

# Диофантовы уравнения

Проект подготовили и представляют:

Е. Веретенников, И. Климанова, П. Козлов, А. Мирошников.

## Аннотация

В этом проекте мы познакомим вас с некоторыми замечательными задачами из теории диофантовых уравнений. Он состоит из нескольких разделов, и мы рекомендуем решать задачи в том порядке, в котором они представлены.

Мы предполагаем, что вы уже знакомы со структурой решений классического уравнения Пелля  $x^2 - Dy^2 = 1$ . Более интересный вопрос о структуре решений уравнения  $x^2 - Dy^2 = n$  рассматривается в разделе 1. Теория цепных дробей помогает описать эти решения при малых по модулю значениях  $n$ . Вдобавок мы предложим малоизвестный метод, который позволяет за конечное количество итераций свести уравнение  $x^2 - Dy^2 = n$  к другому уравнению  $t^2 - Du^2 = m$  с  $m$  малым по модулю.

Раздел 2 посвящен некоторым специальным случаям уравнений  $x^4 - Dy^2 = 1$  и  $x^2 - Dy^4 = 1$ . В процессе решения задач из этого раздела понадобится изучить структуру решений некоторых конкретных уравнений  $x^2 - Dy^2 = n$  с  $n$  малым по модулю. Понимание этой структуры будет также полезно для многих других задач.

В разделе 3 мы установим связь между давним вопросом о существовании диофантовых четвёрок и количеством классов решений уравнения  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$ .

## 1 Уравнения вида $x^2 - Dy^2 = n$

Пусть  $\alpha$  — иррациональное число. Представим  $\alpha$  в виде бесконечной цепной дроби  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ . Цепная дробь, образованная из  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$  путем удаления всех членов после определенного выбранного места, называется *подходящей* для  $\alpha$ . Подходящая цепная дробь  $[a_0, \dots, a_k]$  может быть записана в виде обычной дроби со взаимно простыми числителем  $p_k$  и знаменателем  $q_k$ . Также обозначим бесконечную цепную дробь  $[a_k, a_{k+1}, \dots]$  через  $\alpha_k$ .

Свойства подходящих дробей:

а)  $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$ ,  $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$ ;

б)  $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k+1}$ ,  $p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k = (-1)^k a_k$ ;

в)  $p_{2k}/q_{2k}$  — возрастающая последовательность,  $p_{2k-1}/q_{2k-1}$  — убывающая последовательность;

г)  $\alpha = \frac{\alpha_{k+1} p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}}$ .

**Задача 1.1.** а) Докажите равенства:

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k+1}, p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k = (-1)^k a_k.$$

б) Докажите неравенства:

$$\frac{1}{q_{k+1} + q_k} < |q_k \alpha - p_k| < \frac{1}{q_{k+1}}.$$

в) Докажите, что последовательность  $\{|q_k\alpha - p_k|\}_{k=0}^{\infty}$  является строго убывающей.

**Решение.** а) Рассмотрим сначала первое равенство. Будем доказывать его по индукции. Проверим базу. Поскольку  $p_0 = a_0, q_0 = 1, p_1 = a_0a_1 + 1, q_1 = a_1$ , то

$$p_1q_0 - p_0q_1 = a_0a_1 + 1 - a_0a_1 = 1 = (-1)^2.$$

Теперь докажем шаг индукции. Пусть утверждение верно для всех индексов меньших либо равных  $k$ . Докажем его для  $k + 1$ , воспользовавшись рекуррентными соотношениями на  $p_{k+1}$  и  $q_{k+1}$ :

$$\begin{aligned} p_{k+1}q_k - p_kq_{k+1} &= (a_{k+1}p_k + p_{k-1})q_k - p_k(a_{k+1}q_k + q_{k-1}) = \\ &= p_{k-1}q_k - p_kq_{k-1} = -(p_kq_{k-1} - p_{k-1}q_k) = (-1)^{k+2}. \end{aligned}$$

Последнее равенство верно в силу предположения индукции. Первое равенство доказано.

Теперь докажем второе равенство. Для этого снова воспользуемся рекуррентным соотношением на  $p_k$  и  $q_k$ :

$$\begin{aligned} p_kq_{k-2} - p_{k-2}q_k &= (a_kp_{k-1} + p_{k-2})q_{k-2} - p_{k-2}(a_kq_{k-1} + q_{k-2}) = \\ &= a_k(p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1}) = (-1)^k a_k. \end{aligned}$$

Последний переход следует из доказанного ранее равенства.

б) Так как

$$\alpha = \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}},$$

то по пункту а)

$$|q_k\alpha - p_k| = \frac{|p_{k-1}q_k - p_kq_{k-1}|}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}}.$$

Из равенства  $\alpha_{k+1} = a_{k+1} + 1/\alpha_{k+2}$  следует неравенство

$$a_{k+1} < \alpha_{k+1} < a_{k+1} + 1.$$

Следовательно,

$$q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1} < \alpha_{k+1}q_k + q_{k-1} < (a_{k+1} + 1)q_k + q_{k-1} = q_{k+1} + q_k$$

и

$$\frac{1}{q_{k+1} + q_k} < |q_k\alpha - p_k| < \frac{1}{q_{k+1}}.$$

в) Из результата пункта б) следует, что верна цепочка неравенств

$$|q_{k+1}\alpha - p_{k+1}| < \frac{1}{q_{k+2}} \leq \frac{1}{q_{k+1} + q_k} < |q_k\alpha - p_k|.$$



**Задача 1.2.** Докажите, что одна из двух последовательных подходящих дробей к  $\alpha$  удовлетворяет неравенству:

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2}.$$

**Решение.** Будем доказывать от противного. Пусть для некоторого  $k$  обе подряд идущие подходящие дроби  $p_k/q_k, p_{k+1}/q_{k+1}$  не удовлетворяют этому неравенству, тогда

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \geq \frac{1}{2q_k^2} \quad \text{и} \quad \left| \alpha - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| \geq \frac{1}{2q_{k+1}^2}.$$

Из иррациональности  $\alpha$  следует, что неравенства выше строгие, то есть

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| > \frac{1}{2q_k^2} \quad \text{и} \quad \left| \alpha - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| > \frac{1}{2q_{k+1}^2}.$$

Поскольку подходящие дроби с четными номерами меньше  $\alpha$ , а с нечетными — больше, то разности  $p_k/q_k - \alpha$  и  $\alpha - p_{k+1}/q_{k+1}$  одного знака, а потому верно равенство

$$\left| \frac{p_k}{q_k} - \alpha + \alpha - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| = \left| \frac{p_k}{q_k} - \alpha \right| + \left| \alpha - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right|.$$

Тогда по Задаче 1.1

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_k q_{k+1}} &= \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| = \left| \frac{p_k}{q_k} - \alpha + \alpha - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| = \\ &= \left| \frac{p_k}{q_k} - \alpha \right| + \left| \alpha - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| > \frac{1}{2q_k^2} + \frac{1}{2q_{k+1}^2}. \end{aligned}$$

Полученное неравенство домножим на  $2q_k^2 q_{k+1}^2$ , и тогда имеем

$$q_{k+1}^2 - 2q_k q_{k+1} + q_k^2 = (q_{k+1} - q_k)^2 < 0,$$

что неверно. ■

**Задача 1.3.** Докажите, что одна из трёх подряд идущих цепных дробей к  $\alpha$  удовлетворяет неравенству:

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}b^2}.$$

**Решение.** Предположим противное, то есть для некоторого  $k$  верно

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2}, \quad \left| \alpha - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_{k+1}^2} \quad \text{и} \quad \left| \alpha - \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_{k+2}^2}.$$

Точно так же, как и в решении Задачи 1.2, заметим, что одна из дробей  $p_k/q_k$  и  $p_{k+1}/q_{k+1}$  больше  $\alpha$ , а другая меньше. Это же верно и для дробей  $p_{k+1}/q_{k+1}$  и  $p_{k+2}/q_{k+2}$ . Поэтому аналогично рассуждениям из Задачи 1.2 получим

$$\frac{1}{q_k q_{k+1}} > \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2} + \frac{1}{\sqrt{5}q_{k+1}^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{q_{k+1} q_{k+2}} > \frac{1}{\sqrt{5}q_{k+1}^2} + \frac{1}{\sqrt{5}q_{k+2}^2}.$$

Теперь обозначим  $q_{k+1}/q_k$  через  $r_k$ . Домножим неравенства на  $\sqrt{5}q_{k+1}^2$  и  $\sqrt{5}q_{k+2}^2$  соответственно, а далее перепишем с учетом введенных обозначений. Получим

$$r_k^2 - \sqrt{5}r_k + 1 < 0 \quad \text{и} \quad r_{k+1}^2 - \sqrt{5}r_{k+1} + 1 < 0.$$

Левые части обоих неравенств задают параболу ветвями вверх, поэтому  $r_k, r_{k+1} < \varphi$ , где  $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  — наибольший из двух корней уравнения  $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ .

Поделив  $q_{k+2} = a_{k+2}q_{k+1} + q_k$  на  $q_{k+1}$ , получим

$$r_{k+1} = a_{k+2} + \frac{1}{r_k}.$$

Наконец, из доказанных ранее соотношений на  $r_k$  следует противоречие:

$$\varphi > r_{k+1} = a_{k+2} + \frac{1}{r_k} \geq 1 + \frac{1}{r_k} > 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi.$$

■

**Задача 1.4.** Натуральное  $k$  и целые  $p, q$  таковы, что  $q > 0$  и

$$|q\alpha - p| < |q_k\alpha - p_k|.$$

а) Докажите, что существуют  $u, v$  такие, что

$$p_k u + p_{k+1} v = p, \quad q_k u + q_{k+1} v = q.$$

б) Докажите, что  $q \geq q_{k+1}$ .

**Решение.** а) Возьмем

$$u = (-1)^k (qp_{k+1} - pq_{k+1}), \quad v = (-1)^k (pq_k - qp_k).$$

То, что такие числа подходят, проверяется прямым вычислением с использованием Задачи 1.1.а.

б) Возьмем числа  $u, v$  из пункта а). Перебором случаев покажем, что  $u \geq 0$  и  $v \geq 1$ , и тогда  $q = q_k u + q_{k+1} v \geq q_{k+1} v \geq q_{k+1}$ .

Случаи  $u, v < 0$  или  $v = 0$  невозможны по тривиальным причинам.

Осталось разобрать случай, когда  $u, v$  различных знаков. Заметим, что числа  $q_k\alpha - p_k$  и  $q_{k+1}\alpha - p_{k+1}$  тоже различных знаков. Значит, числа  $u(q_k\alpha - p_k)$  и  $v(q_{k+1}\alpha - p_{k+1})$  одного знака. Поэтому

$$|q\alpha - p| = |(q_k u + q_{k+1} v)\alpha - (p_k u + p_{k+1} v)| = |u||q_k\alpha - p_k| + |v||q_{k+1}\alpha - p_{k+1}| \geq |q_k\alpha - p_k|,$$

что противоречит условию задачи. ■

При помощи предыдущей задачи можно показать, что подходящие дроби являются в определённом смысле «наилучшими» приближениями к  $\alpha$ .

**Задача 1.5.** Если  $a/b$  — рациональная дробь такая, что

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2},$$

то она является подходящей дробью к  $\alpha$ .

**Решение.** Достаточно доказать утверждение задачи только для взаимно простых  $a, b$ .

Возьмем такое целое  $k$ , что  $q_k \leq b < q_{k+1}$ . Так как  $b < q_{k+1}$ , то  $|q_k\alpha - p_k| \leq |b\alpha - a|$  по Задаче 1.4. Следовательно,

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{|b\alpha - a|}{q_k} < \frac{1}{2bq_k}.$$

Предположим,  $a/b \neq p_k/q_k$ . Тогда

$$\frac{1}{bq_k} \leq \left| \frac{a}{b} - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \left| \frac{a}{b} - \alpha \right| + \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2bq_k},$$

что противоречит неравенству  $q_k \leq b$ . Таким образом,  $a/b = p_k/q_k$ . ■

Далее везде считаем, что  $D$  — бесквадратное натуральное число.

**Задача 1.6.** Известно, что при некотором целом  $n$  таком, что  $|n| < \sqrt{D}$ , уравнение  $x^2 - Dy^2 = n$  имеет положительное решение  $(x_0, y_0)$  в целых числах. Докажите, что дробь  $x_0/y_0$  является подходящей к  $\sqrt{D}$ , если

- а)  $n$  положительное;
- б)  $n$  отрицательное.

**Решение.** а) Из равенства

$$(x_0 - y_0\sqrt{D})(x_0 + y_0\sqrt{D}) = n,$$

следует, что  $x_0 > y_0\sqrt{D}$ .

Значит,

$$0 < \frac{x_0}{y_0} - \sqrt{D} = \frac{n}{y_0(x_0 + y_0\sqrt{D})} < \frac{n}{y_0(y_0\sqrt{D} + y_0\sqrt{D})} < \frac{\sqrt{D}}{2y_0^2\sqrt{D}} = \frac{1}{2y_0^2},$$

и требуемое следует из результата Задачи 1.5.

б) Аналогично доказательству пункта а) мы получим, что  $y_0/x_0$  является подходящей дробью для  $1/\sqrt{D}$ , откуда легко следует, что дробь  $x_0/y_0$  является подходящей к  $\sqrt{D}$ . ■

**Определение.** Назовём иррациональное число, являющееся корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами, *квадратичной иррациональностью*.

Бесконечная цепная дробь называется *периодической*, если она представляется в виде  $[a_0; a_1, \dots, a_l, \overline{b_1, \dots, b_m}]$ . Если же она представляется в виде  $[\overline{b_1, \dots, b_m}]$ , назовём её *чисто периодической*. Наименьшее натуральное число  $m$ , удовлетворяющее этому соотношению, называется *периодом* разложения.

**Задача 1.7.** а) Пусть  $\alpha$  — квадратичная иррациональность, а числа  $a, b, c, d$  рациональны, причём  $c, d$  одновременно не равны нулю. Докажите, что число

$$\beta = \frac{a + b\alpha}{c + d\alpha}$$

либо рационально, либо является квадратичной иррациональностью.

б) Докажите, что если число представляется в виде бесконечной периодической цепной дроби, то оно является квадратичной иррациональностью.

**Решение.** а) Легко заметить, что

$$\alpha = \frac{a' + b'\beta}{c' + d'\beta}$$

для некоторых целых  $a', b', c', d'$ , причем  $c', d'$  одновременно не равны нулю. Пусть  $\alpha$  — корень квадратного уравнения  $kx^2 + lx + m = 0$  с целыми коэффициентами  $k, l, m$ . Тогда  $\beta$  — корень квадратного или линейного уравнения

$$k(a' + b'x)^2 + l(a' + b'x)(c' + d'x) + m(c' + d'x)^2 = 0$$

с целыми коэффициентами.

б) Пусть  $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_l, \overline{b_1, \dots, b_m}]$ . Тогда

$$\alpha_{l+1} = [\overline{b_1, \dots, b_m}] = [b_1, \dots, b_m, \alpha_{l+1}].$$

Обозначим  $k$ -ую подходящую дробь для числа  $\alpha_{l+1}$  через  $p'_k/q'_k$ . Тогда

$$\alpha_{l+1} = \frac{p'_m \alpha_{l+1} + p'_{m-1}}{q'_m \alpha_{l+1} + q'_{m-1}},$$

откуда  $\alpha_{l+1}$  — корень следующего квадратного уравнения с целыми коэффициентами:

$$q'_m x^2 + (q'_{m-1} - p'_m)x - p'_{m-1} = 0.$$

Таким образом, поскольку  $\alpha_{l+1}$  не рационально (его разложение в цепную дробь бесконечно),  $\alpha_{l+1}$  — квадратичная иррациональность.

Обозначим  $k$ -ую подходящую дробь для  $\alpha$  через  $p_k/q_k$ . Тогда

$$\alpha = \frac{\alpha_{l+1} p_l + p_{l-1}}{\alpha_{l+1} q_l + q_{l-1}}.$$

Из пункта а) следует, что  $\alpha$  либо рационально, либо квадратичная иррациональность. Поскольку разложение числа  $\alpha$  в цепную дробь бесконечно, то  $\alpha$  — квадратичная иррациональность. ■

Обратное утверждение также верно.

**Задача 1.8.** а) Пусть  $\alpha$  — действительный иррациональный корень уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

с целыми  $a, b, c$  и ненулевым  $a$ . Докажите, что  $\alpha_{k+1}$  является корнем уравнения

$$A_k x^2 + B_k x + C_k = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A_k &= ap_k^2 + bp_k q_k + cq_k^2, \\ B_k &= 2ap_k p_{k-1} + b(p_k q_{k-1} + p_{k-1} q_k) + 2cq_k q_{k-1}, \\ C_k &= ap_{k-1}^2 + bp_{k-1} q_{k-1} + cq_{k-1}^2 \end{aligned}$$

и

$$B_k^2 - 4A_k C_k = b^2 - 4ac.$$

б) Докажите, что числа  $|A_k|, |B_k|, |C_k|$  ограничены константой, не зависящей от  $k$ .

в) Докажите, что каждая квадратичная иррациональность имеет представление в виде бесконечной периодической цепной дроби.

**Решение.** а) Вспомним одно из свойств подходящих дробей:

$$\alpha = \frac{\alpha_{k+1} p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}}.$$

Подставим это значение вместо  $\alpha$  в равенство  $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ , перегруппируем коэффициенты и получим

$$A_k \alpha_{k+1}^2 + B_k \alpha_{k+1} + C_k = 0,$$

где  $A_k, B_k, C_k$  — выражение из условия задачи. Для доказательства второй части выполним прямую подстановку:

$$B_k^2 - 4A_k C_k = (b^2 - 4ac) (p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1})^2 = b^2 - 4ac.$$

б) По Задаче 1.1б

$$|\alpha q_k - p_k| < \frac{1}{q_k},$$

поэтому

$$p_k = \alpha q_k + \frac{\varepsilon}{q_k} \quad |\varepsilon| < 1,$$

(конечно,  $\varepsilon$  зависит от  $k$ ). Подставим это значение в  $A_k$ , получим

$$\begin{aligned} A_k &= a \left( \alpha q_k + \frac{\varepsilon}{q_k} \right)^2 + b \left( \alpha q_k + \frac{\varepsilon}{q_k} \right) q_k + cq_k^2 \\ &= (a\alpha^2 + b\alpha + c) q_k^2 + \left( 2a\alpha + b + \frac{a\varepsilon}{q_k^2} \right) \cdot \varepsilon \\ &= \left( 2a\alpha + b + \frac{a\varepsilon}{q_k^2} \right) \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|A_k| < |2a\alpha + b| + |a|,$$

откуда следует ограниченность  $|A_k|$ . Из равенства  $C_k = A_{k-1}$  следует ограниченность  $|C_k|$ . Так как

$$B_k^2 - 4A_k C_k = b^2 - 4ac,$$

то

$$B_k^2 = |4A_k C_k + b^2 - 4ac| < 4\{|2a\alpha + b| + |a|\}^2 + |b^2 - 4ac|,$$

поэтому  $B_k$  также ограничено по модулю.

в) Так как квадратное уравнение имеет не больше двух корней, то из пункта б) следует, что среди чисел  $\alpha_k$  найдутся два равных. Это означает, что разложение  $\alpha$  в цепную дробь периодически. ■

**Определение.** Пусть  $\alpha = a + b\sqrt{D}$ , где  $a, b$  рациональны, а  $\sqrt{D}$  иррационально. Число  $\alpha' = a - b\sqrt{D}$  назовём *сопряжённым* к  $\alpha$ .

**Задача 1.9.** Пусть  $\alpha$  — квадратичная иррациональность.

а) Докажите, что если  $\alpha$  представляется в виде чисто периодической цепной дроби, то  $\alpha > 1$  и  $-1 < \alpha' < 0$ .

б) Докажите, что если  $\alpha > 1$  и  $-1 < \alpha' < 0$ , то  $\alpha$  представляется в виде чисто периодической цепной дроби.

**Решение.** а) Пусть  $\alpha = [\overline{a_1, \dots, a_m}] = [a_1, \dots, a_m, \alpha]$ . Так как  $a_i \geq 1$  для любого натурального  $i$ , то  $\alpha > 1$ .

Если  $p_k/q_k$  —  $k$ -ая подходящая дробь к  $\alpha$ , то

$$\alpha = \frac{\alpha p_m + p_{m-1}}{\alpha q_m + q_{m-1}},$$

поэтому  $\alpha$  является корнем уравнения

$$f(x) = q_m x^2 + (q_{m-1} - p_m)x - p_{m-1} = 0.$$

Так как

$$f(-1) = (q_m - q_{m-1}) + (p_m - p_{m-1}) > 0$$

и

$$f(0) = -p_{m-1},$$

то число  $\alpha'$ , являющееся другим корнем уравнения  $f(x) = 0$ , лежит в интервале  $(-1, 0)$ .

б) Предположим, что  $\alpha$  — квадратичная иррациональность,  $\alpha > 1$  и  $-1 < \alpha' < 0$ . Пусть  $\alpha_1 = \alpha$ , определим остальные  $\alpha_k$  по индукции

$$\alpha_{k-1} = a_{k-1} + \frac{1}{\alpha_k}.$$

Пусть  $f_k(x) = p_k x^2 + q_k x + r_k = 0$  с некоторыми целыми  $p_k, q_k, r_k$  — квадратное уравнение, корнем которого является  $\alpha_k$ . Заметим, что число  $1/\alpha_k = \alpha_{k-1} - a_{k-1}$  является корнем уравнения

$$f_{k-1}(a_{k-1} + x) = p_{k-1} x^2 + (2p_{k-1} a_{k-1} + q_{k-1})x + f_{k-1}(a_{k-1}) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\alpha'_k} = \frac{1}{\alpha_k} + \left(\frac{1}{\alpha_k}\right)' = -\frac{2p_{k-1}a_{k-1} + q_{k-1}}{p_{k-1}} = -2a_{k-1} + \alpha_{k-1} + \alpha'_{k-1},$$

поэтому верно равенство

$$\alpha'_{k-1} = a_{k-1} + \frac{1}{\alpha'_k}.$$

По индукции несложно доказать, что

$$-1 < \alpha'_k < 0$$

для всех натуральных  $k$ , откуда следует, что

$$a_{k-1} = \left[-\frac{1}{\alpha'_k}\right].$$

По Задаче 1.8 существуют натуральные  $k$  и  $l$  такие, что  $\alpha_{k+1} = \alpha_{k+t+1}$ . Значит,

$$a_k = \left[-\frac{1}{\alpha'_{k+1}}\right] = \left[-\frac{1}{\alpha'_{k+t+1}}\right] = a_{k+t}$$

и поэтому

$$\alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}} = a_{k+t} + \frac{1}{\alpha_{k+t+1}} = \alpha_{k+t}.$$

Повторяя это рассуждение  $k$  раз, мы в конечном итоге получим, что

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_{t+1},$$

откуда следует, что

$$\alpha = [a_1, \dots, a_t, \alpha] = [\overline{a_1, \dots, a_t}].$$

■

**Задача 1.10.** Представим  $\sqrt{D}$  в виде цепной дроби  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \alpha_{k+1}]$ .

а) Докажите, что  $\alpha_k$  имеет чисто периодическое представление при всех натуральных  $k$ .

б) Докажите, что для любого  $k$  существуют натуральные  $b_k, c_k$  такие, что

$$\alpha_{k+1} = \frac{b_k + \sqrt{D}}{c_k},$$

причём

$$p_k^2 - Dq_k^2 = (-1)^{k+1}c_k.$$

**Решение.** а) Пусть  $[a_0; a_1, \dots]$  — цепная дробь числа  $\sqrt{D}$ . Рассмотрим квадратичную иррациональность  $\alpha = a_0 + \sqrt{D}$ . Поскольку  $a_0 = [\sqrt{D}]$ , то  $-1 < \alpha' < 0$ . Тогда по Задаче 1.9b цепная дробь числа  $\alpha$  чисто периодична. Тогда

$$\sqrt{D} = \alpha - a_0 = [2a_0, a_1, \dots, a_n] - a_0 = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_n, 2a_0}].$$

Утверждение задачи следует из этого напрямую.

б) Поскольку

$$\sqrt{D} = \frac{p_k \alpha_{k+1} + p_{k-1}}{q_k \alpha_{k+1} + q_{k-1}},$$

имеем

$$\alpha_{k+1} = \frac{q_{k-1} \sqrt{D} - p_{k-1}}{p_k - q_k \sqrt{D}}.$$

Теперь избавимся от иррациональности в знаменателе:

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \frac{q_{k-1} \sqrt{D} - p_{k-1}}{p_k - q_k \sqrt{D}} = \frac{(q_{k-1} \sqrt{D} - p_{k-1})(p_k + q_k \sqrt{D})}{p_k^2 - Dq_k^2} = \\ &= \frac{(Dq_k q_{k-1} - p_k p_{k-1}) + (p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k) \sqrt{D}}{p_k^2 - Dq_k^2} = \frac{(Dq_k q_{k-1} - p_k p_{k-1}) + (-1)^{k+1} \sqrt{D}}{p_k^2 - Dq_k^2}. \end{aligned}$$

Возьмем  $b_k = (-1)^{k+1}(Dq_k q_{k-1} - p_k p_{k-1})$ . Осталось проверить, что  $b_k$  и  $c_k$  положительны для любого  $k$ .

Во-первых,  $c_k$  положительно, поскольку  $\text{sign}(p_k^2 - Dq_k^2) = \text{sign}\left(\frac{p_k}{q_k} - \sqrt{D}\right) = (-1)^{k+1}$ .

Во-вторых,  $b_k$  положительно, поскольку  $c_k$  положительно и  $2\frac{b_k}{c_k} = \alpha_{k+1} + \alpha'_{k+1} > 0$ . Последнее — следствие пункта а) и Задачи 1.9.а. ■

Из предыдущей задачи следует, что последовательность  $p_k^2 - Dq_k^2$  периодична, причём её период равен или в два раза больше периода цепной дроби для  $\sqrt{D}$ . Этот факт вкупе с результатом Задачи 1.6 позволяет для каждого  $D$  полностью описать решения уравнения  $x^2 - Dy^2 = n$  в случае  $|n| < \sqrt{D}$ .

В дальнейшем мы будем рассматривать только те решения уравнения  $x^2 - Dy^2 = n$ , для которых  $x + y\sqrt{D} > 0$ . Очевидно, что мы ничего не упустим, так как если пара  $(x, y)$  является решением, то и пара  $(-x, -y)$  тоже.

Заметим, что если уравнение  $x^2 - Dy^2 = n$  имеет хотя бы одно решение  $(x_0, y_0)$ , то оно имеет бесконечное количество решений  $(x_k, y_k)$ , задаваемых следующим способом:

$$x_k + y_k \sqrt{D} = (x_0 + y_0 \sqrt{D})(s + t \sqrt{D})^k,$$

где  $(s, t)$  — минимальное решение соответствующего уравнения Пелля  $x^2 - Dy^2 = 1$ .

**Определение.** Скажем, что два решения  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  уравнения

$$x^2 - Dy^2 = n$$

принадлежат одному классу, если существует целое  $k$  такое, что

$$x_2 + y_2\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})(s + t\sqrt{D})^k,$$

где  $(s, t)$  — минимальное решение соответствующего уравнения Пелля  $x^2 - Dy^2 = 1$ .

В каждом классе существует решение  $(x, y)$  такое, что

$$1 < x + y\sqrt{D} \leq s + t\sqrt{D}.$$

Назовём это решение *минимальным* в этом классе.

**Задача 1.11.** Определите, сколько классов решений имеет уравнение

$$x^2 - (m^2 - 2)y^2 = 2$$

при каждом целом  $m > 1$ .

**Решение I.** Заметим, что  $(m^2 - 1, m)$  является минимальным решением соответствующего уравнения Пелля  $x^2 - (m^2 - 2)y^2 = 1$ . Рассмотрим некоторый класс решений уравнения  $x^2 - (m^2 - 2)y^2 = 2$  с минимальным решением  $(u, v)$ . По определению

$$1 < \alpha = u + v\sqrt{m^2 - 2} \leq \beta = m^2 - 1 + m\sqrt{m^2 - 2}.$$

Так как

$$\alpha^2/2 = u^2 - 1 + uv\sqrt{m^2 - 2},$$

то  $(u^2 - 1, uv)$  — некоторое решение уравнения Пелля  $x^2 - (m^2 - 2)y^2 = 1$ . Отсюда следует, что  $\alpha^2/2 = \beta^l$  для некоторого целого  $l$ . Из неравенств  $1 < \alpha^2/2 \leq \beta^2/2 < \beta^2$  следует, что  $l = 1$ . Значит,  $\alpha = \sqrt{2\beta} = m + \sqrt{m^2 - 2}$ , и уравнение  $x^2 - (m^2 - 2)y^2 = 2$  имеет ровно один класс решений с минимальным решением  $(m, 1)$ .

**Решение II (М. Далингер).** Пусть  $(x, y)$  — решение уравнения  $x^2 - (m^2 - 2)y^2 = 2$ . Заметим, что

$$x \equiv x^2 = 2 + (m^2 - 2)y^2 \equiv (my)^2 \equiv my \pmod{2}.$$

Следовательно, все решения этого уравнения цвета  $m$ . По Задаче 1.13 двух и более классов быть не может. Значит, решение  $(m, 1)$  порождает единственный класс решений этого уравнения. ■

**Определение.** Решение  $(x_0, y_0)$  уравнения  $x^2 - Dy^2 = n$  назовём *примитивным*, если  $x_0$  и  $y_0$  взаимно просты.

Очевидно, что достаточно исследовать только примитивные решения, потому что если  $\text{НОД}(x_0, y_0) = d > 1$ , то  $(x_0/d, y_0/d)$  — примитивное решение уравнения

$$x^2 - Dy^2 = \frac{n}{d^2}.$$

**Задача 1.12.** Если  $(x_0, y_0)$  – примитивное решение уравнения  $x^2 - Dy^2 = n$ , то существует целое  $k$  такое, что

$$x_0 \equiv ky_0 \pmod{n}$$

и

$$k^2 \equiv D \pmod{n}.$$

**Решение.** Поскольку  $x_0$  и  $y_0$  взаимно просты, то также взаимно просты и  $y_0$  и  $n$ . Тогда найдется такое целое  $k$ , что

$$x_0 \equiv ky_0 \pmod{n}.$$

Поэтому

$$x_0^2 - Dy_0^2 \equiv k^2y_0^2 - Dy_0^2 \equiv y_0^2(k^2 - D) \pmod{n},$$

из чего, учитывая  $\text{НОД}(y_0^2, n) = 1$ , получаем

$$k^2 \equiv D \pmod{n}.$$

■

Из предыдущей задачи следует, что если  $D$  – квадратичный невычет по модулю  $n$ , то уравнение  $x^2 - Dy^2 = n$  не имеет примитивных решений.

**Определение.** Будем считать, что примитивное решение  $(x_0, y_0)$  уравнения

$$x^2 - Dy^2 = n$$

покрашено в цвет  $k$ , если

$$x_0 \equiv ky_0 \pmod{n}$$

и

$$k^2 \equiv D \pmod{n}.$$

**Задача 1.13.** Докажите, что два примитивных решения уравнения  $x^2 - Dy^2 = n$  принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда они покрашены в один цвет по модулю  $n$ .

**Решение.** Пусть  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  – два примитивных решения уравнения  $x^2 - Dy^2 = n$  такие, что

$$x_2 + y_2\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})(s + t\sqrt{D})^k,$$

где  $(s, t)$  – минимальное положительное решение соответствующего уравнения Пелля. Ясно, что  $(s + t\sqrt{D})^k = u + v\sqrt{D}$ , где  $(u, v)$  – другое решение уравнения Пелля. Тогда

$$x_2 = x_1u + y_1vD, \quad y_2 = x_1v + y_1u.$$

Предположим, что  $(x_1, y_1)$  – решение цвета  $k$ . Тогда

$$y_2k = x_1vk + y_1uk \equiv y_1kvk + x_1u \equiv y_1vD + x_1u = x_2,$$

Таким образом,  $(x_2, y_2)$  тоже является решением цвета  $k$ .

Обратно, пусть решения  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  цвета  $k$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{x_2 + y_2\sqrt{D}}{x_1 + y_1\sqrt{D}} &= \frac{(x_2 + y_2\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D})}{(x_1 + y_1\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D})} = \\ &= \frac{x_1x_2 - y_1y_2D}{n} + \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{n}\sqrt{D}. \end{aligned}$$

Так как

$$x_1 \equiv y_1k, \quad x_2 \equiv y_2k, \quad k^2 \equiv D \pmod{n},$$

то

$$x_1x_2 \equiv y_1y_2k^2 \equiv y_1y_2D \pmod{n}$$

и

$$x_1y_2 \equiv y_1y_2k \equiv x_2y_1 \pmod{n}.$$

Таким образом,

$$\frac{x_1x_2 - y_1y_2D}{n} = u, \quad \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{n} = v$$

для некоторых целых  $u, v$ , и тогда

$$\frac{x_2 + y_2\sqrt{D}}{x_1 + y_1\sqrt{D}} = u + v\sqrt{D}.$$

Аналогично,

$$\frac{x_2 - y_2\sqrt{D}}{x_1 - y_1\sqrt{D}} = u - v\sqrt{D}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} u^2 - v^2D &= (u + v\sqrt{D})(u - v\sqrt{D}) = \\ &= \frac{x_2 + y_2\sqrt{D}}{x_1 + y_1\sqrt{D}} \cdot \frac{x_2 - y_2\sqrt{D}}{x_1 - y_1\sqrt{D}} = \frac{n}{n} = 1, \end{aligned}$$

откуда  $(u, v)$  является решением уравнения Пелля. Следовательно,  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  — два решения одного цвета. ■

Из результата предыдущей задачи следует, что существует конечное количество классов решений уравнения  $x^2 - Dy^2 = n$ .

Возьмём решение  $(x_0, y_0)$  цвета  $k$  уравнения  $x^2 - Dy^2 = n$ . Из определения следует, что существуют целые  $u_0, m$  такие, что

$$x_0 = y_0k - u_0n, \quad D = k^2 - mn.$$

**Задача 1.14.** Докажите, что существует целое  $t_0$  такое, что  $(t_0, u_0)$  является решением цвета  $\pm k$  уравнения  $t^2 - Du^2 = m$ . Выразите  $x_0, y_0$  через  $t_0, u_0$ .

**Решение.** Если мы подставим вышеприведенные выражения для  $x_0$  и  $D$  в  $x_0^2 - Dy_0^2 = n$  и упростим, то получим

$$y_0^2 m - 2y_0 k u_0 + (u_0^2 n - 1) = 0,$$

откуда решением квадратного уравнения следует

$$y_0 = \frac{ku_0 \pm \sqrt{k^2 u_0^2 - m u_0^2 n + m}}{m} = \frac{ku_0 \pm \sqrt{D u_0^2 + m}}{m}.$$

Так как  $y_0$  целое, то значение радикала  $t_0 = \sqrt{D u_0^2 + m}$  должно быть целым. Тогда  $(t_0, u_0)$  является решением диофантового уравнения

$$t^2 - u^2 D = m.$$

Также должно выполняться

$$k u_0 \pm t_0 \equiv 0 \pmod{m},$$

то есть  $(t_0, u_0)$  — решение цвета  $\pm k$ . Наконец, из

$$y_0 = \frac{k u_0 \pm t_0}{m}$$

следует, что

$$x_0 = y_0 k - u_0 n = \frac{D u_0 \pm t_0 k}{m}.$$

■

Число  $m$  из предыдущей задачи зависит от  $k$ . Заметим, что выбор числа  $k$  не фиксирован, фиксирован лишь его остаток по модулю  $n$ .

**Задача 1.15.** Докажите, что если  $|n| > \sqrt{D}$ , то число  $m$  может быть выбрано так, чтобы выполнялось неравенство

$$|m| \leq \max\{\sqrt{D}, |n|/4\}.$$

**Решение.** Выберем  $k$  такое, что  $|k| \leq n/2$ . Если  $k^2 < D$ , то

$$|m| \leq \frac{D}{|n|} < \sqrt{D}.$$

Если  $k^2 > D$ , то

$$|m| < \frac{k^2}{|n|} \leq |n|/4.$$

■

Последовательно применяя метод, описанный в двух предыдущих задачах, в какой-то момент мы сведём исходное уравнение  $x^2 - Dy^2 = n$  к конечному числу уравнений вида  $t^2 - Du^2 = m'$ , где  $|m'| < \sqrt{D}$ , которые, как уже известно, могут иметь только такие решения, которые получаются из числителей и знаменателей подходящих дробей для  $\sqrt{D}$ . Внимание: при применении метода на каждом шаге могут выбираться различные цвета  $k$ .

**Задача 1.16.** Найдите все классы решений следующих уравнений:

а)  $x^2 - 82y^2 = 23$ ;

б)  $x^2 - 23y^2 = 41$ .

**Решение.** а) Заметим, что  $k = \pm 6$  — единственные значения  $k$  на отрезке

$$0 \leq |k| \leq \frac{23}{2},$$

для которых  $k^2 \equiv 82 \pmod{23}$ . Тогда

$$m = \frac{k^2 - D}{n} = \frac{36 - 82}{23} = -2.$$

Так как  $\sqrt{82} = [9, \overline{18}]$ , то по Задаче 1.6 единственные уравнения вида

$$t^2 - 82u^2 = n \quad (0 < |n| < \sqrt{82}),$$

имеющие решения, — это

$$t^2 - 82u^2 = p_i^2 - 82q_i^2 = \pm 1.$$

Таким образом, уравнение  $t^2 - 82u^2 = m = -2$  не имеет целых решений, и по Задаче 1.14 уравнение  $x^2 - 82y^2 = 23$  тоже не имеет целых решений.

б) Единственные значения  $k$  на отрезке

$$0 \leq |k| \leq \frac{41}{2},$$

для которых  $k^2 \equiv 23 \pmod{41}$ , — это  $k = \pm 8$ . Тогда

$$m = \frac{k^2 - D}{n} = \frac{64 - 23}{41} = 1.$$

Уравнение  $t^2 - 23u^2 = m = 1$  имеет частное решение  $t_0 = 1, u_0 = 0$ . Следовательно,  $x_0 = \pm 8, y_0 = \pm 1$ , где  $x_0$  должно быть равно 8, чтобы удовлетворять условию  $x_0 + y_0\sqrt{23} > 0$ . Значит, уравнение  $x^2 - 23y^2 = 41$  имеет два класса решений с минимальными решениями  $(8, 1)$  и  $(8, -1)$  соответственно. ■

**Задача 1.17.** Докажите, что уравнение  $x^2 - 229y^2 = 3$

а) не имеет целых решений;

б) имеет решение по модулю каждого простого  $p$ .

**Решение.** а) Представление числа  $\sqrt{229}$  в виде цепной дроби — это  $[15; \overline{7, 1, 1, 7, 30}]$  с периодом длины 5. Вычислим первые 5 значений  $p_n^2 - 229q_n^2$ :

$$p_0^2 - 229q_0^2 = 15^2 - 229 \cdot 1^2 = -4,$$

$$p_1^2 - 229q_1^2 = 106^2 - 229 \cdot 7^2 = 15,$$

$$p_2^2 - 229q_2^2 = 121^2 - 229 \cdot 8^2 = -15,$$

$$p_3^2 - 229q_3^2 = 227^2 - 229 \cdot 15^2 = 4,$$

$$p_4^2 - 229q_4^2 = 1710^2 - 229 \cdot 113^2 = -1.$$

По Задаче 1.10 последовательность  $|p_n^2 - 229q_n^2|$  периодична с периодом длины 5. Следовательно, по Задаче 1.6 единственные уравнения вида

$$x^2 - 229y^2 = n \quad (0 < |n| < \sqrt{229}),$$

имеющие решения, — это

$$x^2 - 229y^2 = \pm 1, \pm 4, \pm 15,$$

а значит,  $x^2 - 229y^2 = 3$  не имеет целых решений.

б) Нетрудно заметить, что уравнение  $x^2 - 229y^2 = 3$  имеет решение по модулю 2. Так как 3 является квадратичным вычетом по модулю 229, это уравнение имеет решение по модулю 229. Рассмотрим простое нечётное  $p$ , отличное от 229. Каждая из функций  $x^2$  и  $3 + 229y^2$  имеет  $(p+1)/2$  значений по модулю  $p$ . Значит, по принципу Дирихле они равны по модулю  $p$  в какой-то точке и уравнение  $x^2 - 229y^2 = 3$  имеет решение по модулю  $p$ . ■

## 2 Об уравнениях вида $x^4 - Dy^2 = 1$ и $x^2 - Dy^4 = 1$

Для решения задач из этого параграфа полезно решить задачи из первого раздела, но не обязательно. Для понимания формулировок некоторых задач необходимо ознакомиться с определениями «класса решений» и «минимального решения в классе решений» уравнения  $x^2 - Dy^2 = n$  из первого раздела (перед задачей 1.11).

**Определение.** Предположим, что уравнение  $x^2 - Dy^2 = n$  имеет только один класс решений. Скажем, что число  $\alpha = u + v\sqrt{D} > 0$  задаёт фундаментальное решение уравнения  $x^2 - Dy^2 = n$ , если  $(u, v)$  — минимальное решение в этом классе.

**Задача 2.1.** Докажите, что если  $x^2 - Dy^2 = -1$  имеет решение, то оно имеет ровно один класс решений. Докажите, что если  $\alpha = u + v\sqrt{D}$  задаёт фундаментальное решение уравнения  $x^2 - Dy^2 = -1$ , то фундаментальное решение уравнения  $x^2 - Dy^2 = 1$  задаётся числом  $\beta = \alpha^2$ .

**Решение.** Рассмотрим произвольный класс решений уравнения  $x^2 - Dy^2 = -1$  с минимальным решением  $(u, v)$ . По определению

$$1 < \alpha = u + v\sqrt{D} \leq \beta.$$

Заметим, что  $\alpha^2 = (u + v\sqrt{D})^2 = u^2 + Dv^2 + 2uv\sqrt{D}$  порождает решение  $(u^2 + Dv^2, 2uv)$  уравнения Пелля  $x^2 - Dy^2 = 1$ , потому что

$$\begin{aligned} (u^2 + Dv^2)^2 - D(2uv)^2 &= (u^2 + Dv^2 + 2uv\sqrt{D})(u^2 + Dv^2 - 2uv\sqrt{D}) = \\ &= (u + v\sqrt{D})^2(u - v\sqrt{D})^2 = (u^2 - Dv^2)^2 = (-1)^2 = 1. \end{aligned}$$

Значит,  $\alpha^2 = \beta^l$  для некоторого целого  $l$ . Из неравенств  $1 < \alpha \leq \beta$  следует, что  $l = 1$  или  $l = 2$ . Если  $l = 2$ , то  $\alpha = \beta$ , что невозможно, так как  $\alpha$  и  $\beta$  порождают фундаментальные решения разных уравнений. Таким образом,  $l = 1$  и  $\alpha^2 = \beta$ . Это значит, что уравнение  $x^2 - Dy^2 = -1$  имеет единственный класс решений и  $\alpha$  порождает его фундаментальное решение. ■

**Задача 2.2.** Пусть  $(u, v)$  — минимальное решение уравнения Пелля  $x^2 - Dy^2 = 1$ . Докажите, что уравнение  $x^2 - Dy^2 = -1$  имеет решение тогда и только тогда, когда

$$u \equiv -1 \pmod{2D}.$$

**Решение.**

Пусть уравнение  $x^2 - Dy^2 = -1$  имеет решение, а число  $a + b\sqrt{D}$  задаёт его фундаментальное решение. По Задаче 2.1 имеем  $u + v\sqrt{D} = (a + b\sqrt{D})^2$ , поэтому

$$u = a^2 + Db^2 = 2Db^2 - 1 \equiv -1 \pmod{2D}.$$

Наоборот, пусть  $u = 2Dk - 1$ , тогда  $u^2 = 4D^2k^2 - 4Dk + 1 = Dv^2 + 1$  и, следовательно,  $4Dk^2 - 4k = v^2$ . Это означает, что  $v$  чётно, то есть  $v = 2z$  для некоторого целого  $z$ , и  $k(Dk - 1) = z^2$ . Так как числа  $k$  и  $Dk - 1$  взаимно просты, они оба являются точными квадратами. Пусть  $k = b^2$  и  $Dk - 1 = a^2$ , тогда  $a^2 - Db^2 = -1$ . ■

**Задача 2.3.** а) Пусть  $m, n > 1$  — натуральные числа такие, что  $mn$  не является точным квадратом, а уравнение  $mx^2 - ny^2 = 1$  имеет решение. Пусть  $(u, v)$  — минимальное положительное решение этого уравнения. Докажите, что фундаментальное решение уравнения  $x^2 - mny^2 = 1$  задаётся числом  $\gamma = \alpha^2$ , где  $\alpha = u\sqrt{m} + v\sqrt{n}$ .

б) Опишите все решения уравнения  $ax^2 - (a - 1)y^2 = 1$  для каждого целого  $a > 1$ .

**Решение.** а) Заметим, что  $\alpha^2 = (u\sqrt{m} + v\sqrt{n})^2 = u^2m + v^2n + 2uv\sqrt{mn}$  порождает решение  $(u^2m + v^2n, 2uv)$  уравнения Пелля  $x^2 - mny^2 = 1$ , потому что

$$\begin{aligned} (u^2m + v^2n)^2 - mn(2uv)^2 &= (u^2m + v^2n + 2uv\sqrt{mn})(u^2m + v^2n - 2uv\sqrt{mn}) = \\ &= (u\sqrt{m} + v\sqrt{n})^2(u\sqrt{m} - v\sqrt{n})^2 = (mu^2 - nv^2)^2 = 1. \end{aligned}$$

То есть  $\alpha^2 = \gamma^l$  для некоторого целого  $l$ .

Если  $l$  чётно, то  $\alpha = \gamma^{l/2} = p + q\sqrt{mn}$  для некоторых целых  $p, q$ , что невозможно, так как  $m, n > 1$ .

Если  $l$  нечётно и  $l > 1$ , то  $\beta = \alpha(\gamma^{(1-l)/2})$  тоже порождает решение  $mx^2 - ny^2 = 1$  и  $1 < \beta < \alpha$ , что противоречит минимальности решения  $(u, v)$ . Откуда  $l = 1$  и  $\gamma = \alpha^2$ .

б) Уравнение  $ax^2 - (a-1)y^2 = 1$  имеет минимальное решение  $(1, 1)$ , которое соответствует числу  $\alpha = \sqrt{a} + \sqrt{a-1}$ . По пункту а)  $\gamma = \alpha^2$  является фундаментальным решением уравнения Пелля  $x^2 - a(a-1)y^2 = 1$ . Пусть  $(u, v)$  — решение уравнения  $ax^2 - (a-1)y^2 = 1$  и  $\beta = u\sqrt{a} + v\sqrt{a-1}$ . Аналогично доказательству пункта а) получаем, что

$$\beta^2 = (u\sqrt{m} + v\sqrt{n})^2 = u^2m + v^2n + 2uv\sqrt{mn}$$

соответствует решению  $(u^2m + v^2n, 2uv)$  уравнения Пелля  $x^2 - a(a-1)y^2 = 1$ . Поэтому  $\beta^2 = \gamma^l$  для некоторого нечётного  $l$ . Следовательно,  $\beta = \alpha^l$  и

$$u\sqrt{a} + v\sqrt{a-1} = (\sqrt{a} + \sqrt{a-1})^l$$

для некоторого нечётного  $l$ . ■

**Задача 2.4.** Предположим, что фундаментальное решение уравнения  $x^2 - Dy^2 = -4$  задаётся числом  $2\alpha = a + b\sqrt{D}$ , где  $a$  и  $b$  нечётны. Определите, какие числа задают фундаментальные решения следующих уравнений:

$$x^2 - Dy^2 = 4, \quad x^2 - Dy^2 = -1, \quad x^2 - Dy^2 = 1.$$

**Решение (В. Патрушев).** Заметим, что  $a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{8}$  и

$$D \equiv b^2D \equiv a^2 + 4 \equiv 5 \pmod{8}.$$

Так как  $2\alpha = a + b\sqrt{D} > 1$ , то  $0 < b\sqrt{D} - a < 4$ , откуда  $a \geq -1$  и  $b \geq 1$ . Если  $a = -1$ , то  $b = 1$ ,  $D = 5$  и  $2\alpha = \sqrt{5} - 1$ . В этом случае несложно убедиться, что фундаментальные решения данных в условии уравнений порождаются числами

$$3 + \sqrt{5} = 2\alpha^{-2}, \quad 2 + \sqrt{5} = \alpha^{-3}, \quad 9 + 4\sqrt{5} = \alpha^{-6}.$$

В дальнейшем предполагаем, что  $D > 5$ , в таком случае  $a, b \geq 1$ , и, следовательно,  $\alpha > 1$ . Непосредственными вычислениями можно проверить, что числа  $2\alpha^2, \alpha^3, \alpha^6$  являются решениями уравнений

$$x^2 - Dy^2 = 4, \quad x^2 - Dy^2 = -1, \quad x^2 - Dy^2 = 1$$

соответственно. Пусть фундаментальное решение уравнения  $x^2 - Dy^2 = -1$  порождается числом  $\beta > 1$ . Тогда  $\alpha^3 = \beta^k$  для некоторого положительного нечётного  $k$ . Заметим, что так как  $\alpha \neq \beta$ , то  $k \neq 3$ . Предположим, что  $k \geq 5$ . Тогда существует нечётное число  $l$ , такое что  $k/3 < l < 2k/3$ . Откуда

$$\alpha = \beta^{k/3} < \beta^l < \alpha^2 = \beta^{2k/3}.$$

Заметим, что

$$1 < \gamma = \frac{2\alpha^2}{\beta^l} < 2\alpha$$

и  $\gamma$  порождает решение уравнения  $x^2 - Dy^2 = -4$ , что невозможно, так как  $2\alpha$  порождает фундаментальное решение этого уравнения.

Следовательно,  $k = 1$  и число  $\alpha^3$  порождает фундаментальное решение уравнения  $x^2 - Dy^2 = -1$ . Также по Задаче 2.1 число  $\alpha^6$  порождает фундаментальное решение уравнения Пелля  $x^2 - Dy^2 = 1$ .

Теперь предположим, что  $2\delta = p + q\sqrt{D}$  порождает фундаментальное решение  $x^2 - Dy^2 = 4$ . Докажем, что  $\delta = \alpha^2$  методом от противного: пусть  $2\alpha^2$  не порождает фундаментальное решение, тогда  $\delta < \alpha^2$ .

Если  $p$  чётное, то  $D$  не делится ни на один квадрат натурального числа, большего 1, следовательно,  $q$  тоже чётное. Это значит, что  $\delta$  порождает решение уравнения Пелля  $x^2 - Dy^2 = 1$ , что невозможно, так как  $\delta < \alpha^6$ .

Если  $p$  нечётное, то  $q$  тоже нечётное. Тогда  $p^2 \equiv q^2 \equiv 1 \pmod{8}$ . Заметим, что число

$$\delta^3 = \frac{(p + q\sqrt{D})^3}{8} = \frac{p(p^2 + 3q^2D)}{8} + \frac{q(3p^2 + q^2D)}{8}$$

порождает решение уравнения Пелля  $x^2 - Dy^2 = 1$ , поскольку  $p^2 + 3q^2D$  и  $3p^2 + q^2D$  делятся на 8. Следовательно,  $\delta^3 \geq \alpha^6$ , что противоречит неравенству  $\delta < \alpha^2$ . А, значит,  $\delta = \alpha^2$ , и число  $2\alpha^2$  порождает фундаментальное решение  $x^2 - Dy^2 = 4$ . ■

**Задача 2.5.** Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в натуральных числах: а)  $x^4 - 8z^4 = 1$ ; б)  $x^2 - 2y^4 = 1$ .

**Решение.** а) Перепишем уравнение в виде  $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 8z^4$ . Очевидно, что  $x > 1$  и  $x$  нечётно, поэтому  $x = 2y + 1$  при некотором натуральном  $y$ . Значит,  $8y(y + 1)(2y^2 + 2y + 1) = 8z^4$  или  $y(y + 1)(2y^2 + 2y + 1) = z^4$ . Так как числа  $y, y + 1, 2y^2 + 2y + 1$  попарно взаимно просты, это означает, что  $y$  и  $y + 1$  должны быть точными 4-ми степенями, что невозможно в случае натурального  $y$ .

б) Так как  $x^2 = 2y^4 + 1$ , то  $x > 1$  и  $x$  нечётно, поэтому  $x = 2z + 1$  при некотором натуральном  $z$ . Значит,  $2z(z + 1) = y^4$ , то есть  $y = 2t$  при некотором натуральном  $t$ , откуда следует, что  $z(z + 1) = 8t^4$ . Числа  $z$  и  $z + 1$  разной чётности и взаимно просты. Если  $z$  нечётно, то  $z = b^4, z + 1 = 8c^4$  и, следовательно,  $8c^4 = c^4 + 1$ , что невозможно по модулю 4. Если  $z$  чётно, то  $z = 8b^4, z + 1 = c^4$  и, следовательно,  $c^4 - 8b^4 = 1$ . Это, в свою очередь, невозможно по пункту а). ■

Отсутствие целых решений у некоторых уравнений, предложенных дальше, можно доказывать при помощи метода *бесконечного спуска*. Он заключается в следующем: пусть  $P$  — некоторое свойство, которым все натуральные числа могут либо обладать, либо нет. Предположим, что мы умеем доказывать, что если натуральное  $n_0$  обладает свойством  $P$ , то существует меньшее натуральное  $n_1$ , также этим свойством обладающее. Если мы применим подобный аргумент к числу  $n_1$ , то найдём число  $n_2 < n_1$ , обладающее свойством  $P$ . Если существует хоть одно натуральное число, обладающее свойством  $P$ , то процесс может быть повторён бесконечное количество раз. Это противоречит тому, что не существует бесконечно убывающей последовательности из натуральных чисел; следовательно, не существует ни одного натурального числа, удовлетворяющего свойству  $P$ .

**Задача 2.6.** Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в натуральных числах: а)  $x^4 + y^4 = z^2$ ; б)  $x^4 - 2y^2 = 1$ ; в)  $x^4 + y^2 = z^4$ ; г)  $x^4 - 2y^2 = -1$  за исключением  $(x, y) = (1, 1)$ .

**Решение.** а) Если простое число  $p$  делит  $x$  и  $y$ , то  $p^4$  делит  $z^2$ , а значит,  $p^2$  делит  $z$ . Но тогда  $(x', y', z') = (x/p, y/p, z/p^2)$  — положительное решение с  $z' < z$ , то есть мы можем совершить шаг спуска.

Пусть теперь  $x, y$  взаимно просты. Тогда  $(x^2, y^2, z)$  — примитивная пифагорова тройка, и существуют взаимно простые целые положительные  $m, n$  разной чётности, для которых  $\{x^2, y^2\} = \{m^2 - n^2, 2mn\}$  и  $z = m^2 + n^2$ . Без ограничения общности,  $x^2 = m^2 - n^2$  и  $y^2 = 2mn$ . Заметим, что  $x$  нечётное, а  $y$  чётное.

Далее  $x^2 + n^2 = m^2$ . Общий простой делитель  $x$  и  $n$  должен делить  $m$ , но  $m$  и  $n$  взаимно просты. Значит,  $x, n$  тоже взаимно просты, и  $(x, n, m)$  — примитивная пифагорова тройка. Это значит, что существуют взаимно простые положительные целые  $a, b$ , для которых  $\{a^2 - b^2, 2ab\} = \{x, n\}$  и  $a^2 + b^2 = m$ . Так как  $x$  нечётное, имеем  $x = a^2 - b^2$  и  $n = 2ab$ .

Далее  $y^2 = 2mn = 2(a^2 + b^2)(2ab) = 4(a^2 + b^2)ab$ . Но  $\text{НОД}(a, b) = 1$ , то есть элементы множества  $\{a, b, a^2 + b^2\}$  попарно взаимно просты и их произведение  $(y/2)^2$  — точный квадрат. Значит, каждое из чисел  $a, b, a^2 + b^2$  является точным квадратом и существуют положительные целые  $d, e, f$ , для которых  $a = d^2$ ,  $b = e^2$ ,  $a^2 + b^2 = f^2$ . Отсюда

$$f^2 = a^2 + b^2 = d^4 + e^4.$$

Но

$$f^2 = a^2 + b^2 = m < m^2 + n^2 = z,$$

то есть  $f \leq f^2 < z$ . Снова мы можем сделать шаг спуска. Отсюда следует, что уравнение  $x^4 + y^4 = z^2$  не имеет решений в целых положительных.

б) Это уравнение можно переписать как  $x^4 + y^4 = (y^2 + 1)^2$ , то есть оно не имеет целых положительных решений по пункту а).

в) Пусть  $(x_0, y_0, z_0)$  — наименьшее нетривиальное решение с минимальным  $z_0 > 1$ . Если  $\text{НОД}(x_0, y_0, z_0) = d > 1$ , то  $(\frac{x_0}{d}, \frac{y_0}{d^2}, \frac{z_0}{d})$  тоже является решением, что приводит к

противоречию с минимальностью. Значит, аналогично существуют взаимно простые целые положительные  $a, b$  с разной чётностью, для которых

$$\left\{ \begin{array}{l} z^2 = a^2 + b^2 \\ x^2 = a^2 - b^2 \\ y = 2ab \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} z^2 = a^2 + b^2 \\ x^2 = 2ab \\ y = a^2 - b^2 \end{array} \right. .$$

Первый случай влечёт  $(xz)^2 = a^4 - b^4$ , что невозможно, так как  $a = \sqrt{z^2 - b^2} < z$ . Второй случай:  $a, b$  взаимно просты. Их удвоенное произведение является точным квадратом, то есть они разной чётности. Пусть  $a$  чётное. Тогда существует пара положительных целых  $\alpha, \beta$ , таких что  $a = 2\alpha^2, b = \beta^2$ . Отсюда  $z^2 = 4\alpha^4 + \beta^4$ . Очевидно, что  $z$  нечётное и существует пара положительных целых  $m, n$ , для которых

$$\left\{ \begin{array}{l} z = m^2 + n^2 \\ \beta^2 = m^2 - n^2 \\ 2\alpha^2 = 2mn \end{array} \right. .$$

Снова существуют  $\gamma, \delta \in \mathbb{N}$ , для которых  $m = \gamma^2, n = \delta^2$ , что приводит к противоречию, так как

$$\beta^2 = m^2 - n^2 = \gamma^4 - \delta^4, \gamma < \alpha < 2\alpha^2 = a < z.$$

Случай чётного  $b$  симметричен.

г) Прибавим к обеим сторонам равенства выражение  $y^4 + 1$ . Получим

$$x^4 + (y^2 - 1)^2 = y^4.$$

Тривиальному решению  $(1, 0, 1)$  уравнения пункта в) соответствует единственное решение  $(1, 1)$  в натуральных числах полученного выше уравнения. ■

**Задача 2.7.** Найдите все решения следующих уравнений в натуральных числах:

а)  $x^2 = 8t^4 - 8t^2 + 1$ ;   б)  $x^2 = 2t^4 + 4t^2 + 1$ .

**Решение.** а) Перепишем уравнение как  $8t^4 = (4t^2 - 1)^2 - x^2 = (4t^2 - 1 - x)(4t^2 - 1 + x)$ . Так как  $8t^4, 4t^2 - 1$  взаимно простые, то наибольший общий делитель  $4t^2 - 1 - x$  и  $4t^2 - 1 + x$  равен 2. Действительно,  $4t^2 - 1$  и  $x$  взаимно просты (так как иначе был бы общий делитель с  $8t^2$ ), причём они оба нечётны, откуда и следует требуемое. Тогда существуют взаимно простые положительные  $a, b$ , для которых  $t = ab$  и

$$\{4t^2 - 1 - x, 4t^2 - 1 + x\} = \{4a^4, 2b^4\}.$$

То есть

$$4(ab)^2 - 1 = 4t^2 - 1 = 2a^4 + b^4 \implies b^4 - 2(a^2 - b^2)^2 = 1.$$

По Задаче 2.6б это возможно только при  $a = b = 1$ , то есть  $(x, t) = (1, 1)$  — единственное положительное решение данного уравнения.

б) Аналогично,

$$2t^4 = (2t^2 + 1)^2 - x^2 = (2t^2 + 1 - x)(2t^2 + 1 + x)$$

и  $\text{НОД}(2t^2 + 1 - x, 2t^2 + 1 + x) = 2$ . Тогда существуют целые положительные  $a, b$ , для которых  $t = 2ab$  и

$$\{2t^2 + 1 - x, 2t^2 + 1 + x\} = \{16a^4, 2b^4\}.$$

То есть

$$2(2ab)^2 + 1 = 2t^2 + 1 = 8a^4 + b^4 \implies b^4 - 2(2a^2 - b^2)^2 = -1.$$

По Задаче 2.6г имеем  $a = b = 1$ . Значит,  $(x, t) = (7, 2)$  — единственное положительное решение данного уравнения. ■

Рассмотрим уравнение  $x^4 - 6y^2 = 1$ . Минимальным решением уравнения Пелля  $x^2 - 6y^2 = 1$  является пара  $(5, 2)$ , поэтому все решения  $(u_k, v_k)$  этого уравнения описываются следующей формулой:

$$u_k + v_k\sqrt{6} = (5 + 2\sqrt{6})^k.$$

В частности,

$$u_k = \frac{1}{2} \left( (5 + 2\sqrt{6})^k + (5 - 2\sqrt{6})^k \right).$$

Таким образом, если уравнение  $x^4 - 6y^2 = 1$  имеет решение в натуральных числах, то  $x^2 = u_k$  для некоторого натурального  $k$ .

### Задача 2.8.

- а) Докажите, что  $k$  чётно.
- б) Выразите  $u_{2l}$  как многочлен от  $u_l$ .
- в) Докажите, что  $k$  не делится на 4.
- г) Докажите, что число  $u_{2l+1} - 1$  является точным квадратом.
- д) Найдите все решения уравнения  $x^4 - 6y^2 = 1$  в натуральных числах.

### Решение.

- а)  $u_k \equiv -1 \pmod{3}$  при нечётных  $k$ .
- б)  $u_{2l} = 2u_l^2 - 1$ .
- в) Если  $k = 4l$  для некоторого натурального  $l$ , то по пункту б)

$$u_{4l} = 2u_{2l}^2 - 1 = 2(2u_l^2 - 1)^2 - 1 = 8u_l^4 - 8u_l^2 + 1.$$

По Задаче 2.7а это возможно лишь в случае  $u_l = 1$ , что противоречит натуральности  $l$ .

- г) Заметим, что  $5 + 2\sqrt{6} = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{6})^2$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} u_{2l+1} &= \frac{1}{2} \left( (5 + 2\sqrt{6})^{2l+1} + (5 - 2\sqrt{6})^{2l+1} \right) = \frac{1}{2^{2l+2}} \left( (2 + \sqrt{6})^{2l+1} + (2 - \sqrt{6})^{2l+1} \right)^2 + 1 = \\ &= \left( \frac{(2 + \sqrt{6})^{2l+1} + (2 - \sqrt{6})^{2l+1}}{2^{l+1}} \right)^2 + 1. \end{aligned}$$

д) Осталось рассмотреть случай  $k = 4l + 2$ . Из пункта г) мы знаем, что  $u_{2l+1} = c^2 + 1$  для некоторого натурального  $c$ . В таком случае:

$$x^2 = u_{4l+2} = 2(c^2 + 1)^2 - 1 = 2c^4 + 4c^2 + 1.$$

По Задаче 2.7б такое возможно лишь при  $x = 7$ . Следовательно,  $(x, y) = (7, 20)$  — единственное решение уравнения  $x^4 - 6y^2 = 1$  в натуральных числах. ■

**Задача 2.9.** а) Докажите, что если уравнение  $x^2 - Dy^2 = 2$  имеет решение, то оно имеет ровно один класс решений. Докажите, что если число  $\alpha = u + v\sqrt{D}$  задаёт фундаментальное решение уравнения  $x^2 - Dy^2 = 2$ , то фундаментальное решение уравнения  $x^2 - Dy^2 = 1$  задаётся числом  $\beta = \alpha^2/2$ .

б) Докажите, что уравнение  $x^2 + 1 = 2(t^2 - 1)^2$  не имеет решений в целых числах.

в) Докажите, что если уравнение  $x^2 - Dy^2 = 2$  имеет решение, то уравнение  $x^4 - Dy^2 = 1$  не имеет решений в натуральных числах.

**Решение.** а) Рассмотрим некоторый класс решений уравнения  $x^2 - Dy^2 = 2$  с минимальным решением  $(u, v)$ . По определению,

$$1 < \alpha = u + v\sqrt{D} \leq \beta,$$

где через  $\beta$  обозначено фундаментальное решение уравнения  $x^2 - Dy^2 = 1$ . Поскольку

$$\alpha^2/2 = u^2 - 1 + uv\sqrt{D},$$

то  $(u^2 - 1, uv)$  является решением уравнения Пелля  $x^2 - Dy^2 = 1$ . Значит,  $\alpha^2/2 = \beta^l$  для некоторого целого  $l$ . Из неравенств  $1 < \alpha^2/2 \leq \beta^2/2 < \beta^2$  следует, что  $l = 1$ .

б) Поскольку левая часть равенства не делится на 4, то  $t$  чётно. Но тогда

$$t^2 - 1 \equiv 3 \pmod{4}$$

и  $x^2 + 1$  имеет делитель  $p$  вида  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , что невозможно.

в) Уравнение  $x^4 - 2y^2 = 1$  не имеет целых решений по Задаче 2.6б, поэтому предположим, что  $D > 2$ .

Обозначим через  $\alpha$  фундаментальное решение уравнения  $x^2 - Dy^2 = 2$ . Тогда по пункту а) фундаментальным решением соответствующего уравнения Пелля является  $\beta = \alpha^2/2$ . Поэтому, если  $(x, y)$  — решение уравнения  $x^4 - Dy^2 = 1$ , то

$$x^2 = \frac{\beta^n + \beta'^n}{2} = \frac{\alpha^{2n} + \alpha'^{2n}}{2^{n+1}}.$$

Откуда

$$x^2 + 1 = \frac{\alpha^{2n} + \alpha'^{2n} + 2(\alpha\alpha')^n}{2^{n+1}} = \frac{(\alpha^n + \alpha'^n)^2}{2^{n+1}}.$$

Число  $\alpha^n + \alpha'^n$  целое, а потому либо при нечётном  $n$  получаем решение уравнения  $x^2 + 1 = s^2$ , откуда  $x = 0$ , что невозможно; либо  $n = 2m$  чётно, откуда получаем решение уравнения

$$x^2 + 1 = 2s^2,$$

где

$$s = \frac{\alpha^{2m} + \alpha'^{2m}}{2^{m+1}}.$$

Тогда

$$s + 1 = \frac{(\alpha^m + \alpha'^m)^2}{2^{m+1}} = t^2 \quad \text{или} \quad 2t^2.$$

Если  $s = t^2 - 1$ , то

$$x^2 + 1 = 2(t^2 - 1)^2,$$

что невозможно по пункту b).

Наконец, если  $s = 2t^2 - 1$ , то

$$x^2 = 8t^4 - 8t^2 + 1,$$

откуда по Задаче 2.7а имеем  $x = 1$ , но в таком случае  $y = 0$  и не является натуральным.

■

**Задача 2.10.** Докажите, что если уравнение  $x^2 - Dy^2 = -2$  имеет решение, то уравнение  $x^4 - Dy^2 = 1$  не имеет решений в натуральных числах за исключением случая  $D = 6$ .

**Решение.** Как и в предыдущей задаче, будем считать, что  $D > 2$ . Аналогично решению пункта а) Задачи 2.9 можно показать, что уравнение  $x^2 - Dy^2 = -2$  ровно один класс решений и если число  $\alpha = u + v\sqrt{D}$  задаёт фундаментальное решение уравнения  $x^2 - Dy^2 = 2$ , то фундаментальное решение уравнения  $x^2 - Dy^2 = 1$  задаётся числом  $\beta = \alpha^2/2$ .

В этом случае  $\alpha\alpha' = -2$ . Значит, если  $x^4 - Dy^2 = 1$ , то

$$x^2 = \frac{\beta^n + \beta'^n}{2} = \frac{\alpha^{2n} + \alpha'^{2n}}{2^{n+1}},$$

то есть

$$x^2 + (-1)^n = \frac{(\alpha^n + \alpha'^n)^2}{2^{n+1}}.$$

Если  $n$  нечётно, получим, что  $x^2 - 1 = s^2$ , откуда  $x = 1$  и  $y$  равно 0 и не является натуральным. Если же  $n$  чётное и имеет вид  $n = 2m$ , то

$$x^2 + 1 = 2s^2,$$

где

$$s = \frac{\alpha^{2m} + \alpha'^{2m}}{2^{m+1}}.$$

Таким образом,

$$s + (-1)^m = \frac{(\alpha^m + \alpha'^m)^2}{2^{m+1}}.$$

Если  $m$  чётно, то  $s + 1 = 2t^2$  и

$$x^2 = 8t^4 - 8t^2 + 1,$$

что невозможно по Задаче 2.7а.

Если  $m$  нечётно, то  $s - 1 = t^2$  и поэтому

$$x^2 = 2(t^2 + 1)^2 - 1 = 2t^4 + 4t^2 + 1.$$

По Задаче 2.7б это возможно только если  $(x, t) = (7, 2)$ . Следовательно,

$$Dy^2 = x^4 - 1 = 2400 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

Так как уравнение  $x^2 - Dy^2 = -2$  имеет решение, то  $D$  не делится на 4 и на 5. Значит,  $D = 6$ , и  $(x, y) = (7, 20)$  — единственное решение по Задаче 2.8. ■

**Примечание:** Из решений Задач 2.9 и 2.10 следует, что уравнения  $x^2 - Dy^2 = -2$  и  $a^2 - Db^2 = 2$  не могут одновременно иметь целочисленные решения, кроме случая  $D = 2$ . Докажем это рассуждением от противного. Пусть некоторые решения существуют. Возьмем фундаментальные решения  $\alpha$  и  $\beta$  этих уравнений соответственно. Тогда  $\alpha^2/2$  и  $\beta^2/2$  равны как фундаментальные решения уравнения Пелля. Отсюда следует, что  $\alpha = \beta$ , что неверно.

### 3 О диофантовых множествах и уравнениях вида $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$

**Определение.** Рассмотрим целое число  $n$ . Множество из  $m$  различных натуральных чисел называется *диофантовым  $m$ -множеством со свойством  $D(n)$*  или, проще говоря,  $D(n)$  -  $m$ -множеством, если произведение любых двух элементов множества, увеличенное на  $n$ , является точным квадратом.

В задачах ниже будут часто рассматриваться множества с определённым количеством элементов, поэтому для простоты, например,  $D(n)$  - 3-множества мы будем называть  $D(n)$ -тройками,  $D(n)$  - 4-множества —  $D(n)$ -четвёрками и т.д.

**Задача 3.1.** Докажите, что не существует  $D(n)$ -четвёрок ни при каком  $n \equiv 2 \pmod{4}$ .

**Решение.** Предположим, что множество  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  является  $D(n)$ -четвёркой с  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Тогда

$$x_i x_j + n \equiv 0 \text{ или } 1 \pmod{4},$$

то есть

$$x_i x_j \equiv 2 \text{ или } 3 \pmod{4}.$$

Следовательно, не более одного  $x_i$  может быть чётным; не нарушая общности, пусть  $x_1, x_2$  и  $x_3$  нечётны. Из этого следует, что

$$x_i x_j \equiv 3 \pmod{4} \quad \text{для } 1 \leq i \neq j \leq 3.$$

Следовательно,  $x_1, x_2, x_3$  имеют различные нечётные остатки по модулю 4, что невозможно. ■

В случае  $n = 1$  проблема существования диофантовых  $m$ -множеств впервые была затронута Диофантом; он нашёл множество  $\{\frac{1}{16}, \frac{33}{16}, \frac{17}{4}, \frac{105}{16}\}$  с подобным свойством, состоящее, правда, из рациональных чисел. Первая  $D(1)$ -четвёрка, а именно множество  $\{1, 3, 8, 120\}$ , было найдено Ферма. Считается, что не существует  $D(1)$ -пятёрок, но пока никто это утверждение доказать не смог. Недавно Дуелла доказал, что не существует  $D(1)$ -шестёрок и существует лишь конечное количество  $D(1)$ -пятёрок.

