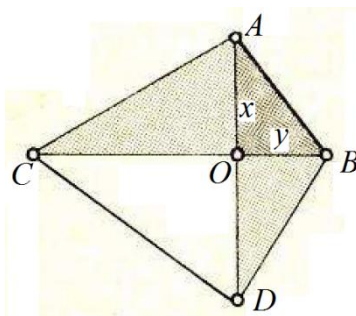
Решение. Отпадоците изнесуваат $\frac{12,5}{100} = \frac{1}{8}$ од употребениот материјал. Според тоа, од отпадоците добиени со изработка на првите 100000 клинови може да се направат $100000 : 8 = 12500$ клинови со $\frac{1}{8}$ отпадоци. Од новите отпадови добиваме $12500 : 8 = 1562$ клинови, со отпадок кој изнесува $\frac{4}{8}$ од еден клин. Сега имаме $\frac{1562+4}{8} = \frac{1566}{8}$ остатоци, па од нив може да се направат 195 клонови со остаток $\frac{6}{8}$. Понатаму, имаме $201 : 8 = 25$ (остаток е 1); $26 : 8 = 3$ (остаток е 2). Конечно, немаме доволно материјал за да се продолжи производството. Значи, изработени се вкупно $100000 + 12500 + 1562 + 195 + 25 + 3 = 114285$ клинови со остаток од $\frac{5}{8}$ материјал за изработка на нов клин.

4. Набљудувач гледа отсечка AB од две точки C и D кои се на растојание 300 m , под агли 30° . Правите AD и BC се заемно нормални. Определи ја должината на отсечката AB .

Решение. Нека O е пресечната точка на правите AD и BC (види цртеж). Правоаголните триаголници ACO и BOD се половинки од рамнострани триаголници (имаат внатрешни агли од $30, 60^\circ$ и 90°). Ако воведеме ознаки $OA = x$ и $OB = y$ добиваме $OC = x\sqrt{3}$ и $OD = y\sqrt{3}$. Сега, од правоаголниот триаголник CDO имаме

$$(x\sqrt{3})^2 + (y\sqrt{3})^2 = 300,$$

од каде добиваме



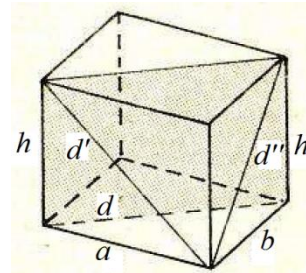
$$x^2 + y^2 = 30000.$$

Конечно, од правоаголниот триаголник AOB добиваме

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{30000} = 100\sqrt{3}.$$

5. Рабовите на основа на квадар се однесуваат како 4:3, дијагоналите на бочните сидови се однесуваат како $\sqrt{20}:\sqrt{13}$, а плоштината на дијагоналниот пресек се однесува спрема волуменот на квадарот како 2:1. Определи ги плоштината и волуменот на овој квадар.

Решение. Нека a и b се основните рабови, d' и d'' соодветните дијагонали на бочните сидови, d дијагоналата на основата и h висината на квадарот (цртеж десно). Од дадените размери ги добиваме пропорциите $a:b=4:3$, $d':d''=\sqrt{20}:\sqrt{13}$, $dh:abh=2:1$



Од овде $d'^2:d''^2=20:13$, односно

$$(a^2 + h^2):(b^2 + h^2) = 20:13 \text{ и } d:ab = 2:1.$$

Од $d:ab=2:1$ следува $\sqrt{a^2 + b^2}:ab=2:1$, т.е. $(a^2 + b^2):a^2b^2=4:1$

Сега, од

$$a:b=4:3 \text{ и } (a^2 + b^2):a^2b^2=4:1$$

имаме $4b=3a$ и $a^2 + b^2=4a^2b^2$, па со замена за $b=\frac{3}{4}a$, по средовањето добиваме $a^2=\frac{25}{36}$, т.е. $a=\frac{5}{6}$. Понатаму, $b=\frac{3}{4}a=\frac{5}{8}$.

Сега, со замена во $(a^2 + h^2):(b^2 + h^2)=20:13$ добиваме

$$\left(\frac{25}{36} + h^2\right):\left(\frac{25}{64} + h^2\right) = 20:13,$$

од каде $h^2=\frac{25}{144}$, односно $h=\frac{5}{12}$.

Конечно, $V=abh=\frac{125}{576}$.

Сојузен натпревар 1976

Седмо одделение

1. Морска вода содржи 5% сол. Колку килограми обична вода треба да се измеша со 40 kg морска вода за да добиената мешавина содржи 2% сол?

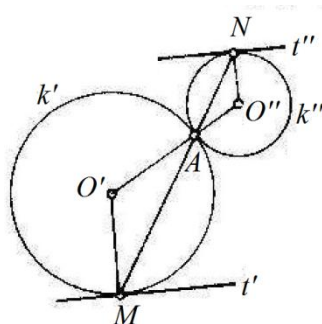
Решение. Во 40 kg морска вода има $40 \cdot 0,05 = 2 \text{ kg}$ сол. Ако дотури-
ме 60 kg обична вода, ќе имаме 100 kg мешавина со 2 kg сол, однос-
но со 2% сол.

2. Определи ја најмалата дробка со која треба да се поделат дробките $\frac{8}{15}$, $\frac{12}{35}$ и $\frac{20}{21}$ така што во сите три случаи количникот ќе биде природен број.

Решение. Бараната дробка да ја означиме со $\frac{a}{b}$. Тогаш мора да бидат
цели броеви следниве производи $\frac{8}{15} \cdot \frac{b}{a}$, $\frac{12}{35} \cdot \frac{b}{a}$ и $\frac{20}{21} \cdot \frac{b}{a}$. Ова же важи
ако $b = 105a$, бидејќи $\text{NZS}(15, 21, 35) = 105$. За да дробката $\frac{a}{b}$ биде
најмала, треба да биде $a = 1$, а $b = 105n$ треба да биде најголем
природен број. Бидејќи најголем природен број од дадениот вид не
постои, заклучуваме дека не постои ниту најмала дробка $\frac{a}{b} = \frac{1}{105n}$.

3. Кружниците k' и k'' надворешно се допираат во точката А. Права која ја содржи точката А ја сече по втор пат кружницата k' во точката М и ја сече по втор кружницата k'' во точката N. Докажи дека тангентите t' и t'' на дадените кружници, за кои М и N се допирни точки, се меѓусебно паралелни.

Решение. Триаголниците $O'AM$ и $O''AN$
се рамнокраки, па затоа $\angle AMO' = \angle MAO'$
и $\angle ANO'' = \angle NAO''$ (цртеж десно). Пона-
таму $\angle MAO' = \angle NAO''$ (накрсни агли), па
затоа $\angle AMO' = \angle ANO''$. Бидејќи А е точ-
ка од правата MN, следува дека аглите
 $\angle AMO'$ и $\angle ANO''$ наизменични, па како
тие се еднакви заклучуваме дека



$O'M \parallel O''N$. Но, $t'' \perp O''N$ и $t' \perp O'M$, па затоа од $O'M \parallel O''N$ следува дека $t' \parallel t''$.

4. Докажи дека сите квадрати за кои плоштината во cm^2 и волуменот во cm^3 се изразени со ист број, имаат еднаков збир на реципрочните вредности на должините на трите раба кои излегуваат од исто теме.

Решение. Од формулите за плоштина и волумен на квадрат имаме $2ab + 2bc + 2ca = abc$. Ако ова равенство го поделиме со $2abc \neq 0$, добиваме

$$\frac{2ab}{2abc} + \frac{2bc}{2abc} + \frac{2ca}{2abc} = \frac{abc}{2abc}, \text{ т.е. } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2},$$

што и требаше да се докаже.

5. Нека n е произволен број запишан со 2000 цифри и делив со 9. Збирот на цифрите на бројот n да го означиме со a , збирот на цифрите на a да го означиме со b и збирот на цифрите на b да го означиме со c . Определи го бројот c .

Решение. Збирот на цифрите на број n е делив со 9 и не е поголем од $2000 \cdot 9 = 18000$, т.е. $a \leq 18000$. Збирот на цифрите b на бројот a е делив со 9 и не е поголем од 36 (за $a = 9999$ е еднаков на 36), т.е. $b \leq 36$. Збирот на цифрите c на бројот b е делив со 9 и не е поголем од 9. Значи, $c = 9$.

Осмо одделение

1. Природниот број n е зголемен за својата четирикратна реципрочна вредност и тој број е квадриран. Од добиениот број е одземен квадратот на четирикратната реципрочна вредност на бројот n и е добиен број кој не е делив со 5. Докажи!

Решение. Имаме

$$\left(n + \frac{4}{n}\right)^2 - \left(\frac{4}{n}\right)^2 = n^2 + 8 + \left(\frac{4}{n}\right)^2 - \left(\frac{4}{n}\right)^2 = n^2 + 8.$$

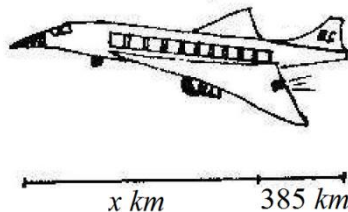
Според тоа, добиениот број е природен. Квадрат на природен број завршува на цифрата 0, 1, 4, 5, 6 или 9, па затоа бројот $n^2 + 8$ завршува на цифрата 8, 9, 2, 3, 4 или 7. Последното значи дека бројот $n^2 + 8$ не е делив со 5 за ниту еден природен број n .

2. Авион ги прелетал првите 385 km со брзина од 220 km/h . Преостанатиот дел од патот го прелетал со брзина од 330 km/h . Средната брзина на целиот пат била 250 km/h . Колкав пат прелетал авионот?

Решение. Првиот дел од патот авионот го прелетал за $\frac{385}{220} = 3,5$ часа. Преостанатиот дел од патот, т.е. $x\text{ km}$ авионот ги прелетал за t часови. Оттука ги добиваме равенките $x = 330t$ и $385 + x = 250(3,5 + t)$. Ако од првата замениме во втората равенка $t = \frac{x}{330}$, ја добиваме равенката

$$385 + x = 250\left(3,5 + \frac{x}{330}\right),$$

чие решение е $x = 2021,25\text{ km}$. Според тоа, авионот прелетал $2406,25\text{ km}$.



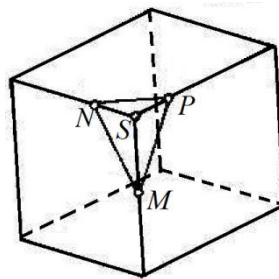
3. Рамнина сече коцка така што три раба на коцката со заедничко теме сече во точки кои тие рабови ги делат во односи 2:1, 3:1 и 4:1, сметајќи од заедничкото теме. Определи го односот на волумените на телата на кои оваа рамнина ја дели коцката.

Решение. Нека a е работ, а $V = a^3$ е волуменот на коцката. Отсеченото тело е пирамидата $SMNP$. Волуменот V_1 на оваа пирамида ќе го пресметаме ако за база го земеме правоаголниот триаголник SMN , а отсечката $SP = \frac{a}{4}$ за висина. Имаме

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^3}{72}.$$

Волуменот V_2 на преостанатиот дел од коцката е $V_2 = V - V_1 = \frac{71a^3}{72}$.

Јасно, $V_2 : V_1 = 71:1$.

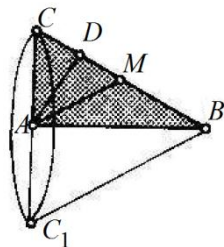


4. Даден е правоаголен триаголник ABC . Од темето A на правиот агол е повлечена тежишната линија AM . Висината AD на триаголникот ACM ја полови спротивната страна.

а) Определи ги аглите на триаголникот ABC .

б) Пресметај ги плоштината и волуменот на телото кое се добива со вртење на триаголникот ABC околу страната AB , ако должината на отсечката AD е $k\sqrt{3}$.

Решение. а) Во правоаголен триаголник тежишната линија повлечена кон хипотенузата е половина од хипотенузата, па затоа $AM = CM$ (цртеж десно). Понатаму, бидејќи $DM = CD$, $AD = AD$ и $\angle ADM = \angle ADC = 90^\circ$, заклучуваме дека триаголниците ADM и ADC се складни. Значи, $AM = AC$. Според тоа, триаголникот AMC има еднакви страни, па затоа тој е рамностран. Оттука следува дека $\angle ACB = 60^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$ и по претпоставка $\angle BAC = 90^\circ$.



б) Бидејќи $AD = k\sqrt{3}$, од $AD = \frac{AC\sqrt{3}}{2}$ следува дека $AC = 2k$. Значи, $BC = 4k$ и $AB = 2k\sqrt{3}$. Добиеното тело е конус со радиус AC , висина AB и изводница BC . Според тоа,

$$P = \pi \cdot (2k)^2 + \pi \cdot 2k \cdot 4k = 12k^2\pi \text{ и } V = \frac{1}{3}\pi \cdot (2k)^2 \cdot 2k\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}k^3\pi}{3}.$$

5. Во трапез $ABCD$ права паралелна со основата AB ги сече отсечките AC и BC соодветно во точките M и N . Докажи дека плоштините на триаголниците DAM и DBN се еднакви.

Решение. Триаголниците ACD и BCD имаат заедничка страна CD , а висините кои им соодветствуваат на овие страни се еднакви на висината на трапезот h (цртеж десно). Затоа

$$P_{ACD} = \frac{CD \cdot h}{2} = P_{BCD}.$$

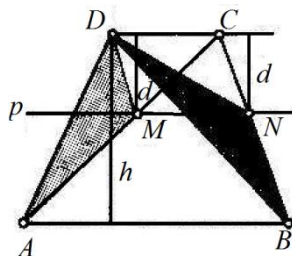
Триаголниците MCD и NCD имаат заедничка страна CD , а висините им се еднакви на нормалното растојание d меѓу паралелните прави CD и p , па затоа

$$P_{MCD} = \frac{CD \cdot d}{2} = P_{NCD}.$$

Сега, од

$$P_{AMD} = P_{ACD} - P_{MCD} \text{ и } P_{BND} = P_{BCD} - P_{NCD}$$

следува $P_{AMD} = P_{BND}$, што и требаше да се докаже.



Сојузен натпревар 1977

Седмо одделение

1. Во еден ред стојат 1000 ученици. Дозволено е своите места во редот да ги заменат само оние ученици (т.е. парови ученици) кои имаат заеднички сосед. Дали со ваква замена на местата може ученик кој стои на еден крај на редот да стигне на другиот крај на редот.

Решение. Со броевите од 1 до 1000 да ги означиме сите места на кои стојат учениците. Според условот местата може да ги заменат само учениците чии броеви се разликуваат за 2. Според тоа, ученик кој е на непарно место повторно оди на непарно место. Затоа, првиот ученик кој има место број 1 никогаш не може да дојде на местото на последниот ученик кој има место број 1000.

2. Производот на четири последователни парни природни броеви е 13440. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека се дадени последователните парни броеви $2n$, $2n+2$, $2n+4$ и $2n+6$. Тогаш

$$2n(2n+2)(2n+4)(2n+6)=13440,$$

од каде добиваме

$$n(n+1)(n+2)(n+3)=840=2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Бидејќи 5 и 7 се прости броеви, еден од множителите мора да е бројот $6=2 \cdot 3$, па другиот множител е $2 \cdot 2=4$. Според тоа,

$$n(n+1)(n+2)(n+3)=4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7,$$

па затоа бараните броеви се 8, 10, 12 и 14.

3. Работниците Андреј, Борис и Цане заеднички завршуваат една работа за 1 час. Познато е дека секој од нив истата работа ја завршува за цел број часови. Освен тоа, се знае дека Борис работи побрзо од Андреј, а поспоро од Цане. За колку часа оваа работа ќе ја заврши секој од тројцата работници работејќи сам?

Решение. Нека претпоставиме дека Андреј сам ќе ја заврши работата за a часови, Борис за b и Цане за c часови. Тогаш за 1 час тие ќе сработат соодветно $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$ -ти дел од работата. Бидејќи работата заедно ја завршуваат за 1 час добиваме $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Но, a, b, c се

природни броеви за кои важи $c < b < a$, па оттука лесно следува дека $a=6, b=3, c=2$ саати.

4. Должината на висината на трапезот е еднаква на 6 cm , а должината на едната основа е 4 cm . Внатрешните агли на трапезот на таа основа се 120° и 135° .

а) Конструирај го овој трапез.

б) Определи ги периметарот и плоштината на овој трапез.

Решение. а) Прво ја конструираме отсечката $CD=4\text{ cm}$, а потоа аглиите

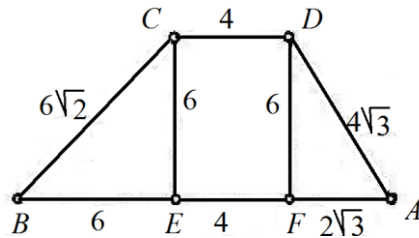
$$\angle C = 135^\circ = 90^\circ + 45^\circ \text{ и}$$

$$\angle D = 120^\circ = 2 \cdot 60^\circ.$$

Потоа, конструираме права p паралелна на CD која е на растојание 6 cm од CD . Пресечните точки на правата p со краците претходно конструираните агли се темињата A и B на трапезот.

б) Повлекуваме висини CE и DF (види цртеж). Тогаш бидејќи $\angle BCE = 45^\circ$ добиваме $BE = CE = 6\text{ cm}$ и $BC = 6\sqrt{2}$, а од $\angle ADF = 30^\circ$ следува $DF = \frac{AD\sqrt{3}}{2}$, па затоа $AD = 4\sqrt{3}$ и $FA = \frac{1}{2}AD = 2\sqrt{3}$.

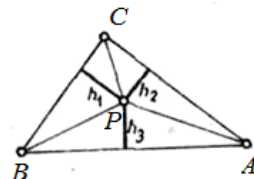
Сега ги знаеме страните $CD = 4\text{ cm}$, $AD = 4\sqrt{3}\text{ cm}$, $AB = 10 + 2\sqrt{3}\text{ cm}$ и $BC = 6\sqrt{2}\text{ cm}$, па затоа $O = AB + BC + CD + DA = 14 + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{3}\text{ cm}$ и $P = \frac{AB+BC}{2} \cdot h = 42 + 6\sqrt{3}\text{ cm}^2$.



5. Даден е триаголник со должини на страни 3, 4 и 5. Дали постои точка во внатрешноста на триаголникот која од секоја страна на триаголникот е оддалечена помалку од 1?

Решение. Бидејќи $3^2 + 4^2 = 5^2$, дадениот триаголник е правоаголен и неговата плоштина е $P = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$.

Да претпоставиме дека постои точка P во триаголникот ABC таква што нејзините расто-



јанија до страните BC, CA, AB се h_1, h_2, h_3 и важи $h_1 < 1, h_2 < 1, h_3 < 1$.
Тогаш

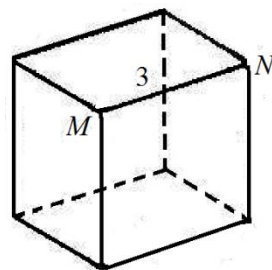
$$\begin{aligned} 6 &= P_{ABC} = P_{BCP} + P_{CAP} + P_{ABP} \\ &= \frac{3h_1}{2} + \frac{4h_2}{2} + \frac{6h_3}{2} < \frac{3 \cdot 1}{2} + \frac{4 \cdot 1}{2} + \frac{6 \cdot 1}{2} = 6 \end{aligned}$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

Осмо одделение

- Дали е можно рабовите на коцката да ги означиме со различни броеви 1, 2, 3, ..., 11, 12 така што збирот на броевите придружени на три раба кои излегуваат од исто теме, за сите темиња на коцката да е еднаков?

Решение. Ако предложеното означување е можно, тогаш збирот на сите осум зборови придружени на темињата на коцката ќе биде $2(1+2+3+\dots+12)$. На цртежот десно гледаме дека бројот 3 кој е придружен на работ MN се јавува во збирот на броевите на темињата M и N . Тоа значи дека секој од броевите 1, 2, 3, ..., 11, 12 се јавува во зборовите два пати, па затоа збирот на осум еднакви природни броеви ќе биде $2 \cdot 78 = 156$. Но, бројот 156 не е делив со 8, што значи дека бараното означување не е можно.



- а) Докажи дека меѓу било кои пет цели броеви постојат два броја чија разлика е делива со 3.

б) Докажи дека меѓу било кои пет цели броеви постојат три броја чиј збир е делив со 3.

Решение. Можни остатоци при делење со 3 се 0, 1 и 2. Затоа секој природен број може да се запише во еден од облиците $3m$, $3n+1$ и $3p+2$, каде $m, n, p \in \mathbb{N}$. Тоа значи дека множеството природни броеви е поделено на три класи и во секоја класа се броеви кои при делење со 3 даваат ист остаток.

а) Меѓу пет броеви мора два да припаѓаат на иста класа, што значи дека нивната разлика е делива со 3.

б) Ако меѓу петте броеви се наоѓаат три броја кои припаѓаат на иста класа, тогаш е јасно дека нивниот збир е делив со 3. Ако не постојат

три броја кои припаѓаат на иста класа, тогаш од секоја класа мора да има барем по еден претставник па нивниот збир е делив со 3. Провери!