**Задача 3.2.** Докажите, что любую  $D(1)$ -двойку можно расширить до  $D(1)$ -тройки.

**Решение.** Любая  $D(1)$ -двойка  $\{a, b\}$  может быть расширена числом

$$c = a + b + 2\sqrt{ab + 1}$$

до  $D(1)$ -тройки. ■

**Задача 3.3.** Покажем, что любую  $D(1)$ -тройку  $\{a, b, c\}$  можно расширить:

а) Докажите, что квадратное уравнение

$$t^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2(ta + tb + tc + ab + bc + ca) - 4abct - 4 = 0$$

относительно  $t$  имеет по крайней мере одно натуральное решение  $t_0$ .

б) Докажите, что множество  $\{a, b, c, t_0\}$  является  $D(1)$ -четвёркой.

**Решение.** а) Прямой подстановкой можно проверить, что

$$t_0 = a + b + c + 2abc + 2\sqrt{(ab + 1)(bc + 1)(ca + 1)}$$

является целым положительным решением заданного уравнения.

б) Надо проверить, что числа  $at_0 + 1, bt_0 + 1, ct_0 + 1$  являются точными квадратами. Это вытекает из следующих тождеств:

$$(a + b - c - t_0)^2 = 4(ab + 1)(ct_0 + 1),$$

$$(c + a - b - t_0)^2 = 4(ca + 1)(bt_0 + 1),$$

$$(b + c - a - t_0)^2 = 4(bc + 1)(at_0 + 1).$$
■

В 1969 году Бэйкер и Дэвенпорт доказали, что  $D(1)$ -четвёрку Ферма  $\{1, 3, 8, 120\}$  нельзя расширить до  $D(1)$ -пятёрки.

По определению, для  $D(1)$ -тройки  $\{a, b, c\}$  существуют натуральные  $u, v, w$  такие, что

$$ab + 1 = w^2, \quad bc + 1 = u^2, \quad ca + 1 = v^2.$$

Так как

$$bv^2 - au^2 = b(ac + 1) - a(bc + 1) = b - a,$$

то уравнение  $bx^2 - ay^2 = b - a$  имеет натуральное решение  $(v, u)$ . Заметим также, что  $(w, 1)$  является решением уравнения Пелля  $x^2 - aby^2 = 1$ . Пусть  $\alpha = v\sqrt{b} + u\sqrt{a}$  и  $\beta = w + \sqrt{ab}$ .

**Задача 3.4.** а) Докажите, что для любого целого  $l$  число  $\alpha\beta^l$  имеет вид

$$v_l\sqrt{b} + u_l\sqrt{a},$$

где  $(v_l, u_l)$  — целое решение уравнения  $bx^2 - ay^2 = b - a$ .

б) Докажите, что если  $c \geq |b - a|$ , то  $u_{-1}, v_{-1} > 0$ .

в) Докажите, что существует неотрицательное целое  $c'$  такое, что

$$bc' + 1 = u_{-1}^2, \quad ac' + 1 = v_{-1}^2.$$

г) Докажите, что любую  $D(1)$ -двойку  $\{a_1, a_2\}$  можно единственным образом расширить до  $D(1)$ -тройки  $\{a_1, a_2, a_3\}$  с условием

$$\max\{a_1, a_2\} < a_3 < 4a_1a_2.$$

**Решение.** а) Прямым вычислением можно получить, что  $\alpha\beta^l$  имеет вид  $v_l\sqrt{b} + u_l\sqrt{a}$  с целыми  $u_l, v_l$ . Откуда следует, что

$$(v_l\sqrt{b} - u_l\sqrt{a})(w - \sqrt{ab}) = v_l\sqrt{b} - u_l\sqrt{a}.$$

Перемножая оба тождества, получим

$$bv_l^2 - au_l^2 = (bv^2 - au^2)(w^2 - ab)^l = b - a.$$

б) Заметим, что

$$v_{-1} = vw - au, \quad u_{-1} = uw - bv,$$

а этого достаточно для доказательства следующих неравенств:

$$vw > au, \quad uw > bv.$$

Возводя в квадрат первое, получим

$$(ac + 1)(ac + 1) > a^2(bc + 1),$$

или

$$a^2bc + ac + ab + 1 > a^2bc + a^2,$$

что верно при  $c + b \geq a$ . Аналогично, второе верно при  $c + a \geq b$ .

в) Число

$$c' = 2abc + a + b + c - 2wuv$$

удовлетворяет вышеприведенным условиям. Также

$$c' \geq \frac{u_{-1}^2 - 1}{b} \geq 0.$$

г) Пусть  $a = \min\{a_1, a_2\}$ ,  $b = \max\{a_1, a_2\}$ ,  $c = a_3$ , тогда  $a < b < c$ . Из пункта б) можно заметить, что  $u_{-1}$  и  $v_{-1}$  — положительные и

$$v = wv_{-1} + au_{-1}, \quad u = wu_{-1} + bv_{-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} ac + 1 &= v^2 = (wv_{-1} + au_{-1})^2 = \\ &= (ab + 1)(ac' + 1) + a^2(bc' + 1) + 2awv_{-1}u_{-1} = \\ &= ((ab + 1)a + a^2b)c' + a^2 + ab + 1 + 2wav_{-1}u_{-1}. \end{aligned}$$

Вычитая 1 и деля на  $a$ , получаем

$$c = (2ab + 1)c' + a + b + 2wv_{-1}u_{-1}.$$

Если  $c' = 0$ , то  $v_{-1} = u_{-1} = 1$  и  $b < c = a + b + 2w < 4ab$ . Если  $c' \geq 1$ , то

$$c > 2ab + 1 + a + b + 2\sqrt{ab}\sqrt{ac'}\sqrt{bc'} > 4ab.$$

■

**Задача 3.5.** а) Докажите, что существует бесконечно много арифметических прогрессий длины 3, которые являются  $D(1)$ -тройками.

б) Докажите, что не существует  $D(1)$ -четвёрок, которые образуют арифметическую прогрессию длины 4.

**Решение.** а) Пусть  $(l, k)$  — решение уравнения Пелля  $x^2 - 3y^2 = 1$ , и пусть

$$a = 2k - l, b = 2k, c = 2k + l$$

(можно проверить, что  $a, b, c > 0$ ). Тогда

$$ab + 1 = 4k^2 - 2kl + 1 = k^2 + l^2 - 1 - 2kl + 1 = (k - l)^2,$$

$$bc + 1 = 4k^2 + 2kl + 1 = k^2 + l^2 - 1 + 2kl + 1 = (k + l)^2,$$

$$ca + 1 = 4k^2 - l^2 + 1 = k^2.$$

Следовательно, множество  $\{a, b, c\}$  удовлетворяет условиям задачи.

б) Пусть  $\{a, b, c, d\}$  — искомая  $D(1)$ -четвёрка с  $a < b < c < d$ .

**Способ I:** по Задаче 3.3г это возможно только при  $d > 4ab$ . Но

$$d = a + 3(b - a) < 3b < 4ab,$$

что приводит к противоречию.

**Способ II (М. Демидкин, Г. Костицын):** Числа  $(db + 1)(dc + 1)$  и  $d^2(bc + 1)$  являются полными квадратами с разностью  $d(b + c - d) + 1 = ad + 1$ . С другой стороны эта разность должна быть не меньше  $2d\sqrt{bc + 1} + 1$ . Но

$$2d\sqrt{bc + 1} + 1 > 2da + 1 > ad + 1,$$

что приводит к противоречию. ■

Интересно рассмотреть также случай  $n = -1$ . Несложно привести некоторые примеры  $D(-1)$ -троек, например,  $\{1, 2, 5\}$ ,  $\{1, 5, 10\}$ ,  $\{1, 26, 37\}$ .

**Задача 3.6.** а) Докажите, что любая  $D(-1)$ -двойка  $\{a_1, a_2\}$  может быть расширена до  $D(-1)$ -тройки  $\{a_1, a_2, a_3\}$ .

б) Докажите, что это можно сделать единственным образом с условием

$$\max\{a_1, a_2\} < a_3 \leq 3a_1a_2.$$

**Решение.** а) Любая  $D(-1)$ -двойка  $\{a_1, a_2\}$  может быть расширена числом

$$a_3 = a_1 + a_2 + 2\sqrt{a_1a_2 - 1}$$

до  $D(-1)$ -тройки.

б) Положим  $a = \min\{a_1, a_2\}$ ,  $b = \max\{a_1, a_2\}$ ,  $c = a_3$ . Тогда  $a < b < c$  и

$$ab - 1 = w^2, \quad bc - 1 = u^2, \quad ca - 1 = v^2$$

для некоторых целых положительных  $u, v, w$ . Поскольку

$$bv^2 - au^2 = b(ac + 1) - a(bc + 1) = a - b,$$

то уравнение  $bx^2 - ay^2 = a - b$  имеет целое положительное решение  $(v, u)$ . Заметим, что  $x^2 - aby^2 = -1$  имеет решение  $(w, 1)$ . Пусть  $\alpha = v\sqrt{b} + u\sqrt{a}$  и  $\beta = w + \sqrt{ab}$ .

Аналогично Задаче 3.4 можно показать, что для любого целого  $l$  число  $\alpha\beta^l$  имеет вид  $v_l\sqrt{b} + u_l\sqrt{a}$ , где  $(v_l, u_l)$  — решение уравнения

$$bx^2 - ay^2 = (-1)^l(a - b).$$

Аналогично несложно проверить, что  $u_{-1}, v_{-1} > 0$  и

$$ac' + 1 = v_{-1}^2, \quad bc' + 1 = u_{-1}^2$$

для неотрицательных целых  $c'$ , таких что

$$c = 2abc' + a + b - c' + 2u_{-1}v_{-1}w.$$

Если  $c' = 0$ , то  $b < c = a + b + 2\sqrt{ab - 1} \leq 3ab$ , иначе  $c' \geq 1$  и  $c > 3ab$ . ■

Различными исследователями было доказано, что некоторые  $D(-1)$ -тройки, например,  $\{1, 2, 5\}$ , нельзя расширить до  $D(-1)$ -четвёрок. Более того, Дуелла и Браун доказали, что существуют целые семейства  $D(-1)$ -троек, которые не могут быть расширены до  $D(-1)$ -четвёрок.

**Задача 3.7.** Докажите, что  $D(-1)$ -тройка  $\{n^2 + 1, (n + 1)^2 + 1, (2n + 1)^2 + 4\}$  не может быть расширена до  $D(-1)$ -четвёрки, если

а)  $n \equiv 1 \pmod{4}$ ;

б)  $n \equiv 2 \pmod{4}$ ;

в)  $n = 4$ .

**Решение.** Предположим, что  $\{n^2 + 1, (n + 1)^2 + 1, (2n + 1)^2 + 4, d\}$  — некоторая  $D(-1)$ -четвёрка. Тогда

$$\begin{aligned}(n^2 + 1)d - 1 &= x^2, \\ ((n + 1)^2 + 1)d - 1 &= y^2, \\ ((2n + 1)^2 + 4)d - 1 &= z^2.\end{aligned}$$

Исключая  $d$ , мы получим следующие равенства:

$$(n^2 + 1)y^2 - ((n + 1)^2 + 1)x^2 = 2n + 1, \quad (1)$$

$$(n^2 + 1)z^2 - ((2n + 1)^2 + 4)x^2 = 3n^2 + 4n + 4, \quad (2)$$

$$((n + 1)^2 + 1)z^2 - ((2n + 1)^2 + 4)y^2 = 3n^2 + 2n + 3. \quad (3)$$

а) Если  $n = 4k + 1$ , то из (1) получим

$$2y^2 - x^2 \equiv -1 \pmod{4},$$

откуда  $x$  чётно. Поскольку

$$n^2 + 1 \equiv 8k + 2 \pmod{16},$$

$$(n + 1)^2 + 1 \equiv 5 \pmod{16},$$

$$(2n + 1)^2 + 4 \equiv 13 \pmod{16},$$

то из (3) получим

$$5z^2 - 13y^2 \equiv 8 \pmod{16}.$$

Следовательно,  $y$  и  $z$  оба нечётны. Тогда (2) даёт:

$$(8k + 2)z^2 - 13x^2 \equiv 8k + 11 \pmod{16},$$

$$2 + 3x^2 \equiv 11 \pmod{16},$$

$$x^2 \equiv 3 \pmod{16},$$

что невозможно.

б) Предположим, что  $n = 2k$  с нечётным  $k$ . Тогда из (1) получим

$$y^2 - 2x^2 \equiv 1 \pmod{4},$$

то есть  $y$  нечётное, а  $x$  чётное. Далее равенство (3) даёт сравнение

$$2z^2 - 5y^2 \equiv 3 \pmod{8},$$

то есть  $z$  чётное. Полагая  $z = 2u$  и  $x = 2v$  в (2), получим следующее равенство

$$(4k^2 + 1)u^2 - (16k^2 + 8k + 5)v^2 = 3k^2 + 2k + 1.$$

Так как  $k$  нечётное, это приводит к сравнению

$$u^2 - 5v^2 \equiv \pm 2 \pmod{8},$$

что невозможно.

в) Если  $n = 4$ , то первые два равенства превращаются в

$$\begin{aligned} 17y^2 - 26x^2 &= 9, \\ z^2 - 5x^2 &= 4. \end{aligned}$$

Первое из них даёт

$$y^2 - 2x^2 \equiv 1 \pmod{8},$$

откуда  $x$  чётное. Следовательно,  $z$  тоже чётное; полагая  $z = 2u$  и  $x = 2v$ , получим

$$\begin{aligned} 17y^2 - 104v^2 &= 9, \\ u^2 - 5v^2 &= 1. \end{aligned}$$

Все натуральные решения уравнения Пелля  $x^2 - 5y^2 = 1$  задаются через тождество

$$u_n + v_n\sqrt{5} = (9 + 4\sqrt{5})^n$$

с натуральным  $n$ . Верна следующая рекуррентная формула:

$$v_0 = 0, \quad v_1 = 4, \quad v_{n+1} = 18v_n - v_{n-1}.$$

Из этого следует, что  $v \equiv 0, 4$  или  $13 \pmod{17}$ .

Рассмотрим равенство  $17y^2 - 104v^2 = 9$  по модулю 17:

$$-2v^2 \equiv 9 \pmod{17},$$

или

$$v^2 \equiv 4 \pmod{17},$$

что невозможно при  $v \equiv 0, 4$  или  $13 \pmod{17}$ . ■

Рассмотрим  $D(-1)$ -тройку  $\{a, b, c\}$ , для неё существуют целые неотрицательные  $r, s, t$  такие, что

$$ab - 1 = r^2, \quad ac - 1 = s^2, \quad bc - 1 = t^2.$$

Предположим, что существует натуральное  $d$ , которое продолжает эту  $D(-1)$ -тройку до  $D(-1)$ -четвёрки. Тогда

$$ad - 1 = x'^2, \quad bd - 1 = y'^2, \quad cd - 1 = z'^2$$

при некоторых неотрицательных целых  $x', y', z'$ .

Исключая  $d$  из предыдущих равенств, получим, что  $x', y', z'$  являются решением следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} ay^2 - bx^2 &= b - a, \\ az^2 - cx^2 &= c - a, \\ bz^2 - cy^2 &= c - b. \end{aligned}$$

**Задача 3.8.** Пусть дана  $D(-1)$ -четвёрка  $\{a, b, c, d\}$ , где  $2 \leq a < b < c < d$ .

а) Докажите, что существуют целые решения  $(z_0, x_0)$  и  $(z_1, y_1)$  уравнений

$$az^2 - cx^2 = c - a \quad \text{и} \quad bz^2 - cy^2 = c - b$$

соответственно такие, что

$$|x_0| < s, \quad 0 < z_0 < c,$$

$$|y_1| < t, \quad 0 < z_1 < c,$$

$$z'\sqrt{a} + x'\sqrt{c} = (z_0\sqrt{a} + x_0\sqrt{c})(s + \sqrt{ac})^{2m},$$

$$z'\sqrt{b} + y'\sqrt{c} = (z_1\sqrt{b} + y_1\sqrt{c})(t + \sqrt{bc})^{2n}$$

для некоторых целых неотрицательных  $m, n$ .

б) Докажите, что  $z_0 = z_1$ .

в) Докажите, что существует натуральное  $d_0 < c$  такое, что  $\{a, b, c, d_0\}$  является  $D(-1)$ -четвёркой.

**Решение.** а) Достаточно доказать утверждение только для решения уравнения  $az^2 - cx^2 = c - a$ . Заметим, что  $\alpha = s + \sqrt{ac}$  порождает фундаментальное решение уравнения  $x^2 - acy^2 = -1$  и по Задаче 2.1  $\alpha^2$  порождает фундаментальное решение уравнения Пелля  $x^2 - acy^2 = 1$ . Тогда для любого целого  $l$  числа  $(z'\sqrt{a} + x'\sqrt{c})\alpha^{2l}$  порождают решения уравнения  $az^2 - cx^2 = c - a$ , и существует такое решение  $(z_0, x_0)$ , что

$$\alpha^{-1}\sqrt{c-a} < \gamma = z_0\sqrt{a} + x_0\sqrt{c} \leq \alpha\sqrt{c-a}.$$

Так как

$$\gamma' = z_0\sqrt{a} - x_0\sqrt{c} = \frac{c-a}{z_0\sqrt{a} + x_0\sqrt{c}},$$

то

$$\alpha^{-1}\sqrt{c-a} < \gamma' = z_0\sqrt{a} - x_0\sqrt{c} \leq \alpha\sqrt{c-a}.$$

Откуда

$$2|x_0|\sqrt{c} = |\gamma - \gamma'| \leq |\alpha - \alpha^{-1}| = 2s\sqrt{c-a}.$$

Поэтому  $|x_0| \leq s\sqrt{c-a}/\sqrt{c} < s$ . Также

$$2\alpha^{-1} < \gamma - \gamma' = 2z_0\sqrt{a},$$

а это значит, что  $z_0 > 0$ . Предположим, что  $z_0 \geq c$ . Так как  $|x_0| < s$ , то мы имеем

$$c - a = az_0^2 - cx_0^2 \geq ac^2 - cs^2 = c(ac - s^2) = c > c - a,$$

что невозможно.

б) Нетрудно заметить, что

$$z' \equiv (-1)^m z_0 \equiv (-1)^n z_1 \pmod{2c}.$$

Из пункта а) следует, что  $0 < z_0 + z_1 < 2c$ , то есть  $z_0 = z_1$  — единственный возможный вариант.

в) Так как  $z_0^2 \equiv z'^2 \equiv -1 \pmod{c}$ , то существует целое положительное

$$d_0 = \frac{z_0^2 + 1}{c} < c.$$

Легко проверить, что  $ad_0 - 1 = x_0^2$  и  $bd_0 - 1 = y_1^2$ , откуда  $ad_0 - 1, bd_0 - 1, cd_0 - 1$  являются точными квадратами. ■

При помощи предыдущей задачи несложно выясняется методом спуска, что из любой  $D(-1)$ -четвёрки за конечное количество итераций можно получить другую  $D(-1)$ -четвёрку, которая содержит 1.

Оказывается, что существование  $D(-1)$ -четвёрок непосредственно связано с числом классов решений уравнения  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$ .

**Задача 3.9.** а) Докажите, что для любого целого  $k > 1$  каждый класс решений уравнения  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$  содержит ровно одно решение  $(x_0, y_0)$  такое, что  $|y_0| < k$ .

б) Докажите, что это уравнение имеет по крайней мере три класса решений.

**Решение.** а) Заметим, что число  $\alpha = 2k^2 + 1 + 2k\sqrt{k^2 + 1}$  порождает фундаментальное решение уравнения Пелля  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = 1$ , а число  $\beta = k + \sqrt{k^2 + 1}$  порождает фундаментальное решения уравнения  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = -1$ . В каждом классе решений уравнения  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$  существует ровно одно решение  $(x_0, y_0)$  такое, что

$$k\beta^{-1} < \gamma = x_0 + y_0\sqrt{k^2 + 1} < k\beta,$$

так как  $k\beta/(k\beta^{-1}) = \beta^2 = \alpha$  по Задаче 2.1. Неравенства, написанные выше — строгие, так как числа  $\gamma$  и  $k\beta$  порождают решения различных уравнений.

Так как

$$2|y_0|\sqrt{k^2 + 1} = |\gamma - \gamma'| = |\gamma - k^2\gamma^{-1}| < |k\beta - k\beta^{-1}| = 2k\sqrt{k^2 + 1},$$

то  $|y_0| < k$ . Аналогично получаем, что  $y_0 > k$  при  $\gamma > k\beta$  и  $y_0 < -k$  при  $\gamma < k\beta^{-1}$ . Это означает, что каждый класс решений уравнения  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$  содержит ровно одно решение  $(x_0, y_0)$  такое, что  $|y_0| < k$ .

б) Решения  $(k, 0)$ ,  $(k^2 - k + 1, k - 1)$  (цвета  $-1$ ) и  $(k^2 - k + 1, 1 - k)$  (цвета  $1$ ) являются представителями различных классов по пункту а). ■

**Определение.** Назовём решение  $(x_0, y_0)$  уравнения  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$  *исключительным*, если выполняются неравенства  $x_0 > 0$  и  $0 < y_0 < k - 1$ .

**Задача 3.10.** Рассмотрим  $D(-1)$ -четвёрку  $\{1, a, b, c\}$ . Докажите, что существует целое  $k > 1$  такое, что уравнение  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$  имеет по крайней мере два исключительных решения (или, что то же самое, более 5 классов решений).

**Решение.** Не умаляя общности, предположим, что  $a < b < c$  и

$$a = i^2 + 1, b = j^2 + 1, c = k^2 + 1$$

при некоторых натуральных  $i, j, k$ .

Из решения Задачи 3.6 следует, что либо  $c = a + b + 2\sqrt{ab - 1}$ , либо  $c > 3ab$ . В каждом из случаев  $j < k - 1$ .

Рассмотрим уравнение  $(y^2 + 1)(k^2 + 1) = x^2 + 1$ , или

$$x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2.$$

Это уравнение имеет по крайней мере два решения с  $0 < y < k - 1$ , а именно с  $y = i$  и с  $y = j$ . ■

**Задача 3.11.** Докажите, что уравнение

$$x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$$

- а) не имеет исключительных решений, если  $k^2 + 1$  простое число;
- б) не имеет исключительных решений при  $k = p^i$ , где  $p$  — нечётное простое, а  $i$  — натуральное число;
- в) имеет не более одного исключительного решения при  $k = pq$ , где  $p, q$  — различные нечётные простые числа;
- г) имеет не более одного исключительного решения при  $k = p^i q^j$ , где  $p, q$  — различные нечётные простые,  $i, j$  — натуральные числа.

**Решение.** а) Заметим, что  $x^2 - k^2 = (x - k)(x + k)$  делится на  $k^2 + 1$ , поэтому  $x - k$  или  $x + k$  делится на  $k^2 + 1$ . Отсюда следует, что  $x \geq (k^2 + 1) - k$  и

$$y^2 = \frac{x^2 - k^2}{k^2 + 1} \geq \frac{(k^2 + 1)(k^2 - 2k + 1)}{k^2 + 1} = (k - 1)^2.$$

Это неравенство означает, что данное уравнение не имеет исключительных решений.

б) Пусть  $(x_0, y_0)$  — некоторое решение уравнения  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$ . Обозначим НОД( $x_0, y_0$ ) через  $n$ , тогда существует натуральное  $l$  такое, что  $k = ln$ . В этом случае уравнение

$$x^2 - (l^2 n^2 + 1)y^2 = l^2$$

имеет примитивное решение  $(x_0/n, y_0/n)$ .

Если  $l \leq n$ , то  $l^2 < \sqrt{l^2 n^2 + 1}$  и по Задаче 1.6 все решения уравнения

$$x^2 - (l^2 n^2 + 1)y^2 = l^2$$

имеют вид  $(p_m, q_m)$ , где  $p_m/q_m$  — подходящая дробь к числу  $\sqrt{l^2 n^2 + 1}$ .

Так как  $\sqrt{l^2 n^2 + 1} = [ln, 2ln]$ , то по Задаче 1.10 последовательность  $p_m^2 - (l^2 n^2 + 1)q_m^2$  периодична с периодом 1 или 2. Легко проверить, что  $p_m - (l^2 n^2 + 1)q_m^2 = \pm 1$ , поэтому  $l = 1$  и  $n = k$ . В таком случае получается, что  $y_0$  делится на  $k$ , и решение  $(x_0, y_0)$  не может быть исключительным.

Если же  $l > n$ , то  $l = p^j$  при некотором целом  $j > i/2$ . Легко видеть, что решениями сравнения  $s^2 \equiv p^{2i} + 1 \pmod{p^{2j}}$  являются только  $s \equiv \pm 1 \pmod{p^{2j}}$ . Следовательно, все решения уравнения

$$x^2 - (l^2 n^2 + 1)y^2 = l^2$$

имеют цвет  $-1$  или  $1$ . По Задаче 1.14 при

$$m = \frac{s^2 - (l^2 n^2 + 1)}{l^2} = -n^2$$

уравнение  $t^2 - (l^2 n^2 + 1)u^2 = m$  имеет решение  $(t_0, u_0)$  цвета  $\pm 1$ .

Так как  $|-n^2| < \sqrt{l^2 n^2 + 1}$ , то по Задаче 1.6 все решения уравнения

$$x^2 - (l^2 n^2 + 1)y^2 = -n^2$$

имеют вид  $(p_m, q_m)$ . Ранее было доказано, что  $p_m - (l^2 n^2 + 1)q_m^2 = \pm 1$ , откуда следует, что  $n = 1$ . Следовательно, в случае  $l > n$  все решения уравнения  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$  примитивные и имеют цвет  $\pm 1$ . По Задаче 1.13 у этого уравнения есть два класса примитивных решений, причём мы знаем их представителей:  $(k^2 - k + 1, -k + 1)$  цвета  $1$  и  $(k^2 - k + 1, k - 1)$  цвета  $-1$ . Так как у обоих представителей вторая координата по модулю равна  $k - 1$ , то по Задаче 3.9 у уравнения  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$  исключительных решений нет.

в) **(В. Патрушев):** Пусть  $(x_0, y_0)$  — исключительное решение уравнения

$$x^2 - (p^2 q^2 + 1)y^2 = p^2 q^2.$$

Введём следующие обозначения

$$d_- = \gcd(x_0 - y_0, p^2 q^2), d_+ = \gcd(x_0 + y_0, p^2 q^2).$$

Так как  $(x_0 - y_0)(x_0 + y_0) = x_0^2 - y_0^2$  делится на  $p^2 q^2$ , то  $d_- d_+ = p^2 q^2$ . Рассмотрим три возможных случая:

1)  $d_- = p^2, d_+ = q^2$ . Тогда числа  $x_0, y_0$  взаимно просты, и решение  $(x_0, y_0)$  является примитивным. Пусть оно покрашено в цвет  $k$ , тогда

$$k \equiv 1 \pmod{p^2}, \quad k \equiv -1 \pmod{q^2}.$$

По КТО существует единственное такое  $k$  по модулю  $p^2 q^2$ .

2)  $d_- = q^2, d_+ = p^2$ . Аналогично предыдущему случаю решение  $(x_0, y_0)$  является примитивным. Пусть оно покрашено в цвет  $l$ , тогда

$$l \equiv -1 \pmod{q^2}, \quad l \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

По КТО существует единственное такое  $k$  по модулю  $p^2 q^2$ , более того,  $l \equiv -k \pmod{p^2 q^2}$ .

3) Либо  $d_-$ , либо  $d_+$  делится на  $pq$ . Пусть  $r = x_0 - pqy_0$ , тогда  $r \equiv \pm y_0 \pmod{pq}$ . Несложно доказать неравенство  $0 < r < pq$ . Так как  $y_0 < pq$ , то либо  $r = y_0$ , либо  $r = pr - y_0$ .

Если  $r = y_0$ , то  $2pqy_0^2 = p^2q^2$ , что невозможно по модулю 2. Если  $r = pq - y_0$ , то  $y_0 = pq - 1$ , что противоречит исключительности решения  $(x_0, y_0)$ .

Следовательно, существует не более двух исключительных решений:  $(x_1, y_1)$  цвета  $k$  и  $(x_2, y_2)$  цвета  $-k$ . Так как решение  $(x_2, -y_2)$  покрашено в цвет  $k$ , а  $|y_1|, |-y_2| < pq$ , то по Задаче 3.9а  $y_1 = -y_2$ , что противоречит неравенствам  $y_1, y_2 > 0$ . Это значит, что уравнение  $x^2 - (p^2q^2 + 1)y^2 = p^2q^2$  имеет не более одного исключительного решения.

г) Смотри статью [11]. ■

**Задача 3.12.** Существует ли целое  $k > 1$  такое, что уравнение

$$x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$$

имеет хотя бы два исключительных решения?

**Решение.** Это открытая проблема, известная в англоязычной литературе как Dujella's unicity conjecture. ■

### Благодарности.

Авторы проекта благодарят Б. Френкина и М. Суркова за полезные комментарии, которые помогли улучшить качество изложения материала.

### Список литературы.

1. J. E. Shockley, Introduction to Number Theory, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York-Toronto, Ont.-London (1967).
2. M. Waldschmidt, Continued fractions, Ecole de recherche CIMPA-Oujda, Théorie des Nombres et ses Applications, 18 - 29 mai 2015: Oujda (Maroc).
3. JHE Cohn, The Diophantine equation  $x^4 - Dy^2 = 1$ , Quart. J. Math. Oxford (2) 26 pp. 279-281 (1975).
4. JHE Cohn, Some quartic Diophantine equations, Pacific J. Math. 26(2): 233-243 (1968).
5. A. Dujella, On the size of Diophantine m-tuples. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 132, pp. 23-33 (2002).
6. E. Brown, Sets in which  $xy + k$  is always a square. Math. Comp. 45, pp. 613-620 (1985).
7. B. W. Jones, A second variation on a problem of Diophantus and Davenport, Fibonacci Quart. 16 pp. 155-165(1978).

8. A. Dujella, C. Fuchs, Complete solution of a problem of Diophantus and Euler. *J. London Math. Soc.* 71, pp. 33–52 (2005).
9. K. Matthews, J. Robertson, J. White, On a diophantine equation of Andrej Dujella, *Math. Glasnik*, 48, number 2, pp. 265-289 (2013).
10. A. Srinivasan,  $D(-1)$  quadruples and products of two primes, *Glas. Mat. Ser. III* 50, pp. 261–268 (2015).
11. M. Le, A. Srinivasan, Note on Dujella’s unicity conjecture, *Glas. Mat. Vol.* 58(78), pp. 59 – 65 (2023).
12. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1186131p5767378>
13. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h577945p3408321>
14. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1849278p12466367>
15. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h2183565p16353210>
16. <https://artofproblemsolving.com/community/c146h150369p849188>
17. <https://artofproblemsolving.com/community/c146t383f146h150370>
18. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h553573p3216004>

# Diophantine equations

Project is prepared and presented by:

I. Klimanova, P. Kozlov, A. Miroshnikov, E. Veretennikov.

## Abstract

In this project you can get acquainted with some remarkable equations and problems arising from the theory of Diophantine equations. This project consists of several sections and it is highly recommended to solve problems step by step.

In section 1 we consider the Diophantine equation  $x^2 - Dy^2 = n$  and we suggest that you are already familiar with the structure of solutions of equation  $x^2 - Dy^2 = 1$ . The theory of continued fractions helps to solve the given equation with a small  $n$ . Also, we provide a relatively little-known method that reduces equation  $x^2 - Dy^2 = n$  to another one  $t^2 - Du^2 = m$  with a smaller  $m$ .

Section 2 is devoted to special cases of the equations  $x^4 - Dy^2 = 1$  and  $x^2 - Dy^4 = 1$ . While solving problems in this section, you will learn the structure of solutions to some equations  $x^2 - Dy^2 = n$  with a small  $n$ . Understanding this structure is also quite useful for many other problems.

In section 3 we show the connection between the old problem on existence of Diophantine quadruples and the number of classes of solutions to equation  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$ .

## 1 On the diophantine equation $x^2 - Dy^2 = n$

Let  $\alpha$  be an irrational number. We can represent  $\alpha$  as an infinite continued fraction  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ . A continued fraction formed from  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$  by neglecting all terms after a given term is called a *convergent* to  $\alpha$ . We can represent  $k$ -th convergent  $[a_0, \dots, a_k]$  as an irreducible fraction with a numerator  $p_k$  and a denominator  $q_k$ . Denote a continued fraction by  $[a_k, a_{k+1}, \dots]$  by  $\alpha_k$ .

Properties of convergents:

- $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$ ,  $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$ .
- $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k+1}$ ,  $p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k = (-1)^k a_k$ .
- $p_{2k}/q_{2k}$  is an increasing sequence,  $p_{2k-1}/q_{2k-1}$  is a decreasing sequence.
- $\alpha = \frac{\alpha_{k+1} p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}}$ .

**Problem 1.1.** a) Prove the equalities:

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k+1}, \quad p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k = (-1)^k a_k.$$

b) Prove the inequalities:

$$\frac{1}{q_{k+1} + q_k} < |q_k \alpha - p_k| < \frac{1}{q_{k+1}}.$$

c) Prove that a sequence  $\{|q_k \alpha - p_k|\}_{k=0}^{\infty}$  is strictly decreasing.

**Solution.** a) These equations can be easily proved by induction.

b) Since

$$\alpha = \frac{\alpha_{k+1}p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1}},$$

we have by a)

$$|q_k\alpha - p_k| = \frac{|p_{k-1}q_k - p_kq_{k-1}|}{\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1}}.$$

As  $\alpha_{k+1} = a_{k+1} + 1/\alpha_{k+2}$ , the following inequality is true:

$$a_{k+1} < \alpha_{k+1} < a_{k+1} + 1.$$

Therefore

$$q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1} < \alpha_{k+1}q_k + q_{k-1} < (a_{k+1} + 1)q_k + q_{k-1} = q_{k+1} + q_k$$

and

$$\frac{1}{q_{k+1} + q_k} < |q_k\alpha - p_k| < \frac{1}{q_{k+1}}.$$

c) By b)

$$|q_{k+1}\alpha - p_{k+1}| < \frac{1}{q_{k+2}} \leq \frac{1}{q_{k+1} + q_k} < |q_k\alpha - p_k|.$$

■

**Problem 1.2.** Prove that of any two consecutive convergents to  $\alpha$ , at least one satisfies the inequality

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2}.$$

**Solution.** Suppose

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \geq \frac{1}{2q_k^2} \quad \text{and} \quad \left| \alpha - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| \geq \frac{1}{2q_{k+1}^2}.$$

As  $\alpha$  is irrational, we have

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| > \frac{1}{2q_k^2} \quad \text{and} \quad \left| \alpha - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| > \frac{1}{2q_{k+1}^2}.$$

Since the convergents are alternately less or greater than  $\alpha$ , by Problem 1.1

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_kq_{k+1}} &= \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| = \left| \frac{p_k}{q_k} - \alpha + \alpha - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| = \\ &= \left| \frac{p_k}{q_k} - \alpha \right| + \left| \alpha - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| > \frac{1}{2q_k^2} + \frac{1}{2q_{k+1}^2}. \end{aligned}$$

From this inequality we see that

$$q_{k+1}^2 - 2q_kq_{k+1} + q_k^2 = (q_{k+1} - q_k)^2 < 0$$

which is impossible. ■

**Problem 1.3.** Prove that of any three consecutive convergents to  $\alpha$ , at least one satisfies the inequality

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}b^2}.$$

**Solution.** Suppose

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2}, \quad \left| \alpha - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_{k+1}^2} \quad \text{and} \quad \left| \alpha - \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_{k+2}^2}.$$

The convergents  $p_k/q_k$  and  $p_{k+1}/q_{k+1}$  are alternately less or greater than  $\alpha$ , as well as  $p_{k+1}/q_{k+1}$  and  $p_{k+2}/q_{k+2}$ . As in the solution of the previous problem we get that

$$\frac{1}{q_k q_{k+1}} > \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2} + \frac{1}{\sqrt{5}q_{k+1}^2} \quad \text{and} \quad \frac{1}{q_{k+1} q_{k+2}} > \frac{1}{\sqrt{5}q_{k+1}^2} + \frac{1}{\sqrt{5}q_{k+2}^2}.$$

Denote  $q_{k+1}/q_k$  by  $r_k$ . It follows from the previous inequalities that

$$r_k^2 - \sqrt{5}r_k + 1 < 0 \quad \text{and} \quad r_{k+1}^2 - \sqrt{5}r_{k+1} + 1 < 0$$

then  $r_k, r_{k+1} < \varphi$ , where  $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  is the largest root of equation  $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ .

After dividing the equality  $q_{k+2} = a_{k+2}q_{k+1} + q_k$  by  $q_{k+1}$  we get

$$r_{k+1} = a_{k+2} + \frac{1}{r_k}.$$

Now a contradiction follows:

$$\varphi > r_{k+1} = a_{k+2} + \frac{1}{r_k} \geq 1 + \frac{1}{r_k} > 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi.$$

■

**Problem 1.4.** Consider a positive integer  $k$  and integers  $p, q$  with  $q > 0$  such that

$$|q\alpha - p| < |q_k\alpha - p_k|.$$

a) Prove that there are integers  $u, v$  such that

$$p_k u + p_{k+1} v = p, \quad q_k u + q_{k+1} v = q.$$

b) Prove that  $q \geq q_{k+1}$ .

**Solution.** a) Choose

$$u = (-1)^k(qp_{k+1} - pq_{k+1}), \quad v = (-1)^k(pq_k - qp_k).$$

These integers are valid by Problem 1.1.a.

b) Take the integers  $u, v$  from a). If  $u \geq 0, v \geq 1$  then

$$q = q_k u + q_{k+1} v \geq q_{k+1} v \geq q_{k+1}.$$

The cases  $u, v < 0$  or  $v = 0$  are trivially impossible.

It remains to check the case when  $u, v$  are of different signs. Notice that the numbers  $q_k \alpha - p_k$  and  $q_{k+1} \alpha - p_{k+1}$  are also of different signs. It means that the numbers  $u(q_k \alpha - p_k)$  and  $v(q_{k+1} \alpha - p_{k+1})$  are of the same sign. Hence

$$|q\alpha - p| = |(q_k u + q_{k+1} v)\alpha - (p_k u + p_{k+1} v)| = |u||q_k \alpha - p_k| + |v||q_{k+1} \alpha - p_{k+1}| \geq |q_k \alpha - p_k|$$

which contradicts the condition of the problem. ■

Using the previous problem one can show that the convergents form a sequence of «best» approximations to  $\alpha$ .

**Problem 1.5.** If  $a/b$  is a rational number such that

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2}$$

then  $a/b$  is one of the convergents to  $\alpha$ .

**Solution.** It is enough to prove the statement of the problem only for coprime  $a, b$ .

Let  $k$  be an integer such that  $q_k \leq b < q_{k+1}$ . As  $b < q_{k+1}$  inequality  $|q_k \alpha - p_k| \leq |b\alpha - a|$  is true by Problem 1.4. It follows that

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{|b\alpha - a|}{q_k} < \frac{1}{2bq_k}.$$

Suppose,  $a/b \neq p_k/q_k$ . Hence

$$\frac{1}{bq_k} \leq \left| \frac{a}{b} - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \left| \frac{a}{b} - \alpha \right| + \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2bq_k}$$

which contradicts to inequality  $q_k \leq b$ . It means  $a/b = p_k/q_k$ . ■

Further, throughout the project,  $D$  is a squarefree positive integer number.

**Problem 1.6.** Let  $n$  be an integer that is less than  $\sqrt{D}$  in absolute value. Assume that equation  $x^2 - Dy^2 = n$  has a solution  $x_0, y_0$  in positive integers. Prove that  $x_0/y_0$  is one of convergents to  $\sqrt{D}$  if:

- a)  $n$  is positive;
- b)  $n$  is negative.

**Solution.** a) The equality

$$(x_0 - y_0\sqrt{D})(x_0 + y_0\sqrt{D}) = n,$$

implies that  $x_0 > y_0\sqrt{D}$ .

Therefore

$$0 < \frac{x_0}{y_0} - \sqrt{D} = \frac{n}{y_0(x_0 + y_0\sqrt{D})} < \frac{n}{y_0(y_0\sqrt{D} + y_0\sqrt{D})} < \frac{\sqrt{D}}{2y_0^2\sqrt{D}} = \frac{1}{2y_0^2},$$

it follows from Problem 1.5 that  $x_0/y_0$  is a convergent to  $\sqrt{D}$ .

b) Analogously to the proof of a), we find that  $y_0/x_0$  is a convergent to  $1/\sqrt{D}$ . Hence  $x_0/y_0$  is a convergent to  $\sqrt{D}$ . ■

**Definition.** A real irrational number which is a root of a quadratic equation with integral coefficients is called a *quadratic irrational*.

An infinite continued fraction is said to be *periodic* if it is of form  $[a_0; a_1, \dots, a_l, \overline{b_1, \dots, b_m}]$ . If it is of the form  $[\overline{b_1, \dots, b_m}]$  it is said to be *purely periodic*. The smallest positive integer  $m$  satisfying the above relationship is called the *period* of the expansion.

**Problem 1.7.** a) Prove that if  $\alpha$  is a quadratic irrational and  $a, b, c, d$  are rational with not both  $c$  and  $d$  zero then number

$$\beta = \frac{a + b\alpha}{c + d\alpha}$$

is either rational or a quadratic irrational.

b) Prove that each periodic continued fraction is a quadratic irrational.

**Solution.** a) It is easy to see that

$$\alpha = \frac{a' + b'\beta}{c' + d'\beta}$$

for some integers  $a', b', c', d'$ , and not both  $c'$  and  $d'$  are zero. Let  $\alpha$  be a root of the quadratic equation  $kx^2 + lx + m = 0$  with integer coefficients  $k, l, m$ . Then  $\beta$  is a root of the quadratic or linear equation

$$k(a' + b'x)^2 + l(a' + b'x)(c' + d'x) + m(c' + d'x)^2 = 0$$

with integer coefficients.

b) Let  $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_l, \overline{b_1, \dots, b_m}]$ . Then

$$\alpha_{l+1} = [\overline{b_1, \dots, b_m}] = [b_1, \dots, b_m, \alpha_{l+1}].$$

If  $p'_k/q'_k$  is the  $k$ -th convergent to  $\alpha_{l+1}$  then

$$\alpha_{l+1} = \frac{p'_m \alpha_{l+1} + p'_{m-1}}{q'_m \alpha_{l+1} + q'_{m-1}}$$

so that

$$q'_m \alpha_{l+1}^2 + (q'_{m-1} - p'_m) \alpha_{l+1} - p'_{m-1} = 0.$$

Thus, since  $\alpha_{l+1}$  is not rational (the continued fraction expansion is infinite),  $\alpha_{l+1}$  is a quadratic irrational.

If  $p_k/q_k$  is the  $k$ -th convergent to  $\alpha$  then

$$\alpha = \frac{\alpha_{l+1}p_l + p_{l-1}}{\alpha_{l+1}q_l + q_{l-1}}.$$

It follows from a) that  $\alpha$  is either rational or a quadratic irrational. Since  $\alpha$  is an infinite simple continued fraction,  $\alpha$  is a quadratic irrational. ■

The converse to previous problem is also true.

**Problem 1.8.** a) Suppose  $\alpha$  is a real, irrational root of  $ax^2 + bx + c = 0$ , where  $a, b, c$  are integers and  $a \neq 0$ . Prove that  $\alpha_{k+1}$  is a root of the polynomial

$$A_k x^2 + B_k x + C_k = 0,$$

where

$$\begin{aligned} A_k &= ap_k^2 + bp_k q_k + cq_k^2, \\ B_k &= 2ap_k p_{k-1} + b(p_k q_{k-1} + p_{k-1} q_k) + 2cq_k q_{k-1}, \\ C_k &= ap_{k-1}^2 + bp_{k-1} q_{k-1} + cq_{k-1}^2 \end{aligned}$$

and

$$B_k^2 - 4A_k C_k = b^2 - 4ac.$$

b) Prove that there is a number  $M$  such that  $|A_k|, |B_k|, |C_k| < M$  for any positive integer  $k$ .

c) Prove that each quadratic irrational has a periodic expansion as a continued fraction.

**Solution.** a) It follows from properties of continued fractions that

$$\alpha = \frac{\alpha_{k+1}p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1}}.$$

If we substitute this value of  $\alpha$  into  $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$  and rearrange the coefficients, we obtain

$$A_k \alpha_{k+1}^2 + B_k \alpha_{k+1} + C_k = 0,$$

where  $A_k, B_k, C_k$  are as given in the statement of the problem. By direct computation we obtain

$$B_k^2 - 4A_k C_k = (b^2 - 4ac) (p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1})^2 = b^2 - 4ac.$$

b) By Problem 1.1.b we have

$$|\alpha q_k - p_k| < \frac{1}{q_k}$$

so we can write

$$p_k = \alpha q_k + \frac{\varepsilon}{q_k} \quad |\varepsilon| < 1,$$

where  $\varepsilon$ , of course, depends on  $k$ . Substituting this into the expression for  $A_k$ , we obtain

$$\begin{aligned} A_k &= a \left( \alpha q_k + \frac{\varepsilon}{q_k} \right)^2 + b \left( \alpha q_k + \frac{\varepsilon}{q_k} \right) q_k + c q_k^2 \\ &= (a\alpha^2 + b\alpha + c) q_k^2 + \left( 2a\alpha + b + \frac{a\varepsilon}{q_k^2} \right) \cdot \varepsilon \\ &= \left( 2a\alpha + b + \frac{a\varepsilon}{q_k^2} \right) \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Thus,

$$|A_k| < |2a\alpha + b| + |a|$$

which implies that all of the  $A_k$  must come from a finite set of integers. As  $C_k = A_{k-1}$ , a similar result is true for the  $C_k$ . Since

$$B_k^2 - 4A_k C_k = b^2 - 4ac,$$

we have

$$B_k^2 = |4A_k C_k + b^2 - 4ac| < 4\{|2a\alpha + b| + |a|\}^2 + |b^2 - 4ac|$$

and  $B_k$  is also bounded.

c) Since a quadratic equation can have at most two distinct roots, it follows from b) that there are at least two equal numbers in the sequence of  $\alpha_k$ . It means  $\alpha$  is periodic. ■

**Definition.** Let  $\alpha = a + b\sqrt{D}$ , where  $a, b$  are rational and  $\sqrt{D}$  is irrational. The *conjugate* of  $\alpha$ , denoted by  $\alpha'$ , is the number  $a - b\sqrt{D}$ .

**Problem 1.9.** Let  $\alpha$  be a quadratic irrational.

- a) Prove that if the continued fraction of  $\alpha$  is purely periodic then  $\alpha > 1$  and  $-1 < \alpha' < 0$ .  
b) Prove that if  $\alpha > 1$  and  $-1 < \alpha' < 0$  then the continued fraction of  $\alpha$  is purely periodic.

**Solution.** a) Let  $\alpha = [\overline{a_1, \dots, a_m}] = [a_1, \dots, a_m, \alpha]$ . Since  $a_i \geq 1$  for any positive integer  $i$ , we obtain  $\alpha > 1$ .

If  $p_k/q_k$  is the  $k$ -th convergent to  $\alpha$  then

$$\alpha = \frac{\alpha p_m + p_{m-1}}{\alpha q_m + q_{m-1}}$$

so that  $\alpha$  is a root of

$$f(x) = q_m x^2 + (q_{m-1} - p_m)x - p_{m-1} = 0.$$

Since

$$f(-1) = (q_m - q_{m-1}) + (p_m - p_{m-1}) > 0$$

and

$$f(0) = -p_{m-1},$$

we obtain that  $\alpha'$ , the other root of  $f(x) = 0$ , must be between  $-1$  and  $0$ .

b) Suppose  $\alpha$  is a quadratic irrational,  $\alpha > 1$  and  $-1 < \alpha' < 0$ . Let  $\alpha_1 = \alpha$  and define  $\alpha_k$  inductively

$$\alpha_{k-1} = a_{k-1} + \frac{1}{\alpha_k}.$$

We know that  $\alpha_k$  is a root of equation  $f_k(x) = p_k x^2 + q_k x + r_k = 0$  for some integer  $p_k, q_k, r_k$ . Note that  $1/\alpha_{k+1} = \alpha_k - a_k$  is a root of equation

$$f_{k-1}(a_{k-1} + x) = p_{k-1} x^2 + (2p_{k-1} a_{k-1} + q_{k-1})x + f_{k-1}(a_{k-1}) = 0.$$

It follows that

$$\frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\alpha'_k} = \frac{1}{\alpha_k} + \left(\frac{1}{\alpha_k}\right)' = -\frac{2p_{k-1}a_{k-1} + q_{k-1}}{p_{k-1}} = -2a_{k-1} + \alpha_{k-1} + \alpha'_{k-1},$$

and

$$\alpha'_{k-1} = a_{k-1} + \frac{1}{\alpha'_k}.$$

It can be proved by mathematical induction that

$$-1 < \alpha'_k < 0$$

for any positive  $k$  and, as a consequence,

$$a_{k-1} = \left[ -\frac{1}{\alpha'_k} \right].$$

Since  $\alpha = [a_1, \dots, a_k, \alpha_{k+1}]$  and  $\alpha$  is a quadratic irrational, by Problem 1.8 there exist positive integers  $k$  and  $l$  such that  $\alpha_{k+1} = \alpha_{k+t+1}$ . Thus,

$$a_k = \left[ -\frac{1}{\alpha'_{k+1}} \right] = \left[ -\frac{1}{\alpha'_{k+t+1}} \right] = a_{k+t}$$

and

$$\alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}} = a_{k+t} + \frac{1}{\alpha_{k+t+1}} = \alpha_{k+t}.$$

If we apply this process  $k$  times, we obtain

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_{t+1}.$$

Finally,

$$\alpha = [a_1, \dots, a_t, \alpha] = [\overline{a_1, \dots, a_t}].$$

■

**Problem 1.10.** Write the continued fraction  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \alpha_{k+1}]$  of  $\sqrt{D}$ .

a) Prove that  $\alpha_k$  is purely periodic for any positive integer  $k$ .

b) Prove that there exist positive integers  $b_k, c_k$  such that

$$\alpha_{k+1} = \frac{b_k + \sqrt{D}}{c_k}$$

and

$$p_k^2 - Dq_k^2 = (-1)^{k+1}c_k.$$

**Solution.** a) Let  $[a_0; a_1, \dots]$  be the continued fraction of  $\sqrt{D}$ . Consider the quadratic irrational  $\alpha = a_0 + \sqrt{D}$ . Since  $a_0 = [\sqrt{D}]$ , it follows that  $\alpha'$  is in bounds  $-1 < \alpha' < 0$ . Then by Problem 1.9.b the continued fraction of  $\alpha$  is purely periodic. Thus,

$$\sqrt{D} = \alpha - a_0 = [2a_0, a_1, \dots, a_n] - a_0 = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_n, 2a_0}].$$

The statement of the problem follows.

b) Since

$$\sqrt{D} = \frac{p_k \alpha_{k+1} + p_{k-1}}{q_k \alpha_{k+1} + q_{k-1}},$$

we have

$$\alpha_{k+1} = \frac{q_{k-1} \sqrt{D} - p_{k-1}}{p_k - q_k \sqrt{D}}.$$

Now we rationalize the denominator:

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \frac{q_{k-1} \sqrt{D} - p_{k-1}}{p_k - q_k \sqrt{D}} = \frac{(q_{k-1} \sqrt{D} - p_{k-1})(p_k + q_k \sqrt{D})}{p_k^2 - Dq_k^2} = \\ &= \frac{(Dq_k q_{k-1} - p_k p_{k-1}) + (p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k) \sqrt{D}}{p_k^2 - Dq_k^2} = \frac{(Dq_k q_{k-1} - p_k p_{k-1}) + (-1)^{k+1} \sqrt{D}}{p_k^2 - Dq_k^2}. \end{aligned}$$

Take  $b_k = (-1)^{k+1}(Dq_k q_{k-1} - p_k p_{k-1})$ . To complete the proof, it's enough to check that  $b_k$  and  $c_k$  are positive for any  $k$ .

First,  $c_k$  is positive since  $\text{sign}(p_k^2 - Dq_k^2) = \text{sign}\left(\frac{p_k}{q_k} - \sqrt{D}\right) = (-1)^{k+1}$ .

Secondly,  $b_k$  is positive because  $c_k$  is positive and  $2b_k/c_k = \alpha_k + \alpha'_k > 0$ . The latter follows from a) and the Problem 1.9.a. ■

It follows from the previous problem that sequence  $p_k^2 - Dq_k^2$  is periodic with a period equal to or twice as large as the period of continued fraction for  $\sqrt{D}$ . This fact together with result of Problem 1.6 describes all the solutions to equation  $x^2 - Dy^2 = n$  with  $|n| < \sqrt{D}$ .

In the sequel, we consider only solutions to equation  $x^2 - Dy^2 = n$  with  $x + y\sqrt{D} > 0$ , because  $(-x, -y)$  is also a solution whenever  $(x, y)$  is a solution.

It is easy to see that if the equation  $x^2 - Dy^2 = n$  has an integer solution  $(x_0, y_0)$  then it has an infinite number of such solutions  $(x_k, y_k)$  defined by

$$x_k + y_k \sqrt{D} = (x_0 + y_0 \sqrt{D})(s + t \sqrt{D})^k,$$

where  $(s, t)$  is the minimal positive solution to the corresponding Pell's equation.

**Definition.** Two solutions  $(x_1, y_1)$  and  $(x_2, y_2)$  to equation  $x^2 - Dy^2 = n$  are said to be *in the same class* if there is an integer  $n$  such that

$$x_2 + y_2 \sqrt{D} = (x_1 + y_1 \sqrt{D})(s + t \sqrt{D})^k,$$

where  $(s, t)$  is the minimal positive solution to the corresponding Pell's equation.

We say that  $(x, y)$  is the *minimal* solution in the class if  $1 < x + y\sqrt{D} \leq s + t\sqrt{D}$ .

**Problem 1.11.** How many classes of solutions does an equation

$$x^2 - (m^2 - 2)y^2 = 2$$

have for any integer  $m > 1$ ?

**Solution.** Notice that  $(m^2 - 1, m)$  is the minimal solution to the corresponding Pell's equation  $x^2 - (m^2 - 2)y^2 = 1$ . Consider some class of solutions to equation  $x^2 - (m^2 - 2)y^2 = 2$  with minimal solution  $(u, v)$ . By definition,

$$1 < \alpha = u + v\sqrt{m^2 - 2} \leq \beta = m^2 - 1 + m\sqrt{m^2 - 2}.$$

Since

$$\alpha^2/2 = u^2 - 1 + uv\sqrt{m^2 - 2},$$

$(u^2 - 1, uv)$  is another solution to Pell's equation  $x^2 - (m^2 - 2)y^2 = 1$ . It means that  $\alpha^2/2 = \beta^l$  for some integer  $l$ . From the inequalities  $1 < \alpha^2/2 \leq \beta^2/2 < \beta^2$  it follows that  $l = 1$ . Hence  $\alpha = \sqrt{2\beta} = m + \sqrt{m^2 - 2}$  and equation  $x^2 - (m^2 - 2)y^2 = 2$  has the only one class of solutions with the minimal solution  $(m, 1)$ . ■

**Definition.** A solution  $(x_0, y_0)$  of  $x^2 - Dy^2 = n$  is said to be *primitive* if  $x_0$  and  $y_0$  are relatively prime.

It is obviously sufficient to find only primitive solutions, because if  $\gcd(x_0, y_0) = d > 1$  then  $(x_0/d, y_0/d)$  is a primitive solution to

$$x^2 - Dy^2 = \frac{n}{d^2}.$$

**Problem 1.12.** If  $(x_0, y_0)$  is a primitive solution to equation  $x^2 - Dy^2 = n$  then there exists an integer  $k$  such that

$$x_0 \equiv ky_0 \pmod{n}$$

and

$$k^2 \equiv D \pmod{n}.$$

**Solution.** Since  $x_0$  and  $y_0$  are relatively prime, so are  $y_0$  and  $n$ . Thus, there exists an integer  $k$  such that

$$x_0 \equiv ky_0 \pmod{n}$$

Therefore

$$x_0^2 - Dy_0^2 \equiv k^2y_0^2 - Dy_0^2 \equiv y_0^2(k^2 - D) \pmod{n}$$

which in view of  $\gcd(y_0^2, n) = 1$  implies that

$$k^2 \equiv D \pmod{n}.$$

■

It follows from the previous problem that if  $D$  is a quadratic nonresidue modulo  $n$  then the Diophantine equation

$$x^2 - Dy^2 = n$$

has no primitive solutions.

**Definition.** We say that a primitive solution  $(x_0, y_0)$  to the equation  $x^2 - Dy^2 = n$  belongs to the integer  $k$  if

$$x_0 \equiv ky_0 \pmod{n}$$

and

$$k^2 \equiv D \pmod{n}.$$

**Problem 1.13.** Prove that two primitive solutions to equation  $x^2 - Dy^2 = n$  are in the same class if and only if they belong to the same integer.

**Solution.** Suppose  $(x_1, y_1)$  and  $(x_2, y_2)$  are two primitive solutions to equation  $x^2 - Dy^2 = n$  such that

$$x_2 + y_2\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})(s + t\sqrt{D})^k,$$

where  $(s, t)$  is the minimal positive solution to the corresponding Pell's equation. Of course,  $(s + t\sqrt{D})^k = u + v\sqrt{D}$ , where  $(u, v)$  is another solution to Pell's equation. Then

$$x_2 = x_1u + y_1vD, \quad y_2 = x_1v + y_1u.$$

Assume that the solution  $(x_1, y_1)$  belongs to the integer  $k$ . Then

$$y_2k = x_1vk + y_1uk \equiv y_1kvk + x_1u \equiv y_1vD + x_1u = x_2,$$

Thus the solution  $(x_2, y_2)$  belongs to the same integer  $k$ .

Conversely, let solutions  $(x_1, y_1)$  and  $(x_2, y_2)$  belong to an integer  $k$ . Then

$$\begin{aligned} \frac{x_2 + y_2\sqrt{D}}{x_1 + y_1\sqrt{D}} &= \frac{(x_2 + y_2\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D})}{(x_1 + y_1\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D})} = \\ &= \frac{x_1x_2 - y_1y_2D}{n} + \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{n}\sqrt{D}. \end{aligned}$$

Since

$$x_1 \equiv y_1k, \quad x_2 \equiv y_2k, \quad k^2 \equiv D \pmod{n},$$

we have

$$x_1x_2 \equiv y_1y_2k^2 \equiv y_1y_2D \pmod{n}$$

and

$$x_1y_2 \equiv y_1y_2k \equiv x_2y_1 \pmod{n}.$$

Thus

$$\frac{x_1x_2 - y_1y_2D}{n} = u, \quad \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{n} = v$$

for some integers  $u, v$  and so

$$\frac{x_2 + y_2\sqrt{D}}{x_1 + y_1\sqrt{D}} = u + v\sqrt{D}.$$

Similarly

$$\frac{x_2 - y_2\sqrt{D}}{x_1 - y_1\sqrt{D}} = u - v\sqrt{D}.$$

Therefore

$$\begin{aligned} u^2 - v^2D &= (u + v\sqrt{D})(u - v\sqrt{D}) = \\ &= \frac{x_2 + y_2\sqrt{D}}{x_1 + y_1\sqrt{D}} \cdot \frac{x_2 - y_2\sqrt{D}}{x_1 - y_1\sqrt{D}} = \frac{n}{n} = 1 \end{aligned}$$

which means that  $(u, v)$  is a solution to Pell's equation. Hence  $(x_1, y_1)$  and  $(x_2, y_2)$  are two solutions lying in the same class. ■

It follows from the previous problem that there exists only a finite number of classes for any Diophantine equation  $x^2 - Dy^2 = n$ .

Let  $(x_0, y_0)$  be a solution to equation  $x^2 - Dy^2 = n$  that belongs to some integer  $k$ . It follows from definition that there are integers  $u_0, m$  such that

$$x_0 = y_0k - u_0n, \quad D = k^2 - mn.$$

**Problem 1.14.** Prove that there is an integer  $t_0$  such that  $(t_0, u_0)$  is a solution to equation  $t^2 - Du^2 = m$  belonging to the integer  $\pm k$ . Express  $x_0, y_0$  in terms of  $t_0, u_0$ .

**Solution.** If we substitute the above expressions for  $x_0$  and  $D$  into  $x_0^2 - Dy_0^2 = n$  and simplify, we obtain

$$y_0^2m - 2y_0ku_0 + (u_0^2n - 1) = 0$$

which implies that

$$y_0 = \frac{ku_0 \pm \sqrt{k^2u_0^2 - mu_0^2n + m}}{m} = \frac{ku_0 \pm \sqrt{Du_0^2 + m}}{m}.$$

Since  $y_0$  is an integer, the value of the radical  $\sqrt{Du_0^2 + m}$  must be an integer, say  $t_0$ , implying that  $(t_0, u_0)$  is a solution to the Diophantine equation

$$t^2 - u^2D = m.$$

For the same reason we must have

$$ku_0 \pm t_0 \equiv 0 \pmod{m},$$

so  $(t_0, u_0)$  is the solution belonging to the integer  $\pm k$ . Finally, from

$$y_0 = \frac{ku_0 \pm t_0}{m}$$

it follows that

$$x_0 = y_0k - u_0n = \frac{Du_0 \pm t_0k}{m}.$$

■

The number  $m$  from the previous problem depends on  $k$ . Notice that the choice of  $k$  is not fixed, it is fixed only modulo  $n$ .

**Problem 1.15.** If  $|n| > \sqrt{D}$ , the number  $m$  (from the previous problem) can be chosen to satisfy inequality  $|m| \leq \max\{\sqrt{D}, |n|/4\}$ .

**Solution.** Choose  $k$  such that  $|k| \leq n/2$ . If  $k^2 < D$  then

$$|m| \leq \frac{D}{|n|} < \sqrt{D}.$$

If  $k^2 > D$  then

$$|m| < \frac{k^2}{|n|} \leq |n|/4.$$

■

By applying the method from the previous two problems repeatedly, we eventually obtain equations

$$t'^2 - Du'^2 = m',$$

where  $|m'| < \sqrt{D}$ , which have only those integer solutions that we obtain from the numerators and denominators of convergents to  $\sqrt{D}$ . A word of caution: in applying the method repeatedly we can pick different values of  $k$  at each step.

**Problem 1.16.** Determine all the classes of solutions to the following equations:

- a)  $x^2 - 82y^2 = 23$ ,
- b)  $x^2 - 23y^2 = 41$ .

**Solution.** a) We find that  $k = \pm 6$  are the only values of  $k$  in the range

$$0 \leq |k| \leq \frac{23}{2},$$

such that  $k^2 \equiv 82 \pmod{23}$ . Thus

$$m = \frac{k^2 - D}{n} = \frac{36 - 82}{23} = -2.$$

Since  $\sqrt{82} = [9, \overline{18}]$ , by Problem 1.6 the only equations of form

$$t^2 - 82u^2 = n \quad (0 < |n| < \sqrt{82})$$

that have solutions are

$$t^2 - 82u^2 = p_l^2 - 82q_l^2 = \pm 1.$$

Thus, the equation  $t^2 - 82u^2 = m = -2$  has no integer solutions, and, by Problem 1.14, the equation  $x^2 - 82y^2 = 23$  has no integer solutions too.

b) The only values of  $k$  in the range

$$0 \leq |k| \leq \frac{41}{2}$$

such that  $k^2 \equiv 23 \pmod{41}$  are  $k = \pm 8$ . Thus

$$m = \frac{k^2 - D}{n} = \frac{64 - 23}{41} = 1.$$

The equation  $t^2 - 23u^2 = m = 1$  has a particular solution  $t_0 = 1, u_0 = 0$ . Hence  $x_0 = \pm 8, y_0 = \pm 1$ , where  $x_0$  should be equal to 8 to satisfy  $x_0 + y_0\sqrt{23} > 0$ . So the equation  $x^2 - 23y^2 = 41$  has two classes of solutions with minimal solutions  $(8, 1)$  and  $(8, -1)$  respectively. ■

**Problem 1.17.** Prove that equation  $x^2 - 229y^2 = 3$

- has no integer solutions,
- has a solution modulo every prime  $p$ .

**Solution.** a) The continued fraction expansion of  $\sqrt{229}$  is  $[15; \overline{7, 1, 1, 7, 30}]$  with the period equal to 5. Calculate the first five values of  $p_n^2 - 229q_n^2$ :

$$\begin{aligned} p_0^2 - 229q_0^2 &= 15^2 - 229 \cdot 1^2 = -4, \\ p_1^2 - 229q_1^2 &= 106^2 - 229 \cdot 7^2 = 15, \\ p_2^2 - 229q_2^2 &= 121^2 - 229 \cdot 8^2 = -15, \\ p_3^2 - 229q_3^2 &= 227^2 - 229 \cdot 15^2 = 4, \\ p_4^2 - 229q_4^2 &= 1710^2 - 229 \cdot 113^2 = -1. \end{aligned}$$

By Problem 1.10 the sequence  $|p_n^2 - 229q_n^2|$  is periodic with the period equal to 5. Hence by Problem 1.6 the only equations of form

$$x^2 - 229y^2 = n \quad (0 < |n| < \sqrt{229})$$

that have solutions are

$$x^2 - 229y^2 = \pm 1, \pm 4, \pm 15,$$

thus equation  $x^2 - 229y^2 = 3$  has no integer solutions.

b) It is easy to see that equation  $x^2 - 229y^2 = 3$  has a solution modulo 2. As 3 is a quadratic residue modulo 229, this equation has a solution modulo 229. Consider an odd prime  $p$  distinct from 229. Each of functions  $x^2$  and  $3 + 229y^2$  has  $(p+1)/2$  values modulo  $p$ . Hence by Dirichlet's principle they are equal modulo  $p$  at some point and the equation  $x^2 - 229y^2 = 3$  has a solution modulo  $p$ . ■

## 2 On the equations $x^4 - Dy^2 = 1$ and $x^2 - Dy^4 = 1$

To solve the problems in this section, it is helpful to solve the problems from the first section, though not mandatory. To understand the formulation of some problems, it is necessary to get acquainted with the definition of «class of solutions» and «minimal solution» in the class of solutions to equation  $x^2 - Dy^2 = n$  from the first section (before Problem 1.11).

**Definition.** Suppose equation  $x^2 - Dy^2 = n$  has a single class of solutions. We say that a number  $\alpha = u + v\sqrt{D} > 0$  generates the fundamental solution to  $x^2 - Dy^2 = n$  if  $(u, v)$  is the minimal solution in this class.

**Problem 2.1.** Prove that if equation  $x^2 - Dy^2 = -1$  has a solution then it has a single class of solutions. Prove that if  $\alpha = u + v\sqrt{D}$  generates the fundamental solution to  $x^2 - Dy^2 = -1$  then the fundamental solution to  $x^2 - Dy^2 = 1$  is given by  $\beta = \alpha^2$ .

**Solution.** Consider some class of solutions to equation  $x^2 - Dy^2 = -1$  with minimal solution  $(u, v)$ . By definition,

$$1 < \alpha = u + v\sqrt{D} \leq \beta.$$

Notice that  $\alpha^2 = (u + v\sqrt{D})^2 = u^2 + Dv^2 + 2uv\sqrt{D}$  generates a solution  $(u^2 + Dv^2, 2uv)$  to Pell's equation  $x^2 - Dy^2 = 1$  because

$$\begin{aligned} (u^2 + Dv^2)^2 - D(2uv)^2 &= (u^2 + Dv^2 + 2uv\sqrt{D})(u^2 + Dv^2 - 2uv\sqrt{D}) = \\ &= (u + v\sqrt{D})^2(u - v\sqrt{D})^2 = (u^2 - Dv^2)^2 = (-1)^2 = 1. \end{aligned}$$

It means that  $\alpha^2 = \beta^l$  for some integer  $l$ . From the inequalities  $1 < \alpha \leq \beta$  it follows that  $l = 1$  or  $2$ . If  $l = 2$  then  $\alpha = \beta$  which is impossible because  $\alpha$  and  $\beta$  generate fundamental solutions to different equations. Thus  $l = 1$  and  $\alpha^2 = \beta$ . It means that equation  $x^2 - Dy^2 = -1$  has a single class of solutions and  $\alpha$  generates the fundamental solution to it. ■

**Problem 2.2.** Let  $(u, v)$  be the fundamental solution to Pell's equation  $x^2 - Dy^2 = 1$ . Prove that equation  $x^2 - Dy^2 = -1$  has a solution if and only if  $u \equiv -1 \pmod{2D}$ .

**Solution.** By Problem 2.1, if  $a + b\sqrt{D}$  is the fundamental solution to  $x^2 - Dy^2 = -1$  then  $u + v\sqrt{D} = (a + b\sqrt{D})^2$ . Hence

$$u = a^2 + Db^2 = 2Db^2 - 1 \equiv -1 \pmod{2D}.$$

Conversely, if  $u = 2Dk - 1$  then  $u^2 = 4D^2k^2 - 4Dk + 1 = Dv^2 + 1$ . Hence  $4Dk^2 - 4k = v^2$ . Therefore  $v$  is even,  $v = 2z$ , and  $k(Dk - 1) = z^2$ . Since  $k$  and  $Dk - 1$  are relatively prime, both are perfect squares,  $k = b^2$  and  $Dk - 1 = a^2$  which gives  $a^2 - Db^2 = -1$ . ■

**Problem 2.3.** a) Consider coprime positive integers  $m, n > 1$  such that  $mn$  is not a perfect square and equation  $mx^2 - ny^2 = 1$  has a solution. Let  $(u, v)$  be the minimal positive solution to this equation. Prove that the fundamental solution to  $x^2 - mny^2 = 1$  is given by  $\gamma = \alpha^2$ , where  $\alpha = u\sqrt{m} + v\sqrt{n}$ .

b) For any integer  $a \geq 2$ , describe all the integer solutions to  $ax^2 - (a - 1)y^2 = 1$ .

**Solution.** a) Notice that  $\alpha^2 = (u\sqrt{m} + v\sqrt{n})^2 = u^2m + v^2n + 2uv\sqrt{mn}$  generates a solution  $(u^2m + v^2n, 2uv)$  to Pell's equation  $x^2 - mny^2 = 1$  because

$$\begin{aligned} (u^2m + v^2n)^2 - mn(2uv)^2 &= (u^2m + v^2n + 2uv\sqrt{mn})(u^2m + v^2n - 2uv\sqrt{mn}) = \\ &= (u\sqrt{m} + v\sqrt{n})^2(u\sqrt{m} - v\sqrt{n})^2 = (mu^2 - nv^2)^2 = 1. \end{aligned}$$

It means that  $\alpha^2 = \gamma^l$  for some integer  $l$ .

If  $l$  is even then  $\alpha = \gamma^{l/2} = p + q\sqrt{mn}$  for some integers  $p, q$  which is impossible because  $m, n > 1$ .

If  $l$  is odd and  $l > 1$  then  $\beta = \alpha(\gamma^{(1-l)/2})$  also generates a solution to equation  $mx^2 - ny^2 = 1$  and  $1 < \beta < \alpha$  which contradicts minimality of  $u, v$ . This means that  $l = 1$  and  $\gamma = \alpha^2$ .

b) Equation  $ax^2 - (a-1)y^2 = 1$  has the minimal solution  $(1, 1)$  which is generated by  $\alpha = \sqrt{a} + \sqrt{a-1}$ . By a),  $\gamma = \alpha^2$  generates the fundamental solution to Pell's equation  $x^2 - a(a-1)y^2 = 1$ . Let  $(u, v)$  be a solution to equation  $ax^2 - (a-1)y^2 = 1$ , and let  $\beta = u\sqrt{a} + v\sqrt{a-1}$ . Proceeding in the same way as in the proof of a), we see that

$$\beta^2 = (u\sqrt{m} + v\sqrt{n})^2 = u^2m + v^2n + 2uv\sqrt{mn}$$

generates a solution  $(u^2m + v^2n, 2uv)$  to Pell's equation  $x^2 - a(a-1)y^2 = 1$ . Therefore  $\beta^2 = \gamma^l$  with an odd  $l$ . It follows that  $\beta = \alpha^l$  and

$$u\sqrt{a} + v\sqrt{a-1} = (\sqrt{a} + \sqrt{a-1})^l$$

for an odd  $l$ . ■

**Problem 2.4.** Suppose that the fundamental solution to  $x^2 - Dy^2 = -4$  is  $2\alpha = a + b\sqrt{D}$ , where  $a$  and  $b$  are odd integers. Find the fundamental solutions to equations

$$x^2 - Dy^2 = 4, \quad x^2 - Dy^2 = -1, \quad x^2 - Dy^2 = 1.$$

**Solution (by V. Patrushev).** Notice that

$$a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

and

$$D \equiv b^2D \equiv a^2 + 4 \equiv 5 \pmod{8}.$$

Since  $2\alpha = a + b\sqrt{D} > 1$ , we have  $0 < b\sqrt{D} - a < 4$ . Therefore  $a \geq -1$  and  $b \geq 1$ . If  $a = -1$  then  $b = 1$ ,  $D = 5$ , and  $2\alpha = \sqrt{5} - 1$ . It is easy to check that the fundamental solutions to given equations are given by

$$3 + \sqrt{5} = 2\alpha^{-2}, \quad 2 + \sqrt{5} = \alpha^{-3}, \quad 9 + 4\sqrt{5} = \alpha^{-6}.$$

Suppose further  $D > 5$ , then  $a, b \geq 1$  and  $\alpha > 1$ . One may check by direct computation that numbers  $2\alpha^2, \alpha^3, \alpha^6$  are solutions to equations

$$x^2 - Dy^2 = 4, \quad x^2 - Dy^2 = -1, \quad x^2 - Dy^2 = 1$$

respectively. Suppose  $\beta$  generates the fundamental solution to equation  $x^2 - Dy^2 = -1$ , then  $\alpha^3 = \beta^k$  for some odd positive  $k$ . Since  $\alpha \neq \beta$ , we have  $k \neq 3$ . Suppose  $k \geq 5$ . Then there is an odd  $l$  such that  $k/3 < l < 2k/3$ . It follows that

$$\alpha = \beta^{k/3} < \beta^l < \alpha^2 = \beta^{2k/3}.$$

Notice that

$$1 < \gamma = \frac{2\alpha^2}{\beta^l} < 2\alpha$$

and  $\gamma$  generates a solution to equation  $x^2 - Dy^2 = -4$  which is impossible because  $2\alpha$  generates the fundamental solution to this equation.

Hence  $k = 1$  and the number  $\alpha^3$  generates the fundamental solution to equation  $x^2 - Dy^2 = -1$ . Furthermore by Problem 2.1 the number  $\alpha^6$  generates the fundamental solution to Pell's equation  $x^2 - Dy^2 = 1$ .

Suppose now that  $2\delta = p + q\sqrt{D}$  generates the fundamental solution to equation  $x^2 - Dy^2 = 4$ . Let us prove that  $\delta = \alpha^2$ . If it is false then  $\delta < \alpha^2$ .

If  $p$  is even then, as  $D$  is squarefree,  $q$  is even too. It means that  $\delta$  generates a solution to Pell's equation  $x^2 - Dy^2 = 1$  which is impossible because  $\delta < \alpha^6$ .

If  $p$  is odd then  $q$  is odd too. Hence  $p^2 \equiv q^2 \equiv 1 \pmod{8}$ . Notice that the number

$$\delta^3 = \frac{(p + q\sqrt{D})^3}{8} = \frac{p(p^2 + 3q^2D)}{8} + \frac{q(3p^2 + q^2D)}{8}$$

generates a solution to Pell's equation  $x^2 - Dy^2 = 1$  as  $p^2 + 3q^2D$  and  $3p^2 + q^2D$  are divisible by 8. It follows that  $\delta^3 \geq \alpha^6$  which contradicts to the inequality  $\delta < \alpha^2$ . Hence  $\delta = \alpha^2$  and the number  $2\alpha^2$  generates the fundamental solution to equation  $x^2 - Dy^2 = 4$ . ■

**Problem 2.5.** Prove that the following equations have no solutions in positive integers:

a)  $x^4 - 8z^4 = 1$ ;   b)  $x^2 - 2y^4 = 1$ .

**Solution.** a) Let us rewrite the equation as  $(x-1)(x+1)(x^2+1) = 8z^4$ . It is clear that  $x > 1$  and  $x$  is odd, so  $x = 2y + 1$  for some positive integer  $y$ . Then  $8y(y+1)(2y^2+2y+1) = 8z^4$  or  $y(y+1)(2y^2+2y+1) = z^4$ . As  $y, y+1, 2y^2+2y+1$  are pairwise coprime, numbers  $y$  and  $y+1$  should be both perfect 4-th powers, but it is impossible for positive integer  $y$ .

b) Since  $x^2 = 2y^4 + 1$ , we have  $x$  is odd and  $x = 2z + 1$  for some positive integer  $z$ . Then  $2z(z+1) = y^4$ , so  $y = 2t$  for some positive integer  $t$ , and  $z(z+1) = 8t^4$ . The numbers  $z$  and  $z+1$  are coprime and have different parity. If  $z$  is odd then  $z = b^4, z+1 = 8c^4$ , so  $8c^4 = c^4 + 1$  but it is impossible modulo 4. If  $z$  is even then  $z = 8b^4, z+1 = c^4$  and  $c^4 - 8b^4 = 1$ . It is impossible by a). ■

It is convenient for some problems provided below to use the method of *infinite descent*: Let  $P$  be a property such that integers may or may not possess. If an assumption that a positive integer  $n_0$  has property  $P$  leads to the existence of a smaller positive integer  $n_1 < n_0$  that also satisfies  $P$  then no positive integer has that property. This is so because the reasoning that led from  $n_0$  to  $n_1$ , if applied to the latter will produce  $n_2 < n_1$  that has property  $P$  too. Since the process could be repeated thus leading to an infinitely decreasing sequence of positive integers - which is impossible - the assumption that  $P$  is satisfied by a positive integer implies a contradiction and, hence, is false.

**Problem 2.6.** Prove that the following equations have no solutions in positive integers:

- a)  $x^4 + y^4 = z^2$ ;    б)  $x^4 - 2y^2 = 1$ ;    в)  $x^4 + y^2 = z^4$ ;  
 г)  $x^4 - 2y^2 = -1$ , except  $(x, y) = (1, 1)$ .

**Solution.** а) If a prime  $p$  divides  $x$  and  $y$  then  $p^4$  divides  $z^2$ , so  $p^2$  divides  $z$ . But then  $(x', y', z') = (x/p, y/p, z/p^2)$  is a positive solution with  $z' < z$ , so we can make a step of descent.

Suppose  $x, y$  are coprime. So  $(x^2, y^2, z)$  is a fundamental Pythagorean triplet, and there exist coprime positive integers  $m, n$ , not both odd, with  $\{x^2, y^2\} = \{m^2 - n^2, 2mn\}$  and  $z = m^2 + n^2$ . Without loss of generality  $x^2 = m^2 - n^2$  and  $y^2 = 2mn$ . Note that  $x$  is odd and  $y$  is even.

Now  $x^2 + n^2 = m^2$ . A prime divisor of both  $x$  and  $n$  must divide  $m$ , but  $\gcd(m, n) = 1$ . So  $x, n$  are coprime and  $(x, n, m)$  is a fundamental Pythagorean triplet. This means that there are coprime positive integers  $a, b$  with  $\{a^2 - b^2, 2ab\} = \{x, n\}$  and  $a^2 + b^2 = m$ . Since  $x$  is odd, we have  $x = a^2 - b^2$  and  $n = 2ab$ .

Now  $y^2 = 2mn = 2(a^2 + b^2)(2ab) = 4(a^2 + b^2)ab$ . But  $\gcd(a, b) = 1$ , so the members of  $\{a, b, a^2 + b^2\}$  are pairwise coprime and their product  $(y/2)^2$  is a square. Therefore each of  $a, b, a^2 + b^2$  is a square and there are positive integers  $d, e, f$  with  $a = d^2, b = e^2, a^2 + b^2 = f^2$ . Hence

$$f^2 = a^2 + b^2 = d^4 + e^4.$$

But

$$f^2 = a^2 + b^2 = m < m^2 + n^2 = z,$$

so  $f \leq f^2 < z$ . Again we are able to make a step of descent. It follows that equation  $x^4 + y^4 = z^2$  has no solutions in positive integers.

б) This equation can be rewritten as  $x^4 + y^4 = (y^2 + 1)^2$ , so it has no positive integer solutions because equation  $x^4 + y^4 = z^2$  has no positive integer solutions.

в) Similarly to а) we suppose that  $x, y$  are coprime. Thus, there exist two coprime positive integers  $a, b$  with different parity, such that

$$\begin{cases} z^2 = a^2 + b^2 \\ x^2 = a^2 - b^2 \\ y = 2ab \end{cases} \text{ or } \begin{cases} z^2 = a^2 + b^2 \\ x^2 = 2ab \\ y = a^2 - b^2. \end{cases}$$

The first case implies

$$(xz)^2 = a^4 - b^4$$

which let us make a step of descent since  $a = \sqrt{z^2 - b^2} < z$ . In the second case there exist two coprime positive integers  $\alpha, \beta$  such that  $a = 2\alpha^2, b = \beta^2$  and  $z^2 = 4\alpha^4 + \beta^4$ . Clearly  $z$  must be odd and there exist two coprime positive integers  $m, n$  such that

$$\begin{cases} z = m^2 + n^2 \\ \beta^2 = m^2 - n^2 \\ 2\alpha^2 = 2mn. \end{cases}$$

Again, there exist positive integers  $\gamma, \delta$  such that  $m = \gamma^2, n = \delta^2$  which let us make a step of descent since

$$\beta^2 = m^2 - n^2 = \gamma^4 - \delta^4$$

and  $\gamma < \alpha < 2\alpha^2 = a < z$ .

d) Square the equation  $2y^2 = x^4 + 1$ :

$$4y^4 = (x^4 + 1)^2 = x^8 + 2x^4 + 1.$$

Rearranging and dividing by 2 gives

$$y^4 = \left(\frac{x^2 - 1}{2}\right)^2 + x^4.$$

By b),  $x = 1$ . Therefore  $(x, y) = (1, 1)$  is the only possible solution to equation  $x^4 - 2y^2 = -1$  in positive integers. ■

**Problem 2.7.** Find all the solutions to the following equations in positive integers:

a)  $x^2 = 8t^4 - 8t^2 + 1$ ;    b)  $x^2 = 2t^4 + 4t^2 + 1$ .

**Solution.** a) Rewrite this equation as  $8t^4 = (4t^2 - 1)^2 - x^2 = (4t^2 - 1 - x)(4t^2 - 1 + x)$ . As  $8t^4, 4t^2 - 1$  are coprime, the greatest common divisor of  $4t^2 - 1 - x$  and  $4t^2 - 1 + x$  is equal to 2. Then there exist coprime positive  $a, b$  such that  $t = ab$  and

$$\{4t^2 - 1 - n, 4t^2 - 1 + n\} = \{4a^4, 2b^4\}.$$

It means that

$$4(ab)^2 - 1 = 4t^2 - 1 = 2a^4 + b^4 \implies b^4 - 2(a^2 - b^2)^2 = 1.$$

By Problem 2.6.b this is possible only if  $a = b = 1$ , so  $(x, t) = (1, 1)$  is the only positive integer solution to given equation.

b) Similarly,

$$2t^4 = (2t^2 + 1)^2 - x^2 = (2t^2 + 1 - x)(2t^2 + 1 + x)$$

and

$$\gcd(2t^2 + 1 - x, 2t^2 + 1 + x) = 2.$$

Then there exist positive integers  $a, b$  such that  $t = 2ab$  and

$$\{2t^2 + 1 - n, 2t^2 + 1 + n\} = \{16a^4, 2b^4\}.$$

It means that

$$2(2ab)^2 + 1 = 2t^2 + 1 = 8a^4 + b^4 \implies b^4 - 2(2a^2 - b^2)^2 = -1.$$

By Problem 2.6.d it follows that  $a = b = 1$ , so  $(x, t) = (7, 2)$  is the only positive integer solution to given equation. ■

Consider the equation  $x^4 - 6y^2 = 1$ . The minimal solution to Pell's equation  $x^2 - 6y^2 = 1$  is  $(5, 2)$ , so all the solutions  $(u_k, v_k)$  are described by

$$u_k + v_k\sqrt{6} = (5 + 2\sqrt{6})^k.$$

Particularly,

$$u_k = \frac{1}{2} \left( (5 + 2\sqrt{6})^k + (5 - 2\sqrt{6})^k \right).$$

Note that if equation  $x^4 - 6y^2 = 1$  has a positive integer solution then  $x^2 = u_k$  for some positive integer  $k$ .

**Problem 2.8.**

- Prove that  $k$  is even.
- Express  $u_{2l}$  as a polynomial in  $u_l$ .
- Prove that  $k$  is not divisible by 4.
- Prove that  $u_{2l+1} - 1$  is a square of an integer.
- Find all the solutions to equation  $x^4 - 6y^2 = 1$  in positive integers.

**Solution.** a)  $u_k \equiv -1 \pmod{3}$  for odd  $k$ , so  $u_k$  never is a perfect square.

b)  $u_{2l} = 2u_l^2 - 1$ .

c) If  $k = 4l$  for some positive integer  $l$  then by b)

$$u_{4l} = 2u_{2l}^2 - 1 = 2(2u_l^2 - 1)^2 - 1 = 8u_l^4 - 8u_l^2 + 1.$$

By Problem 2.7.a it follows that  $u_l = 1$ , this is impossible for positive  $l$ .

d) Note that  $5 + 2\sqrt{6} = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{6})^2$ . Hence

$$\begin{aligned} u_{2l+1} &= \frac{1}{2} \left( (5 + 2\sqrt{6})^{2l+1} + (5 - 2\sqrt{6})^{2l+1} \right) = \frac{1}{2^{2l+2}} \left( (2 + \sqrt{6})^{2l+1} + (2 - \sqrt{6})^{2l+1} \right)^2 + 1 = \\ &= \left( \frac{(2 + \sqrt{6})^{2l+1} + (2 - \sqrt{6})^{2l+1}}{2^{l+1}} \right)^2 + 1. \end{aligned}$$

e) It remains to consider the case  $k = 4l + 2$ . By d) we know that  $u_{2l+1} = c^2 + 1$  for some positive integer  $c$ . Furthermore  $x^2 = u_{4l+2} = 2(c^2 + 1)^2 - 1 = 2c^4 + 4c^2 + 1$ . It follows from Problem 2.7.b that  $x = 7$ . Hence  $(x, y) = (7, 20)$  is the only positive integer solution to equation  $x^4 - 6y^2 = 1$ . ■

**Problem 2.9.** a) Prove that if equation  $x^2 - Dy^2 = 2$  has a solution then it has a single class of solutions. Also, if  $\alpha = u + v\sqrt{D}$  generates the fundamental solution to  $x^2 - Dy^2 = 2$  then the fundamental solution to  $x^2 - Dy^2 = 1$  is given by  $\beta = \alpha^2/2$ .

b) Prove that equation  $x^2 + 1 = 2(t^2 - 1)^2$  has no solutions in positive integers.

c) Prove that if equation  $x^2 - Dy^2 = 2$  has an integer solution then equation  $x^4 - Dy^2 = 1$  has no solutions in positive integers.

**Solution.** a) Consider some class of solutions to equation  $x^2 - Dy^2 = 2$  with minimal solution  $(u, v)$ . By definition,

$$1 < \alpha = u + v\sqrt{D} \leq \beta,$$

where  $\beta$  generates the fundamental solution to  $x^2 - Dy^2 = 1$ . Since

$$\alpha^2/2 = u^2 - 1 + uv\sqrt{D},$$

we have that  $(u^2 - 1, uv)$  is another solution to Pell's equation  $x^2 - Dy^2 = 1$ . It means that  $\alpha^2/2 = \beta^l$  for some integer  $l$ . From the inequalities  $1 < \alpha^2/2 \leq \beta^2/2 < \beta^2$  it follows that  $l = 1$ .

b) Since the left side of equation is not divisible by 4, we obtain that  $t$  is even. Then

$$t^2 - 1 \equiv 3 \pmod{4}$$

and  $x^2 + 1$  has a prime divisor  $p \equiv 3 \pmod{4}$  which is impossible.

c) The equation  $x^4 - 2y^2 = 1$  has no positive integer solutions by Problem 2.6.b, so we assume that  $D > 2$ .

If  $\alpha = u + v\sqrt{D}$  generates the fundamental solution to  $x^2 - Dy^2 = 2$  then the fundamental solution to the corresponding Pell's equation is given by  $\beta = \alpha^2/2$  in view of a). Thus if  $x^4 - Dy^2 = 1$  then

$$x^2 = \frac{\beta^n + \beta'^n}{2} = \frac{\alpha^{2n} + \alpha'^{2n}}{2^{n+1}},$$

i.e.,

$$x^2 + 1 = \frac{\alpha^{2n} + \alpha'^{2n} + 2(\alpha\alpha')^n}{2^{n+1}} = \frac{(\alpha^n + \alpha'^n)^2}{2^{n+1}}.$$

Now  $\alpha^n + \alpha'^n$  is an integer, and so either  $n$  is odd yielding  $x^2 + 1 = s^2$  whence  $x = 0$  which is impossible or  $n = 2m$  is even whence

$$x^2 + 1 = 2s^2,$$

where

$$s = \frac{\alpha^{2m} + \alpha'^{2m}}{2^{m+1}}.$$

Then

$$s + 1 = \frac{(\alpha^m + \alpha'^m)^2}{2^{m+1}} = t^2 \quad \text{or} \quad 2t^2.$$

If  $s = t^2 - 1$  then

$$x^2 + 1 = 2(t^2 - 1)^2$$

which is impossible by b).

Finally, if  $s = 2t^2 - 1$  then

$$x^2 = 8t^4 - 8t^2 + 1$$

and  $x = 1$  by Problem 2.7.a. It follows that  $y = 0$  which is a contradiction. ■

**Problem 2.10.** Prove that if equation  $x^2 - Dy^2 = -2$  has a solution then equation  $x^4 - Dy^2 = 1$  has no solutions in positive integers with the sole exception  $D = 6$ .

**Solution.** As in the previous problem, we may suppose that  $D > 2$ . In the same way as in Problem 2.9.a we obtain that equation  $x^2 - Dy^2 = -2$  has a single class of solutions and if  $\alpha = u + v\sqrt{D}$  is the fundamental solution then the fundamental solution to the corresponding Pell's equation is  $\beta = \alpha^2/2$ . In this case of course  $\alpha\alpha' = -2$ . If  $x^4 - Dy^2 = 1$  then

$$x^2 = \frac{\beta^n + \beta'^n}{2} = \frac{\alpha^{2n} + \alpha'^{2n}}{2^{n+1}},$$

i.e.,

$$x^2 + (-1)^n = \frac{(\alpha^n + \alpha'^n)^2}{2^{n+1}}.$$

Thus if  $n$  is odd we obtain  $x^2 - 1 = s^2$  whence  $x = 1$ , i.e.  $y = 0$ , while if  $n = 2m$  is even then

$$x^2 + 1 = 2s^2,$$

where

$$s = \frac{\alpha^{2m} + \alpha'^{2m}}{2^{m+1}}.$$

Thus

$$s + (-1)^m = \frac{(\alpha^m + \alpha'^m)^2}{2^{m+1}}.$$

Now if  $m$  is even then  $s + 1 = 2t^2$  and

$$x^2 = 8t^4 - 8t^2 + 1$$

which is impossible by Problem 2.7.a.

If  $m$  is odd then  $s - 1 = t^2$  and so

$$x^2 = 2(t^2 + 1)^2 - 1 = 2t^4 + 4t^2 + 1.$$

By Problem 2.7.b this is possible only if  $(x, t) = (7, 2)$ . Hence

$$Dy^2 = x^4 - 1 = 2400 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

Since equation  $x^2 - Dy^2 = -2$  has a solution, we get  $D$  is not divisible by 4 and 5. Thus we must have  $D = 6$  and there is the only solution  $(x, y) = (7, 20)$  by Problem 2.8. ■

### 3 On the diophantine $m$ -tuples and the equation $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$

**Definition.** Let  $n$  be an integer. A set of  $m$  different positive integers is called a *Diophantine  $m$ -tuple with the property  $D(n)$*  or simply  *$D(n)$  -  $m$ -tuple* if the product of any two of them increased by  $n$  is a perfect square.

**Problem 3.1.** Prove that there does not exist a  $D(n)$ -quadruple for any  $n \equiv 2 \pmod{4}$ .

**Solution.** Suppose that  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  is a  $D(n)$ -quadruple with  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Then

$$x_i x_j + n \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{4}$$

so that

$$x_i x_j \equiv 2 \text{ or } 3 \pmod{4}.$$

Hence at most one of the  $x_i$  can be even; without loss of generality, we may assume that  $x_1, x_2$  and  $x_3$  are odd. This implies that

$$x_i x_j \equiv 3 \pmod{4} \quad \text{for } 1 \leq i \neq j \leq 3$$

Thus  $x_1, x_2, x_3$  have different odd residues modulo 4 which is impossible. ■

For the case  $n = 1$ , the problem of existence of such  $m$ -tuples was first studied by Diophantus, and he found a set of four positive rationals with the above property:  $\{\frac{1}{16}, \frac{33}{16}, \frac{17}{4}, \frac{105}{16}\}$ . However the first  $D(1)$ -quadruple, the set  $\{1, 3, 8, 120\}$ , was found by Fermat. The folklore conjecture is that there does not exist a  $D(1)$ -quintuple. Recently, Dujella proved that there is no  $D(1)$ -sextuple and there are only finitely many  $D(1)$ -quintuples.

**Problem 3.2.** Prove that every  $D(1)$ -couple can be extended to a  $D(1)$ -triple.

**Solution.** Let  $\{a, b\}$  be a  $D(1)$ -couple. The number

$$c = a + b + 2\sqrt{ab + 1}$$

extends this  $D(1)$ -couple to  $D(1)$ -triple. ■

**Problem 3.3.** Show that every  $D(1)$ -triple  $\{a, b, c\}$  can be extended to a  $D(1)$ -quadruple:

a) Prove that quadratic equation

$$t^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2(ta + tb + tc + ab + bc + ca) - 4abct - 4 = 0$$

has at least one positive integer solution  $t_0$ .

b) Prove that  $\{a, b, c, t_0\}$  is a  $D(1)$ -quadruple.

**Solution.** a) Direct computation shows that

$$t_0 = a + b + c + 2abc + 2\sqrt{(ab + 1)(bc + 1)(ca + 1)}$$

is a positive integer solution to the given equation.

b) It remains to check that numbers  $at_0 + 1, bt_0 + 1, ct_0 + 1$  are perfect squares. This is true because of the following identities:

$$(a + b - c - t_0)^2 = 4(ab + 1)(ct_0 + 1),$$

$$(c + a - b - t_0)^2 = 4(ca + 1)(bt_0 + 1),$$

$$(b + c - a - t_0)^2 = 4(bc + 1)(at_0 + 1).$$
■

In 1969, Baker and Davenport proved that the Fermat set cannot be extended to a  $D(1)$ -quintuple.

By definition, if  $\{a, b, c\}$  is a  $D(1)$ -triple then there exist positive integers  $u, v, w$  such that

$$ab + 1 = w^2, \quad bc + 1 = u^2, \quad ca + 1 = v^2.$$

Since

$$bv^2 - au^2 = b(ac + 1) - a(bc + 1) = b - a,$$

the equation  $bx^2 - ay^2 = b - a$  has a positive integer solution  $(v, u)$ . Notice that Pell's equation  $x^2 - aby^2 = 1$  has a solution  $(w, 1)$ . Let  $\alpha = v\sqrt{b} + u\sqrt{a}$  and  $\beta = w + \sqrt{ab}$ .

**Problem 3.4.** a) Prove that for any integer  $l$  the number  $\alpha\beta^l$  is of the form

$$v_l\sqrt{b} + u_l\sqrt{a},$$

where  $(v_l, u_l)$  is a solution to equation

$$bx^2 - ay^2 = b - a.$$

b) Prove that if  $c \geq |b - a|$  then  $u_{-1}, v_{-1} > 0$ .

c) Prove that there exists a nonnegative integer  $c'$  such that

$$bc' + 1 = u_{-1}^2, \quad ac' + 1 = v_{-1}^2.$$

d) Prove that every  $D(1)$ -couple  $\{a_1, a_2\}$  has exactly one extension to  $D(1)$ -triple  $\{a_1, a_2, a_3\}$  such that

$$\max\{a_1, a_2\} < a_3 < 4a_1a_2.$$

**Solution.** a) By direct computation we see that  $\alpha\beta^l$  is of the form  $v_l\sqrt{b} + u_l\sqrt{a}$  with integer  $u_l, v_l$ . It follows that

$$(v_l\sqrt{b} - u_l\sqrt{a})(w - \sqrt{ab}) = v_l\sqrt{b} - u_l\sqrt{a}.$$

Multiplying both identities, we get

$$bv_l^2 - au_l^2 = (bv^2 - au^2)(w^2 - ab)^l = b - a.$$

b) Notice that

$$v_{-1} = vw - au, \quad u_{-1} = uw - bv$$

so it is enough to prove the following inequalities:

$$vw > au, \quad uw > bv.$$

Squaring the first inequality we get

$$(ac + 1)(ac + 1) > a^2(bc + 1)$$

or

$$a^2bc + ac + ab + 1 > a^2bc + a^2$$

which is true when  $c + b \geq a$ . Similarly we get that the second inequality is true when  $c + a \geq b$ .

c) The number

$$c' = 2abc + a + b + c - 2wuv$$

satisfies the above conditions. Also

$$c' \geq \frac{u_{-1}^2 - 1}{b} \geq 0.$$

d) Let  $a = \min\{a_1, a_2\}$ ,  $b = \max\{a_1, a_2\}$ ,  $c = a_3$  then  $a < b < c$ . By b) we see that  $u_{-1}$  and  $v_{-1}$  are positive and

$$v = wv_{-1} + au_{-1}, \quad u = wu_{-1} + bv_{-1}.$$

Hence

$$\begin{aligned} ac + 1 &= v^2 = (wv_{-1} + au_{-1})^2 = \\ &= (ab + 1)(ac' + 1) + a^2(bc' + 1) + 2awv_{-1}u_{-1} = \\ &= ((ab + 1)a + a^2b)c' + a^2 + ab + 1 + 2wav_{-1}u_{-1}. \end{aligned}$$

Subtracting 1 and dividing by  $a$ , we get

$$c = (2ab + 1)c' + a + b + 2wv_{-1}u_{-1}.$$

If  $c' = 0$  then  $v_{-1} = u_{-1} = 1$  and  $b < c = a + b + 2w < 4ab$ . If  $c' \geq 1$  then

$$c > 2ab + 1 + a + b + 2\sqrt{ab}\sqrt{ac'}\sqrt{bc'} > 4ab.$$

■

**Problem 3.5.** a) Prove that there are infinitely many arithmetic progressions of length 3 that are also  $D(1)$ -triples.

b) Prove that there are no arithmetic progressions of length 4 that are also  $D(1)$ -quadruples.

**Solution.** a) Let  $(l, k)$  be a solution to Pell's equation  $x^2 - 3y^2 = 1$ . Let

$$a = 2k - l, b = 2k, c = 2k + l$$

(one can check that  $a, b, c > 0$ ), then

$$ab + 1 = 4k^2 - 2kl + 1 = k^2 + l^2 - 1 - 2kl + 1 = (k - l)^2,$$

$$bc + 1 = 4k^2 + 2kl + 1 = k^2 + l^2 - 1 + 2kl + 1 = (k + l)^2,$$

$$ca + 1 = 4k^2 - l^2 + 1 = k^2.$$

Hence the set  $\{a, b, c\}$  satisfies the conditions of the problem.

b) Let  $\{a, b, c, d\}$  be such a  $D(1)$ -quadruple with  $a < b < c < d$ .

**Solution I:** By Problem 3.3.d this is possible only if  $d > 4ab$ . But

$$d = a + 3(b - a) < 3b < 4ab,$$

that's a contradiction.

**Solution II (by M. Demidkin, G. Kostitsyn):** Numbers  $(db + 1)(dc + 1)$  and  $d^2(bc + 1)$  are perfect squares with the difference that is equal to  $d(b + c - d) + 1 = ad + 1$ . On the other hand, this difference should be at least  $2d\sqrt{bc + 1} + 1$ . But

$$2d\sqrt{bc + 1} + 1 > 2da + 1 > ad + 1$$

which is a contradiction. ■

Consider the case  $n = -1$ . It is easy to find some  $D(-1)$ -triples, for example,  $\{1, 2, 5\}$ ,  $\{1, 5, 10\}$ ,  $\{1, 26, 37\}$ .

**Problem 3.6.** a) Prove that every  $D(-1)$ -couple  $\{a_1, a_2\}$  can be extended to a  $D(-1)$ -triple  $\{a_1, a_2, a_3\}$ .

b) Prove that there exists exactly one extension such that

$$\max\{a_1, a_2\} < a_3 \leq 3a_1a_2.$$

**Solution.** Let  $a = \min\{a_1, a_2\}$ ,  $b = \max\{a_1, a_2\}$ ,  $c = a_3$ , then  $a < b < c$  and

$$ab - 1 = w^2, \quad bc - 1 = u^2, \quad ca - 1 = v^2$$

for some positive integers  $u, v, w$ . Since

$$bv^2 - au^2 = b(ac + 1) - a(bc + 1) = a - b,$$

we obtain that equation  $bx^2 - ay^2 = a - b$  has a positive integer solution  $(v, u)$ . Notice that equation  $x^2 - aby^2 = -1$  has a solution  $(w, 1)$ . Let  $\alpha = v\sqrt{b} + u\sqrt{a}$  and  $\beta = w + \sqrt{ab}$ .

In the same way as in Problem 3.4 one can show that for any integer  $l$  the number  $\alpha\beta^l$  is of the form  $v_l\sqrt{b} + u_l\sqrt{a}$ , where  $(v_l, u_l)$  is a solution to equation

$$bx^2 - ay^2 = (-1)^l(a - b).$$

Similarly it is easy to check that  $u_{-1}, v_{-1} > 0$  and

$$ac' + 1 = v_{-1}^2, \quad bc' + 1 = u_{-1}^2$$

for a nonnegative integer  $c'$  such that

$$c = 2abc' + a + b - c' + 2u_{-1}v_{-1}w.$$

If  $c' = 0$  then  $b < c = a + b + 2\sqrt{ab} - 1 \leq 3ab$  otherwise  $c' \geq 1$  and  $c > 3ab$ . ■

It is known that some particular  $D(-1)$ -triples, for example,  $\{1, 2, 5\}$ , cannot be extended to  $D(-1)$ -quadruples. Moreover, Dujella and Brown proved that some infinite families of  $D(-1)$ -triples cannot be extended to quadruples.

**Problem 3.7.** Prove that  $D(-1)$ -triple  $\{n^2 + 1, (n + 1)^2 + 1, (2n + 1)^2 + 4\}$  cannot be extended to a  $D(-1)$ -quadruple if

- a)  $n \equiv 1 \pmod{4}$ ;
- b)  $n \equiv 2 \pmod{4}$ ;
- c)  $n = 4$ .

**Solution.** Suppose  $\{n^2 + 1, (n + 1)^2 + 1, (2n + 1)^2 + 4, d\}$  is a  $D(-1)$ -quadruple. Then

$$(n^2 + 1)d - 1 = x^2,$$

$$((n + 1)^2 + 1)d - 1 = y^2,$$

$$((2n + 1)^2 + 4)d - 1 = z^2.$$

After eliminating  $d$  we get the following system of equations:

$$(n^2 + 1)y^2 - ((n + 1)^2 + 1)x^2 = 2n + 1, \quad (1)$$

$$(n^2 + 1)z^2 - ((2n + 1)^2 + 4)x^2 = 3n^2 + 4n + 4, \quad (2)$$

$$((n + 1)^2 + 1)z^2 - ((2n + 1)^2 + 4)y^2 = 3n^2 + 2n + 3. \quad (3)$$

a) If  $n = 4k + 1$  then (1) becomes

$$2y^2 - x^2 \equiv -1 \pmod{4}$$

so that  $x$  is odd. Further,

$$n^2 + 1 \equiv 8k + 2 \pmod{16},$$

$$(n + 1)^2 + 1 \equiv 5 \pmod{16},$$

$$(2n + 1)^2 + 4 \equiv 13 \pmod{16}.$$

Hence (3) becomes

$$5z^2 - 13y^2 \equiv 8 \pmod{16}$$

so that  $y$  and  $z$  are both odd. Then (2) yields

$$(8k + 2)z^2 - 13x^2 \equiv 8k + 11 \pmod{16},$$

$$2 + 3x^2 \equiv 11 \pmod{16},$$

$$x^2 \equiv 3 \pmod{16}$$

which is a contradiction.

b) Next, suppose that  $n = 2k$  with odd  $k$ . Then (1) becomes

$$y^2 - 2x^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

so that  $y$  is odd and  $x$  is even. Now (3) becomes

$$2z^2 - 5y^2 \equiv 3 \pmod{8}$$

so that  $z$  is even. Putting  $z = 2u$  and  $x = 2v$  in (2) leads to the equation

$$(4k^2 + 1)u^2 - (16k^2 + 8k + 5)v^2 = 3k^2 + 2k + 1.$$

As  $k$  is odd this leads to the congruence

$$u^2 - 5v^2 \equiv \pm 2 \pmod{8}$$

which is impossible.

c) If  $n = 4$  then equations (1) and (2) become

$$17y^2 - 26x^2 = 9,$$

$$z^2 - 5x^2 = 4.$$

The first equation gives that

$$y^2 - 2x^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

which implies that  $x$  is even. Hence  $z$  is also even; putting  $z = 2u$  and  $x = 2v$  yields

$$17y^2 - 104v^2 = 9,$$

$$u^2 - 5v^2 = 1.$$

All the solutions to Pell's equation  $x^2 - 5y^2 = 1$  are given by

$$u_n + v_n\sqrt{5} = (9 + 4\sqrt{5})^n$$

with integer  $n$ . The following recurrence is true:

$$v_0 = 0, \quad v_1 = 4, \quad v_{n+1} = 18v_n - v_{n-1}$$

so it follows that  $v \equiv 0, 4$  or  $13 \pmod{17}$ .

Now look at equation  $17y^2 - 104v^2 = 9$  modulo 17:

$$-2v^2 \equiv 9 \pmod{17}$$

or

$$v^2 \equiv 4 \pmod{17}$$

which is impossible when  $v \equiv 0, 4$  or  $13 \pmod{17}$ . ■

Let  $\{a, b, c\}$  be a  $D(-1)$ -triple and let  $r, s, t$  be nonnegative integers defined by

$$ab - 1 = r^2, \quad ac - 1 = s^2, \quad bc - 1 = t^2.$$

Assume that there exists a positive integer  $d$  that extends this  $D(-1)$ -triple to a  $D(-1)$ -quadruple. We have

$$ad - 1 = x'^2, \quad bd - 1 = y'^2, \quad cd - 1 = z'^2$$

with nonnegative integers  $x', y', z'$ .

Eliminating  $d$  from previous equalities, we obtain that  $x', y', z'$  form a solution to the following system of equations:

$$\begin{aligned} ay^2 - bx^2 &= b - a, \\ az^2 - cx^2 &= c - a, \\ bz^2 - cy^2 &= c - b. \end{aligned}$$

**Problem 3.8.** Suppose  $2 \leq a < b < c < d$ .

a) Prove that there exist integer solutions  $(z_0, x_0)$  and  $(z_1, y_1)$  to equations

$$az^2 - cx^2 = c - a \quad \text{and} \quad bz^2 - cy^2 = c - b$$

respectively such that

$$\begin{aligned} |x_0| &< s, \quad 0 < z_0 < c, \\ |y_1| &< t, \quad 0 < z_1 < c, \\ z'\sqrt{a} + x'\sqrt{c} &= (z_0\sqrt{a} + x_0\sqrt{c})(s + \sqrt{ac})^{2m}, \\ z'\sqrt{b} + y_1\sqrt{c} &= (z_1\sqrt{b} + y_1\sqrt{c})(t + \sqrt{bc})^{2n} \end{aligned}$$

with nonnegative integers  $m, n$ .

b) Prove that  $z_0 = z_1$ .

c) Prove that there exists  $d_0 < c$  such that  $\{a, b, c, d_0\}$  is also a  $D(-1)$ -quadruple.

**Solution.** a) It is enough to prove the statement only for equation  $az^2 - cx^2 = c - a$ . Notice that  $\alpha = s + \sqrt{ac}$  generates the fundamental solution to equation  $x^2 - acy^2 = -1$  and by Problem 2.1  $\alpha^2$  generates the fundamental solution to Pell's equation  $x^2 - acy^2 = 1$ . Thus for any integer  $l$  numbers  $(z'\sqrt{a} + x'\sqrt{c})\alpha^{2l}$  generate solutions to equation  $az^2 - cx^2 = c - a$  and there is a solution  $(z_0, x_0)$  such that

$$\alpha^{-1}\sqrt{c-a} < \gamma = z_0\sqrt{a} + x_0\sqrt{c} \leq \alpha\sqrt{c-a}.$$

Since

$$\gamma' = z_0\sqrt{a} - x_0\sqrt{c} = \frac{c-a}{z_0\sqrt{a} + x_0\sqrt{c}},$$

we have

$$\alpha^{-1}\sqrt{c-a} < \gamma' = z_0\sqrt{a} - x_0\sqrt{c} \leq \alpha\sqrt{c-a}.$$

It follows that

$$2|x_0|\sqrt{c} = |\gamma - \gamma'| \leq |\alpha - \alpha^{-1}| = 2s\sqrt{c-a}.$$

Therefore  $|x_0| \leq s\sqrt{c-a}/\sqrt{c} < s$ . Also

$$2\alpha^{-1} < \gamma - \gamma' = 2z_0\sqrt{a},$$

it means that  $z_0 > 0$ . Suppose  $z_0 \geq c$ . Since  $|x_0| < s$ , we have

$$c - a = az_0^2 - cx_0^2 \geq ac^2 - cs^2 = c(ac - s^2) = c > c - a$$

which is a contradiction.

b) It is easy to see that

$$z' \equiv (-1)^m z_0 \equiv (-1)^n z_1 \pmod{2c}.$$

It follows from a) that  $0 < z_0 + z_1 < 2c$  so  $z_0 = z_1$  is the only possible option.

c) Since  $z_0^2 \equiv z'^2 \equiv -1 \pmod{c}$ , there is a positive integer

$$d_0 = \frac{z_0^2 + 1}{c} < c.$$

It is easy to check that  $ad_0 - 1 = x_0^2$  and  $bd_0 - 1 = y_1^2$  which shows that  $ad_0 - 1, bd_0 - 1, cd_0 - 1$  are perfect squares. ■

Suppose there exists at least one  $D(-1)$ -quadruple that does not contain number 1. It follows from the previous problem and from the method of infinite descent that there is another  $D(-1)$ -quadruple that contains 1.

Existence of  $D(-1)$ -quadruples is closely related to the number of classes of solutions to Diophantine equation  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$ .

**Problem 3.9.** a) Prove that for any integer  $k > 1$  every class of solutions to the equation  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$  contains exactly one solution  $x_0, y_0$  with  $|y_0| < k$ .

b) Prove that this equation has at least three different classes of solutions.

**Solution.** a) Note that  $\alpha = 2k^2 + 1 + 2k\sqrt{k^2 + 1}$  generates the fundamental solution to Pell's equation  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = 1$  and  $\beta = k + \sqrt{k^2 + 1}$  generates the fundamental solution to equation  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = -1$ . Take any class of solutions to equation  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$  and consider solution  $(x_0, y_0)$  in this class such that

$$k\beta^{-1} < \gamma = x_0 + y_0\sqrt{k^2 + 1} < k\beta.$$

There is exactly one such solution because  $k\beta/(k\beta^{-1}) = \beta^2 = \alpha$  by Problem 2.1. The inequalities are sharp because  $\gamma$  and  $k\beta$  generate solutions to different equations.

Since

$$2|y_0|\sqrt{k^2 + 1} = |\gamma - \gamma'| = |\gamma - k^2\gamma^{-1}| < |k\beta - k\beta^{-1}| = 2k\sqrt{k^2 + 1},$$

we have  $|y_0| < k$ . Similarly we get that  $y_0 > k$  for  $\gamma > k\beta$  and  $y_0 < -k$  for  $\gamma < k\beta^{-1}$ . This means that every class of solutions to the equation  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$  contains exactly one solution  $(x_0, y_0)$  with  $|y_0| < k$ .

b) Solutions  $(k, 0)$ ,  $(k^2 - k + 1, k - 1)$  (belongs to the integer  $-1$ ) and  $(k^2 - k + 1, 1 - k)$  (belongs to the integer  $1$ ) represent different classes by a). ■

**Definition.** We call a solution  $(x_0, y_0)$  to  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$  with  $k > 1$  an *exceptional solution* if  $x_0 > 0$  and  $0 < y_0 < k - 1$ .

**Problem 3.10.** Suppose  $\{1, a, b, c\}$  is a  $D(-1)$ -quadruple. Prove that there exists  $k > 1$  such that equation  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$  has at least two exceptional solutions (or, equivalently, more than 5 classes of solutions).

**Solution.** Without loss of generality,  $a < b < c$  and

$$a = i^2 + 1, b = j^2 + 1, c = k^2 + 1$$

for some positive integers  $i, j, k$ .

From the solution to Problem 3.6 it follows that either  $c = a + b + 2\sqrt{ab - 1}$  or  $c > 3ab$ . Hence  $j < k - 1$ .

Now consider the equation  $(y^2 + 1)(k^2 + 1) = x^2 + 1$ , i.e.,

$$x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2.$$

This equation has at least two solutions with  $0 < y < k - 1$ , namely,  $y = i$  and  $y = j$ . ■

**Problem 3.11.** Prove that equation

$$x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$$

- a) has no exceptional solutions if  $k^2 + 1$  is a prime;
- b) has no exceptional solutions if  $k = p^i$  for any odd prime  $p$  and positive integer  $i$ ;
- c) has at most one exceptional solution if  $k = pq$  for any distinct odd primes  $p, q$ ;
- d) has at most one exceptional solution if  $k = p^i q^j$  for any distinct odd primes  $p, q$  and positive integers  $i, j$ .

**Solution.**

a) Notice that  $x^2 - k^2 = (x - k)(x + k)$  is divisible by prime  $k^2 + 1$ . This means that either  $x - k$  or  $x + k$  is divisible by  $k^2 + 1$ . Hence  $x \geq (k^2 + 1) - k$  and

$$y^2 = \frac{x^2 - k^2}{k^2 + 1} \geq \frac{(k^2 + 1)(k^2 - 2k + 1)}{k^2 + 1} = (k - 1)^2.$$

By definition, it follows that this equation has no exceptional solutions.

b) Let  $(x_0, y_0)$  be a solution to equation  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$ . Denote  $\gcd(x_0, y_0)$  by  $n$ , then  $k = ln$  for some positive integer  $l$ . Then equation

$$x^2 - (l^2 n^2 + 1)y^2 = l^2$$

has a primitive solution  $(x_0/n, y_0/n)$ .

If  $l \leq n$  then  $l^2 < \sqrt{l^2 n^2 + 1}$  and by Problem 1.6 all the solutions to equation

$$x^2 - (l^2 n^2 + 1)y^2 = l^2$$

should be of the form  $(p_m, q_m)$ , where  $p_m/q_m$  is a convergent to  $\sqrt{l^2 n^2 + 1}$ .

Since  $\sqrt{l^2 n^2 + 1} = [ln, \overline{2ln}]$ , we get by Problem 1.10 that a sequence  $p_m^2 - (l^2 n^2 + 1)q_m^2$  has a period 1 or 2. It is easy to check that  $p_m - (l^2 n^2 + 1)q_m^2 = \pm 1$ . Hence  $l = 1$  and  $n = k$ . As  $y_0$  is divisible by  $k$ , the solution  $(x_0, y_0)$  could not be exceptional.

If  $l > n$  then  $l = p^j$  for some  $j > i/2$ . A congruence  $s^2 \equiv p^{2i} + 1 \pmod{p^{2j}}$  has the only solutions  $s \equiv \pm 1 \pmod{p^{2j}}$ . Hence all the solutions to equation

$$x^2 - (l^2 n^2 + 1)y^2 = l^2$$

belong to either  $-1$  or  $1$ . By Problem 1.14 equation  $t^2 - (l^2 n^2 + 1)u^2 = m$  with

$$m = \frac{s^2 - (l^2 n^2 + 1)}{l^2} = -n^2$$

has a solution  $(t_0, u_0)$  that belongs to  $\pm 1$ . As  $|-n^2| < \sqrt{l^2 n^2 + 1}$ , by Problem 1.6 all the solutions to equation

$$x^2 - (l^2 n^2 + 1)y^2 = -n^2$$

should be of the form  $(p_m, q_m)$ . Since  $p_m - (l^2 n^2 + 1)q_m^2 = \pm 1$ , we have  $n = 1$ . Hence for  $l > n$  all the solutions to equation  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$  are primitive and belong to  $\pm 1$ . The solution  $(k^2 - k + 1, -k + 1)$  belongs to  $1$  and the solution  $(k^2 - k + 1, k - 1)$  belongs to  $-1$ . By Problem 1.13 any solution to equation  $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$  is in the same class with one of solutions  $(k^2 - k + 1, \pm(k - 1))$ . It follows from Problem 3.9 that this equation has no exceptional solutions.

c) **(by V. Patrushev):** Let  $(x_0, y_0)$  be an exceptional solution to equation

$$x^2 - (p^2 q^2 + 1)y^2 = p^2 q^2.$$

Denote

$$d_- = \gcd(x_0 - y_0, p^2 q^2), d_+ = \gcd(x_0 + y_0, p^2 q^2).$$

Since  $(x_0 - y_0)(x_0 + y_0) = x_0^2 - y_0^2$  is divisible by  $p^2 q^2$ , we have  $d_- d_+ = p^2 q^2$ . Consider three cases:

1)  $d_- = p^2, d_+ = q^2$ . Then  $x_0, y_0$  are coprime and solution  $(x_0, y_0)$  is primitive and it belongs to the integer  $k$  such that

$$k \equiv 1 \pmod{p^2}, \quad k \equiv -1 \pmod{q^2}.$$

By CRT there exists exactly one such integer  $k$  modulo  $p^2 q^2$ .

2)  $d_- = q^2, d_+ = p^2$ . Similarly  $(x_0, y_0)$  is a primitive solution and it belongs to the integer  $l$  such that

$$l \equiv -1 \pmod{q^2}, \quad l \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

By CRT there exists exactly one such integer  $l$  modulo  $p^2q^2$ , moreover,  $l \equiv -k \pmod{p^2q^2}$ .

3) Either  $d_-$  or  $d_+$  is divisible by  $pq$ . Let  $r = x_0 - pqy_0$ , then  $r \equiv \pm y_0 \pmod{pq}$ . It is easy to see that  $0 < r < pq$ . Since  $y_0 < pq$ , we have either  $r = y_0$  or  $r = pr - y_0$ .

If  $r = y_0$  then  $2pqy_0^2 = p^2q^2$  which is impossible modulo 2. If  $r = pq - y_0$  then  $y_0 = pq - 1$  which could not be a second coordinate of an exceptional solution.

It follows that there exist at most two exceptional solutions:  $(x_1, y_1)$  that belongs to the integer  $k$  and  $(x_2, y_2)$  that belongs to the integer  $-k$ . Since  $(x_2, -y_2)$  belongs to the integer  $k$  and  $|y_1|, |-y_2| < pq$ , by Problem 3.9.a we have  $y_1 = -y_2$  which contradicts inequalities  $y_1, y_2 > 0$ . Hence there exists at most one exceptional solution.

d) See [11].

■

**Problem 3.12.** Is it possible to find an integer  $k > 1$  such that equation

$$x^2 - (k^2 + 1)y^2 = k^2$$

has at least two exceptional solutions?

**Solution.** It is an open question known as Dujella's unicity conjecture.

■

### Acknowledgements.

Authors would like to thank B. Frenkin and M. Surkov for their helpful comments, which improved the exposition.

### References.

1. J. E. Shockley, Introduction to Number Theory, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York-Toronto, Ont.-London (1967).
2. M. Waldschmidt, Continued fractions, Ecole de recherche CIMPA-Oujda, Théorie des Nombres et ses Applications, 18 - 29 mai 2015: Oujda (Maroc).
3. JHE Cohn, The Diophantine equation  $x^4 - Dy^2 = 1$ , Quart. J. Math. Oxford (2) 26 pp. 279-281 (1975).
4. JHE Cohn, Some quartic Diophantine equations, Pacific J. Math. 26(2): 233-243 (1968).
5. A. Dujella, On the size of Diophantine m-tuples. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 132, pp. 23-33 (2002).
6. E. Brown, Sets in which  $xy + k$  is always a square. Math. Comp. 45, pp. 613-620 (1985).

7. B. W. Jones, A second variation on a problem of Diophantus and Davenport, *Fibonacci Quart.* 16 pp. 155-165(1978).
8. A. Dujella, C. Fuchs, Complete solution of a problem of Diophantus and Euler. *J. London Math. Soc.* 71, pp. 33–52 (2005).
9. K. Matthews, J. Robertson, J. White, On a diophantine equation of Andrej Dujella, *Math. Glasnik*, 48, number 2, pp. 265-289 (2013).
10. A. Srinivasan,  $D(-1)$  quadruples and products of two primes, *Glas. Mat. Ser. III* 50, pp. 261–268 (2015).
11. M. Le, A. Srinivasan, Note on Dujella’s unicity conjecture, *Glas. Mat.* Vol. 58(78), pp. 59 – 65 (2023).
12. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1186131p5767378>
13. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h577945p3408321>
14. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1849278p12466367>
15. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h2183565p16353210>
16. <https://artofproblemsolving.com/community/c146h150369p849188>
17. <https://artofproblemsolving.com/community/c146t383f146h150370>
18. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h553573p3216004>

# Линейные характеристики графов

М. Дидин, А. Суворов, И. Богданов, О. Бурсиан, К. Кохась

## Часть I

У нас есть граф. Следующие три числа (но не только их) будем называть его линейными характеристиками:

- (a) число вершин —  $n$ ,
- (b) число рёбер —  $m$ ,
- (c) число независимости —  $\alpha$  (максимальный размер независимого множества).

Интересно, а какие значения они могут принимать? Можно ли по тройке  $(n, m, \alpha)$  понять, существует такой граф или нет? Это довольно известная задача, но у неё есть интересные вариации, в том числе, недавние результаты и даже открытые проблемы.

Одно из направлений — задать этот вопрос для некоторого семейства графов, например, для планарных, или дистанционных, или графов, не содержащих определённых подграфов. Эти задачи имеют много общего, например, с задачами о хроматическом числе плоскости, проблемой Борсука и даже с упаковкой сфер. Но лучше всего вы, скорее всего, знакомы с расстановкой не бьющих друг друга фигур на клетчатой доске.

Пусть имеется клетчатая доска и некоторая фигура  $X$ . Будем считать клетки доски вершинами графа, а всевозможные ходы фигуры  $X$  — рёбрами графа. Построенный граф назовём *шахматным*. Например, для доски  $2 \times 2$  и короля это полный граф  $K_4$ , а для доски  $2 \times 2$  и ладьи — цикл на 4 вершинах  $C_4$ .

## Концепция лишнего ребра

Ребро называется *лишним*, если его удаление не изменяет число независимости графа. Граф, не содержащий лишних рёбер, называется  $\alpha$ -*критическим*, а любой  $\alpha$ -критический граф, полученный из произвольного графа  $G$  с числом независимости  $\alpha$  последовательным выбрасыванием лишних рёбер, называется *ядром* графа  $G$ . Связный  $\alpha$ -критический граф назовём *турановским*.

**Задача 1** Найдите какое-нибудь ядро шахматного графа для:

- 1) прямоугольной доски  $m \times n$  и ладьи,
- 2) доски  $3 \times 3$  и ферзя,
- 3) цилиндрической доски  $m \times n$  (первый столбец склеен с последним) и короля.
- 4) Фигура гепард из произвольной клетки  $x$  бьёт все клетки квадрата  $19 \times 19$  с центральной клеткой  $x$  за исключением клеток, находящихся с  $x$  в одном столбце или одной строке. Какое наибольшее количество гепардов, не бьющих друг друга, можно расставить на доске  $1000 \times 1000$ ? Найдите какое-нибудь ядро шахматного графа для гепарда и этой доски. (Региональный этап, 2018, 10.8.)
- 5) Нарисуйте на клетчатой плоскости какую-нибудь связную относительно хода короля доску, на которую невозможно поставить 4 короля, не бьющих друг друга, и которую нельзя покрыть тремя клетчатými квадратами  $2 \times 2$ . Найдите ядро соответствующего шахматного графа.

- 6) Вершины графа  $G$  — это точки плоскости  $(x, y)$ ,  $0 < x, y < 100$ , где одно из чисел  $x, y$  целое, а второе — полуцелое. (Вершину графа можно интерпретировать как лежащую на клетчатой плоскости доминошку.) Ребро соединяет две вершины, если расстояние между вершинами равно 1 (при этом полуцелые координаты должны совпадать, а целые координаты отличаются на 1), либо если расстояние между вершинами равно  $\sqrt{2}/2$ . Найдите число независимости и какое-нибудь ядро этого графа.

Как показывают графы из задачи 1, стирание лишних рёбер в естественных конструкциях часто приводит к несвязному ядру, состоящему из нескольких клик. Поэтому возникает естественный вопрос: при каких  $n$  и  $\alpha$  вообще существует хотя бы один турановский граф?

### Задача 2

- 1) Для любого натурального  $\alpha$  постройте турановский граф с  $n = 2\alpha + 1$ .
- 2\*) Для турановского графа докажите неравенство  $n \geq 2\alpha + 1$ .

*Указание.* Возможно, вы не сможете сразу решить пункт 2. Но к нему можно вернуться в части II, используя более мощную технику.

Чтобы строить другие примеры, полезно уметь добавлять в граф вершины. *Клонирование вершины  $x$*  — добавление новой вершины, соединённой с  $x$  и всеми её соседями.

### Задача 3

- 1) Докажите, что клонирование вершины не меняет число независимости  $\alpha$ .
- 2) Докажите, что клонирование вершины  $\alpha$ -критического графа оставляет его  $\alpha$ -критическим.
- 3) Приведите пример турановского графа с заданными  $\alpha$  и  $n \geq 2\alpha + 1$ .

Итак, у нас есть способ корректно добавлять вершины в граф, отслеживая их степень.

**Задача 4** Какое наибольшее число вершин может иметь граф с числом независимости  $\alpha$ , в котором

- 1) степень любой вершины не превышает  $k$ ?
- 2\*) степень любой вершины не превышает  $k$ , и который не содержит клик на  $k + 1$  вершине?

### Задача 5 (Теорема Турана)

Пусть  $k = \lfloor \frac{n}{\alpha} \rfloor$ . Обозначим

$$T(n, \alpha) = k \cdot n - \frac{k(k+1)}{2} \alpha.$$

- 1) Докажите, что наименьшее число рёбер у графа на  $n$  вершинах с числом независимости  $\alpha$  равно  $T(n, \alpha)$ .
- 2\*) Докажите, что наименьшее число рёбер у СВЯЗНОГО графа на  $n$  вершинах с числом независимости  $\alpha$  равно  $T(n, \alpha) + \alpha - 1$
- 3\*) Докажите, что наименьшее число рёбер у графа на  $n$  вершинах с числом независимости  $\alpha$  и  $p$  компонентами связности равно  $T(n, \alpha) + \alpha - p$
- 4\*) Докажите, что наименьшее число рёбер у ТУРАНОВСКОГО графа на  $n$  вершинах с числом независимости  $\alpha$  равно  $T(n + \alpha - 1, \alpha) - \alpha + 1$ .

*Подсказки.* Попробуйте в пункте 1) доказать оценку по индукции, сравнивая число рёбер в двух графах и на каждом шаге выбрасывая из них по вершине наибольшей степени. Чтобы решить пункты 2) и 3), полезно выбрасывать лишние рёбра, если они есть. Искать лишние рёбра поможет задача 6. Пункт 4) является довольно трудным, к его решению ведут идеи, развитые во второй и третьей части проекта.

Казалось бы, чем отличаются пункты 2) и 4)? Ситуация, когда запрет лишних рёбер усиливает какую-либо нижнюю оценку на число рёбер, поначалу кажется парадоксальной.

**Задача 6** Докажите, что в турановском графе (при  $n > 2$ ) нет висячих вершин, и точек сочленения (вершин, удаление которых увеличивает число компонент связности).

**Задача 7** Докажите какую-нибудь оценку снизу для числа рёбер графа, верную для задачи 5.4 и неверную для задачи 5.2. Можете ограничиться случаем  $\alpha = 2$ ,  $n = 7$ .

## Новая характеристика и правильные преобразования графов

Мы знаем, что ядро графа  $G$  не определено однозначно. Максимальное возможное число компонент связности ядра будем называть *ядерным числом* графа  $G$  и обозначать  $p(G)$  или просто  $p$ . Обновим список линейных характеристик.

- (a) число вершин —  $n$ ,
- (b) число рёбер —  $m$ ,
- (c) число независимости —  $\alpha$ ,
- (d) ядерное число —  $p$ .

Удивительно, но добавление четвертой характеристики помогает делать нетривиальные оценки на первые три!

Чтобы доказывать оценки снизу на число рёбер в  $\alpha$ -критическом графе (в первую очередь, в задаче 5.4) и строить примеры таких графов, нам потребуются различные преобразования графов — добавления/удаления вершин, сохраняющие нужные нам характеристики. Добавлять вершины мы уже умеем. Теперь попробуем научиться корректно удалять вершины из графа. Вершина  $x$   $\alpha$ -критического графа  $G$  называется *стабильной*, если ядерное число графа  $G \setminus x$  равно ядерному числу  $G$ . (Через  $G \setminus x$  обозначен граф, получающийся из графа  $G$  удалением вершины  $x$  и всех выходящих из нее рёбер.)

**Задача 8** Пусть в турановском графе  $G$  с  $\alpha > 1$  все вершины стабильны.

- 1) Пусть граф  $G$  не является регулярным. Как построить турановский граф с такими же  $n$ ,  $\alpha$  и меньшим числом рёбер?
- 2) Пусть граф  $G$  регулярный. Как построить нерегулярный турановский граф с такими же  $n$ ,  $\alpha$  и не большим числом рёбер?

Итак, решение задачи 8 позволяет преобразовывать графы со стабильными вершинами, сохраняя  $n$ ,  $\alpha$ ,  $p$  и не увеличивая число рёбер  $m$ . Но что делать, если мы хотим удалить вершину графа, а она оказалась нестабильной? Назовём преобразование  $\alpha$ -критического графа *правильным*, если при некотором  $t \in \mathbb{Z}$  выполняются следующие четыре условия.

- 1) Число независимости сохраняется.
- 2) Граф остаётся  $\alpha$ -критическим.
- 3) Число вершин  $n$  и число компонент связности  $p$  становятся равны соответственно  $n + t$  и  $p + t$ .
- 4) Число рёбер у преобразованного графа не больше  $m + t$ .

Например, преобразования из предыдущей задачи являются правильными с  $t = 0$ .

**Задача 9** Придумайте правильное преобразование с  $t = -1$ , работающее для графа, состоящего из двух компонент связности  $G_1$  и  $G_2$ , каждая из которых содержит не менее трех вершин, где

- 1)  $G_1$  и  $G_2$  — клики (например, постройте два разных турановских графа с  $n = 8$ ,  $\alpha = 2$ ,  $m = 15$  из клики на 4 вершинах и клики на 5 вершинах);
- 2)  $G_1$  — турановский граф,  $G_2$  — клика;
- 3)  $G_1$  и  $G_2$  — турановские графы.

Правильное преобразование с  $t > 0$  мы назовём *расколом*.

**Теорема 1** (Теорема о расколе). Пусть  $x$  — нестабильная вершина турановского графа  $G$ . Тогда к каждой компоненте связности ядра графа  $G \setminus x$  можно добавить по вершине, чтобы получилось правильное преобразование графа  $G$ .

**Теорема 2** (Основная теорема). Пусть  $G$  — произвольный  $\alpha$ -критический граф. Тогда существует правильное преобразование, переводящее  $G$  в дизъюнктное объединение клик.

**Определение.** Ассоциированный граф Турана для  $\alpha$ -критического графа  $G$  на  $n$  вершинах с числом независимости  $\alpha$  и  $p$  компонентами связности — дизъюнктное объединение  $\alpha$  клик, содержащих в совокупности ровно  $n + \alpha - p$  вершин и по размеру отличающихся не более чем на 1.

Заметим, что основная теорема позволяет перевести любой турановский граф в его ассоциированный граф Турана правильным преобразованием. С другой стороны, многократно применённое преобразование из задачи 9 — это правильное преобразование, переводящее дизъюнктное объединение клик, содержащих не менее 3 вершин каждая, в турановский граф. Назовём турановский граф, полученный таким способом, *тривиальным*. Итак, оценка на число рёбер

$$m \geq T(n + \alpha - p, \alpha) - \alpha + p,$$

вытекающая из основной теоремы, точная. Например, она обращается в равенство на тривиальных графах, полученных серией преобразований из задачи 9 из дизъюнктного объединения клик, отличающихся по размеру не более чем на 1. Назовём  $\alpha$ -критический граф с минимальным возможным при заданных  $n, p, \alpha$  числом рёбер  $m = T(n + \alpha - p, \alpha) - \alpha + p$  *бесплатным*.

### Задача 10

- 1) Нарисуйте 4 различных тривиальных турановских графа с  $n = 10, \alpha = 3, m = 16$ .
- 2\*) В каком случае серию преобразований из задачи 9.3 можно проводить в произвольном порядке?
- 3\*\*) Придумайте удобную классификацию тривиальных турановских графов с заданными  $n$  и  $\alpha$ .

**Задача 11** Выведите основную теорему из теоремы о расколе.

**Теорема 3** (О бесплатных графах). Пусть  $G$  — нетривиальный бесплатный граф. Тогда его ассоциированный граф Турана содержит компоненту связности из 3 вершин.

**Задача 12** На плоскости отметили  $4\alpha$  точек, после чего соединили отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно 1 см. Оказалось, что среди любых  $\alpha + 1$  точек обязательно есть две, соединённые отрезком.

- 1) Докажите, что всего проведено не менее  $7\alpha$  отрезков. (А. М. Райгородский, ММО 2010, 10.6)
- 2) Улучшите оценку до  $7.5\alpha$  отрезков.
- 3) Пусть количество точек равно  $n$ , а число отрезков равно  $m$ . Докажите оценку  $m \geq 5n - 12\alpha$ .

*Указание.* Можно использовать без доказательства основную теорему и теорему о расколе. Если оценка из п.3 показалась слишком простой, и возникло желание её существенно усилить (например, до  $9\alpha$ ), будут выданы дополнительные задачи на эту тему. В них поможет теорема о бесплатных графах. На этом часть I закончена. Далее вы можете приступить на выбор либо к части II, либо к части III. Обе части приводят к доказательству теоремы о расколе, но содержат и другие результаты. Часть III также ведёт к доказательству теоремы о бесплатных графах.

## Часть II

### Лемма Холла и лишние рёбра

**Лемма (Холл).** *Есть  $n$  юношей и несколько девушек. Известно, что каких бы  $k$  юношей ни выбрать, суммарное количество знакомых им девушек не меньше  $k$ . Тогда все юноши могут выбрать по невесте из числа своих знакомых.*

Лемма Холла имеет несколько доказательств, мы выберем то, которое поможет в решении дальнейших задач проекта. Назовем множество из  $k$  юношей *критическим*, если совокупное количество знакомых им девушек в точности равно  $k$ .

#### Задача 13

- 1) Предположим, что критическое множество юношей не содержит меньших критических подмножеств. Докажите, что никакая свадьба юноши из этого множества не испортит для остальных условие леммы Холла.
- 2) Докажите, что если удалить критическое множество юношей вместе с их знакомыми девушками, то для оставшихся будет выполнено условие леммы Холла.
- 3) Докажите лемму Холла индукцией по числу вершин графа.

Пусть  $U$  — произвольное независимое множество в графе  $G$ . Обозначим через  $N(U)$  множество соседей  $U$  (вершин, соседних хоть с какой-нибудь вершиной из  $U$ ). Объединение  $\bar{U} = U \cup N(U)$  будем называть *окрестностью* множества  $U$ .

**Задача 14** Число независимости турановского графа  $G$  на  $n$  вершинах равно  $\alpha$ ,  $U$  — произвольное независимое множество вершин. Докажите, что:

- 1) если  $n > 1$ , то окрестность  $\bar{U}$  содержит независимое множество мощности  $|U|$ , не совпадающее с  $U$ ,
- 2) если  $|U| < \alpha$ , то окрестность  $\bar{U}$  содержит независимое множество, содержащее не менее  $|U| + 1$  вершины,
- 3) если  $n > 1$ , то множество соседей множества  $U$  содержит не менее  $|U|$  вершин,
- 4) если  $n > 1$ , то множество  $U$  входит в некоторое паросочетание,
- 5) если  $n > 2$ , то множество соседей  $U$  содержит не менее  $|U| + 1$  вершины.
- 6) если  $n > 2$  и  $x$  — произвольная вершина в множестве соседей  $N(U)$ , то множество  $U$  входит в некоторое паросочетание, не содержащее  $x$ .
- 7\*) если  $|N(U)| = |U| + 1$ , то все вершины множества  $U$  имеют степень 2.
- 8\*) если граф  $G$  не содержит вершин степени менее 3, то любое ребро можно дополнить до паросочетания размера  $\alpha + 1$ .

*Указание.* Как учесть, что рёбра, выходящие из  $U$ , не являются лишними? А рёбра, выходящие из  $\bar{U}$  наружу?

**Задача 15** Дан турановский граф  $G$  на  $n$  вершинах.

- 1) Пусть  $n > 2$ . Докажите неравенство  $n \geq 2\alpha + 1$ .
- 2) Пусть выполнено равенство  $n = 2\alpha + 1$ . Докажите, что  $G$  — нечётный цикл.
- 3\*) Пусть выполнено равенство  $n = 2\alpha + 2$ , причём  $\alpha \geq 2$ . Докажите, что в графе  $G$  есть вершина степени 2.
- 4\*) В некоторой группе из 12 человек среди каждых девяти найдутся пять попарно знакомых. Докажите, что в этой группе найдутся шесть попарно знакомых. (В.Л.Дольников, 1999, заключительный этап, 10.8). Как обобщается эта задача?

**Задача 16**

- 1) Пусть турановский граф с  $n > 3$  содержит вершину степени 2. Придумайте правильное преобразование этого графа с  $t = 1$ , в результате которого образуется компонента связности, являющаяся треугольником.
- 2\*) Пусть в турановском графе  $G$  выполнено равенство  $n = 2\alpha + 2$ . Докажите, что граф  $G$  — тривиальный.
- 3\*) Опишите все турановские графы, в которых выполнено равенство  $n = 2\alpha + 2$ .
- 4\*\*) Существует ли нетривиальный турановский граф с  $n = 2\alpha + 3$ ?
- 5\*\*\*) При  $\alpha = 3k + 1, k \geq 1$  имеется серия 3-регулярных нетривиальных турановских графов с  $n = 8k + 4$ . С другой стороны, имеется оценка  $n > 2\alpha + 2$  на число вершин в турановском графе, не содержащем вершин степени 2, при  $\alpha > 1$ . Можете ли вы сократить зазор между оценкой и примером?

Назовём *ключевым числом*  $\kappa(G)$  графа  $G$  минимальную возможную степень вершины, которую можно добавить к  $G$ , сохранив число независимости. Операция клонирования вершины (задача 3) показывает, что если в графе  $G$  есть вершина степени  $d$ , то  $\kappa(G) \leq d + 1$ .

**Задача 17** В этой задаче всюду слово «подграф» означает «индуцированный подграф».

- 1) Пусть  $G_0$  — подграф турановского графа  $G$ . Докажите, что количество рёбер, соединяющих  $G_0$  с остальной частью графа, не меньше  $\kappa(G_0)$ .
- 2\*) Пусть  $k > 1$ , а  $G_1, G_2, \dots, G_k$  — набор непересекающихся подграфов турановского графа  $G$ . Докажите, что количество рёбер, соединяющих  $G_1, G_2, \dots, G_k$  между собой и с остальной частью графа, больше чем

$$\kappa(G_1) - 1 + \kappa(G_2) - 1 + \dots + \kappa(G_k) - 1.$$

- 3\*) Выведите из предыдущего пункта теорему о расколе.
- 4\*) Пусть  $G_0$  — подграф турановского графа  $G$ , такой, что количество рёбер, соединяющих  $G_0$  с остальной частью графа, равно  $\kappa(G_0)$ . Придумайте правильное преобразование графа с  $t = 1$ . Одна из частей может стать гиперграфом (см. часть III).
- 5\*) Пусть  $G_1, G_2, \dots, G_k$  — набор непересекающихся подграфов турановского графа  $G$ , причём граф  $G \setminus (G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k)$  содержит не менее двух вершин. Известно, что количество рёбер, соединяющих  $G_1, G_2, \dots, G_k$  между собой и с остальной частью графа, равно  $1 + \kappa(G_1) - 1 + \kappa(G_2) - 1 + \dots + \kappa(G_k) - 1$ . Придумайте правильное преобразование графа с  $t = 1$ . Одна из частей может стать гиперграфом.
- 6\*) Обобщите результаты предыдущих пунктов на гиперграфы.

## Часть III

### Гиперграфы

Для расширения возможностей правильных преобразований, мы обобщаем понятие графа до гиперграфа, допуская рёбра, содержащие любое непустое множество вершин. Формально говоря, гиперграф — это пара  $(V, E)$ , где  $V$  — произвольное множество (множество вершин),  $E$  — произвольное множество непустых подмножеств  $V$  (множество ребер). Обычный граф становится частным случаем, когда каждое ребро содержит ровно две вершины.

**Определение.** *Степень вершины* в гиперграфе — это количество ребер, содержащих эту вершину. Граф называется *регулярным*, если все его вершины имеют одинаковую степень. *Независимое множество* в гиперграфе — это множество вершин, не содержащее ни одного ребра целиком. *Число независимости*  $\alpha(G)$  — максимальный размер независимого множества. Любое независимое множество из  $\alpha(G)$  вершин называется *максимальным независимым множеством*. Если две вершины  $x$  и  $y$  принадлежат ребру  $A$ , мы говорим, что *из  $x$  можно пройти в  $y$  по ребру  $A$* . Двигаясь по ребрам от одной вершины к другой, мы получаем *путь*. Гиперграф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем или, по другому, если его вершины нельзя разбить на множества (*компоненты связности*) так, что каждое ребро целиком лежит в одном из множеств.

Определения  $\alpha$ -критического графа, турановского графа, правильного преобразования остаются в силе, с учетом изменившегося смысла входящих в них терминов. Правильное преобразование с параметром  $t$  назовем *точным* если количество ребер в преобразованном графе равно  $m + t$  (а не меньше либо равно, как требуется в общем определении).

Оказывается, что теорема о расколе и основная теорема работают и для гиперграфов. Одно из доказательств теоремы о расколе, которое вы можете получить из задачи 16 части II, никак не использует тот факт, что в каждом ребре ровно две вершины и, таким образом, без изменений переносится на гиперграфы. Пошаговое доказательство теоремы о расколе, которое вы можете получить из решения этой части, требует изменения числа вершин в ребре на промежуточных этапах преобразований (например, при правильном преобразовании цикла на 5 вершинах в 2 треугольника), тем самым используя гиперграфы даже в случае, когда их не было в исходной формулировке. Поскольку понятие гиперграфа поначалу непривычно, мы начнём эту часть с нескольких лёгких упражнений.

#### Задача 18

- 1) Пусть одно из рёбер вложено в другое. Докажите, что большее ребро является лишним.
- 2) Докажите, что все *петли* (т. е. одноэлементные ребра) в  $\alpha$ -критическом гиперграфе представляют собой отдельные компоненты связности.
- 3) Докажите, что для любой неизолированной вершины  $\alpha$ -критического гиперграфа найдется максимальное независимое множество, не содержащее эту вершину.