3. Правата $y=ax+b$ минува низ точката $T(0,6)$, со координатните оски формира триаголник со плошина 24 и не минува низ третиот квадрант.

а) Определи ги a и b .

б) Определи го волуменот на телото кое се добива со ротација на на добиениот триаголник околу неговата најдолга страна.

Решение. а) Триаголникот OST е правоаголен (цртеж десно) и неговата плошина е еднаква на 24, па затоа

$$24 = P = \frac{1}{2} OT \cdot OS = 3OS,$$

од каде следува $OS=8$. Значи, правата $y=ax+b$ минува низ точките $T(0,6)$ и

$S(8,0)$, па затоа $b=6$ и $8a+b=0$, од каде наоѓаме $a=-\frac{3}{4}$.

б) Со ротација околу најдолгата страна триаголникот формира двостран конус со радиус OH и висина ST . Имаме,

$$ST = \sqrt{OS^2 + OT^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ и}$$

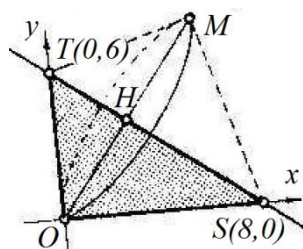
$$24 = P = \frac{ST \cdot OH}{2} = 5OH, \text{ т.е. } OH = 4,8.$$

За плоштината на двојниот конус имаме

$$P = \pi \cdot OH \cdot OT + \pi \cdot OH \cdot OS = 67,2\pi,$$

а за волуменот имаме

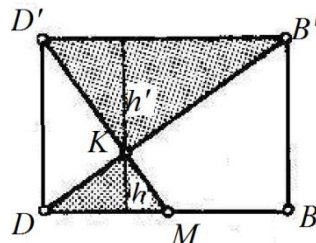
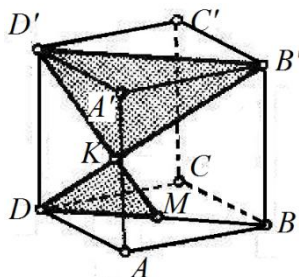
$$V = \frac{\pi}{3} OH^2 \cdot SH + \frac{\pi}{3} OH^2 \cdot HT = \frac{\pi}{3} OH^2 \cdot (SH + HT) = \frac{\pi}{3} OH^2 \cdot ST = 76,8\pi.$$



4. Дадена е коцка $ABCA'B'C'D'$ со должина на раб a . Пресекот на дијагоналите на основата $ABCD$ е точката M . Отсечките DB' и MD' се сечат во точката K . Определи ги плоштините на триаголниците KDM и $KB'D'$.

Решение. Триаголниците KDM и $B'D'K$ припаѓаат на правоаголникот $BDD'B'$, чии страни се $BB'=a$ и $BD=a\sqrt{2}$. Од $DM \parallel B'D'$ следува дека триаголниците KDM и $B'D'K$ се слични, па затоа

$h:h'=DM:D'B'=1:2$. Значи, $h=\frac{1}{2}h'$, па како $h+h'=a$, добиваме дека $h=\frac{a}{3}$ и $h'=\frac{2a}{3}$. Сега имаме:



$$P_{KMD} = \frac{1}{2} DM \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{12} \text{ и}$$

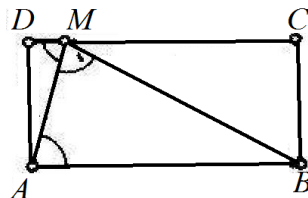
$$P_{B'D'K} = \frac{1}{2} B'D' \cdot h' = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}.$$

5. Даден е правоаголник $ABCD$ чија страна AB е два пати подолга од страната BC . На страната CD е избрана точка M таква што $\angle AMD = \angle AMB$.

а) Пресметај го $\angle AMB$.

б) Ако должината на отсечката DM е еднаква на 1, пресметај ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

Решение. а) Од $AB \parallel CD$ следува $\angle BAM = \angle AMD$ (наизменични агли), па затоа $\angle BAM = \angle AMB$ (цртеж десно). Според тоа, триаголникот ABM е рамнокрак и $BM = AM$. Хипотенузата BM на правоаголниот триаголник BCM е два пати поголема од катетата (бидејќи по претпоставка $AB = 2BC$, а $BM = AB$).



Како што знаеме, ваков триаголник е половина од рамностран триаголник, па затоа $\angle BMC = 30^\circ$. Конечно, $\angle AMB + \angle AMD = 150^\circ$, односно $\angle AMB = \angle AMD = 75^\circ$.

б) Нека $BC = b$. Тогаш $CD = 2b$. Бидејќи $CD = CM + DM$, а $DM = 1$ и $CM = \sqrt{BM^2 - BC^2} = b\sqrt{3}$, добиваме $2b = b\sqrt{3} + 1$, од каде наоѓаме $b = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}$. Сега плоштината на триаголникот е

$$P = 2b^2 = 2(2 + \sqrt{3})^2 = 2(7 + 4\sqrt{3}).$$

Сојузен натпревар 1978

Седмо одделение

1. Докажи дека $7^{10000} - 1$ е деливо со 10.

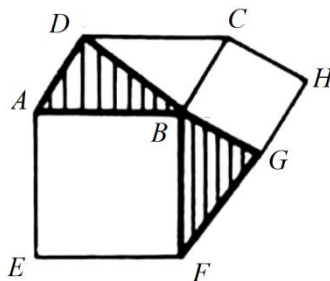
Решение. Од $(10a+a)(10b+1)=100ab+10(a+b)+1$ следува дека производот на два броја чии цифри на единиците се 1 има цифра на единиците 1. Понатму, $7^4 = 49 \cdot 49 = 2401$, па затоа цифрата на единиците на $7^{10000} = (7^4)^{2500} = 2041^{2500}$ е 1. Според тоа, цифрата на единиците на бројот $7^{10000} - 1 = 2401^{2500} - 1$ е 0, што значи дека тој е делив со 10.

2. Над страните AB и BC на паралелограмот $ABCD$ од надворешната страна се конструирани квадрати $AEFB$ и $BGHC$. Докажи дека отсечката GF е еднаква на една од дијагоналите на паралелограмот $ABCD$.

Решение. За триаголниците BGF и ABD важи $AB = BF$ како страни на квадрат и $BG = BC = AD$. Од $\angle ABF = \angle CBG = 90^\circ$ следува

$$\angle ABC + \angle FBG = 180^\circ,$$

па затоа $\angle FBG = \angle BAD$. Според тоа, $\triangle BGF \cong \triangle ABD$. Оттуја следува $GF = BD$, што и требаше да се докаже.



3. Двукратната плоштина на правилен шестаголник е еднаква на трикратната плоштина на рамностран триаголник. Определи го односот на периметрите на шестаголникот и триаголникот.

Решение. Ако a е должината на страната на шестаголникот, а b е должината на страната на триаголникот, тогаш $2 \cdot 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 3 \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$, од каде добиваме $4a^2 = b^2$. Бидејќи $a, b > 0$, од последното равенство следува $b = 2a$, т.е. $6a = 3b$. Според тоа, периметрите на дадените фигури се еднакви, па нивниот однос е 1:1.

4. Во разностран триаголник ABC должината на висината повлечена од темето C кон страната AB е еднаква на збирот на должините на другите две висини. Изрази ја должината на страната AB во функција од должините на другите две страни. Потоа докажи дека не постојат триаголници кои го исполнуваат дадениот услов, а кај кои должината на страната BC е еднаква на 6 и должините на другите две страни се изразуваат со природни броеви.

Решение. Нека должините на страните AB, BC, CA се c, a, b соодветно, а должините на соодветните висини се h_c, h_a, h_b . Од

$$P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

следува

$$h_a = \frac{2P}{a}, h_b = \frac{2P}{b}, h_c = \frac{2P}{c}.$$

Сега, од условот $h_c = h_a + h_b$ добиваме $\frac{2P}{c} = \frac{2P}{a} + \frac{2P}{b}$, односно $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Оттука добиваме $c = \frac{ab}{a+b}$.

Ако $a = 6$, тогаш

$$c = \frac{6b}{6+b} = \frac{6b+36-36}{6+b} = 6 - \frac{36}{6+b}.$$

Според тоа, треба c да е природен број и $c = 6 - \frac{36}{6+b}$. Според условот на задачата последното е можно само ако $b=6, c=3$ или $b=3, c=2$ или $b=12, c=4$ или $b=30, c=5$. Случајот $b=6, c=3$ отпаѓа, бидејќи триаголникот треба да е разностран, а преостанатите случаи отпаѓаат бидејќи не е исполнето неравенството на триаголник.

5. Во 100×100 табела се запишани произволни десет илјади броеви. Со a_1 да го означиме збирот на броевите во првата колона, со a_2 збирот на броевите во втората колона итн. со a_{100} збирот на броевите во стотата колона. Понатаму, со b_1 да го означиме збирот на броевите во првиот ред, со b_2 збирот на броевите во вториот ред итн. со b_{100} збирот на броевите во стотиот ред. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_{100} - b_{100}).$$

Решение. Дадениот израз може да се запише во видот

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{100}) - (b_1 + b_2 + \dots + b_{100})$$

и тој еднаков на нула, бидејќи во првата заграда е збирот на сите 10000 броеви (збирот на колоните), а исто така и збирот во втората

заграда е еднаков на збирот на сите 10000 броеви (збирот на редовите).

Осмо одделение

1. Сад е наполнет со стопроцентен алкохол. Одлеваме 2l алкохол и долеваме исто толку дестилирана вода. Оваа постапка ја повторуваме уште еднаш, т.е. одлеваме 2l мешавина и долеваме 2l дестилирана вода. На тој начин во садот добиваме 36% раствор алкохол. Колку литри раствор содржи овој сад?

Решение. Кога од x литри алкохол ќе одлееме 2 литри и долееме 2 литри вода во растворот ќе има $x-2$ литри алокохол, т.е. ќе добиеме раствор со $\frac{100(x-2)}{x}$ проценти алкохол. Вкупното количество чист алкохол по второто прелевање ќе биде $x-2-2\frac{x-2}{x}$ литри, а тоа според условот е $0,36x$. Значи, $x-2-2\frac{x-2}{x}=0,36x$. Последната равенка е еквивалентна на равенката $x(x-2)-2(x-2)=0,36x^2$, т.е. на равенката $(x-2)^2=(0,6x)^2$. Бидејќи $x-2$ и $0,6x$ се позитивни броеви добиваме $x-2=0,6x$, т.е. $x=5$ литри.

2. Трицифрен број е 33 пати поголем од збирот на своите цифри. Докажи дека овој број е делив со 9, а потоа определи го овој трицифрен број.

Решение. Нека $100a+10b+c$ е бараниот број. Тогаш

$$100a+10b+c=33(a+b+c).$$

Десната страна на последното равенство е делива со 3, па затоа и бројот $100a+10b+c$ е делив со 3. Тоа значи дека $a+b+c=3k$. Сега имаме $100a+10b+c=99k$, што значи дека бараниот број е делив со 9. Затоа $a+b+c=9$ или $a+b+c=18$ или $a+b+c=27$. Бидејќи

$$33 \cdot 9 = 297 \neq 33(2+9+7),$$

$$33 \cdot 18 = 594 = 33(5+9+4) \text{ и}$$

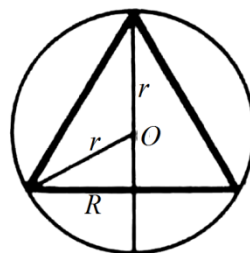
$$33 \cdot 27 = 891 \neq 33(8+9+1),$$

добиваме дека бараниот број е 594.

3. Од круг со радиус r исечен е впишаниот рамностран триаголник. Со помош на r изрази ги плоштината и волуменот на телото кое се до-

бива со ротација на преостанатиот дел од кругот околу една своја оска на симетрија.

Решение. Со R и H да ги означиме должините на радиусот и висината на конусот кој се добива со ротација на исечениот рамностран триаголник и да ги изразиме преку r .
Имаме $H = \frac{3r}{2}$ и $R = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ (види цртеж десно).



За волуменот на телото добиваме

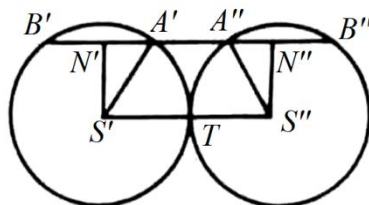
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{23}{24}\pi r^3.$$

За плоштината на телото добиваме

$$P = 4\pi r^2 + \pi r^2 + \pi R \cdot 2R = \frac{25}{4}\pi r^2.$$

4. Две кружници со радиус r се допираат надворешно. Конструирај права која ги сече двете кружници така што тие на неа определуваат три отсечки со еднаква должина.

Решение. *Анализа.* Нека N' и N'' се подножјата на висините од центрата на кружниците на бараните отсечки. Ако со x ја означиме должината на овие отсечки, тогаш $A'N' = A''N'' = \frac{x}{2}$. Но, $S'A' = S''A''$,



па затоа правоаголните триаголници $A'N'S'$ и $A''N''S''$ се складни. Според тоа, $S'N' = S''N''$, па затоа четириаголникот $S'S''N''N'$ е правоаголник. Според тоа, $N'N'' = 2r$ и како $A'N' = A''N'' = \frac{x}{2}$ и $A'A'' = x$, добиваме $2r = 2x$, односно $r = x$. Според тоа, триаголникот $S'TA'$ е рамностран.

Конструкција. Го конструираме рамностраниот триаголник $S'TA'$. Потоа низ A' повлекуваме права p паралелна на правата $S'S''$ и тоа е бараната права.

Доказот и дискусијата следуваат од анализата и конструкцијата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

5. Во 100×100 табела се запишани произволни десет илјади броеви. Со a_1 да го означиме збирот на броевите во првата колона, со a_2 збирот

на броевите во втората колона итн. со a_{100} збирот на броевите во стотата колона. Понатаму, со b_1 да го означиме збирот на броевите во првиот ред, со b_2 збирот на броевите во вториот ред итн. со b_{100} збирот на броевите во стотиот ред. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_{100} - b_{100}).$$

Решение. Види го решението на задачата 5 за *седмо одделение*.

Сојузен натпревар 1979

Седмо одделение

1. Стрелец гаѓа во мета и за секој погодок добива 5 поени, а за секое промашување му се одземаат 3 поени. Стрелецот имал лош ден и по серија стрелања, кои биле повеќе од 10, а помалку од 20, освоил точно нула бодови. Колку пати стрелал стрелецот и колку пати ја погодил метата?

Решение. Ако стрелецот имал m погодоци и n промашувања, тогаш $5m - 3n = 0$ и $10 < m + n < 20$. Единствен пар природни броеви кој ги задоволува двата услови е $m = 6, n = 10$. Значи, стрелоцот стрелал 16 пати и 6 пати ја погодил метата.

2. Природниот број a не е делив со 5. Определи го остатокот кој се добива при делење на бројот a^4 со бројот 5.

Решение. Број a кој не е делив со 5 може да се запише во облик $5k \pm 1$ или $5k \pm 2$. Имаме

$$a^2 = (5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1 = 5m + 1 \text{ или}$$

$$a^2 = (5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 5(5k^2 \pm 4k) + 1 = 5n + 4.$$

Ако quadriраме уште еднаш добиваме

$$a^4 = (5m + 1)^2 = 5(5m^2 + 2m) + 1 = 5M + 1 \text{ или}$$

$$a^4 = (5n + 4)^2 = 5(5n^2 + 8n + 3) + 1 = 5N + 1,$$

па бараниот остаток е 1.

3. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$A = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 12 + \dots + 100 \cdot 200 \cdot 400}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \dots + 100 \cdot 300 \cdot 900}.$$

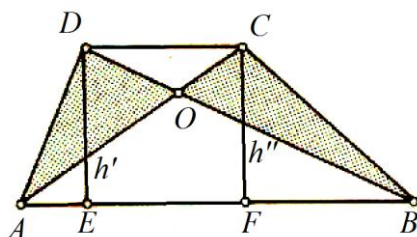
Решение. Имаме

$$A = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4(1 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3)}{1 \cdot 3 \cdot 9(1 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 9} = \frac{8}{27}.$$

4. Во четириаголник $ABCD$ кај кој страните не се еднакви дијагоналите AC и BD се сечат во точката O . Ако плоштините на триаголниците ADO и BCO се еднакви, докажи дека четириаголникот $ABCD$ е трапез.

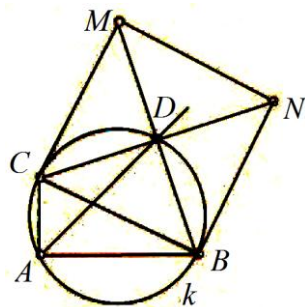
Решение. Ако плоштините на триаголниците ADO и BCO се еднакви, тогаш со додавање на триаголникот ABO добиваме дека и плоштините на триаголниците ABD и ABC се еднакви. Значи, $\frac{AB \cdot h'}{2} = \frac{AB \cdot h''}{2}$, па затоа $h' = h''$, т.е.

$DE = CF$. Според тоа, четириаголникот $CDEF$ е правоаголник, па затоа $DC \parallel AB$. Но страните AB и CD не се еднакви, што значи дека четириаголникот $ABCD$ е трапез.



5. Над хипотенузата на правоаголен триаголник е конструиран квадрат кој не го содржи темето на правиот агол на дадениот триаголник. Докажи дека симетралата на правиот агол на дадениот триаголник минува низ центарот на квадратот.

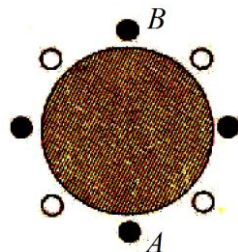
Решение. Нека A е темето на правиот агол, $BCMN$ е квадрат и D е центарот на квадратот (цртеж десно). Бидејќи аголот BDC е прав, добиваме дека кружницата k опишана околу триаголникот ABC ја содржи точката D . Тетивите CD и BD се еднакви меѓу себе, како полови од дијагоналите на квадратот. Затоа перифериските агли BAD и CAD над овие тетиви се еднакви, што значи дека AD е симетрала на правиот агол на дадениот триаголник, што и требаше да се докаже.



Осмо одделение

1. На некоја свечена вечера шефот на салата добил задача околу една тркалезна маса да распореди четири мажи и определен број жени, и тоа така што ниту една жена да не седи до друга жена, а наспроти (дијааметрално) секое лице да седи лице од спротивниот пол. Дали шефот на салата успеал да направи таков распоред?

Решение. За да наспроти секој од четирите ма-



жи седи жена, на масата мора да се распоредат точно четири жени и тоа така што меѓу секои две жени има по еден маж. Нека AB е еден дијаметар на тркалезната маса (види цртеж). Ако A е маж, тогаш B е жена. Но, лево и десно од дијаметарот AB мора да седат по три лица. Сега двете лица до B мора да се мажи, па останува три жени да распоредиме на преостанатите четири места, што значи дека две жени ќе мора да седат една до друга, што е противречност. Значи, шефот на салата не успеал да го направи бараниот распоред.

2. На чело на колоната на велосипедска трка се наоѓаат велосипедистите Ацо и Боро, возејќи еден покрај друг. Тие толку им побегнале на другите велосипедисти така што до целта никој не може да ги стигне. На 20 km пред целта на Ацо му пукнала гума. Боро продолжил да вози до целта со просечна брзина од 40 km/h . Ацо за поправка на гумата изгубил 3 минути, а потоа продолжил да вози со просечна брзина од 45 km/h . Кој победил во трката и со колкаво растојание предност?

Решение. Боро возел до целта $\frac{20}{40} = 0,5\text{ h}$, односно 30 min . На Ацо му биле потребни $\frac{20}{45}\text{ h} + 3\text{ min} = \frac{89}{3}\text{ min}$. Бидејќи $\frac{89}{3} < 30$, заклучуваме дека победник е Ацо. Ацо пред Боро стигнал за $30 - \frac{89}{3} = \frac{1}{3}\text{ min} = 20\text{ s}$. За тие 20 секунди на Боро му преостанало да помине $\frac{20}{3600} \cdot 40 = \frac{2}{9}\text{ km}$.

3. Даден е изразот $\sqrt{x^2 + y^2 - z^2 - 2xy}$. Ако $x = 361979$ и $z = 561990$, определи ги сите вредности на y за кои дадениот израз прима најмала можна вредност.

Решение. Најмалата вредност на дадениот корен може да е 0. Значи, мора да биде

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2xy = 0, \text{ т.е. } (x + y - z)(x + y + z) = 0.$$

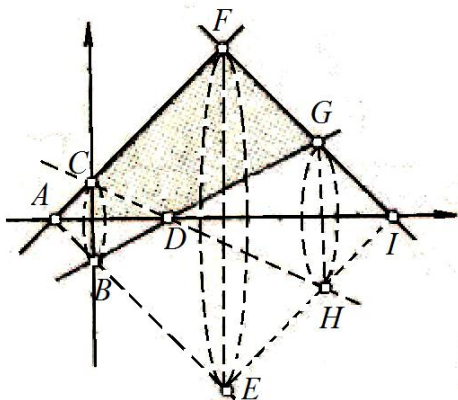
Оттука добиваме $x + y - z = 0$ или $x + y + z = 0$, што значи $y = z - x$ или $y = -z - x$. Бараните вредности за y се 200011 или -923969 .