Очевидно, что добавление к графу вершины с петлей (или удаление такой вершины) есть точное преобразование.

#### Задача 19

- 1) Найдите минимальное возможное число рёбер в гиперграфе на  $n$  вершинах с числом независимости  $\alpha$ .
- 2) Найдите максимальное возможное число рёбер в  $\alpha$ -критическом гиперграфе на  $n$  вершинах с числом независимости  $\alpha$ .

## Правильные преобразования гиперграфов

**Определение.** Пусть  $U$  — ребро гиперграфа  $G$ , не являющееся лишним. *Ключом* ребра  $U$  называется максимальное независимое множество в гиперграфе  $G \setminus U$  (так обозначается граф, полученный из  $G$  удалением ребра  $U$ , т. е. это ребро просто «вычеркивается» из списка ребер графа). Операция замены ребра на пересечение всех его ключей называется *расширением ребра*, если она изменяет граф.

Как нетрудно понять, если  $\tilde{U}$  — расширение ребра  $U$ , то  $U \subset \tilde{U}$ .

**Задача 20** В этой задаче мы изучаем, что происходит, если мы расширяем в графе какое-то нелишнее ребро.

- 1) Докажите, что операция расширения ребра сохраняет число независимости.
- 2) Докажите, что операция расширения ребра сохраняет свойство  $\alpha$ -критичности гиперграфа.
- 3) С помощью расширения рёбер превратите произвольный нечётный цикл с клоном одной вершины в 3-регулярный турановский гиперграф.
- 4) Укажите условие, при котором расширение ребра уменьшает число компонент связности  $\alpha$ -критического гиперграфа.
- 5) Пусть  $\alpha$ -критический гиперграф, содержащий не менее 3 вершин, содержит вершину  $x$  степени 1. Придумайте правильное преобразование этого гиперграфа с  $t = 1$ , отличное от добавления одной вершины с петлёй.

**Определение.** Множество вершин  $S$  гиперграфа  $G$  называется *ключевым*, если выполняются следующие два свойства.

- (а)  $S$  пересекается с каждым максимальным независимым множеством.
- (б) Никакое собственное подмножество  $S$  не обладает свойством (а).

*Ключевое число*  $\kappa(G)$  — это наименьший размер ключевого множества в гиперграфе  $G$ .

Заметим, что все вершины любого ключевого множества принадлежат одной компоненте связности гиперграфа.

### Задача 21

- 1) В  $\alpha$ -критический гиперграф добавили новую вершину, соединив её рёбрами из 2 вершин со всеми вершинами некоторого ключевого множества. Докажите, что число независимости не изменилось, и гиперграф остался  $\alpha$ -критическим.
- 2) К турановскому графу  $G$  добавили новую вершину  $x$  и несколько содержащих ее ребер мощности не меньше 2, так что число независимости не изменилось. Докажите, что степень вершины  $x$  не меньше  $\kappa(G)$ .
- 3) Обобщите клонирование вершины на гиперграфы так, чтобы эта операция сохраняла число независимости,  $\alpha$ -критичность и число компонент связности.

**Определение.** Операция замены ребра  $\alpha$ -критического гиперграфа на вложенное в него ребро с удалением возникающих лишних рёбер называется *сжатием ребра*, если она не меняет число компонент связности.

В силу утверждения задачи 18.3 сжатие ребра сохраняет число независимости и поэтому является правильным преобразованием. Теперь мы изучим правильные преобразования, увеличивающие количество нетривиальных компонент связности (компонент, не являющихся изолированной вершиной с петлёй) в  $\alpha$ -критическом гиперграфе.

## Гиперграфы и теорема о расколе

**Определение.** Множество вершин  $U$   $\alpha$ -критического гиперграфа  $G$  называется *нестабильным*, если выполняются следующие два свойства.

- (а) При добавлении ребра  $U$  увеличивается ядерное число  $p(G)$ .
- (б) Если  $|U| = 1$ , то увеличение  $p(G)$  составляет более 1.

Согласно задаче 18.3 при добавлении неустойчивого ребра  $U$  число независимости не меняется.

**Определение.** *Расколом*  $\alpha$ -критического гиперграфа  $G$  называется преобразование, при котором последовательно производятся следующие действия.

- 1) Добавление нового ребра  $U$ .
- 2) Переход к ядру полученного гиперграфа, имеющему больше нетривиальных компонент связности, чем  $G$ .
- 3) Для каждой новой компоненты связности  $C_i$ , не содержащей  $U$ , добавление вершины степени  $\kappa(C_i)$  (ключевое число компоненты) любым способом, сохраняющим число независимости.

**Замечание.** Если множество  $U$  состоит из одной вершины, то в результате обязательно появляется компонента с петлёй на  $U$ . Если такая компонента оказывается единственной новой компонентой, то вершина считается стабильной, а гиперграф может как сохраниться, так и измениться, но мы не будем считать этот случай расколом (см. задачу 8).

**Теорема 4** (Теорема о расколе по ребру). *Раскол является правильным преобразованием гиперграфа.*

**Определение.** Пусть  $V$  — некоторое неустойчивое множество вершин турановского гиперграфа  $G$ . Гиперграф  $G$  будем называть  *$V$ -элементарным гиперграфом*, если каждое ребро, становящееся лишним при добавлении  $V$ , содержит  $V$  и ровно одну дополнительную вершину.

**Задача 22** В турановском гиперграфе  $G$  есть неустойчивое множество  $U$ . Докажите, что серией последовательных расширений и сжатий рёбер можно превратить  $G$  в  $V$ -элементарный гиперграф с некоторым  $V \supseteq U$ .

*Указание.* Сначала попробуйте это сделать для пятиугольника или другого нечётного цикла, начав с множества  $U$  из одной вершины. Для нечётных циклов, содержащих 7 и более вершин, можете получить варианты с разным размером множества  $V$ .

**Задача 23** Пусть турановский гиперграф  $G$  является  $V$ -элементарным. Пусть  $W$  — множество вершин  $x$ , таких, что  $V \cup \{x\}$  — ребро графа  $G$ . Пусть  $G'$  — гиперграф, полученный из  $G$  заменой всех рёбер, содержащих  $V$ , на ребро  $V$ .

- 1) Докажите, что множество  $W$  ключевое в гиперграфе  $G'$ .
- 2) Докажите, что множество  $V$  содержит более одной вершины.
- 3) Докажите, что переход от  $G$  к  $G'$  с добавлением новой вершины, соединённой двухвершинными ребрами со всеми вершинами  $W$ , является правильным преобразованием.
- 4) Завершите доказательство теоремы о расколе.

Наша следующая цель — теорема о бесплатных графах и ее обобщение на гиперграфы.

**Определение.** Мы назовём *сочленением* пару вершин  $x, y$  турановского гиперграфа, разбивающую этот гиперграф на две части  $G_1, G_2$ . То есть, любой путь из  $G_1$  в  $G_2$  по рёбрам гиперграфа проходит через  $x$  или  $y$ .

**Задача 24** Пусть турановский гиперграф  $G$  содержит сочленение  $(x, y)$ .

- 1) Докажите, что в гиперграфе  $G$  нет ребра  $\{x, y\}$ .
- 2) Докажите, что множество  $\{x, y\}$  нестабильное.
- 3) Придумайте правильное преобразование такого гиперграфа с  $t = 1$ .

**Определение.** Мы назовём *трёхсвязным* турановский гиперграф, не содержащий ни одного сочленения.

### Задача 25

- 1) Докажите, что расширение ребра переводит трёхсвязный гиперграф в трёхсвязный.
- 2) Пусть трёхсвязный турановский гиперграф  $G$  является  $V$ -элементарным. Докажите, что одна из частей, полученных после раскола по ребру  $V$ , также трёхсвязная, причём не является кликой.
- 3) Обобщите понятие тривиального турановского графа до тривиального турановского гиперграфа.
- 4) Покажите, что тривиальный турановский гиперграф, отличный от клики, не является трёхсвязным.
- 5) Докажите, что нетривиальный турановский гиперграф можно правильным преобразованием с  $t > 0$  превратить в  $\alpha$ -критический гиперграф, одна из компонент связности которого является трёхсвязным гиперграфом, отличным от клики.

Итак, единственный шаг доказательства теоремы о расколе, который может приводить к потере трёхсвязности, — сжатие ребра. Если гиперграф был бесплатным, на этом шаге количество рёбер не изменилось. Теперь доказательство теоремы о бесплатных гиперграфах, фактически, разбивается на две содержательные части.

### Задача 26

- 1\*) Предположим, что тривиальный гиперграф  $G$  можно превратить в трёхсвязный гиперграф, отличный от клики, с помощью расширения одного из рёбер. Докажите, что ассоциированный граф Турана содержит компоненту связности из 3 вершин.
- 2\*) Пусть  $G$  — регулярный турановский гиперграф, все вершины которого стабильны. Пусть его вершина  $a$  имеет двух независимых соседей  $b$  и  $c$ . Докажите, что удаление  $b$  вместе с возникающими лишними рёбрами и последующее клонирование  $a$  ведёт либо к уменьшению количества рёбер, либо к образованию нетривиального гиперграфа.
- 3) Завершите доказательство теоремы о бесплатных гиперграфах.

## Часть IV

### Примеры и графы с запретом клик

В этом разделе нас интересуют методы построения серийных примеров турановских графов с небольшим числом рёбер и/или без клик на  $k$  вершинах. Для этих целей можно использовать задачу 9.3. Также нам пригодится следующее её обобщение для гиперграфов.

Пусть турановский гиперграф  $G_1$  содержит ребро  $U$ , а турановский гиперграф  $G_2$  содержит вершину  $w$ , не являющуюся единственной. Пусть гиперграф  $G$  состоит из двух компонент связности  $G_1$  и  $G_2$ , будем обозначать это так:  $G = G_1 \sqcup G_2$ . В гиперграфе  $G$  проведем следующие преобразования. Рассмотрим произвольное ребро компоненты  $G_2$ , содержащее вершину  $w$ , и заменим в нём  $w$  на одну или несколько вершин из множества  $U$ . Эту операцию проведем с каждым ребром, содержащим  $w$ , после чего сотрем ребро  $U$  и вершину  $w$ . Пусть в полученном гиперграфе каждая вершина множества  $U$  вошла хотя бы одно из новых рёбер. Назовём такое преобразование *рекомбинацией гиперграфов  $G_1$  и  $G_2$  по ребру  $U$  и вершине  $w$* .

Назовём ребро  $U$  гиперграфа  $G$  *свободным*, если найдётся максимальное независимое множество в  $G$ , не содержащее ни одной вершины  $U$ . Легко видеть, что при  $n > 2$  любое ребро из 2 вершин свободное.

**Задача 27** Пусть  $G = G_1 \sqcup G_2$ , где  $G_1$  и  $G_2$  — турановские гиперграфы, причем  $G_1$  содержит ребро  $U$ , а турановский гиперграф  $G_2$  содержит вершину  $w$ , не являющуюся единственной.

- 1) Докажите, что число независимости гиперграфа, полученного рекомбинацией по ребру  $U$  и вершине  $w$ , равно  $\alpha(G)$ .
- 2) Докажите, что ни одно ребро компоненты  $G_1$  не стало лишним после рекомбинации.
- 3) Предположим, что при рекомбинации в каждом ребре вершина  $w$  заменена на всё множество  $U$ . Докажите, что ни одно ребро компоненты  $G_2$  не стало лишним.
- 4) Предположим, что ребро  $U$  свободное в  $G_1$ . Докажите, что ни одно ребро из  $G_2$  не стало лишним.
- 5) Предположим, что все рёбра в  $G_1$  и в  $G_2$  свободные. Докажите, что после рекомбинации все рёбра в полученном графе свободные.
- 6) Приведите пример рекомбинации двух турановских гиперграфов, при которой каждая вершина ребра  $U$  в гиперграфе  $G_1$  имела степень более 1, но хотя бы одно из рёбер в  $G_2$  всё-таки стало лишним.

### Задача 28

- 1) Постройте пример трёхсвязного 3-регулярного турановского графа с  $n = 12, \alpha = 4$ .
- 2) Для всех натуральных  $k$  постройте примеры трёхсвязных 3-регулярных турановских графов с  $\alpha = 3k + 1, n = 8k + 4$ .
- 3) Постройте примеры трёхсвязных бесплатных турановских графов при  $\alpha \geq 4, n \in [\frac{8\alpha+4}{3}, 3\alpha]$ .
- 4) Для всех  $\alpha \geq 1, n \geq 3\alpha + 1$  постройте примеры трёхсвязных турановских графов, в которых число рёбер на 1 больше минимального возможного при данных  $n, \alpha$ .
- 5\*\*\*) Пусть дано  $\alpha > 2$ . При каких  $n \in [2\alpha + 3, 3\alpha]$  существует бесплатный трёхсвязный турановский граф с данными  $n, \alpha$ ?
- 6\*\*\*) Правда ли что все бесплатные трёхсвязные турановские графы с  $\alpha > 1$  можно получить рекомбинацией трёхсвязных 3-регулярных турановских гиперграфов из задачи 20.3, а также клик на 3 и 4 вершинах?

Итак, попытки усилить основную теорему для всех турановских графов упираются в многопараметрические серии бесплатных графов. Поэтому далее мы будем изучать результаты для отдельных классов турановских графов.

**Задача 29**

- 1) Для  $\alpha = 2, 3, 4$  постройте примеры турановских графов с максимальной степенью вершины 3 и числом вершин  $n = 3\alpha$ . Постройте бесконечную серию бесплатных турановских 3-регулярных графов.
- 2) Для  $\alpha = 2, 3$  постройте примеры турановских графов с максимальной степенью вершины 4 и числом вершин  $n = 4\alpha$ . Постройте бесконечную серию бесплатных турановских 4-регулярных графов.
- 3\*) Для  $\alpha = 2$  постройте примеры турановских графов с максимальной степенью вершины 5 и числом вершин  $n = 10$ . Докажите, что бесплатных турановских 5-регулярных графов при  $\alpha > 1$  не существует.
- 4) Докажите, что при  $k > 2$  и  $\alpha > 1$  других примеров турановских графов с максимальной степенью вершины  $k$  и числом вершин  $n = k\alpha$  нет.
- 5) Докажите, что бесплатных турановских  $k$ -регулярных графов с  $k \geq 6$  не существует.
- 6\*\*\*) Улучшите оценку из основной теоремы на величину порядка  $\alpha$  для турановских графов с максимальной степенью вершины не более  $k$  при каком-нибудь  $k \geq 6$ .

Ещё один важный класс графов с запретами — графы с запретом определённого подграфа. Проще всего изучать графы с запретом клик на  $k$  вершинах. Многие оценки для графов с запретами обобщаются для гиперграфов. В гиперграфе *клика* — это подграф на  $k$  вершинах, любые две из которых входят в ребро на 2 вершинах. Говоря о гиперграфах с запретом клик, мы подразумеваем, что петли тоже запрещены. К сожалению, при  $k = 2$ , т. е. для гиперграфов без петель и рёбер из двух вершин, точная оценка на  $t(n, \alpha)$  неизвестна. А для  $k \geq 3$  мы приводим в задачах ниже сложные (и не очень) оценки для графов и гиперграфов без клик на  $k$  вершинах. Запрет клик возникает как один из многих запретов в задачах про более узкие классы графов, например, в задаче 12 про дистанционные графы. Но все оценки для  $\alpha$ -критических графов из  $p$  компонент связности с запретом определённых подграфов линейные, то есть, имеют вид  $t \geq an - b\alpha - cp$ . Часто удобно рассматривать случай турановского графа ( $p = 1$ ), в силу линейности эквивалентный общему случаю.

**Задача 30** Переформулируйте основную теорему для  $\alpha$ -критического графа с  $p$  компонентами связности как бесконечную серию линейных оценок вида  $t \geq an - b\alpha - cp$ . Как связано значение  $a$ , при котором оценка для графа  $G$  наиболее сильная, с размерами клик в ассоциированном графе Турана?

Чтобы запрет клики на  $k$  вершинах хорошо стыковался с расколом и рекомбинацией, удобно обобщить задачу. Пусть в графе есть  $n_1$  красных вершин и  $n_2$  синих вершин. При этом, запрещены только клики на  $k$  синих вершинах и любые петли. Цвет вершин не влияет на независимые множества и число независимости  $\alpha$ . Требуется оценить снизу число рёбер  $t(n_1, n_2, \alpha)$ . Получится линейная оценка вида

$$t \geq a_1n_1 + a_2n_2 - b\alpha - cp.$$

Добавление красных вершин позволяет проводить расколы, даже если полученные при расколе вершины входят в запрещённый подграф. Часто удобно наряду с красными вершинами использовать и красные рёбра — рёбра, которым позволено входить в запрещённые клики. Чтобы рекомбинация минимизировала разность левой и правой части, она должна уничтожить красную вершину и красное ребро и не создавать новых красных объектов. Такая рекомбинация позволяет строить бесконечные серии графов с запретами, на которых линейные оценки вида  $t \geq a_1n_1 + a_2n_2 - b\alpha - cp$  обращаются в равенство.

Очевидно, что без дополнительных условий на связность запрет клик на  $k$  вершинах проявляется при  $n \geq (k - 1)\alpha + 1$ , когда оптимальный пример из теоремы Турана содержит запрещённую клику.

**Задача 31**

- 1) Для всех  $k \geq 3$ ,  $\alpha > 1$ ,  $n \in [2\alpha + 1, k\alpha - 1]$  постройте бесплатный турановский граф, не содержащий клик на  $k$  вершинах, с данными  $n, \alpha$ .
- 2) Для всех  $k \geq 4$ ,  $\alpha > 1$ ,  $n \geq k\alpha$  докажите, что не существует бесплатного турановского гиперграфа, не содержащего клик на  $k$  вершинах, с данными  $n, \alpha$ .
- 3) Для  $\alpha > 1$ ,  $n \geq 3\alpha + 1$  докажите, что не существует бесплатного турановского гиперграфа без треугольников с данными  $n, \alpha$ .
- 4\*) Докажите, что не существует бесплатного графа без треугольников с  $n = 3\alpha$ . Постройте какой-нибудь бесплатный гиперграф без треугольников с  $n = 3\alpha$ .

Если число синих вершин в графе превосходит оценку из задачи 31 ( $n \geq k\alpha$ ), возникают более сильные, чем в основной теореме, оценки на число рёбер. Такие оценки имеют вид  $m \geq an - b\alpha - c$  для обычных графов и  $a_1n_1 + a_2n_2 - b\alpha - c$  для графов с  $n_1$  красными и  $n_2$  синими вершинами. Тут мы ограничимся оценками, близкими к основной теореме (там будет общая серия случаев равенства с  $n = k\alpha - 1$ ).

**Задача 32** Для турановских графов рассмотрим оценку

$$m \geq kn_1 + (k + 1)n_2 - \frac{k^2 + k + 2}{2}\alpha - (k - 2).$$

- 1) Постройте серию примеров, на которых указанная оценка обращается в равенство. Докажите, что они могут содержать не более двух красных вершин.
- 2\*) Докажите оценку при  $k = 3$ .
- 3) Докажите, что если все вершины синие и их степени не превышают  $k$ , то оценка при  $k \geq 4$  следует из теоремы о бесплатных графах.
- 4) Докажите оценку при всех  $k \geq 4$ .
- 5) При  $k = 4$  и  $k = 5$  приведите примеры с  $\alpha = 2$ ,  $n = 2k$ , когда оценка обращается в равенство.
- 6) Докажите оценку при всех  $k \geq 4$  для турановских гиперграфов без петель и клик на  $k$  вершинах, попарно соединённых рёбрами на 2 вершинах. При  $k = 3$  постройте контрпример.

**Задача 33** Для турановских графов рассмотрим оценку

$$m \geq kn_1 + (k + 2)n_2 - \frac{k^2 + 3k + 2}{2}\alpha - (k - 3).$$

- 1) Постройте серию примеров, на которых указанная оценка обращается в равенство.
- 2) При  $k = 6$  постройте пример графа с  $\alpha = 2$ ,  $n = 12$ , для которого оценка точная.
- 3\*) Разберите случай  $k + 1$ -регулярного графа.
- 4\*) Разберите случай, когда имеются вершины степени  $k$  и  $k + 1$ .
- 5\*) Разберите случай  $k$ -регулярного графа.
- 6\*) Докажите оценку при всех  $k \geq 6$ .
- 7\*) Обобщается ли оценка при всех  $k \geq 6$  для турановских гиперграфов без петель и клик на  $k$  вершинах, попарно соединённых рёбрами на 2 вершинах?

Пункты 3–5 будут зачтены, если они будут частью чётко сформулированного индукционного перехода, а доказаны по модулю предположения индукции. Подсказка: можно удалить синюю вершину степени  $k + 1$ , если в результате этого появится нестабильная вершина. Ухудшение оценки на 1 можно компенсировать, если детально изучить случай, когда этот раскол является точным, либо использовать теорему о бесплатных графах. Полезно также преобразование из задачи 8, если оно не ведёт к образованию клики на  $k$  вершинах. Если синяя вершина  $v$  входит в несколько клик на  $k - 1$  вершине, полезно изучить пересечение всех этих клик. Для этого поможет переход к дополнительному графу в множестве соседей  $v$ .

**Задача 34**

- 1\*\*\*) Для турановских графов без клик на 4 вершинах докажите оценку  $m \geq 7n - 19\alpha - 2$ .
- 2\*\*\*) Верна ли эта оценка для турановских гиперграфов без петель и клик на 4 вершинах?
- 3) Найдите стоимость красной вершины из условия, что обобщение оценки из п.1 корректно взаимодействует с любым расколом и правильно подобранной рекомбинацией. Постройте 6 различных красно-синих турановских графов с  $\alpha \leq 2$ , на которых оценка из п.1 обращается в равенство.
- 4) При произвольных  $\alpha > 3$ ,  $n \in [4\alpha + 1, 4.5\alpha - 1]$  постройте пример турановского графа без клик на 4 вершинах, когда  $m = 7n - 19\alpha - 2$ .
- 5) Постройте многопараметрические серии турановских графов и гиперграфов без клик на 4 вершинах с условием  $m = 7n - 19\alpha - 2$ .

# РЕШЕНИЯ

**Задача 1** Будем считать, что вершины шахматного графа находятся в центрах соответствующих клеток.

1. Пусть  $m < n$ . На шахматном языке выбор независимого множества — это расстановка небьющих ладей. Детские воспоминания подсказывают нам, что на такой доске удастся разместить максимум  $m$  небьющих ладей, поскольку в каждой из  $m$  горизонталей помещается не более одной ладьи. Это количество не изменится, даже если мы «подломим» ладьи, запретив им бить клетки в своих вертикалях. Это значит, что каждое вертикальное ребро в нашем графе, и даже все они, вместе взятые, — лишние! Последовательно убирая из нашего графа вертикальные ребра (очевидно, что при этом неубранные вертикальные ребра по-прежнему остаются лишними), мы получим граф, состоящий из  $m$  клик  $K_n$  (каждая клика — компонента связности). Очевидно, что в клике  $K_n$  лишних ребер нет. Итак, в этом случае ядро — это граф, состоящий из  $m$  копий графа  $K_n$ .

2. На доску  $3 \times 3$  помещается максимум 2 ферзя, причем обязательно один из них находится в угловой клетке, а другой — в центральном кресте (объединение средней горизонтали и средней вертикали). Ограничив способности ферзей — с каждой угловой клетки разрешим ферзю бить только угловые, а с каждой «крестовой» — только крестовые клетки, мы получим граф, состоящий из двух клик —  $K_4$  и  $K_5$ .

3. Для начала заметим, что наибольшее число не бьющих друг друга королей на такой доске равно  $\lceil \frac{m}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  — режем доску на горизонтальные полосы-кольца ширины 2 (при нечетном  $m$  одна крайняя полоса имеет ширину 1), в каждую полосу помещаются лишь  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  королей. Воодушевившись этим примером, мы видим, что ребра графа, пересекающие наши разрезы, являются лишними *независимо друг от друга* (это значит, что при убирании любого множества этих ребер остальные по-прежнему остаются лишними). Уберем все эти лишние ребра. Граф распадется на компоненты вида «двойной цикл» (см. рис. 1, при нечетном  $m$  крайней полосе соответствует обычный цикл  $C_n$ ).

Если  $n$  четно, то все ребра двойного цикла лишние (но теперь уже не независимо). Убрав 40% ребер, мы легко сведем граф к объединению 4-клик (см. рис. 2). Если же  $n = 2k + 1$  нечетно, то двойной цикл является турановским графом. В этом можно убедиться как непосредственно, проверив, что удаление каждого ребра увеличивает число независимости, так и косвенно: двойной цикл получается из простого цикла  $C_{2k+1}$  (тоже турановский граф) последовательным дублированием вершин.

4. На доску  $1000 \times 1000$  влезает  $100 \cdot 1000$  гепардов, если полностью заполнить каждый десятый вертикальный ряд клеток. Большее количество гепардов не поместится, поскольку в любом квадрате  $10 \times 10$  может быть не более 10 гепардов: на каждой обобщенной диагонали не более одного. Разбив доску  $1000 \times 1000$  на квадраты  $10 \times 10$ , а те, в свою очередь, на 10 обобщенных диагоналей каждый, позволим теперь гепардам, куда бы их ни поставили, бить только клетки своих обобщенных диагоналей. Мы построили ядро нашего графа, оно состоит из 100 000 клик  $K_{10}$ .

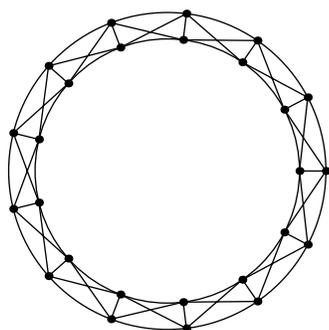


Рис. 1. Полоска на цилиндре.

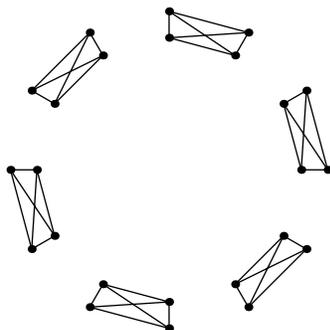


Рис. 2. Редукция к 4-кликам.

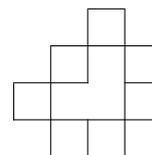


Рис. 3. Семь клеток.

5. Подойдет вот такое ожерелье из 7 клеток (рис. 3). Любой квадрат  $2 \times 2$  накрывает в нем не более двух клеток. Ядро графа — это сам этот граф  $C_7$ .

6. Вершина — это центр лежащей на клетчатой доске  $100 \times 100$  доминошки. Как нетрудно видеть, две доминошки соединены ребром, если они накрывают общую клетку. Значит, независимое множество в нашем графе можно интерпретировать как набор непересекающихся доминошек, а максимальное независимое множество — как разбиение доски на домино. Поэтому число независимости равно  $100^2/2$ .

Покрасим доску в шахматном порядке. Если убрать все ребра, лежащие в черных клетках, то при построении независимого множества мы как бы разрешаем двум доминошкам иметь общую черную клетку. Но каждая белая клетка остается накрытой не более чем одной доминошкой, поэтому у полученного графа такое же число независимости, как у исходного. Иначе говоря, все ребра, лежащие в черных клетках, лишние. Осталось заметить, что мы получили граф, который в каждой белой клетке имеет компоненту связности  $K_4$  (ну и по краям доски встречаются  $K_2$  и  $K_3$ ). В таком графе нет лишних ребер, значит, это ядро.

**Задача 2** 1. Подойдет цикл  $C_{2\alpha+1}$ . 2. См. решение задачи 15.1.

**Задача 3** Обозначим клон вершины  $a$  через  $a'$ , исходный граф через  $G$ , а новый граф через  $G'$ .

1. При клонировании вершины число независимости не может уменьшиться, поскольку независимые множества графа  $G$  содержатся также и в графе  $G'$ .

Пусть  $E$  — независимое множество в графе  $G'$ . Если  $a' \notin E$ , то это же самое множество  $E$  имеется и в графе  $G$ . Если  $a' \in E$ , то  $a \notin E$  и, заменив в множестве  $E$  вершину  $a'$  на  $a$ , мы получим в графе  $G$  независимое множество той же мощности, что и  $E$ . Поэтому число независимости графа  $G'$  не может быть больше числа независимости графа  $G$ .

2. Допустим, что в графе  $G'$  обнаружилось лишнее ребро. После его удаления в графе  $G'$  можно отыскать независимое множество  $E$ , содержащее  $\alpha(G) + 1$  вершину. Это множество не может целиком лежать в графе  $G$ , поскольку оно слишком большое. Значит, оно должно содержать вершину  $a'$  и тогда оно автоматически не содержит вершину  $a$ . Заменив в этом множестве вершину  $a'$  на вершину  $a$ , получим независимое множество размера  $\alpha(G) + 1$  в графе  $G$ , что невозможно. Значит, граф  $G'$  не содержит лишних ребер.

3. Нечетный цикл — это турановский граф, где  $n = 2\alpha + 1$ . Чтобы увеличить  $n$ , не меняя  $\alpha$ , выполним нужное количество раз операцию клонирования вершины.

**Задача 4** 1. Ответ: наибольшее число вершин равно  $(k + 1) \cdot \alpha$ .

Пример. Граф, представляющий собой объединение  $\alpha$  клик  $K_{k+1}$ .

Оценка. Пусть  $E$  — максимальное независимое множество (состоящее из  $\alpha$  вершин). В силу максимальной каждая вершина графа либо лежит в  $E$ , либо соседняя с какой-то вершиной из  $E$ . Но у каждой вершины из  $E$  (и вообще у каждой вершины) не более  $k$  соседей. Поэтому вершин вне  $E$  не больше  $k\alpha$ , а всего вершин не больше  $(k + 1) \cdot \alpha$ .

2. Ответ: наибольшее число вершин равно  $k\alpha$  при  $k > 2$ ,  $[\frac{5}{2}\alpha]$  при  $k = 2$  и, наконец,  $2\alpha$  при  $k = 1$ .

Пример. При  $k > 2$  рассмотрим граф, представляющий собой объединение  $\alpha$  клик  $K_k$ . При  $k = 2$  подходит граф состоящий из  $[\frac{\alpha}{2}]$  циклов  $C_5$  и, если  $\alpha$  нечетно, еще одной компоненты  $K_2$ . При  $k = 1$  это  $\alpha$  компонент  $K_2$ .

Оценка. Мы применим «тяжелую артиллерию» — теорему Брукса. Она утверждает, что если в связном графе  $G$  степени вершин не превосходят  $k$ , то вершины графа можно покрасить в  $k$  цветов правильным образом, кроме случаев, когда  $G = K_{k+1}$  (при всех  $k$ ) или когда  $G$  есть нечетный цикл (при  $k = 2$ ) — в этих исключительных случаях требуется  $k + 1$  цвет.

Пусть  $k > 2$  и в графе больше  $k\alpha$  ребер. Поскольку наш граф не содержит клик, он не относится к исключительным случаям теоремы Брукса, и значит, имеет раскраску в  $k$  цветов.

Тогда найдется не меньше  $\alpha + 1$  вершины одинакового цвета, что невозможно, поскольку вершины одного цвета образуют независимое множество.

Пусть  $k = 2$ . Тогда компоненты связности — это изолированные вершины, пути или циклы (четные или нечетные). Для каждого из этих графов выполнено соотношение  $n \leq \frac{5}{2}\alpha$ . Равенство достигается для 5-цикла (напомним, что 3-циклы запрещены условием).

При  $k = 1$  требуемая оценка  $n \leq 2\alpha$  очевидна.

**Задача 5 1, 2, 3.** Мы считаем, что  $n \geq \alpha + 1$  (в пункте 1 можно считать, что  $n \geq \alpha$ ). Также мы считаем, что  $p \leq \alpha$ , иначе требуемых графов нет вовсе.

Приведём примеры графов, на которых достигается требуемое количество рёбер.

Заметим сначала, что  $T(n + 1, \alpha) - T(n, \alpha) = \lfloor \frac{n}{\alpha} \rfloor$ ; это очевидно, если  $n + 1$  не делится на  $\alpha$ , иначе же имеем  $n + 1 = (k + 1)\alpha$  и

$$T(n + 1, \alpha) = (k + 1)(n + 1) - \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} \cdot \alpha = (k + 1)\alpha \cdot \frac{k}{2} = k(n + 1) - \frac{k(k + 1)}{2} \cdot \alpha = T(n, \alpha) + k.$$

Для примера в задаче 5.1 разобьём наши вершины на  $\alpha$  групп так, чтобы размеры любых двух отличались не более чем на 1, и на каждой группе организуем клику. Ясно, что число независимости полученного графа равно  $\alpha$ ; осталось посчитать количество рёбер в нём. Для этого выясним, как оно растёт с ростом  $n$ . При  $n = k\alpha$  число рёбер равно  $\frac{k(k-1)}{2}\alpha = T(n, \alpha)$ ; после этого с увеличением  $n < (k + 1)\alpha$  на единицу одна из  $k$ -клик становится  $(k + 1)$ -кликкой, то есть добавляется  $k$  рёбер. Из соотношения выше следует, что граф имеет нужное число рёбер при каждом  $n$ .

Чтобы получить пример в пункте 3, достаточно одну из клик соединить с  $k - p$  другими (одним ребром с каждой). При  $p = 1$  получается пример для пункта 2.

Оценку докажем сразу для пункта 3 (оценки для остальных пунктов — её частные случаи). Предполагая противное, выберем наименьшее  $n$ , для которого есть контрпример, а для этого  $n$  — наибольшее  $p$  (разумеется,  $p \leq \alpha$ ). Пусть  $G$  — контрпример с наименьшим числом рёбер для этих значений  $n$  и  $p$ . Если  $n \leq 2\alpha$ , то  $T(n, \alpha) + \alpha - p = n - p$ , и в графе заведомо имеется такое количество рёбер, ибо в нём всего  $p$  компонент; противоречие. Значит,  $n > 2\alpha$ .

Если в  $G$  есть лишнее ребро, удалим его; получим граф с  $n$  вершинами, в котором не более  $p$  компонент связности. Если их  $p$ , мы получили контрпример с меньшим числом рёбер. Если же их стало  $p + 1$ , то в полученном графе меньше, чем  $T(n, \alpha) + \alpha - (p + 1)$  рёбер, что противоречит выбору  $p$ .

Значит, граф  $G$  является  $\alpha$ -критическим. Выберем в нём вершину  $V$  наибольшей степени  $d$ . Заметим, что  $d \geq \ell := \lfloor \frac{n-1}{\alpha} \rfloor$ , иначе по задаче 4.1 в графе будет не более  $\ell\alpha \leq n - 1 < n$  вершин, что не так. Любая компонента связности графа  $G$  — турановский граф, так что по задаче 6 (см. ниже) вершина  $v$  — не точка сочленения. Значит, в графе  $G \setminus v$  ровно  $n - 1$  вершина и  $p$  компонент связности, а потому (из выбора  $n$ ) в нём хотя бы  $T(n - 1, \alpha) + \alpha - p$  рёбер. Значит, количество рёбер в  $G$  оценивается как

$$m \geq d + T(n - 1, \alpha) + \alpha - p \geq \ell + T(n - 1, \alpha) + \alpha - p = T(n, \alpha) + \alpha - p.$$

Финальное противоречие.

**Задача 6.** Допустим, что турановский граф  $G$  содержит точку сочленения  $v$ . Пусть при удалении вершины  $v$  граф  $G$  распадается на компоненты связности  $L_1, \dots, L_k$ , будем называть их *лепестками*. Очевидно, что

$$\alpha(G) \geq \alpha(L_1) + \dots + \alpha(L_k). \tag{1}$$

Выберем в графе  $G$  максимальное независимое множество  $E$ , содержащее вершину  $v$  (оно существует в силу турановости). Тогда хотя бы один из лепестков  $L_i$  содержит  $\alpha(L_i)$  точек из

множества  $E$  — иначе не сложится неравенство (1) — и эти точки образуют в лепестке  $L_i$  максимальное независимое множество, не смежное с  $v$ . Отсюда следует, что в графе  $G$  все рёбра, ведущие из  $v$  в лепесток  $L_i$ , лишние. Действительно, в любом независимом множестве  $E'$ , получающемся при удалении такого ребра из графа  $G$ , можно заменить часть  $E' \cap L_i$  на  $E \cap L_i$ , в результате чего мы получим независимое множество мощности  $|E'|$  в графе  $G$ . Таким образом,  $|E'| \leq \alpha(G)$ . Иначе говоря, при удалении такого ребра в графе  $G$  не может появиться независимое множество мощности больше  $\alpha(G)$ .

Граф  $G$  не содержит вершин степени 1, так как сосед висячей вершины — это точка сочленения.

**Задача 7.** При  $\alpha = 2, n = 7$  теорема Турана даёт оценку  $m \geq T(n, \alpha) = 9$ . Задача 5.2 позволяет усилить эту оценку до  $m \geq 10$ . Пример связного графа с  $\alpha = 2, n = 7, m = 10$  состоит из клик на 3 и 4 вершинах, соединённых лишним ребром. Наша цель — доказать для турановского графа с  $\alpha = 2, n = 7$  оценку  $m \geq 11$ .

*Лемма 1.* Пусть в графе есть вершина  $v$ , любые два соседа которой соединены ребром. Тогда все рёбра, соединяющие клику, состоящую из  $v$  и её соседей, с остальной частью графа, лишние.

*Доказательство.* Предположим противное. Пусть ребро  $uw$ , где вершина  $u$  граничит с  $v$ , а  $w$  — нет, не является лишним. Сотрём это ребро, получив независимое множество на  $\alpha + 1$  вершине, содержащее  $u$  и  $w$ . Заменяя в этом множестве  $u$  на  $v$ , получим независимое множество на  $\alpha + 1$  вершине в исходном графе, противоречие. Лемма 1 доказана.

*Лемма 2.* Пусть в турановском графе с  $\alpha = 2, n = 7$  есть вершина  $v$  степени 2. Тогда в нём не менее 12 рёбер.

*Доказательство.* Очевидно, что 4 вершины, независимые с  $v$ , образуют клику. По лемме 1, из каждой вершины этой клики выходит хотя бы одно ребро к соседям  $v$ . Тогда в графе имеются следующие рёбра: 2 ребра выходят из  $v$ , 6 рёбер содержатся в клике, 4 ребра проведены между кликой и соседями  $v$ . Итого 12 рёбер. Лемма 2 доказана.

Вернёмся к задаче. В турановском графе с  $\alpha > 1$  нет изолированных и висячих вершин. Случай наличия вершины степени 2 уже разобран. Если все вершины имеют степень хотя бы 3, то  $m \geq \frac{3n}{2} = 10.5$ , следовательно,  $m \geq 11$ .

**Задача 8.** 1, 2. Выберем вершину  $u$ , у которой есть сосед  $v$  меньшей степени (в случае регулярного графа просто любую), удалим её, после этого удалим лишние рёбра (поскольку вершина  $u$  была стабильна, граф не распадётся) и клонируем вершину  $v$ . Тогда число рёбер уменьшится (в случае регулярного не увеличится), а число независимости не изменится.

Также в случае регулярного нужно убедиться, что он не станет снова регулярным. Описанная конструкция даёт регулярный граф, если у выбранных вершин  $u$  и  $v$  были одинаковые окрестности (см. определение перед задачей 14). Попробуем выбрать другую пару вершин. Заметим, что между любыми двумя вершинами в графе  $G$  есть путь, и если бы у любых двух соседних вершин окрестности были одинаковыми, то вообще у всех вершин окрестности были бы одинаковые. Значит, в этом случае любая вершина соединена либо со всеми, либо ни с кем. А значит, это клика.

**Задача 9.** Достаточно доказать пункт 3.

Опишем требуемую операцию для двух турановских графов  $G_1$  и  $G_2$ . Выберем в графе  $G_1$  любое ребро  $uv$ , а в  $G_2$  любую вершину  $w$ , и удалим их, Рёбра, которые в графе  $G_2$  вели в вершину  $w$ , перенаправим в вершины  $u$  и  $v$  как угодно, но не все в одну (см. рис. 4). Полученный граф обозначим через  $G$ . Проверим, что получилось правильное преобразование с параметром  $t = -1$ . Достаточно убедиться, что число независимости не изменилось и что не появилось лишних рёбер (т. е. граф  $G$  турановский), поскольку в этом случае очевидно, что число рёбер и число компонент связности уменьшились на 1, поскольку вершина  $w$  не была точкой сочленения.

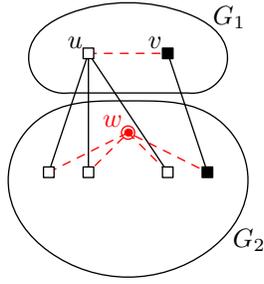


Рис. 4. Склеиваем два графа.

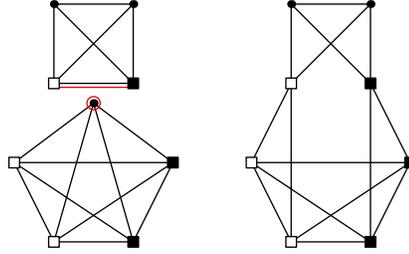


Рис. 5. Первый способ.

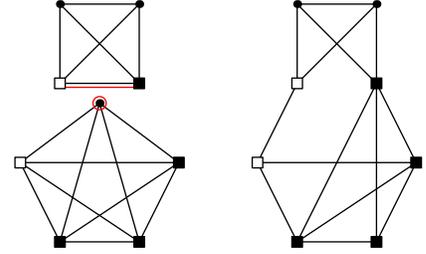


Рис. 6. Второй способ.

Для графа  $G$  выполняется неравенство  $\alpha(G) \geq \alpha(G_1) + \alpha(G_2)$ . Действительно, поскольку ребро  $xy$  не было лишним в графе  $G_1$ , в графе  $G_1 \setminus xy$  можно найти независимое множество  $E_1$  мощности  $\alpha(G_1) + 1$ , содержащее обе вершины  $x$  и  $y$ , а в графе  $G_2$ , в силу его турановости, можно выбрать максимальное независимое множество  $E_2$ , содержащее вершину  $w$ . Тогда множество  $E_1 \cup E_2 \setminus \{w\}$  — независимое множество в графе  $G$  мощности  $\alpha(G_1) + \alpha(G_2)$ .

С другой стороны, неравенство  $\alpha(G) \leq \alpha(G_1) + \alpha(G_2)$  тоже верно. Действительно, пусть  $E$  — максимальное независимое множество в графе  $G$ . Если оно не содержит сразу обе вершины  $u$  и  $v$ , оно разбивается на части  $E_1 = E \cap G_1$  и  $E_2 = E \cap G_2$ , являющиеся независимыми множествами в графах  $G_1$  и  $G_2$  соответственно. Если же  $\{u, v\} \subset E$ , то множества

$$E_1 = E \cap G_1 \setminus \{u\} \quad \text{и} \quad E_2 = (E \cap G_2) \cup \{w\} \tag{2}$$

суть независимые множества в графах  $G_1$  и  $G_2$ , имеющие суммарно  $|E|$  элементов. В обоих случаях

$$\alpha(G) = |E| = |E_1| + |E_2| \leq \alpha(G_1) + \alpha(G_2).$$

Сопоставляя доказанные неравенства, делаем вывод, что  $\alpha(G) = \alpha(G_1 \cup G_2)$ , т. е. число независимости не изменилось.

Осталось доказать, что в  $G$  нет лишних рёбер, то есть построить для любого ребра  $xy$  графа  $G$  независимое множество в  $G \setminus xy$  мощности  $\alpha(G) + 1$ . Опишем вкратце, как это делается.

Ребро  $xy$  соответствует ребру в одном из графов  $G_1$  и  $G_2$  (назовём его  $G_i$ ), после выкидывания которого в этом графе образуется независимое множество  $U$  из  $\alpha(G_i) + 1$  вершины. Это множество переносится в граф  $G$  (при этом, если оно содержит  $w$ , то в графе  $G$  выделяем обе вершины  $u$  и  $v$ ). После этого остаётся дополнить его до независимого множества из  $\alpha(G) + 1$  вершины множеством из  $G_{3-i}$ . Это делается при помощи одного из следующих множеств:

- в графе  $G_2$  — независимого множества из  $\alpha(G_2) + 1$  вершин графа  $G_2 \setminus wt$ , где  $t$  — сосед  $w$ ; а также независимого множества из  $\alpha(G_2)$  вершин, не содержащего  $w$ ;
- в графе  $G_1$  — независимого множества из  $\alpha(G_1) + 1$  вершин графа  $G_1 \setminus uv$ , а также независимого множества  $V$  из  $\alpha(G_1)$  вершин графа  $G_1$ , не содержащего ни  $u$ , ни  $v$ . Множество  $V$  существует, иначе в любом максимальном независимом множестве графа  $G_1$  содержится или  $u$ , или  $v$ , а тогда легко понять, что все другие рёбра из  $u$  и  $v$  — лишние.

Для построения двух примеров турановских графов из пункта 1 достаточно по разному распределять между вершинами  $u$  и  $v$  соседей вершины  $w$ , см. рис. 5, 6.

**Задача 10.** 1. Применяя операцию из задачи 9, сначала объединим две 4-клики (рис. 7), после чего разными способами добавим еще одну 4-клику (рис. 8–11). Результаты являются турановскими графами по свойствам операции.

**Задача 11.** Пользуемся методом спуска. Если граф не имеет нестабильных вершин, применим к нему задачу 8 и перейдём к меньшему графу. Иначе произведём раскол и просуммируем доказываемое неравенство для всех получившихся частей.

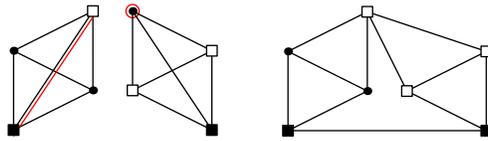


Рис. 7. Строим веретено Мозера.

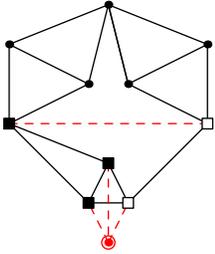


Рис. 8. При удалении вершин степени 4 остаются компоненты из 2 и 5 вершин.

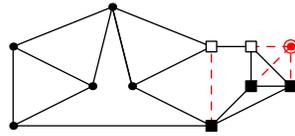


Рис. 9. При удалении вершин степени 4 остаются компоненты из 3 и 4 вершин.

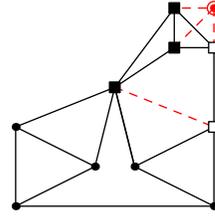


Рис. 10. Есть вершина степени 5.

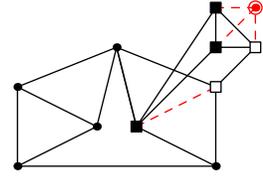


Рис. 11. Вершины степени 4 соединены.

**Задача 12.** Достаточно доказать пункт 3. Докажем индукцией по числу вершин  $n$ , что если  $n \leq 4\alpha$ , то

$$f = m - 5n + 12\alpha \geq 0.$$

Достаточно доказать это неравенство для связных графов, так как для несвязных оно получается суммированием по компонентам.

База индукции  $n = \alpha$  (меньшие значения  $n$  невозможны) тривиальна. Докажем переход.

Пусть  $A$  — вершина наименьшей степени  $x$ . Если  $x \leq 2$ , то выбросим из графа вершину  $A$  вместе со всеми соседями. Число независимости уменьшится как минимум на 1, число вершин уменьшится на  $x + 1$ , а число рёбер уменьшится хотя бы на  $\frac{x(x+1)}{2}$  (потому что суммарная степень удалённых вершин не меньше числителя этой дроби, а каждое удалённое ребро даёт в неё вклад не более 2). В итоге  $f$  уменьшится как минимум на

$$\frac{x(x+1)}{2} - 5(x+1) + 12 = \frac{1}{2}(x^2 - 9x + 14), \tag{3}$$

а при  $x = 0, 1, 2$  эта величина неотрицательна. При этом для полученного графа  $f \geq 0$  по предположению индукции, а значит,  $f \geq 0$  и для исходного.

Значит, далее мы можем считать, что наименьшая степень вершины в графе не меньше 3. Разберем несколько случаев.

1) Если в графе есть вершина степени 5 или больше, то выбросим её. В результате исчезнет одна вершина и не менее 5 рёбер. Величина  $f$  при этом не увеличится и мы опять применим предположение индукции.

2) Если граф 3- или 4-регулярный. Для 4-регулярного графа имеем  $m = 2n$ , и поскольку  $n \leq 4\alpha$ , получаем

$$f = 2n - 5n + 12\alpha = 12\alpha - 3n \geq 0.$$

Для 3-регулярного графа имеем  $2m = 3n$  и  $n \leq 3\alpha$ , в результате имеем аналогичную оценку.

3) Остался случай, когда все вершины имеют степени 3 или 4. В этом случае модифицируем рассуждения из начала решения, чтобы при подсчете числа выброшенных рёбер, как в формуле (3) при  $x = 3$ , оказалось бы, что выброшено не  $\frac{x(x+1)}{2} = 6$ , а как минимум 8 рёбер. Возьмем в качестве вершины  $A$  вершину степени 3, у которой есть сосед степени 4. Удалим из графа вершину  $A$  и её соседей  $B, C$  и  $D$ . Сумма степеней удаленных вершин не меньше 13. Наружу, т. е. в граф  $G \setminus \{A, B, C, D\}$ , ведет не меньше трех 3 рёбер, так как иначе вершины  $A, B, C$  и  $D$  соединены хотя бы  $\frac{13-2}{2} = 6$  рёбрами, и тогда это клика на 4 вершинах, которой в дистанционном

графе быть не может. А значит, суммарно удалено не менее  $13 + 3 = 16$  полуребер, т.е. хотя бы 8 рёбер. Этого достаточно.

**Задача 13. 1-2.** Пусть в критическом множестве  $m$  юношей, и один из них, Петруха, женился на Гюльчатай. Остальных юношей из критического множества будем называть друзьями Петрухи, юношей не из критического множества — массовой, а всех девушек, знакомых Петрухе и его друзьям, — гаремом. Для доказательства обоих утверждений задачи достаточно проверить, что:

— любые  $\ell$  друзей Петрухи (где  $1 \leq \ell \leq m - 1$ ) суммарно знакомы с  $\ell$  девушками, не считая Гюльчатай, — это так, поскольку по условию нет меньших критических множеств и, значит, эти друзья в сумме знакомы как минимум с  $\ell + 1$  девушкой (среди которых может быть и Гюльчатай).

— любые  $\ell$  юношей из массовой (где  $1 \leq \ell \leq n - m$ ) знакомы как минимум с  $\ell$  девушками не из гарема, — это так, поскольку Петруха с друзьями и эти  $\ell$  юношей в сумме знакомы с  $m + \ell$  или более девушками,  $m$  из которых (в том числе, Гюльчатай) находятся в гареме.

**3.** Утверждение сразу следует из предыдущих пунктов. Для доказательства индукционного перехода следует при необходимости «рассорить» некоторых юношей и некоторых девушек (чтобы они перестали считать себя знакомыми), чтобы появилось критическое множество. И удалить Петруху с Гюльчатай.

**Задача 14. 1.** Пусть  $u \in U$  — произвольная вершина. В турановском графе  $G$  существует максимальное независимое множество  $E$ , не содержащее  $u$ . Тогда пересечение  $E \cap \bar{U}$  содержит не менее  $|U|$  вершин (это и есть требуемое нам множество) — если бы это было не так, то, заменив в множестве  $E$  его часть  $E \cap \bar{U}$  на  $U$ , мы получили бы более крупное независимое множество, что невозможно.

**2.** Пусть  $u \in U$  — произвольная вершина,  $v$  — соседняя с ней. Поскольку ребро  $uv$  не лишнее, в графе  $G \setminus uv$  существует независимое множество  $E$ , содержащее  $\alpha + 1$  вершину. Тогда пересечение  $E \cap \bar{U}$  содержит не менее  $|U| + 1$  вершины (как нам и требуется) — если бы это было не так, то, заменив в множестве  $E$  его часть  $E \cap \bar{U}$  на  $U$ , мы получили бы независимое множество в графе  $G$ , содержащее не менее  $\alpha + 1$  вершины.

**3.** Допустим, что это не так. Рассмотрим турановский граф с наименьшим независимым множеством  $U$ , для которого  $|N(U)| \leq |U| - 1$ . Очевидно, что  $|U| > 1$ . Пусть  $u \in U$  — произвольная вершина,  $v$  — соседняя с ней. Пусть  $E$  — максимальное независимое множество, содержащее  $v$ . Ясно, что  $u \notin E$ . Положим  $\ell = |E \cap U|$ ,  $r = |E \cap N(U)|$ . В силу минимальности  $U$  вершины из множества  $E \cap U$  имеют не меньше  $\ell$  соседей из  $N(U)$  и эти соседи не принадлежат множеству  $E$ . Следовательно,  $\ell + r \leq |N(U)| \leq |U| - 1$ . Тогда, заменив в множестве  $E$  его часть  $E \cap \bar{U}$  на  $U$ , мы получим независимое множество в графе  $G$ , содержащее не менее  $\alpha + 1$  вершины. Противоречие.

**4.** Следует из леммы Холла, условие которой обеспечивает пункт 3: вершины множества  $U$  — юноши, вершины множества  $N(U)$  — девушки.

**5.** Допустим, что это не так. Рассмотрим турановский граф с наименьшим независимым множеством  $U$ , для которого  $|N(U)| = |U|$  (по пункту 4 меньшее число элементов множества  $N(U)$  иметь не может). Тогда по пункту 5 вершины множества  $\bar{U}$  разбиваются на пары некоторым паросочетанием, и значит, больше  $|U|$  независимых вершин подграф  $\bar{U}$  иметь не может. Это значит, что все ребра, уходящие из  $\bar{U}$  в оставшуюся часть графа  $G$ , лишние. Противоречие.

**6.** По утверждению пункта 5 любое подмножество  $A \subset U$  имеет не меньше  $|A| + 1$  соседей в  $N(U)$ . Тогда условия леммы Холла для множества  $U$  выполнены «с запасом»: оно удовлетворяет условиям леммы Холла, даже если мы исключим из множества  $N(U)$  вершину  $x$ . Тогда лемма Холла сразу дает нам требуемое утверждение.

**7.** Достаточно доказать, что в  $U$  не может быть вершин степени хотя бы 3.

От противного, пусть некоторая вершина  $u \in U$  имеет 3 соседа  $a, b, c$ . По утверждению пункта 6, можно построить паросочетание, в которое входят все вершины из множества  $U$ , но не входит

вершина  $c$ . Можно считать, что ребра  $ua$  и  $vb$ , где  $v$  — некоторая вершина из  $U$ , принадлежат этому паросочетанию. Мы получим из исходного предположения противоречие, если докажем, что ребро  $ub$  — лишнее.

Допустим, что это не так, и нашлось независимое множество  $E$ , содержащее  $\alpha(G) + 1$  вершину, причем  $u, b \in E$ . Тогда множество  $N(U) \cap E$  заведомо не содержит вершину  $c$ , а все остальным вершины этого множества выбранное паросочетание инъективно сопоставляет вершинам из  $U$ . Заменив в множестве  $E$  вершины из  $N(U) \cap E$  на парные им вершины из  $U$ , получим независимое множество в графе  $G$  из  $\alpha(G) + 1$  вершин, что невозможно.

8. Зафиксируем произвольное ребро  $xy$  и рассмотрим максимальное независимое множество  $U$ , не содержащее этого ребра (оно существует благодаря турановости). Тогда автоматически  $x, y \in N(U)$ . По утверждению пункта 5 каждое непустое подмножество  $B \subset E$  имеет не меньше  $|B| + 1$  соседних вершин. Если при этом  $|N(B)| = |B| + 1$ , то по утверждению пункта 7 в множестве  $B$  найдется вершина степени 2. Значит, нам остается рассмотреть случай, когда для множества  $U$  условия леммы Холла выполнены с избытком 2, т. е. каждое непустое подмножество  $B \subset E$  имеет не меньше  $|B| + 2$  соседних вершин. Тогда по лемме Холла заключаем, что вершины множества  $\bar{U} \setminus \{x, y\}$  разбиваются на пары паросочетанием из  $\alpha$  ребер. Добавляя к этому паросочетанию ребро  $xy$ , получаем требуемое.

**Задача 15.** 1. Это следует из задачи 14.5.

2. Это следует из задачи 14.7. Каждая вершина входит в максимальное независимое множество и потому имеет степень 2. Значит, наш турановский (связный!) граф является циклом.

3. Предположим противное. Тогда по задаче 14.7 для любого независимого множества  $U$  имеем  $|N(U)| \geq |U| + 2$ . Докажем, что степени всех вершин равны 3. Пусть это не так, и у вершины  $u$  есть соседи  $a, b, c, d$ . Выберем максимальное независимое множество  $U$ , содержащее вершину  $u$ . Действуя как в решении 14.8, найдём паросочетание из  $\alpha$  рёбер, не содержащее вершин  $a$  и  $b$ ; тогда оно содержит рёбра  $uc$  и  $vd$  при некоторой  $v \in U$ . Но тогда ребро  $ud$  является лишним, ибо в любом независимом множестве в  $G \setminus ud$ , содержащем  $u$  и  $d$ , можно «спустить» вершины из  $N(U)$  в  $U$ , получив независимое множество той же мощности в  $G$ .

Итак, граф  $G$  3-регулярен. По задаче 14.8, в нём есть паросочетание из  $\alpha + 1$  ребра; окрасим эти рёбра в синий цвет. После выбрасывания синих рёбер граф распадается на циклы; если среди них есть нечётные, то их не меньше двух, и число независимости уже графа, образованного этими циклами, не больше  $\alpha$ , то есть все синие рёбра лишние. Значит, все циклы чётные. Окрасим рёбра каждого из них попеременно в красный и зелёный цвета, получим правильную 3-раскраску рёбер графа (и каждый цвет образует совершенное паросочетание).

Выберем любое ребро  $E$  — скажем, красное. Поскольку оно не лишнее, после его удаления можно найти независимое множество  $U$  мощности  $\alpha + 1$ . Пусть  $U'$  — множество всех оставшихся вершин графа. Из  $U$  в  $U'$  выходят по  $\alpha + 1$  синих и зелёных рёбер и  $\alpha - 1$  красное, поскольку из вершин бывшего ребра  $E$  (лежащих в  $U$ ) никаких красных ребер теперь не выходит. Значит, на множестве  $U'$  есть ровно одно ребро, и оно красное. Сопоставим его ребру  $E$  и обозначим через  $E'$ .

Рассмотрим теперь любую вершину  $u$  и пусть  $R, G, B$  — соответственно красное, зелёное и синее рёбра из неё,  $R', G'$  и  $B'$  — сопоставленные им рёбра, а  $U_r, U_g, U_b$  — независимые множества, получаемые после выкидывания  $R, G$  и  $B$  соответственно. Тогда все вершины разбиваются на 8 множеств  $U_{ijk}$ ,  $i, j, k \in \{0, 1\}$ , где  $i = 1$  означает, что вершина лежит в  $U_r$ , индексы  $j$  и  $k$  играют такие же роли для остальных цветов. В частности,  $u \in U_{111}$ . Также обозначим через  $U_{1**}$  объединение всех  $U_{ijk}$  с  $i = 1$ , аналогично вводятся другие подобные обозначения. В этих обозначениях можно описать и уже знакомые нам множества, например,  $U_{1**} = U_r$  и т. п.

Поскольку  $|U_{1**}| = |U_{*1*}| = |U_{0**}| = |U_{*0*}| = \alpha + 1$ , получаем, что  $|U_{11*}| = |U_{00*}|$ . При этом все рёбра, кроме рёбер  $R, G, R'$  и  $G'$ , соединяют  $U_{11*}$  с  $U_{00*}$  или  $U_{10*}$  с  $U_{01*}$ . Значит, множество  $U = U_{11*} \setminus u$  независимое, и  $N(U) \subset U_{00*}$ , то есть  $|N(U)| \leq |U| + 1$ . Это противоречит задачам

14.5 и 14.7, если  $U$  непусто. Значит,  $U_{11*} = \{u\}$ , то есть  $U_{111} = \{u\}$  и  $U_{110} = \emptyset$ . Аналогично,  $U_{101} = U_{011} = \emptyset$ .

Выбросим теперь рёбра  $R, G, B, R', G', B'$  из нашего графа. Теперь каждое из оставшихся рёбер должно соединять часть  $U_{ijk}$  с  $U_{1-i,1-j,1-k}$ ; однако, поскольку  $U_{110} = U_{101} = U_{011} = \emptyset$ , а единственная вершина из  $U_{111}$  не соединена с  $U_{000}$ , в полученном графе рёбер нет. Значит, их было всего 6, а вершин — 4, и  $\alpha = 1$ . Противоречие.

4. Предположим противное. Соединим ребром *незнакомых* человек. Тогда нам известно, что  $n = 12$ ,  $\alpha = 5$ , то есть  $n = 2\alpha + 2$ . Собственно, это наблюдение и даёт нам обобщённую задачу:

*В группе из  $2\alpha + 2$  человек среди любых  $2\alpha - 1$  человек найдутся  $\alpha$  попарно знакомых. Докажите, что в этой группе найдутся  $\alpha + 1$  попарно знакомых.*

Чтобы прийти к противоречию, нам надо выбросить 3 вершины так, чтобы у полученного графа число независимости уменьшилось.

Выкинем рёбра так, чтобы остался  $\alpha$ -критический граф. Пусть он несвязен. Тогда в нём есть компонента связности с числом вершин  $n'$  и числом независимости  $\alpha'$  такими, что  $n' \leq 2\alpha' + 1$  — то есть либо компонента на не более чем 2 вершинах, либо нечётный цикл (по пунктам 1–2). В любом случае из этой компоненты можно выкинуть не более трёх вершин, уменьшив число независимости.

В противном случае остался турановский граф, в котором по пункту 3 есть вершина  $u$  степени 2. Выкинув её вместе с её соседями, мы уменьшим число независимости (ибо к любому независимому множеству в оставшемся графе можно добавить  $u$ ).

**Задача 16.** 1. Пусть  $a$  — вершина степени 2 в графе  $G$ ,  $b$  и  $c$  — её соседи,  $W$  — множество соседей  $b$  и  $c$ , кроме  $a$ , см. рис. 12. Если вершины  $b$  и  $c$  соединены ребром, то по лемме из задачи 7 все рёбра, ведущие из треугольника  $abc$  наружу, лишние, что невозможно.

Теперь выкинем все рёбра, идущие из вершин  $b$  и  $c$  в  $W$ , соединим  $b$  и  $c$ , а также добавим вершину  $v$ , соединённую со всеми вершинами из  $W$  (получив компоненту, которую мы обозначим  $G'$ ), см. рис. 13. По сути, мы совершили преобразование, обратное в преобразованию из задачи 9.3. Проверка того, что оно правильное, осуществляется похожим образом.

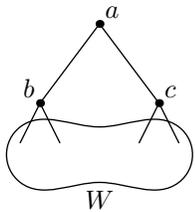


Рис. 12. Было.

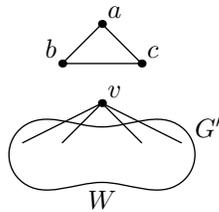


Рис. 13. Стало.

Именно, надо проверить, что  $\alpha(G') = \alpha - 1$  и что граф  $G'$   $\alpha$ -критический. Если максимальное независимое множество в графе  $G'$  не содержит вершину  $v$ , то в графе  $G$  к нему можно добавить ещё и вершину  $a$ , а если содержит, то вершину  $v$  можно заменить на  $b$  и  $c$ . А результате получаем оценку  $\alpha(G') \leq \alpha - 1$ . С другой стороны, максимальное независимое множество в графе  $G$ , содержащее вершину  $a$ , немедленно даёт оценку  $\alpha(G') \geq \alpha - 1$ .

Если из  $G'$  выкинуть ребро  $xv$ , можно выкинуть из  $G$  то же ребро (с заменой  $v$  на  $b$  или  $c$ , если необходимо), найти независимое множество из  $\alpha + 1$  вершины и получить из него независимое множество в графе  $G' \setminus xv$  — либо просто выкидыванием вершины  $a, b$  или  $c$ , либо заменой вершин  $b$  и  $c$  (если они обе присутствуют) на  $v$ . Проверка закончена.

Для дальнейшего стоит ещё заметить, что наше преобразование не просто правильное с параметром  $t = 1$ , а точное, то есть число рёбер увеличивается ровно на 1. Для этого нужно показать, что в множестве  $W$  не было вершины, соединённой с  $b$ , и с  $c$ . Действительно, пусть такая вершина  $w$  нашлась. Тогда при выкидывании ребра  $wb$  должно появиться независимое множество

$U$  из  $\alpha + 1$  вершины, содержащее  $w$  и  $b$  (и, значит, не содержащее  $a$  и  $c$ ). Но тогда множество  $U \cup \{a\} \setminus \{b\}$  — независимое уже в  $G$ , и в нём  $\alpha + 1$  вершина. Противоречие.

**2.** Индукция по  $\alpha$ . При  $\alpha = 1$  граф — клика на 4 вершинах, и утверждение верно.

Пусть  $\alpha > 1$ . Тогда по задаче 15.3 в нашем графе  $G$  есть вершина степени 2 и можно совершить раскол из пункта 1 (это преобразование, обратное к преобразованию из задачи 9.3), получив треугольник и меньший граф  $G'$ . При этом  $G'$  — турановский граф, у которого число независимости на 1, а число вершин — на 2 меньше, чем у  $G$ , то есть по предположению индукции он тривиален. Но  $G$  получается из  $G'$  и треугольника операцией из 9.3, значит, он тоже тривиален, что и требовалось.

**3.** Ответ. Все эти графы имеют такой вид: 4 вершины  $a, b, c, d$ , попарно соединённые не пересекающимися (по внутренним вершинам) нечётными путями. Например, два самых маленьких примера — это клика на 4 вершинах и граф, полученный из неё заменой ребра на путь из 3 рёбер (с двумя новыми вершинами).

Докажем индукцией по  $\alpha$ , что все наши графы имеют вид, указанный в ответе. Из решения предыдущего пункта следует, что они все получаются из клики на 4 вершинах последовательным «вклеиванием» (операцией из 9.3) треугольников (при этом из треугольника удаляется ребро, а из нашего графа — вершина). Поэтому достаточно показать, что при таких операциях из графов в ответе получаются такие же.

Это нетрудно сделать. Если из нашего графа берётся вершина степени 2, то просто нечётный путь, в котором она лежит, удлиняется на 2 вершины. Если же она степени 3, то степень 3 получает одна из вершин треугольника, и опять же получается наш граф, в котором один путь удлинился на 2 вершины.

**Задача 17. 6.** Ниже написаны решения пунктов 1–5 для графов. Доказательства аналогичных утверждений про гиперграфы получаются несложной переделкой; в тех местах, где рассуждения нуждаются в переделке, мы делаем сноски, в которых описывается соответствующее изменение. При первом прочтении эти сноски можно игнорировать.

Заметим сразу, что число  $\kappa(G)$  равно наименьшей мощности множества вершин  $U$ , которое пересекается со всеми максимальными независимыми множествами в  $G$ . (Для гиперграфов это так по определению, а доказательство этого несложного утверждения для графов можно усмотреть в задаче 21.)

**1.** Пусть  $\kappa = \kappa(G_0)$ ,  $G'$  — индуцированный подграф на всех вершинах, не лежащих в  $G_0$ ,  $\alpha = \alpha(G_0)$  и  $\beta = \alpha(G')$ . Ясно, что  $\alpha(G) \leq \alpha + \beta$ . Более того, если бы в этом неравенстве достигалось равенство, то число независимости графа  $G$  сохранилось бы при выбрасывании всех рёбер между  $G_0$  и  $G'$ , то есть наш граф не был бы турановским. Итак,  $\alpha(G) < \alpha + \beta$ .

Пусть  $V$  — множество вершин в  $G_0$ , из которых<sup>1</sup> ведут рёбра в  $G'$ . Покажем, что  $|V| \geq \kappa(G_0)$ ; отсюда будет следовать требуемое. Предположим противное. Тогда в  $G_0$  найдётся независимое множество мощности  $\alpha$ , не пересекающееся с  $V$ . Это множество в объединении с максимальным независимым множеством в  $G'$  образует независимое множество в  $G$  мощности  $\alpha + \beta$ . Противоречие.

**2.** Предположим противное. Выберем в графе  $G$  наименьшее  $k > 1$ , для которого существует контрпример, и выберем соответствующие индуцированные подграфы  $G_1, G_2, \dots, G_k$ ; пусть  $G_0$  — индуцированный подграф на всех вершинах, не входящих ни в одно из множеств  $G_i$  (он может оказаться пустым). Обозначим через  $F$  множество рёбер, не лежащих ни в одном из подграфов  $G_0, G_1, \dots, G_k$ . Обозначим  $\alpha_i = \alpha(G_i)$ ,  $\kappa_i = \kappa(G_i)$ . По нашему предположению,

$$|F| \leq \sum_{i=1}^k (\kappa_i - 1). \tag{4}$$

<sup>1</sup>Для гиперграфов здесь нужно выбирать множество вершин из  $G_0$  наименьшей мощности, пересекающее все рёбра, пересекающиеся как с  $G_0$ , так и с  $G'$ ; см. решение 21.2.

Наша цель — построить в  $G$  независимое множество мощности  $\sum_{i=0}^k \alpha_i$ . Как и в предыдущем пункте, это будет означать, что все рёбра в  $F$  — лишние, то есть  $G$  не турановский.

Для этого достаточно в каждом ребре из  $F$  окрасить по вершине так, чтобы в  $G_0$  окрашенных вершин не было, а в каждом  $G_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) было окрашено не более  $\kappa_i - 1$  вершин. Действительно, если это сделать, то в  $G_0$  можно выбрать независимое множество из  $\alpha_0$  вершин, а в каждом  $G_i$  — независимое множество из  $\alpha_i$  вершин, ни одна из которых не окрашена. Поскольку в каждом ребре из  $F$  окрашенная вершина останется невыбранной, объединение всех этих множеств будет независимым во всём графе.

Чтобы окрасить нужные вершины, воспользуемся леммой Холла, построив следующий вспомогательный двудольный граф  $H$ . Одной его долей будет множество  $F$ ; в другую для каждого  $i = 1, 2, \dots, k$  поместим  $\kappa_i - 1$  вершин  $v_{i1}, \dots, v_{i, \kappa_i - 1}$ . Если ребро  $e \in F$  содержит вершину из  $G_i$ , соединим  $e$  в графе  $H$  со всеми вершинами вида  $v_{ij}$  (здесь не требуется, чтобы ребро  $e$  содержало хотя бы одну из этих вершин  $v_{ij}$ , — достаточно того, что в  $G_i$  существует вершина, которую ребро  $e$  содержит). Мы собираемся найти в этом графе паросочетание, покрывающее всю долю  $F$ . Тогда, если в этом паросочетании ребро  $e \in F$  сопоставлено вершине  $v_{ij}$ , можно в этом ребре окрасить вершину из  $G_i$ ; получится требуемая окраска вершин. Значит, достаточно проверить условие леммы Холла для графа  $H$ .

Пусть  $E'$  — непустое подмножество в  $F$ ; без ограничения общности можно считать, что вершины рёбер из  $E'$  лежат ровно в подграфах  $G_{\ell+1}, G_{\ell+2}, \dots, G_k$  и, возможно, в  $G_0$  при некотором  $\ell$ , где  $0 \leq \ell < k$ . Предположим, что условие леммы Холла не выполнено для этого множества, то есть

$$|E'| > \sum_{i=\ell+1}^k (\kappa_i - 1).$$

Сопоставляя это неравенство с неравенством (4), заключаем, что  $\ell \geq 1$ . Тогда подграфы  $G_1, \dots, G_\ell$  соединены друг с другом и с  $G \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_\ell)$  только рёбрами из  $F \setminus E'$ , причём

$$|F \setminus E'| = |F| - |E'| < \sum_{i=1}^k (\kappa_i - 1) - \sum_{i=\ell+1}^k (\kappa_i - 1) = \sum_{i=1}^{\ell} (\kappa_i - 1).$$

Если  $\ell > 1$ , мы получаем противоречие с выбором  $k$ . Если же  $\ell = 1$ , получаем противоречие с предыдущим пунктом задачи.

Итак, мы получили, что условие леммы Холла выполнено, то есть требуемая окраска возможна.

**3.** Теорему о расколе удобно доказывать, если обобщить утверждение предыдущего пункта следующим образом.

*Пусть  $G_1, G_2, \dots, G_k$  ( $k > 1$ ) — не обязательно индуцированные подграфы на попарно непересекающихся множествах вершин,  $G_0$  — индуцированный подграф на всех оставшихся вершинах ( $G_0$  может быть пуст). Тогда количество рёбер, не содержащихся ни в одном из  $G_i$  ( $i = 0, \dots, k$ ), строго больше чем  $\sum_{i=1}^k (\kappa(G_i) - 1)$ .*

Доказательство этого утверждения дословно повторяет доказательство пункта 2. Просто теперь, если в  $F$  есть ребро с концами в одном  $G_i$ , то в графе  $H$  оно будет иметь степень  $\kappa_i - 1$ .

Перейдём к теореме.

**Теорема о расколе.** *Пусть  $x$  — нестабильная вершина турановского графа  $G$ . Тогда к каждой компоненте связности ядра графа  $G \setminus x$  можно добавить по вершине, чтобы получилось правильное преобразование графа  $G$ .*

*Доказательство.* Пусть  $x$  — нестабильная вершина, а  $G_1, G_2, \dots, G_k$  — компоненты связности ядра графа  $G \setminus x$ ; они удовлетворяют условиям утверждения выше. Значит, если мы выкинем

вершину  $x$  из графа  $G$ , а затем удалим все ненужные рёбра (чтобы получить несвязное объединение графов  $G_i$ ), мы выбросим не менее  $1 - k + \sum_{i=1}^k \kappa(G_i)$  рёбер. Графы  $G_i$  — турановские, и по задаче 21.1, если к каждому из них добавить вершину, соединённую с его ключевым множеством, то получится турановский граф. Сделав это с каждой компонентой нашего несвязного объединения, мы получим  $\alpha$ -критический граф, увеличив (по сравнению с исходным графом) число вершин на  $t = k - 1$ , число компонент также на  $t$ . Число же рёбер увеличится не более чем на

$$k - 1 - \sum_{i=1}^k \kappa(G_i) + \sum_{i=1}^k \kappa(G_i) = t.$$

Значит, мы совершили правильное преобразование.

4. Мы пользуемся терминологией из решения пункта 1.

Пусть  $E$  — множество рёбер, пересекающих как  $G_0$ , так и  $G'$ . Для ребра  $e \in E$  обозначим  $e_0 = e \cap G_0$  и  $e' = e \cap G'$ . Согласно решению пункта 1, все  $\kappa = \kappa(G_0)$  вершин вида  $e_0$  различны<sup>2</sup>. Пусть  $V$  — множество всех вершин<sup>3</sup> вида  $e'$ , см. рис. 14.

Выкинем из графа  $G$  все рёбра множества  $E$ . Добавим к  $G_0$  вершину  $u$  и рёбра вида  $e_0 \cup \{u\}$  (получив граф  $G_{00}$ ), а к  $G'$  добавим (гипер)ребро  $V$  (получив граф  $G''$ ), см. рис. 15.

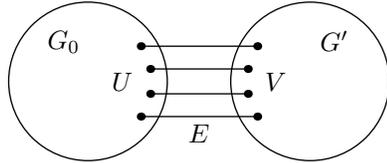


Рис. 14. Было.

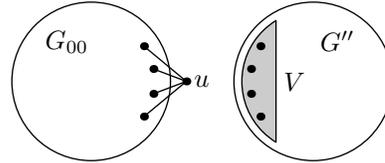


Рис. 15. Стало.

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — числа независимости графов  $G_0$  и  $G'$ . Тогда, как мы уже видели в решениях предыдущих пунктов,  $\alpha(G) < \alpha + \beta$ ; значит, как мы видели в решении пункта 1, множество  $U$  всех вершин вида  $e_0$  должно быть ключевым<sup>4</sup> для  $G_0$ . Тогда можно выбрать в  $G_0$  независимое множество мощности  $\alpha$ , содержащее лишь одну вершину из  $U$ . Выкинув её и добавив к этому множеству максимальное независимое множество в  $G'$ , получим независимое множество в  $G$ . Поэтому  $\alpha(G) = \alpha + \beta - 1$ .

Если взять любые максимальные независимые множества  $W_0$  и  $W'$  в графах  $G_0$  и  $G'$  соответственно, они не будут образовывать независимого множества в  $G$ , то есть их объединение будет содержать некоторое ребро  $e \in E$ . Но при выкидывании любого ребра  $e \in E$  это свойство нарушится — значит, существует  $W_0$ , содержащее лишь одно наперёд заданное множество вида  $e_0$ . Чтобы свойство выше выполнялось, любое множество вида  $W'$  должно содержать соответствующее множество  $e'$ . Итак, любое множество  $W'$  содержит всё  $V$ , и потому  $\alpha(G'') = \beta - 1$ .

Из тех же соображений получаем, что граф  $G_{00}$  не может содержать независимого множества из  $\alpha + 1$  вершины, откуда  $\alpha(G_{00}) = \alpha$ .

Теперь для проверки того, что мы совершили правильное преобразование, достаточно проверить, что получился  $\alpha$ -критический граф. Если выкинуть из  $G_{00}$  одно из рёбер графа  $G_0$ , то уже в этом графе найдётся большее независимое множество. Если выкинуть из  $G_{00}$  ребро вида  $f = e_0 \cup \{u\}$ , то можно выкинуть из  $G$  ребро  $e$ ; тогда в  $G$  найдётся независимое множество мощности  $\alpha + \beta$ , пересекающее  $G_0$  по множеству мощности  $\alpha$ , и его можно дополнить вершиной  $u$  до независимого множества графа  $G_{00} \setminus f$ .

<sup>2</sup>В случае гиперграфов — все эти множества вершин попарно не пересекаются.

<sup>3</sup>Или объединение всех множеств вида  $e'$ .

<sup>4</sup>А для гиперграфов — существует ключевое множество  $U$  в графе  $G$ , пересекающееся с каждым множеством вида  $e_0$  по одной вершине — своей для каждого  $e_0$ .

Если выкинуть из  $G'$  ребро  $V$ , то мы уже знаем, что число независимости увеличится на 1. Если же выкинуть ребро  $f$  графа  $G'$ , то в графе  $G' \setminus f$  найдётся независимое множество, пересекающее  $G'$  по  $\beta$  вершинам, а  $G_0$  по  $\alpha$  вершинам. Второе свойство говорит о том, что это множество не может содержать  $V$ , то есть его пересечение с  $G'$  будет независимым и в  $G''$ .

5. Как и в пункте 2, обозначим через  $G_0$  граф, индуцированный на множестве вершин, не входящих в  $G_i$ , и введём обозначения  $\alpha_i = \alpha(G_i)$ ,  $\kappa_i = \kappa(G_i)$ . Пусть  $E$  — множество всех рёбер, не содержащихся ни в одном из  $G_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ). Обозначим через  $G'$  граф, индуцированный на множестве вершин всех графов  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , а через  $F$  — множество всех рёбер из  $E$ , соединяющих  $G_0$  и  $G'$ , см. рис. 16.

Если выкинуть ребро  $f \in F$ , то в множестве  $E$  останется  $\sum_{i=1}^k (\kappa_i - 1)$  рёбер. По доказанному в пункте 2, в полученном графе можно выбрать независимое множество  $X_f$  из  $\sum_{i=0}^k \alpha_i$  вершин. Ясно, что множество  $X_f$  содержит ровно  $\alpha_i$  вершин из  $G_i$ , и большего независимого множества выбрать нельзя. Поскольку граф  $G$  был турановским, это означает, что  $\alpha := \alpha(G) = -1 + \sum_{i=0}^k \alpha_i$ . Заметим сразу, что из доказанного в пункте 2 следует, что любое ребро  $f' \in F$ , отличное от  $f$ , содержит вершину  $x \notin X_f$ , не лежащую в  $G_0$ .

Пусть  $V$  — множество вершин в  $G_0$ , содержащихся хотя бы в одном ребре из  $F$ ; рассмотрим  $v \in V$  и ребро  $f \in F$ , содержащее  $v$ . Предположим, что в  $G_0$  есть максимальное независимое множество  $U$ , не содержащее  $v$ . Тогда в множестве  $X_f$  можно заменить часть  $X_f \cap G_0$  на  $U$ , и множество останется независимым — оно не содержит ни одного ребра  $f' \in F$ , отличного от  $f$ . Более того, ребра  $f$  оно тоже не содержит, а значит, оно окажется независимым и в  $G$ , что невозможно, ибо в нём  $\alpha + 1$  вершина. Значит, любое максимальное независимое множество в  $G_0$  содержит всё множество  $V$ .

Теперь можно описать требуемое преобразование. Удалим из  $G$  все рёбра, соединяющие  $G'$  и  $G_0$ ; добавим к  $G_0$  гиперребро  $V$ . К графу  $G'$  добавим вершину  $v$ , и для любого  $f \in F$  добавим ребро  $f \setminus V \cup \{v\}$ , см. рис. 16. Как и ранее, обозначим полученные компоненты связности через  $G_{00}$  и  $G''$ . Из сказанного выше легко вытекает, что  $\alpha(G_{00}) = \alpha_0 - 1$  и  $\alpha(G'') = \alpha(G')$  (для доказательства второго достаточно заметить, что любое максимальное независимое множество в  $G'$  содержит  $f \cap G'$  для некоторого  $f \in F$ ). Осталось понять, что оба гиперграфа  $G''$  и  $G_{00}$  являются  $\alpha$ -критическими.

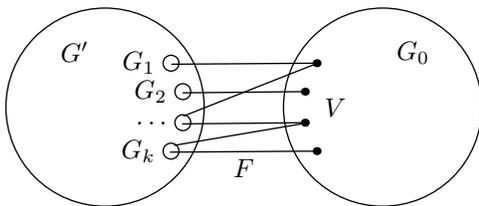


Рис. 16. Было.

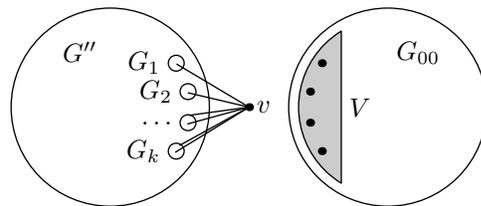


Рис. 17. Стало.

Если из  $G_{00}$  выкинуть гиперребро  $V$ , то, как мы знаем, число независимости увеличится на 1 (с  $\alpha_0 - 1$  до  $\alpha_0$ ). Если выкинуть другое ребро  $e$ , то в  $G \setminus e$  найдётся независимое множество  $U$  мощности  $\alpha + 1$ ; если оно содержит  $\alpha_0 + 1$  вершин из  $G_0$ , то, выкинув из него вершину из  $V$ , получим требуемое независимое множество в  $G_{00} \setminus e$ . Иначе в  $U$  должно быть  $\alpha_i$  вершин из каждого  $G_i$ ; при этом оно не может содержать  $V$ , ибо тогда оно не могло содержать  $\alpha - \alpha_0$  вершин из  $G'$ ; значит,  $U \cap G_0$  — требуемое независимое множество в  $G_{00} \setminus e$ .

Если выкинуть из  $G''$  ребро  $e$ , не содержащее  $v$ , то в графе  $G \setminus e$  найдётся независимое множество  $U$  из  $\alpha$  вершин. Если оно содержит  $\alpha - \alpha_0 + 1$  вершин из  $G'$ , то оно же будет независимым в  $G''$ . Иначе, как мы доказали, оно обязано содержать  $V$ , а потому при добавлении к  $U \cap G'$  вершины  $v$  оно останется независимым. В любом случае число независимости  $G''$  увеличится.

Если же выкинуть из  $G''$  ребро  $f \setminus V \cup \{v\}$  при некотором  $f \in F$ , то, опять же, в  $G \setminus f$  есть независимое множество из  $\alpha$  вершин, по  $\alpha_i$  вершин из каждого  $G_i$ . Оно обязано содержать  $V$  и потому в  $G''$  без нашего ребра оно, с добавлением  $v$ , тоже будет независимым.

**Задача 18. 1.** Предположим противное, пусть  $A \subset B$  и ребро  $B$  оказалось лишним, т. е. после удаления ребра  $B$  число независимости  $\alpha$  увеличилось. Заметим, что если некоторое ребро гиперграфа является лишним, то после его удаления все максимальные независимые множества будут содержать все его вершины. Отсюда получим, что после удаления ребра  $B$  все вершины ребра  $A$  принадлежат любому максимальному независимому множеству  $E$  в новом графе. Но это противоречит независимости множества  $E$ .

**2.** Если вершина  $v$  не является изолированной, то существует некоторое отличное от петли ребро  $B$ , которое содержит  $v$ . Если бы ребро  $B$  оказалось нелишним, при его удалении увеличилось бы число независимости за счет того, что появилось бы независимое множество, содержащее все вершины из  $B$ . Но вершина  $v$  с петлей не может принадлежать никакому независимому множеству по определению независимости. Следовательно,  $B$  — лишнее.

**3.** Рассмотрим произвольную неизолированную вершину  $v$ . Она принадлежит некоторому ребру  $A$ , которое не является петлей. Поскольку ребро  $A$  — не лишнее, то после его удаления все максимальные независимые множества будут иметь размер  $\alpha + 1$ . Выберем одно из них, оно содержит все вершины ребра  $A$ . Значит, если мы удалим из этого независимого множества вершину  $v$ , мы найдем максимальное независимое множество размера  $\alpha$  в нашем исходном графе  $G$ , как и хотели.

**Задача 19. 1.** Ответ:  $n - \alpha$  ребер.

**Пример.** Гиперграф, состоящий из  $\alpha$  изолированных вершин и  $n - \alpha$  вершин, имеющих петлю.

**Оценка.** Так как мы минимизируем число ребер, можно считать, что граф  $\alpha$ -критический. Заметим, что если в  $\alpha$ -критическом гиперграфе заменить ребро на любое его одноэлементное подмножество (т. е. на петлю), то число независимости не изменится. Действительно, число независимости не уменьшится, поскольку по задаче 18.3 в исходном гиперграфе имеются максимальные независимые множества из  $\alpha$  элементов, не содержащие той вершины, на которую мы накидываем петлю. А с другой стороны, и увеличиться оно не сможет, поскольку эта замена дает более жесткое ограничение на существование независимых множеств. Последовательно выполняя такие замены и удаляя возникающие лишние ребра, мы сведем любой гиперграф к гиперграфу, описанному в примере.

**2.** Ответ:  $C_n^{\alpha+1}$  ребер (при  $n = \alpha$  считаем это выражение равным 0).

**Оценка.** Поскольку гиперграф не содержит лишних ребер, при удалении любого ребра  $E$  появляется независимое множество из  $\alpha + 1$  вершины, содержащее ребро  $E$  и не содержащее целиком никаких других ребер. Следовательно, количество ребер не больше чем число всевозможных  $(\alpha + 1)$ -элементных подмножеств множества вершин гиперграфа, т. е. не больше  $C_n^{\alpha+1}$ .

**Пример.** Возьмем гиперграф на  $n$  вершинах, в котором ребрами являются все  $(\alpha + 1)$ -элементные подмножества множества вершин.

**Задача 20. 1.** Ясно, что при замене произвольного ребра  $E$  на более крупное множество число независимости гиперграфа может разве лишь увеличиться. Однако при выполнении операции расширения (когда ребро  $E$  нелишнее) оно останется прежним. Действительно, если после выполнения расширения в графе нашлось независимое множество  $A$  из  $\alpha + 1$  вершин, то  $E \subset A \subsetneq \tilde{E}$ . Это значит, что  $A$  — ключ ребра  $E$ . Но тогда  $\tilde{E} \subset A$ , что противоречит предыдущему включению.

**2.** Пусть  $\tilde{G}$  — гиперграф, полученный после расширения ребра. Если из него выкинуть расширенное ребро  $\tilde{E}$ , получится гиперграф  $G \setminus E$ , у которого число независимости равно  $\alpha + 1$ .

Если же из него выкинуть другое ребро  $E'$ , то получится гиперграф  $G \setminus E'$ , в котором ребро  $E$  расширено, то есть его число независимости не меньше, чем у  $G \setminus E'$ , то есть не меньше  $\alpha + 1$ .

**3.** Пусть  $v_1v_2 \dots v_{2k+1}$  — нечётный цикл; клонируем его вершину  $v_2$ , получив вершину  $u$ . После выкидывания ребра  $v_1v_2$  единственным независимым множеством мощности  $k + 1$  будет множество  $E_1 = \{v_1, v_2, v_4, \dots, v_{2k}\}$ . То есть при расширении ребра  $v_1v_2$  получится гиперребро  $E_1$ . После этого при удалении ребра  $uv_3$  единственным независимым множеством мощности  $k + 1$  будет множество  $E_3 = \{u, v_3, v_5, \dots, v_{2k+1}\}$ . Заменяя ребро  $uv_3$  на  $E_3$ , получаем требуемый 3-регулярный гиперграф. Он выглядит как *чётный* цикл  $v_1uv_2v_3 \dots v_{2k+1}$ , в который добавлены два гиперребра — каждое содержит половину всех вершин, идущих через одну.

**4.** Ответ: это произойдёт, если в гиперграфе есть изолированная вершина без петли (ребра, содержащего лишь одну эту вершину).

Напомним, что для любого турановского гиперграфа более чем из одной вершины любая его вершина не лежит в некотором максимальном независимом множестве. Поэтому в компоненте связности, не содержащей ребра  $e$ , ни одна из вершин не может входить сразу во все максимальные независимые множества гиперграфа  $G \setminus e$ , кроме случая, когда компонента — это изолированная вершина без петли. Если такой изолированной вершины в гиперграфе нет, то для любого ребра  $e$  все его ключи будут содержаться в компоненте связности, содержащей  $e$ , а если есть, то эта вершина будет присутствовать во всех ключах ребра  $e$ , то есть она присоединится к компоненте связности ребра  $e$  при его расширении.

**5.** Пусть вершина  $x$  содержится лишь в ребре  $E$  гиперграфа  $G$  (мы считаем, что  $E$  содержит ещё вершину, кроме  $x$ ). Выкинем эту вторую вершину из ребра  $E$ , получив ребро  $E'$ , а также добавим к графу новую вершину  $y$  и новое ребро  $xy$ ; обозначим полученный гиперграф через  $G'$ .

Заметим, что в любом независимом множестве в  $G$ , не содержащем  $x$ , можно заменить одну из вершин ребра  $E$  на  $x$  (или просто добавить  $x$  иначе). Отсюда вытекает, что  $\alpha(G') \geq \alpha(G)$ . С другой стороны, если взять в  $G'$  максимальное независимое множество и заменить в нём, если надо,  $y$  на  $x$ , то получится независимое множество в  $G$ . Поэтому  $\alpha(G') = \alpha(G)$ .

Если из гиперграфа  $G'$  выкинуть любое ребро  $F$  гиперграфа  $G$ , то в нём появится независимое множество мощности  $\alpha + 1$ ; проделав с ним операцию замены на  $x$ , мы получим независимое множество в  $G' \setminus F$ , так что ребро  $F$  нелишнее в  $G'$ . Если выбросить ребро  $xy$ , число независимости увеличится очевидным образом. Наконец, максимальное независимое множество в  $G \setminus E$  (мощности  $\alpha + 1$ ) также является независимым в  $G' \setminus E'$ .

*З а м е ч а н и е.* Граф из этого пункта является  $V$ -элементарным для  $V = E'$ . Поэтому приведённое преобразование — частный случай преобразования из задачи 23.3.

**Задача 21.** **1.** Пусть гиперграф  $G'$  получен добавлением к гиперграфу  $G$  вершины  $u$ , соединённой рёбрами с вершинами ключевого множества  $V$ . Ясно, что число независимости  $\alpha$  не уменьшилось. С другой стороны, если в  $G'$  есть независимое множество мощности  $\alpha + 1$ , оно получено добавлением к максимальному независимому множеству  $X$  гиперграфа  $G$  вершины  $u$ ; этого не может быть, ибо  $X \cap V$  содержит некоторую вершину  $x$ , а в новом графе есть ребро  $\{x, u\}$ .

Осталось показать, что  $G'$   $\alpha$ -критический. Если из него убрать одно из рёбер графа  $G$ , то уже в  $G$  без этого ребра было независимое множество мощности  $\alpha + 1$ , и оно же останется независимым в новом графе. Пусть мы убираем из  $G'$  ребро  $uv$  при  $v \in V$ . В силу минимальности ключевого множества, в  $G$  существует независимое множество  $X$  такое, что  $X \cap V = \{v\}$ . Тогда  $X \cup \{u\}$  — независимое множество мощности  $\alpha + 1$  в  $G' \setminus uv$ .

**2.** Докажем более сильное утверждение: *Если в гиперграфе  $G$  выбрать множество вершин  $V$  такое, что каждое ребро, содержащее  $x$ , пересекается с  $V$ , то  $|V| \geq \kappa(G)$ .* Из него немедленно следует требуемое, ибо набрать такое множество  $V$  можно, выбрав из каждого ребра, содержащего  $x$ , по вершине.

Предположим, что нашлось такое множество  $V$  мощности, меньшей  $\kappa(G)$ . Тогда в  $G$  найдётся максимальное независимое множество  $U$ , не пересекающееся с  $V$ . Тогда в каждом ребре, содержащем  $x$ , найдётся вершина, отличная от  $x$  и не лежащая в  $U$ . Это означает, что множество  $U \cup \{x\}$  окажется независимым в новом гиперграфе, то есть при добавлении  $x$  число независимости увеличилось.

**3.** Пусть  $u$  — некоторая вершина  $G$ . Добавим к  $G$  новую вершину  $x'$ ; для каждого ребра  $E$ , содержащего  $x$ , добавим ребро  $E \cup \{x'\} \setminus \{x\}$ , а также добавим ребро  $\{x, x'\}$ . Доказательство того, что эта конструкция работает, аналогично решению задачи 3.

**Задача 22.** Пусть при добавлении ребра  $U$  и перехода к ядру графа некоторые рёбра становятся лишними. Очевидно, что любой ключ таких рёбер содержит все вершины множества  $U$ . Назовём их  $U$ -лишними. Назовём симметризацией неустойчивого множества  $U$  расширение всех  $U$ -лишних рёбер. Заметим, что к  $U$ -лишним рёбрам при расширении добавляются все вершины множества  $U$ . Ясно, что все  $U$ -лишние рёбра так и останутся  $U$ -лишними, а ядро графа, полученного при добавлении  $U$  и стирании лишних рёбер, определено однозначно.

Теперь запустим серию правильных преобразований, в ходе которой размер рассматриваемого неустойчивого множества  $U$  нестрого возрастает, а при фиксированном  $|U|$  сумма степеней вершин в графе строго убывает. На каждом шаге мы выбираем  $U$ -лишнее ребро  $W$ , содержащее хотя бы две вершины, не лежащих в  $U$ . Назовём одну из них  $x$ . Если множество  $U' = U \cup \{x\}$  неустойчиво, симметризуем  $U'$  и заменим  $U$  на  $U'$ . Если же множество  $U' = U \cup \{x\}$  устойчиво, сжимаем ребро  $W$  до  $U'$ . Из-за наличия полуинварианта, процесс конечен и ведёт к образованию  $V$ -элементарного графа.

**Задача 23 1.** Пусть при добавлении ребра  $V$  гиперграф распадается на части  $G_0$  (содержит  $V$ ) и другие (назовём их объединение  $G_1$ ). Поскольку число независимости не изменилось, любой ключ ребра  $V$  содержит хотя бы одну вершину из  $W$ . С другой стороны, поскольку каждое из рёбер, содержащих  $V$ , в исходном графе не лишнее, для любой вершины  $w$  множества  $W$  в новом графе найдётся ключ ребра  $v$ , содержащий из множества  $W$  единственную вершину  $w$ . Поскольку исходный гиперграф связный, хотя бы одна из вершин  $w$  множества  $W$  лежит в  $G_1$ . Поскольку часть ключа  $V$ , содержащего  $w$  и не содержащего других вершин  $W$ , лежащую в  $G_1$ , нельзя заменить на независимое множество в  $G_1$  такого же размера,  $W$  содержит ключевое множество в  $G_1$ . Поскольку при удалении любого  $V$ -лишнего ребра это свойство нарушится,  $W$  является ключевым множеством в  $G_1$ . Отсюда, в частности следует, что  $W \subset G_1$  и что  $G_1$  связно.

**2.** Если  $V$  состоит из одной вершины, то  $G_0$  состоит из одной вершины с петлёй. Но поскольку множество  $V$  неустойчиво, граф  $G_1$  несвязный, что противоречит пункту 1.

**3.** Поскольку  $W$  — ключевое множество в  $G_1$ , новые рёбра не будут лишними. Пусть ребро  $U \subset G$  стало лишним в  $G'$  с новой вершиной  $x$ . Пусть  $X$  — ключ ребра  $U$  в  $G$ . Если  $X$  не содержит  $V$  целиком, то  $X$  — ключ ребра  $U$  в  $G'$ . Иначе выбросим из  $X$  какую-нибудь вершину  $V$  и добавим  $x$ , получив ключ ребра  $U$  в  $G'$ . В обоих случаях, противоречие.

**4.** Пусть  $U$  — неустойчивое множество в графе  $G$ , а ядро графа  $G \cup U$  состоит из компонент  $G_0$  (содержащей  $U$ ),  $G_1, G_2, \dots, G_t$ . После симметризации  $U$ , ядро графа  $G \cup U$  определено однозначно. Заметим, что в процессе из задачи 22 все  $U$ -лишние рёбра остаются  $U$ -лишними, а новых  $U$ -лишних рёбер не образуется. Тогда в процессе из задачи 23 будет отделена одна из исходных компонент ядра (НУО,  $G_1$ ). Ребро  $V$  будет содержать  $U$ . При  $t > 1$  множество  $U$  по-прежнему будет неустойчивым, а компоненты ядра останутся теми же, за исключением  $G_1$ . Процесс из задач 22, 23 будет продолжаться до тех пор, пока множество  $U$  не станет устойчивым.

Чтобы доказать теорему о расколе для гиперграфов при  $|U| > 1$ , достаточно сжать итоговое ребро  $V$  до  $U$ . Чтобы доказать теорему о расколе для гиперграфов при  $|U| = 1$ , достаточно добавить вершину с петлёй. Чтобы доказать теорему о расколе для графов (по вершине  $x$ ), заметим, что все компоненты, кроме компоненты, содержащей  $x$ , по построению являются графами.

В оставшейся части можно выбросить  $x$ , после чего она превратится в турановский граф с ключевым числом, не превосходящим степень  $x$ . После этого, добавим вершину, соединённую простыми рёбрами с вершинами ключевого множества наименьшего размера.

**Задача 24.** Обозначим через  $H_1$  одну из компонент связности гиперграфа  $G \setminus \{x, y\}$ , а через  $H_2$  — объединение всех остальных. Через  $H_i^x, H_i^y, H_i^{xy}$  будем обозначать индуцированные подгиперграфы на множестве  $H_i \cup \{x\}$ ,  $H_i \cup \{y\}$  и  $H_i \cup \{x, y\}$ , соответственно. То, что  $\{x, y\}$  — сочленение, означает, что каждое ребро лежит в одном из гиперграфов  $H_i^{xy}$ . Обозначим  $\alpha_i = \alpha(H_i)$ .

1. Предположим, что в  $G$  есть ребро  $xy$  (и, значит, нет других рёбер, содержащих  $x$  и  $y$  одновременно). тогда в  $G$  есть максимальное независимое множество, не содержащее  $x$  и  $y$ ; значит,  $\alpha(G) = \alpha_1 + \alpha_2$ .

Пусть  $e$  — ребро в  $H_1^x$ , содержащее  $x$  (оно есть!). В графе  $G \setminus e$  есть независимое множество мощности  $\alpha_1 + \alpha_2 + 1$ ; оно обязано содержать  $x$  (и, значит, не содержать  $y$ ), и содержать по  $\alpha_i$  вершин из  $H_i$ . В пересечении с  $H_2^x$  оно даёт независимое множество размера  $\alpha_2 + 1$ . Аналогично, в графе  $H_1^y$  найдётся независимое множество мощности  $\alpha_1 + 1$ . Объединяя их, получим независимое множество в  $G$  мощности  $\alpha_1 + \alpha_2 + 1$ , что невозможно. Значит, ребра  $xy$  в  $G$  нет.

*З а м е ч а н и е.* Похожими методами можно доказать более общее утверждение: *В турановском гиперграфе никакая клика (из рёбер мощности 2) не является сочленением.*

2. Из стандартных соображений следует, что  $\alpha(G) \leq \alpha_1 + \alpha_2 + 1$ , иначе можно удалить все рёбра между  $H_1, H_2, \{x\}$  и  $\{y\}$ . Предположим, что  $\alpha(G) = \alpha_1 + \alpha_2 + 1$ . Тогда можно провести рассуждение, аналогичное предыдущему пункту. Выкинув из  $G$  ребро, содержащееся в  $H_1^{xy}$  и содержащее  $x$ , получаем независимое множество мощности  $\alpha_1 + \alpha_2 + 2$ , необходимо содержащее  $x, y$ , а также независимые множества в  $H_i$  мощностей  $\alpha_i$ . Значит, в  $H_2^{xy}$  есть независимое множество мощности  $\alpha_2 + 2$ , содержащее  $x$  и  $y$ . Объединяя его с аналогичным множеством в  $H_1^{xy}$ , получаем слишком большое независимое множество в  $G$ .

Итак,  $\alpha(G) = \alpha + \beta$ . Скажем, что вершина  $x$  ( $y$ ) *полезна для  $H_i$* , если  $\alpha(H_i^{x(y)}) > \alpha(H_i)$ . Если вершина  $x$  полезна для обоих  $H_i$ , то, объединяя соответствующие независимые множества, опять получаем слишком большое независимое множество в  $G$ . Значит, каждая вершина полезна максимум для одного из  $H_i$ . С другой стороны, если, скажем,  $x$  бесполезна для  $H_1$ , а  $y$  — для  $H_2$ , то можно удалить все рёбра между  $H_1^x$  и  $H_2^y$  без увеличения числа независимости, что тоже невозможно. Получается, что единственный оставшийся вариант — когда  $x$  и  $y$  полезны для какого-то  $H_j$  (скажем, для  $H_1$ ) и бесполезны для другого ( $H_2$ ).

Пусть  $H_2'$  — граф, полученный из  $H_2$  добавлением ребра  $e = \{x, y\}$ . Тогда по доказанному  $\alpha(H_2') = \alpha_2$ , то есть после добавления  $e$  к  $G$  становятся бесполезными все рёбра, соединяющие  $H_2^{xy}$  с  $H_1$ . Итак,  $\{x, y\}$  нестабильно.

3. Проводя рассуждения аналогичные предыдущему пункту, получаем, что  $\alpha(H_i^{xy}) \geq \alpha_i + 1$ , иначе можно было удалить все рёбра между  $H_i^{xy}$  и  $H_2$ . Значит,  $\alpha(H_2^{xy}) = \alpha_2 + 1$ . Покажем, что и  $\alpha(H_1^{xy}) = \alpha_1 + 1$ . Если это не так, то это число равно  $\alpha_1 + 2$ , и в  $H_1^{xy}$  есть независимое множество вида  $U \cup \{x, y\}$ ,  $|U| = \alpha_1, U \subset H_1$ . Но при выкидывании из  $G$  любого ребра  $f$ , лежащего в  $H_1^{xy}$  и содержащего  $x$ , в  $G \setminus f$  найдётся независимое множество, содержащее  $x$ , мощности  $\alpha_1 + \alpha_2 + 1$ . Оно содержит не более  $\alpha_1$  вершин из  $H_1$ . Заменяя эти вершины на  $U$ , получим независимое множество в  $G$  не меньшей мощности, что невозможно. Итак,  $\alpha(H_i^{xy}) = \alpha_i + 1$ .

Теперь видно, как построить наше преобразование. Пусть  $F$  — множество рёбер, соединяющих  $H_1$  с  $H_2^{xy}$ . Выкинем все эти рёбра, добавим ребро  $e = \{x, y\}$  к  $H_2^{xy}$ , а к  $H_1$  добавим вершину  $v$  и все рёбра вида  $f \setminus \{x, y\} \cup \{v\}$  для  $f \in F$ . Обозначим новые компоненты через  $H_1'$  и  $H_2'$  очевидным образом.

Из сказанного выше легко следует, что  $\alpha(H_i') = \alpha_i$  (если бы в  $H_1'$  нашлось большее независимое множество, заменив в нём  $v$  на  $\{x, y\}$ , мы получили бы, что  $\alpha(H_1^{xy}) = \alpha_1 + 2$ ). Осталось проверить, что графы  $H_i'$  являются  $\alpha$ -критическими; это легко следует из доказанного выше.

**Задача 27.** 1. Гиперграф, полученный в результате рекомбинации, обозначим через  $G'$ . Для гиперграфа  $G'$  выполняется неравенство  $\alpha(G') \geq \alpha(G_1) + \alpha(G_2)$ . Действительно, пусть  $E_1$  — ключ ребра  $U$  в гиперграфе  $G_1$ . В гиперграфе  $G_2$ , в силу его турановости, можно выбрать максимальное независимое множество  $E_2$ , содержащее вершину  $w$ . Тогда множество  $E_1 \cup E_2 \setminus \{w\}$  — независимое множество в гиперграфе  $G'$  мощности  $\alpha(G_1) + \alpha(G_2)$ .

С другой стороны, неравенство  $\alpha(G') \leq \alpha(G_1) + \alpha(G_2)$  тоже верно. Действительно, пусть  $E$  — максимальное независимое множество в гиперграфе  $G'$ . Если оно не содержит сразу все вершины множества  $U$ , то оно разбивается на части  $E_1 = E \cap G_1$  и  $E_2 = E \cap G_2$ , являющиеся независимыми множествами в гиперграфах  $G_1$  и  $G_2$  соответственно. Если же  $U \subset E$ , то в части  $E_1$  может быть  $\alpha_1 + 1$  вершина, но часть  $E_2$  может быть дополнена вершиной  $w$  до независимого множества в  $G_2$ . Следовательно,  $E_2$  содержит не более  $\alpha_2 - 1$  вершины, и всего в  $E$  не более  $\alpha_1 + \alpha_2$  вершин.

**2, 3, 4.** Докажем, что произвольное новое ребро  $V'$ , полученное из ребра  $V$  гиперграфа  $G_2$ , не лишнее. То есть, построим независимое множество в гиперграфе  $G \setminus V'$  мощности  $\alpha(G) + 1$ . Это можно сделать так. Пусть  $E_1$  — ключ ребра  $U$  в гиперграфе  $G_1$ . Пусть  $E_2$  — ключ ребра  $V$  в гиперграфе  $G_2$ . Тогда нам подходит множество  $E_1 \cup E_2 \setminus w$ .

Докажем теперь, что в  $G_1$  нет лишних рёбер, то есть для любого ребра  $V \neq U$  гиперграфа  $G_1$  построим независимое множество в гиперграфе  $G \setminus V$  мощности  $\alpha(G) + 1$ . Пусть  $E_1$  — ключ ребра  $V$  в гиперграфе  $G_1$ . Пусть  $x$  — вершина ребра  $U$ , не входящая в  $E_1$ . По условию, в гиперграфе  $G_2$  было ребро  $W$ , которое мы растянули на вершину  $x$  (и, возможно, на какие-то еще). Пусть  $E_2$  — ключ ребра  $W$  в гиперграфе  $G_2$ . Тогда нам подходит множество  $E_1 \cup E_2 \setminus w$ . Пункт 2 доказан.

Докажем теперь, что при выполнении условий 3-го или 4-го пункта гиперграф  $G_2$  не содержит лишних рёбер, то есть для любого ребра  $V$  в гиперграфе  $G_2$ , не содержащего вершину  $w$ , построим независимое множество в гиперграфе  $G \setminus V$  мощности  $\alpha(G) + 1$ .

Пусть  $E_2$  — ключ ребра  $V$  в гиперграфе  $G_2$ . В пункте 3 возьмём за  $E_1$  любое максимальное независимое множество в  $G_1$ . В пункте 4 возьмём за  $E_1$  максимальное независимое множество в  $G_1$ , не пересекающее  $U$  (такое найдётся, если  $U$  свободно).

Итак, мы уже доказали, что при выполнении одного из условий 3, 4 рекомбинация является правильным преобразованием.

**5.** Теперь нужно доказать, что если в  $G_1, G_2$  все рёбра свободные, то и в  $G$  все рёбра свободные. Пусть  $E_1$  — максимальное независимое множество в  $G_1 \setminus U$ . Пусть  $V$  — произвольное ребро  $G_2$ , содержащее  $w$ , а  $E_2$  — максимальное независимое множество в  $G_2 \setminus V$ . Тогда множество  $E_1 \cup E_2$  — максимальное независимое множество в  $G$ , не содержащее ребра, полученного из  $V$ . Аналогично действуем для рёбер из  $G_2$ , не содержащих  $w$ , ключ которых не также содержит  $w$ . Если же ребро  $V$  из  $G_2$  не содержит  $w$ , а его ключ  $E_2$  содержит  $w$ , дополним  $E_2/w$  ключом ребра  $U$  в  $G_1$ . Осталось разобрать случай ребра  $V \neq U$  из  $G_1$ . Ключ  $E_1$  ребра  $V$  не содержит некоторую вершину  $x \in U$ . По условию, в графе  $G_2$  было ребро  $W$ , которое мы растянули на вершину  $x$  (и, возможно, ещё что-то). Пусть  $E_2$  — ключ ребра  $W$  в гиперграфе  $G_2$ . Тогда нам подходит множество  $E_1 \cup E_2 \setminus w$ . Пункт 5 доказан.

**6.** Для построения двух примеров турановских гиперграфов достаточно взять гиперграф, содержащий одно ребро  $A_1B_1C_1$  и клонировать одну из его вершин ( $A_1$ ), получив гиперграф  $G_1$ . Тогда вершины  $B_1, C_1$  образуют ключевое множество. В качестве  $G_2$  возьмём клику  $A_2B_2C_2D_2$ . Проведём рекомбинацию по ребру  $A_1B_1C_1$  и вершине  $D_2$ , проведя рёбра  $D_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$ . Ребро  $B_2C_2$  стало лишним, поскольку оно совпадает со своим ключом в  $G_2$  и «блокирует» ключевое множество  $B_1, C_1$  в гиперграфе  $G_1$ , см. рис. 18.

**Задача 28.** Итак, у нас уже есть серия бесплатных гиперграфов из задачи 20.3. Их ассоциированный граф Турана состоит из нескольких клик на 3 вершинах и клики на 4 вершинах. Несложно убедиться, что их нельзя расколоть ни по одной вершине, следовательно, они не получают рекомбинацией. Несложно убедиться также, что все их рёбра свободны. Значит, можно

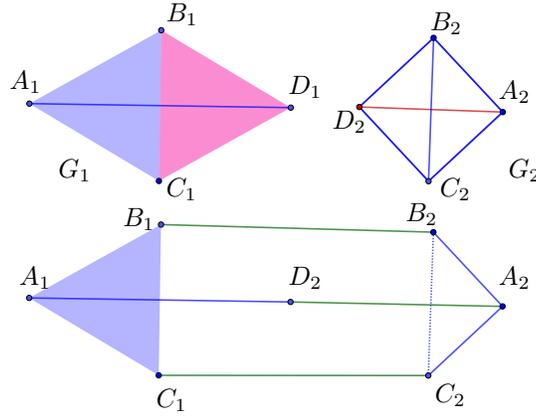


Рис. 18. Рекомбинация.

запустить произвольную рекомбинацию, получив необозримую серию бесплатных гиперграфов. Следующий шаг — превращение этой серии в серию бесплатных графов.

*Избыточность* ребра  $U$  мы определим как  $|U| - 2$ . *Избыточность* гиперграфа — суммарная избыточность его рёбер. В частности, гиперграф без петель с избыточностью 0 является графом. Назовём рекомбинацию гиперграфов  $G_1$  и  $G_2$  по свободному ребру  $U$  и вершине  $w$  *минимальной*, если каждая вершина  $U$  входит ровно в одно новое ребро. Заметим, что минимальная рекомбинация возможна тогда и только тогда, когда степень вершины  $w$  не превосходит  $|U|$ . Очевидно, что минимальная рекомбинация не меняет степени вершин.

**Лемма.** Пусть степень вершины  $w$  равна  $d$ . Тогда минимальная рекомбинация компонент связности  $G_1, G_2$  турановского гиперграфа уменьшает его избыточность на  $d - 2$ .

*Доказательство.* Суммарная избыточность изменяющихся при рекомбинации рёбер  $G_2$  увеличится на  $|U| - d$ , а суммарная избыточность рёбер  $G_1$  уменьшится на  $|U| - 2$  за счёт исчезновения  $U$ . Следовательно, избыточность гиперграфа уменьшится на  $d - 2$ , ч.т.д.

Заметим, что 3-регулярные примеры из задачи 20.3 имеют  $n = 2\alpha + 2$  вершины, их избыточность равна  $x = 2\alpha - 2$ . Клика на 4 вершинах тоже входит в эту серию. Дизъюнктное объединение  $p$  таких частей даёт  $n = 2\alpha + 2p$  и  $x = 2\alpha - 2p$ . Чтобы после  $p - 1$  шага минимальной рекомбинации получился граф, требуется условие  $x = p - 1$ , следовательно,  $2\alpha = 3p - 1$ . При  $p = 2k + 1$  получим  $\alpha = 3k + 1$  и  $n = 8k + 4$ . Для построения подойдёт любая последовательность минимальных рекомбинаций, например, такая, как на рисунке 19.

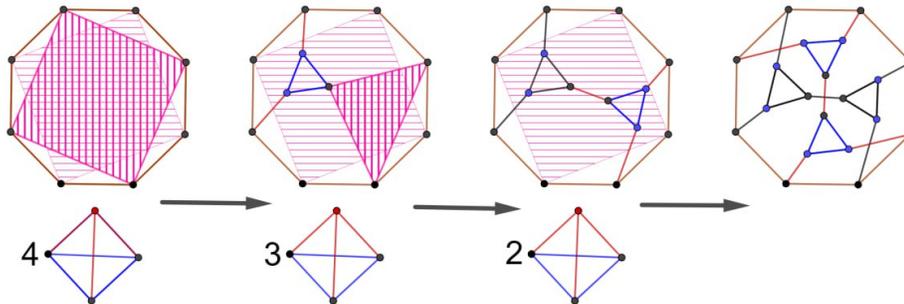


Рис. 19. Рекомбинация.

Чтобы построить примеры бесплатных графов с  $n > \frac{8\alpha+4}{3}$ , можно на некоторых шагах рекомбинации дополнительно расширять рёбра, увеличивая избыточность гиперграфа. Такие гиперграфы уже не будут 3-регулярными. Максимальное значение  $n$  при фиксированном  $\alpha$  в этой серии равно  $n = 3\alpha$  и достигается при рекомбинации 3-регулярного примера с  $\alpha = 2, n = 6, m = 8$

и  $\alpha - 2$  клик на 4 вершинах. Заметим, что ассоциированный граф Турана для всех построенных примеров состоит из клик на 3 и 4 вершинах.

Следующий «почти очевидный» шаг — обосновать трёхсвязность построенных графов и гиперграфов. Продолжение следует.

# Гомотопическая классификация замкнутых ломаных

Э. Алкин, О. Никитенко и А. Скопенков;  
представляется ими и Ю. Хроминым \*

## Содержание

1	Введение	1
2	О стиле этого текста	4
3	Число оборотов: определение и обсуждение	5
4	Классификация на плоскости без точки	6
5	«Разрешение» парадокса Пуанкаре	8
6	Инвариант для плоскости без двух точек	9
7	Классификация на плоскости без двух точек	10
8	Умножение ломаных	12
9	Решения некоторых задач	14

## 1 Введение

Мы излагаем (в виде последовательности задач) базовые случаи некоторых фундаментальных идей и методов математики (гомотопии, степени, фундаментальной группы, накрытия, инварианта Уайтхеда и т.д.). Это делается на основе элементарного примера: замкнутые ломаные в подмножестве плоскости. Хотя эти идеи и методы являются частью топологии, они используются во многих других областях, включая информатику [DDM+]. Задачи есть как очень простые (1.1), так и очень сложные (1.7).

**Ориентированной циклической последовательностью** называется упорядоченный набор с точностью до циклического сдвига. **Замкнутой ориентированной ломаной** называется ориентированная циклическая последовательность точек плоскости (не обязательно различных). Далее слово «ориентированная» пропускается.<sup>1</sup>

---

\*Э. Алкин, А. Скопенков: Московский Физико-Технический Институт. О. Никитенко: Алтайский технический университет (Барнаул). А. Скопенков: Независимый Московский Университет, <https://users.mcsme.ru/skopenko>. Ю. Хромин: Физико-математическая школа N 146 (Пермь). Благодарим А. Мирошникову за полезные обсуждения и подготовку некоторых рисунков.

<sup>1</sup>Таким образом, замкнутая ломаная (определенная здесь) не является подмножеством плоскости. Тем не менее, иногда мы работаем с замкнутой ломаной  $A_1 \dots A_m$  как с объединением отрезков  $A_i A_{i+1}$ , например, мы пишем «ломаная, не проходящая через точку».

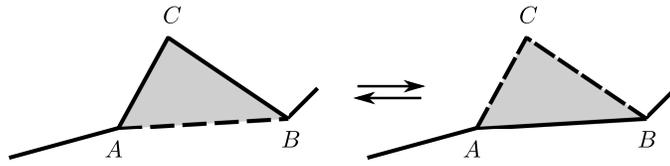


Рис. 1.1: Элементарное сокращение

Пусть  $N$  — подмножество плоскости. Неформально говоря, две замкнутые ломаные в  $N$  называются *гомотопными*, если одна может быть преобразована в другую «непрерывной деформацией» в  $N$ . Вот строгое определение. *Элементарным сокращением* в  $N$  замкнутой ломаной в  $N$  называется удаление такой ее вершины  $B$ , что для соседних с  $B$  вершин  $A, C$  (которые не обязательно различны) выпуклая оболочка вершин  $A, B, C$  содержится в  $N$  (см. рисунок 1.1). **Гомотопией в  $N$**  (кусочно-линейной) называется конечная последовательность замкнутых ломаных, для любых двух последовательных ломаных которой одна получена из другой элементарным сокращением в  $N$ . Две замкнутые ломаные называются (кусочно-линейно) **гомотопными в  $N$** , если существует гомотопия в  $N$ , первая и последняя ломаные в которой совпадают с заданными.

Далее, когда мы пишем о ломаной в некотором подмножестве плоскости, мы рассматриваем гомотопность (и элементарные сокращения) в том же подмножестве.

**Задача 1.1.** (b) Любые две одноточечные замкнутые ломаные на плоскости без точки гомотопны.

*Решение.* Пусть даны точки  $A$  и  $B$ . Возьмем точку  $C$ , не лежащую ни на одной из прямых, соединяющих  $A$  и  $B$  с выколотой точкой. Тогда нужная гомотопия —  $A, AC, C, CB, B$ .

Вопрос о классификации замкнутых ломаных на плоскости с точностью до гомотопии тривиален.

**Задача 1.1.** (a) Любые две замкнутые ломаные на плоскости гомотопны.

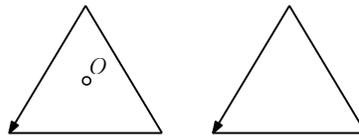


Рис. 1.2: Две замкнутые ломаные на плоскости без точки  $O$

**Задача 1.2.** Существуют негомотопные замкнутые ломаные на плоскости без точки.

См., например, рисунок 1.2. Попробуйте придумать инварианты, которые различают замкнутые ломаные в задачах 1.2–1.5 и 1.7 (в частности, на рисунках 1.2–1.6). Определение инвариантов и их свойства составляют теорию, представленную в §§3–7. Эта теория нужна также для Теоремы 1.6.

**Задача 1.3.** Четыре замкнутые ломаные на рисунке 1.3, попарно не гомотопны на плоскости без двух точек.

**Задача 1.4** (парадокс Пуанкаре). (a) Как на двух гвоздях, вбитых в плоскую стену, подвесить замкнутую веревку (с тяжелой медалью), чтобы веревка не падала, но после вынимания любого гвоздя падала?

Более строго, приведите пример двух точек  $P, Q$  и замкнутой ломаной в  $\mathbb{R}^2 - P - Q$ , гомотопной одноточечной ломаной в  $\mathbb{R}^2 - P$  и в  $\mathbb{R}^2 - Q$ , но не в  $\mathbb{R}^2 - P - Q$ .

(b) То же с заменой двух гвоздей на три.

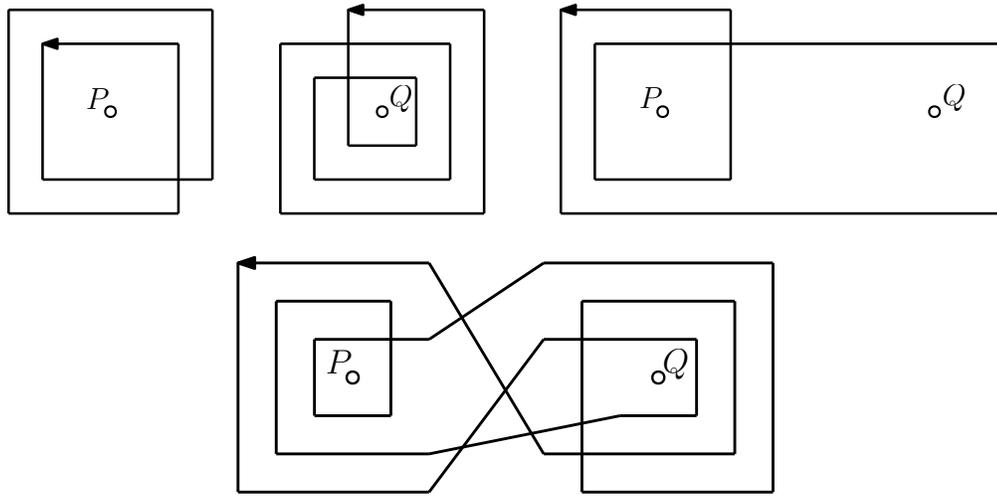


Рис. 1.3: Четыре замкнутые ломаные на плоскости без двух точек  $P, Q$

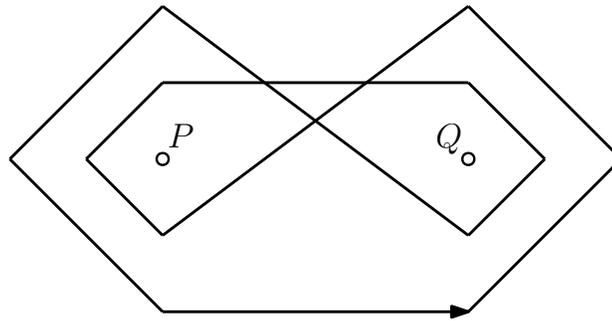


Рис. 1.4: Пример замкнутой ломаной на плоскости без двух точек  $P, Q$  к задаче 1.4.а

Эти примеры (и пример к 1.7.а) можно сначала приводить без доказательства их свойств. См. наглядную интерпретацию в [Zi10], [DDM+].

**Задача 1.5.** \* Замкнутые ломаные на рисунке 1.6 не гомотопны на плоскости без трех точек.

Изучая настоящий текст, читатель освоит полезные и важные идеи и методы. Они полезны и важны, поскольку дают следующий яркий результат, формулировка которого доступна неспециалисту (и многие другие результаты, см. учебники по топологии, например, [Sk20]).

**Теорема 1.6.** Для любого  $n$  существует алгоритм распознавания гомотопности замкнутых ломаных на плоскости без  $n$  точек.

Это конечная точка основных результатов по гомотопической классификации на плоскости без  $n$  точек (мы начинаем с  $n = 1, 2$ , см. утверждения 4.2, 7.6 и задачу 7.8).

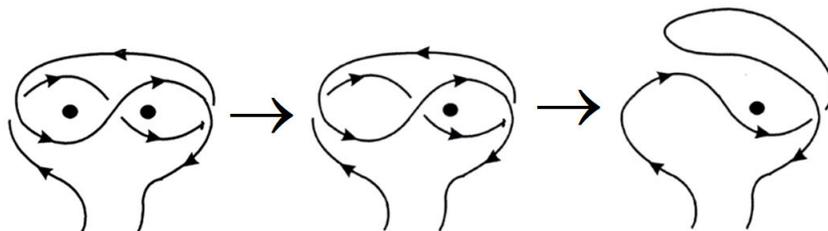


Рис. 1.5: После вынимания любого из гвоздей веревка падает

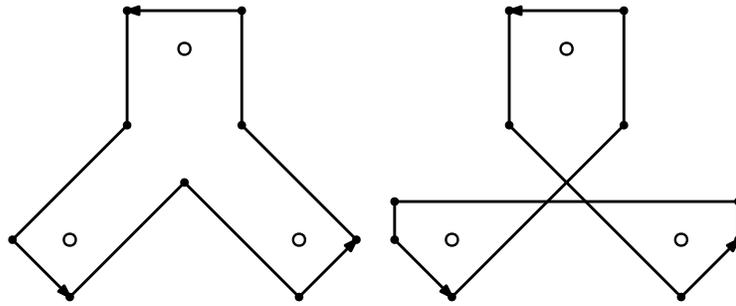


Рис. 1.6: Две замкнутые ломаные на плоскости без трех точек

Решая задачи, Вы увидите, как гомотопическая классификация связана с *комбинаторикой слов*. Естественно появится групповая структура, хотя и на несколько ином множестве *отмеченных* замкнутых ломаных с точностью до *отмеченной* гомотопности. Это проливает свет на связь представленной классификации с *комбинаторной теорией групп*. Благодаря этой связи топологические методы могут быть использованы в теории групп. Это отправная точка *геометрической теории групп* [GG].

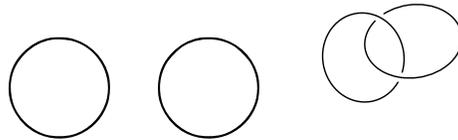


Рис. 1.7: Незацепленные и зацепленные кольца

**Задача 1.7** (загадка). \* В трехмерном пространстве даны два  
(а) незацепленных; (б) зацепленных

кольца, как показано на рисунке 1.7. Можно ли намотать и замкнуть веревку так, чтобы замкнутую веревку нельзя было оттащить далеко от двух колец, но можно было бы оттащить далеко от одного кольца, разрезав другое кольцо?

## 2 О стиле этого текста

Основные идеи представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму научного языка. За счет этого и текст становится доступным для начинающих, и удастся быстро добраться до интересных сложных и важных результатов, методов и теоретических идей.

Таким образом, многие из приведенных идей работают для более общих случаев. Мы не тратим время читателя на несложные обобщения. Их легко придумать или найти в литературе. Трудно именно *применить* общую теорию для ярких результатов, сформулированных вне этой теории, когда неизвестно заранее, какую теорию нужно применять (и вообще, можно ли хоть какую-то теорию применить).

Более простой материал приводится, чтобы сделать естественным и доступным более сложный. Попытка начинать с более простого (например, с частных случаев) повышает самостоятельность — а, значит, глубину и надежность — освоения материала. Проще самому доказать частный случай, самому продумать переход от частного к общему, чем самому сразу доказать общий случай. Самостоятельно придуманное надежнее запоминается и легче модифицируется. Кроме того, обычно на частном случае проще отловить и исправить ошибки. Подробнее см. [ZSS, §11.2].

Как правило, мы приводим *формулировку* красивого или важного утверждения *перед* последовательностью определений и результатов, составляющих его *доказательство*. В таких случаях для доказательства утверждения требуется часть дальнейшего материала. Об этом указано после формулировки утверждения. Если к утверждению (или задаче) не приведено ни доказательство, ни ссылка на него, то оно несложно. Основные результаты называются «теоремами», менее важные результаты — «утверждениями», важные вспомогательные результаты — «леммами». Если не оговорено противное, то все это (а также примеры) — задачи для решения.

Изучение путем решения задач характерно для серьезного обучения математике, см. [НС19, §1.1], [ZSS, §1.2] и данные там ссылки. Оно продолжает древнюю культурную традицию.

Если условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать (и тогда в ссылках мы называем это утверждение утверждением, а не задачей). *Загадкой* называется не сформулированный четко вопрос; здесь нужно придумать и четкую формулировку, и доказательство.

Определения важных понятий даны **жирным шрифтом**, чтобы их было проще найти.

Мы приглашаем школьников представлять свои письменные решения на конференциях школьников, см., например, [MMKS].

### 3 Число оборотов: определение и обсуждение

Везде рассматриваемые точки и ломаные расположены на плоскости.

Пусть  $O, A, B$  — точки, причем  $A \neq O$  и  $B \neq O$  (но, возможно,  $A = B$ ). *Ориентированным (или направленным) углом  $\angle AOB$*  называется число  $t \in (-\pi, \pi]$ , такое что вектор  $\overrightarrow{OB}$  сонаправлен вектору, полученному из  $\overrightarrow{OA}$  вращением на угол  $t$  против часовой стрелки. (Если Вы можете рассматривать векторы на плоскости как комплексные числа, то можете переписать это условие как  $\overrightarrow{OB} \uparrow\uparrow e^{it}\overrightarrow{OA}$ .) Далее рассматриваются ориентированные углы и слово «ориентированный» пропускается.

При решении задач можно использовать без доказательства следующее утверждение (близкое к аксиомам): *Для любых точек  $A, B, C$  на плоскости и точки  $O$ , не лежащей на объединении отрезков  $AB, BC, CA$ ,*

- $\angle OAB + \angle OBC + \angle OCA = \pm 2\pi$ , если  $O$  лежит в выпуклой оболочке точек  $A, B, C$ ,
- $\angle OAB + \angle OBC + \angle OCA = 0$ , иначе.

**Числом оборотов  $w(l, O)$**  замкнутой ломаной  $l = A_1 \dots A_m$  вокруг не лежащей на ней точки  $O$  называется количество оборотов при вращении вектора, начало которого находится в точке  $O$ , а конец обходит  $l$  в заданном порядке вершин. Строго говоря,

$$2\pi \cdot w(l, O) := \angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \dots + \angle A_{m-1}OA_m + \angle A_mOA_1.$$

Например, на рисунке 3.1  $w(ABC, O) = \frac{1}{2\pi} (\angle AOB + \angle BOC + \angle COA) = +1$  и

$$2\pi \cdot w(ABCD, O) = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA = \angle BOD + \angle DOB = 0.$$

**Задача 3.1.** (а) Пусть  $ABC$  — правильный треугольник и  $O$  — его центр. Найдите  $w(ABCABC, O)$ .

(б) Приведите пример замкнутой ломаной  $l$  на плоскости, такой что  $w(l, O) = 0$  для любой точки  $O \in \mathbb{R}^2 - l$ .

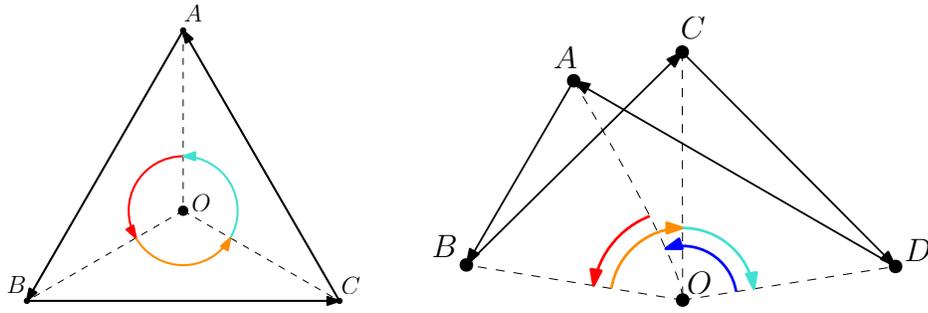


Рис. 3.1:  $w(ABC, O) = +1$  и  $w(ABCD, O) = 0$

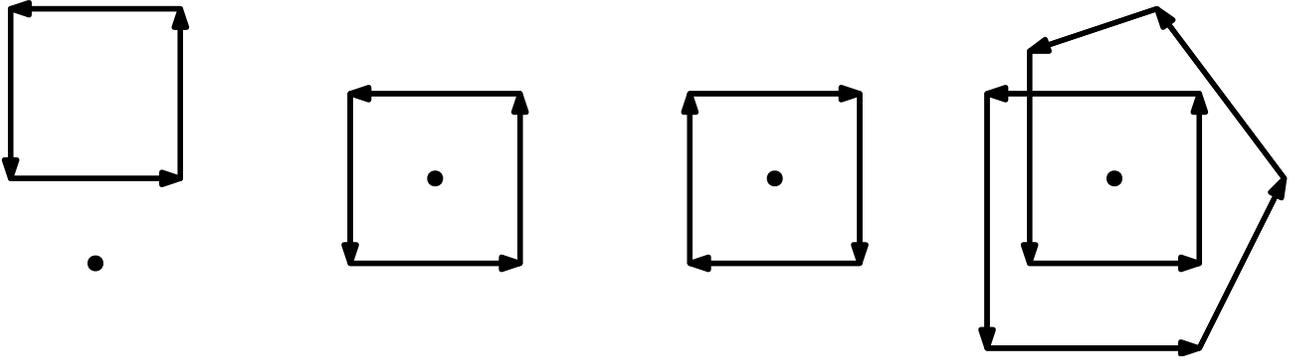


Рис. 3.2: Числа оборотов равны 0, +1, -1, +2

Результат задачи 3.1.а показывает, что числа оборотов для разных ломаных с одинаковым объединением их отрезков могут быть разными.

**Утверждение 3.2.** Число оборотов

- (а) любого контура выпуклого многоугольника;
  - (б) любой замкнутой ломаной без самопересечений
- вокруг любой точки из внешности (внутренности) равно 0 ( $\pm 1$ ). См. рисунок 3.2.

Пункт (б) доказывать не требуется; в зависимости от изложения он является либо следствием *теоремы Жордана* [Sk20, §1.4], либо леммой в ее доказательстве.

**Задача 3.3.** Для любого целого числа  $n$  и точки  $O$  существует замкнутая ломаная, число оборотов которой вокруг  $O$  равно  $n$ .

**Утверждение 3.4.** Число оборотов  $w(A_1 \dots A_m, O)$  является целым числом.

*Указание:* согласно свойствам, отмеченным маркером в начале этого параграфа,

$$\angle A_{m-1}OA_m + \angle A_mOA_1 \equiv \angle A_{m-1}OA_1 \pmod{2\pi}.$$

См. некоторые указания и решения в [ABM+, §1]. Подробнее о числе оборотов и связанных с ним понятиях см. [ABM+] и ссылки в этой работе.

## 4 Классификация на плоскости без точки

В этом параграфе рассматриваются замкнутые ломаные и их гомотопность *на плоскости без точки  $O$* .

**Задача 4.1.** (а) Число оборотов вокруг  $O$  является инвариантом гомотопности. Иными словами, замкнутые ломаные с разным числом оборотов вокруг  $O$  не гомотопны.

(б) Замкнутая ломаная  $l$  гомотопна одноточечной ломаной тогда и только тогда, когда  $w(l, O) = 0$ .

(с) Возьмем контур  $\partial\Delta$  треугольника  $\Delta$ , содержащего внутри себя точку  $O$ . Любая замкнутая ломаная  $l$  гомотопна  $|w(l, O)|$ -кратному обходу контура  $\partial\Delta$

- против часовой стрелки при  $w(l, O) \geq 0$ ,

- по часовой стрелке при  $w(l, O) \leq 0$ .

(Значит, замкнутые ломаные с одинаковым числом оборотов вокруг  $O$  гомотопны.)

**Утверждение 4.2.** Следующее отображение является взаимно однозначным соответствием между множеством гомотопических классов замкнутых ломаных на плоскости без точки и множеством целых чисел. Отображение переводит замкнутую ломаную (точнее, ее гомотопический класс) в ее число оборотов вокруг точки.

(Утверждение 4.2 доказано в задачах 3.3 и 4.1.)

Луч на плоскости называется *лучом общего положения относительно  $l$* , если он не проходит через ее вершины.

**Задача 4.3.** Возьмем замкнутую ломаную  $l$  и луч общего положения  $OP$  относительно  $l$ .

(а) Верно ли, что количество точек пересечения ломаной  $l$  и луча  $OP$  имеет ту же четность, что и  $w(l, O)$ ?

(б)\* Количество звеньев ломаной  $l$ , пересекающих луч  $OP$ , имеет ту же четность, что и  $w(l, O)$ .

Полезно понять, что описанное выше двумерное утверждение 4.2 по сути является одномерным.

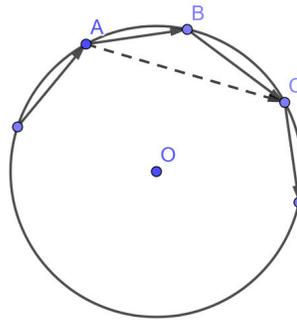


Рис. 4.1: Элементарное сокращение обхода

**Задача 4.4.** \* Назовем *обходом* ориентированную циклическую последовательность точек (фиксированной) окружности, в которой никакие две точки не являются диаметрально противоположными. *Элементарным сокращением* обхода называется удаление такой его точки  $B$ , что для соседних с  $B$  точек  $A, C$  выпуклая оболочка точек  $A, B, C$  не содержит центра окружности (см. рисунок 4.1). Два обхода называются *гомотопными*, если они могут быть соединены последовательностью обходов, в которой один из любых двух последовательных обходов получен из другого элементарным сокращением.

(а) Обход  $l$  гомотопен одноточечному обходу тогда и только тогда, когда  $w(l, O) = 0$  для центра  $O$  окружности.

(б) (загадка) Опишите обходы с точностью до гомотопности.

## 5 «Разрешение» парадокса Пуанкаре

Очевидно, что числа оборотов в примере к задаче 1.4.a, приведенном в презентации, вокруг точек  $P$  и  $Q$  равны нулю. Негомотопность в задаче 1.4.a следует из задачи 5.3 (или задачи 6.3). Идея заключается в использовании одного из следующих инвариантов гомотопности.

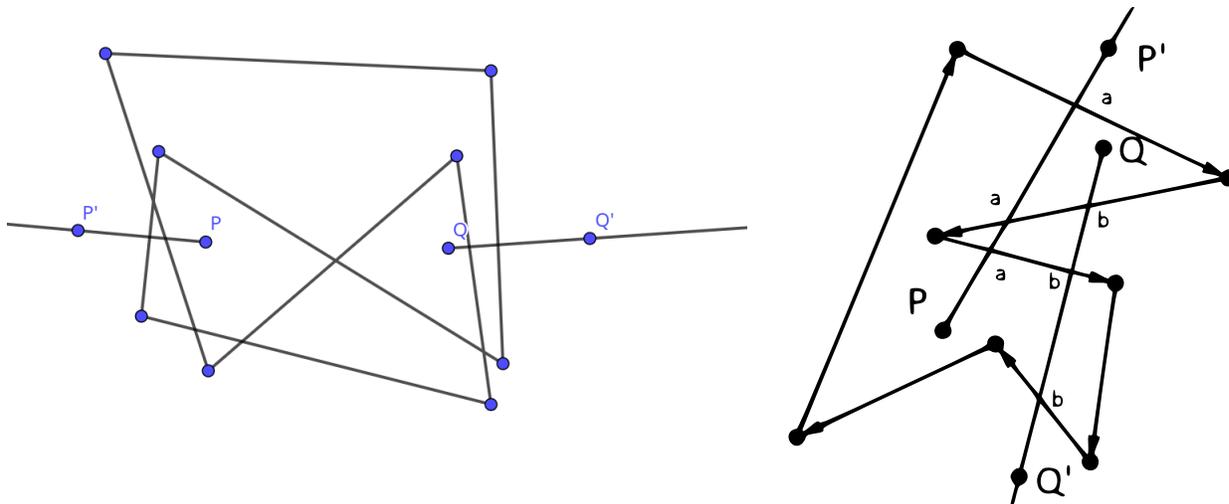


Рис. 5.1: Циклическое слово Пуанкаре по модулю 2:  $abab$  (слева),  $abaabb$  (справа)

В §§5–7

- $l$  — замкнутая ломаная на плоскости без двух точек  $P, Q$ ;
- $PP'$  и  $QQ'$  — непересекающиеся лучи общего положения относительно  $l$ .

Будем двигаться по  $l$  и выписывать букву  $a$  (букву  $b$ ) при каждом пересечении луча  $PP'$  (луча  $QQ'$ ). Полученное ориентированное циклическое слово называется *циклическим словом Пуанкаре по модулю 2* (см. рисунок 5.1).

**Задача 5.1.** (а) Любое циклическое слово из букв  $a$  и  $b$  является циклическим словом Пуанкаре по модулю 2 некоторой замкнутой ломаной на плоскости без двух точек (для некоторых лучей  $PP'$ ,  $QQ'$ ).

(б)\* Четность числа оборотов замкнутой ломаной  $l$  вокруг точки  $P$  (точки  $Q$ ) есть четность количества букв  $a$  (букв  $b$ ) в циклическом слове Пуанкаре по модулю 2 ломаной  $l$  (для любых лучей  $PP'$ ,  $QQ'$ ).

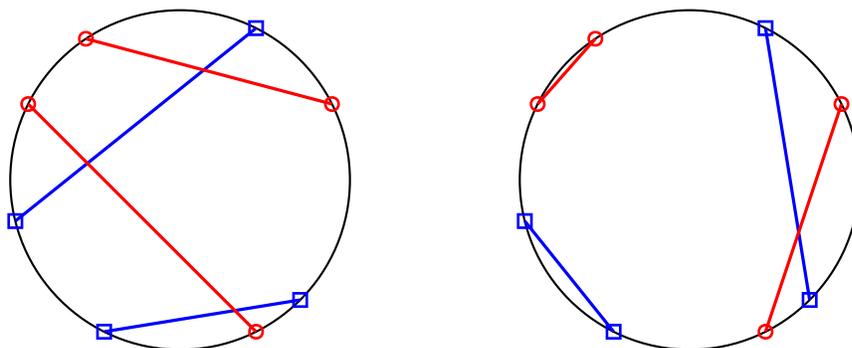


Рис. 5.2: Два разбиения на пары четырех красных точек (маленькие кружочки) и четырех синих точек (маленькие квадраты) на окружности

Пусть на окружности дано четное число красных точек и четное число синих точек, причем все эти точки попарно различны. Разобьем красные точки на пары, и синие точки на пары. Соединим точки в каждой красной/синей паре красной/синей хордой (см. рисунок 5.2). Множества красных точек и синих точек называются *зацепленными*, если количество пар пересекающихся красной и синей хорд нечетно.

**Задача 5.2.** Зацепленность не зависит от выбора разбиений на пары (см. рисунок 5.2).

Назовем *интересной* замкнутую ломаную  $l$  в плоскости без точек  $P, Q$ , для которой  $w(l, P)$  и  $w(l, Q)$  четны. По утверждению 4.1.a интересность сохраняется при замене ломаной на гомотопную. По утверждению 5.1.b для интересной замкнутой ломаной в циклическом слове Пуанкаре по модулю 2 количество букв  $a$  четно и количество букв  $b$  четно. Назовем интересную замкнутую ломаную *зацепленной*, если буквы  $a$  и  $b$  зацеплены.

**Задача 5.3.** Зацепленность интересной замкнутой ломаной не меняется при

- (a) изменении лучей  $PP'$  и  $QQ'$ ;
- (b) замене замкнутой ломаной  $l$  на гомотопную.

*Подсказка:* п. (b) вытекает из п. (a).

В п. (b) циклическое слово Пуанкаре по модулю 2 может не быть определено для некоторых промежуточных ломаных гомотопии. Поэтому следующий результат полезен для прямого доказательства утверждения 5.3.b.

**Задача 5.4.** Пусть даны две замкнутые ломаные, гомотопные на плоскости без двух точек  $P, Q$ . Возьмем непересекающиеся лучи общего положения  $PP'$  и  $QQ'$  относительно каждой из этих ломаных. Тогда эти ломаные могут быть соединены гомотопией, относительно каждой из ломаных которой лучи  $PP'$  и  $QQ'$  являются лучами общего положения.