4. Правите $x - y = -1$, $x + y = 8$ и $x - 2y = 2$ и двете координатни оски формираат петаголник. Определи го волуменот на ротационото тело кое се добива со ротација на овој петаголник околу апсцисната оска.

Решение. Добиениот петаголник е осенчен на цртежот десно.

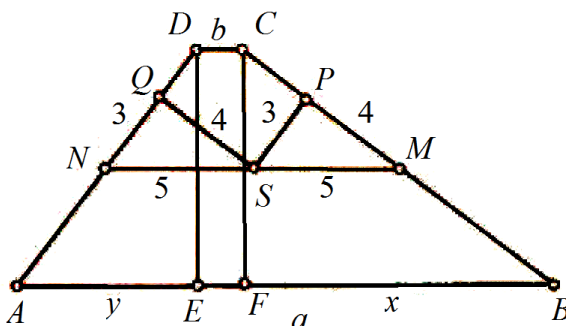
Координатите на темињата се добиваат во пресеците на соодветните прави и тие се $(0,1), (0,0), (2,0), (6,2), (\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$.

Бараниот волумен ќе го добијеме ако од збирот на волумените на конусите добиени со ротација на триаголниците AEF и IEF ги одземеме волумените на конусите добиени со ротација на триаголниците ABC , GHD и GHI . Лесно се добива дека бараниот волумен е $V = \frac{629}{12}\pi$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.



5. Трапез има плоштина 80 cm^2 и должина на висината 8 cm . Средината на средната линија на трапезот од едниот крак е оддалечена 3 cm , а од другиот крак е оддалечена 4 cm . Определи ги должините на основите на овој трапез.

Решение. Нека $SP=3\text{ cm}$ и $SQ=4\text{ cm}$ (види цртеж). Од плоштината на трапезот добиваме $P=mh$, односно $80=8m$, од каде за средната линија на трапезот добиваме $m=10\text{ cm}$. Значи, $a+b=20\text{ cm}$, а правоаголните триаголници SMP и SMQ имаат хипотенузи 5 cm .



Од Питагоровата теорема следува $MP=4\text{ cm}$ и $NQ=3\text{ cm}$. Правоаголните триаголници SMP и BCF се слични, бидејќи имаат еднакви агли во темињата B и M , па затоа $SP:MP=CF:BF$, односно $3:4=8:x$, па затоа $x=\frac{32}{3}$. На ист начин од сличноста на триагол-

ниците следува $SQ:QN = DE:AE$, т.е. $4:3 = 8:y$, па затоа $y = 6$. Четириаголникот $CDEF$ е правоаголник, па затоа $EF = CD = b$. Според тоа, $20 = a + b = x + b + y + b = 2b + 6 + \frac{32}{3}$, од каде добиваме $b = \frac{5}{3} \text{ cm}$ и $a = \frac{55}{3} \text{ cm}$.

Сојузен натпревар 1980

Седмо одделение

1. Во земјата Недојдија покрај другите банкноти има банкноти од 15 и 20 денари. Венди отишла да пазари и имала само банкноти од 15 и 20 денари. Петтина од парите ги потрошила за појадок кој го платила со точно две банкноти, а половина од парите кои и останале ги потрошила во месарницата каде што дала точно три банкноти. Колку пари имала Венди кога тргнала од дома?

Решение. За појадок Венди потрошила 2 банкноти, т.е. 30 денари или 45 денари или 60 денари, а тоа е петтина од сите пари. Според условот на задачата за преостанатите дневни потреби дала два пати повеќе пари, т.е. 60 денари или 90 денари или 120 денари. Овој износ го платила со 3 банкноти, па затоа тој не може да биде поголем од 60 денари. Според тоа, Венди вкупно потрошила $30+60=90$ денари, што е три петтини од 150 денари.

Конечно, кога Венди тргнала од дома таа имала 150 денари.

2. Реалните броеви a, b, c, d го задоволуваат условот

$$a^2 + d^2 - 2(ab + bc + cd - b^2 - c^2) = 0.$$

Докажи дека $a = b = c = d$.

Решение. Дадениот услов е еквивалентен на условот

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 = 0.$$

Значи, збир на три ненегативни броја е еднаков на нула, па затоа овие броеви мора да се еднакви на нула. Конечно, од $a-b=0$, $b-c=0$ и $c-d=0$ следува $a=b=c=d$.

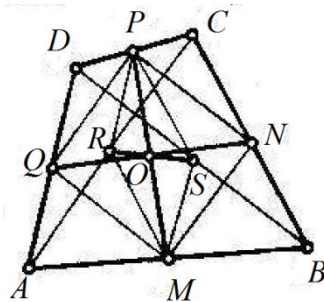
3. Докажи дека производот на два последователни цели броја е делив со 12, ако поголемиот од броевите е квадрат на некој природен број.

Решение. Ако поголемиот број е k^2 , тогаш помалиот број е k^2-1 и нивниот производ е $k^2(k^2-1)=(k-1)k(k+1)k$. Првите три множители се три последователни природни броја, па затоа нивниот производ е делив со 3. Ако k е непарен број тогаш $k-1$ и $k+1$ се парни броеви, па затоа производот е делив со 4. Ако k е парен број, тогаш е

јасно дека производот е делив со 4. Конечно, од $NZD(3,4)=1$ следува дека разгледуваниот производ е делив со $3 \cdot 4=12$.

4. Даден е четириаголник $ABCD$. Нека M, N, P, Q, R, S се редоследно средините на отсечките AB, BC, CD, DA, AC, BD . Докажи дека правите MP, NQ, RS се сечат во една точка.

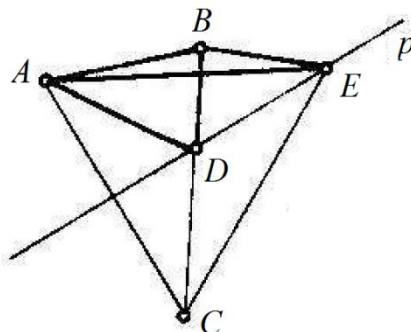
Решение. Во триаголникот ABC отсечката MN е средна линија, па таа е паралелна и еднаква на половина на страната AC . Понатаму, во триаголникот ACD отсечката PQ е средна линија, па таа е паралелна и еднаква на половина на страната AC . Според тоа, отсечките MN и PQ се паралелни и еднакви, па затоа



четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм и неговите дијагонали се половат. Сега, разгледувајќе ги триаголниците ABD и ACD на потполно аналоген начин се докажува дека MR и PS се паралелни и еднакви меѓу себе. Значи, четириаголникот $MSPR$ е паралелограм и неговите дијагонали MP и RS се половат. Конечно, од претходните разгледувања следува дека MP, NQ, RS се сечат во една точка.

5. Дадени се права p и точки A и B кои не лежат на p и се на иста страна од p . Нека точката C е симетрична на точката A во однос на правата p . Правите p и BC се сечат во точката D . Нека E е произволна точка од p различна од D . Докажи дека периметарот на триаголникот ABD е помал од периметарот на триаголникот ABE .

Решение. Точките A и C се симетрични во однос на правата p , па затоа $AD=CD$ и $AE=CE$. Точката D припаѓа на отсечката BC , па затоа периметарот на триаголникот ABD е еднаков на

$$AB + BD + AD = AB + BD + DC = AB + BC.$$


Периметарот на триаголникот

ABE е еднаков на

$$AB + BE + AE = AB + BE + CE.$$

Сега, од неравенството на триаголник применето на триаголникот BCE добиваме $BC < BE + CE$, па затоа

$$AB + BC < AB + BE + CE,$$

што значи дека периметарот на триаголникот ABD е помал од периметарот на триаголникот ABE .

Осмо одделение

- Докажи дека во група од 6 ученици постојат 3 ученици така што секој ги познава другите два, или постојат 3 ученици така што секој не познава ниту еден од другите два ученика.

Решение. Нека A е еден од овие ученици. Од преостанатите 5 ученици постојат три кои се познаваат со A , или постојат три кои не се познаваат со A . Да го разгледаме случајот кога имаме три познаници на A . Ако меѓу овие ученици има двајца кои се познаваат, тогаш заедно со A имаме три ученици кои меѓусебно се познаваат. Во спротивно имаме три ученици така што секој не познава ниту еден од другите два ученика. Аналогно се разгледува случајот кога имаме три ученици кои не се познаници со A . Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

- Должините на страните на правоаголен триаголник се природни броеви. Дали може должините на двете катети да се непарни броеви?

Решение. Нека претпоставиме дека должините на катетите се непарни броеви и да означиме $a = 2m + 1$ и $b = 2n + 1$. Сега, од Питагоровата теорема следува

$$c^2 = a^2 + b^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 4(m^2 + m + n^2 + n) + 2.$$

Според тоа, c^2 е делив со 2, но не е делив со 4. Но, ако c^2 е делив со 2, тогаш и c мора да е делив со 2, па добиваме дека c^2 е делив со 4, што е противречност. Од добиената противречност следува дека должините на двете катети не може да се непарни броеви.

- Горјан потрошил определена сума пари при купување на ранец, книга и пенкало. Ако ранецот бил 5 пати поефтин, пенкалото 2 пати поефтино, а книгата 2,5 пати поефтина од вистинската цена, тогаш Горјан

ќе плател 160 денари. Ако ранецот бил 2 пати поефтин, пенкалото било 4 пати, а книгата 3 пати поефтина, тогаш Горјан ќе плател 240 денари. Колку пари потрошил Горјан?

Решение. Со x да ја означиме цената на ранецот, со y цената на пенкалото и со z цената на книгата. Од условот на задачата следува

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2,5} = 160 \text{ и } \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 240.$$

Дадените равенства се еквивалентни со равенствата

$$2x + 5y + 4z = 1600 \text{ и } 6x + 3y + 4z = 2880.$$

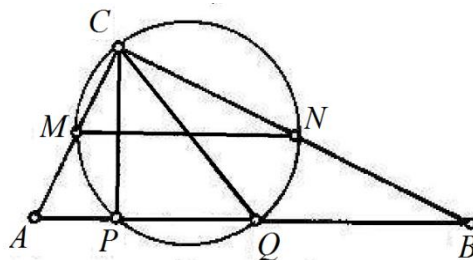
Ако овие равенства ги собереме и добиеното равенство го поцелиме со 8 добиваме

$$x + y + z = 560.$$

Значи, Горјан потрошил 560 денари.

4. Правоаголен триаголник има катети со должини 60 cm и 80 cm . Нека M и N се средините на овие катети. Кружницата со дијаметар MN ја сече хипотенузата во точките P и Q . Определи ја должината на отсечката PQ .

Решение. Дадениот триаголник има хипотенуза AB со должина 100 cm , па средната линија MN има должина 50 cm (види цртеж). Дадената кружница минува низ темето C на правиот



агол бидејќи аголот над дијаметар е прав агол. Точката која е симетрична на C во однос на правата MN лежи на хипотенузата, па како кружницата е симетрична во однос на дијаметарот MN заклучуваме дека оваа точка лежи на кружницата. Според тоа, таа е една од пресечните точки на хипотенузата и кружницата, да кажеме точката P . Заради симетријата отсечката CP е нормална на MN , што значи и на AB . Затоа $\angle CPQ = 90^\circ$. Оттука следува дека отсечката CQ е дијаметар на кружницата и нејзината должина е 50 cm . За плоштината на триаголникот ABC имаме $P = \frac{60 \cdot 80}{2} = 2400$ и $P = \frac{AB \cdot CP}{2} = 50 \cdot CP$, па затоа $50 \cdot CP = 2400$, т.е. $CP = 48\text{ cm}$.

Сега, од правоаголниот триаголник CPQ добиваме

$$PQ = \sqrt{CQ^2 - CP^2} = \sqrt{50^2 - 48^2} = \sqrt{196} = 14 \text{ cm},$$

што и требаше да се определи.

5. Даден е конус со радиус на основата $r = 3 \text{ dm}$. Над истата основа и од истата страна е конструиран цилиндар чија плоштина е еднаква на плоштината на конусот, а волуменот е еднаков на волуменот на конусот. Пресметај ги плоштината и волуменот на телото кое е пресек на конусот и цилиндарот.

Решение. Од еднаквоста на волумените добиваме $\pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 H$, т.е. $H = 3h$. Од еднаквоста на плоштините добиваме

$$2\pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + \pi r s, \text{ т.е. } r + 2h = s,$$

па ако замениме $r = 30 \text{ cm}$ добиваме $s = 30 + 2h$. Сега, од Питагоровата теорема применета на правоаголниот триаголник SOA следува $s^2 = r^2 + H^2$, односно

$$(30 + 2h)^2 = 900 + 9h^2.$$

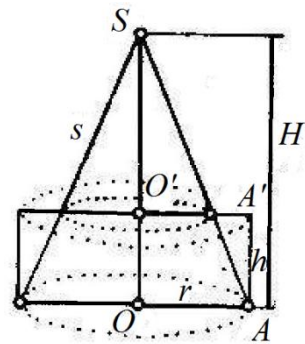
Последната равенка е еквивалентна на равенката $5h(h - 24) = 0$, од каде наоѓаме $h = 24 \text{ cm}$, па затоа $H = 72 \text{ cm}$ и $s = 78 \text{ cm}$. Треба уште да ги определиме димензиите на конусот со висина $SO' = \frac{2}{3}H = 48 \text{ cm}$.

Триаголниците SOA и $SO'A'$ се слични, па затоа $O'A' = \frac{2}{3}r$ и $SA' = \frac{2}{3}s$. Бараниот волумен е еднаков на разликата на волумените на двата конуси

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H - \frac{1}{3} \pi \left(\frac{2}{3}r\right)^2 \cdot \frac{2}{3}H = 28000\pi \text{ cm}^3.$$

Плоштината е еднаква на збирот на плоштините на два круга, зголемена за разликата на омотачите на двата конуси:

$$P = \pi r^2 + \pi \left(\frac{2}{3}r\right)^2 + \pi r s - \frac{2}{3} \pi r \cdot \frac{2}{3}s = 2600\pi \text{ cm}^2.$$



Сојузен натпревар 1981

Седмо одделение

1. Определи ја непозната цифра на единиците во бројот 401512* така што остатоците при делењето на овој број со 3 и со 5 ќе бидат еднакви.

Решение. Непозната цифра може да биде 5, 6 или 7. Со делење на добиениот број со 3 и со 5 ќе се увериме дека во првиот случај тој број е делив и со 3 и со 5, во вториот случај остатоците при делење со 3 и со 5 се 1, а во третиот случај остатоците при делење со 3 и со 5 се 2.

2. Во ненаполнет сад се наоѓа 85-процентен раствор на алкохол. Ако садот го дополниме до врвот со 21-процентен раствор на алкохол, смесата се измеша, одлееме онолку течност колку што сме долеале, па садот повторно го дополниме до врвот со 21-процентен раствор на алкохол, ќе добиеме раствор кој содржи 70% алкохол. Колкав дел од садот бил наполнет пред првото долевање?

Решение. Со x да го означиме делот од садот кој на почетокот бил наполнет со 85-процентен раствор на алкохол. Бројот на стоти делови алкохол во тој момент во садот е $85x$. Ненаполнетиот дел од садот е $1-x$. Со првото долевање на 21-процентен раствор на алкохол количеството алкохол се зголемува за $21(1-x)$ и изнесува вкупно $85x + 21(1-x) = 21 + 64x$. Со одлевање на делот $1-x$ од течността, количеството алкохол ќе се намали за $(1-x)(21 + 64x)$. Со второто долевање на 21-процентен раствор на алкохол повторно сме го зголемиле количеството алкохол за $21(1-x)$. Добиениот раствор содржи 70 стоти делови на алкохол. Според тоа,

$$21 + 64x - (1-x)(21 + 64x) + 21(1-x) = 70.$$

Со средување на последната равенка добиваме $64x^2 = 49$, од каде наоѓаме $x = \frac{7}{8}$. Според тоа, на почетокот биле наполнети $\frac{7}{8}$ од садот.

3. Според најновиот попис на населението, во 5990 населби во СР Словенија живеат 1883764 жители. Докажи дека постојат барем две населени места со еднаков број жители.

Решение. Ако сите населени места имаат различен број на жители, тогаш вкупниот број на жители би бил најмалку:

$$1+2+3+4+\dots+5990=(1+5990)+(2+5990)+\dots+(2995+2996) \\ = \frac{5990 \cdot 5991}{2} = 17943045$$

Значи, ако сите населени места во Словенија имаат различен број жители, тогаш цела Словенија треба да има најмалку 17953045 жители, што повеќе од 20 пати поголем број од вистинскиот број на жителите на Словенија. Оттука заклучуваме дека постојат барем две населби со еднаков број на жители.

4. Во триаголникот ABC важи $\frac{h_a h_b}{h_c} = c$, каде h_a, h_b, h_c се должините на висините, а c е должината на една страна на триаголникот. Определи го едниот од аглиите на овој триаголник.

Решение. Од даденото равенство следува равенството $h_a h_b = c h_c$, односно $\frac{h_a h_b}{2} = \frac{c h_c}{2}$. Но, $\frac{c h_c}{2} = P$, каде P е плоштината на триаголникот. Според тоа, $\frac{h_a h_b}{2} = P$ и како $\frac{a h_a}{2} = P$ и $\frac{b h_b}{2} = P$, добиваме $\frac{h_a h_b}{2} = \frac{a h_a}{2}$ и $\frac{h_a h_b}{2} = \frac{b h_b}{2}$, па затоа $a = h_b$ и $b = h_a$. Значи, страните a и b се висини една на друга, па затоа триаголникот е правоаголен со прав агол зафатен со страните a и b .

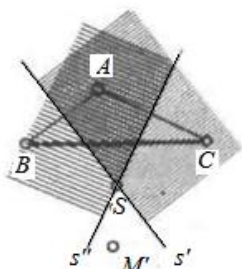
5. Нека A, B, C се точки од рамнината такви што за секоја точка M од таа рамнина е исполнет барем еден од следниве два услови:

- 1) $d(A, M) < d(B, M)$, и
- 2) $d(A, M) < d(C, M)$.

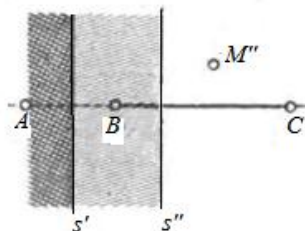
Со $d(X, Y)$ е означено растојанието меѓу точките X и Y . Докажи дека точката A припаѓа на отсечката BC .

Решение. Да претпоставиме дека точката A е надвор од правата BC . Множеството од сите точки M кои го задоволуваат условот 1) е осенчената полурамнина определена со симетралата s' на отсечката AB (види црт. 1). Слично, множеството точки кои го задоволуваат условот 2) е осенчената полурамнина определена со симетралата s'' на отсечката AC (види црт. 1). Тогаш точките во внатрешноста на аголот $s' s''$, како точката на M' не задоволуваат ниту еден од

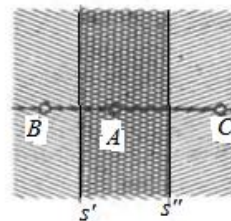
условите 1) и 2). Но, според условот на задачата, вакви точки во рамнината не постојат. Овој агол во рамнината постои само ако симетралите s' и s'' се сечат. Оттука следува дека овие симетрали не може да се сечат, што е можно само ако точката A лежи на правата BC . Сега, ако точката A не припаѓа на отсечката BC , тогаш постои точка, како точката M'' на црт. 2, за која не е исполнет ниту еден од условите 1) и 2). Ако пак точката A е на отсечката BC (црт. 3), тогаш секоја точка M го задоволува условот 1) или условот 2). Со тоа е докажано тврдењето на задачата.



Цртеж 1



Цртеж 2



Цртеж 3

Осмо одделение

- Основата на призмата е квадрат со страна a . Должината на страната a е два пати поголема од должината на висината на призмата. Мерните броеви на плоштината и волуменот на призмата се еднакви. Определи ги должините на рабовите на оваа призма.

Решение. Висината на призмата е $h = \frac{a}{2}$. Плоштината на призмата е

$$P = 2a^2 + 4ah = 2a^2 + 2a^2 = 4a^2, \text{ а волуменот е } V = a^2h = \frac{a^3}{2}.$$

Од еднаквоста на плоштината и волуменот добиваме $4a^2 = \frac{a^3}{2}$ и како $a \neq 0$ од последната равенка добиваме $a = 8$. Конечно, $h = 4$.

- Броевите од 1 до 10 во произволен редослед се запишани во еден ред. Според тој редослед на секој број му е придружен неговиот реден број. Потоа секој број е собран со својот реден број. На овој начин се добиени десет зборови. Докажи дека цифрите на единиците се еднакви кај барем два од вака добиените зборови.