*Указание преподавателю.* Большинству начинающих удобен вышеупомянутый подход к доказательству парадокса Пуанкаре. Однако, если школьник придумает идею решения задачи 7.7.a, разумно обсудить, сможет ли он развить ее до строгого доказательства.

## 6 Инвариант для плоскости без двух точек

Напомним, что в §§5–7

- $l$  — замкнутая ломаная на плоскости без точек  $P, Q$ ,
- $PP'$  и  $QQ'$  — непересекающиеся лучи общего положения относительно  $l$ .

**Задача 6.1.** Существует ломаная  $l$ , такая что  $w(l, P) = w(l, Q) = 0$ , ломаная  $l$  не зацеплена, но  $l$  не гомотопна одноточечной ломаной.

Рассмотрим множество всех (конечных) циклических слов (включая пустое слово) из букв  $a, b$ . Для такого слова *элементарное сокращение* — замена любого из подслов  $aa, bb$  пустым подсловом. Такое слово называется *экономным*, если в нем нет ни одного из подслов  $aa$  и  $bb$ .

**Задача 6.2.** Циклическое слово из букв  $a, b$  посредством элементарных сокращений дает единственное экономное слово.

*Экономная форма* (или *нормальная форма*) циклического слова  $w$  из букв  $a, b$  — это экономное слово, полученное из  $w$  элементарными сокращениями. Обозначим через  $E_{2,2,c}$  множество всех экономных слов. Обозначим через  $e_2(l) \in E_{2,2,c}$  экономную форму

циклического слова Пуанкаре по модулю 2 ломаной  $l$ . Априори  $e_2(l)$  зависит от лучей  $PP'$  и  $QQ'$ .

**Задача 6.3.** Слово  $e_2(l)$  не изменяется при

- (а) изменении лучей  $PP'$  и  $QQ'$ ;
- (б) замене замкнутой ломаной  $l$  на гомотопную.

**Задача 6.4.** Существует ломаная  $l$ , не гомотопная одноточечной ломаной, но для которой слово  $e_2(l)$  пусто.

Два циклических слова из букв  $a, b$  называются *эквивалентными*, если их можно соединить последовательностью циклических слов, в которой одно из любых двух последовательных циклических слов может быть получено из другого элементарным сокращением. Обозначим через  $F_{2,2,c}$  множество всех классов эквивалентности.

**Задача 6.5.** \* (а) Слово  $abab$  не эквивалентно пустому слову.

(б) Существуют ли два неэквивалентных циклических слова, оба состоящие из нечетного числа букв  $a$  и четного числа букв  $b$ ?

(с) (загадка) Постройте «естественное» взаимно однозначное соответствие  $E_{2,2,c} \rightarrow F_{2,2,c}$ .

(д) (загадка) Опишите  $E_{2,2,c}$  или, что то же самое,  $F_{2,2,c}$ .

**Задача 6.6.** \* Класс эквивалентности циклического слова Пуанкаре по модулю 2 не меняется при

- (а) изменении лучей  $PP'$  и  $QQ'$ ;
- (б) замене замкнутой ломаной  $l$  на гомотопную.

## 7 Классификация на плоскости без двух точек

Приведенные выше гомотопические инварианты не являются полными (см. задачи 1.4, 1.5, 6.1, 6.4). Теперь мы готовы ввести полный инвариант.

В этом параграфе рассматриваются замкнутые ломаные и их гомотопия *на плоскости без двух точек*  $P$  и  $Q$ .

Пусть  $A, B, C, D$  — точки на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. **Знаком** точки пересечения ориентированных отрезков  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  на плоскости назовем  $+1$ , если обход  $ABC$  происходит по часовой стрелке, и  $-1$  в противном случае (см. рисунок 7.1).

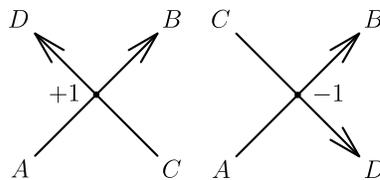


Рис. 7.1: Знак точки пересечения

**Задача 7.1** (ср. с задачей 4.3). \* Возьмем замкнутую ломаную  $m$  на плоскости без точки  $O$  и луч  $OR$  общего положения относительно  $m$ . Тогда  $w(m, O)$  равно сумме по звеньям  $x$  ломаной  $m$  знаков точек пересечения звена  $x$  и луча  $OR$ .

*Hint.* Доказательство аналогично задаче 4.3.

**Задача 7.2.** (а) (загадка) Аналогично §5 определите *циклическое слово Пуанкаре* из букв  $a, b, a^{-1}, b^{-1}$ .

(Подсказка: используйте определение знака.)

(b) (ср. с задачей 5.1.а) Любое циклическое слово из букв  $a, b, a^{-1}, b^{-1}$  является циклическим словом Пуанкаре некоторой замкнутой ломаной.

(Подсказка: используйте рис. 7.2.)

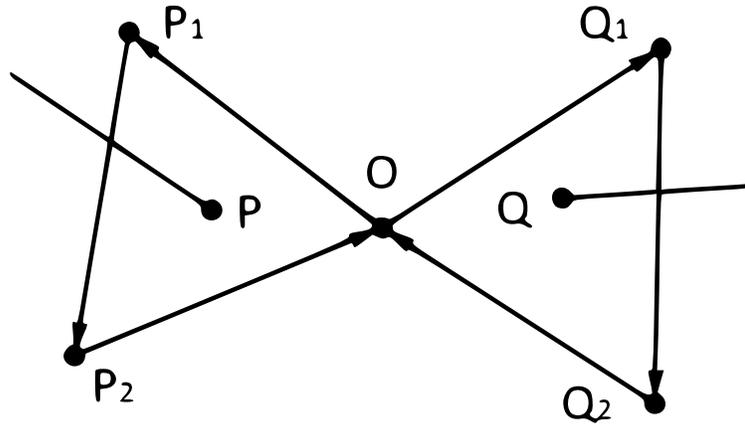


Рис. 7.2: «Восьмерка» и лучи общего положения

Рассмотрим множество всех (конечных) циклических слов (включая пустое слово) из букв  $a, a^{-1}, b, b^{-1}$ . Для такого слова *элементарное сокращение* — замена любого из подслов  $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$  пустым подсловом. Такое слово называется *экономным*, если у него нет ни одного из подслов  $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$ .

**Задача 7.3.** Циклическое слово из букв  $a, b, a^{-1}, b^{-1}$  посредством элементарных сокращений дает единственное экономное слово.

*Экономная форма* (или *нормальная форма*) циклического слова  $w$  из букв  $a, b, a^{-1}, b^{-1}$  — это экономное слово, полученное из  $w$  элементарными сокращениями. Обозначим через  $E_{2,c}$  множество всех циклических экономных слов. Обозначим через  $e(l) \in E_{2,c}$  экономную форму циклического слова Пуанкаре ломаной  $l$ . Априори  $e(l)$  зависит от лучей  $PP'$  и  $QQ'$ .

**Задача 7.4** (ср. с задачей 6.3). Слово  $e(l)$  не изменяется при

- (a) изменении лучей  $PP'$  и  $QQ'$ ;
- (b) замене замкнутой ломаной  $l$  на гомотопную.

**Задача 7.5** (ср. с задачей 6.4). Если  $e(l) = e(m)$  для замкнутых ломаных  $l$  и  $m$ , то  $l$  и  $m$  гомотопны.

*Указание:* Доказательство аналогично задаче 6.4. См. рис. 7.3.

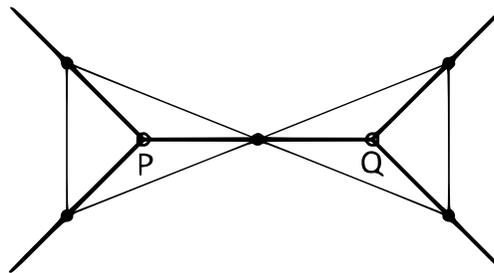


Рис. 7.3: Дополнительное построение и «двойственная» восьмерка на плоскости без двух точек  $P, Q$

**Утверждение 7.6.** Следующее отображение является взаимно однозначным соответствием между множеством гомотопических классов замкнутых ломаных на плоскости без двух точек и множеством  $E_{2,c}$ . Отображение переводит замкнутую ломаную в экономную форму ее циклического слова Пуанкаре.

(Утверждение 7.6 доказано в задаче 7.2.b, 7.4 и 7.5.)

Из этого утверждения вытекает теорема 1.6 для  $n = 2$ .

**Задача 7.7.** \* (загадка) Определите гомотопность ориентированных циклов в графе «восьмерка». Постройте взаимно однозначное соответствие между гомотопическими классами замкнутых ломаных на плоскости без двух точек и гомотопическими классами ориентированных циклов в графе «восьмерка».

Из этого утверждения вытекает аналог утверждения 7.6 для графа «восьмерки» вместо плоскости без двух точек.

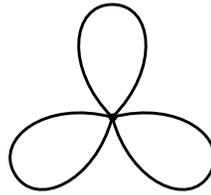


Рис. 7.4: Граф «букет трех окружностей»

**Задача 7.8.** (a) То же, что и в утверждении 7.6, с заменой плоскости без двух точек на плоскость без  $n$  точек.

(b)\* То же, что и в задаче 7.7, с заменой плоскости без двух точек на плоскость без  $n$  точек, а графа «восьмерка» — на граф «букет  $n$  окружностей» (см. рисунок 7.4).

(c) Верен ли аналог утверждения 7.4.a для  $n = 3$ ?

## 8 Умножение ломаных

**Отмеченной замкнутой ориентированной ломаной**  $A_1 \dots A_m$  называется последовательность (упорядоченный набор)  $(A_1, \dots, A_m)$  точек плоскости (не обязательно различных). Далее, слово «ориентированный» пропускается. Точка  $A_1$  называется *отмеченной точкой*.

Обозначим через  $l^{-1}$  отмеченную замкнутую ломаную  $A_1 A_m \dots A_2$  для отмеченной замкнутой ломаной  $l := A_1 A_2 \dots A_m$ .

В этом параграфе  $l_1, l_2$  — отмеченные замкнутые ломаные с общей отмеченной точкой  $X$ .

**Произведением** (конкатенацией, соединением) отмеченных замкнутых ломаных  $l_1 = X M_1 \dots M_m$  и  $l_2 = X N_1 \dots N_n$  с общей отмеченной точкой называется отмеченная замкнутая ломаная  $l_1 l_2 := X M_1 \dots M_m X N_1 \dots N_n$  (см. рис. 8.1).

**Замечание.** На плоскости без двух точек  $P, Q$  (рис. 7.2) возьмем отмеченные замкнутые ломаные  $a := OP_1 P_2$  и  $b := OQ_1 Q_2$ , ограниченные которыми части плоскости пересекают  $\{P, Q\}$  по  $P$  и по  $Q$ , соответственно. В этом замечании мы сокращаем «замкнутая ломаная, полученная из отмеченной замкнутой ломаной  $x$  забыванием отмеченной точки» до «замкнутая ломаная  $x$ ».

Примером к задаче 1.4.a является замкнутая ломаная,  $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ . На этом языке примером к задаче 1.4.b будет  $[a, b]c[a, b]^{-1}c^{-1}$  (сделайте это строгим самостоятельно).

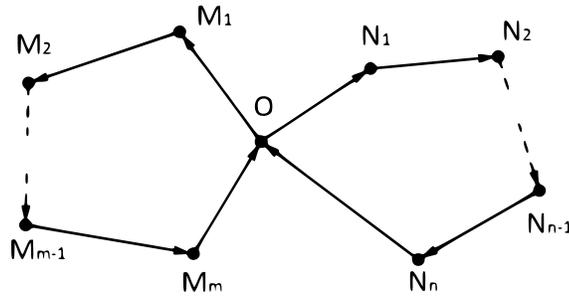


Рис. 8.1: Произведение отмеченных замкнутых ломаных  $l_1 = OM_1 \dots M_m$  и  $l_2 = ON_1 \dots N_n$

Вот версия парадокса Пуанкаре. Замкнутые ломаные  $aba^{-1}$  и  $b$  гомотопны, но замкнутые ломаные  $aba^{-1}b^{-1}$  и  $bb^{-1}$  не гомотопны (ломаная  $bb^{-1}$  гомотопна одноточечной замкнутой ломаной).

**Задача 8.1.** (а) (аддитивность) Число оборотов произведения  $l_1 l_2$  вокруг точки  $O$  вне  $l_1, l_2$  равно сумме чисел оборотов ломаных  $l_1$  и  $l_2$  вокруг  $O$ .

(б) \* Пусть  $A_0 A_1 A_2$  — правильный треугольник, а точка  $O$  — его центр. Для  $j = 0, 1, 2$  возьмем ломаную  $s_j$ , не пересекающую луч  $OA_j$  и соединяющую  $A_{j+1}$  с  $A_{j+2}$ , где нумерация берется по модулю 3. Тогда  $w(s_0 s_1 s_2, O) = \pm 1$ . (Произведение  $s_0 s_1 s_2$  определяется аналогично произведению отмеченных замкнутых ломаных.)

**Задача 8.2.** Умножение отмеченных замкнутых ломаных с общей отмеченной точкой  $X$

(а) ассоциативно, но не имеет единичного элемента;

(б) (загадка) не порождает корректно определенного умножения на классах гомотопности.

Отмеченные замкнутые ломаные с общей отмеченной точкой называются *отмеченно гомотопными*, если они «гомотопны с сохранением отмеченной точки» (сделайте это строгим самостоятельно).

**Задача 8.3.** (а) Если отмеченные ломаные гомотопны в плоскости без точки  $O$ , то они также отмеченно гомотопны в плоскости без точки  $O$ .

(б) Существуют отмеченные ломаные, гомотопные в плоскости без двух точек, не являющиеся отмеченно гомотопными в плоскости без двух точек.

**Задача 8.4.** (а) Умножение классов отмеченной гомотопности отмеченных замкнутых ломаных корректно определено, ассоциативно и имеет единичный элемент.

(б) Для этого умножения каждый класс имеет обратный.

Таким образом, естественная групповая структура существует не на интересующем нас множестве (множество замкнутых ломаных с точностью до гомотопности), а на множестве, которое в данный момент кажется менее естественным (множество отмеченных замкнутых ломаных с точностью до отмеченной гомотопности).

Действительно, чтобы определить произведение, нужны *отмеченные* замкнутые ломаные; чтобы получить корректно определенное умножение на гомотопических классах, нужна *отмеченная* гомотопность (задачи 8.2.b и 8.4).

Далее, отмеченные замкнутые ломаные и их отмеченная гомотопия рассматриваются на плоскости без двух точек  $P$  и  $Q$ .

Слово Пуанкаре отмеченной замкнутой ломаной  $x$  определяется аналогично циклическому слову Пуанкаре, только движение вдоль  $x$  начинается и заканчивается в отмеченной точке. Рассмотрим множество всех (конечных) слов (включая пустое слово) из букв  $a, b, a^{-1}, b^{-1}$ . Для такого слова *элементарное сокращение* — это замена любого

из подслов  $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$  пустым подсловом. Два таких слова называются *эквивалентными*, если их можно соединить последовательностью слов, в которой одно из любых двух последовательных слов может быть получено из другого с помощью элементарного сокращения. Обозначим через  $F_2$  множество всех классов эквивалентности (стандартное обозначение:  $\langle a, b \rangle$ ).

**Задача 8.5.** \* (а) Верно ли, что класс эквивалентности в  $F_2$  слова Пуанкаре отмеченной замкнутой ломаной не меняется при изменении лучей  $PP'$  и  $QQ'$ ?

(б) То же, при замене отмеченной замкнутой ломаной  $l$  на отмеченно гомотопную и фиксированных лучах  $PP'$  и  $QQ'$ .

(с) Умножение слов порождает операцию на  $F_2$  и превращает  $F_2$  в группу.

(эта группа называется *свободной группой с двумя образующими*).

(д) (ср. с задачей 7.5) Если слова Пуанкаре двух отмеченных замкнутых ломаных  $l_1, l_2$  эквивалентны, то  $l_1$  и  $l_2$  отмеченно гомотопны.

**Утверждение 8.6** (ср. с утверждением 7.6). *Следующее отображение является изоморфизмом между группой классов отмеченной гомотопности отмеченных замкнутых ломаных на плоскости без двух точек и группой  $F_2$ . Отображение переводит отмеченную замкнутую ломаную в ее слово Пуанкаре.*

(Это доказано в задаче 8.5.)

**Теорема 8.7** (загадка). (а) Для любого графа  $G$  с отмеченной точкой существует алгоритм, распознающий отмеченную гомотопность отмеченных ориентированных циклов в  $G$ .

(б) Для любого графа  $G$  существует алгоритм, распознающий гомотопность ориентированных циклов в  $G$ .

(с) Для любых двух графов существует алгоритм, распознающий гомотопность симплициальных отображений между ними. (См. определение в [Sk, §9 «Гомотопическая классификация отображений»], [Sk20e].)

Аналоги этой теоремы для 2-гиперграфов неверны! Это следует из алгоритмической неразрешимости проблемы тривиальности в некоторой группе, определяемой конечным числом образующих и соотношений. См. [Sk20, теорему 14.3.1] и ее обобщение в [Sk20e].

## 9 Решения некоторых задач

*Доказательство утверждения 1.1.a (А. Мизев).* Вот нужная гомотопия:

$$A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n \rightarrow A_1A_2 \dots A_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow A_1A_2 \rightarrow A_1.$$

□

*Доказательство утверждения 1.2 (А. Мизев).* На рисунке 1.2 изображены две ломаные с разным числом оборотов (у левой  $\pm 1$ , у правой 0 по утверждению в начале §3). По утверждению 4.1.a эти две ломаные не гомотопны. □

*Примеры к задаче 1.4.* См. рисунки 9.1, 1.5, 1.4.

*Набросок доказательства утверждения 1.4.a (получен редактированием текста А. Мизева).* Возьмем ломаную на рисунке 1.4 (см. также рисунки 9.1 (слева) и 1.5).

Легко проверить, что на плоскости без одной из данных точек, построенная ломаная гомотопна одноточечной.

Циклическое слово Пуанкаре по модулю 2 построенной ломаной равно  $abab$ . Это слово зацеплено, значит, по утверждению 5.3, ломаная не гомотопна одноточечной. □

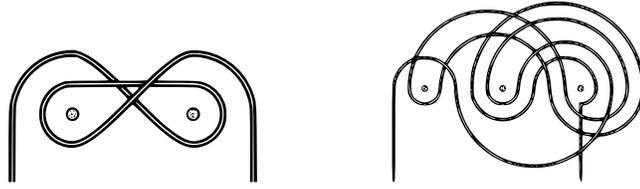


Рис. 9.1: Веревка на двух (слева) и трех (справа) гвоздях

Указания к задаче 4.1. (а) Достаточно доказать, что если ломаная  $l_1$  получена из ломаной  $l_2$  элементарным сокращением, то  $w(l_1, O) = w(l_2, O)$ .

Докажем это. Обозначим через  $A, B, C$  последовательные точки ломаной  $l_2$ , такие что «сокращение» вершины  $B$  дает ломаную  $l_1$ . Тогда

$$2\pi(w(l_1, O) - w(l_2, O)) = \angle AOB + \angle BOC - \angle AOC = 0,$$

где второе равенство справедливо по второму свойству ориентированных углов в §3 (см. рисунок 9.2).

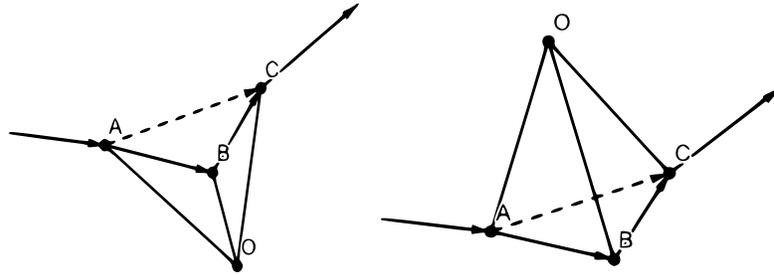


Рис. 9.2: Элементарное сокращение вершины  $B$

(b) Часть «только тогда» вытекает из (а). Для доказательства части «тогда» достаточно доказать, что если ломаная имеет более одной вершины и имеет нуль оборотов, то к ней можно применить элементарное сокращение.

Докажем это. Если в ломаной некоторые две последовательные вершины совпадают, то можно одну из них элементарно сократить. Пусть теперь любые две последовательные вершины различны. Так как сумма углов равна нулю, то найдутся два соседних угла  $\angle AOB$  и  $\angle BOC$  разных знаков. Тогда точки  $A$  и  $C$  лежат в одной полуплоскости относительно прямой  $BO$ . Значит, треугольник  $ABC$  не содержит точку  $O$ . Поэтому можно сделать элементарное сокращение вершины  $B$ .

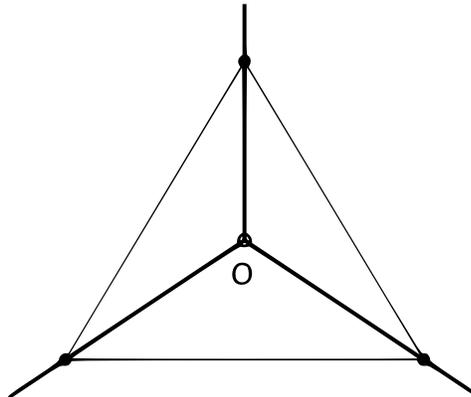


Рис. 9.3: Дополнительные лучи и «двойственный» треугольник на плоскости без точки

(с) Достаточно доказать, что *любая ломаная гомотопна ломаной, содержащей только вершины треугольника  $\Delta$* .

Докажем это. Обозначим вершины треугольника  $\Delta$  через  $B_1, B_2, B_3$ .

Во-первых, в абзаце после (\*) мы доказываем, что любая замкнутая ломаная  $l$  гомотопна замкнутой ломаной  $l'$ , которая

(\*) *содержит по крайней мере одну вершину  $\Delta$ , и для любых трех последовательных вершин  $X, B, Y$  из  $l'$  либо  $B$  является вершиной  $\Delta$ , либо точки  $X, B, Y$  лежат в  $\angle B_i O B_j$  для некоторых  $i, j$ .*

Пара  $\{XY, B\}$ , состоящая из отрезка  $XY$  треугольника  $l$  и вершины  $B$  треугольника  $\Delta$ , называется *плохой парой для  $l$* , если  $B \notin \{X, Y\}$  и  $B$  лежит в  $\angle XOY$ . Можно предположить, что свойство (\*) не выполняется для  $l$ , и  $l$  содержит вершину треугольника  $\Delta$ . Тогда существует плохая пара  $\{XY, B\}$  для  $l$ . Добавим  $B$  к  $l$  между  $X$  и  $Y$ , используя обратную операцию к элементарному сокращению. Количество плохих пар для полученной замкнутой ломаной меньше, чем для  $l$ . С помощью конечного числа таких операций можно получить замкнутую ломаную, гомотопную  $l$  и удовлетворяющую условию (\*).

Пусть  $l'$  — замкнутая ломаная, удовлетворяющая условию (\*). Тогда любую вершину ломаной  $l'$ , отличную от  $B_1, B_2, B_3$ , можно удалить элементарным сокращением. Полученная замкнутая ломаная также обладает свойством (\*). Следовательно, с помощью конечного числа таких элементарных сокращений мы получаем замкнутую ломаную, содержащую только вершины треугольника  $\Delta$ .  $\square$

*Набросок другого доказательства утверждения 4.1.с (А. Абзалмилов).* Выберем вершину  $A$  ломаной  $l$ . Обозначим через  $\bar{l}$  (не циклическую) последовательность точек, начинающуюся с  $A$  соответствующую ломаной  $l$ . Обозначим через  $\bar{d} = B_1 B_2 B_3$  (не циклическую) последовательность вершин треугольника  $\Delta$ , ориентированную так, что числа  $w(\bar{d}, O)$  и  $w(l, O)$  имеют одинаковый знак. Можно считать, что  $O$  не лежит на прямой  $AB_1$ . Обозначим

$$n := |w(l, O)|, \quad \bar{d}^{-1} := B_3 B_2 B_1, \quad \bar{d}^{-n} := \underbrace{\bar{d}^{-1} \dots \bar{d}^{-1}}_n \quad \text{и} \quad x := \bar{l} A B_1 \bar{d}^{-n} A.$$

Аналогично определим  $\bar{d}^n$ . Теперь нужная гомотопия от  $\bar{l}$  к  $n$ -кратному обходу  $\bar{d}^n$  контура  $\partial\Delta$  строится так:

$$\begin{aligned} \bar{l} &\rightarrow \bar{l}A \rightarrow \bar{l}AB_1 \rightarrow \bar{l}AB_1B_1 \rightarrow \bar{l}AB_1B_3B_3B_1 \rightarrow \\ &\bar{l}AB_1B_3B_2B_2B_3B_1 \rightarrow \bar{l}AB_1B_3B_2B_1B_1B_2B_3B_1 \rightarrow \\ \dots &\rightarrow \bar{l}AB_1\bar{d}^{-n}\bar{d}^nB_1 \rightarrow \bar{l}AB_1\bar{d}^{-n}A\bar{d}^nB_1 = x\bar{d}^nB_1 \Rightarrow A\bar{d}^nB_1 \rightarrow \bar{d}^nB_1 \rightarrow \bar{d}^n. \end{aligned}$$

Здесь все элементарные сокращения ' $\rightarrow$ ' возможны (так как точка  $O$  не лежит на отрезке  $AB_1$  и  $O \notin \partial\Delta$ ), а гомотопия ' $\Rightarrow$ ' строится так. Поскольку  $w(x, O) = 0$ , ломаная  $x$  гомотопна одноточечной ломаной. Более того, существует гомотопия между  $x$  и одноточечной ломаной  $A$  у каждой промежуточной ломаной которой есть вершина  $A$ . Припишем к каждой ломаной в этой гомотопии последовательность  $\bar{d}^n B_1$ . Получим гомотопию ' $\Rightarrow$ '.  $\square$

*Набросок доказательства утверждения 5.4 (А. Мизев).* Рассмотрим некоторую гомотопию между заданными ломаными  $l_1, l_2$ . Если ни одна из вершин ломаных гомотопии не лежит в объединении  $U$  лучей  $PP'$  и  $QQ'$ , то утверждение доказано. Иначе обозначим через  $A_3 \in U$  такую вершину. В следующем абзаце докажем, что существует точка  $A'_3 \notin U$ , такая, что

(\*) для любого «треугольника сокращения»  $A_1A_2A_3$ , треугольник  $A_1A_2A'_3$  не содержит ни  $P$ , ни  $Q$ .

Используем следующее утверждение. Пусть некоторый треугольник  $ABC$  не содержит некоторую точку  $O$ . Тогда существует  $\epsilon > 0$  такое, что для любой точки  $B'$ , удаленной от  $B$  не более, чем на  $\epsilon$ , треугольник  $AB'C$  не содержит  $O$ . Применим его к каждому «треугольнику сокращения», в котором  $B = A_3$ , и к  $O = P$  и  $O = Q$ . Возьмем  $\epsilon_1 > 0$ , меньшее всех полученных  $\epsilon$ 'в. Любая точка  $A'_3$ , удаленная от  $A_3$  не более чем на  $\epsilon_1$ , имеет свойство (\*). В  $\epsilon_1$ -окрестности точки  $A_3$  существует точка, не лежащая в  $U$ . Она и будет искомой.

В каждой ломаной гомотопии, содержащей  $A_3$ , заменим каждую вершину  $A_3$  на  $A'_3$ . По свойству (\*) получим гомотопию между  $l_1$  и  $l_2$ . Так мы уменьшим количество вершин в ломаных гомотопии, лежащих в  $U$ . Будем повторять это, пока существует вершина одной из ломаных гомотопии, лежащая в  $U$ . В итоге получим нужную гомотопию между  $l_1$  и  $l_2$ .  $\square$

*Набросок доказательства утверждения 5.3.b.* (Этот набросок получен редактированием текста А. Абзалилова.) Достаточно доказать, что зацепленность по модулю 2 не меняется при элементарном сокращении. По п. (а) можно взять лучи  $PP'$  и  $QQ'$  общего положения с ломаной до элементарного сокращения, так чтобы они не пересекали друг друга, и ни один из них не пересекал «треугольника сокращения». Тогда элементарное сокращение не меняет циклическое слово Пуанкаре по модулю 2. Значит оно не меняет и зацепленности по модулю 2.  $\square$

*Набросок доказательства утверждения 6.2 (Е. Волович).* Пусть, напротив, существует циклическое слово  $A$ , из которого элементарными сокращениями можно получить два разных экономных слова  $E_1$  и  $E_2$ .

Фразу «слово  $Y$  получено некоторым элементарным сокращением слова  $X$ » сокращаем до  $X \rightarrow Y$ , а фразу «слово  $Y$  получено несколькими элементарными сокращениями слова  $X$ » сокращаем до  $X \Rightarrow Y$ .

Пока существует слово  $B$ , из которого элементарными сокращениями можно получить два разных экономных слова, и  $A \Rightarrow B$ , будем заменять  $A$  на  $B$ . Этот процесс конечен, так как с каждой заменой длина слова  $A$  уменьшается.

После этого для  $i = 1, 2$  обозначим через  $B_i$  слово, такое что  $A \rightarrow B_i$  и  $B_i \Rightarrow E_i$ . Тогда  $B_1 \neq B_2$ . Поэтому пары букв в  $A$ , сокращением которых получаются  $B_1$  и  $B_2$ , не пересекаются. Значит, если сократить обе пары последовательно, то получится такое слово  $C$ , что  $B_1 \rightarrow C$  и  $B_2 \rightarrow C$ .

Так как  $A \Rightarrow C$ , то из  $C$  элементарными сокращениями можно получить только одно экономное слово  $E$ . Так как  $A \rightarrow B_1$ ,  $B_1 \Rightarrow E_1$  и  $B_1 \Rightarrow E$ , то  $E = E_1$ . Аналогично  $E = E_2$ . Противоречие.  $\square$

*Набросок доказательства утверждения 6.4 (получен редактированием текста А. Абзалилова).* Отмечу на плоскости точки  $O, P_1, P_2$  так, чтобы  $O$  была серединой отрезка  $PQ$ , никакие из отмеченных точек не лежали на одной прямой, и точка  $P$  лежала внутри треугольника  $OP_1P_2$ . Контрпримером является замкнутая ломаная  $l := (OP_1P_2)^2$ .

Модуль количества ее оборотов вокруг точки  $P$  равен 2. Значит, ломаная  $l$  не гомотопна одноточечной.

Направлю луч  $QQ'$  так, чтобы он не пересекал контура треугольника  $OP_1P_2$ . Тогда циклическое слово Пуанкаре по модулю 2 равно  $aa$ . Поэтому слово  $e_2(l)$  пусто.  $\square$

*Набросок доказательства утверждения 7.8.a (А. Абзалилов).* Обозначим выколотые точки через  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Выберем точку  $X$ , не лежащую на одной прямой ни с какими двумя из них.

Будем двигаться по ломаной и выписывать букву  $p_i$  (букву  $p_i^{-1}$ ) при каждом пересечении звена ломаной с лучом  $P_iP'_i$ , если знак точки их пересечения равен  $+1$  ( $-1$ ). (Если вершина лежит на луче, то выписывание определяется немного более сложно.) Полученное ориентированное циклическое слово называется *циклическим словом Пуанкаре*.

*Экономные циклические слова* и *экономная форма* циклического слова из букв  $p_1, \dots, p_n, p_1^{-1}, \dots, p_n^{-1}$  определяются аналогично случаю  $n = 2$ .

**Утверждение.** *Следующее отображение является взаимно однозначным соответствием между множеством гомотопических классов замкнутых ломаных на плоскости без  $n$  точек и множеством  $E_{n,c}$  экономных циклических слов из букв  $p_1, \dots, p_n, p_1^{-1}, \dots, p_n^{-1}$ . Отображение переводит замкнутую ломаную  $l$  в экономную форму  $e(l)$  ее циклического слова Пуанкаре.*

Аналогично утверждению 7.4.b,  $e(l)$  не меняется при замене ломаной  $l$  на гомотопную. Поэтому отображение из утверждения *корректно определено* на множестве гомотопических классов.

Аналогично утверждению 7.2.b это отображение *сюръективно*.

Остается доказать его *инъективность*. Для каждого экономного циклического слова  $\alpha$  из букв  $p_1, \dots, p_n, p_1^{-1}, \dots, p_n^{-1}$  построим ломаную  $k(\alpha)$  и докажем, что  $l$  гомотопна  $k(e(l))$ . Отметим на плоскости точки  $S_1$  и  $T_1$  так, чтобы  $S_1, T_1$  и  $X$  не лежали на одной прямой, внутри треугольника  $S_1T_1X$  из выколотых лежала только точка  $P_1$ , и  $w(XS_1T_1, P_1) = +1$ . Аналогично определим точки  $S_i$  и  $T_i$  для каждого  $i = 1, \dots, n$ . Есть только одна ломаная  $k(\alpha)$ , соответствующая  $\alpha$ , звенья которой — стороны треугольников  $S_iT_iX$  и никакие два соседних ребра не направлены в противоположные стороны.

Построим гомотопию, переводящую  $l$  в  $k(e(l))$ . Обозначим соседей вершины  $B$  ломаной  $l$  через  $B_-$  и  $B_+$ .

Пусть некоторая вершина  $B$  текущей ломаной лежит на одном из лучей  $P_iP'_i$ . Отметим на отрезке  $BB_+$  точку  $B'$  так, чтобы треугольник  $BB'B_-$  не содержал выколотых точек. Заменим  $B_-BB'$  на  $B_-B'$  элементарным сокращением. После таких операций *ни одна вершина текущей ломаной не будет лежать ни на одном из лучей  $P_iP'_i$* .

*Удлинением* назовем операцию, обратную элементарному сокращению.

Пусть некоторое звено  $B_-B$  текущей ломаной пересекает несколько лучей  $P_iP'_i$ . Добавим удлинением точки на отрезке  $B_-B$ , чтобы никакие из получившихся звеньев не пересекали более одного луча  $P_iP'_i$ . После таких операций *каждое звено текущей ломаной пересекает не более одного луча  $P_iP'_i$* .

Пусть некоторое звено  $B_-B$  текущей ломаной пересекает один луч  $P_iP'_i$ . Без ограничения общности  $w(XB_-B, P_i) = +1$ . Сделаем удлинения  $B_-B \rightarrow B_-S_iB \rightarrow B_-S_iT_iB$ . После таких операций *каждое звено текущей ломаной либо не пересекает ни одного из лучей  $P_jP'_j$ , либо совпадает с отрезком  $S_jT_j$* .

Пусть некоторое звено  $B_-B$  текущей ломаной не пересекает ни один из лучей  $P_iP'_i$ . Сделаем удлинение  $B_-B \rightarrow B_-XB$ . После таких операций *каждое звено текущей ломаной будет идти по сторонам одного из треугольников  $S_iT_iX$* .

Уберем соседние рёбра, направленные в разные стороны:  $B_-BB_-B_{++} \rightarrow B_-B_-B_{++} \rightarrow B_-B_{++}$ , где  $B_{++}$  — вершина, следующая за  $B_+ = B_-$ . Получится ломаная  $k(e(l))$ .

Значит  $l$ , и  $k(e(l))$  гомотопны.  $\square$

*Набросок доказательства утверждения 8.1.b (А. Абзалилов).* Для  $i = 0, 1, 2$  обозначим через  $t_i$  замкнутую ломаную с теми же вершинами, как в  $s_i$  в таком же порядке. Рассмотрим произведение  $t_0t_1t_2$ , где для произведения  $t_0t_1$  в качестве отмеченной точки выбрана  $A_2$ , а для  $(t_0t_1)t_2$  выбрана  $A_0$ . Обозначим через  $s$  произведение ло-

манных  $s_0s_1s_2$  и  $A_2A_1A_0$ , где в качестве отмеченной точки выбрана  $A_2$ . В этом решении мы пропускаем  $O$  в обозначении для числа оборотов. Тогда

$$w(s_0s_1s_2) + w(A_2A_1A_0) \stackrel{(1)}{=} w(s) \stackrel{(2)}{=} w(m_0m_1m_2) \stackrel{(3)}{=} \sum_{j=0}^2 w(m_j) \stackrel{(4)}{=} 0.$$

Равенства (1) и (3) верны по п. (а) (аддитивность).

Равенство (2) верно, поскольку у ломаной  $s$  те же ориентированные звенья, что и у ломаной  $m_0m_1m_2$ .

Равенство (4) верно, ибо луч  $OA_i$  не пересекается ни с одним из звеньев ломаной  $m_i$ , откуда по утверждению 7.1  $w(m_i, O) = 0$ .

Поэтому  $w(s_0s_1s_2, O) = -w(A_2A_1A_0, O) = \pm 1$ . □

Другое доказательство утверждения 8.1.b приведено в [ABM+, конец §1].

## Список литературы

- [ABM+] \* Э. Алкин, Е. Бордачева, А. Мирошников, А. Скопенков, Инварианты почти вложений графов в плоскость, arXiv:2410.09860.
- [DDM+] E. Demaine, M. Demaine, Y. Minsky, J. Mitchell, R. Rivest and M. Pătraşcu. Picture-Hanging Puzzles, Theory Comput. Syst., 54 (2014) 531–550, arXiv:1203.3602.
- [GG] \* [https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric\\_group\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_group_theory)
- [HC19] \* C. Herbert Clemens. Two-Dimensional Geometries. A Problem-Solving Approach, Amer. Math. Soc., 2019.
- [MMKS] \* Московская математическая конференция школьников, <https://old.mcsme.ru//mmks//index.htm>
- [Sk] \* А. Скопенков. Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, <http://www.mcsme.ru/circles/oim/algord.pdf>.
- [Sk20] \* А. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, Москва, МЦНМО, 2020 (2е издание). Обновляемая версия части книги: <http://www.mcsme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>
- [Sk20e] \* A. Skopenkov. Extendability of simplicial maps is undecidable, Discr. Comp. Geom., 69:1 (2023), 250–259, arXiv:2008.00492.
- [Zi10] \* D. Živaljević, Borromean and Brunnian Rings, <http://www.rade-zivaljevic.appspot.com/borromean.html>.
- [ZSS] \* Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии. Сборник под редакцией А. Заславского, А. Скопенкова и М. Скопенкова. М.: МЦНМО, 2018. Обновляемая версия части книги: <http://www.mcsme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf>.

В этом списке звездочками отмечены книги, обзоры и популярные статьи.

# Homotopy classification of closed polygonal lines

E. Alkin, O. Nikitenko and A. Skopenkov;  
presented by them and Yu. Khromin \*

## Contents

1	Introduction	1
2	On the style of this text	4
3	Winding number: definition and discussion	5
4	Homotopy classification in the plane minus a point	6
5	‘Resolution’ of the Poincaré paradox	7
6	A homotopy invariant in the plane minus two points	9
7	Homotopy classification in the plane minus two points	9
8	Multiplication of polygonal lines	11
9	Solutions of some problems	13

## 1 Introduction

In this text we expose (as a sequence of problems) basic cases of some fundamental ideas and methods of mathematics. (Namely, of homotopy, degree, fundamental group, covering, Whitehead invariant, etc.) This is done by considering the elementary example: closed polygonal lines in a subset of the plane. Although these ideas and methods are parts of topology, they are used in many other areas including computer science [DDM+]. They are both simple (1.1), and complicated (1.7) problems.

An **oriented cyclic sequence** is an ordered set up to a cyclic shift. A **closed oriented polygonal line** is an oriented cyclic sequence of points in the plane (the points need not be distinct). Below, the word ‘oriented’ is omitted.<sup>1</sup>

Let  $N$  be a subset of the plane. Informally speaking, two closed polygonal lines in  $N$  are said to be *homotopic*, if one can be transformed to the other by a ‘continuous deformation’ in

---

\*E. Alkin, A. Skopenkov: Moscow Institute of Physics and Technology. O. Nikitenko: Altay Technical University (Barnaul). Yu. Khromin: Physical and Mathematical School №146 (Perm). A. Skopenkov: Independent University of Moscow, <https://users.mccme.ru/skopenko>. We are grateful A. Miroshnikov for useful discussions and preparation of some figures.

<sup>1</sup>Thus, a polygonal line (defined here) is not a subset of the plane. Still, we sometimes work with a closed polygonal line  $A_1 \dots A_m$  as with the union of segments  $A_i A_{i+1}$ , e.g. we write ‘a polygonal line, not passing through a point’.

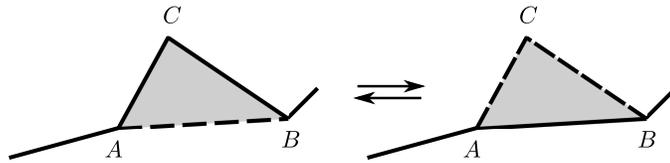


Figure 1.1: An elementary cancellation

$N$ . Let us give a rigorous definition. An *elementary cancellation* in  $N$  of a closed polygonal line in  $N$  is the removal of a vertex  $B$  such that for vertices  $A, C$  (that need not be distinct) adjacent to  $B$  the convex hull of vertices  $A, B, C$  is contained in  $N$  (see Figure 1.1). A (piecewise linear) **homotopy in  $N$**  is a finite sequence of closed polygonal lines in which for any two consecutive polygonal lines one is obtained from the other by an elementary cancellation in  $N$ . Two closed polygonal lines are said to be (piecewise linearly) **homotopic** in  $N$ , if there exists a homotopy in  $N$ , whose first and last polygonal lines coincide with the given ones.

*Below, when we write about a closed polygonal line in some subset of the plane, we consider the property of being homotopic (and elementary cancellations) in this very subset.*

**Problem 1.1.** (b) Any two one-point closed polygonal lines in the plane minus a point are homotopic.

*Proof.* Assume that points  $A$  and  $B$  are given. Take a point  $C$  that does not lie on any of the lines connecting  $A$  and  $B$  with the deleted point. Then  $A, AC, C, CB, B$  is a sequence of elementary homotopic closed polygonal lines.

The problem of classifying closed polygonal lines in the plane up to homotopy is trivial.

**Problem 1.1.** (a) Any two closed polygonal lines in the plane are homotopic.

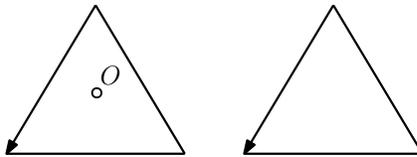


Figure 1.2: Two closed polygonal lines in the plane minus a point  $O$

**Problem 1.2.** There are non-homotopic closed polygonal lines in the plane minus a point

See, e.g., Figure 1.2. Try to invent invariants that distinguish the closed polygonal lines of Problems 1.2–1.5, 1.7 (in particular, in Figures 1.2–1.6). The definition of the invariants, and their properties form the theory presented in §§3–7. This theory is also required for Theorem 1.6.

**Problem 1.3.** The four closed polygonal lines in Figure 1.3 are pairwise not homotopic in the plane minus two points.

**Problem 1.4** (the Poincaré paradox). (a) How can you hang a closed rope (with a heavy medal) around the two nails (driven into a flat wall) so that the rope does not fall, but removing either nail causes the rope to fall?

More rigorously, give an example of two points  $P, Q$  and a closed polygonal line in  $\mathbb{R}^2 - P - Q$ , that is homotopic to a one-point closed polygonal line in  $\mathbb{R}^2 - P$ , and in  $\mathbb{R}^2 - Q$ , but not in  $\mathbb{R}^2 - P - Q$ .

(b) The same problem for three nails.

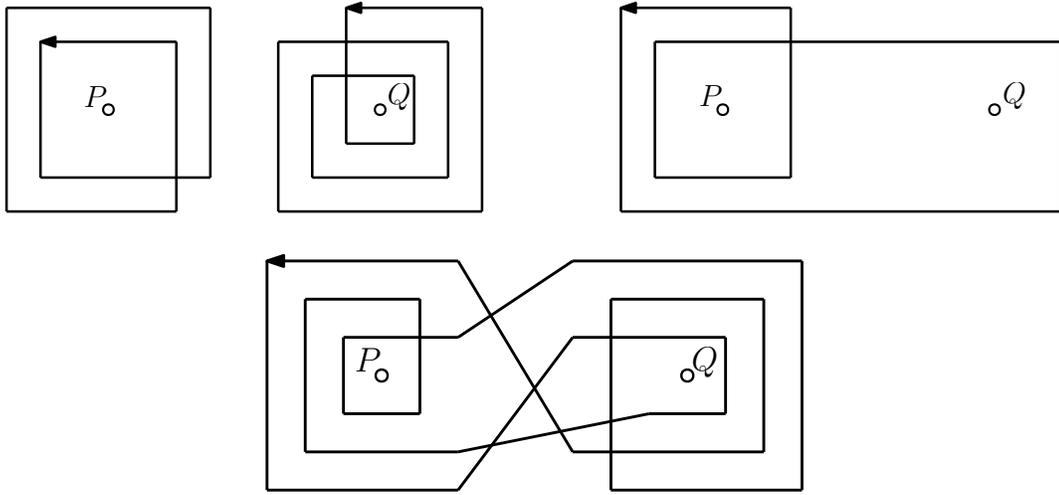


Figure 1.3: The four closed polygonal lines in the plane minus two points  $P, Q$

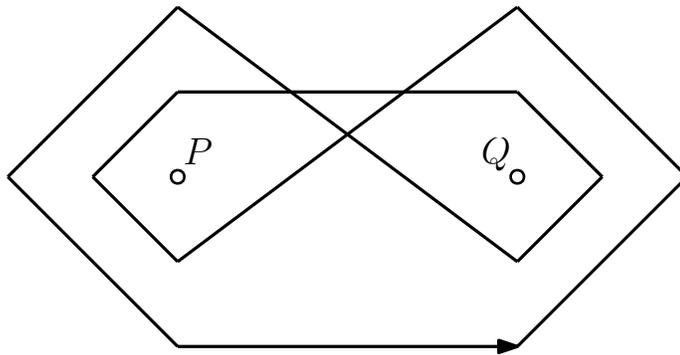


Figure 1.4: To Problem 1.4.a: a closed polygonal line in the plane minus two points  $P, Q$

These examples (and the example in 1.7.a) can be given without proof of their properties. For visualization, see [Zi10], [DDM+].

**Problem 1.5.** \* The closed polygonal lines in Figure 1.6 are not homotopic in the plane minus three points.

By studying this text, the reader will learn useful and important ideas and methods. They are useful and important, because they give the following bright result, whose statement is accessible to a non-specialist (and many other results, see textbooks on topology, e.g. [Sk20]).

**Theorem 1.6.** *For any  $n$ , there is an algorithm recognizing homotopy of closed polygonal lines in the plane minus  $n$  points.*

This is an endpoint of the main results on homotopy classification in the plane minus  $n$  points (starting from  $n = 1, 2$ , see Propositions 4.2, 7.6, and Assertion 7.8.a).

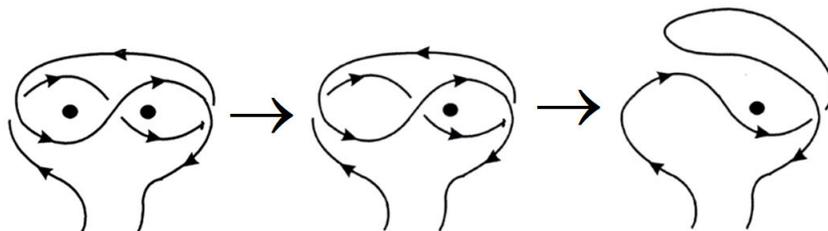


Figure 1.5: Removing either nail causes the rope to fall

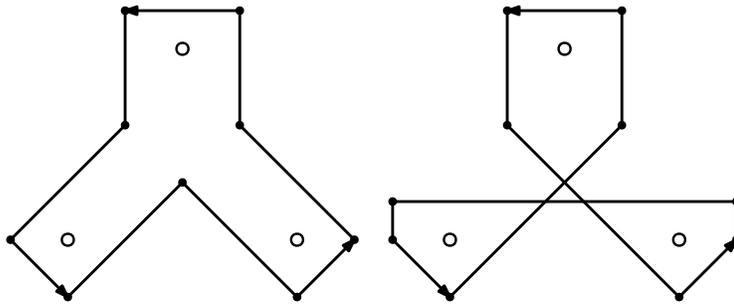


Figure 1.6: Two closed polygonal line in the plane minus three points

By solving the problems, you will see how homotopy classification is related to *combinatorics of words*. A group structure will naturally appear, although on a slightly different set of *based* closed polygonal lines up to *based* homotopy. This illuminates the relation of the exposed classification to *combinatorial group theory*. Due to this relation, topological methods can be used in group theory. This is the starting point of *geometric group theory* [GG].

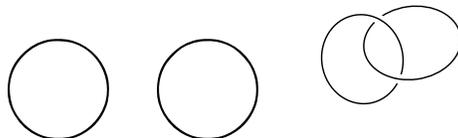


Figure 1.7: Unlinked and linked rings

**Problem 1.7** (Riddle). \* In 3-space there are two

(a) unlinked;    (b) linked

rings as in Figure 1.7. Can you wind and close a rope so that the closed rope cannot be pulled far away from the two rings, but can be pulled far away from one ring after cutting the other ring?

## 2 On the style of this text

*In this text we expose a theory as a sequence of problems*, see e.g. [HC19], [Sk21m, Introduction, Learning by doing problems] and the references therein. Most problems are useful theoretical facts. So this text could in principle be read even without solving problems or looking to §9. If a mathematical statement is formulated as a problem, then the objective is to prove this statement. Open-ended questions are called **riddles**; here one must come up with a clear wording, and a proof. *If a problem is named ‘theorem’ (‘lemma’, ‘corollary’, etc.), then this statement is considered to be more important.* Usually we *formulate* beautiful or important statement *before* giving a sequence of results (lemmas, Propositions, etc.) which constitute its *proof*. We give hints on that after the statements but we do not want to deprive you of the pleasure of finding the right moment when you finally are ready to prove the statement. In general, if you are stuck on a certain problem, try looking at the next ones; they may turn out to be helpful. Problems marked by star and Remarks are not used in the sequel; although they are not necessarily complicated, they can be omitted during the first round of problem solving. Important definitions are highlighted in **bold** for easy navigation.

### 3 Winding number: definition and discussion

In this text, all points and polygonal lines are considered in the plane.

Let  $O, A, B$  be points such that  $A \neq O$  and  $B \neq O$  (but possibly  $A = B$ ). The *oriented* (a.k.a. *directed*) angle  $\angle AOB$  is the number  $t \in (-\pi, \pi]$  such that the vector  $\overrightarrow{OB}$  is codirected to the vector obtained from  $\overrightarrow{OA}$  by the rotation through  $t$ . (If you can treat vectors in the plane as complex numbers, then you can rewrite this condition as  $\overrightarrow{OB} \uparrow\uparrow e^{it}\overrightarrow{OA}$ .) Below, oriented angles are considered and the word ‘oriented’ is omitted.

When solving problems, the following statement (close to axioms) can be used without proof: *For any points  $A, B, C$  in the plane and a point  $O$  not lying on the union of segments  $AB, BC, CA$*

- $\angle OAB + \angle OBC + \angle OCA = \pm 2\pi$ , if  $O$  lies in the convex hull of points,
- $\angle OAB + \angle OBC + \angle OCA = 0$ , otherwise.

Let  $l := A_1 \dots A_m$  be a closed polygonal line not passing through  $O$ . The **winding number**  $w(l, O)$  of  $l$  around  $O$  is said to be the number of revolutions during the rotation of the vector whose origin is  $O$ , and whose endpoint goes along the polygonal line in a positive direction. Rigorously,

$$2\pi \cdot w(l, O) := \angle A_1 O A_2 + \angle A_2 O A_3 + \dots + \angle A_{m-1} O A_m + \angle A_m O A_1.$$

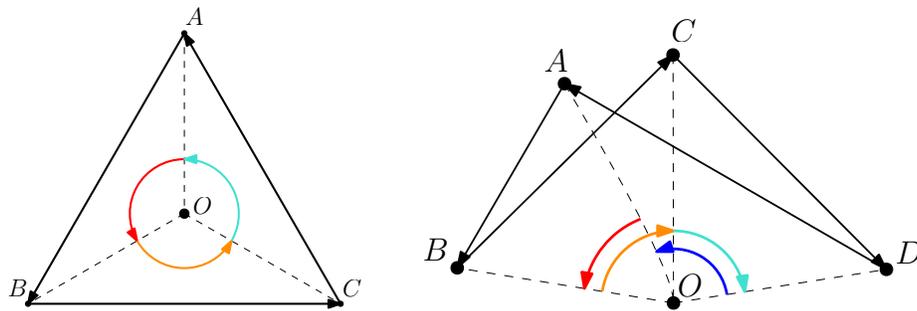


Figure 3.1:  $w(ABC, O) = +1$  and  $w(ABCD, O) = 0$

E.g. in Figure 3.1  $w(ABC, O) = \frac{1}{2\pi} (\angle AOB + \angle BOC + \angle COA) = +1$  and

$$2\pi \cdot w(ABCD, O) = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA = \angle BOD + \angle DOB = 0.$$

- Problem 3.1.** (a) Let  $ABC$  be a regular triangle and  $O$  its center. Find  $w(ABCABC, O)$ .  
 (b) Give an example of a closed polygonal line  $l$  in the plane such that  $w(l, O) = 0$  for any point  $O \in \mathbb{R}^2 - l$ .

The result of Problem 3.1.a shows that winding numbers for distinct polygonal lines with the same union of their segments can be distinct.

**Proposition 3.2.** *The winding number of*

- the outline of any convex polygon;*
  - any closed polygonal line without self-intersections*
- around any point in its exterior (respectively interior) is 0 (respectively  $\pm 1$ ). See Figure 3.2.*

You need not prove item (b); depending on the exposition, item (b) is either a corollary of the *Jordan Curve Theorem* [Sk20, §1.4], or a lemma in its proof.

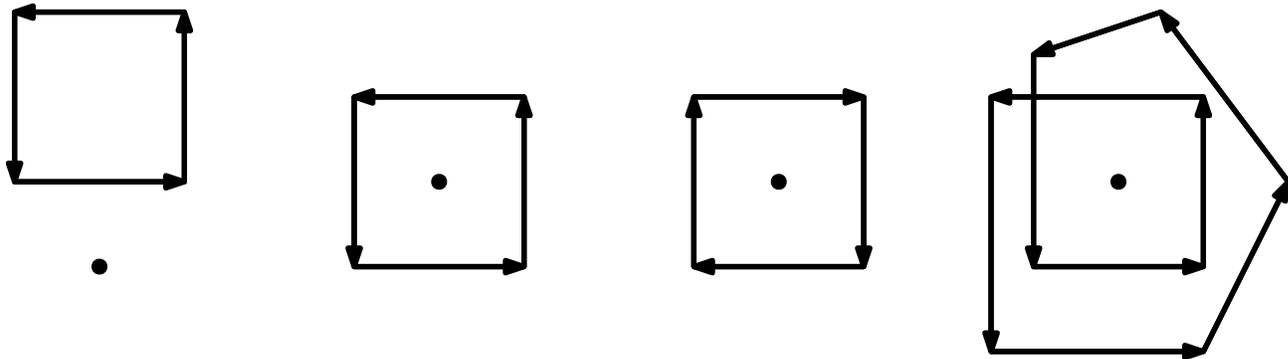


Figure 3.2: The winding numbers equal 0, +1, -1, +2

**Problem 3.3.** For any integer  $n$  and any point  $O$  there is a closed polygonal line whose winding number around  $O$  is  $n$ .

**Proposition 3.4.** *The winding number  $w(A_1 \dots A_m, O)$  is an integer.*

*Hint:* by the bullet point properties at the beginning of this section,

$$\angle A_{m-1}OA_m + \angle A_mOA_1 \equiv \angle A_{m-1}OA_1 \pmod{2\pi}.$$

See some hints and solutions in [ABM+r, §1], [ABM+e, §1, §8]. For more on winding number and related notions see [ABM+e], or [ABM+r] (in English) and the references therein.

## 4 Homotopy classification in the plane minus a point

In this section, closed polygonal lines and their homotopy are considered *in the plane minus a point  $O$* .

**Problem 4.1.** (a) Closed polygonal lines with distinct winding numbers around  $O$  are not homotopic.

(b) A closed polygonal line  $l$  is homotopic to a one-point polygonal line if and only if  $w(l, O) = 0$ .

(c) Let us take the outline  $\partial\Delta$  of a triangle  $\Delta$  such that a point  $O$  is inside the triangle. Any closed polygonal line is homotopic to  $|w(l, O)|$ -times bypass of the outline of  $\partial\Delta$ , the bypass made

- counterclockwise if  $w(l, O) \geq 0$ ,
- clockwise if  $w(l, O) \leq 0$ .

(Then closed polygonal lines with the same winding numbers around  $O$  are homotopic.)

**Proposition 4.2.** *The following map between the set of homotopy classes of closed polygonal lines in the plane minus a point, and the set of integers is a 1-1 correspondence. The mapping transforms a closed polygonal line (more precisely, its homotopy class) into its winding number round a point.*

(Proposition 4.2 is proved in Problems 3.3 and 4.1.)

A ray in the plane is said to be *in general position w.r.t. a polygonal line  $l$*  if the ray does not pass through the vertices of  $l$ .

**Problem 4.3.** \* Take a closed polygonal line  $l$ , and a ray  $OP$  in general position w.r.t.  $l$ .

(a) Is it true that the number of intersection points of  $l$  and  $OP$  has the same parity as  $w(l, O)$ ?

(b) The number of segments of  $l$  that intersect  $OP$  has the same parity as  $w(l, O)$ .

It is useful to understand that the ‘2-dimensional’ Proposition 4.2 is in essence ‘1-dimensional’.

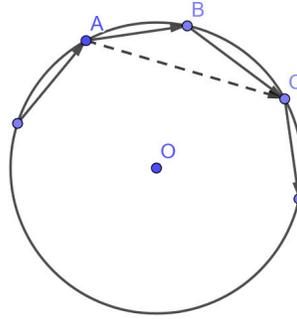


Figure 4.1: An elementary cancellation of a traversal

**Problem 4.4.** \* Let us call a *traversal* an oriented cyclic sequence of points lying on a (fixed) circle such that no two points from the sequence are diametrically opposite. An *elementary cancellation* of a traversal is the removal of a point  $B$  such that for points  $A, C$  (which need not be distinct) adjacent to  $B$  the convex hull of points  $A, B, C$  does not contain the center of the circle (see Figure 4.1). Two traversals are said to be *homotopic*, if there is a sequence of traversals, in which one of any two consecutive traversals can be obtained from the other by an elementary cancellation.

(a) A traversal  $l$  is homotopic to a one-point traversal if and only if  $w(l, O) = 0$  for the center  $O$  of the circle.

(b) (Riddle) Describe traversals up to homotopy.

## 5 ‘Resolution’ of the Poincaré paradox

Obviously, the winding numbers of the example to Problem 1.4.a given in the presentation, around  $P$ , and around  $Q$  are zeros. Being not homotopic in Problem 1.4.a follows from Problem 5.3 (or Problem 6.3). The idea is to use one of the following homotopy invariants.

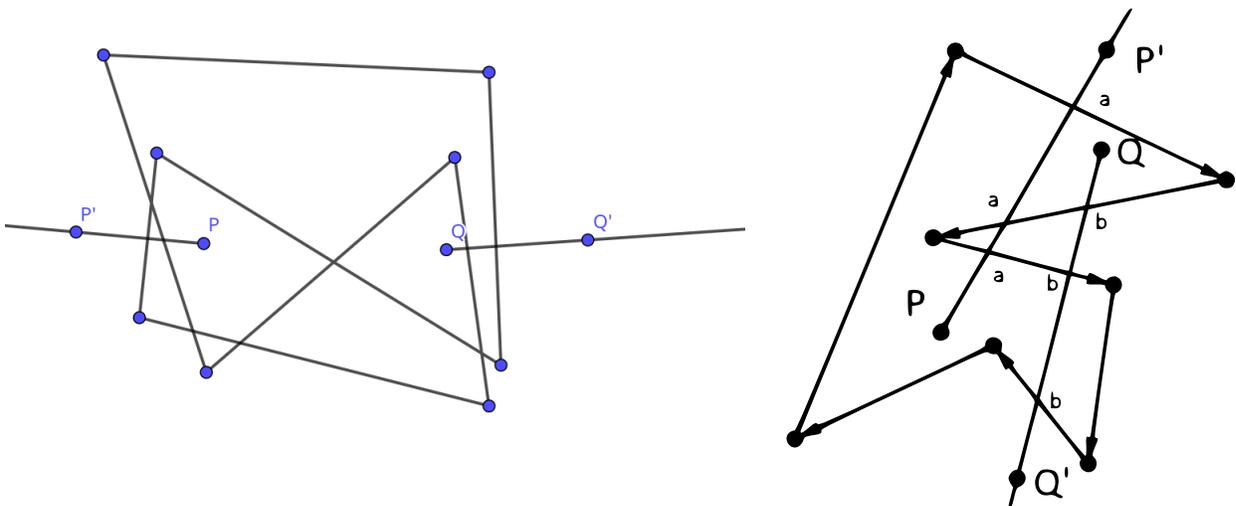


Figure 5.1: Poincaré cyclic word modulo 2:  $abab$  (left),  $abaabb$  (right)

In §§5–7

•  $l$  is a closed polygonal line in the plane minus the points  $P, Q$ ;

- $PP'$  and  $QQ'$  are disjoint rays  $PP'$  and  $QQ'$  in general position w.r.t.  $l$ .

Moving along  $l$  write out the letter  $a$  (letter  $b$ ) at every intersection with the ray  $PP'$  (the ray  $QQ'$ ). The resulting oriented cyclic word is called *Poincaré cyclic word modulo 2* (see Figure 5.1).

**Problem 5.1.** (a) Any cyclic word in letters  $a$  and  $b$  is the cyclic Poincaré word modulo 2 of some closed polygonal line (for some rays  $PP'$ ,  $QQ'$ ).

(b)\* The parity of the winding number of a closed polygonal line  $l$  around  $P$  ( $Q$ ) is the parity of the number of letters  $a$  (letters  $b$ ) in the cyclic Poincaré word modulo 2 of  $l$  (for any rays  $PP'$ ,  $QQ'$ ).

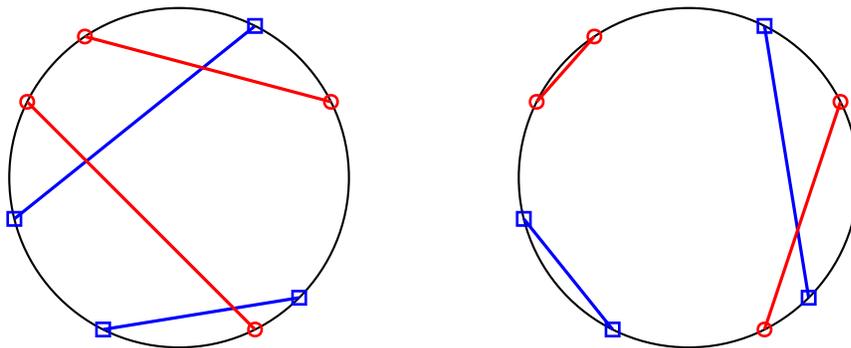


Figure 5.2: Two splittings into pairs of four red points (small circles) and four blue points (small squares) on a circle

Assume that there are an even number of red points, and an even number of blue points on a circle, and all these points are pairwise distinct. Split the red points into pairs, and the blue points into pairs. Join the points in every red/blue pair by a red/blue chord (see Figure 5.2). The sets of red and blue points are said to be *linked*, if the number of pairs of intersecting red and blue chords is odd.

**Problem 5.2.** The property of being linked does not depend on the choice of partitions into pairs (see Figure 5.2).

We call *interesting* a closed polygonal line  $l$  in the plane minus points  $P, Q$ , for which  $w(l, P)$  and  $w(l, Q)$  are even. By statement 4.1.a, the interestingness is preserved when replacing the polygonal line with a homotopic one. By statement 5.1.b, for an interesting closed polygonal line in a cyclic Poincaré word modulo 2, the number of letters  $a$  is even and the number of letters  $b$  is even. We call an interesting closed polygonal line *linked* if the letters  $a$  and  $b$  are linked.

**Problem 5.3.** The linking of an interesting closed polygonal line does not change when

- changing the rays  $PP'$  and  $QQ'$ ;
- replacing a closed polygonal line  $l$  by a homotopic one.

*Hint:* part (b) follows from part (a).

In Assertion 5.3.b, the cyclic Poincaré word modulo 2 may not be defined for some intermediate intermediate polygonal lines of homotopy. Therefore, the following result is useful for a direct proof of Assertion 5.3.b.

**Problem 5.4.** Take two closed polygonal lines  $l, m$  homotopic in the plane minus two points  $P, Q$ . Take disjoint rays  $PP'$  and  $QQ'$  in general position w.r.t.  $l$  and  $m$ . Then there is a homotopy between  $l$  and  $m$  such that the rays  $PP'$  and  $QQ'$  are in general position w.r.t. every polygonal line of the homotopy.

## 6 A homotopy invariant in the plane minus two points

Recall that in §§5–7

- $l$  is a closed polygonal line in the plane minus two points  $P, Q$ ,
- $PP'$  and  $QQ'$  are disjoint rays in general position w.r.t.  $l$ .

**Problem 6.1.** There is  $l$  such that  $w(l, P) = w(l, Q) = 0$ ,  $l$  is not linked, but  $l$  is not homotopic to a one-point polygonal line.

Consider the set of all (finite) cyclic words (including the empty word) in letters  $a, b$ . For such a word, an *elementary cancellation* is the replacement of any of the subwords  $aa, bb$  by the empty subword. Such a word is said to be *economical* if it has no subwords  $aa$  and  $bb$ .

**Problem 6.2.** A cyclic word in letters  $a, b$  yields by elementary cancellations the unique economical word.

An *economical form* (or normal form) of a cyclic word  $w$  in letters  $a, b$  is the economical word obtained from  $w$  by elementary cancellations. Denote by  $E_{2,2,c}$  the set of all economical words. Denote by  $e_2(l) \in E_{2,2,c}$  the economical form of the cyclic Poincaré word modulo 2 of  $l$ . A priori  $e_2(l)$  depends on rays  $PP'$  and  $QQ'$ .

**Problem 6.3.** The word  $e_2(l)$  does not change under

- changing the rays  $PP'$  and  $QQ'$ ;
- replacing a closed polygonal line  $l$  by a homotopic one.

**Problem 6.4.** There is  $l$  such that  $e_2(l)$  is the empty word, but  $l$  is not homotopic to a one-point polygonal line.

Two cyclic words in letters  $a, b$  are said to be *equivalent*, if they can be connected by a sequence of cyclic words, in which one of any two consecutive cyclic words can be obtained from the other by an elementary cancellation. Denote by  $F_{2,2,c}$  the set of all equivalence classes.

**Problem 6.5.** \* (a) The word  $abab$  is not equivalent in  $F_{2,2,c}$  to the empty word.

(b) Are there two non-equivalent cyclic words, both consisting of an odd number of  $a$ 's, and an even number of  $b$ 's?

(c) (Riddle) Construct a 'natural' 1–1 correspondence  $E_{2,2,c} \rightarrow F_{2,2,c}$ .

(d) (Riddle) Describe  $E_{2,2,c}$  or, equivalently,  $F_{2,2,c}$ .

**Problem 6.6.** \* The equivalence class in  $F_{2,2,c}$  of the cyclic Poincaré word modulo 2 does not change under

- changing the rays  $PP'$  and  $QQ'$ ;
- replacing a closed polygonal line  $l$  by a homotopic one.

## 7 Homotopy classification in the plane minus two points

The above homotopy invariants are not complete (see Problems 1.4, 1.5, 6.1, 6.4). Now we are ready to introduce a complete invariant.

In this section, closed polygonal lines and their homotopy are considered *in the plane minus two points  $P$  and  $Q$* .

Let  $A, B, C, D$  be points in the plane, of which no three belong to a line. The **sign** of the intersection point of oriented segments  $\overrightarrow{AB}$  and  $\overrightarrow{CD}$  is  $+1$ , if  $ABC$  is oriented clockwise, and is  $-1$  otherwise (see Figure 7.1).

**Problem 7.1** (cf. Problem 4.3). \* Take a closed polygonal line  $m$  in the plane minus a point  $O$ , and a ray  $OR$  in general position w.r.t.  $m$ . Then  $w(m, O)$  equals the sum over the oriented segments of  $m$  of the signs of intersection points of  $x$  and  $OR$ .

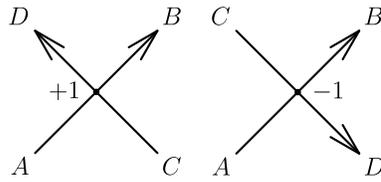


Figure 7.1: The sign of intersection point

*Hint.* Problem 7.1 is proved analogously to Problem 4.3.

**Problem 7.2.** (a) (Riddle) Analogously to §5 define a *cyclic Poincaré word* in letters  $a, b, a^{-1}, b^{-1}$ .

(Hint: use the definition of the sign.)

(b) (cf. Problem 5.1.a) Any cyclic word in letters  $a, b, a^{-1}, b^{-1}$  is the cyclic Poincaré word of some closed polygonal line.

(Hint: use Figure 7.2.)

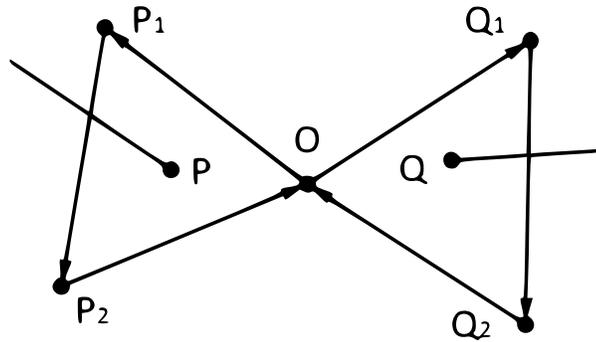


Figure 7.2: Figure ‘eight’ and general position rays

Consider the set of all (finite) cyclic words (including the empty word) in letters  $a, a^{-1}, b, b^{-1}$ . For such a word an *elementary cancellation* is the replacement of any of the subwords  $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$  by the empty subword. Such a word is said to be *economical* if it has no subwords  $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$ .

**Problem 7.3.** A cyclic word in letters  $a, b, a^{-1}, b^{-1}$  yields by elementary cancellations the unique economical word.

An *economical form* (or normal form) of a cyclic word  $w$  in letters  $a, b, a^{-1}, b^{-1}$  is the economical word obtained from  $w$  by elementary cancellations. Denote by  $E_{2,c}$  the set of all economical words. Denote by  $e(l) \in E_{2,c}$  the economical form of the cyclic Poincaré word of  $l$ . A priori  $e(l)$  depends on rays  $PP'$  and  $QQ'$ .

**Problem 7.4** (cf. Problem 6.3). The word  $e(l)$  does not change under

(a) changing the rays  $PP'$  and  $QQ'$ ;

(b) replacing a closed polygonal line  $l$  by a homotopic one.

**Problem 7.5** (cf. Problem 6.4). If  $e(l) = e(m)$  for closed polygonal lines  $l$  and  $m$ , then  $l$  and  $m$  are homotopic.

*Hint:* The proof is analogous to Problem 6.4. See Figure 7.3.

**Proposition 7.6.** *The following map between the set of homotopy classes of closed polygonal lines in the plane minus two points, and  $E_{2,c}$  is a 1-1 correspondence. The image of a closed polygonal line  $l$  is the economical form of the Poincaré cyclic word of  $l$ .*

(Proposition 7.6 is proved in Problems 7.2.b, 7.4 and 7.5.)

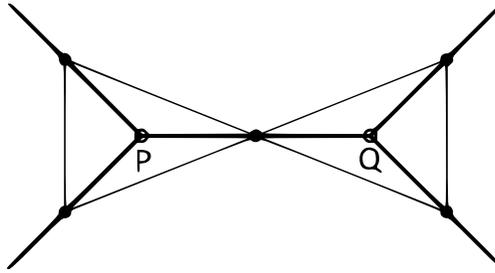


Figure 7.3: Additional rays and ‘dual’ triangle in the plane minus two point

This proposition implies Theorem 1.6 for  $n = 2$ .