Решение. Нека секој број е собран со својот реден број. Тогаш имаме десет зборови. Ако сите десет зборови ги собереме, добиваме

$$2(1+2+3+\dots+8+9+10)=110.$$

Ако овие десет зборови завршуваат на различни цифри, тогаш цифрите на единиците би биле 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Затоа при собирање на броевите на местото на единиците би била цифрата на единиците на збирот $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, што значи цифрата 5. Последното противречи дека збирот е 110, па значи мора барем два од овие десет зборови да имаат иста цифра на единиците.

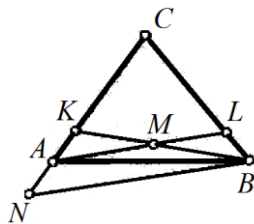
3. Два воза истовремено тргнуваат од местата A и B во пресрет еден кон друг. Секој од нив кога ќе стигне во спротивното место, одма се враќа назад. Возовите првиот пат се сретнале на 50 km од местото A , а вториот пат се сретнале на 30 km од местото B . Колку е долга пругата меѓу местата A и B ? (Се претпоставува дека возовите се движат со постојани брзини.)

Решение. Нека должината на пругата од A до B е s . Со V_a да ја означиме брзината на возот кој тргнува од местото A , а со t времето од тргнувањето до првата средба со другиот воз. За време t првиот воз поминал 50 km , па затоа $V_a t = 50$. Двата воза заедно ја поминале релацијата од A до B еднаш (на цртежот лево патот кој го поминал првиот воз е AC , патот кој го поминал вториот воз е BC , а вкупно поминале $AC + BC = AB = s$). До следната средба двата воза заедно поминале пат долг $3s$, види цртеж десно, првиот воз поминал $AB + BD$, а вториот поминал пат $BA + AD$. Бидејќи $BA + AD = s = AB$, добиваме $AB + BD + BA + AD = 3s$. Според условот брзините на возовите се рамномерни, па за три пати да се помине патот потребно е три пати повеќе време. Затоа првиот воз до втората средба поминал пат $3V_a t$, односно $3V_a t = s + 30$. Ако замениме $V_a t = 50$, добиваме $150 = s + 30$, односно $s = 120$. Значи, пругата меѓу местата A и B е долга 120 km .



4. На страната AC на триаголникот ABC е земена точка K која AC ја дели во однос 1:3, а на страната BC е земена точка L која BC ја дели во однос 1:4. Нека M е пресечната точка на отсечките AL и BK . Определи го односот на отсечките KM и MB .

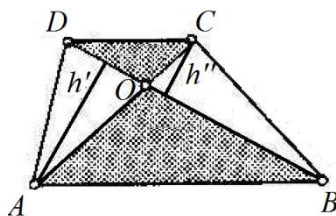
Решение. Ја продолжуваме отсечката CA преку темето A . Нека N е пресечната точка на правата AC и правата низ B паралелна со правата AL . Тогаш од Талесовата теорема следува $\frac{AN}{AC} = \frac{BL}{CL} = \frac{1}{4}$. Значи, $AN = \frac{1}{4}AC$. Бидејќи и $AK = \frac{1}{4}AC$, добиваме $AN = AK$, т.е.



точката A е средина на отсечката KN (цртеж десно). Во триаголникот BNK правата AM е паралелна на страната BN , па бидејќи оваа права ја полови страната KN , таа мора да ја полови и страната BK . Значи, $KM:MB=1:1$.

5. Дијагоналите на произволен трапез го делат трапезот на четири триаголници. Плоштините на триаголниците на кои им припаѓаат основите на трапезот се P_1 и P_2 . Изрази ја плоштината на трапезот P со помош на P_1 и P_2 .

Решение. Нека O е пресекот на дијагоналите, $P_{ABO} = P_1$, $P_{DO} = P_2$, $P_{ADO} = P_4$ и $P_{BCO} = P_3$. Ќе докажеме дека плоштините на триаголниците ADO и BCO се еднакви меѓу себе, т.е. дека $P_3 = P_4$. Навистина триаголниците ABD и ABC имаат заедничка основа AB и еднакви висини (висината на трапезот). Значи, $P_3 + P_1 = P_4 + P_1$, па затоа $P_3 = P_4$.



Триаголниците ABO и ADO имаат основи BO и DO и заедничка висина h' од темето A , па затоа $P_1 = \frac{1}{2}BO \cdot h'$ и $P_4 = \frac{1}{2}DO \cdot h'$, односно $P_1:P_3 = BO:DO$. Слично се докажува дека $P_4:P_2 = BO:DO$ и како $P_3 = P_4$, добиваме $P_3:P_2 = BO:DO$. Значи $P_1:P_3 = P_3:P_2$, од каде следува $P_3 = \sqrt{P_1P_2}$.

Бидејќи плоштината на трапезот е $P = P_1 + P_2 + 2P_3$, добиваме

$$P = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1P_2}, \text{ т.е. } P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2.$$

Сојузен натпревар 1982

Седмо одделение

1. Учениците A, B, C, D се натпреварувале во трчање. Секој од нив го прогнозираше редоследот на целта на трката. Ученикот A : $ABDC$, ученикот B : $BACD$, ученикот C : $CBDA$, ученикот D : $DCBA$. Се покажало дека никој точно не го прогнозираше редоследот на сите натпреварувачи на целта, туку само еден од нив го погоди местото само на еден од натпреварувачите, Каков бил редоследот на целта на трката?

Решение. Да ги запишеме дадените прогнози во облик на квадратна табела:

A : $ABDC$

B : $BACD$

C : $CBDA$

D : $DCBA$

Сите четири ученици различно го прогнозираа победникот на трката, што значи дека некој од нив сигурно погоди кој е прв. Сега од условот на задачата следува дека никој не го погоди редоследот на другите натпреварувачи. Од табелата гледаме дека никој не прогнозираше дека D ќе биде втор, ниту дека A ќе биде трет, ниту дека B ќе биде четврт. Според тоа, прв бил C , и тој единствено ја погоди својата победа. Конечно, редоследот бил: $CDAB$.

2. Определи го остатокот од делењето на бројот 3^{100} со 13.

Решение. Имаме $3^3 = 2 \cdot 13 + 1$, т.е. $3^3 = 13k + 1$. Понатаму,

$$3^3 \cdot 3^3 = (13k + 1)^2 = 169k^2 + 26k + 1 = 13(13k^2 + 2) + 1 = 13m + 1.$$

Потоа,

$$\begin{aligned} 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3 &= (13k + 1)(13m + 1) = 169km + 13k + 13m \\ &= 13(13km + k + m) + 1 = 13n + 1, \end{aligned}$$

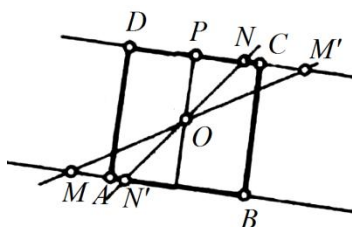
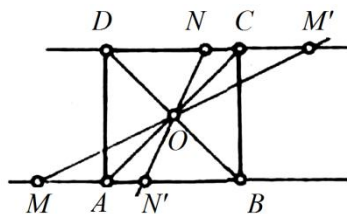
итн. Со натамошно множење со 3^3 секогаш добиваме број кој при делење со 13 дава остаток 1. Затоа $3^{99} = (3^3)^{33} = 13p + 1$. Конечно,

$$3^{100} = 3^{99} \cdot 3 = 3(13p + 1) = 13 \cdot 3p + 3,$$

па затоа остатокот од делењето на 3^{100} со 13 е еднаков на 3.

3. Дадени се три точки M, N, O кои не припаѓаат на една права. Конструирај квадрат $ABCD$ така што точката M припаѓа на правата AB , точката N припаѓа на правата CD и точката O ед пресекот на дијагоналите на тој квадрат.

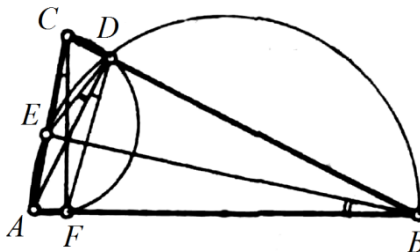
Решение. Паралелните прави AB и CD се централно симетрични во однос на точката O (цртеж десно). Затоа точката M' која е симетрична на M припаѓа на правата CD , а точката N' која е симетрична на точката N припаѓа на правата AB .



Користејќи се со точките M' и N' можеме да ги конструираме правите AB (определена со точките M и N') и CD (определена со точките M' и N). Понатаму, конструкцијата може да се реализира на повеќе начини. На цртежот лево е повлечена нормала OP на правата CD . Отсечката Op е еднаква на половина од страната на квадратот и ова е искористено за конструирањат ан точките A, B, C, D .

4. Во остроаголен триаголник ABC подножјата на висините се темиња на триаголникот DEF . Докажи дека висините на триаголникот ABC се симетрала на аглиите на триаголникот DEF .

Решение. Ќе докажеме, на пример, дека правата AD е симетрала на $\angle EDF$ (цртеж десно). Аглиите AEB и ADB се прави, па кружницата k со дијаметар AB минува низ точките E и D (аголот над дијаметар е прав). Затоа $\angle ADE = \angle ABE$ (агли над ист лак). Слично, кружницата k' со дијаметар AC минува низ точките D и F и $\angle ADF = \angle ACF$. Освен тоа, од $BE \perp AC$ и $CF \perp AB$ следува дека $\angle ABE = \angle ACF$ (аг-



ли со нормални краци). Оттука следува дека $\angle ADF = \angle ADE$, што значи дека правата AD е симетрала на $\angle EDF$.

5. Во даден четириаголник три агли се тапи. Докажи дека поголема е онаа дијагонала која го содржи темето на остриот агол.

Решение. Нека $\angle ACB$ е остар агол (цр-

теж десно). Конструираме кружница со

дијаметар AC . Ќе докажеме дека темето

D лежи во внатрешноста на кружни-

цата. Имено, тоа не може да припаѓа на

кружницата, бидејќи тогаш треба $\angle ADC$

да е прав агол. Ако точката D е надвот

од кружницата, како точката D' , тогаш

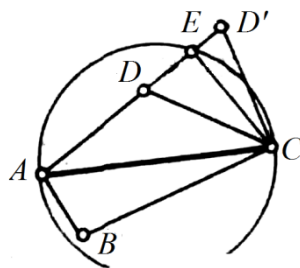
триаголникот CED' ќе биде правоаголен, па затоа $\angle AD'C$ ќе биде

остар. Значи, единствено точката D може да е во внатрешноста на

кружницата. Слично докажуваме дека и точката B е во внатрешноста

на кружницата. Оттука следува дека дијагоналата BD е во внатреш-

носта на кружницата, што значи $BD < AC$.



Осмо одделение

1. Предната гума на моторциклот се истрошува по поминати 25000 km , а задната по поминати 15000 km . По колку поминати километри треба да се променат местата на гумите за да двете гуми истовремено се истрошат? По колку поминати километри мотоциклистот треба да купи нови гуми?

Решение. За да гумите еднакво се истрошат мора да се возат еднаков број километри на предното и на задното тркало. Нека претпоставиме

дека секоја гума помине $x\text{ km}$ на предното и $x\text{ km}$ на задното тркало.

Тогаш за x важи $\frac{1}{25000} + \frac{1}{15000} = \frac{1}{x}$, од каде добиваме $x = 9375\text{ km}$.

Значи, мотоциклистот ќе ги смени местата на гумите по 9375 km , а по 18750 km треба да купи нови гуми.

2. а) Пресметај

$$(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

б) Користејќи го равенството добиено под а) определи прост број p таков што $2p^2 + 1 = k^5$, каде k е природен број.

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned}(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) &= \\ &= a^5 + a^4b + a^5b^2 + a^2b^3 + ab^4 - a^4b - a^3b^2 - a^2b^3 - ab^4 - b^5 \\ &= a^5 - b^5.\end{aligned}$$

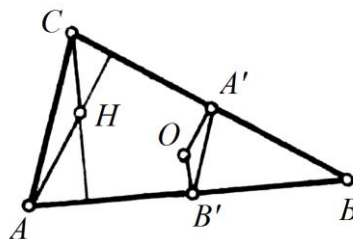
б) Од $2p^2 + 1 = k^5$ добиваме $2p^2 = k^5 - 1$, па според а) добиваме

$$2p^2 = (k-1)(k^4 + k^3 + k^2 + k + 1). \quad (1)$$

Бидејќи $2p^2 = k^5 - 1$, добиваме дека k^5 е непарен број, што значи дека k е непарен број, на пример $k = 2n + 1$ и $k > 1$, па $n \in \mathbb{N}$. Сега со замена во (1) и по скратување со 2 имаме $p^2 = n(k^4 + k^3 + k^2 + k + 1)$. Но, p е прост број, па затоа последното равенство е можно само ако $n = 1$ или $n = k^4 + k^3 + k^2 + k + 1$. Бидејќи $k = 2n + 1$, т.е. $k > n$ не е можно $n = k^4 + k^3 + k^2 + k + 1$. Значи, $n = 1$, а оттука $k = 3$. Со замена $k = 3$ добиваме $p^2 = 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 121$. Бараниот број е $p = 11$.

3. Докажи дека во секој триаголник ABC растојанието од ортоцентарот до темето A е два пати поголемо од растојанието од центарот на опишаната кружница до страната BC на тој триаголник.

Решение. Нека H е ортоцентарот, O е центарот на опишаната кружница и A' и B' се соодветно средините на страните BC и AC , (цртеж десно).



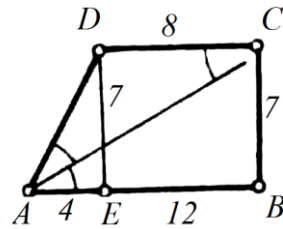
Триаголниците ACH и $A'B'O$ имаат соодветни агли со паралелни краци, што значи имаат еднакви агли, па затоа се слични. Бидејќи коефициентот на сличност е $AC : A'B' = 2$, заклучуваме дека страната AH на триаголникот $A'B'H$ е два пати поголема од соодветната страна на триаголникот $A'B'O$, што и требаше да се докаже.

4. Во трапезот $ABCD$ важи

$$AB = 12, BC = 7, CD = 8 \text{ и } \angle ABC = 90^\circ.$$

Дали симетралата на внатрешниот $\angle DAB$ го сече кракот BC или основата CD ?

Решение. Нека C' е е точката во која симетралата на $\angle DAB$ ја сече правата DC . Ако $DC' < DC$, тогаш симетралата ја сече основата CD . Да ја пресметаме должината на отсечката DC' . По претпоставка $\angle BAC' = \angle DAC'$, а $\angle BAC' = \angle DC'A$ како наизменични агли меѓу две паралелни прави (цртеж десно). Оттука следува $\angle DAC' = \angle DC'A$, т.е. триаголникот ADC' е рамнокрак и $DC' = AD$.



Нека E е подножјето на висината од D на AB . Од правоаголниот триаголник AED имаме:

$$DC' = AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65} > 8.$$

Значи, $DC' > DC$, па затоа симетралата на $\angle DAB$ го сече кракот BC .

5. Докажи дека во секој триаголник ABC важи

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\rho}, \quad (1)$$

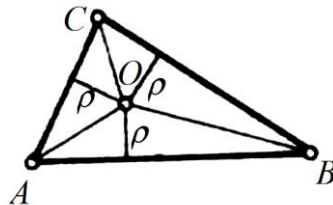
каде h_a, h_b, h_c се висините, а ρ е радиусот на впишаната кружница во триаголникот.

Решение. За плоштината P на триаголникот ABC имаме

$$P = \frac{a\rho}{2} + \frac{b\rho}{2} + \frac{c\rho}{2},$$

па затоа

$$\frac{a}{2P} + \frac{b}{2P} + \frac{c}{2P} = \frac{1}{\rho}. \quad (2)$$



Од друга страна знаеме дека

$$\frac{2P}{a} = h_a, \frac{2P}{b} = h_b, \frac{2P}{c} = h_c$$

и ако замениме во равенството (2) го добиваме равенството (1).

Сојузен натпревар 1983

Седмо одделение

1. Во една година 1. јануари и 1. април паднале во четврток. Колку месеци во таа година имаат 5 петоци?

Решение. Од 1. јануари и 1. април има 91 или 90 денови, во зависност од тоа дали годината е престапна или не. За да 1. јануари и 1. април е четврток, бројот на деновите меѓу овие две дати мора да е делив со 7, а тоа е бројот 91. Значи, годината е престапна и има 366 денови. Затоа во оваа година има 52 седмици и 2 дена, што значи дека во неа има 53 петоци (бидејќи 2. јануари е во петок). Секој месец има 4 или 5 петоци. Ако со x го означиме бројот на месеците со 5 петоци, тогаш $12 - x$ е бројот на петоките со 4 петоци, па затоа $5x + 4(12 - x) = 53$, од каде добиваме $x = 5$. Според тоа, во оваа година има 5 месеци со по 5 петоци.

2. Разликата на две дропки е $\frac{1}{5}$. Броителот на првата дропка е три пати поголем од броителот на втората дропка, а именителот на првата дропка е два пати поголем од именителот на втората дропка. Определи ги овие дропки.

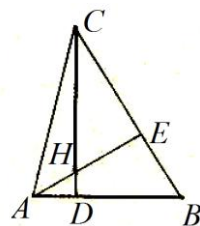
Решение. Ако втората дропка е $\frac{a}{b}$, тогаш првата дропка е $\frac{3a}{2b}$. Според условот имаме $\frac{3a}{2b} - \frac{a}{b} = \frac{1}{5}$, па затоа $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$. Првата дропка е $\frac{6}{10}$.

3. Определи еден прост трицифрен број чиј производ на цифри е еднаков на 252.

Решение. Со разложување на прости множители на бројот 252 добиваме $252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$. Со комбинирање на множителите на бројот 252, добиваме дека цифрите на бараниот број се 4, 9, 7 или 6, 6, 7. Бараниот број е прост, па затоа тој е непарен, т.е. може да е еден од броевите: 497, 947, 749, 479 и 667. Со проверка добиваме дека броевите 497 и 749 се деливи со 7, а бројот 667 е делив со 23. Прости броеви кои го задоволуваат условот на задачата се 947 и 479.

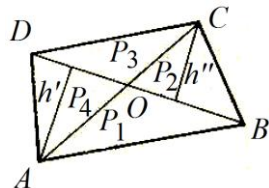
4. Висините CD и AE на триаголникот ABC се сечат во точката H и важи $d(A, B) = d(C, H)$. Определи го $\angle ACB$.

Решение. Аглите BAE и BCD (цртеж десно) се еднакви меѓу себе, како агли со нормални краци. Бидејќи $AB=CH$, добиваме дека правоаголните триаголници ABE и CHE се скалдни, па затоа $AE=CE$. Триаголникот ACE е правоаголен, а од $AE=CE$ следува дека тој е рамнокрак, што значи дека бараниот агол е еднаков на 45° .



5. Дијагоналите на конвексен четириаголник $ABCD$ се сечат во точката O и го делат четириаголникот на триаголниците OAB, OBC, OCD и ODA . Докажи дека производот на плоштините на триаголниците OAB и OCD е еднаков на производот на плоштините на триаголниците OBC и ODA .

Решение. Да ги означиме плоштините на наведените триаголници со P_1, P_2, P_3, P_4 (цртеж десно). Нека h' и h'' се нормалите од A и C на BD . Тогаш



$$P_1 = \frac{BO \cdot h'}{2}, P_2 = \frac{BO \cdot h''}{2}, P_3 = \frac{DO \cdot h'}{2}, P_4 = \frac{DO \cdot h''}{2}.$$

Сега имаме

$$P_1 \cdot P_3 = P_2 \cdot P_4 = \frac{BO \cdot DO \cdot h' \cdot h''}{4},$$

што и требаше да се докаже.

Осмо одделение

1. Ако a, b, c се три природни броеви, докажи дека $a^2 + b^2 + c^2$ при делење со 8 не може да даде остаток 7.

Решение. Секој природен број може да се запише во видот $4k$, $4k+1$, $4k+2$ или $4k+3$, каде k е природен број или 0. Во секој од овие случаи квадратот на бројот е:

$$16k^2 = 8 \cdot 2k^2, \quad 16c^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1,$$

$$16c^2 + 16k + 4 = 8(2k^2 + 2k) + 4, \text{ и}$$

$$16c^2 + 24k + 9 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1.$$

Значи, квадрат на природен број при делење со 8 може да даде остаток 0, 1 или 4. Со собирање на било кои 3 остатоци од наведениот вид

не може да се добие бројот 7. Затоа збирот $a^2 + b^2 + c^2$ при делење со 8 не може да даде остаток 7.

2. Во три кутии A, B, C се наоѓаат топчиња: во кутијата A има 2, во кутијата B има 3 и во кутијата C има 4 топчиња. Двајца играчи ја играат следнава игра: наизменично земаат од произволна кутија произволен број топчиња. Победува играчот по чиј потез сите кутии се празни. Како треба да игра првиот играч за сигурно да го победи својот противник?

Решение. Првиот играч треба од кутијата C да земе 3 топчиња, па потоа кутиите A, B, C ќе содржат 2, 3 и 1 топче, соодветно. Понатаму, како и да постапи вториот играч, првиот може по неговиот потез да остави една кутија празна, а во другите две да има еднаков број топчиња. Така сигурно ќе го победи вториот играч.

3. Определи го најмалиот природен број кој има својство да се намали 57 пати ако му ја избришеме првата цифра од лево.

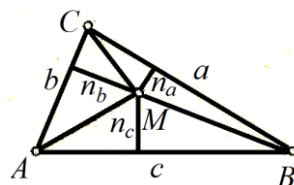
Решение. Со a да ја означиме првата цифра на бараниот број, а со b бројот кој го формираат преостанатите цифри. Тогаш $10^k a + b = 57b$ каде k е природен број, односно $10^k a = 56b$, т.е. $10^k a = 7 \cdot 8b$. Но, $\text{NZD}(10, 7) = 1$, па затоа $7 | a$ и како a е цифра добиваме $a = 7$. Сега $10^k = 8b$. Бројот 10^k треба да е делив со 8, па оттука $k \geq 3$, а бидејќи се бара најмалиот број добиваме $k = 3$ и $b = 125$. Конечно, бараниот број е 7125.

4. Нека ABC е произволен триаголник и M е произволна точка од неговата внатрешност. Должините на нормалите од точката M до страните BC, CA, AB да ги означиме со n_a, n_b, n_c , соодветно. Докажи дека

$$\frac{n_a}{h_a} + \frac{n_b}{h_b} + \frac{n_c}{h_c} = 1, \quad (1)$$

каде h_a, h_b, h_c се соодветните висини на триаголникот.

Решение. Отсечките MA, MB, MC го делат триаголникот на три триаголници со плоштини $\frac{1}{2}an_a, \frac{1}{2}bn_b, \frac{1}{2}cn_c$, па затоа



$$P = \frac{1}{2}an_a + \frac{1}{2}bn_b + \frac{1}{2}cn_c,$$

Односно

$$1 = \frac{a}{2P}n_a + \frac{b}{2P}n_b + \frac{c}{2P}n_c. \quad (2)$$

Од друга страна

$$P = \frac{1}{2}ah_a, P = \frac{1}{2}bh_b, P = \frac{1}{2}ch_c,$$

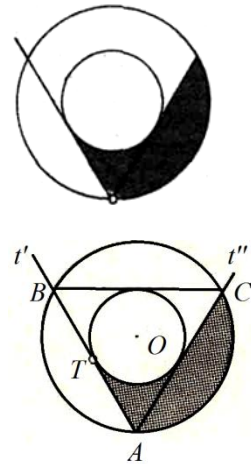
па затоа $h_a = \frac{2P}{a}, h_b = \frac{2P}{b}, h_c = \frac{2P}{c}$. Сега, ако замениме во равенството (2) го добиваме равенството (1).

5. Радиусите на круговите кои го формираат кружниот прстен прикажан на цртежот десно се r и $2r$

Опреди го основот на плоштините на осенчениот и неосенчениот дел од кружниот прстен.

Решение. Нека A, B, C се заедничките точки на поголемата кружница и тангентите t' и t'' (цртеж десно) и нека T е точката во која t' ја допира малата кружница. Бидејќи $OB = 2OT$ заклучуваме дека $\angle OBT = 30^\circ$, па оттука следува $\angle ABC = 60^\circ$. Аналогно се докажува дека $\angle BAC = \angle BCA = 60^\circ$. Според тоа, триаголникот ABC е рамностран, па затоа отсечоците во големиот круг се еднакви.

Очигледно, осенчениот дел е еднаков на третина од целиот прстен, па затоа плоштините на осенчениот и неосенчениот дел се однесуваат како 1:2.



Сојузен натпревар 1984

Седмо одделение

1. Докажи дека остатокот при делење на било кој прост број со 30 е исто така прост број или 1.

Решение. Нека p прост број и $p = 30k + r$. При делење на било кој природен број со 30 можни остатоци се 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 27, 28 и 29. Но, p е прост, па добиениот остаток r не може да биде 0 или број делив со 2, 3 и 5, бидејќи во спротивно p ќе биде сложен број. Значи, можни остатоци 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и 29, што и требаше да се докаже.

2. Не едно тестирање учествувале 25 ученици од осум училишта. Тие точно решиле вкупно 50 задачи. Секој ученик од исто училиште точно решил еднаков број задачи, а учениците од различни училишта точно решиле различен број задачи. Секој ученик точно решил најмалку една задача. Колку ученици точно решиле само по една задача?

Решение. Од секое училиште да земеме по еден ученик и претпоставиме дека првиот решил 1 задача, вториот решил 2 задачи, третиот 3 итн. осмиот решил 8 задачи. Во овој случај овие 8 ученици решиле вкупно $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ задачи. Значи, од нашите 22 ученика оставаат 14 и тие вкупно решиле $50-36=14$ задачи. Според тоа, секој од овие 14 ученици решил по 1 задача. Конечно, 1 задача решиле 15 ученици.

3. „Сашо и Јас, рече Дарко, можеме да завршиме една работа за 20 дена, но ако со мене работи Никола наместо Сашо, тогаш работата ќе биде завршена за 15 дена.“

„Имам подобра комбинација, рече Никола, ако го земам Сашо за помошник, тогаш работата ќе ја завршиме за 12 дена.“

За коку дена секој од низ самостојно ќе ја заврши работата?

Решение. Да претпоставиме дека на Сашо му требаат s денови, на Дарко d денови и на Никола n денови за сам да ја заврши работата. Сметајќи кој колку работа завршува за еден ден го добиваме системот равенки

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{s} = \frac{1}{20}, \quad \frac{1}{d} + \frac{1}{n} = \frac{1}{15}, \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{s} = \frac{1}{12}.$$

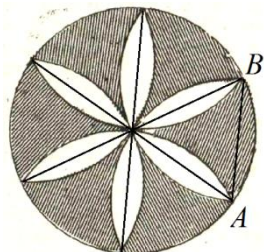
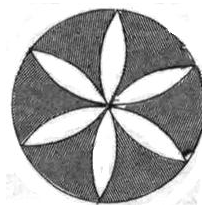
Со собирање на овие равенки добиваме

$$\frac{2}{d} + \frac{2}{n} + \frac{2}{s} = \frac{12}{60}, \text{ т.е. } \frac{1}{d} + \frac{1}{n} + \frac{1}{s} = \frac{1}{10}.$$

Сега, ако од последната равенка, една по друга ја одземеме секоја од равенките на системот добиваме $\frac{1}{n} = \frac{1}{20}$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{30}$, $\frac{1}{d} = \frac{1}{60}$. Значи, ако сам работи Сашо работата ќе ја заврши за 30 дена, Дарко за 60 дена, а Никола за 20 дена.

4. Колку проценти од плоштината на кругот зафаќа осенчениот дел на цртежот десно?

Решение. Неосенчениот дел со дијаметри е поделен на 12 еднакви делови, секој од кои е еднаков на отсечокот од кругот над тетивата AB . Плоштината на овој отсечок е еднаква на



$$P_0 = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{r^2\sqrt{3}}{4},$$

каде r е радиусот на кругот. Според тоа, плоштината на осенчениот дел од кругот е еднаква на

$$P = \pi r^2 - 12\left(\frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = r^2(3\sqrt{3} - \pi).$$

$$\text{Овој дел е } \frac{r^2(3\sqrt{3}-\pi)}{r^2\pi} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{\pi} \approx 0,654 = 65,4\%$$

од плоштината на кругот.

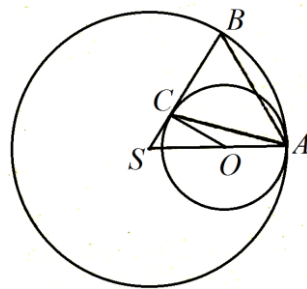
5. Две кружници се допираат внатрешно во точката A . Од центарот на поголемата кружница O повлечен е радиус OB на поголемата кружница, кој воедно е и тангента на помалата кружница во точката C . Определи го $\angle BAC$.

Решение. Нека $\theta = \angle BAC$ е бараниот агол и нека $\angle SAC = \alpha$ и $\angle SBC = \beta$. По претпоставка триаголниците SAB и ACO се рамнокраки ($SA = SB$ и $OA = OC$), а триаголникот SOC е правоаголен. Нека $\angle ASB = \varphi$.

Тогаш од триаголникот ABS имаме

$$2\beta + \varphi = 180^\circ, \text{ т.е. } \beta = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

Понатаму, $\angle SOC$ е надворешен за триаголникот ACO , па затоа



$$\angle SOC = \angle OAC = \angle OCA = 2\alpha.$$

Потоа, од триаголникот SOC имаме $\varphi + 2\alpha = 90^\circ$, т.е. $\alpha = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$.

Конечно,

$$\theta = \angle SAB - \alpha = \beta - \alpha = 90^\circ - \frac{\varphi}{2} - (45^\circ - \frac{\varphi}{2}) = 45^\circ.$$

Осмо одделение

1. Ако на квадратот на произволен природен број се додаде бројот 101010, тогаш добиениот збир не може да биде квадрат на природен број. Докажи!

Решение. Нека претпоставиме дека $n^2 + 101010 = k^2$. Тогаш

$$k^2 - n^2 = 101010, \text{ т.е. } (k-n)(k+n) = 2 \cdot 50505.$$

Ако броевите k и n се парни, тогаш левата страна е делива со 4, а десната не е делива со 4. Слично, ако k и n се непарни, тогаш левата страна е делива со 4, а десната не е делива со 4. Конечно, ако еден од броевите k и n е парен, а другиот е непарен тогаш десната страна е делива со 2, а левата не е делива со 2. Значи, во секој случај имаме противречност, од што следува тврдењето на задачата.

2. Дадена е дробката $A = \frac{2x-14}{x-4}$, каде x е цел број различен од 4.

а) За кои вредности на бројот x дробка A е цел број?

б) За кои вредности на природниот број x ($x > 4$) дробката A има најмала вредност?

Решение. а) Имаме $A = \frac{2x-14}{x-4} = \frac{2(x-4)-6}{x-4} = 2 - \frac{6}{x-4}$. Овој израз може да е цел број ако и само ако 6 е делив со $x-4$, а тоа е можно ако и само ако $x-4 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, т.е. $x \in \{-2, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10\}$.

б) Дробката A ќе има најмала вредност ако дробката $\frac{6}{x-4}$ има најголема вредност, а тоа е исполнето за $x-4=1$, т.е. $x=5$.

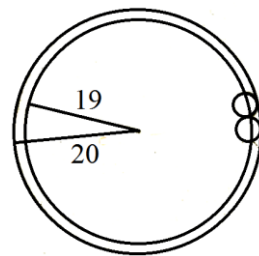
3. Определи ги сите двоцифрени броеви кои се еднакви на двократниот производ на своите цифри.

Решение. Нека $\overline{xy}$ е бараниот број. Тогаш $10x + y = 2xy$, од каде добиваме $y = 2x(y-5)$. Јасно, $x, y \neq 0$ и бидејќи y е цифра, важи $y > 0$,

па затоа мора да е $y > 5$. Од последното равенство следува дека y е парен број, па затоа $y=6$ или $y=8$. За $y=6$ добиваме $x=3$, а за $y=8$ добиваме $8=6x$ и оваа равенка нема решение во множеството природни броеви. Конечно, бараниот број е 36.

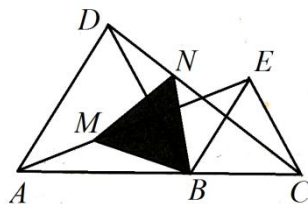
4. Докажи дека во круг со радиус $r=19$ не може да се распоредат 400 точки кои по парови се на растојание поголемо од 2.

Решение. Ако растојанието меѓу било кои две точки е поголемо од 2, тогаш околу секоја точка може да се опише кружница со радиус 1, така што опишаните кружници не се допираат. Во дадениот круг точките може да се распоредат и на самата кружница, па за да ги покриеме сите кружници со радиус 1, опишани околу точките, ќе опишеме круг со радиус 20, концентричен на дадениот круг (цртеж десно). Сега, ако може да се распоредат 400 точки, тогаш плоштината на поголемиот круг мора да е поголема од збирот на плоштините на сите 400 кругови со радиус 1. Но, плоштината на најголемиот круг е $P = \pi \cdot 20^2 = 400\pi$, а збирот на плоштините на сите 400 мали кругови е $400P_1 = 400\pi \cdot 1^2 = 400\pi$. Значи, не важи $P > 400P_1$, па затоа во дадениот круг не може да се распоредат 400 точки на саканиот начин.



5. Дадени се редоследно точките A, B, C на правата p и точките D и E од иста страна надвор од правата p , такви што триаголниците ABD и BCD се рамнострани. Нека M е точка од отсечката AE и N е точка од отсечката CD , така што $ME = 2AM$ и $CN = 2DN$. Докажи дека триаголникот BMN е рамнострани.

Решение. Од $\angle ABE = \angle DBC$, $AB = BD$ и $BE = BC$ следува дека триаголниците ABE и DBC се складни. Од оваа складност следува $AE = CD$, а оттука и $AM = DN$ (како третина од еднакви отсечки), а потоа и $\angle BAE = \angle BDN$. Од ова следува дека триаголниците ABM и BDN се складни, па затоа $BM = BN$ и $\angle ABM = \angle DBN$.



Понатаму,

$$\angle MBN = \angle MBD + \angle DBN = \angle MBD + \angle ABM = \angle ABD = 60^\circ.$$

Според тоа, во рамнокракиот триаголник MBN аголот при врвот е еднаков на 60° , што значи дека овој триаголник е рамностран.

Сојузен натпревар 1985**Седмо одделение**

1. Докажи дека за секој прост број поголем од 3 производот на неговите соседни броеви е делив со 24.

Решение. Секој прост број поголем од 3 е непарен, па неговите соседни броеви се два последователни парни броеви. Затоа едниот од нив е делив со 4. Овие два парни броја и дадениот прост број се три последователни броеви, што значи дека еден од двата парни броја е делив со 3. Конечно, производот на овие два соседни парни броја е делив со $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$.

2. Јанез во 1986 година ќе наполни онолку години колку што изнесува збирот на цифрите на годината кога се родил. Колку години ќе има Јанез во 1986 година?

Решение. Јанез е роден во $1900 + 10x + y$ година. Според условот на задачата

$$1986 - (1900 + 10x + y) = 1 + 9 + x + y, \text{ т.е. } 11x + 2y = 76.$$

Во множеството природни броеви последната равенка има единствено решение $x = y, y = 5$. Значи, Јанез е роден во 1965 година и во 1986 година тој ќе има 21 година.

3. Четири патници патувале со такси во иста насока, во четири места кои се еднакво оддалечени од своите соседни места. Првиот патник при излегувањето ја платил четвртина од сумата која во тој момент ја покажувал таксиметарот, вториот патник при излегувањето ја платил третина, а третиот и четвртиот патник половина од сумата на парите која таксиметарот ја покажувал во моментот кога секој од нив излегувал од автомобилот. Дали таксистот наплатил повеќе или помалку отколку кога би возел еден од патниците на целата релација и за колку?

Решение. Кога патниците влегле, таксистот го вклучил таксиометарот на кој се појавил износ од x денари. При поминување на растојанието до првото, потоа второто, третото место и четвртото место, цената секогаш се зголемувала за y денари. Така патниците редоследно плаќале:

$$\frac{1}{4}(x+y), \frac{1}{3}(x+2y), \frac{1}{2}(x+3y), \frac{1}{2}(x+4y).$$

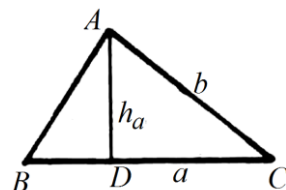
Цената на возењето е $x+4y$ денари, а патниците вкупно платиле

$$\frac{1}{4}(x+y) + \frac{1}{3}(x+2y) + \frac{1}{2}(x+3y) + \frac{1}{2}(x+4y) = x+4y + \frac{7}{12}x + \frac{5}{12}y$$

денари. Таксистот наплатил повеќе и тоа за оклу 50% од витинската цена.

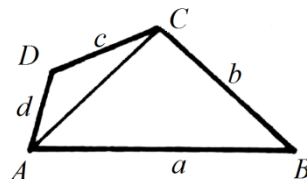
4. Докажи дека во секој конвексен четириаголник полузбирот на производот на соседните страни чии заеднички крајни точки се несоседни темиња е поголем или еднаков на плоштината на тој четириаголник.

Решение. Ќе докажеме дека во секој триаголник ABC со должини на страни a, b, c важи $\frac{ab}{2} \geq P$. Да го разгледам триаголникот даден на цртежот десно. Неговата плоштина е $P = \frac{1}{2}ah_a$. Но, во правоаголниот триаголник



ACD отсечката b , како хипотенуза, е најдолга, па затоа $h_a \leq b$ (знак за равенство важи ако и само ако $D \equiv A$). Затоа важи $\frac{ab}{2} \geq P$.

Сега да земеме произволен конвексен четириаголник $ABCD$ и со дијагоналата AC да го поделиме на два триаголници (цртеж десно). На добиените триаголници ABC и ACD да го примениме претходно докажаното неравенство. Имаме

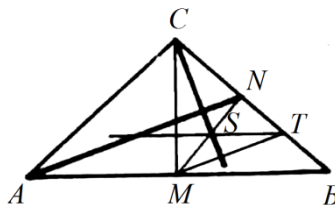


$$\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cd \geq P' + P'' = P, \text{ т.е. } \frac{ab+cd}{2} \geq P,$$

што и требаше да се докаже.

5. Во рамнокрак триаголник ABC точката M е средина на основата AB . Нека N е точка на кракот BC таква што $MN \perp BC$ и нека S е средина на отсечката MN . Докажи дека правата AN е нормална на правата CS .

Решение. Од својствата на рамнокракиот триаголник следува дека CM е висина повлечена кон основата AB . Нека T е средина на отсечката BN . Тогаш отсечката ST е средна линија на триагол-



никот BMN , па затоа е паралелна со AB и важи $ST \perp CM$. Но, важи и $MN \perp BC$, што значи дека S е ортоцентар на триаголникот CMT . Оттука заклучуваме дека CS е третата висина во овој триаголник, па затоа $CS \perp MT$. Но, отсечката MT е средна линија на триаголникот ABN , па е паралелна со AN , па затоа $CS \perp AN$.

Осмо одделение

- Со цифрите 4, 5, 6, 7, 8 и 9 е запишан еден шестцифрен број. Зоран Дарко и Никола го погаѓале тој број. Зоран: 574698, Дарко: 786945, Никола: 456789. Се покажало дека Зоран ги погодил точните места на три цифри. Исто толку погодил и Дарко, а Никола го погодил местото само на една цифра. Определи го шестцифрениот број.

Решение. Зоран, Дарко и Никола за непознатиот број ги дале следниве претпоставки:

Зоран:	5	7	4	6	9	8
Дарко:	7	8	6	9	4	5
Никола:	4	5	6	7	8	9

Гледаме дека претпоставките на Зоран и Дарко не се поклопуваат во ниту една цифра, па како секој од нив погодил три цифри, произлегува дека тоа се три различни цифри. Затоа цифрата која ја погодил Никола е на истото место или кај Зоран или кај Дарко. Гледаме дека тоа може да е само цифрата 6. Значи, Дарко ја погодил цифрат 6, што значи дека Никола не ја погодил таа цифра. Затоа на четвртото место е точна претпоставката на Дарко, т.е. четвртата цифра е 9. Заклучувајќи на ист начин, добиваме дека Дарко ги погодил третата, четвртата и петтата цифра, а Зоран првата, втората и шестата. Според тоа, бараниот број е 576948.

- За кои вредности на x и y полиномот

$$P(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13$$

прима најмала вредност.

Решение. Имаме:

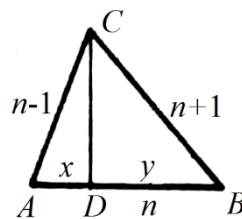
$$P(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = (x - 2)^2 + (y + 6)^2 \geq 0.$$

Најмалата вредност на полиномот е 0, бидејќи тој е збир на два квадрати, а секој квадрат е поголем или еднаков на 0. Најмалата вредност се достигнува за

$$x-2=0 \text{ и } y+3=0, \text{ т.е. за } x=2, y=-3.$$

3. Должините на страните на триаголникот се три последователни природни броја, не помали од 3. Докажи дека висината на триаголникот повлечена на средната по големина страна ја дели таа страна на делови чија разлика е 4.

Решение. Должините на страните AC, AB, BC на триаголникот ABC нека се $n-1, n, n+1$, соодветно. Нека $h=CD$ е висината која соодветствува на средната по големина страна AB и нека x и y се отсечките на кои точката D ја дели страната AB (цртеж десно). Од правоаголните триаголници ACD и BCD , применувајќи ја Питагоровата теорема следува $(n-1)^2 - x^2 = h^2$ и $(n+1)^2 - y^2 = h^2$, од каде добиваме $(n-1)^2 - x^2 = (n+1)^2 - y^2$, односно $(x-y)(x+y) = 4n$. Сега ако во последното равенство замениме $x+y=n$, добиваме $y-x=4n$, што и требаше да се докаже.