**Problem 7.7.** \* (Riddle) Define the property of being homotopic for oriented cycles in the figure-eight graph. Construct a 1–1 correspondence between homotopy classes of closed polygonal lines in the plane minus two points, and homotopy classes of oriented cycles in the figure-eight graph.

This assertion implies the analogue of Proposition 7.6 for the figure-eight graph instead of the plane minus two points.

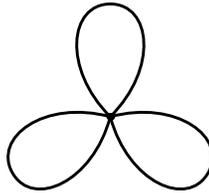


Figure 7.4: The ‘wedge of 3 cycles’ graph

**Problem 7.8.** (a) The same as in Proposition 7.6 replacing the plane minus two points by a plane minus  $n$  points.

(b)\* The same as in Problem 7.7 replacing the plane minus two points by a plane minus  $n$  points, and the figure-eight graph by the ‘wedge of  $n$  cycles’ graph (see Figure 7.4).

## 8 Multiplication of polygonal lines

A **based closed oriented polygonal line**  $A_1 \dots A_m$  is a sequence (ordered set)  $(A_1, \dots, A_m)$  of points in the plane (the points need not be distinct). Below, the word ‘oriented’ is omitted. The point  $A_1$  is called a *basepoint*.

Denote by  $l^{-1}$  the based closed polygonal line  $A_1 A_m \dots A_2$  for a based closed polygonal line  $l := A_1 A_2 \dots A_m$ .

In this section,  $l_1, l_2$  are based closed polygonal lines with a common basepoint  $X$ .

The **product** (concatenation, joining) of based closed polygonal lines  $l_1 = X M_1 \dots M_m$  and  $l_2 = X N_1 \dots N_n$  with a common basepoint is the based closed polygonal line

$$l_1 l_2 := X M_1 \dots M_m X N_1 \dots N_n$$

(see Figure 8.1).

**Remark.** In the plane minus two points  $P, Q$  (Figure 7.2) take based closed polygonal lines  $a := OP_1 P_2$  and  $b := OQ_1 Q_2$  whose convex hulls intersect  $\{P, Q\}$  at  $P$  and at  $Q$ , respectively. In this remark, we shorten ‘the closed polygonal line obtained from a based closed polygonal line  $x$  by forgetting basepoint’ to ‘a closed polygonal line  $x$ ’.

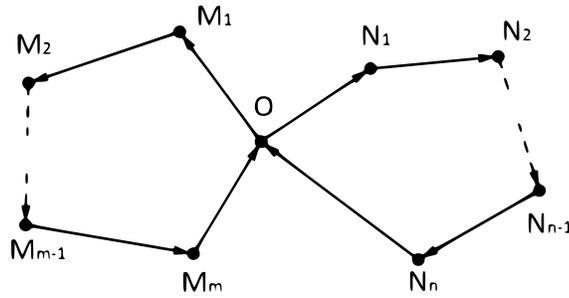


Figure 8.1: The product of based closed polygonal lines  $l_1 = OM_1 \dots M_m$  and  $l_2 = ON_1 \dots N_n$

An example to Problem 1.4.a is the closed polygonal line  $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ . In this language, an example to Problem 1.4.b is the closed polygonal line  $[a, b]c[a, b]^{-1}c^{-1}$  (make this rigorous by yourself).

A version of Poincaré paradox is as follows. *The closed polygonal lines  $aba^{-1}$  and  $b$  are homotopic, but the closed polygonal lines  $aba^{-1}b^{-1}$  and  $bb^{-1}$  are not homotopic ( $bb^{-1}$  is homotopic to a one-point polygonal line).*

**Problem 8.1.** (a) (additivity) The winding number of the product  $l_1l_2$  around a point  $O$  outside  $l_1, l_2$  is equal to the sum of the winding numbers of  $l_1$  and  $l_2$  around  $O$ .

(b) \* Let  $A_0A_1A_2$  be a regular triangle and  $O$  its center. For  $j = 0, 1, 2$  let  $s_j$  be a polygonal line disjoint with the ray  $OA_j$  and joining  $A_{j+1}$  to  $A_{j+2}$ , where the numbering is modulo 3. Then  $w(s_0s_1s_2, O) = \pm 1$ . (The product  $s_0s_1s_2$  is defined analogously to the product of based closed polygonal lines.)

**Problem 8.2.** The multiplication of based closed polygonal lines with a common basepoint  $X$

- (a) is associative, but has no identity element;
- (b) (Riddle) does not generate a well-defined product on homotopy classes.

Based closed polygonal lines with a common basepoint are said to be *based homotopic* if they are ‘homotopic preserving basepoint’ (give a rigorous definition yourself).

**Problem 8.3.** (a) If  $l_1, l_2$  are homotopic in the plane minus a point  $O$ , then they are also based homotopic in the plane minus the point  $O$ .

- (b) The analogue of item (a) is false for the plane minus two points.

**Problem 8.4.** (a) The multiplication of based homotopy classes of based closed polygonal lines is well-defined, is associative, and has an identity element.

- (b) For this multiplication, every class has an inverse.

So a natural group structure exists not on the set we are interested in (the set of closed polygonal lines, up to homotopy) but on the set that currently seems less natural (the set of based closed polygonal lines, up to based homotopy).

Indeed, to define product, we need *based* closed polygonal lines; to obtain a well-defined operation on homotopy classes we need *based* homotopy (Problems 8.2.b and 8.4).

Below, based closed polygonal lines and their based homotopy are considered *in the plane minus two points  $P$  and  $Q$* .

The *Poincaré word* of a based closed polygonal line  $x$  is defined analogously to the cyclic Poincaré word, only the movement along  $x$  begins and ends at the basepoint. Consider the set of all (finite) words (including the empty word) in letters  $a, b, a^{-1}, b^{-1}$ . For such a word, an *elementary cancellation* is the replacement of any of the subwords  $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$  by the empty subword. Two such words are said to be *equivalent*, if they can be connected by a sequence of words, in which one of any two consecutive words can be obtained from

the other by an elementary cancellation. Denote by  $F_2$  the set of all the equivalence classes (standard notation:  $\langle a, b \rangle$ ).

**Problem 8.5.** \* (a) Is it true that the equivalence class in  $F_2$  of the Poincaré word of a based closed polygonal line does not change under changing rays  $PP'$  and  $QQ'$ ?

(b) The same, if we replace the based closed polygonal line  $l$  with a based homotopic one and fix rays  $PP'$  and  $QQ'$ .

(c) The multiplication of words generates an operation on  $F_2$ , and turns  $F_2$  into a group (this group is called the *free group on two generators*).

(d) (cf. problem 7.5) If the Poincaré words of two based closed polygonal lines  $l_1, l_2$  are equivalent, then  $l_1$  and  $l_2$  are based homotopic.

**Proposition 8.6** (cf. Proposition 7.6). *The following map between the set of based homotopy classes of based closed polygonal lines in the plane minus two points, and  $F_2$  is an isomorphism of groups. The image of a based closed polygonal line  $x$  is the equivalence class of the Poincaré word of  $x$ .*

(This is proved in Problem 8.5.)

**Theorem 8.7** (riddle). (a) *For any graph  $G$  with a basepoint, there is an algorithm recognizing whether based oriented cycles in  $G$  are based homotopic.*

(b) *For any graph  $G$ , there is an algorithm recognizing whether oriented cycles in  $G$  are homotopic.*

(c) *For any two graphs, there is an algorithm recognizing whether simplicial mappings between the graphs are homotopic. (See definitions in [Sk, §9 ‘Homotopy classification of maps’], [Sk20e].)*

Analogues of this theorem for 2-hypergraphs are false! This follows from the algorithmic unsolvability of the triviality problem in some group defined by a finite number of generators and relations. See [Sk20, Theorem 14.3.1] and the generalization in [Sk20e].

## 9 Solutions of some problems

*Examples to Problem 1.4.* See Figures 9.1, 1.5, 1.4.

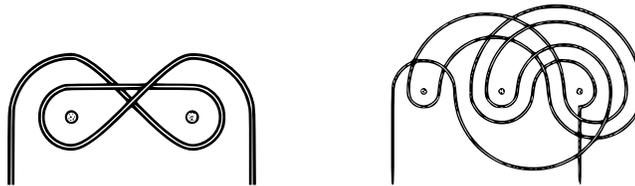


Figure 9.1: A rope hanging on two (left) and three (right) nails

*Hints to Problem 4.1.* (a) It is sufficient to prove that *if a closed polygonal line  $l_1$  is obtained from a closed polygonal line  $l_2$  by an elementary cancellation, then  $w(l_1, O) = w(l_2, O)$ .*

Let us prove this. Let  $A, B, C$  be consecutive points of  $l_2$  such that ‘cancellation’ of  $B$  gives a closed polygonal line  $l_1$ . Then

$$2\pi(w(l_1, O) - w(l_2, O)) = \angle AOB + \angle BOC - \angle AOC = 0,$$

where the second equality holds by the second property of oriented angles in §3 (see Figure 9.2).

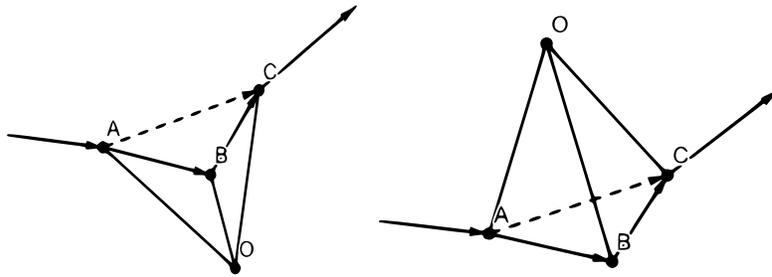


Figure 9.2: An elementary cancellation of the vertex  $B$

(b) The ‘only if’ part follows from (a). To prove the ‘if’ part, it is sufficient to prove that *if a closed polygonal line has more than one vertex, and the winding number is zero, then an elementary cancellation can be applied.*

Let us prove this. If some two consecutive vertices in the closed polygonal line coincide, one of them can be removed by an elementary cancellation. Now assume that every two consecutive vertices are distinct. Since the sum of the angles is zero, there are two adjacent angles  $\angle AOB$  and  $\angle BOC$  of different signs. Then points  $A$  and  $C$  lie in the same half-plane with respect to the line  $BO$ . Hence, the triangle  $ABC$  does not contain the point  $O$ . Therefore, we can make an elementary cancellation of the vertex  $B$ .

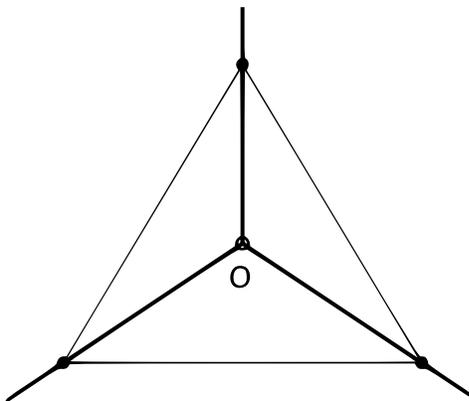


Figure 9.3: Additional rays and ‘dual’ triangle in the plane minus a point

(c) It suffices to prove that *any closed polygonal line is homotopic to a one that contains only vertices of the triangle  $\Delta$*  (Figure 9.3).

Let us prove this. Denote the vertices of  $\Delta$  by  $B_1, B_2, B_3$ .

First, in the paragraph after (\*) we prove that any closed polygonal line  $l$  is homotopic to a closed polygonal line  $l'$  that

(\*) *contains at least one vertex of  $\Delta$ , and for any three consecutive vertices  $X, B, Y$  of  $l'$  either  $B$  is a vertex of  $\Delta$ , or points  $X, B, Y$  lie in  $\angle B_i O B_j$  for some  $i, j$ .*

A pair  $\{XY, B\}$  of a segment  $XY$  of  $l$ , and a vertex  $B$  of  $\Delta$  is called a *bad pair* for  $l$  if  $B \notin \{X, Y\}$  and  $B$  lies in  $\angle XOY$ . We may assume that the property (\*) does not hold for  $l$ , and  $l$  contains a vertex of  $\Delta$ . Then there is a bad pair  $\{XY, B\}$  for  $l$ . Add  $B$  to  $l$  between  $X$  and  $Y$  by inverse operation to an elementary cancellation. The number of bad pairs for the obtained closed polygonal line is smaller than for  $l$ . By a finite number of such operations, we can obtain a closed polygonal line homotopic to  $l$  and satisfying (\*).

Let  $l'$  be a closed polygonal line satisfying (\*). Then any vertex of  $l'$  distinct from  $B_1, B_2, B_3$  can be removed by an elementary cancellation. The obtained closed polygonal line also has the property (\*). Hence by a finite number of such elementary cancellations, we obtain a closed polygonal line containing only vertices of the triangle  $\Delta$  □

## References

- [ABM+e] \* *E. Alkin, E. Bordacheva, A. Miroshnikov, A. Skopenkov*, Invariants of almost embeddings of graphs in the plane, in Russian, arXiv:2410.09860.
- [ABM+r] \* *E. Alkin, E. Bordacheva, A. Miroshnikov, O. Nikitenko, A. Skopenkov*, Invariants of almost embeddings of graphs in the plane: results and problems, arXiv:2408.06392.
- [DDM+] *E. Demaine, M. Demaine, Y. Minsky, J. Mitchell, R. Rivest and M. Pătrașcu*. Picture-Hanging Puzzles, *Theory Comput. Syst.*, 54 (2014) 531–550, arXiv:1203.3602.
- [GG] \* [https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric\\_group\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_group_theory)
- [HC19] \* *C. Herbert Clemens*. Two-Dimensional Geometries. A Problem-Solving Approach, Amer. Math. Soc., 2019.
- [Sk] \* *A. Skopenkov*. Algebraic Topology From Algorithmic Standpoint, draft of a book, mostly in Russian, <http://www.mccme.ru/circles/oim/alg.pdf>.
- [Sk20] \* *A. Skopenkov*, Algebraic Topology From Geometric Standpoint (in Russian), MCCME, Moscow, 2020 (2nd edition). Update of a part: <http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf> . Part of the English translation: <https://www.mccme.ru/circles/oim/obstructeng.pdf>.
- [Sk20e] \* *A. Skopenkov*. Extendability of simplicial maps is undecidable, *Discr. Comp. Geom.*, 69:1 (2023), 250–259, arXiv:2008.00492.
- [Sk21m] \* *A. Skopenkov*. Mathematics via Problems. Part 1: Algebra. Amer. Math. Soc., Providence, 2021. Preliminary version: [https://www.mccme.ru/circles/oim/algebra\\_eng.pdf](https://www.mccme.ru/circles/oim/algebra_eng.pdf)
- [Zi10] \* *D. Živaljević*, Borromean and Brunnian Rings, <http://www.rade-zivaljevic.appspot.com/borromean.html>.

*Books, surveys, and expository papers in this list are marked by the stars.*

# Инварианты Понселе

в свете

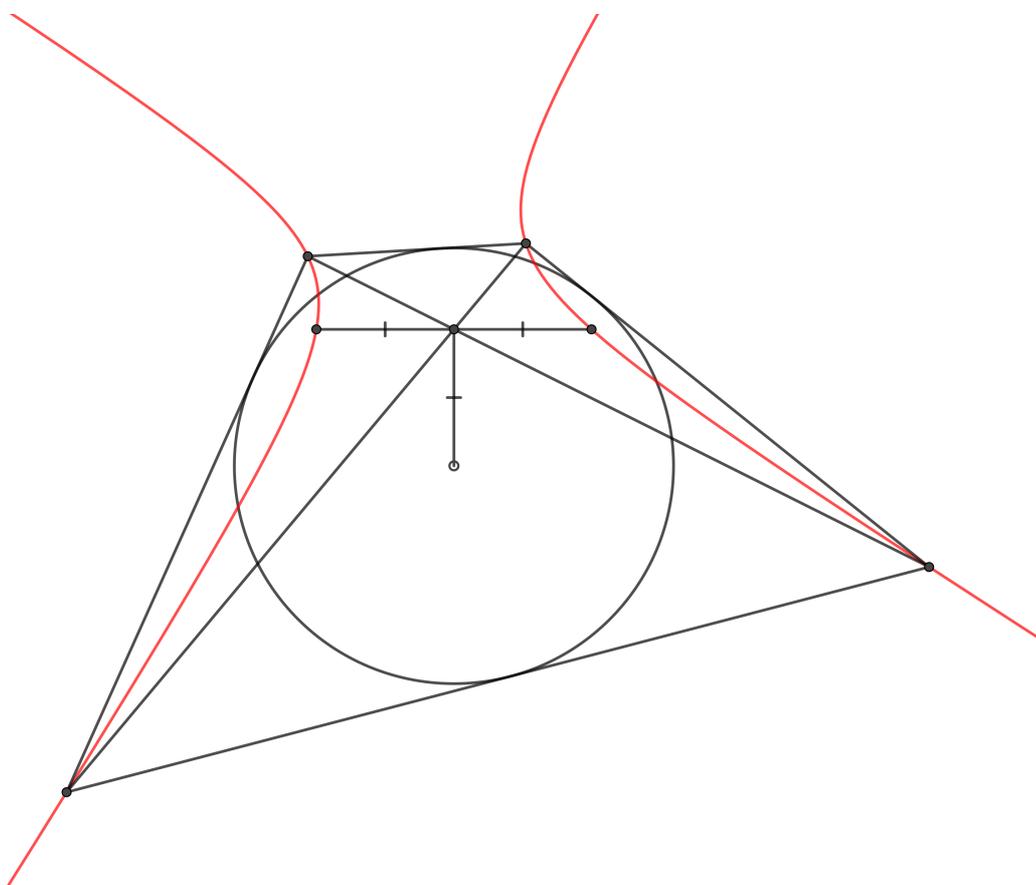
## Cool ratio lemma

*Авторы проекта*

Ю.Э. Нагуманов, С.М. Кузнецов, Л.П. Горбунов, А.А. Заславский

*Проект представляют*

С.М. Кузнецов, Л.П. Горбунов, А.А. Заславский, П.В. Бибиков, П.А. Кожевников



Летняя Конференция Турнира Городов

2025

# Содержание

Введение	3
<b>1 Необходимые сведения</b>	<b>6</b>
1.1 Проективная геометрия	6
1.2 Коники	9
1.3 Евклидов взгляд на коники	12
1.4 Изогональное сопряжение в четырёхугольнике	13
1.5 Проективные инволюции	14
1.6 Сопряжение Клоусона	15
1.7 Классическое доказательство теоремы Понселе	16
<b>2 Cool ratio lemma</b>	<b>18</b>
2.1 Определения и первая CRL	18
2.2 CRL помогает доказывать концикличность	22
2.3 Generalized Cool Ratio Lemma	25
2.4 Связь CRL с классическими метрическими теоремами	26
<b>3 Евклидовы инварианты поризма Понселе</b>	<b>31</b>
3.1 Сопряжение Клоусона и лемма Скутина	32
3.2 Связь с полярным преобразованием.	37
3.3 Теорема Лагерра	39
3.4 Скрытый Понселе. Часть 1	41
3.5 Скрытый Понселе. Связь с изогональным сопряжением	43
3.5.1 Лемма о степени ортоцентра	45
3.5.2 Теорема Айера	46
3.5.3 Задача 10.4 с последнего финала олимпиады им. Шарыгина	47
3.6 Вокруг классического доказательства теоремы Понселе	49
3.7 Разное	51
3.7.1 Ломаные Понселе	54
<b>4 Проективизация CRL</b>	<b>55</b>
4.1 Сложение точек на вырожденной кубике	55
4.2 Проективное обобщение CRL	58
<b>5 Awesome Ratio lemma</b>	<b>60</b>
5.1 Формулировка и доказательство	60
5.2 Приложения ARL	65

## Введение

Поризм Понселе (или Теорема Понселе) является классическим фактом проективной алгебраической геометрии. Эта знаменитая теорема является примером так называемой теоремы о замыкании, когда некоторый процесс построения новых точек в результате проведения тех или иных линий закичивается через некоторое количество шагов. У поризма есть множество разных доказательств, разновидностей и обобщений. Он, несмотря на свою известность, является чрезвычайно трудным фактом, обладающим множеством различных содержательных доказательств. Наиболее известны геометрическое рассуждение через пучки окружностей, которое можно прочитать в книге [1], и аналитическое доказательство через функцию плотности, с которым можно ознакомиться в статье [7].

О поризме Понселе хотя бы раз слышали практически все продвинутые школьники-геометры. Некоторые даже знают какие-то доказательства, а совсем продвинутые — разные инварианты, возникающие при вращении Понселе. Например, то, что в четырёхугольнике Понселе точка пересечения диагоналей фиксирована... Поризм обладает очень глубокой конструкцией, в которой и по сей день находят новые результаты, порой довольно сложные и содержательные. К одному такому результату, обнаруженному и доказанному авторами проекта, мы будем плавно подводить сквозь казалось бы совершенно не связанные с поризмом сюжеты. Отметим также, что, к сожалению, многие доказательства Понселе обладают тем недостатком, что сильно используют евклидовость — т.е. тот факт, что определены понятия отрезков и углов. В проекте мы затронем как евклидовы, так и проективно-алгебраические рассуждения, и с разных сторон подойдем к инвариантам, возникающим в поризме.

Казалось бы, совершенно несвязанной с теоремой Понселе вещь выступает такой евклидов инструмент, как *cool ratio lemma*, или CRL. Впервые лемма была сформулирована в статье [11], опубликованной в 2020 году на известном математическом сайте aops.com. Усилиями авторов проекта в последние полтора года лемма набрала популярность и в русскоязычном геометрическом сообществе. На первый взгляд кажется, что это просто ещё один счётный инструмент. Но при детальном рассмотрении у CRL выявляются некоторые проективные свойства, а также связь со сложением точек на кубике. Оказывается, что CRL скорее напоминает двойные отношения, а кроме того имеет еще и более глубокую природу, связанную с понятием *дивизора* на рациональной кривой. А именно, если  $X$  — рациональная кривая и  $a, b$  — две точки на ней, то рациональная функция  $f$  на кривой  $X$ , такая, что  $a - b = (f)$ , является *cool ratio* функцией на кривой  $X$ . Мы почти не будем погружаться в теорию, но искушенные читатели могут обдумать более научное описание CRL в терминах дивизоров.

Отдельно отметим, что в первых пяти разделах проекта мы не будем работать с невырожденными кубическими кривыми, поэтому никаких знаний в этой области от участников не предполагается.

Но самое главное — в процессе размышления над одной задачей, поставленной 11 лет назад и

решенной не так давно авторами проекта, авторами была придумана сложная и очень красивая теорема, связывающая CRL и поризм Понселе.

В проекте мы узнаем, что же такое CRL и как её использовать, докажем поризм Понселе, а также обсудим их загадочную связь. Помимо этого, мы глубоко погрузимся в мир евклидового Понселе:

- сформулируем и докажем новые или малоизвестные инварианты;
- исследуем связь поризма Понселе с набирающим популярность сопряжением Клоусона;
- придумаем (предположительно) новое доказательство известной теоремы Айера;
- обсудим, как можно решать некоторые задачи при помощи поризма, где его, казалось бы, нет;
- представим новый метод решения задач с помощью скрытого Понселе, основанный на вращении треугольника вокруг коники, которой изначально в задаче нет, и который позволяет решать сложные проблемы с реальных олимпиад (например, 10.4 Олимпиады Шарыгина 2025 года);
- и многое другое...

Поризм Понселе не впервые появляется на летней конференции турнира городов. В 2014 году ему был посвящён целый проект [4]. Наш проект полностью независим, поэтому для участия в нём знакомство с материалами предыдущего проекта не требуется. Тем не менее, особо мотивированные участники могут прочесть проект 2014 года беглым взглядом, чтобы глубже погрузиться в атмосферу поризма.

**Структура нашего проекта такова:**

Разделы 1, 2 и 3 выдаются в начале конференции, разделы 4 и 5 – после промежуточного финиша.

В разделе 1 собрана вся необходимая для проекта теоретическая база. Поскольку наш проект состоит из нескольких различающихся между собой частей, то и материалы в разделе 1 сильно различаются как по тематике, так и по сложности. Это не должно вас пугать. Вы можете пропустить раздел пререквизитов и возвращаться к нему по мере надобности.

В разделе 2 мы подробно поговорим про *cool ratio* лемму и её применение в олимпиадных задачах, а в разделе 4 осознаем проективную природу CRL и обсудим её связь со сложением точек на вырожденной кубике. Эти два раздела никак не связаны с поризмом Понселе, поэтому вы можете решать их, даже если не заинтересованы в работе над остальными частями нашего проекта.

Раздел 3 посвящен самым разнообразным инвариантам поризма Понселе и примерам его применения в олимпиадных задачах.

В разделе 5 мы перекинем мост между поризмом Понселе и cool ratio lemm'ой. Мы сформулируем и докажем сложный и очень красивый результат, стоящий на стыке этих двух миров, а также разберем несколько примеров его применения.

Наконец, в дополнительном разделе мы представим три малоизвестных доказательства теоремы Понселе. Два из них используют сложение точек на кубике и/или выход в пространство. Для самых искушенных читателей мы выдадим в виде задач третье, более алгебраическое доказательство поризма и связанных с ним фактов.

# 1 Необходимые сведения

В этом разделе приведены необходимые определения тех понятий, которыми мы будем активно пользоваться в дальнейшем, а также важные факты, связанные с этими понятиями. Мы сосредоточимся на утверждениях и конструкциях из проективной геометрии, поскольку язык проективной геометрии будет играть большую роль в дальнейшем изложении. Утверждениями из данного раздела можно пользоваться без доказательства, однако, если какие-то факты Вам не знакомы, их можно обсудить с преподавателями.

## 1.1 Проективная геометрия

В этом разделе мы приведем необходимые факты из проективной геометрии. Мы ограничимся проективной геометрией в размерностях 1 и 2.

**Определение 1.1.** Пусть  $O$  — произвольная точка плоскости. *Пучком прямых*  $\mathcal{L}_O$  с центром в точке  $O$  называется множество всевозможных евклидовых прямых, проходящих через точку  $O$ .

Рассмотрим пучок прямых  $\mathcal{L}_O$  и произвольную прямую  $l$ , не проходящую через точку  $O$ . Тогда все прямые пучка  $\mathcal{L}_O$ , кроме одной, пересекают прямую  $l$ . Таким образом, мы получаем соответствие между точками прямой  $l$  и прямыми пучка  $\mathcal{L}_O$ . Это наблюдение мотивирует следующее

**Определение 1.2.** *Проективной прямой* называется произвольный пучок прямых  $\mathcal{L}_O$ . Прямая из этого пучка называется *проективной точкой*. Если  $l$  — произвольная евклидова прямая, не проходящая через точку  $O$ , то проективная точка  $J \in \mathcal{L}_O$ , соответствующая прямой, параллельной  $l$ , называется *бесконечно удаленной точкой* прямой  $l$ . Допуская вольность речи, мы будем говорить, что евклидова прямая  $l$  *пополнена бесконечно удаленной точкой*  $J$ .

Определим теперь понятие *двойного отношения четырех проективных точек* проективной прямой. Пусть  $l_1, l_2, l_3$  и  $l_4$  — четыре проективные точки, соответствующие четырем евклидовым прямым в пучке  $\mathcal{L}_O$ .

**Определение 1.3.** *Двойным отношением* четвёрки проективных точек  $l_1, l_2, l_3$  и  $l_4$  называется число  $[l_1, l_2; l_3, l_4] = \frac{\sin \angle(l_1, l_3)}{\sin \angle(l_2, l_3)} : \frac{\sin \angle(l_1, l_4)}{\sin \angle(l_2, l_4)}$ .

Если пересечь пучок  $\mathcal{L}_O$  прямой  $l$ , то четыре прямые  $l_1, l_2, l_3$  и  $l_4$  высекут на прямой  $l$  точки  $A, B, C$  и  $D$  соответственно. Тогда  $[l_1, l_2; l_3, l_4] = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ . Это обстоятельство позволяет определить двойное отношение на обычной евклидовой прямой.

**Определение 1.4.** *Двойным отношением* четвёрки точек  $A, B, C, D$ , лежащих на прямой, называется число  $[A, B; C, D] = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ .

Четвёрка точек  $A, B, C, D$  называется *гармонической четвёркой*, если  $[A, B; C, D] = -1$ .

Удобно рассматривать проективную прямую как обычную евклидову прямую, пополненную бесконечно удаленной точкой  $J$ . Тогда, например, четвёрка точек  $A, B, M, J$  является гармонической, если точка  $M$  — середина отрезка  $AB$ .

Важным свойством двойного отношения является следующий факт: если выполнено равенство  $[A, B; C, D_1] = [A, B; C, D_2]$ , то  $D_1 = D_2$ . Иначе говоря, двойное отношение — это аналог расстояния в евклидовой геометрии, только в проективном мире это «расстояние» измеряется относительно трёх точек.

**Определение 1.5.** Пусть  $\ell_1$  и  $\ell_2$  — проективные прямые. Отображение  $f: \ell_1 \rightarrow \ell_2$  называется *проективным*, если оно сохраняет двойные отношения, т.е. для любой четвёрки точек  $A, B, C, D$  имеет место равенство  $[A, B; C, D] = [f(A), f(B); f(C), f(D)]$ .

**Теорема 1.6.** Любое проективное отображение прямой в себя однозначно задается образами трёх точек. Иначе говоря, для любых точек  $A, B, C, A', B'$  и  $C'$  существует единственное проективное отображение  $f$ , такое, что  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$  и  $f(C) = C'$ .

Теперь напомним понятие проективной плоскости. Для этого рассмотрим пучок прямых в трёхмерном пространстве, т.е. множество прямых, проходящих через фиксированную точку  $O$ . Такое множество прямых называется *проективной плоскостью*. Каждая прямая, проходящая через отмеченную точку, называется *проективной точкой*, а каждая плоскость, проходящая через выделенную точку — *проективной прямой*. Отметим, что это определение согласуется с определенным ранее понятием проективной прямой как пучка прямых на плоскости. Если взять теперь обычную плоскость  $\alpha$ , не проходящую через центр  $O$  пучка, то на ней каждая проективная точка высечет обычную евклидову точку, а каждая проективная прямая — обычную евклидову прямую. Все проективные точки, которые не пересекаются с плоскостью  $\alpha$ , называются *бесконечно удаленными* и лежат на одной *бесконечно удаленной проективной прямой*  $\alpha_\infty$ .

В некоторых ситуациях нам будет полезен аналитический взгляд на проективные точки и прямые. Для этого зафиксируем в пространстве систему координат  $Oxyz$  с началом в центре  $O$  нашего пучка прямых. Каждой проективной точке можно сопоставить тройку координат направляющего вектора евклидовой прямой, соответствующей этой точке. Но поскольку этот вектор определен лишь с точностью до умножения на ненулевую константу, координаты проективной точки также определены с точностью до умножения на ненулевую константу. Такие координаты называются *однородными* и обозначаются следующим образом:  $(x : y : z)$ . Если в системе координат  $Oxyz$  евклидова плоскость  $\alpha$  задается уравнением  $z = 1$ , то проективная точка  $(x : y : z)$  высечет на ней точку с координатами  $(x, y)$ , а бесконечно удаленная проективная прямая  $\alpha_\infty$

задается уравнением  $z = 0$ .

Аналогично, каждая проективная прямая задается уравнением  $ax + by + cz = 0$  и может быть определена числами  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Но и набор этих чисел (фактически это координаты вектора нормали данной плоскости) определен с точностью до умножения на ненулевую константу. Поэтому нашей плоскости (и, как следствие, проективной прямой) может быть сопоставлена тройка однородных координат  $(a : b : c)$ . Точка  $(x : y : z)$  лежит на плоскости  $(a : b : c)$  тогда и только тогда, когда  $ax + by + cz = 0$ .

Обращает на себя внимание равноправие в координатном описании проективных точек и прямых. Формализуется это равноправие следующим утверждением, которое называется *проективной двойственностью*.

**Теорема 1.7 (Проективная двойственность).** Если некоторое утверждение, сформулированное в терминах проективной геометрии, справедливо, то справедливо также двойственное утверждение, которое получается из исходного заменой слова «точка» на слово «прямая» и слова «прямая» на слово «точка».

Теперь напомним понятие проективного преобразования проективной плоскости.

**Определение 1.8.** *Проективным преобразованием проективной плоскости* называется такое преобразование, которое переводит проективные прямые в проективные прямые.

Проективные преобразования можно задавать в однородных координатах следующим образом. Мы рассмотрим *линейное преобразование* трёхмерного пространства, т.е. преобразование, которое меняет координаты каждой точки линейным образом:

$$(x, y, z) \mapsto (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z),$$

где числа  $a_{ij}$  — некоторые вещественные числа. Тогда это преобразование индуцирует проективное преобразование, когда однородные координаты меняются следующим образом:

$$(x : y : z) \mapsto (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z : a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z : a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z).$$

С точки зрения координат на евклидовой плоскости  $\alpha$  проективное преобразование, как и в случае проективной прямой, задается дробно-линейными формулами:

$$(x, y) \mapsto \left( \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \right).$$

Для проективной плоскости также есть теорема, позволяющая задавать проективное преобразование образами некоторых точек.

**Теорема 1.9.** Для любых двух четвёрок точек  $(A, B, C, D)$  и  $(A', B', C', D')$  общего положения существует единственное проективное преобразование, которое переводит первую четвёрку во вторую.

## 1.2 Коники

В этом разделе мы напомним основные понятия, связанные с кониками. Важно отметить, что для нас основным полем для работы будет именно проективная плоскость (хотя в задачах нам встретятся и коники на евклидовой плоскости), а потому нам потребуется такое определение коник, которое было бы согласовано с проективной геометрией, а с другой стороны, могло бы быть сформулировано без дополнительной подготовки. Такое определение мы и предлагаем.

**Определение 1.10.** Коникой  $\mathcal{C}$  на плоскости называется множество нулей многочлена  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  степени 2 от переменных  $x$  и  $y$ .

В зависимости от вида многочлена  $F$  бывают *вырожденные коники* (соответствующие приводимым многочленам и являющиеся парой прямых) и *невырожденные коники* (соответствующие неприводимым многочленам и являющиеся эллипсом, гиперболой или параболой). В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать лишь невырожденные коники.

Коники можно рассматривать не только на обычной плоскости, но и на плоскости проективной. Геометрически это означает, что нам нужно выйти с нашей плоскости в трёхмерное пространство и провести всевозможные прямые через отмеченную точку и точки нашей коники. В результате мы получим *проективную конику*  $\widehat{\mathcal{C}}$ , которая по сути является конусом над коникой. Ясно, что с таким объектом не очень-то удобно работать (сможете вписать в такую конику треугольник?..). Поэтому уже здесь аналитический язык, не требующий наглядного представления объекта, окажется нам полезен. Поскольку на обычной плоскости уравнение коники  $F(x, y) = 0$  накладывает условие на координаты точки  $(x, y)$ , то в проективном мире нам нужно наложить условие на однородные координаты  $(x : y : z)$  проективной точки. Делается это следующим образом. Пусть наша коника  $\mathcal{C}$  была задана многочленом  $F(x, y)$ , т.е.  $\mathcal{C} = (x, y) : F(x, y) = 0$ . Заменяем многочлен  $F(x, y)$  на однородный многочлен  $\widehat{F}(x, y, z) = z^2 F(x/z, y/z)$  от трёх переменных. Множество нулей однородного многочлена  $\widehat{F}(x, y, z)$  и будет проективной коникой  $\widehat{\mathcal{C}}$ :  $\widehat{\mathcal{C}} = \{(x, y, z) \neq (0, 0, 0) : \widehat{F}(x, y, z) = 0\}$ .

В дальнейшем для краткости мы будем одинаково обозначать конику и ее проективизацию. Из контекста всегда будет понятно, рассматриваем мы конику в рамках евклидовой геометрии или в рамках геометрии проективной.

Отметим также следующее утверждение:

**Утверждение 1.11.** Проективный образ окружности является коникой. И обратно, любая коника может быть получена из окружности подходящим проективным преобразованием.

Первая часть утверждения очевидна, так как проективное преобразование не увеличивает степень многочлена при замене переменных. Второе утверждение также может быть доказано алгебраически.

Также в некоторых ситуациях нам будет важно расположение коники относительно бесконечно удаленной прямой  $\ell_\infty$ .

**Определение 1.12.** *Эллипсом* называется коника, которая не пересекает бесконечно удаленной прямой. *Гиперболой* называется коника, пересекающая бесконечно удаленную прямую в двух различных точках. Наконец, *параболой* называется коника, касающаяся бесконечно удаленной прямой.

**Теорема 1.13.** Любые пять точек общего положения задают единственную конику, проходящую через них. Любые 5 прямых общего положения задают единственную конику, касающуюся их.

Оказывается, на конике также можно ввести понятие двойного отношения.

**Определение 1.14.** Пусть  $A, B, C, D$  — четыре точки на конике  $\mathcal{C}$ . *Двойным отношением*  $[A, B; C, D]$  называется двойное отношение четвёрки прямых  $[XA, XB; XC, XD]$ , где  $X$  — произвольная точка коники, отличная от  $A, B, C$  и  $D$ .

Доказать корректность этого определения можно следующим образом. Подходящим проективным преобразованием переведем нашу конику  $\mathcal{C}$  в окружность. Поскольку проективное преобразование сохраняет двойные отношения, достаточно проверить корректность определения для случая окружности. А это уже совсем несложно (можно либо воспользоваться равенством вписанных углов, либо, сделав инверсию, свести задачу к двойному отношению точек на прямой).

Отсюда следует следующее важное утверждение.

**Теорема 1.15** (Лемма Соллертинского). Пусть  $\mathcal{L}_O$  — пучок прямых и  $f$  — проективное преобразование плоскости. Обозначим через  $\mathcal{L}_{O'}$  образ пучка  $\mathcal{L}_O$  при преобразовании  $f$ . Для каждой прямой  $\ell \in \mathcal{L}_O$  рассмотрим точку пересечения прямых  $\ell$  и  $f(\ell)$ . Тогда все эти точки образуют конику, проходящую через точки  $O$  и  $O'$ .

**Замечание.** Если  $f(OO') = OO'$ , коника распадается в объединение прямой  $OO'$  и ещё одной прямой.

Поскольку на кониках корректно определено двойное отношение четвёрки точек, то для коник справедливы все факты, связанные с двойными отношениями, которые мы ранее отмечали для прямых. Так, для коник верна теорема, утверждающая, что проективное отображение коники в себя однозначно задается образами трёх точек.

Теперь рассмотрим понятия полюса и поляры относительно коники. Вновь мы возьмем за основу аналитическое определение. (Мы понимаем, что такое определение, скорее всего, окажется

для Вас непривычным, поэтому допустимо понимать поляры и полюсы так, как Вы их понимали в курсах проективной геометрии: через полный четырёхсторонник, касательные и гармонические четвёрки. Тем не менее аналитическое определение обладает рядом своих преимуществ, поэтому ознакомиться с ним также стоит).

**Определение 1.16.** Пусть коника  $\mathcal{C}$  задана уравнением  $q(v) = 0$  и  $u$  — вектор, соответствующий произвольной точке. Теперь рассмотрим следующую *билинейную форму*  $Q(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}$  (в этой странной на первый взгляд формуле на самом деле скрывается формула квадрата суммы двух слагаемых). Векторы  $u$  и  $u'$  называются *сопряженными относительно коники  $\mathcal{C}$* , если  $Q(u, u') = 0$ . Для фиксированного вектора  $u$  множество всех векторов  $u'$ , сопряженных с  $u$ , называется *полярной* точки, соответствующей вектору  $u$ .

Заметим, что уравнение поляры имеет вид  $Q(u, v) = 0$ , где величины  $Q$  и  $u$  фиксированы. Но тогда оно линейно по  $v$ , т.е. полярной является некоторая прямая (проективная). Наоборот, пусть  $\ell$  — некоторая проективная прямая. Выберем на ней два линейно независимых вектора  $v_1$  и  $v_2$  (т.е. мы отметили на проективной прямой две различные проективные точки). Тогда существует единственный с точностью до пропорциональности вектор  $u$ , такой, что  $Q(u, v_1) = Q(u, v_2) = 0$ : вектор  $u$  соответствует точке пересечения двух поляр векторов  $v_1$  и  $v_2$ . Соответствующая точка называется *полюсом прямой  $\ell$* .

Таким образом, мы получаем соответствие между проективными точками и проективными прямыми, определяемое коникой  $\mathcal{C}$ , когда каждой точке ставится в соответствие ее поляр, а каждой прямой — ее полюс. Такое соответствие называется *полярным*.

Образом бесконечно удаленной прямой  $\ell_\infty$  при полярном соответствии, выполненном относительно коники  $\mathcal{C}$ , будет точка, которая называется *центром коники  $\mathcal{C}$* .

Отметим следующий классический факт.

**Теорема 1.17 (Принцип двойственности).** Пусть  $\mathcal{C}$  — произвольная коника,  $A$  и  $B$  — произвольные точки,  $a$  и  $b$  — их поляры. Тогда точка  $A$  лежит на прямой  $b$  тогда и только тогда, когда точка  $B$  лежит на прямой  $a$ .

Это утверждение очевидно в силу симметричности формы  $Q$ :  $Q(u, v) = Q(v, u)$ .

**О комплексном мире.** Все вышеперечисленные понятия аналогично вводятся над комплексными числами (на самом деле, над любым полем). Комплексную проективную прямую  $\mathbb{C}P^1$ , а также комплексную проективную плоскость  $\mathbb{C}P^2$  мы определяем аналогично, как и понятия коник, поляр, проективных преобразований и отображений и т.д.; вопрос, как определить двойные отношения. Мы не будем вдаваться в подробности этой темы — желающие могут почитать об этом в [3]. Надо мыслить двойные отношения как функцию от четырех точек, которая меняется при перестановке как и в вещественном случае и которая сохраняется при проекциях, а также

проективных преобразованиях/отображениях. При этом  $\mathbb{C}P^1$  можно мыслить как сферу (Римана) — ведь мы, по сути, добавили к плоскости одну точку, а значит, при стереографической проекции сферы на плоскость получится как раз наша комплексная проективная прямая. Нам будет удобно переходить к комплексной проективной плоскости, так как на такой плоскости любые 2 коники пересекаются по 4 точкам, любая коника пересекает любую прямую по 2 точкам, а каждая окружность проходит через 2 фиксированные точки плоскости с однородными координатами  $\mathcal{J}_+(1:i:0)$  и  $\mathcal{J}_-(1:-i:0)$ , называемые *круговыми*. При этом, геометрически надо представлять себе это как обычно. Немного подробнее можно прочесть в проекте [2].

Следующая теорема позволяет в некоторых случаях сводить проективные утверждения для коник к случаю двух окружностей:

#### Теорема 1.18.

- (а) Любые две коники над  $\mathbb{C}P^2$  можно перевести в две окружности комплексным проективным преобразованием.
- (б) Если две коники над  $\mathbb{R}P^2$  имеют не более двух общих точек (с учётом кратности), то их можно перевести в две окружности вещественным проективным преобразованием.

### 1.3 Евклидов взгляд на коники

В некоторых ситуациях бывает полезно смотреть на коники не с проективной, а с евклидовой точки зрения. Кратко обсудим этот взгляд. Более подробную информацию можно получить в книге [1] (разделы 1 и 3.2).

**Определение 1.19.** Даны точки  $P, Q$  и вещественное число  $k > |PQ|$ . *Эллипс с фокусами  $P$  и  $Q$*  — это геометрическое место таких точек  $A$ , что  $AP + AQ = k$ .

**Определение 1.20.** Даны точки  $P, Q$  и вещественное число  $k \in (0, |PQ|)$ . *Гипербола с фокусами  $P$  и  $Q$*  — это геометрическое место таких точек  $A$ , что  $|AP - AQ| = k$ .

**Определение 1.21.** Даны точка  $F$  и прямая  $\ell$ . *Парабола с фокусом  $F$  и директрисой  $\ell$*  — это геометрическое место таких точек  $A$ , что  $AF = \text{dist}(A, \ell)$ .

В каком-то смысле можно утверждать, что у параболы есть второй, бесконечно удалённый, фокус. Можно проверить, что приведённые определения коник совпадают с определениями из подраздела (1.2). Мы не будем подробно на этом останавливаться. Следующие простые свойства очень важны. Обратите внимание на случай параболы — наше неформальное рассуждение о втором, бесконечно удалённом, фокусе получает новое развитие.

#### Утверждение 1.22 (Оптическое свойство коники).

- (а) Точка  $A$  лежит на конике с фокусами  $F_1$  и  $F_2$ . Тогда касательная к конике в точке  $A$

является (внешней для эллипса, внутренней для гиперболы) биссектрисой угла  $F_1AF_2$ .

(b) Точка  $A$  лежит на параболе с фокусом  $F$  и директрисой  $\ell$ . Прямая  $m$  проходит через  $A$  и перпендикулярна директрисе. Тогда касательная к параболе в точке  $A$  является биссектрисой угла между прямыми  $AF$  и  $m$ .

**Утверждение 1.23** (Изогональное свойство коники).

- (a) Точка  $A$  лежит вне коники с фокусами  $F_1$  и  $F_2$ . Тогда касательные из  $A$  к конике изогональны относительно угла  $F_1AF_2$ .
- (b) Точка  $A$  лежит вне параболы с фокусом  $F$  и директрисой  $\ell$ . Прямая  $m$  проходит через  $A$  и перпендикулярна директрисе. Тогда касательные из  $A$  к параболе изогональны относительно угла, образованного прямыми  $AF$  и  $m$ .

**Следствие 1.24.**

- (a) Коника с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  касается сторон треугольника  $ABC$  или их продолжений. Тогда точки  $F_1$  и  $F_2$  изогонально сопряжены относительно треугольника  $ABC$ .
- (b) Парабола с фокусом  $F$  и директрисой  $\ell$  касается сторон треугольника  $ABC$  или их продолжений. Тогда  $F$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ , а  $\ell$  проходит через его ортоцентр.

Пусть  $\varphi$  — некоторое полярное преобразование, а  $\gamma$  — невырожденная коника. Рассмотрим множество касательных к  $\gamma$ . Их образ под действием  $\varphi$  — это множество точек, которое называется *образом коники* при полярном преобразовании. Более точно описать образ коники помогает следующая теорема:

**Теорема 1.25.** Даны точка  $O$  и окружность  $\gamma$ . Тогда образ  $\gamma$  при полярном преобразовании относительно произвольной окружности с центром  $O$  — это коника, один из фокусов которой совпадает с  $O$ . Если  $O$  лежит внутри  $\gamma$ , то образ будет эллипсом, если вне — гиперболой, если на  $\gamma$  — параболой. Обратное утверждение тоже верно: если  $F$  — фокус коники  $\Gamma$ , то образ  $\Gamma$  при полярном преобразовании с центром  $F$  — это окружность.

## 1.4 Изогональное сопряжение в четырёхугольнике

**Определение 1.26.** Точки  $P$  и  $Q$  называются *изогонально сопряженными в многоугольнике*  $A_1A_2 \dots A_n$ , если направления из каждой вершины многоугольника на эти точки изогональны в соответствующем угле этого многоугольника.

**Теорема 1.27.** Даны четырёхугольник (более общо — замкнутая четырёхзвенная ломаная)  $ABCD$  и точка  $P$ . Следующие утверждения эквивалентны:

- (a) Существует точка  $Q$ , изогонально сопряжённая  $P$  относительно четырёхугольника

ABCD.

(b)  $\angle APB = \angle DPC$

(c) Проекции  $P$  на стороны четырёхугольника или их продолжения лежат на одной окружности или прямой.

(d) Существует коника с фокусом  $P$ , касающаяся сторон четырёхугольника или их продолжений.

**Замечание.** Обратите внимание, в пункте (c) помимо окружности упомянута прямая. Существует ровно одна точка, проекции которой на стороны четырёхугольника лежат на одной прямой — точка Микеля. Формально никакого противоречия нет: несложным счётом углов можно убедиться, что у точки Микеля существует изогонально сопряжённая точка, просто она будет бесконечно удалённой. Как найти направление на эту точку? Ответ даёт следующая теорема:

**Теорема 1.28.** Точка Микеля изогонально сопряжена в четырёхугольнике бесконечно удалённой точке его прямой Гаусса.

Прочитать доказательство теоремы (1.27) и подробнее ознакомиться с изогональным сопряжением в четырёхугольнике можно в статье [9].

## 1.5 Проективные инволюции

**Определение 1.29.** *Инволюцией* называется отображение  $f : M \rightarrow M$  из произвольного множества  $M$  в себя, для которого справедливо соотношение  $f \circ f = \text{id}$ . Иначе говоря,  $f(f(x)) = x$  для любого элемента  $x \in M$ .

**Определение 1.30.** Предположим, что на некотором множестве  $M$  определены двойные отношения (например, если  $M$  — это проективная прямая, пучок прямых или коника). Будем говорить, что  $f : M \rightarrow M$  — *проективная инволюция*, если  $f$  является одновременно инволюцией и проективным преобразованием.

**Утверждение 1.31.** Если две проективные инволюции одинаково действуют на двух парах элементов, то они тождественно равны.

**Доказательство.** Пусть  $\varphi$  и  $\psi$  — проективные инволюции,  $\varphi(a) = \psi(a) = b$ ,  $\varphi(c) = \psi(c) = d$ ,  $\varphi(x) = y$ ,  $\psi(x) = z$ . Тогда  $[a, b; c, y] \stackrel{\varphi}{=} [b, a; d, x] \stackrel{\psi}{=} [a, b; c, z]$ , откуда следует совпадение  $y$  и  $z$ .  $\square$

**Утверждение 1.32.**

(a) Любая проективная инволюция на проективной прямой — это инверсия или центральная симметрия.

(b) Любая проективная инволюция на окружности — это центральная проекция.

**Доказательство.** Нетрудно убедиться, что вышеупомянутые преобразования являются проективными инволюциями, после чего утверждение следует из единственности (1.31).  $\square$

## 1.6 Сопряжение Клоусона

Мы начнём подраздел с более универсального, чем стандартное, определения точки Микеля, которое работает для вырожденных четырёхугольников.

**Определение 1.33.** На плоскости даны точки  $A, B, C, D$ . При этом некоторые точки могут лежать на одной прямой, а также допускается совпадение точек в одной из пар  $(A, C), (B, D)$ . Точкой Микеля упорядоченной четвёрки точек  $(A, B, C, D)$  мы будем называть центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок  $AB$  в отрезок  $DC$  — или, что равносильно, центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок  $AD$  в отрезок  $BC$ . Позволяя себе некоторую вольность речи, иногда мы будем называть точку Микеля четвёрки точек  $(A, B, C, D)$  «точкой Микеля четырёхугольника  $ABCD$ ».

**Замечание.** Если точки  $A, B, C, D$  различны и находятся в общем положении, то данное определение совпадает с традиционным.

**Замечание.** Напомним, что  $B$ -точкой Болтая треугольника  $ABC$  называется проекция центра описанной окружности на симедиану из вершины  $B$ . Можно доказать, что если  $S$  —  $B$ -точка Болтая, то  $\angle SAB = \angle SBC$  и  $\angle SCB = \angle SBA$ . Следовательно,  $B$ -точка Болтая — это в точности точка Микеля «четырёхугольника»  $ABCB$ .

На плоскости даны точки  $A, B, C, D$  общего положения. Прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $E$ , прямые  $BC$  и  $AD$  — в точке  $F$ , прямые  $AC$  и  $BD$  — в точке  $G$ . Пусть  $M$  — точка Микеля четвёрки  $(A, B, C, D)$ . Из всего вышесказанного несложно вывести, что  $MA \cdot MC = MB \cdot MD = ME \cdot MF$ , и биссектрисы углов  $\angle AMC, \angle BMD$  и  $\angle EMF$  совпадают. Следовательно, существует инверссимметрия с центром в  $M$ , меняющая местами  $A$  и  $C, B$  и  $D, E$  и  $F$ . Данное преобразование называется *сопряжением Клоусона* относительно  $ABCD$ .

**Замечание.** Если  $BC \parallel AD$ , то  $M$  совпадает с  $E$ , и сопряжение Клоусона — это просто инверссимметрия относительно трапеции  $ABCD$ .

**Утверждение 1.34.** Пусть точки  $P$  и  $Q$  сопряжены по Клоусону относительно  $ABCD$ . Тогда  $\angle APB = \angle ADQ + \angle QCB$ .

**Доказательство.** Так как при сопряжении Клоусона  $A$  переходит в  $C$ , а  $P$  — в  $Q$ , то треугольники  $MAP$  и  $MCQ$  подобны. Аналогично, подобны треугольники  $MBP$  и  $MQD$ . Следовательно,  $\angle APB = \angle APM + \angle MPB = \angle QCM + \angle MDQ = (\angle QCB + \angle BCM) + (\angle MDA + \angle ADQ) = \angle ADQ + \angle QCB$ . Последний переход следует из подобия треугольников  $MBC$  и  $MAD$ .  $\square$

Утверждение (1.34) можно использовать для проверки сопряжённости точек по Клоусону. Для этого достаточно проверить, что равенство выполнено для двух соседних сторон. Отметим важное следствие:

**Следствие 1.35.** Сопряжение Клоусона меняет местами изогонально сопряжённые точки в четырёхугольнике.

**Доказательство.** Пусть  $P$  и  $Q$  изогонально сопряжены в четырёхугольнике  $ABCD$ . Тогда  $\angle APB = \angle DPC = \angle PDC + \angle DCP = \angle ADQ + \angle QCB$ . Аналогичные равенства верны и для других сторон, а тогда  $P$  и  $Q$  сопряжены по Клоусону.  $\square$

**Утверждение 1.36.** Сопряжение Клоусона — это проективная инволюция на  $\mathbb{C}P^1$ .

**Доказательство.** Инволютивность очевидна, докажем проективность. Пусть  $m$  — комплексная координата точки Микеля. Если сопряжение Клоусона отправляет точку  $P(p)$  в точку  $Q(q)$ , то  $(m-a)(m-c) = (m-p)(m-q)$ . Следовательно, отображение  $p \mapsto q$  дробно-линейно, а тогда оно сохраняет двойные отношения.  $\square$

Из предыдущего утверждения и утверждения (1.31) следует, что сопряжение Клоусона — это *единственная* инволюция на  $\mathbb{C}P^1$ , меняющая местами противоположные вершины четырёхугольника.

Пусть теперь четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность с центром  $O$ . Теорема Брокара утверждает, что  $O$  — ортоцентр треугольника  $EFG$ , а  $M$  — основание перпендикуляра из  $O$  на  $EF$ . Следовательно, прямая  $MO$  совпадает с осью симметрии, а  $G$  при сопряжении Клоусона переходит в  $O$ .

Более подробно познакомиться с сопряжением Клоусона можно в статье [8]

## 1.7 Классическое доказательство теоремы Понселе

Здесь и далее символами  $\text{row}_\omega(X)$  мы обозначаем степень точки  $X$  относительно окружности  $\omega$ .

**Теорема 1.37** (Лемма о соосных окружностях). Даны окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и вещественное число  $k$ . Тогда геометрическое место таких точек  $P$ , что  $\text{row}_{\omega_1}(P) = k \cdot \text{row}_{\omega_2}(P)$  — это окружность (для  $k = 1$  — прямая), соосная с  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

**Теорема 1.38.** Пусть  $A_1A_2A_3 \dots$  — траектория Понселе, т.е. точки окружности (или коники)  $\Omega$  таковы, что лучи  $A_1A_2, A_2A_3 \dots$  касаются окружности (или коники)  $\omega$ . Аналогично, пусть  $B_1B_2B_3 \dots$  — другая траектория Понселе. Тогда прямые  $A_1B_1, A_2B_2 \dots$  касаются окружности (или коники), соосной с  $\Omega$  и  $\omega$ .

Классическое геометрическое доказательство теоремы Понселе основано как раз на теореме (1.38), которая доказывается через лемму о соосных окружностях. Вы можете прочитать его,

например, в замечательной книге [1].

Отметим также два простых, но важных следствия теоремы (1.38):

**Теорема 1.39.** Многоугольник  $A_1A_2 \dots A_n$  вписан в окружность (или конику)  $\Omega$  и описан вокруг окружности (или коники)  $\omega$ . Тогда для любого натурального  $k < n$  все прямые  $A_iA_{i+n}$  касаются окружности (или коники), соосной с  $\Omega$  и  $\omega$ .

**Замечание.** Разумеется, условие замыкания здесь не нужно, и верно более сильное утверждение: если незамкнутая ломаная  $A_1A_2 \dots A_k$  вращается между двумя окружностями (или кониками)  $\Omega$  и  $\omega$ , то прямая  $A_1A_k$  всё время касается окружности (или коники), соосной с  $\Omega$  и  $\omega$ .

**Теорема 1.40.** Многоугольник  $A_1A_2 \dots A_{2n}$  вписан в окружность (или конику)  $\Omega$  и описан вокруг окружности (или коники)  $\omega$ .

- (а) Главные диагонали  $A_iA_{i+n}$  пересекаются в одной точке, которая является предельной точкой пучка, порождённого  $\Omega$  и  $\omega$ .
- (б) Пусть прямая  $A_iA_{i+1}$  касается вписанной коники в точке  $X_i$ . Тогда прямые  $X_iX_{i+n}$  пересекаются в той же предельной точке.

В нашем проекте предложен другой, более алгебраический подход к доказательству теоремы Понселе и теорем (1.39) и (1.40), основанный на  $2 - 2$ -соответствиях. Мы подробно поговорим об этом в дополнительном разделе.

## 2 Cool ratio lemma

Прежде, чем вы приступите к решению задач проекта, условимся об обозначениях. Задачи, помеченные звёздочкой, по чуть менее, чем полностью субъективному мнению авторов проекта, имеют повышенную относительную сложность. Если задача состоит из нескольких пунктов, то звёздочки ставятся именно около пунктов. Решения задач, которые отмечены двумя звёздочками, авторам проекта неизвестны. Да пребудет с вами сила!

### 2.1 Определения и первая CRL

Начнем с классического утверждения, известного многим как *лемма Однакова*, *лемма об отношении синусов* или *boring ratio lemma*.

**Теорема 2.1 (Boring ratio lemma).** Пусть дан треугольник  $AXY$  и точка  $C$  на стороне  $XY$ . Тогда  $\frac{XC}{YC} = \frac{AX \cdot \sin(\angle XAC)}{AY \cdot \sin(\angle YAC)}$

**Доказательство.**  $\frac{BD}{DC} = \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB \cdot BD \cdot \sin(\angle BAD)}{AC \cdot BD \cdot \sin(\angle DAC)} = \frac{AB \cdot \sin(\angle BAD)}{AC \cdot \sin(\angle DAC)}$ .  $\square$

Теперь посмотрим на отношение синусов в правой стороне. Пусть прямая  $AC$  пересекает повторно окружность  $(AXY)$  в точке  $B$ . По теореме синусов  $\frac{\sin(\angle XAC)}{\sin(\angle YAC)} = \frac{BX}{BY}$ , что сразу даёт нам следующую теорему.

**Теорема 2.2 (Cool ratio lemma).** Даны окружность и хорда  $XY$ . Точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности. Прямые  $AB$  и  $XY$  пересекаются в точке  $C$ . Тогда  $\frac{XA}{AY} \cdot \frac{XB}{BY} = \frac{XC}{CY}$

**Доказательство.** По теореме (2.1) имеем  $\frac{XC}{CY} = \frac{XA \cdot \sin(\angle XAC)}{AY \cdot \sin(\angle CAY)}$ . Но как было замечено выше,  $\frac{XA \cdot \sin(\angle XAC)}{AY \cdot \sin(\angle CAY)} = \frac{XA \cdot XB}{AY \cdot BY}$ .  $\square$

Недостаток данной формулировки в том, что лемма не работает в обратную сторону: если точки  $C$  и  $D$  лежат обе либо на окружности, либо на прямой  $XY$ , то из равенства отношений  $\frac{XC}{YC}$  и  $\frac{XD}{YD}$  не следует совпадение точек  $C$  и  $D$ . Исправим это.

**Определение 2.3.** Зафиксируем точки  $X$  и  $Y$ . Прямая  $XY$  делит плоскость на две полуплоскости. Назовем одну из них *верхней*, а другую *нижней*. *Cool-ratio функцией по базису  $XY$*  назовем функцию  $f_{XY}(T)$  из  $\mathbb{R}^2 \setminus Y$  в  $\mathbb{R}$ , равную по модулю  $\frac{XT}{YT}$ , со знаком  $-$ , если  $T$  лежит на отрезке  $XY$  или в нижней полуплоскости и со знаком  $+$  иначе.

**Замечание.** Обратите внимание, что  $f_{XY}$  и  $f_{YX}$  — это не одно и то же!

**Замечание.** Часто в задачах мы будем определять cool-ratio-функцию только для одного отрезка. С целью упрощения выкладок, в таком случае мы будем опускать индекс  $XY$ , предварительно объявив, какой отрезок мы берём в качестве базиса.

**Утверждение 2.4.** Пусть  $\omega$  — окружность или прямая, проходящая через  $X$  и  $Y$ . Тогда  $f_{XY}$  — биективное отображение из  $\omega \setminus Y$  в  $\mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Пусть  $T$  — некоторая точка  $\omega \setminus Y$ ,  $\lambda = f_{XY}(T)$ . Построим окружность Аполлония по отрезку  $XY$  с отношением  $\lambda$ . Поскольку центр окружности Аполлония лежит на отрезке  $XY$  — точки пересечения  $\omega$  с окружностью Аполлония лежат по разные стороны от отрезка  $XY$  и, следовательно, имеют разные значения по знаку, значит, существует лишь одна точка с заданным отношением, что означает инъективность. Но поскольку окружность Аполлония имеет точки как внутри отрезка, так и снаружи, существуют точки пересечения этой окружности с  $\omega$ , а значит, функция сюръективна. Значит, она биективна.  $\square$

Теперь, разобрав случаи, можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 2.5 (Cool ratio lemma).** Пусть дана окружность  $\omega$  и её хорда  $XY$ . Точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности, а точка  $C$  — на прямой  $XY$ . Тогда  $A, B, C$  лежат на одной прямой, если и только если  $f_{XY}(A) \cdot f_{XY}(B) = f_{XY}(C)$ .

Однако можно обойтись и без разбора случаев.

**Доказательство.** Пусть  $T$  пересечение касательной в точке  $A$  к  $\omega$  с  $XY$ . Коллинеарность точек  $A, B$  и  $C$  равносильна равенству  $[X, Y; A, B] = [X, Y; T, C] \iff \frac{f(A)}{f(B)} = \frac{f(T)}{f(C)} \iff \frac{f(A)}{f(B)} = \frac{f^2(A)}{f(C)} \iff f(A) \cdot f(B) = f(C)$ .  $\square$

Этот результат уже позволяет доказывать весьма нетривиальные утверждения.

**Пример (Теорема о бабочке).** Точки  $A, B, C, D$  лежат на окружности  $\omega$ . Пусть  $P$  — точка пересечения  $AC$  и  $BD$ . Хорда  $XY$  окружности  $\omega$  такова, что  $P$  лежит на  $XY$  и  $PX = PY$ . Пусть  $AD$  пересекает  $XY$  в точке  $M$ , а  $BC$  в точке  $N$ . Докажите, что  $PM = PN$ .

**Доказательство.** Определим cool-ratio-функцию  $f$  относительно отрезка  $XY$ . Тогда  $f(M)f(N) = f(A)f(D)f(B)f(C) = f^2(P) = (-1)^2 = 1$ , что в точности и означает симметричность точек  $M$  и  $N$  относительно середины хорды  $XY$ .  $\square$

**Пример (Частный случай теоремы Паскаля).** Точки  $A, B, C, D, E, F$  лежат на окружности  $\omega$ . Хорда  $XY$  окружности  $\omega$  такова, что  $AD$  и  $BC, CF$  и  $DE$  пересекаются на  $XY$ . Докажите, что  $AF$  и  $BE$  пересекаются на  $XY$ .

**Доказательство.** Определим cool-ratio-функцию  $f$  относительно отрезка  $XY$ . Пусть  $AD$  и  $BC$  пересекаются в  $M$ , а  $CF$  и  $DE$  в  $N$ . Тогда  $f(A) \cdot f(F) = \frac{f(A) \cdot f(F) \cdot f(C) \cdot f(D)}{f(C) \cdot f(D)} = \frac{f(M) \cdot f(N)}{f(C) \cdot f(D)} = \frac{f(B) \cdot f(E) \cdot f(C) \cdot f(D)}{f(C) \cdot f(D)} = f(B) \cdot f(E)$ . Следовательно, прямые  $AF$  и  $BE$  также пересекаются на  $XY$ .  $\square$

**Как мыслить про CRL?** У многих людей CRL сразу вызывает отторжение, так как там даны какие-то равенства на отрезки — причем интуитивно не понятные, а также сам метод чисто счётный. Но на самом деле можно вспомнить, что в двойных отношениях (в евклидовом смысле) также фигурируют отрезки и синусы. Тем не менее, двойные отношения не считаются несинте-

тической геометрией, и многие активно используют их в задачах. Почему же так? Дело в том, что двойные отношения допускают обобщение на произвольные проективные плоскости; но самое главное — двойное отношение мыслят как инвариант при проекциях, симметриях и проективных преобразованиях. Иными словами, двойные отношения — это то, что мы перекидываем, и в итоге, используя их основные свойства, решаем задачу, даже не задумываясь о том, что в определении двойных отношений присутствуют отрезки или синусы. Так вот, про CRL можно мыслить так же!

**Задача 1.** Трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  вписана в окружность  $\omega$ . Точка  $S$  — середина её дуги  $AD$ , не содержащей точку  $B$ . На продолжении отрезка  $AD$  за точку  $A$  выбрана точка  $E$ . Отрезки  $CE$  и  $SE$  повторно пересекают  $\omega$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Докажите, что  $AD$ ,  $SX$  и  $BY$  пересекаются в одной точке.

**Доказательство.** Положим для краткости  $f := f_{AD}$ . Так как  $S$  — середина дуги  $AD$ , то  $f(S)^2 = 1$ . Кроме того, так как  $BC \parallel AD$ , то  $f(B \cdot f(C)) = 1$ . Следовательно,

$$f(B) \cdot f(Y) \stackrel{\text{CRL}}{=} f(B) \cdot \frac{f(E)}{f(S)} = \frac{f(E)}{f(C) \cdot f(S)} \stackrel{\text{CRL}}{=} \frac{f(X)}{f(S)} = f(X) \cdot f(S).$$

Снова применяя CRL, заключаем, что точки пересечения прямых  $BY$  и  $SX$  с прямой  $AD$  совпадают, что и требовалось.  $\square$

**Задача 2.** Дан треугольник  $ABC$  и точки  $E, F$  на его сторонах  $AB$  и  $AC$ . Точка  $M$  — проекция центра описанной окружности на  $EF$ .  $AM$  пересекает описанную около  $ABC$  окружность в точке  $D$ . Оказалось, что  $EF$ ,  $BC$  и касательная к описанной в точке  $D$  пересекаются в одной точке. Докажите, что  $M$  — середина  $EF$ .

**Доказательство.** Пусть прямая  $EF$  пересекает описанную окружность в точках  $P$  и  $Q$ . Положим для краткости  $f := f_{PQ}$ . Тогда утверждение из условия можно переформулировать так: «точки пересечения прямых  $BC$  и  $DD$  с прямой  $EF$  совпадают» — и затем записать в терминах cool-ratio-функции в виде  $f(D)^2 = f(B)f(C)$ . Заметим, что  $PM = QM$ , а, значит, достаточно доказывать равенство  $f(E) \cdot f(F) = 1$ .

$$f(E) \stackrel{\text{CRL}}{=} f(A) \cdot f(B) = \frac{f(A) \cdot f^2(D)}{f(C)} = \frac{f^2(A) \cdot f^2(D)}{f(A) \cdot f(C)} \stackrel{\text{CRL}}{=} \frac{f^2(M)}{f(F)} = \frac{1}{f(F)},$$

что и требовалось.  $\square$

**Задача 3.** Даны треугольник  $ABC$  и его биссектриса  $AD$ . Точки  $P$  и  $Q$  на окружности  $(ABC)$  таковы, что  $\angle BPD = \angle DQC = 90^\circ$ . Прямые  $PQ$  и  $BC$  пересекаются в точке  $T$ . Докажите, что прямая  $AT$  касается окружности  $(ABC)$ .

**Доказательство.** Положим для краткости  $f := f_{BC}$ . Пусть прямые PD и QD повторно пересекают описанную окружность в точках X и Y. Точки X и Y диаметрально противоположны точкам B и C соответственно, а тогда  $XY \parallel BC$ , что равносильно равенству  $f(X) \cdot f(Y) = 1$ .

Применим CRL:

$$f(P) \cdot f(Q) \stackrel{\text{CRL}}{=} \frac{f(D)}{f(X)} \cdot \frac{f(D)}{f(Y)} = f^2(D).$$

Следовательно, прямая PQ, касательная из A и прямая BC пересекаются в одной точке.  $\square$

#### Задача 4.

(а) (Теорема об окружностно-чевианном пинг-понге) В окружности  $\omega$  проведена хорда XY. На прямой XY выбраны фиксированные точки P, Q и R, а на  $\omega$  — переменная точка A. Прямая AP повторно пересекает  $\omega$  в точке  $A_1$ , прямая  $A_1Q$  повторно пересекает  $\omega$  в точке  $A_2$ , прямая  $A_2R$  повторно пересекает  $\omega$  в точке  $A_3$ . Докажите, что точка пересечения прямых  $AA_3$  и XY не зависит от выбора точки A.

(б) Даны окружность и  $2n$  прямых, пересекающихся в одной точке P, лежащей вне окружности. На первой прямой выбирается произвольная точка  $A_1$ . Из неё проводится касательная к конике до пересечения со второй прямой в точке  $A_2$ . Из точки  $A_2$  проводится касательная к конике до пересечения с третьей прямой в точке  $A_3$  и так далее по циклу. Докажите, что если мы спустя  $k$  полных оборотов замкнулись (т.е.  $A_{2nk+1} = A_1$ ), то и для любой другой точки  $A_1$  мы тоже замкнёмся за  $k$  оборотов.

#### Доказательство.

(а) Докажем сразу более общее утверждение: если на прямой XY фиксированы не обязательно различные точки  $P_1, P_2, \dots, P_{2n}$ , переменная точка  $A = A_0$  лежит на  $\omega$ ,  $A_i$  — вторая точка пересечения  $P_i A_{i-1}$  с  $\omega$ , и  $A_{2n} = A_0$  для одного положения точки A, то  $A_{2n} = A_0$  всегда.

Положим для краткости  $f := f_{XY}$ . По CRL, для любого  $1 \leq i \leq 2n$  верны равенства  $f(A_{i-1}) \cdot f(A_i) = f(P_i)$ . Перемножая отдельно равенства для чётных  $i$  и для нечётных, заключаем, что

$$f(A_0) \prod_{i=1}^{2n} f(A_i) = f(P_1) \times \dots \times f(P_{2n-1}), \text{ и } \prod_{i=1}^{2n} f(A_i) \cdot f(A_{2n+1}) = f(P_2) \times \dots \times f(P_{2n}).$$

Таким образом, условия замыкания ломаной равносильно равенству

$$f(P_1) \times \dots \times f(P_{2n-1}) = f(P_2) \times \dots \times f(P_{2n}),$$

т.е. не зависит от выбора точки A.

(б) После полярного преобразования относительно данной окружности задача превращается в утверждение из предыдущего пункта.

□

## 2.2 CRL помогает доказывать концикличность

Рассмотрим теперь немного другой сюжет.

**Теорема 2.6** (Вторая cool ratio lemma). Даны окружность  $\omega$  и хорда  $XY$ . Точки  $A$  и  $B$  лежат на  $\omega$ , а точки  $C$  и  $D$  — на прямой  $XY$ . Точки  $A, B, C, D$  лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда  $f_{XY}(A) \cdot f_{XY}(B) = f_{XY}(C) \cdot f_{XY}(D)$ .