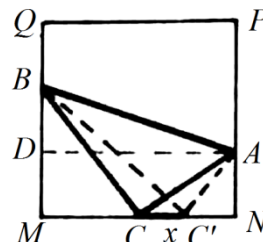


4. Даден е квадрат $MNPQ$ со страна со должина $1m$. На страните на овој квадрат се означени точки A, B, C :

- точката A е на $\frac{1}{3}$ од страната NP од точката N ,
- точката B е на $\frac{2}{3}$ од страната MQ од точката M ,
- точката C е средина на страната MN .

Триаголникот ABC не е правоагол. На која страна и за колку треба да се помести точката C за да триаголникот ABC е правоаголен?

Решение. Да претпоставиме дека точката C треба да се помести во положба C' за да триаголникот ABC' биде правоаголен (цртеж десно). Нека $x=CC'$ е должината која треба да се определи. Понатаму, нека D е средина на отсечката MB . Тогаш $BD=\frac{1}{3}=AN$ и $MN=$



$NC=\frac{1}{2}$. Од правоаголните триаголници ABD, ANC', MBC', ABC' добиваме

$$AB^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}, \quad AC^2 = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2,$$

$$BC^2 = \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{ и } AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

Со замена од првите три во четвртото равенство, по средувањето добиваме $2x^2 = \frac{1}{18}$, од каде наоѓаме $x^2 = \frac{1}{36} = \left(\pm\frac{1}{6}\right)^2$. Според тоа, $x = \frac{1}{6}$ или $x = -\frac{1}{6}$, што значи дека точката C треба да се помести лево или десно.

5. Нека AC е подолгата дијагонала на паралелограмот $ABCD$. Од темето C се повлечени нормали CE и CF на продолженијата на страните AB и AD . Дкажи дека

$$AC^2 = AB \cdot AE + AD \cdot AF. \quad (1)$$

Решение. Од правоаголните триаголници ACE и BCE (цртеж десно) добиваме

$$CE^2 = AC^2 - AE^2 \text{ и } CE^2 = BC^2 - (AE - AB)^2$$

од каде наоѓаме

$$AC^2 - AE^2 = BC^2 - (AE - AB)^2.$$

На сличен начин добиваме

$$AC^2 - AF^2 = CD^2 - (AF - AD)^2.$$

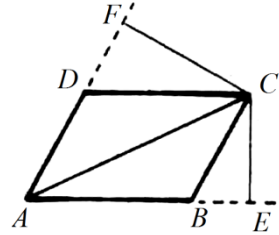
Последните две равенства ги собираме и добиваме

$$2AC^2 - AE^2 - AF^2 = BC^2 - (AE - AB)^2 + CD^2 - (AF - AD)^2.$$

Ако во последното равенство искористиме дека $AD = BC$ и $CD = AB$, по квадрирањето и средувањето го добиваме равенството

$$2AC^2 = 2AE \cdot AB + 2AF \cdot AD,$$

кое е еквивалкентно на равенството (1).



Сојузен натпревар 1986

Седмо одделение

1. Другарите Алекса, Борис и Цане во едно коло на спортска прогноза ги вложиле следниве суми: Алекса 600 денари, Борис 900 денари и Цане 1500 денари. На прогнозата вкупно добиле 17000 денари. Како правилно ќе ја поделат добивката?

Решение. Нека a, b, c се соодветно деловите од 17000 денари кои Алекса, Борис и Цане треба да ги добијат. Тогаш

$$a:b:c=600:900:1500=2:3:5.$$

Затоа прво 17000 ќе го поделиме на $2+3+5=10$ делови, а потоа секој ќе го добие пропорционалниот дел:

$$a=2\cdot 1700=3400, \quad b=3\cdot 1700=5100 \text{ и } c=5\cdot 1700=8500 \text{ денари.}$$

2. Павел фатил определен број бубамари и пајаци. Кога ги пребројал сите нозе, го добил бројот 176. Колку бубамари, а колку пајаци фатил Павел, ако нивните броеви се парни и двоцифрени? (Пајакот има 8 нозе, а бубамарата има 6 нозе.)

Решение. Ако се фатени b бубамари и p пајаци, тогаш $6b+8p=176$, т.е. $3b+4p=88$. Оттука добиваме $p=22-\frac{3}{4}b$. За да b и p се двоцифрен мора да важи $8<\frac{3}{4}b<13$, т.е. $10<b\leq 17$, а за да p е парен број, мора b да е делив со 8. Според тоа, $b=16$ и $p=10$.

3. Еден четирицифрен број ги има слениве својства:

- 1) првата и четвртата цифра се еднакви меѓу себе,
- 2) втората е третата цифра се еднакви меѓу себе,
- 3) бројот е еднаков на производот на три последователни прости броја.

Кој е тој број?

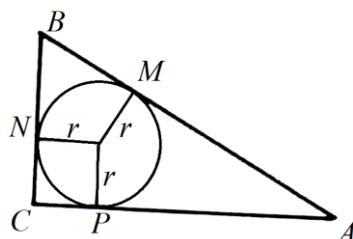
Решение. Нека бараниот број е $x=\overline{abba}$. Тогаш

$$x=1000a+100b+10b+a=1001a+110b=11(91a+10b).$$

Според тоа, x е делив со 11, па според условот $x=5\cdot 7\cdot 11$ или $x=7\cdot 11\cdot 13$ или $x=11\cdot 13\cdot 17$, односно $x=385$ или $x=1001$ или $x=2431$. Јасно, условите ги задоволува само бројот $x=1001$.

4. Докажи дека во правоаголен триаголник збирот на катетите е еднаков на двократниот збир на радиусите на впишаната и опишаната кружница.

Решение. Од својствата на тангентата повлечена од точка надвор од кружницата следува $AP = AM$ и $BM = BN$. Понатаму, за хипотенузата $AB = c$ и радиусот на опишаната кружница R околу правоаголен триаголник важи $AB = c = 2R$. Според тоа,

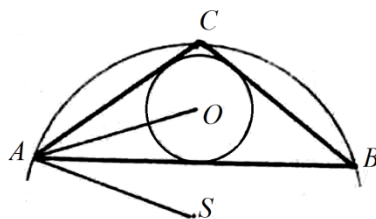


$$a + b = CP + PA + BN + CN = r + AM + MB + r = 2r + AB = 2r + 2R,$$

што и требаше да се докаже.

5. Определи ги аглиите на рамнокракиот триаголник ABC ($AC = BC$), ако центрите O_1 и O на впишаната и опишаната кружница се симетрични во однос на основата AB на триаголникот.

Решение. Имаме $\angle ASC = 2\angle ABC$ (централен и перифериски агол во кружница). Понатаму, од $SA = SC = R$ следува $\angle SAC = \angle SCA$. Ако означиме $\angle OAC = \varphi$, тогаш заради



симетријата на точките O и S во однос на AB и бидејќи AO е симетрала на $\angle BAC$ добиваме $3\varphi = \angle SAC = \angle SCA = \frac{\gamma}{2}$. Сега, бидејќи $\alpha = \beta = 2\varphi$ со замена во $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ добиваме $2\varphi + 2\varphi + 6\varphi = 180^\circ$, т.е. $\varphi = 18^\circ$. Според тоа, аглиите на триаголникот се $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$.

Осмо одделение

1. Ако на природен број кој завршува со цифрата 5, му се избрише цифрата на единиците, добиениот број се помножи со својот следбеник и на производот од десно му се допише 25, се добива квадрат на природен број. Докажи дека ова важи за трицифрени броеви.

Решение. Нека дадениот број е $x = 10a + 5$. Со бришење на цифрата 5 го добиваме бројот a . Кога овој број го помножиме со неговиот следбеник и на производот му допишеме 25 добиваме

$$100a(a+1)+25=100a^2+100a+25=(10a+5)^2=x^2.$$

Ова важи за секој природен број x , па значи и за секој трицифрен број.

2. Определи ги сите тројки природни броеви (x, y, z) кои се решенија на равенката

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 = 1985$$

и x е најмалиот од овие броеви.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(x+1)(y+1)(z+1) = 2 \cdot 3 \cdot 331.$$

Бидејќи x е најмалиот број, заклучуваме дека $x+1=2$, т.е. $x=1$. Понатаму, $y+1=3$, $z+1=331$ или $y+1=331$, $z+1=3$. Така ги добиваме решенијата $x=1, y=2, z=330$ или $x=1, y=330, z=2$.

3. На таблата е запишан трицифрен број $**8$. Тројца ученици ги погледале својствата на овој број.

Зоран: Сите цифри му се парни и има парен број различни прости делители.

Даниел: Делив е со 9 и е квадрат на некој природен број.

Никола: Помал е од 400 и 13 пати е поголем од квадратот на еден природен број.

Се покажало дека секој погодил само по едно својство на бројот. Кои цифри се наоѓаат на местата на ѕвездичките?

Решение. Бројот запишан на таблата има цифра на единците 8, па затоа не може да биде квадрат на природен број. Значи, точно е тврдењето на Даниел дека бројот е делив со 9. Според тоа, тоа е еден од следниве броеви: 109, 198, 288, 378, 468, 558, 648, 738, 828, 918. Од изјавата на Никола следува дека тоа може да бидат броевите помали од 400 или бројот 468, бидејќи $468=13 \cdot 36$. Ги разложуваме преостанатите броеви на множители:

$$108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3, \quad 198 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11, \quad 288 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3,$$

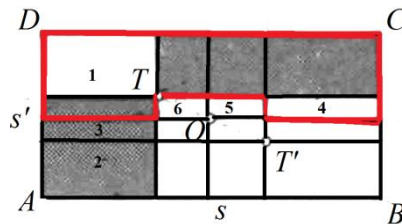
$$378 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7, \quad 468 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13.$$

Гледаме дека само едно од својствата кои ги навел Бојан имаат само броевите 108 (парен број различни множители) и 468 (сите цифри му се парни).

На таблата е запишан еден од броевите 108 или 468.

4. Даден е правоаголник $ABCD$ во кој е земена произволна точка низ која се повлечени две прави паралелни со страните на правоаголникот. Докажи дека плоштината на барем еден од правоаголниците кој ја содржи точката A или точката C е помала или еднаква на четвртина од плоштината на целиот правоаголник.

Решение. Нека се s' и s симетралите на правоаголникот (види цртеж). Тие правоаголникот го делат на четири еднакви дела, секој со плоштина $\frac{P}{4}$. Ако точката ја избереме во еден од деловите кои ја содржат точката A или точката C , точноста на тврдењето е очигледна.



Нека точката T е избрана како на цртежот. Конструираме точка T' симетрична на T во однос на O и правоаголникот $ABCD$ да го поделиме со прави низ T и T' паралелни со страните на правоаголникот. Ќе докажеме дека збирот на плоштините на бараните правоаголници (осенчени на цртежот) е помал од $\frac{P}{2}$. Заради симетрија правоаголниците 1 и 2 имаат еднакви плоштини, а исто така и правоаголниците 3 и 4. Земајќи го ова во предвид добиваме дека плоштината на осенчените правоаголници е еднаква на плоштината на осумаголникот чии страни се обоени со црвена боја. Но, плоштината на овој осумаголник е помала од $\frac{P}{2}$, па затоа сигурно еден од осенчените правоаголници има плоштина помала од $\frac{P}{4}$.

5. Во правоаголен триаголник ABC со катети a и b , хипотенуза c и висина повлечена кон хипотенузата h важи $c+h > a+b$. Докажи!

Решение. Имаме $\frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$, т.е. $ab=ch$. Понатаму, користејќи го овој услов и Питагоровата теорема добиваме

$$(c+h)^2 = c^2 + 2ch + h^2 = a^2 + b^2 + 2ab + h^2 = (a+b)^2 + h^2 > (a+b)^2,$$

од каде следува $(c+h)^2 > (a+b)^2$, т.е. $c+h > a+b$.

Сојузен натпревар 1987

Седмо одделение

1. Докажи дека за секој трицифрен број важи следново тврдење: или бројот е делив со 3, или двоцифрен број, односно едноцифрен број, составен од неговите цифри е делив со 3.

Решение. Ако некоја од цифрите на произволен трицифрен број е делива со 3, тогаш тврдењето на задачата е докажано. Нека претпоставиме дека ниту една од цифрите x, y, z не е делива со 3. Тогаш или остатоците од делењето на цифрите x, y, z се меѓусебно еднакви или кај две цифри остатоците се различни. Ако остатоците се еднакви, тогаш збирот $x + y + z$ е делив со 3, што значи дека бројот е делив со 3. Ако два остатоци, на пример кај цифрите x и y , се различни, тогаш тие во некој редослед се еднакви на 1 и 2, што значи дека збирот $x + y$ е делив со 3, па затоа двоцифрениот број $\overline{xy}$ е делив со 3.

2. Броевите 12 и 60 имаат интересно својство: нивниот производ е еднаков на нивниот десеткратен збир. Определи ги сите вакви парови природни броеви.

Решение. Нека x и y се бараните броеви. Тогаш $xy = 10(x + y)$, од каде последователно добиваме

$$\begin{aligned}xy - 10x - 10y &= 0, \\xy - 10x - 10y + 100 &= 100, \\(x - 10)(y - 10) &= 100.\end{aligned}$$

Но, $100 = 1 \cdot 100 = 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = 5 \cdot 20 = 10 \cdot 10$, па од последната равенка лесно се добива дека бараните броеви се: 11 и 110, или 12 и 60, или 14 и 35, или 15 и 30, или 20 и 20.

3. Некој трицифрен број се зголемува за 45 ако цифрите на единиците и десетките ги заменат местата, а истиот број се намалува за 270 ако цифрите на стотките и десетките ги заменат местата. Што ќе се случи со овој број, ако цифрите на единиците и стотките ги заменат местата?

Решение. Нека $100x + 10y + z$ е дадениот трицифрен број. Со замена на местата на цифрите на десетките и единиците добиваме

$$100x + 10y + z + 45 = 100x + 10z + y, \text{ т.е. } y - z + 5 = 0.$$

Со замена на местата на цифрите на стотките и десетките добиваме

$$100x + 10y + z - 270 = 100y + 10x + z, \text{ т.е. } x - y - 3 = 0.$$

Со собирање на равенствата $y - z + 5 = 0$ и $x - y - 3 = 0$, го добиваме равенството $x - z = -2$. Со замена на местата на цифрите на стотките и единиците добиваме:

$$100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 99(x - z) = 99(-2) = -198,$$

што значи дека бројот ќе се зголеми за 198.

4. Во рамнокрак триаголник ABC со основа AB , отсечката CD е висина спуштена кон основата. Ако M е произволна точка од кракот BC , докажи дека разликата на отсечките CA и CM е поголема од разликата на отсечките DA и DM .

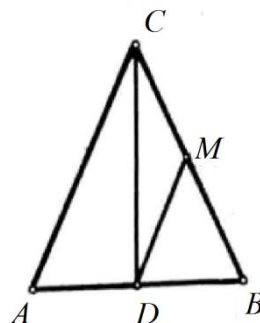
Решение. Од $CA = CB$ следува

$$CA - CM = CB - CM = BM.$$

Од триаголникот BDM , според неравенството на триаголник добиваме $BM > |DB - DM|$, цртеж десно. Меѓутоа, CD е висина повлечена кон основата на рамнокракиот триаголник ABC , па затоа $DA = DB$. Според тоа,

$$CA - CM = BM > |DB - DM| = |DA - DM|,$$

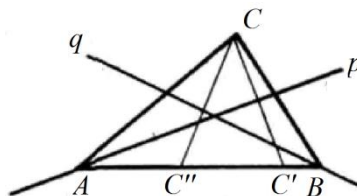
т.е. $CA - CM > |DA - DM|$ што и требаше да се докаже.



5. Дадена се точка C и прави p и q кои се сечат. Конструирај триаголник ABC за кој правата p е симетрала на внатрешниот агол α , а правата q е симетрала на внатрешниот агол β . (Точката C и правите p и q избори ги така што задачата ќе има решение).

Решение. Анализа. Нека ABC е триаголникот во кој p и q се симетрали на аглиите α и β , цртеж десно. Тогаш точката C' , симетрична на C во однос на p припаѓа на правата AB , а на оваа права припаѓа и точката C'' , симетрична на C во однос на q .

Конструкција. Ги конструираме точките C' и C'' симетрични на точката C во однос на правите p и q , соодветно. Ја повлекуваме



правата $C'C''$ и во пресекот на оваа права со правите p и q ги наоѓаме темињата A и B .

Доказот непосредно следува од анализата и конструкцијата. Деталите од доказот, како и дискусијата ги оставаме на читателот за вежба.

Осмо одделение

1. За кои вредности на x, y, z изразот $x^2 + y^2 + z^2 - 12y - 14z + 90$ има најмала вредност? Определи ја таа вредност.

Решение. Последователно добиваме

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 12y - 14z + 90 &= x^2 + y^2 - 12y + z^2 - 14z + 90 \\ &= x^2 + (y-6)^2 + (z-7)^2 + 5 \geq 5. \end{aligned}$$

Според тоа, најмалата можна вредност на дадениот израз е 5 и истата се достигнува за $x=0, y=6, z=7$.

2. Ако $a^2 + a + 1 = 0$, определи ја вредноста на изразот

$$a^{1987} + \frac{1}{a^{1987}}.$$

Решение. Ако $a^2 + a + 1 = 0$, тогаш $a \neq 1$, па затоа даденото равенство го помножиме со $a-1$ добиваме $(a-1)(a^2 + a + 1) = 0$, т.е. $a^3 - 1 = 0$, што значи $a^3 = 1$. Според тоа, $a^{1987} = (a^3)^{662} a = 1^{662} a = 1 \cdot a = a$, па затоа

$$a^{1987} + \frac{1}{a^{1987}} = a + \frac{1}{a}.$$

Но од условот $a^2 + a + 1 = 0$, последователно добиваме $a^2 + 1 = -a$ и ако поделиме со a наоѓаме $a + \frac{1}{a} = -1$. Конечно,

$$a^{1987} + \frac{1}{a^{1987}} = a + \frac{1}{a} = -1.$$

3. Збирот на сите природни броеви од 1 до n е еднаков на трицифрен број со еднакви цифри. Колку природни броеви се собрани?

Решение. Од условот на задачата добиваме

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{kkk},$$

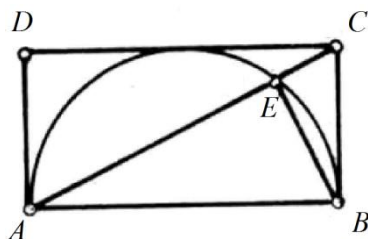
$$\frac{n(n+1)}{2} = 111k,$$

$$n(n+1) = 222k = 2 \cdot 3 \cdot 37k.$$

Левата страна на последното равенство е производ на два последователни броја, а во десната страна еден од множителите е бројот 37, кој е прост број. Според тоа, вториот множител може да биде 36 или 38. Но, бројот 38 не е делив со 3, па затоа вториот множител е 36, при што $k = 6$. Значи, $n(n+1) = 36 \cdot 37$, од каде заклучуваме дека се собрани првите 36 природни броеви и е добиен збирот 666.

4. Во правоаголник $ABCD$ со страни $AB = 10\text{ cm}$ и $BC = 5\text{ cm}$ е впишана полукружница со дијаметар AB . Во кој однос полукружницата ја дели дијагоналата на правоаголникот?

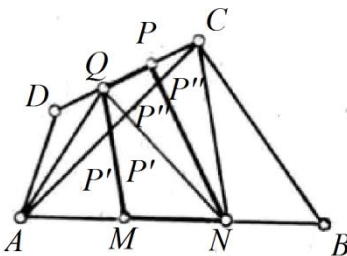
Решение. Нека E е пресечната точка на дијагоналата AC со полукружницата k (цртеж десно). Тогаш $\angle AEB = 90^\circ$, како агол над дијаметарот AB . Правоаголните триаголници ABE и BCE се слични, бидејќи имаат еднакви остри агли. Затоа



$$AE : EC = AB : BC = 10 : 5 = 2 : 1$$

5. Нека $ABCD$ е произволен конвексен четириаголник со плоштина 3. На страната AB се земени точки M и N такви што $AM = MN = NB$, а на страната CD се земени точки P и Q такви што $CP = PQ = QD$. Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ има плоштина 1.

Решение. Триаголниците ANQ и NMQ имаат еднакви основи, $AM = MN$ и заедничка соодветна висина, па затоа имаат еднакви плоштини (на цртежот означени со P'). Од слични причини еднакви се и плоштините на триаголниците CPN и PQN кои се означени со P'' .



Според тоа, плоштината на четириаголникот $MNPQ$ е еднаква на $P' + P''$. Ќе докажеме дека збирот на плоштините на триаголниците ADQ и BCN е еднаков на третина од плоштината на четириаголникот $ABCD$, т.е. дека е еднаква на 1. Навистина, триаголникот ADQ има три пати помала основа од триаголникот ACD , па како нивните

висини се еднакви добиваме дека $P_{ADQ} = \frac{1}{3}P_{ACD}$. Аналогно се докажува дека $P_{BCN} = \frac{1}{3}P_{ABC}$. Според тоа,

$$P_{ADQ} + P_{BCN} = \frac{1}{3}P_{ACD} + \frac{1}{3}P_{ABC} = \frac{1}{3}P_{ABCD} = 1.$$

Според тоа, $P_{ANCQ} = 2$, т.е. $2P' + 2P'' = 2$, од каде следува $P' + P'' = 1$, односно $P_{MNPQ} = P' + P'' = 1$.

Сојузен натпревар 1980

Седмо одделение

1. Шестина од вкупното количество на некоја стока е продадено со заработувачка од 20%, а половина од вкупното количество од истата стока е продадено со загуба од 10%. Со колку проценти заработувачка треба да се продаде остатокот од стоката за да се покрие загубата?

Решение. Нека k вкупното количество стока, а c е планираната цена. Од условот на задачата слеува равенката

$$\frac{k}{6} \cdot 0,2c + \frac{k}{3} \cdot xc = \frac{k}{2} \cdot 0,1c,$$

каде x е бараниот процент. Решение на оваа равенка е $x = 0,05 = 5\%$.

2. Даден е број n чии цифри се 60 седумки и определен број нули. Докажи дека $\frac{n-27}{3}$ е цел број, а $\frac{n+27}{9}$ не е цел број.

Решение. Збирот на цифрите на бројот n е $60 \cdot 7 = 420$. Според тоа, бројот n е делив со 3, па затоа и бројот $n-27$ е делив со 3. Бидејќи бројот 420 не е делив со 9, заклучуваме дека n не е делив со 9, што значи дека бројот $n+27$ не е делив со 9.

3. Определи природни броеви $n_1, n_2, \dots, n_k$, $k > 1$ (кои не мора да се различни меѓу себе) такви што

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k = 1988 \text{ и } n_1 + n_2 + \dots + n_k = 1988.$$

Колку различни решенија има?

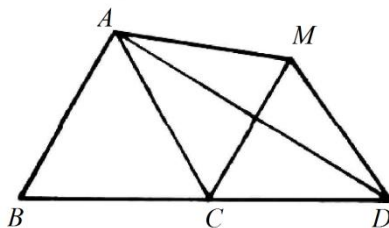
Решение. Бидејќи $1988 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 71$ и $2+2+7+71=82$, едно решение може да биде

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 71 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \text{ (1906 единици)}.$$

4. На симетралата на надворешниот агол кај темето C на триаголникот ABC е земена произволна точка M . Докажи дека

$$MA + MB > AC + BC.$$

Решение. Нека D е точка на продолжението на страната BC преку темето C таква што $CD = CA$, што значи симетрична на темето A во однос на симетралата CM . Јасно,



триаголниците ACM и DCM се складни, па затоа $DM = AM$. Според тоа,

$$MA + MB = MD + MB > BD = BC + CD = AC + BC.$$

5. Во рамнокрак триаголник ABC , $AC = BC$, во кој $\angle ACB = 80^\circ$ дадена е точка O таква што $\angle BAO = 10^\circ$ и $\angle ABO = 30^\circ$. Определи го $\angle ACO$.

Решение. Нека H е пресечната точка на висината CD на триаголникот и правата BO (цртеж десно). Триаголникот ABH е рамнокрак, па затоа

$$\angle HAB = \angle HBA = 30^\circ.$$

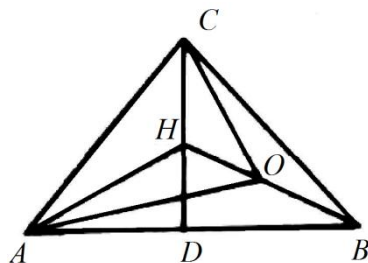
Според тоа,

$$\angle CAH = 20^\circ = \angle HAO.$$

Освен тоа,

$$\angle ACD = 40^\circ \text{ и } \angle AOH = \angle OAB + \angle OBA = 40^\circ.$$

Триаголниците AOH и ACH имаат два еднакви агли и заедничка страна AH , па затоа се складни. Од складноста следува $AO = AC$, што значи дека триаголникот AOC е рамнокрак и како $\angle CAO = 40^\circ$ добиваме $\angle ACO = 70^\circ$.



Осмо одделение

1. Два брода тргнуваат од местата A и B во пресрет еден кон друг. Секој од нив кога ќе стигне во едното место се враќа назад во другото место. Првиот пат бродовите се сретнале на 5 km од A , а вториот пат на 3 km од B . Определи го растојанието од A до B .

Решение. Растојанието од A до B да го означиме со x , брзините на бродовите со v' и v'' , времето до првата средна со t' , а времето од првата до втората среба со t'' . Од условот на задачата добиваме

$$v't' = 5, v''t' = x - 5, v't'' = 3 + (x - 5), v''t'' = 5 + (x - 3).$$

Ако ги помножиме првата и четвртата равенка и втоарата и третата равенка, добиваме

$$5(x + 2) = v't''t'' = (x - 5)(x - 2), \text{ т.е. } x^2 - 12x = 0.$$

Но, $x > 0$, па од последната равенка следува $x = 12$.

2. Дадени се линеарните функции

$$y = -1, \quad y = \frac{3}{2}x - 4, \quad y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{2} \quad \text{и} \quad y = 2x + 7.$$

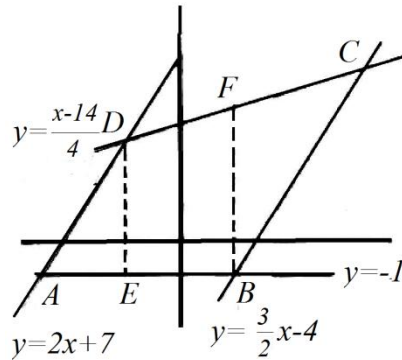
Опреди ги координатите на темињата и плоштината на правилниот четириаголник кои ги ограничуваат графичите на дадените функции.

Решение. Со A, B, C, D да ги означиме споменатите темиња како на цртежот десно. Имаме:

$$A(-4, -1), B(2, -1), C(6, 5), D(-2, 3)$$

Баравата плоштина е

$$\begin{aligned} P &= \frac{AE \cdot ED}{2} + \frac{(ED + BF) \cdot EB}{2} + \frac{BF \cdot h_{BF}}{2} \\ &= \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{(4 + 5) \cdot 4}{2} + \frac{5 \cdot 4}{2} = 32. \end{aligned}$$



3. Докажи дека разликата на бројот кој е запишан со 100 единици и бројот кој е запишан со 50 двојки е квадрат на природен број.

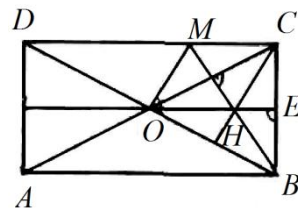
Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} \frac{11 \cdot 100 - 22 \cdot 2}{100 \quad 50} &= \frac{1}{9}(10^{100} - 1) - \frac{2}{9}(10^{50} - 1) \\ &= \frac{1}{9}(10^{100} - 1 - 2 \cdot 10^{50} + 2) \\ &= \frac{1}{9}(10^{100} - 2 \cdot 10^{50} + 1) \\ &= \frac{1}{9}(10^{50} - 1)^2 = \left(\frac{10^{50} - 1}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

Бидејќи бројот $10^{50} - 1$ е делив со 9, тој е делив со 3, со што тврдењето е докажано.

4. Во правоаголникот $ABCD$ точката M припаѓа на страната CD и важи $DM = 2 \cdot CM$, а O е пресекот на дијагоналите. Правите AC и BM се сечат под прав агол. Опреди го $\angle BOM$.

Решение. Нека E е средината на страната BC . Тогаш $OE \perp BC$. Според тоа, точката H е ортоцентар на триаголникот OBC , па затоа $CH \perp OB$. Меѓутоа OH е средна линија на триаголникот DBM , па затоа $OH = \frac{1}{2}DM = MC$. Затоа четириаголникот



$OHCM$ е паралелограм, па оттука следува дека $OM \perp BO$.

5. Даден е триаголник ABC и точка M во неговата внатрешност. Докажи дека

$$AM \cdot BC + BM \cdot AC + CM \cdot AB \geq 4P, \quad (1)$$

каде P е плоштината на триаголникот ABC .

Решение. Нека B' и C' се подножјата на нормалите соодветно повлечени од B и C на правата AM (цртеж десно). Тогаш

$$P_{ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot BB' \text{ и } P_{ACM} = \frac{1}{2} AM \cdot CC',$$

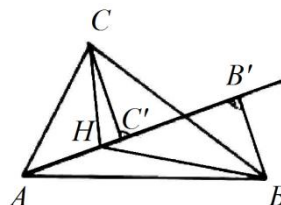
па затоа

$$\begin{aligned} P_{ABM} + P_{ACM} &= \frac{1}{2} AM \cdot (BB' + CC') \\ &\leq \frac{1}{2} AM \cdot BC. \end{aligned}$$

Аналогно се докажува дека

$$P_{ACM} + P_{BCM} \leq \frac{1}{2} CM \cdot AB \text{ и } P_{ABM} + P_{BCM} \leq \frac{1}{2} BM \cdot AC.$$

Сега, ако ги собереме последните три неравенства, по средувањето го добиваме неравенството (1).



Сојузен натпревар 1989

Седмо одделение

1. Третина од стоката е продадена по цена која е за 10% поголема од планираната, а половина од стоката е продадена за 15% поефтино од планираната цена. Со колку проценти над планираната цена е продаден остатокот од стоката, ако на крајот е наплатен износ кој би се добил ако вкупното количество стока е продадено по планираната цена?

Решение. Нека x е процентот по кој преостаната стока треба да се продаде над планираната цена. Тогаш $\frac{1}{3} \cdot 1,1 + \frac{1}{2} \cdot 0,85 + \frac{1}{6}x = 1$, од каде добиваме $x = 1,25$, што значи дека преостанатата стока се продавала по 25% повисока цена.

2. Определи ги сите трицифрени броеви, кои се запишани со различни цифри, такви што трицифрениот број е делив со 7 и збирот на неговите цифри е делив со 7.

Решение. Нека бараниот број е $x = \overline{abc}$. Тогаш

$$x = 100a + 10b + c = 7(14a + b) + (2a + 3b + c),$$

па затоа $7 \mid (a + b + c)$ и $7 \mid (2a + 3b + c)$. Според тоа, 7 е делител на разликата $(2a + 3b + c) - 2(a + b + c) = b - c$. Сега, од условот дека цифрите a, b, c мора да се различни следува дека единствени броеви кои го задоволуваат условот на задачата се 518, 581, 329 и 392.

3. Во триаголникот ABC страната AB е најдолга. На страната AB земени се точки D и E такви што $AD = AC$ и $BE = BC$. Определи го $\angle ACB$ ако $\angle ECD = 20^\circ$.

Решение. Да означиме $\angle BCD = x$ и $\angle ACE = y$ (направи цртеж). Од рамнокракиот триаголник BCE добиваме $2(20^\circ + x) = 180^\circ - \angle EBC$, а од рамнокракиот триаголник ACD имаме $2(20^\circ + y) = 180^\circ - \angle CDA$. Со собирање на последните две равенства наоѓаме

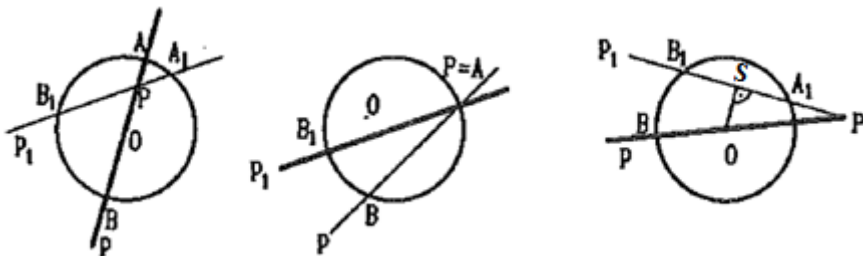
$$2(20^\circ + x + y + 20^\circ) = 180^\circ + (180^\circ - \angle CDA - \angle EBC),$$

односно

$$2(\angle ACB + 20^\circ) = 180^\circ + \angle ACB, \text{ т.е. } \angle ACB = 140^\circ.$$

4. Дадена е кружница k и точка P во истата рамнина. Конструирај права p која минува низ точката P и ја сече кружницата k во точки A и B такви што збирот $PA + PB$ е најголем. Образложи ја конструкцијата во секој од трите случаи: P е на кружницата, P е во кружницата и P е надвор од кружницата.

Решение. Ќе го разгледаме одделно секој од наведените случаи.



Ако точката P е во кружницата или на кружницата, тогаш важи $PA + PB = AB$, а овој збир ќе биде најголем кога AB е дијаметар на кружницата, т.е. кога правата p минува низ нејзиниот центар.

Нека точката P е надвор од кружницата и нека p_1 е произволна права низ P која ја сече кружницата, на пример во точките A_1 и B_1 . Со S да ја означиме средината на отсечката A_1B_1 . Тогаш

$$PA_1 + PB_1 = PA_1 + (PA_1 + A_1S + SB_1) = 2PA_1 + 2A_1S = 2PS.$$

Овој збир ќе биде најголем ако $S \equiv O$, т.е. ако правата p минува низ центарот на кружницата.

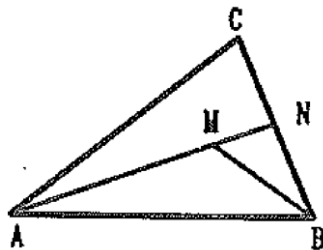
5. Нека M е произволна точка во внатрешноста на даден триаголник ABC . Докажи:

а) $\angle AMB > \angle ACB$,

б) $AM + MB < AC + CB$.

Решение. а) Нека правата AM ја сече страната BC на триаголникот во точката N . Бидејќи $\angle AMB$ е надворешен агол за триаголникот MNB , а $\angle MNB$ е надворешен агол за триаголникот ANC , добиваме

$$\angle AMB > \angle MNB > \angle ACN = \angle ACB.$$



б) Во триаголникот MNB важи $MN + NB > MB$, па затоа

$$AN + NB = AM + MN + NB > AM + MB. \quad (1)$$

Слично, во триаголникот ACN важи $AC + CN > AN$, па затоа

$$AC + CB = AC + CN + NB > AN + NB. \quad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува $AM + MB < AC + CB$, што и требаше да се докаже.

Осмо одделение

- Четири ученици Амир, Борис, Цветко и Дарко собирале стара хартија. Заедно собрале 288 kg хартија. Колку килограми собрал секој од нив, ако се знае дека Амир собрал 36 kg повеќе од Борис, односно $\frac{3}{4}$ од количеството кое заедно го собрале Борис и Цветко, а Дарко собрал два пати повеќе од Цветко?

Решение. Со a, b, c, d да ги означиме количествата хартија кои ги собрале наведените ученици. Тогаш

$$a = b + 36, \quad a = \frac{3}{4}(b + c), \quad d = 2c, \quad a + b + c + d = 288.$$

Од $b + 36 = \frac{3}{4}(b + c)$ добиваме $b = 3c - 144$, потоа $a = 3c - 108$ и ако замениме во $a + b + c + d = 288$ имаме

$$(3c - 108) + (3c - 144) + c + 2c = 288,$$

од каде наоѓаме $c = 60$, а потоа $b = 36$, $a = 72$ и $d = 120$.

- Дали е можно збирот $1 + 2 + 3 + \dots + p$ за некој природен број да завршува со цифрите 1989?

Решение. Цифрата на единиците на производот на два последователни природни броја може да биде: 0, 2 или 6. Сега, ако збирот

$$1 + 2 + 3 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$$

завршува на цифрите 1989, тогаш производот на двата последователни природни броја p и $p+1$ треба да завршува на цифрата 8, што не е можно. Значи, дадениот збир не може да завршува на цифрите 1989.

- Збирот на цифрите на бројот X е Y , а збирот на цифрите на бројот Y е Z . Ако $X + Y + Z = 60$, определи го бројот X .

Решение. Лесно се проверува дека бројот X мора да биде двоцифрен (ако е едноцифрен, тогаш збирот $X + Y + Z$ ќе биде помал од 60, а ако

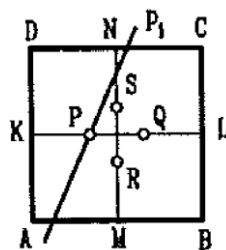
е трицифрен овој збир ќе биде поголем од 60). Нека $X = 10a + b$, каде a и b се цифри. Тогаш $Y = a + b$ и

$$Z = \begin{cases} a + b, & a + b \leq 9 \\ a + b - 9, & a + b > 9. \end{cases}$$

Во првиот случај $60 = X + Y + Z = 12a + 3b$, т.е. $4a + b = 20$, од каде добиваме $(a, b) \in \{(4, 4), (5, 0), (3, 8)\}$. Последната од наведените можности отпаѓа, бидејќи во тој случај $a + b = 3 + 8 > 9$. Во вториот случај добиваме $60 = X + Y + Z = 12a + 3b - 9$, т.е. $4a + b = 23$, од каде наоѓаме $(a, b) \in \{(4, 7), (5, 3)\}$, но последниот пар пак отпаѓа бидејќи во тој случај $a + b = 5 + 3 < 9$. Значи, бараните броеви се 44, 50 и 47.

4. Даден е квадрат и 9 различни прави во неговата рамнина. Секоја од овие прави го дели квадратот на два трапези чии плоштини се однесуваат како 2:3. Докажи дека меѓу дадените прави постојат три кои минуваат низ иста точка.

Решение. Дадениот квадрат да го означиме со $ABCD$ и да разгледаме една од дадените прави p_1 . Ако P_1 и P_2 се плоштините на трапезите на кои правата p_1 го дели дадениот квадрат, а m_1 и m_2 нивните средни линии, тогаш бидејќи висините на двата трапеза се еднакви од условот на задачата следува $P_1 : P_2 = m_1 : m_2 = 2 : 3$. Според тоа,

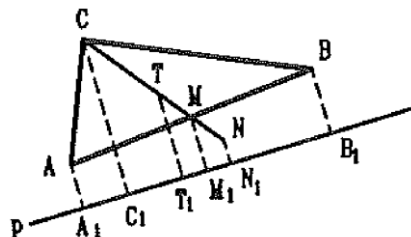


правата p_1 минува низ една од точките P, Q, R, S кои се добиваат кога средните линии на квадратот се поделат во однос 2:3 (види цртеж). Но, во случајов имаме 4 точки и 9 прави, па од принципот на Дирихле следува дека најмалку три прави минуваат низ иста точка.

5. Во рамнината на триаголникот ABC дадена е права p , која го сече триаголникот ABC . Ако A_1, B_1, C_1, T_1 се подножјата на нормалите повлечени од A, B, C, T соодветно на правата p (T е тежиште на триаголникот ABC), докажи дека

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 3TT_1.$$

Решение. Нека M е средина на страната AB на дадениот триаголник и N е точка на правата CM



(различна од T) таква што $MN = TM$. Бидејќи тежиштето T ја дели средната линија во однос 2:1, следува дека $CT = TN$. Нека M и N се подножјата на нормалите од M и N на правата p . Од трапезот CC_1N_1N добиваме

$$CC_1 + NN_1 = 2TT_1,$$

од трапезот TT_1N_1N добиваме

$$TT_1 + NN_1 = 2MM_1,$$

а од трапезот AA_1B_1B добиваме

$$AA_1 + BB_1 = 2MM_1.$$

Од послените три равенства следува:

$$AA_1 + BB_1 = TT_1 + NN_1 = TT_1 + (2TT_1 - CC_1) = 3TT_1 - CC_1,$$

т.е.

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 3TT_1.$$

Сојузен натпревар 1990

Седмо одделение

1. Определи го најголемиот природен број таков што било кои две соседни цифри запишани во истиот редослед формираат двоцифрен број делив со 23.

Решение. Двоцифрени броеви деливи со 23 се 23, 46, 69 и 92. Броеви кои го задоволуваат условот на задачата се: 23, 46923, 6923 и 923. Најголем од овие броеви е 46923.

2. Ако во еден трицифрен број делив со 7 двете негови последни цифри се еднакви, докажи дека збирот на цифрите на тој број е делив со 7.

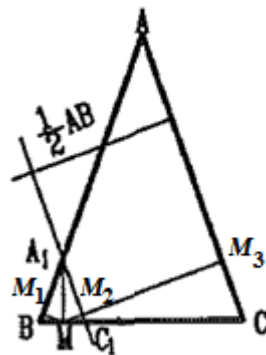
Решение. Дадениот трицифрен број можеме да го запишеме во обликот $A = \overline{xyy} = 100x + 10y + y = 7(14x + y) + 2(x + 2y)$, каде x и y се цифри. Ако 7 е делител на A , тогаш 7 е делител на $2(x + 2y)$ и како $\text{NZD}(2, 7) = 1$ заклучуваме дека 7 е делител на $x + 2y = x + y + y$, т.е. на збирот на цифрите на бројот A .

3. За броевите a, b, c, d важи $d > c$, $a + b = c + d$, $a + d < b + c$. Подреди ги овие броеви по големина.

Решение. Од $a + d < b + c$ следува $a + b + d < 2b + c$, па ако се искористи дека $a + b = c + d$, добиваме $c + 2d < 2b + c$, од каде следува $d < b$. Сега, од $a + b = c + d$ и $d < b$ следува $c - a = b - d > 0$, па затоа $c > a$. Конечно, $a < c < d < b$.

4. На основата BC на рамнокракиот остроаголен триаголник ABC определи точка M така што разликата на нејзините растојанија до краците ќе биде еднаква на половина од должината на кракот AB .

Решение. Конструираме права p паралелна на кракот AC на дадениот триаголник, на растојание еднакво на половина од должината на кракот AB , така што го сече кракот AB во точката A_1 , а основата BC во точката C_1 . Нека M е подножјето на нормалата повлечена од A_1 на BC .

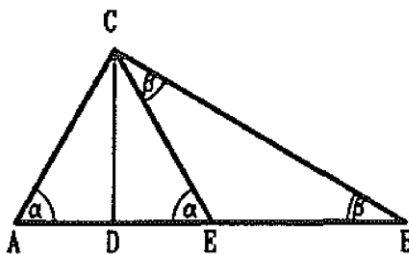


Ќе докажеме дека оваа права ги исполнува условите на задачата. Нека M_1 и M_2 се подножјата на нормалите повлечени од точката M на краците A_1B и A_1C_1 на рамнокракиот триаголник A_1BC_1 , а M_3 подножјето на нормалата од M на AC . Точката M е средина на основата на триаголникот A_1BC_1 , па затоа $MM_1 = MM_2$, што значи

$$MM_3 - MM_1 = MM_2 + \frac{1}{2}AB - MM_1 = \frac{1}{2}AB.$$

5. Во правоаголен триаголник висината повлечена кон хипотенузата ја дели хипотенузата на два дела чија разлика е еднаква на должината на едната катета. Определи ги аглиите на овој триаголник.

Решение. Нека ABC е дадениот правоаголен триаголник со прав агол во темето C и нека, на пример, $CA < BC$. Понатаму, нека D е подножјето на висината повлечена од темето C и E е точка на отсечката DB таква што



$DE = AD$. Тогаш триаголникот ACE е рамнокрак. Од условот на задачата следува $BE = AC = CE$, што значи дека и триаголникот BCE е рамнокрак, при што $\alpha = \angle AEC$ е негов надворешен агол, па затоа $\alpha = 2\beta$. Но, $\alpha + \beta = 90^\circ$, па затоа $\beta = 30^\circ$ и $\alpha = 60^\circ$.

Осмо одделение

1. Докажи дека збирот на кубовите на три последователни природни броја е делив со 9.

Решение. Збирот на кубовите на три последователни природни броја е

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2).$$

Сега, ако $n = 3k$, тогаш производот $n(n^2 + 2)$ е делив со 3, а ако $n = 3k \pm 1$, тогаш

$$n^2 + 2 = 3(3k^2 \pm 2k + 1),$$

па затоа и во овој случај производот $n(n^2 + 2)$ е делив со 3.

2. Едноцифрен број x е зголемен за 10 и со тоа бројот x е зголемен за некој процент. Ако добиениот број го зголемиме за истиот број проценти како првиот пат го добиваме бројот 72. Определи го бројот x .

Решение. Ако непознатиот број го означиме со x , тогаш од условот на задачата ја добиваме равенката

$$x + 10 + \frac{10}{x}(x + 10) = 72,$$

од каде добиваме $x^2 - 52x + 100 = 0$, односно $(x - 2)(x - 50) = 100$. Производ на два броја е еднаков на 0 ако еден од множителите е еднаков на 0, па од последната равенка добиваме $x - 2 = 0$ или $x - 50 = 0$ т.е. $x = 2$ или $x = 50$. Но, x е едноцифрен број, па затоа решение на задачата е $x = 2$.

3. Определи шестцифрен број кој помножен со 2, со 3, со 4, со 5, со 6 дава шестцифрени броеви запишани со истите цифри како и почетниот број.

Решение. Со анализа на производите со 2, со 3, со 4, со 5 и со 6 се добива дека единствено решение на задачата е бројот 142857. На пример, ако бараниот број е $\overline{abcdef}$, тогаш бидејќи при множење со бројот 6 треба да се добие шестцифрен број запишан со истите цифри како и почетниот број, заклучуваме дека $a = 1$ итн. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

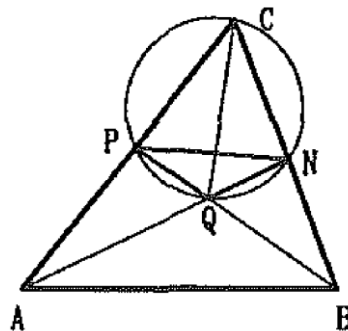
4. Во триаголникот ABC симетралата на $\angle CAB$ ја сече страната BC во точката N , а симетралата на $\angle CBA$ ја сече страната AC во точката P , при што $PN = 1$. Симетралите AN и BP се сечат во точката Q . Темето C припаѓа на кружницата која минува низ точките P, Q и N . Определи ја плоштината на триаголникот NPQ .

Решение. Имаме

$$\angle PQN = \angle AQB = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

Понатаму, од тетивниот четириаголник $PQNC$ следува $\angle PQN = 180^\circ - \gamma$, па од овие две релации добиваме $\gamma = 60^\circ$. Сега,

$$\angle QNP = \angle QCP = \frac{\gamma}{2} = 30^\circ$$



и слично $\angle NPQ = 30^\circ$, па затоа триаголникот NPQ е рамнокрак, со агол на основата 30° . Со симетралата QC на основата NP тој може да се подели на два складни триаголници од кои може да се состави рамностран триаголник со висина $\frac{1}{2}PN = \frac{1}{2}$, што значи со страна $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Конечно, неговата плоштина е еднаква на $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

5. Дијагоналите на произволен трапез го делат трапезот на четири триаголници. Плоштините на триаголниците, изразени во cm^2 , кои ги содржат основите на трапезот се m и n . Пресметај ја плоштината на трапезот.

Решение. Триаголниците ABO и CDO се слични со коефициент на сличност $\sqrt{m}:\sqrt{n}$. Ако $AB=a$, $CD=c$ и ако h' и h'' се висините на овие триаголници од темето O , тогаш

$$\frac{h'}{h''} = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}.$$

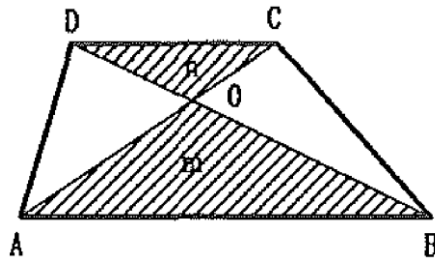
Оттука

$$\frac{h'+h''}{h''} = \frac{a+c}{c} = \frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \text{ и } \frac{(h'+h'')(a+c)}{h''c} = \frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}{n}.$$

Бидејќи $h''c = 2n$, добиваме дека плоштината на трапезот е

$$P = \frac{(h'+h'')(a+c)}{2} = \frac{(h'+h'')(a+c)}{h''c} \cdot \frac{h''c}{2} = \frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}{n} \cdot n = (\sqrt{m} + \sqrt{n})^2.$$

Забелешка. Задачата е иста со петтата задача за осмо одделение во 1981 година.



Сојузен натпревар 1991

Седмо одделение

1. На таблата се запишани сите природни броеви од 1 до 1991. Горјан избришал два броја и наместо нив ја запишал апсолутната вредност на нивната разлика. Тој постапката ја повторил толку пати се додека на таблата не останал еден број. Дали тој број може да биде 1991?

Решение. Нека се избришани броевите a и b , каде $a > b$. Тогаш збирот на броевите на таблата се намалува за

$$a + b - |a - b| = a + b - (a - b) = 2b,$$

т.е. за парен број. На почетокот на таблата збирот на сите запишани броеви бил

$$1 + 2 + 3 + \dots + 1990 + 1991 = \frac{1991 \cdot 1992}{2} = 1991 \cdot 996.$$

Бидејќи почениот збир е парен, а во секој чекор збирот се намалува за парен број, на таблата никогаш нема да има броеви чиј збир е непарен број, што значи дека не може да остане бројот 1991.

2. Постои вистинска дробка поголема од $\frac{1}{3}$ со следните својства:

а) постои природен број x таков што дробката не ја менува вредноста ако броителот се зголеми за x , а именителот се помножи со x ,

б) броителот и именителот се заемно прости броеви.

Опреди ги сите такви дробки.

Решение. Нека бараната дробка е $\frac{a}{b}$, каде $b \neq 0$ и $\text{NZD}(a, b) = 1$. Тогаш

$\frac{a}{b} = \frac{a+x}{bx}$, од каде добиваме $x = \frac{a}{a-1} = 1 + \frac{1}{a-1}$. Бидејќи x е природен број, добиваме $a-1$, т.е. $a=2$. Според тоа, $x=2$. За дробките

$$\frac{2}{3} = \frac{2+2}{2 \cdot 3}, \frac{2}{5} = \frac{2+2}{2 \cdot 5}$$

се исполнети сите услови на задачата. Кај дробката $\frac{2}{4}$ броителот и именителот не се заемно прости броеви, а за $b \geq 6$ важи $\frac{2}{b} \leq \frac{1}{3}$.

3. Даден е полиномот $P(t) = t^4 - t + \frac{1}{2}$. Докажи дека за секој реален број

t важи:

а) $P(t) \neq 0$,

б) $P(t) > 0$.

Решение. Имаме

$$P(t) = t^4 - t + \frac{1}{2} = t^4 - t^2 + \frac{1}{4} + t^2 - t + \frac{1}{4} = (t^2 - \frac{1}{2})^2 + (t - \frac{1}{2})^2.$$

Броевите $t^2 - \frac{1}{2}$ и $t - \frac{1}{2}$ не може да се истовремено еднакви на 0, па затоа $P(t) > 0$ за секој реален број t , што значи дека и $P(t) \neq 0$.

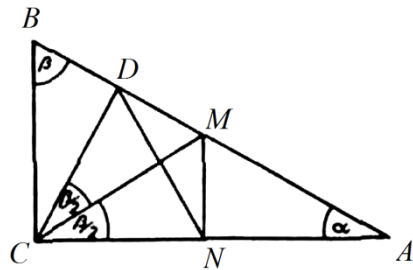
4. Даден е правоаголен триаголник ABC . Нека M е точка на хипотенузата AB таква што $BM = BC$ и N е точка на катетата AC таква што отсечката CN е еднаква на висината спуштена кон хипотенузата. Докажи дека $\angle CNM = 90^\circ$.

Решение. Нека $\angle CBA = \beta$ (цртеж десно). Триаголникот BCM е рамнокрак ($BC = BM$), па затоа

$$\angle BCM = \angle BMC = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Бидејќи $\angle BCD = 90^\circ - \beta$, добиваме

$$\begin{aligned} \angle DCM &= \angle BCM - \angle BCD \\ &= 90^\circ - \frac{\beta}{2} - (90^\circ - \beta) = \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

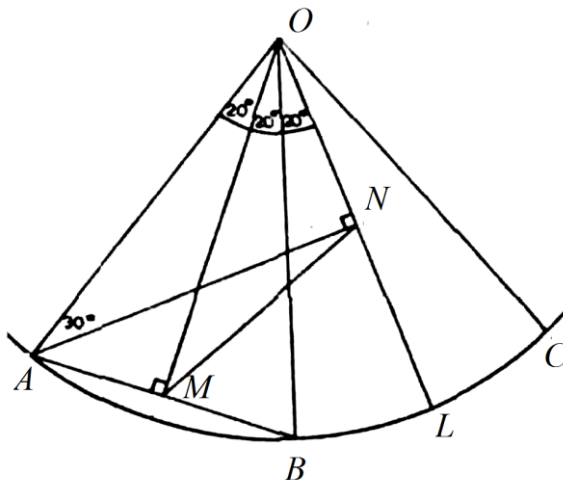


Бидејќи $\angle ACD = 90^\circ - \alpha = \beta$, добиваме $\angle NMC = \beta - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$. Триаголниците CMD и CMN се складни (CM е заедничка страна, $\angle DCM = \angle MCN = \frac{\beta}{2}$ и според условот $CD = CN$), па од оваа складност следува $\angle CNM = \angle ADM = 90^\circ$.

5. Нека AB и BC се соседни страни на правилен деветаголник, точката L е средина на лакот BC , точката M е средина на отсечката AB и точката N е средина на отсечката OL , каде O е центарот на кружницата опишана околу деветаголникот. Докажи дека $\angle OMN = 30^\circ$.

Решение. Бидејќи AB и BC се страни на правилен деветаголник, важи $\angle AOB = \angle BOC = 40^\circ$ (види цртеж). Бидејќи $\angle BOL = \angle LOC = 20^\circ$, добиваме $\angle AOL = 60^\circ$, што значи дека триаголникот AOL е рамностран. Понатаму, точката N е средина на OL , па затоа AN е висина на триаголникот AOL и $\angle ANO = 90^\circ$. Но, важи и $\angle AMO = 90^\circ$, па затоа четириаголникот $AMNO$ е тетивен, а центарот на опишаната

кръжница е средната на отсечката AO . Конечно, користејќи го фактот дека перифериските агли на ист лак се еднакви, добиваме $\angle OMN = \angle OAN = 30^\circ$.



Осмо отделение

1. На колку начини бројот 1991 може да се запише како збир на последователни природни броеви?

Решение. Нека

$$n + (n + 1) + \dots + (n + k) = 1991.$$

Тогаш

$$(k+1)n + \frac{k(k+1)}{2} = 1991, \text{ т.е. } (k+1)(2n+k) = 2 \cdot 11 \cdot 181.$$

Сега, бидејќи $(k+1)(2n+k) = 2 \cdot 11 \cdot 181 > k^2$, добиваме $k < 64$, па затоа $k+1 \in \{2, 11, 22\}$.

- а) Ако $k+1=2$, тогаш $k=1$ и $995+996=1991$.
- б) Ако $k+1=11$, тогаш $k=10$, па $2n+10=362$, т.е. $n=176$. Освен тоа важи $176+177+\dots+186=1991$.
- в) Ако $k+1=22$, тогаш $k=21$, $2n+21=181$ и $n=80$. Освен тоа, $80+81+\dots+101=1991$.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека бројот 1991 може на три начини да се запише како збир на последователни природни броеви.

2. Ако

$$a^2 = \underbrace{100\dots005}_{1990} \cdot \underbrace{11\dots11}_{1991} + 1,$$

определете го бројот a .

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} a^2 &= \underbrace{100\dots005}_{1990} \cdot \underbrace{11\dots11}_{1991} + 1 \\ &= (\underbrace{100\dots00}_{1991} + 5) \cdot \frac{1}{9} \cdot \underbrace{99\dots99}_{1991} + 1 \\ &= \frac{1}{9} (10^{1991} + 5)(10^{1991} - 1) + 1 \\ &= \frac{1}{9} ((10^{1991})^2 + 5 \cdot 10^{1991} - 10^{1991} - 5 + 9) \\ &= \frac{1}{9} ((10^{1991})^2 + 4 \cdot 10^{1991} + 4) \\ &= \frac{1}{9} (10^{1991} + 2)^2 \\ &= \left(\frac{10^{1991} + 2}{3} \right)^2. \end{aligned}$$

Според тоа, $a = \frac{10^{1991} + 2}{3}$ или $a = -\frac{10^{1991} + 2}{3}$. Да забележиме дека

$$\frac{10^{1991} + 2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{100\dots002}_{1990} = \underbrace{33\dots334}_{1990}$$

3. Во едно езеро се влива поток кој секој ден во езерото внесува исто количество вода. 183 коњи денес може да ја испијат целата вода, т.е. за 24 часа би го испразниле езерото, а 37 коњи, почнувајќи од денес, целата вода може да ја испијат за 5 дена. За колку дена, почнувајќи од денес, еден коњ може да ја испие целата вода?

Решение. Нека x е количеството вода кое во почетниот момент се наоѓа во езерото, y е количеството вода кое за еден ден потокот го внесува во езерото и z е количеството вода кое за еден ден го пие еден коњ. Тогаш

$$183z = x + y, \quad 5 \cdot 37z = x + 5y.$$

Од овие равенки добиваме

$$185z - 183z = (x + 5y) - (x + y), \text{ т.е. } 2z = 4y.$$

Понатаму,

$$z = 2y \text{ и } x = 183z - y = 365y.$$

Да го означиме со n бројот на деновите за кои еден коњ ќе ја испие целата вода. Тогаш $x + ny = nz$, од каде добиваме

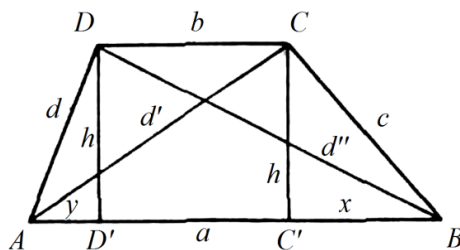
$$n = \frac{x}{z-y} = \frac{365y}{2y-y} = 365 \text{ дена.}$$

4. Докажи дека збирот на квадратите на дијагоналите на произволен трапез е еднаков на збирот на квадратите на краците зголемен за двојниот производ на основите.

Решение. Од правоаголните триаголници ACC' и BDD' следува

$$d'^2 = (a-x)^2 + h^2 = (a-x)^2 + c^2 - x^2 = a^2 - 2ax + c^2,$$

$$d''^2 = (a-y)^2 + h^2 = (a-y)^2 + d^2 - y^2 = a^2 - 2ay + d^2,$$



(види цртеж). Ако ги собереме овие две равенства добиваме

$$\begin{aligned} d'^2 + d''^2 &= a^2 - 2ax + c^2 + a^2 - 2ay + d^2 = 2a^2 - 2ax - 2ay + c^2 + d^2 \\ &= 2a(a-x-y) + c^2 + d^2 = 2ab + c^2 + d^2. \end{aligned}$$

5. Нека P е произволна точка од основата на правилна четиристрана пирамида. Нормалата во точката P на рамнината на основата ги сече рамнините на бочните сидови во точките M_1, M_2, M_3, M_4 . Докажи дека збирот

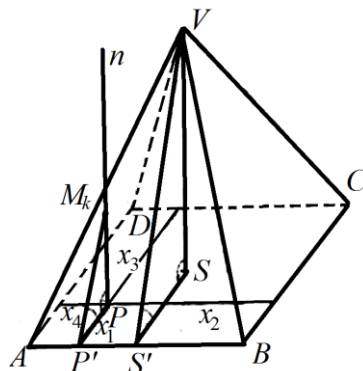
$$PM_1 + PM_2 + PM_3 + PM_4$$

е четири пати поголем од висината на пирамидата.

Решение. Нека x_1, x_2, x_3, x_4 се растојанијата од точката P до рабовите на основата и ϕ е аголот меѓу бочните страни и основата на пирамидата. Тогаш

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2a$$

(види цртеж). Нека M_1, M_2, M_3, M_4 се пресечните точки на правата n , која



минува низ точката P и е нормална на рамнината на основата, со соодветните бочни сидови на пирамидата. Триголниците $SS'V$ и $PP'M_k$, $k=1,2,3,4$ се слични (двата се правоаголници: $\angle S = \angle P = 90^\circ$ и $\angle PP'M_k = \angle SS'V = \varphi$). Од сличноста добиваме

$$SS':SV = PP':PM_k, \text{ т.е. } \frac{a}{2}:H = x_k:PM_k.$$

Според тоа, $PM_k = \frac{2x_k H}{a}$ и затоа

$$PM_1 + PM_2 + PM_3 + PM_4 = \frac{2H}{a}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = \frac{2H}{a} \cdot 2a = 4H.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Šarić, M., Čeliković, L.: Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1989 godine za učenike osnovnih škola, DMM, Pitagora, Beli Manastir, 1990
2. Šarić, M., Čeliković, L.: Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1990 godine za učenike osnovnih škola, DMM, Pitagora, Beli Manastir, 1990
3. Šarić, M.: Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1987 godine za učenike osnovnih škola, DMM, Pitagora, Beli Manastir, 1988
4. Šarić, M.: Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1988 godine za učenike osnovnih škola, DMM, Pitagora, Beli Manastir, 1989
5. Stojanović, V.; Zolić, A.: *Savezna takmičenja iz matematike (osnovne škole)*, DMS, Beograd, 1991
6. Zolić, A.: *Zbirka rešenih konkursnih zadataka*, Matematički list, Beograd, 1990
7. Баралић, Ђ.: 300 припремних задатака за Јуниорске математичке олимпијаде (искуство Србије), Klett, Београд, 2016
8. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви (второ издание), Армаганка, Скопје, 2020
9. Малчески, Р., Малчески, А., Малчески, С.: Математички талент 11 (олимписки теми – трет дел), Армаганка, Скопје, 2019
10. Малчески, Р.: Математички талент 7 (олимписки теми – прв дел, алгебра и теорија на броеви), Армаганка, Скопје, 2019
11. Малчески, Р.: Математички талент 8 (олимписки теми – втор дел, геометрија и комбинаторика), Армаганка, Скопје, 2019