**Доказательство.** Пусть прямые  $AC$  и  $BD$  повторно пересекают  $\omega$  в точках  $E$ , и  $F$  соответственно. По лемме Фусса, концикличность  $A, B, C$  и  $D$  равносильна параллельности прямых  $EF$  и  $XY$ , которая, в свою очередь, равносильна тому, что точки  $E, F, X, Y$  образуют равнобокую трапецию с основаниями  $EF$  и  $XY$ , т.е. тому, что  $f(E) \cdot f(F) = 1$ . Но  $f(E) = \frac{f(C)}{f(A)}$ ,  $f(F) = \frac{f(D)}{f(B)}$  из CRL, что влечёт равносильность с равенством  $f(A) \cdot f(B) = f(C) \cdot f(D)$ . □

**Пример.** Точки  $M, Q$  лежат на прямой  $BC$ , а точки  $P, N$  — на описанной окружности  $ABC$ . Известно, что,  $AP$  и  $AQ$ ,  $AM$  и  $AN$  симметричны относительно биссектрисы угла  $BAC$ . Докажите, что прямые  $PM$  и  $QN$  пересекаются на описанной окружности, причём эта точка лежит на описанной окружности  $AQM$ .

**Доказательство.** Определим cool-ratio-функцию  $f$  относительно отрезка  $BC$ . Пусть прямая  $AM$  пересекает описанную окружность в точке  $K$ , прямая  $AQ$  — в точке  $L$ , а прямая  $PM$  — в точке  $X$ . Тогда  $f(X) = \frac{f(M)}{f(P)} = \frac{\frac{f(A)}{f(N)}}{\frac{f(A)}{f(Q)}} = \frac{f(Q)}{f(N)}$ , откуда получаем, что точка  $X$  лежит на прямой  $QN$ . Но  $f(X) = \frac{f(M)}{f(P)} = f(M) \cdot f(L) = \frac{f(M) \cdot f(Q)}{f(A)}$ . Следовательно,  $f(A) \cdot f(X) = f(M) \cdot f(Q)$ , т.е. точки  $A, X, M, Q$  лежат на одной окружности. □

А можно ли заменить окружность+прямую на две окружности? Положительный ответ на этот вопрос даёт следующее утверждение.

**Теорема 2.7** (Третья cool ratio lemma). Пусть даны окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , пересекающиеся по точкам  $X$  и  $Y$ . Точки  $A$  и  $B$  лежат на  $\omega_1$ , а точки  $C$  и  $D$  лежат на  $\omega_2$ . Точки  $A, B, C, D$  лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда  $f_{XY}(A) \cdot f_{XY}(B) = f_{XY}(C) \cdot f_{XY}(D)$ .

**Доказательство.** Из теоремы о радикальном центре концикличность  $ABCD$  равносильна тому, что прямые  $AB, CD, XY$  пересекаются в одной точке. Тогда из CRL это равносильно равенству  $f(A) \cdot f(B) = f(C) \cdot f(D)$ . □

Отметим ещё одну интересную идею.

**Утверждение 2.8.** При инверсии относительно окружности, проходящей через  $X$  и  $Y$ ,  $|f_{XY}|$  сохраняется.

**Доказательство.** Действительно пусть некоторая точка  $T$  перешла в  $T'$ . Построим окружность Аполлония по отрезку  $XU$  через  $A$ . Она ортогональна окружности инверсии, а потому перешла в себя. Следовательно,  $|f_{XY}(A')| = |f_{XY}(A)|$ .  $\square$

Если центр окружности инверсии лежит на отрезке  $XU$ , то он совпадает с серединой отрезка, а инверсия меняет местами внутренность и внешность отрезка. Получаем следующее утверждение:

**Следствие 2.9.** На прямой  $XU$  отмечены точки  $A$  и  $B$ . Точка  $M$  — середина отрезка  $XU$ . Следующие утверждения эквивалентны:

- $f_{XY}(A) = -f_{XY}(B)$  (или, что равносильно,  $[X, Y; A, B] = -1$ );
- $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MX^2$  (т.е.  $A$  и  $B$  инверсны относительно окружности с диаметром  $XU$ ).

**Задача 5.** Треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\Omega$ . Также дана произвольная прямая  $\ell$ , пересекающая окружность в различных точках  $X$  и  $Y$ . Пусть  $M$  — точка Микеля прямых  $AB, BC, AC$  и  $\ell$ . Пусть  $f = f_{XY}$ . Докажите, что  $f(M) = f(A) \cdot f(B) \cdot f(C)$ .

**Доказательство.** Положим для краткости  $f := f_{XY}$ . Пусть прямая  $XU$  пересекает прямые  $AC$  и  $AB$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Точка  $M$  лежит на окружностях  $(ABC)$  и  $(AKL)$ . Следовательно,

$$f(M)f(A) \stackrel{(2.6)}{=} f(K)f(L) \stackrel{\text{CRL}}{=} f(A)f(C) \cdot f(A)f(B).$$

Сокращая левую и правую части равенства на  $f(A) \neq 0$ , получаем требуемое.  $\square$

**Задача 6.**  $ABCD$  — равнобокая трапеция. Некоторая окружность проходит через  $A$  и касается основания  $BC$  в точке  $E$ . Пусть  $X$  — вторая точка пересечения этой окружности с описанной окружностью трапеции. Прямая  $XE$  пересекает описанную окружность в точке  $Y$ , а прямая  $DY$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $F$ . Докажите, что  $CF = BE$ .

**Доказательство.** Положим для краткости  $f := f_{BC}$ . Достаточно доказать, что  $f(F) \cdot f(E) = 1$ . В самом деле,

$$f(F) \stackrel{\text{CRL}}{=} f(D) \cdot f(Y) \stackrel{\text{CRL}}{=} \frac{1}{f(A)} \frac{f(E)}{f(X)} \stackrel{(2.6)}{=} \frac{f(E)}{f^2(E)} = \frac{1}{f(E)},$$

что и требовалось.  $\square$

**Задача 7.** Даны две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Точки  $A$  и  $B$  лежат на  $PQ$ , точки  $K, L$  — на  $\omega_1$ , и точки  $M, N$  — на  $\omega_2$ . Известно, что прямые  $AK, BL$  касаются  $\omega_1$ , а прямые  $AM, BN$  касаются  $\omega_2$ , причём с каждой стороны от  $XU$  ровно по две точки из  $K, L, M, N$ . Докажите, что точки  $K, L, M$  и  $N$  лежат на одной окружности.

**Доказательство.** Положим для краткости  $f := f_{PQ}$ . Применяя CRL, заключаем, что  $f(K)^2 = f(A) = f(M)^2, f(L)^2 = f(B) = f(N)^2$ , откуда  $|f(K)f(L)| = |f(N)f(M)|$ . Знаки подмодульных

выражений совпадают в силу прописанного в условии расположения точек, и утверждение задачи следует из третьей CRL.  $\square$

**Задача 8.** Точки  $B, C, D, E, F$  лежат на одной окружности. Прямые  $DE$  и  $DF$  пересекают прямую  $BC$  в точках  $X$  и  $Y$ . Описанные окружности треугольников  $X\gamma D$  и  $B\gamma D$  пересекаются в точке  $Z$ . Докажите, что точки  $E, F$ , точка, симметричная  $D$  относительно середины отрезка  $BC$ , и точка, симметричная  $Z$  относительно прямой  $BC$ , лежат на одной окружности.

**Доказательство.** Пусть точки  $D', Z'$  симметричны  $D$  относительно середины отрезка  $BC$  и  $Z$  относительно прямой  $BC$  соответственно. Заметим, что  $\angle BD'S = \angle CDB = \angle CZB = \angle BZ'S$ , т.е. точки  $B, C, Z'$  и  $D'$  лежат на одной окружности. Положим для краткости  $f := f_{BC}$ . Тогда

$$f(Z')f(D') = (-f(Z)) \left( -\frac{1}{f(D)} \right) = \frac{f(Z)f(D)}{f(D)^2} \stackrel{\text{2nd CRL}}{=} \frac{f(X)f(Y)}{f(D)^2} \stackrel{\text{CRL}}{=} f(E)f(F).$$

Теперь утверждение задачи следует из третьей CRL для окружностей  $(BCDEFZ)$  и  $(BCD'Z')$ .  $\square$

**Задача 9.** В треугольник  $ABC$  проведены высоты  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ . Прямые  $AC$  и  $A_1C_1$  пересекаются в точке  $B_2$ . Прямая, проходящая через  $B_1$  параллельно  $A_1C_1$ , пересекает прямые  $AB$  и  $BC$  в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что точки  $X, Y, B_2$  и середина отрезка  $AC$  лежат на одной окружности.

**Доказательство.** Положим для краткости  $f := f_{AC}$ . Если  $M$  — середина стороны  $AC$ , то

$$f(X) \cdot f(Y) \stackrel{\text{CRL}}{=} f(B_1) = -f(B_2) = f(B_2) \cdot f(M).$$

Точки  $X, Y, A, C$  лежат на одной окружности, и тогда утверждение задачи следует из второй CRL для этой окружности и прямой  $AC$ .  $\square$

**Задача 10\*** (Устная городская геометрическая олимпиада 2025 10.5). Дан неравнобедренный остроугольный треугольник  $ABC$ . Серединный перпендикуляр к стороне  $BC$  и прямые  $AB, AC$  образуют треугольник  $\Delta$ . Пусть  $X$  — точка пересечения касательных в точках  $B$  и  $C$  к окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Прямая  $AX$  повторно пересекает эту окружность в точке  $G$ , а  $M$  — середина стороны  $BC$ . Докажите, что описанные окружности треугольников  $XGM$  и  $\Delta$  касаются.

**Доказательство.** Пусть серединный перпендикуляр к  $BC$  пересекает  $(ABC)$  в точках  $P, Q$ , а  $AB, AC$  в точках  $K, T$ . Пусть  $f = f_{PQ}$ . Пусть  $(\Delta)$  пересекает  $(ABC)$  в точке  $S$ . Тогда по второй crl  $f(A)f(S) = f(K)f(T)$ . Покажем, что  $S$  лежит на  $(XGM)$ . Хотим чтобы  $f(S)f(G) = f(M)f(X)$ , т.е. проверяем, что  $f(K)f(T)f(G) = f(M)f(X)f(A)$ . По crl имеем  $f(A)f(G) = f(X)$ , хотим  $f(K)f(T) = f(M)f(A)^2$ . По crl  $f(A)f(B) = f(K), f(A)f(C) = f(T)$ , т.е. хотим проверить

$f(B)f(C) = f(M)$ , что верно из сгЛ. Очевидно, что  $(\Delta) \perp (ABC), (XGM) \perp (ABC)$ . Отсюда следует касание.  $\square$

**Задача 11\*.** В треугольнике  $ABC$  медиана  $AM$  пересекает описанную окружность в точке  $F$ . Вписанная в треугольник  $ABC$  парабола с фокусом  $F$  касается прямых  $BC, AC$  и  $AB$  в точках  $P, Q$  и  $R$ . Докажите, что точки  $P, Q, R, M$  лежат на одной окружности.

**Доказательство.** Докажем сначала, что точки  $B, R, Q$  и  $C$  лежат на одной окружности. Так как  $F$  лежит на  $AM$ , и фокусы коники, вписанной в треугольник, изогонально сопряжены, то бесконечно удаленная точка параболы совпадает с бесконечно удаленной точкой симедианы треугольника из вершины  $A$ . Пусть  $K$  — полюс симедианы из вершины  $A$  относительно параболы. Тогда с одной стороны,  $K$  лежит на  $QR$ , а с другой стороны на бесконечно удаленной прямой. По гармоническому свойству поляры, симедиана из вершины  $A$  делит  $QR$  пополам — значит, отрезки  $BC$  и  $QR$  антипараллельны относительно угла  $A$ , и искомая концикличность доказана.

Положим для краткости  $f := f_{BC}$ . Прямые  $AP, BQ$  и  $CR$  пересекаются в одной точке — это можно понять либо из теоремы Бриансона для вырожденного шестиугольника  $ARBPCQ$ , либо сделав проективное преобразование, переводящее конику в окружность. Тогда если прямые  $QR$  и  $BC$  пересекаются в точке  $X$ , то  $[B, C; P, X] = -1$ , а тогда  $f(X) = -f(P)$ . Следовательно,

$$f(Q) \cdot f(R) \stackrel{\text{CRL}}{=} f(X) = -f(P) = f(P) \cdot f(M),$$

и утверждение задачи следует из второй CRL для окружности  $(BCQR)$  и прямой  $BC$ .  $\square$

## 2.3 Generalized Cool Ratio Lemma

**Теорема 2.10 (Generalized Cool Ratio lemma).** Пусть дана окружность  $\omega$  и хорда  $XY$ . Точки  $A, B, C$  и  $D$  лежат на  $\omega$ . На прямой  $XY$  выбраны точка  $E$  и  $F$ . Тогда  $A, B, C, D, E, F$  лежат на одной конике тогда и только тогда, когда

$$f_{XY}(A) \cdot f_{XY}(B) \cdot f_{XY}(C) \cdot f_{XY}(D) = f_{XY}(E) \cdot f_{XY}(F).$$

**Доказательство.** Пусть  $AB$  пересекает  $XY$  в точке  $P$ , а  $CD$  в точке  $Q$ . По теореме Дезарга об инволюции для  $ABCD$  существует проективная инволюция, которая меняет местами пары точек  $P$  и  $Q, X$  и  $Y, E$  и  $F$ . Следовательно,  $[XY; PE] = [YX; QF] = [XY; FQ]$ . Значит,  $\frac{f(P)}{f(E)} = \frac{f(F)}{f(Q)}$ . А тогда  $f(E) \cdot f(F) = f(P) \cdot f(Q) = f(A) \cdot f(B) \cdot f(C) \cdot f(D)$ .  $\square$

**Задача 12.** Окружность и прямая пересекаются в двух точках. Коника пересекает окружность в точках  $X, Y, Z$  и  $T$ , а прямую — в точках  $A$  и  $B$ . Прямые  $AX, AY, BZ$  и  $BT$  повторно пересекают окружность в точках  $X', Y', Z'$  и  $T'$ . Докажите, что точки  $X', Y', Z', T', A$  и  $B$  лежат на одной конике.

**Доказательство.** Пусть исходная прямая пересекает окружность в точках  $P$  и  $Q$ . Положим для краткости  $f := f_{PQ}$ . Тогда

$$f(A') \cdot f(B') \cdot f(C') \cdot f(D') \stackrel{\text{CRL}}{=} \frac{f^2(X) \cdot f^2(Y)}{f(A)f(B)f(C)f(D)} \stackrel{\text{GCRL}}{=} f(X)f(Y).$$

Применение GCRL в обратную сторону завершает доказательство.  $\square$

## 2.4 Связь CRL с классическими метрическими теоремами

**Утверждение 2.11** (Связь с поворотной гомотетией). Дан треугольник  $ABC$  и точки  $E$  и  $F$  на прямых  $AB$  и  $AC$  соответственно. Пусть  $M$  — точка пересечения описанных окружностей треугольников  $ABC$  и  $AEF$ . Тогда  $|f_{BC}(M)| = |f_{EF}(M)| = \frac{AE}{BF}$ .

В предыдущих задачах мы фиксировали одну базовую хорду и использовали CRL для неё. Однако иногда бывает полезно ввести несколько cool-ratio-функций и переписать требуемое утверждение с их помощью! В качестве примера можно привести теоремы Фалеса, Чевы и Менелая. В дальнейшем, если в задаче дан треугольник  $ABC$ , мы рекомендуем следующую нотацию:  $p(T) = f_{BC}(T)$ ,  $q(T) = f_{CA}(T)$ ,  $r(T) = f_{AB}(T)$ , причем  $p(A), q(B), r(C) > 0$  (иными словами, внутри треугольника  $ABC$  все три функции положительны.)

**Утверждение 2.12** (Теорема Фалеса). Дан треугольник  $ABC$  и точки  $E$  и  $F$  на  $AB$  и  $AC$  соответственно. Прямые  $EF$  и  $BC$  параллельны тогда и только тогда, когда  $r(E) \cdot q(F) = 1$ .

**Утверждение 2.13** (Теорема Чевы). Дан треугольник  $ABC$  и точки  $D, E$  и  $F$  на  $BC, AB$  и  $AC$  соответственно. Прямые  $AD, BE, CF$  пересекаются в одной точке или попарно параллельны тогда и только тогда, когда  $p(D) \cdot q(E) \cdot r(F) = -1$ .

**Утверждение 2.14** (Теорема Менелая). Дан треугольник  $ABC$  и точки  $D, E$  и  $F$  на  $BC, AB$  и  $AC$  соответственно. Точки  $D, E, F$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда  $p(D) \cdot q(E) \cdot r(F) = 1$ .

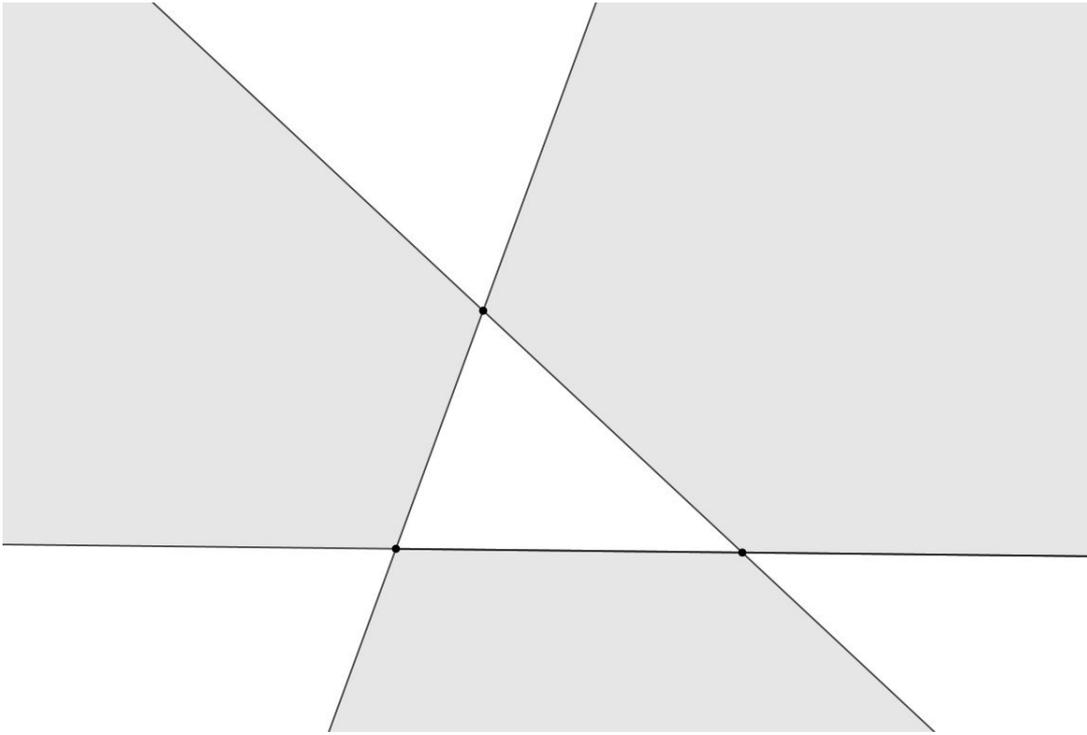
**Утверждение 2.15** (Тригонометрическая теорема Чевы). Дан треугольник  $ABC$  и точки  $D, E$  и  $F$  на  $(ABC)$ . Прямые  $AD, BE, CF$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда  $p(D) \cdot q(E) \cdot r(F) = -1$ .

Также хочется отметить ещё несколько простых, но полезных свойств:

**Утверждение 2.16.**

(a)  $p(T) \cdot q(T) \cdot r(T) = \pm 1$ , где знак  $+$  в белых секторах (см. картинку).

(b)  $p(A) \cdot q(B) \cdot r(C) = 1$



**Задача 13.** Дан треугольник  $ABC$ . Высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекают описанную окружность в точках  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ .  $B_2A_1$  повторно пересекает окружность в точке  $X_1$ , а  $B_2C_1$  повторно пересекает окружность в точке  $Y_1$ . Окружность описанная около  $A_1A_2X_1$  пересекает повторно сторону  $BC$  в точке  $X_2$ , а окружность описанная около  $C_1C_2Y_1$  пересекает повторно сторону  $AB$  в точке  $Y_2$ . Докажите, что  $X_2Y_2 \parallel AC$ .

**Доказательство.** Нам надо проверить, что  $r(X_2) \cdot p(Y_2) = 1$ .

$$p(X_2) \cdot r(Y_2) = \frac{r(C_2) \cdot r(Y_1) \cdot p(A_2) \cdot p(X_1)}{r(C_1) \cdot p(A_1)} = \frac{r(Y_1) \cdot p(X_1)}{r(C) \cdot p(A)} = \frac{r(C_1) \cdot p(A_1) \cdot q(B)}{p(B_2) \cdot r(B_2)}$$

$$\frac{r(C_1) \cdot p(A_1) \cdot q(B)}{p(B_2) \cdot r(B_2)} = -\frac{r(C_1) \cdot p(A_1) \cdot q(B)}{q(B_2)} = -p(A_1) \cdot q(B_1) \cdot r(C_1) = 1.$$

□

**Задача 14.** Дан треугольник  $ABC$ . Точка  $D$  - произвольная на его описанной,  $M$  - середина  $BC$ . Окружность  $AMD$  повторно пересекает прямую  $BC$  в точке  $X$ .  $BD$  пересекает  $AC$  в точке  $Y$ . Касательные к описанной в  $B$  и  $C$  пересекаются в  $T$ . Докажите, что точки  $X$ ,  $Y$  и  $T$  лежат на одной прямой.

**Доказательство.** Пусть  $Z$  — точка пересечения  $CD$  и  $AB$ . По теореме Паскаля для  $ABBDCC$  точки  $Z, T, Y$  коллинеарны. По второй crl имеем  $p(M)p(X) = p(A)p(D)$ ,  $p(M) = -1$  и  $p(X) = -p(A)p(D)$ . Также  $q(Y) = q(B)q(D)$  и  $r(Z) = r(C)r(D)$ .  $r(Z)p(X)q(Y) = -p(A)p(D)q(B)q(D)r(C)r(D) = p(A)q(B)r(C) = 1$ . Тогда по теореме Менелая точки  $X, Y, Z$  лежат на одной прямой. □

## Задача 15.

- (а) Треугольники  $ABC$  и  $DEF$  вписаны в окружность  $\Omega$ . Прямая  $BC$  пересекает прямые  $DE$  и  $DF$  в точках  $X$  и  $Y$ . Окружность  $(DXY)$  пересекает  $\Omega$  в точке  $D_1$ . Аналогично определяются точки  $E_1$  и  $F_1$ . Докажите, что прямые  $AD_1$ ,  $BE_1$  и  $CF_1$  пересекаются в одной точке.
- (b\*) (Гроб из JCG). Треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  имеют общую описанную окружность, а прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  пересекаются в одной точке. Точка  $A_1$  на  $(ABC)$  такова, что она лежит на окружности, проходящей через  $A$  и точки пересечения  $B'C'$  с  $AB, AC$ . Аналогично определим точки  $B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1$ . Докажите, что прямые  $A_1A'_1$ ,  $B_1B'_1$  и  $C_1C'_1$  пересекаются в одной точке.

## Доказательство 1.

- (а) По ТригЧеве хотим проверять  $p(D_1)q(E_1)r(F_1) = -1$ . Из задачи (5) известно, что  $p(D_1) = p(D)p(E)p(F)$ . Следовательно, достаточно проверить равенство  $p(D)p(E)p(F)q(D)q(E)q(F)r(D)r(E)r(F) = -1$ . Но  $p(P)q(P)r(P) = -1$  для любой точки  $P$  на  $(ABC)$ , победа.
- (b) Сформулируем несложную лемму:

**Лемма 2.17.** Треугольники  $ABC, DEF$  вписаны в конику  $\mathcal{K}$  и перспективны. Пусть  $Q$  — точка плоскости, и  $X'$  — образ точки  $X$  на конике  $\mathcal{K}$  при проекции этой коники на себя с центром  $Q$ . Тогда треугольники  $A'B'C'$  и  $D'E'F'$  перспективны.

**Доказательство.** Следует из теоремы об окружностно-чевианном пинг-понге: если композиция  $2n$  проекций коники на себя с центрами, лежащими на одной прямой, имеет неподвижную точку, то эта композиция тождественна. Применяем композицию с центром  $P$ , затем  $Q$ , затем с точкой пересечения  $PQ$  с  $A'D'$  и снова с  $Q$ .  $\square$

По пункту (а), прямые  $AA'_1, BB'_1, CC'_1$  пересекаются в одной точке  $P$ , и прямые  $A'A_1, B'B_1, C'C_1$  пересекаются в одной точке  $Q$ . Покажем, что  $P = Q$ ; отсюда, по лемме, будет следовать требуемое.

Дальнейшие рассуждения принадлежат Владимиру Конышеву. Докажем лемму:

**Лемма 2.18.** Треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\Omega$  и описан вокруг коники  $\gamma$ . Прямая  $\ell$  касается  $\gamma$ . Пусть  $M$  — точка Микеля сторон треугольника и прямой  $\ell$ . Достроим треугольник  $MXY$ , вписанный в  $\Omega$  и описанный вокруг  $\gamma$ . Тогда  $XY \parallel \ell$ .

**Доказательство.** Сопряжение Клоусона с центром в  $M$  включает в себя симметрию относительно биссектрисы угла  $F_1MF_2$  ( $F_i$  — фокусы  $\gamma$ ) и меняет местами точки  $K, L$  пересечения  $\ell$  и  $\Omega$ . Следовательно, прямые  $MX$  и  $MY$  изогональны относительно угла  $KML$ , а тогда  $XY \parallel KL$ , что и требовалось.  $\square$

Перейдём к решению задачи. Так как у треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  существует общая описанная коника, то по теореме Понселе у них существует и общая вписанная коника  $\gamma$ . Пусть прямая  $BC$  касается  $\gamma$  в точке  $K_a$ ; точки  $K_b, K_c, K'_a, K'_b, K'_c$  определим аналогично. Из теоремы Понселе также следует, что можно достроить  $A_1$  до вписанно-описанного треугольника  $A_1XY$ . Обозначим точку касания  $\gamma$  и  $XY$  символами  $L_a$ ; точки  $L_b, L_c, L'_a, L'_b, L'_c$  определим аналогично. Из леммы известно, что точки  $K'_a$  и  $L_a$  симметричны относительно центра  $\gamma$ . В силу гомографии Понселе (см. (46)), отображения  $A_1 \mapsto L_a$  и  $A' \mapsto K'_a$  проективны, а тогда композиция  $A' \mapsto K'_a \mapsto L_a \mapsto A_1$  тоже проективно и, очевидно, является инволюцией. Любая инволюция на окружности — это центральная симметрия. Следовательно, прямая  $A'A_1$  проходит через фиксированную точку. Через ту же точку проходят остальные пять прямых.  $\square$

Упомянем ещё одну теорему, которая в некотором смысле является аналогом теоремы (2.10) для случая, когда окружность+прямая заменены на три прямые общего положения.

**Теорема 2.19** (Теорема Карно). Дан треугольник  $ABC$ , точки  $A_1, A_2$  на  $BC$ , точки  $B_1, B_2$  на  $AC$ , точки  $C_1, C_2$  на  $AB$ . Точки  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  лежат на одной конике тогда, и только тогда, когда

$$p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot q(B_1) \cdot q(B_2) \cdot r(C_1) \cdot r(C_2) = 1.$$

**Доказательство.** Пусть прямые  $B_2C_1$  и  $BC$  пересекаются в точке  $A_3$ , прямые  $C_2A_1$  и  $AC$  — в точке  $B_3$ , а прямые  $A_2B_1$  и  $AB$  — в точке  $C_3$ . По теореме Паскаля, принадлежность точек  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  одной конике равносильна коллинеарности точек  $A_3, B_3, C_3$ . Из теоремы Менелая это равносильно равенству  $R(C_3) \cdot P(A_3) \cdot Q(B_3) = 1$ , что, в свою очередь, равносильно равенству  $p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot q(B_1) \cdot q(B_2) \cdot r(C_1) \cdot r(C_2) = 1$  (мы применили три теоремы Менелая для треугольника  $ABC$  и прямых  $B_2C_1, C_2A_1, A_2B_1$ ).  $\square$

**Доказательство.**  $p(P)p(Q) = p(C_1)p(C_2)$ ,  $q(P)q(Q) = q(A_1)q(A_2)$ ,  $r(P)r(Q) = r(B_1)r(B_2)$ . Хотим проверить  $p(C_1)p(C_2)q(A_1)q(A_2)r(B_1)r(B_2) = 1$ . Отсюда хотим проверить  $(p(P)p(Q)q(P)q(Q)r(P)r(Q))^3 = 1$  — но  $p(P)q(P)r(P) = -1$ ,  $p(Q)q(Q)r(Q) = -1$ , победа.  $\square$

**Задача 16\*** (Московская математическая олимпиада 2006, 10.6). На описанной окружности треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$ . Точка  $A_1$  выбрана на прямой  $BC$  так, что прямые  $PA_1$  и  $QA_1$  симметричны относительно  $BC$ . Точки  $B_1$  и  $C_1$  определяются аналогично. Докажите, что  $A_1, B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой.

**Доказательство.** Разберём сначала случай, когда одна из сторон треугольника (без ограничения общности  $BC$ ) является серединным перпендикуляром к  $PQ$  (который мы обозначим буквой  $m$ ). В таком случае точка  $A_1$  не определена однозначно, но нетрудно понять, что  $B_1 = C_1 = A$ , т.е. утверждение задачи всё равно верно. Далее, если  $m \parallel BC$ , то точки  $A_1$  не существует. Поэтому далее мы считаем, что  $m$  пересекается с прямыми  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  ровно по одной точке, который мы обозначим символами  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$ . Так как  $A_2$  — пересечение серединного перпендикуляра к  $PQ$  и биссектрисы (внутренней или внешней) угла  $PA_1Q$ , то точки  $P$ ,  $Q$ ,  $A_1$  и  $A_2$  концикличны. Аналогично, на одной окружности лежат точки  $P$ ,  $Q$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  и  $P$ ,  $Q$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ . Тогда  $p(A_1)p(A_2) = p(P)p(Q)$ ,  $q(B_1)q(B_2) = q(P)q(Q)$ ,  $r(C_1)r(C_2) = r(P)r(Q)$  по второй сгЛ. Так как точки  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  коллинеарны и  $p(P)q(P)r(P) = p(Q)q(Q)r(Q) = -1$ , то по теореме Менелая точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  также коллинеарны.  $\square$

**Задача 17.** Дан треугольник  $ABC$ ,  $A_1, A_2$  на  $BC$ ,  $B_1, B_2$  на  $AC$ ,  $C_1, C_2$  на  $AB$ , таковы, что  $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$  на одной конике. Точки  $A_3, A_4, B_3, B_4, C_3, C_4$  на описанной окружности треугольника  $ABC$  таковы, что четвёрки точек  $A_1A_2A_3A_4$ ,  $B_1B_2B_3B_4$ ,  $C_1C_2C_3C_4$  лежат на одной окружности. Докажите, что:

- (а) треугольник образованный прямыми  $A_3A_4$ ,  $B_3B_4$  и  $C_3C_4$ , перспективен треугольнику  $ABC$ .
- (б) если прямые  $AA_3$ ,  $BB_3$  и  $CC_3$  пересекаются в одной точке, то прямые  $AA_4$ ,  $BB_4$  и  $CC_4$  также пересекаются в одной точке.

**Доказательство.**

- (а) Пусть  $A_3A_4$  пересекает  $BC$  в  $A_5$ ,  $B_3B_4$ ,  $C_3C_4$  определены аналогично. Тогда

$$\begin{aligned} p(A_5)q(B_5)r(C_5) &\stackrel{\text{CRL}}{=} p(A_3)q(B_3)r(C_3)p(A_4)q(B_4)r(C_4) \stackrel{(2.6)}{=} \\ & p(A_1)q(B_1)r(C_1)p(A_2)q(B_2)r(C_2) \stackrel{\text{т. Карно}}{=} 1. \end{aligned}$$

Следовательно, точки  $A_5$ ,  $B_5$  и  $C_5$  лежат на одной прямой по теореме Менелая, а это и означает перспективность рассматриваемых треугольников.

- (б) Так как прямые  $AA_3$ ,  $BB_3$ ,  $CC_3$  пересекаются в одной точке, то  $p(A_3)q(B_3)r(C_3) = -1$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} p(A_4)q(B_4)r(C_4) &= -p(A_3)q(B_3)r(C_3)p(A_4)q(B_4)r(C_4) \stackrel{(2.6)}{=} \\ & -p(A_1)q(B_1)r(C_1)p(A_2)q(B_2)r(C_2) \stackrel{\text{т. Карно}}{=} -1, \end{aligned}$$

а тогда прямые  $AA_4$ ,  $BB_4$  и  $CC_4$  также пересекаются в одной точке.  $\square$

Одно из преимуществ CRL — более компактная запись отношений отрезков, поэтому обычно мы стремимся перевести как можно большую часть выкладок на язык cool-ratio-функций. Одна-

ко иногда для проверки финального равенства бывает полезно вернуться к стандартной записи отрезков. При этом важно не забыть проверить совпадение знаков. Следующие задачи про это.

**Задача 18 (ЮМТ-2019).** В треугольнике  $ABC$  с описанной окружностью  $\omega$  проведены чевианы  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$ , пересекающиеся в одной точке. Точка  $M$  — середина стороны  $BC$ . Окружности  $\omega$  и  $(AEF)$  повторно пересекаются в точке  $X$ . Прямая  $XD$  повторно пересекает  $\omega$  в точке  $Y$ . Прямая  $YM$  повторно пересекает  $\omega$  в точке  $Z$ . Докажите, что прямая  $AZ$  касается  $(AEF)$ .

**Доказательство.** Положим  $f := f_{BC}$ . Тогда  $f(X)f(Y) = f(D)$  и  $f(Y)f(Z) = f(M)$ , откуда  $f(Z) = -\frac{f(X)}{f(D)}$ . Но по утверждению (2.11)  $|f(X)| = \frac{BF}{CF}$ , а тогда  $\frac{BZ}{CZ} = \frac{BF}{CF} : \frac{BD}{CD} = \frac{AF}{AE}$ . Чтобы утверждать, что треугольники  $AEF$  и  $ZCB$  подобны, надо разобраться с расположением точек. Но, проследив за знаками CR-функций, можно заметить, что точки  $X$  и  $A$  находятся по одну сторону от прямой  $EF$  тогда и только тогда, когда по одну сторону от прямой  $BC$  находятся точки  $X$  и  $Z$ . Т.е. подобие и в самом деле есть. Следовательно,  $\angle ZAE = \angle ZBC = \angle AFE$ , т.е. прямая  $AZ$  касается описанной окружности треугольника  $AEF$ .  $\square$

**Задача 19.** Дан треугольник  $ABC$ . Точки  $D$  и  $E$  на сторонах  $AB$  и  $AC$  соответственно таковы, что  $BDEC$  вписанный. Оказалось, что на стороне  $BC$  существует такая точка  $T$ , что  $BT = BD$ ,  $CT = CE$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $DET$  проходит через основание внутренней биссектрисы из вершины  $A$ .

**Доказательство.** Введём CR-функцию относительно отрезка  $BC$  таки образом, чтобы внутри треугольника был знак «+». Пусть  $\angle BDC = \angle BEC = \varphi$ . Из теоремы синусов  $\frac{CD}{BC} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\varphi)}$ ,  $\frac{BE}{BC} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\varphi)}$ . Значит  $\frac{BE}{CD} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\beta)} = \frac{AB}{AC} = \frac{BL}{CL}$ , где  $L$  - основание биссектрисы из  $A$ . Тогда  $f(D) \cdot f(E) = \frac{BD \cdot BE}{CD \cdot CE} = f(T) \cdot f(L)$   $\square$

### 3 Евклидовы инварианты поризма Понселе

Данный раздел посвящён разнообразным инвариантам поризма Понселе, а также применениям поризма в олимпиадных задачах. Подразделы по большей части независимы, так что не обязательно решать задачи по порядку. Тем не менее, при решении некоторых задач может быть полезно вернуться назад и подчеркнуть какую-нибудь полезную идею оттуда.

Разумеется, большинство задач не являются оригинальными: они взяты из статей или олимпиад, в том числе недавних. Поэтому нет ничего страшного, если вдруг вы видели или даже умеете решать ту или иную задачу. Задач в разделе много (возможно, даже слишком много), так что вам в любом случае не будет скучно.

#### Правила игры:

- Во всех задачах словосочетание «треугольник вращается между окружностями / кониками» означает вращение в смысле теоремы Понселе.

- Словосочетание «вписанная коника» означает, что коника касается сторон многоугольника или их продолжений — в частности, может лежать вне треугольника. Однако вписанную и невписанную окружности мы различаем.
- Если вас просят доказать существование фиксированной окружности с какими-то свойствами (точка движется по ней, переменная окружность всё время её касается и т.д.), то эта окружность вполне может выродиться в точку или прямую. Аналогично, в утверждении «прямые проходят через фиксированную точку» точке разрешается быть бесконечно удалённой. А под словом «инверсия» может скрываться не только обычная инверсия, но и композиция инверсии и центральной симметрии с общим центром (так называемая «инверсия с отрицательным радиусом»). Список можно продолжить. Общее правило таково: если вам кажется, что утверждение какой-то задачи в своей текущей формулировке неверно, обращайтесь к авторам проекта.
- Некоторые задачи состоят из нескольких пунктов. Принципы группировки утверждений в одну задачу могут быть разными. Иногда предыдущие пункты помогают в решении следующих — так происходит в доказательстве теоремы Лагерра. В других случаях мы объединяем утверждение и его обобщение (см., например, задачу (53)), разные свойства общей конструкции или просто похожие утверждения, как в задаче (45). В исключительных случаях принцип объединения может быть загадочен и прояснится позже.

### 3.1 Сопряжение Клоусона и лемма Скутина

**Задача 20.** Четырёхугольник  $ABCD$  вращается между описанной окружностью  $\Omega$  и вписанной коникой  $\gamma$  с фокусами  $P$  и  $Q$ .

- Докажите, что сопряжение Клоусона, соответствующее четырёхугольнику, остаётся постоянным.
- Пусть вписанная коника — это окружность, а прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $E$ . Докажите, что все окружности  $(BCE)$  касаются фиксированной окружности.
- Вернёмся к случаю эллипса. Докажите, что сумма  $\angle ABP + \angle CDP$  постоянна.

**Доказательство.**

- Точка  $P$  пересечения диагоналей четырёхугольника является предельной точкой пучка, порождённого  $\Omega$  и  $\gamma$ , а потому постоянна. Сопряжение Клоусона меняет местами фиксированные фокусы эллипса, а также фиксированные точки  $P$  и  $O$ , а тогда и само оно фиксировано.
- Окружность  $(BCE)$  проходит через точку Микеля  $M$ , а потому при (фиксированном) сопряжении Клоусона переходит в прямую  $AD$ , которая касается фиксированной вписанной окружности. Следовательно,  $(BCE)$  касается образа вписанной окружности.
- Пусть прямые  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $F$ . Так как треугольники  $MBP$  и  $MQD$

подобны, то

$$\begin{aligned} \angle ABP + \angle CDP &= (\angle ABM + \angle MBP) + \angle CDP = \angle AFM + \angle MQD + \angle QDA = \\ &= \angle(AD, FM) + \angle(MQ, DA) = \angle(MQ, MF) = \text{const}. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из того, что прямая EF является полярной P относительно описанной окружности и потому фиксирована.  $\square$

Следующая теорема интересна сама по себе и может быть доказана с помощью сопряжения Клоусона, однако не имеет прямого отношения к поризму Понселе, поэтому мы не выделяем её в отдельную задачу.

**Теорема 3.1** (Теорема Микеля об изогональном сопряжении). Дан треугольник ABC и две пары  $(P, P')$ ,  $(Q, Q')$  изогонально сопряжённых относительно него точек. Тогда точка Микеля четырёхугольника  $PQP'Q'$  лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Тем не менее, эта теорема полезна при доказательстве леммы Скутина — одного из самых важных утверждений раздела с евклидовыми инвариантами.

**Теорема 3.2** (Лемма Скутина). Треугольник ABC вписан в окружность  $\Omega$  и описан вокруг эллипса  $\gamma$  и вращается между ними в смысле теоремы Понселе. Фиксированная точка P не принадлежит  $\Omega$ . Тогда точка Q, изогонально сопряжённая P относительно треугольника ABC, движется по окружности.

**Задача 21.** Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — фокусы эллипса, а M — точка Микеля четырёхугольника  $F_1PF_2Q$ .

- (а) Запишите в комплексных координатах отображение  $M \mapsto Q$  и докажите лемму Скутина.
- (б) Рассмотрите композицию инверсии с центром P и радиусом  $\sqrt{PF_1 \cdot PF_2}$  и симметрии относительно биссектрисы угла  $F_1PF_2$  и докажите лемму Скутина.

**Доказательство.**

(а) Пусть M — точка Микеля четырёхугольника  $F_1PF_2Q$ . По теореме (3.1) она лежит на  $\Omega$ . Пусть  $m, p, q, f_1$  и  $f_2$  — комплексные координаты соответствующих точек. Треугольники  $MF_1P$  и  $MQF_2$  подобны, а тогда  $\frac{f_1-m}{p-m} = \frac{q-m}{f_2-m}$ , откуда следует, что отображение  $m \mapsto q$  дробно-линейно, т.е. q движется по окружности или прямой. Так как  $P \notin \Omega$ , то знаменатель этого дробно-линейного отображения (если не полениться его выписать) никогда не обращается в ноль, т.е. образ  $\Omega$  — это именно окружность.

(б) Разберём случай, когда  $F_1 \neq F_2$ ; случай вписанной окружности получается незначительным изменением доказательства. Пусть прямые  $QF_1$  и  $PF_2$  пересекаются в точке X, а прямые  $QF_2$  и  $PF_1$  — в точке Y. Если при рассматриваемой инверссимметрии X переходит в  $X'$ , а Y в  $Y'$ , то  $X'F_2 \parallel QF_1$ ,  $Y'F_1 \parallel QF_2$ , и  $M = (PF_1X) \cap (PF_2Y) \mapsto M' = X'F_2 \cap Y'F_1$ . Получается, что  $M'$  и Q симметричны относительно середины отрезка  $F_1F_2$ . Поскольку  $M'$  движется по

окружности, то и  $Q$  тоже. □

Внимательно приглядевшись к любому из двух доказательств леммы Скутина, можно явно описать траекторию движения ортоцентра:

**Следствие 3.3.** Ортоцентр треугольника Понселе движется по окружности, центр которой симметричен  $O$  относительно центра вписанного эллипса, а радиус равен  $\frac{OF_1 \cdot OF_2}{R_{(ABC)}}$ .

**Задача 22.** Пусть вписанная коника тоже является окружностью с радиусом  $r$ . Докажите, что точка Нагеля треугольника  $ABC$  движется по окружности с центром  $O$  и радиусом  $R - 2r$ .

**Доказательство.** Пусть  $I$  — центр вписанной окружности,  $H$  — ортоцентр,  $M$  — точка пересечения медиан, а точка  $X$  симметрична  $O$  относительно  $I$ . Точки  $O$ ,  $M$  и  $H$  лежат на прямой Эйлера, а точки  $N$ ,  $M$  и  $I$  — на прямой Нагеля, причём  $\frac{HM}{MO} = \frac{NM}{MI} = 2$ . Отсюда несложно вывести, что отрезки  $XH$  и  $ON$  равны и параллельны. Но из следствия (3.3) известно, что  $XH = \frac{OI^2}{R} = R - 2r$  (мы воспользовались формулой Эйлера), откуда и следует требуемое. □

**Задача 23.** Треугольник  $ABC$  вращается между двумя окружностями. Фиксированная прямая  $\ell$  касается вписанной окружности.

- (а) Докажите, что точка Микеля прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  и  $\ell$  остаётся неподвижной.
- (б) Напомним, что если даны четыре прямые, то четыре ортоцентра треугольников, образованных всевозможными тройками прямых, лежат на одной прямой, которая называется *прямой Обера*. Докажите, что прямая Обера прямых из пункта (а) проходит через фиксированную точку.
- (с\*) Пусть  $\omega_H$  — окружность, по которой движется ортоцентр треугольника  $ABC$ . Докажите, что фиксированная точка из предыдущего пункта лежит на  $\omega_H$ .

**Замечание.** Сравните пункт (б) с задачей 6 из проекта «Вокруг теоремы Понселе» с ЛКТГ-2014:

**Утверждение 3.4.** Треугольник  $ABC$  вращается между двумя окружностями, а  $P$  — фиксированная точка на описанной окружности. Докажите, что все прямые Симсона точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  проходят через фиксированную точку.

**Доказательство.**

- (а) Сопряжение Клоусона относительно четырёхугольника, образованного прямыми  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  и  $\ell$ , оставляет центр  $I$  вписанной окружности на месте и меняет местами точки пересечения описанной окружности и прямой  $\ell$  (возможно, комплексные). Все вышеперечисленные объекты фиксированы, а тогда и сопряжение Клоусона тоже.
- (б) Прямая Обера четырёхугольника — это прямая Штейнера его точки Микеля  $M$ . Следовательно, все прямые Обера проходят через точку (назовём её  $S$ ), симметричную

$M$  относительно  $\ell$ .

(с) Пусть  $X$  симметрична  $O$  относительно  $I$ . Тогда по следствию (3.3),  $XN = \text{const}$  при вращении треугольника. Поэтому достаточно проверить равенство  $XN = XS$  для одного положения. В качестве искомого положения надо взять случай, когда  $\ell$  касается вписанного в треугольник эллипса с фокусами  $O$  и  $N$  (что равносильно тому, что  $P$  — точка Микеля четырёхугольника  $OINI$ ). В этом случае  $S = N$ , так как обе точки перейдут в  $O$  при сопряжении Клоусона.

□

**Доказательство 2.** Другое решение пунктов (b) и (с) можно найти в комментарии к задаче (55\*\*).

□

#### Задача 24.

(a) (Telv Cohl<sup>1</sup>, 2014) Дан треугольник  $ABC$ . Пусть  $\ell$  — переменная касательная к его вписанной окружности. Прямая  $\ell$  и три прямые, симметричные ей относительно сторон треугольника  $ABC$ , образуют полный четырёхсторонник. Докажите, что точка Микеля этого четырёхсторонника движется по окружности или прямой.

(b) Докажите то же утверждение при условии, что прямая  $\ell$  фиксирована, а треугольник  $ABC$  вращается между двумя окружностями.

#### Доказательство.

(a) Непосредственным счётом углов и критерием (1.34) проверяется, что точка Микеля  $S$  рассматриваемого четырёхсторонника и ортоцентр  $N$  треугольника  $ABC$  сопряжены по Клоусону относительно четырёхугольника, образованного прямыми  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  и  $\ell$ . Пусть  $M$  — точка Микеля этих прямых. Так как сопряжение Клоусона оставляет инцентр  $I$  на месте, то треугольники  $MSI$  и  $MIN$  подобны. Теперь несложным счётом в комплексных числах (аналогично доказательству леммы Скутина) можно показать, что когда  $M$  движется по окружности, то  $S$  движется по окружности или прямой.

(b) Пусть теперь прямая  $\ell$  фиксирована, а треугольник вращается. Из задачи (23) известно, что точка сопряжение Клоусона постоянно. Но оно переводит  $N$  в  $S$ , а  $N$  движется по окружности по лемме Скутина. Следовательно,  $S$  движется по окружности или прямой.

□

**Задача 25.** Треугольник  $ABC$  вращается между двумя окружностями. Фиксированная прямая  $\ell$  касается вписанной окружности и пересекает прямые  $BC$  и  $AC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Прямая  $\ell'$  проходит через точки, симметричные  $D$  и  $E$  относительно середин сторон  $BC$  и  $AC$  соответственно.

<sup>1</sup>Telv Cohl — известный тайваньский геометр и задачный композитор, автор геометрического блога [12].

- (a\*) (SAGF<sup>2</sup> 2024, P3) Докажите, что  $\ell'$  проходит через фиксированную точку.
- (b\*) Пусть  $\omega_N$  — окружность, по которой движется точка Нагеля треугольника ABC. Докажите, что фиксированная точка из предыдущего пункта лежит на  $\omega_N$ .

**Доказательство 1.** Докажем оба пункта одновременно. Пусть  $O$  и  $I$  — центры описанной и вписанной окружностей,  $H$  — ортоцентр,  $M$  — точка пересечения медиан,  $N$  — точка Нагеля. Точка  $O_H$  симметрична  $O$  относительно  $I$ , а точки  $D'$  и  $E'$  симметричны  $D$  и  $E$  относительно середин сторон  $BC$  и  $AC$  соответственно. Из задачи (23) известно, что прямые Обера четырёхугольника  $AEDB$  проходят через фиксированную точку  $S_H$ , лежащую на фиксированной окружности  $\omega_H$  с центром  $O_H$ , причём  $H \in \omega_H$ . В то же время, согласно задаче (22), точка Нагеля лежит на фиксированной окружности  $\omega_N$  с центром  $O$  и таким же радиусом, что и  $\omega_H$ . Пусть точки  $S_N$  и  $T$  симметричны  $S_H$  и  $N$  относительно  $I$ . Из вышесказанного следует, что  $\omega_H$  и  $\omega_N$  симметричны относительно  $I$ , а тогда  $S_N \in \omega_N$ ,  $T \in \omega_H$ . Кроме того,  $\overrightarrow{O_H N} = \overrightarrow{O N} = -\overrightarrow{O_H T}$ , т.е. точки  $N$  и  $T$  диаметрально противоположны в  $\omega_H$ . Так как  $HS_H$  — это прямая Обера четырёхугольника  $AEDB$ , то прямые  $TS_H$  и  $NS_N$  параллельны его прямой Гаусса.

Пусть  $K$  и  $L$  — середины диагоналей  $AD$  и  $BE$  соответственно. Нетрудно понять, что  $M$  — точка пересечения медиан треугольников  $ADD'$  и  $BEE'$ . Следовательно, при гомотетии с центром в  $M$  и коэффициентом  $-2$  прямая  $KL$  переходит в прямую  $D'E'$ . При этой же гомотетии  $I$  переходит в  $N$ . Так как  $I$  лежит на прямой Гаусса  $KL$ , то  $N$  лежит на  $D'E'$ .

Собирая всё вышесказанное вместе, заключаем, что прямые  $NS_N$  и  $\ell$  параллельны прямой Гаусса четырёхугольника  $AEDB$  и имеют общую точку  $N$ , т.е. совпадают. □

**Доказательство 2.** См. комментарий к задаче (55\*\*). □

### Задача 26.

- (a) (Теорема Морли) В треугольнике ABC отмечены изогонально сопряжённые точки  $P$  и  $Q$ . Рассмотрим комплексную систему координат, в которой окружность  $(ABC)$  является единичной, и обозначим координаты точек соответствующими строчными буквами. Докажите, что

$$p + q + abc\overline{p\overline{q}} = a + b + c.$$

- (b) Треугольник  $\Delta$  вращается между описанной окружностью и вписанной коникой. Также на плоскости фиксированы точки  $P$  и  $Q$ . Как известно из леммы Скутина, точки  $P'$  и  $Q'$ , изогонально сопряжённые  $P$  и  $Q$  относительно  $\Delta$ , движутся по окружностям. Докажите, что угловые скорости этих точек равны.

<sup>2</sup>SAGF — онлайн-олимпиада по геометрии, организованная Кириллом Бельским. Два дня по четыре задачи, сложность которых примерно соответствует задачам G3-G8 шортлиста IMO.

**Доказательство.**

- (а) Запишем равенства  $\angle BAP = \angle QAC$  и  $\angle ABP = \angle QBC$  в комплексных координатах и получите требуемое.
- (б) Из теоремы Морли следует, что 1) при вращении треугольника между описанной единичной окружностью и вписанной коникой с фокусами  $P$  и  $Q$  величины  $a + b + c$  и  $ab + bc + ca$  линейно зависят от  $abc$ ; 2) при фиксированных  $A, B, C$  и  $P$  координата изогонально сопряжённой точки  $Q$  может быть выражена по формуле

$$q = \frac{(a + b + c) - (ab + bc + ca)\bar{p} + abc\bar{p}^2 - p}{1 - p\bar{p}};$$

в частности,  $q$  линейно зависит от  $a + b + c$ ,  $ab + bc + ca$  и  $abc$ . Следовательно, при вращении треугольника Понселе  $q$  линейно зависит от величины  $abc$ , которая принадлежит единичной окружности. Таким образом, мы ещё одним способом доказали лемму Скутина (траектория  $Q$  — образ описанной окружности при некотором преобразовании подобия. Отсюда же сразу следует утверждение пункта б).

□

### 3.2 Связь с полярным преобразованием.

Следующая задача принадлежит Е. Диомидову и В. Калашникову и была предложена в 2014 году читателям журнала «Journal of Classical Geometry» в качестве открытой проблемы. Насколько известно авторам проекта, задача оставалась нерешённой как минимум долгое время.

**Утверждение 3.5.** Треугольник  $\Delta$  вращается между описанной окружностью  $\Omega$  и (вне)вписанной окружностью  $\gamma$ . Тогда трилинейная полярная фиксированной точки  $P \in \Omega$  относительно  $\Delta$  проходит через фиксированную точку.

Менее года назад авторам проекта удалось придумать короткое и элегантное доказательство. Следующая задача является ключевой:

**Задача 27.** Треугольник  $\Delta$  вращается между описанной коникой и вписанной параболой. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника  $\Delta$  движется по прямой, если описанная коника — это:

- (а) эллипс;
- (б) гипербола;
- (с\*) парабола.

**Доказательство.**

- (а) Переведём аффинным преобразованием эллипс в окружность. Тогда центр  $O$  этой окружности фиксирован, а ортоцентр треугольника  $\Delta$  лежит на директрисе вписанной параболы. В силу прямой Эйлера, точки пересечения медиан будут лежать на прямой,

гомотетичной директрисе относительно  $O$  с коэффициентом  $\frac{1}{3}$ .

(b) Переведём аффинным преобразованием гиперболу в прямоугольную гиперболу. Ортоцентр  $H$  треугольника  $\Delta$  лежит одновременно на описанной гиперболе и директрисе вписанной параболы. Таким образом, он может находиться в одной из двух точек. Но в силу непрерывности ортоцентр не может «перескочить». Следовательно, он постоянен. По аналогии с предыдущим пунктом достаточно показать, что центр описанной окружности движется по прямой. Но в самом деле, описанная окружность проходит через две фиксированные точки: фокус параболы и точку, симметричную  $H$  относительно центра гиперболы (она же четвёртая точка пересечения описанной окружности и гиперболы). Следовательно, описанные окружности всех треугольников  $\Delta$  принадлежат одному пучку, а тогда их центры лежат на одной прямой.

(c) Утверждение этого пункта следует из предыдущих предельным переходом.

□

Из предыдущей задачи уже несложно вывести задачу Диомидова и Калашникова (хотя вы, конечно, вправе решать её независимо).

**Задача 28.** Докажите утверждение (3.5) для случая, когда  $P$  лежит:

(a) внутри  $\gamma$ .

(b) снаружи  $\gamma$ .

(c\*) на  $\gamma$ .

(d\*\*) Можно доказать (счёт в барицентрических координатах приведён в статье [5]), что точка Лемуана треугольника  $ABC$  движется по эллипсу. Докажите, что фиксированная точка из предыдущих пунктов лежит на этом эллипсе.

**Доказательство.** Полярное преобразование сохраняет отношение «трилинейный полюс – трилинейная поляра». При полярном преобразовании с центром в  $P$  точка  $P$  переходит в бесконечно удалённую прямую. Следовательно, её трилинейная поляра  $P$  переходит в точку пересечения медиан. Теперь утверждение следует из предыдущей задачи.

Геометрическое решение пункта (d) было придумано Романом Кравченко во время конференции, см. комментарий к задаче (55\*\*)

□

Следующая задача является единственной в разделе, где в условии появляется комплексная проективная плоскость. А именно, мы будем работать с предельными точками пучка двух коник (в то время как пятиугольник и коники можно по-прежнему считать вещественными).

**Задача 29\*** (Ф. Нилов). Пятиугольник  $ABCDE$  вписан в конику  $\Gamma$  и описан вокруг коники  $\gamma$ . Диагонали пятиугольника образуют пятиугольник  $A_1B_1C_1D_1E_1$  ( $A_1 = BD \cap CE$  и т.д.), который вписан в конику  $\Gamma_1$  и описан вокруг коники  $\gamma_1$ . Докажите, что у пучков, порождённых

парами  $(\Gamma, \gamma)$  и  $(\Gamma_1, \gamma_1)$ , совпадают предельные точки.

**Доказательство.** Согласно теореме (1.39), коники  $\Gamma$ ,  $\gamma$  и  $\gamma_1$  принадлежат одному пучку. Если сделать произвольное полярное преобразование  $\varphi$ , то вписанность и описанность поменяются ролями, и мы получим, что коники  $\varphi(\Gamma)$ ,  $\varphi(\Gamma_1)$  и  $\varphi(\gamma_1)$  принадлежат одному пучку, а это значит, что коники  $\Gamma$ ,  $\Gamma_1$  и  $\gamma_1$  принадлежат одному двойственному пучку (т.е. касаются четырёх общих прямых). Для завершения доказательства осталось воспользоваться следующим фактом: если две коники порождают пучок и двойственный пучок, то предельные точки пучка совпадают с точками пересечения диагоналей четырёхсторонника, образованного «предельными прямыми» двойственного пучка (задача 11.1.17 из первого издания «Геометрии в картинках»).  $\square$

### 3.3 Теорема Лагерра

**Теорема 3.6** (Формула Эйлера). Треугольник  $\Delta$  вписан в окружность с центром  $O$  и радиусом  $R$  и описан вокруг окружности с центром  $I$  и радиусом  $r$ . Тогда

$$R^2 - OI^2 = 2Rr. \tag{3.1}$$

Естественно задать вопрос об обобщении формулы Эйлера на случай произвольных вписанных коник. Ответ на этот вопрос даёт теорема Лагерра:

**Теорема 3.7** (Теорема Лагерра, 1879). Треугольник  $ABC$  вписан в окружность с центром  $O$  и радиусом  $R$  и описан вокруг эллипса с фокусами  $F_1, F_2$  и длиной малой оси  $l$ . Тогда

$$(R^2 - OF_1^2)(R^2 - OF_2^2) = R^2 l^2. \tag{3.2}$$

**Замечание.** Утверждение теоремы остаётся верным, если заменить эллипс на гиперболу, а под  $l^2$  подразумевать квадрат её мнимой оси (который может быть выражен формулой  $l^2 = a^2 - d^2$ , где  $d$  — расстояние между фокусами гиперболы, а  $a$  — расстояние между точками пересечения гиперболы и прямой через её фокусы).

**Замечание.** Из теоремы Лагерра легко вывести обратное утверждение: если выполнено соотношение (3.2), то существует треугольник, вписанный в окружность и описанный вокруг коники.

Теперь мы готовы доказать теорему Лагерра.

#### Задача 30.

- (а) Дан эллипс с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  и длиной малой оси  $2b$ , а  $m$  — произвольная касательная к эллипсу. Тогда  $\text{dist}(F_1, m) \cdot \text{dist}(F_2, m) = b^2$ .
- (б) **Обобщение леммы о трезубце.** Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — точки повторного пересечения окружности  $(ABC)$  с лучами  $AF_1$  и  $AF_2$ . Докажите, что  $F_1L_1 \cdot F_2L_2 = BL_1 \cdot BL_2$ .

(с) Выведите теорему Лагерра из предыдущих пунктов.

**Доказательство.** Два доказательства: геометрическое и комплексное — можно прочитать в выпуске №21 сборника «Математическое просвещение», раздел «Решения задач из прошлых выпусков». Знатоки французского языка могут изучить оригинальное доказательство Лагерра, прочитав статью «Sur la relation qui existe entre un cercle circonscrit à un triangle et les éléments d'une conique inscrite dans ce triangle» — насколько смогли понять авторы проекта, оно близко к геометрическому доказательству из МатПроса.  $\square$

**Теорема 3.8 (Теорема о 3-парах Понселе).** Сферы  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  касаются плоскости  $\alpha$  с разных сторон. Сфера  $\Omega$  касается этих двух сфер одинаковым образом и пересекает  $\alpha$  по окружности  $\omega$ . Общие внешние касательные к  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  пересекают  $\alpha$  по эллипсу  $\gamma$ . Тогда существует треугольник, вписанный в  $\omega$  и описанный вокруг  $\gamma$ .

**Теорема 3.9 (Теорема Грейса).** Пусть  $\omega$  и  $\omega_A$  — вписанная и  $A$ -вневыписанная сферы тетраэдра  $ABCD$ . Тогда существует сфера, проходящая через вершины  $B, C, D$  и касающаяся  $\omega$  и  $\omega_A$ .

### Задача 31.

(а\*) Докажите теорему о 3-парах Понселе.

(b) Выведите теорему Грейса из теоремы о 3-парах Понселе.

### Доказательство.

(а) Брутальный счёт в отрезках. Для краткости разберём только случай, когда  $\Omega$  касается внутренним образом. Пусть  $O_1, O_2$  и  $O$  — центры сфер  $\Omega_1, \Omega_2$  и  $\Omega$  соответственно,  $r_1, r_2$  и  $r$  — их радиусы,  $d = O_1O_2$ ,  $F_1$  и  $F_2$  — точки касания  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  с плоскостью (ака фокусы  $\gamma$ ),  $X$  — проекция  $O$  на плоскость (ака центр  $\omega$ ). Не умаляя общности будем считать, что точки  $O$  и  $O_1$  лежат в одном полупространстве относительно  $\alpha$ . Тогда  $OO_1 = r - r_1$ ,  $OO_2 = r - r_2$ ,  $F_1F_2^2 = d^2 - (r_1 + r_2)^2$ ,  $XF_1^2 = (r - r_1)^2 - (r_1 - OX)^2$ ,  $XF_2^2 = (r - r_2)^2 - (r_2 + OX)^2$ . Длина  $a$  большей оси эллипса равен длине общей внешней касательной к  $\Omega_1, \Omega_2$ , т.е.  $a^2 = d^2 - (r_1 - r_2)^2$ . Следовательно, если  $b$  — малая ось эллипса, то  $b^2 = a^2 - F_1F_2^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2$ . Пусть  $R$  — радиус  $\omega$ . Тогда  $R^2 = r^2 - OX^2$ , откуда можно выразить  $OX$ . Теперь осталось подставить всё в формулу Лагерра и получить требуемое.

**Замечание.** Геометрическое доказательство с выходом в  $\mathbb{C}P^3$  можно прочитать в статье Е. Авксентьева «Feuerbach's and Poncelet's theorems meet in space».

(b) Проведём сферу  $\Gamma$  через точки  $B$  и  $C$ , которая касается  $\omega$  и  $\omega_A$ . Пусть она пересекает плоскость  $BSCD$  по окружности  $\alpha$ , а конус с центром  $A$ , описанный вокруг  $\omega$  и  $\omega_A$ , пересекает эту же плоскость по эллипсу  $\beta$ . По теореме о 3-парах Понселе, существует

треугольник, вписанный в  $\alpha$  и описанный вокруг  $\beta$ , причём таких треугольников бесконечно много. Так как  $BC$  касается  $\beta$ , то существует искомый треугольник, две вершины которого — это  $B$  и  $C$ . Но тогда третья вершина — это в точности  $D$ , т.е.  $D \in \alpha \subset \Gamma$ . □

### 3.4 Скрытый Понселе. Часть 1

Использование теоремы Понселе в олимпиадных задачах не всегда подразумевает процесс вращения треугольника. Часто картинка статична, а теорема Понселе появляется в облике следующих простых следствий:

**Следствие 3.10.** Треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\Omega$  и описан вокруг окружности  $\omega$ . Произвольная точка  $D$  лежит на  $\Omega$ . Касательные из  $D$  к  $\omega$  (если они существуют), повторно пересекают  $\Omega$  в точках  $E$  и  $F$ . Тогда прямая  $EF$  также касается  $\omega$ .

**Следствие 3.11.** Треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\Omega$  и описан вокруг окружности  $\omega$ . Произвольная хорда  $EF$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$ . Тогда вторые касательные из  $E$  и  $F$  к  $\omega$  пересекаются на  $\Omega$ .

**Следствие 3.12.** Треугольники  $ABC$  и  $DEF$  вписаны в общую конику. Тогда они описаны вокруг общей коники; в частности, главные диагонали шестиугольника, образованного в пересечении треугольников, пересекаются в одной точке. В обратную сторону утверждение, разумеется, тоже верно.

**Задача 32.** Обозначим символом  $\omega_a$  внеписанную окружность треугольника  $ABC$ , касающуюся отрезка  $BC$ . Окружности  $(ABC)$  и  $\omega_a$  пересекаются в точках  $X$  и  $Y$ . Касательные, проведенные в точках  $X$  и  $Y$  к  $\omega_a$ , повторно пересекают окружность  $(ABC)$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что прямые, касающиеся  $(ABC)$  в точках  $P$  и  $Q$ , также касаются и окружности  $\omega_a$ .

**Доказательство.** Рассмотрим вырожденный треугольник  $PPX$ , вписанный в  $(ABC)$ . Его стороны  $PX$  и  $PX$  касаются  $\omega_a$ , а тогда третья сторона  $PP$  (т.е. касательная к  $(ABC)$  в точке  $P$ ) также касается  $\omega_a$ . С точками  $Q$  и  $Y$  ситуация аналогична. □

**Задача 33.** Пусть  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Точки  $X, Y$  на описанной окружности таковы, что  $AI = AX = AY$ . Докажите, что  $XY$  касается вписанной в треугольник  $ABC$  окружности.

**Доказательство.** Пусть прямая  $AI$  повторно пересекает  $(ABC)$  в точке  $W$ , а касательные из  $W$  к вписанной окружности повторно пересекают  $(ABC)$  в точках  $X'$  и  $Y'$ . По следствию (3.10) из теоремы Понселе, прямая  $X'Y'$  также касается вписанной в треугольник  $ABC$  окружности. По лемме о трезубце,  $AX' = AY' = AI$ , т.е. точки  $X', Y'$  совпадают с точками  $X, Y$ . □

**Задача 34** (Майские сборы 2022, P2/3). Дан вписанный четырёхугольник  $ABCD$ . Окружности  $\omega_A$  и  $\omega_C$  с центрами  $I_A$  и  $I_C$  вписаны в треугольники  $DAB$  и  $BDC$  соответственно. Общая внешняя касательная к  $\omega_A$  и  $\omega_C$  пересекает окружность  $(ABCD)$  в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что точки  $I_A$ ,  $I_C$ ,  $X$  и  $Y$  лежат на одной окружности.

**Доказательство.** Пусть  $W$  — середина той дуги  $XY$ , которая лежит в другой полуплоскости с окружностями  $\omega_A$  и  $\omega_C$  относительно прямой  $XY$ . По следствию (3.11) из теоремы Понселе, существуют такие точки  $P$  и  $Q$  на окружности  $(ABCD)$ , что  $\omega_A$  и  $\omega_C$  — вписанные окружности треугольников  $PXY$  и  $QXY$  соответственно. Теперь можно завершить решение задачи леммой о трезубце:  $WX = WY = WI_A = WI_C$ .  $\square$

**Задача 35** (IGO-2019, Advanced, P5). Дана парабола с фокусом  $F$ . Рассматриваются всевозможные вписанные в параболу треугольники, ортоцентр которых совпадает с  $F$ . Докажите, что у всех таких треугольников общая вписанная окружность.

**Доказательство.** Пусть  $ABC$  — один из рассматриваемых треугольников. Окружности с центрами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , проходящие через  $F$ , касаются директрисы. При инверсии (и, возможно, центральной симметрии) с центром в  $F$ , сохраняющей  $(ABC)$ , вышеупомянутые окружности перейдут в прямые  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$ , а директриса — в окружность  $\omega$ , касающуюся этих прямых. Кроме того,  $\omega$  проходит через ортоцентр  $F$ , а потому будет именно вписанной окружностью треугольника  $ABC$ , а не внеписанной; отсюда также следует, что треугольник  $ABC$  остроугольный, и мы действительно делали инверсию + центральную симметрию. Из всего вышесказанного следует, что центр  $\omega$  лежит на оси симметрии параболы, а  $F$  — ближняя к директрисе точка пересечения  $\omega$  и оси параболы. Докажем, что  $\omega$  постоянна. Касательная в  $F$  к  $\omega$  пересекает параболу в точках  $X$  и  $Y$ . По следствию (3.11) из теоремы Понселе, вторые касательные из  $X$  и  $Y$  к  $\omega$  пересекаются в точке, лежащей на параболе (обозначим эту точку буквой  $Z$ ). Из симметрии следует, что  $Z$  лежит на оси параболы. Но  $\omega$  и вершина параболы лежат в разных полуплоскостях относительно  $XY$ , т.е.  $Z$  не совпадает с вершиной параболы. Значит,  $Z$  — бесконечно удалённая точка параболы, и  $\omega$  касается трёх фиксированных прямых однозначно определённым образом, т.е. постоянна.  $\square$

**Задача 36.** В треугольнике  $ABC$  точки  $O$  и  $H$  — центр описанной окружности и ортоцентр соответственно. Прямая  $AH$  повторно пересекает  $(ABC)$  в точке  $A_1$ , а серединный перпендикуляр к отрезку  $AH$  пересекает  $(ABC)$  в точках  $A_2$  и  $A_3$ . Точки  $B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$  определяются аналогично. Докажите, что точки Лемуана треугольников  $ABC, A_1A_2A_3, B_1B_2B_3$  и  $C_1C_2C_3$  лежат на одной окружности, центр которой принадлежит прямой  $OH$ .

**Доказательство.** Точка  $H$  лежит на перпендикуляре из  $A_1$  к  $A_2A_3$  и при отражении относительно  $A_2A_3$  попадает на описанную окружность — т.е. является ортоцентром треугольника  $A_1A_2A_3$ . Таким образом, стороны треугольников  $ABC, A_1A_2A_3, B_1B_2B_3$  и  $C_1C_2C_3$  касаются

фиксированного эллипса с фокусами  $O, H$ . Кроме того, в силу прямой Эйлера у выпяпеченных треугольников общая точка пересечения медиан. Теперь утверждение задачи следует из леммы Скутина.  $\square$

### 3.5 Скрытый Понселе. Связь с изогональным сопряжением

Для любой пары изогонально сопряжённых точек существует коника с фокусами в этих точках, касающаяся сторон треугольника или их продолжений. Поэтому бывает полезно начать вращать треугольник между описанной окружностью и данной коникой. Также могут быть полезны лемма Скутина и теорема Лагерра, особенно если в условии задач фигурируют какие-то другие замечательные точки.

Пусть дан эллипс с фокусами  $P$  и  $Q$  и длиной большой оси  $2a$ . Прямая  $\ell$  касается его в точке  $X$ , а точка  $P'$  симметрична  $P$  относительно  $\ell$ . В силу оптического свойства эллипса, точки  $P', X$  и  $Q$  лежат на одной прямой, а тогда  $P'Q = PX + QX = 2a$ . В качестве следствия получаем простое, но очень полезное наблюдение:

**Утверждение 3.13.** Эллипс с фокусами  $P, Q$  и длиной большой оси  $2a$  вписан в треугольник  $\Delta$ . Тогда радиус общей педальной окружности точек  $P$  и  $Q$  относительно  $\Delta$  равен  $a$ .

**Доказательство.** Точки, симметричные  $P$  относительно сторон треугольника, лежат на окружности  $\Gamma$  с центром  $Q$  и радиусом  $2a$ , а педальная окружность точки  $P$  получается из  $\Gamma$  гомотетий с центром  $P$  и коэффициентом  $\frac{1}{2}$ .  $\square$

**Задача 37** (Третья теорема Фонтене). Точки  $P$  и  $Q$  изогонально сопряжены в треугольнике  $ABC$ .

- (a) Докажите, что если  $PQ$  проходит через центр описанной окружности треугольника  $ABC$ , то педальная окружность точек  $P$  и  $Q$  касается окружности девяти точек треугольника  $ABC$ .
- (b) Докажите обратное утверждение.

**Замечание.** Геометрическое множество точек  $P$  из предыдущей задачи называется *кубикой МакКея*.

**Доказательство.**

- (a) Рассмотрим эллипс  $\gamma$  с фокусами  $P$  и  $Q$ . Радиус педальной окружности точек  $P$  и  $Q$  равен длине большой полуоси эллипса, а центр совпадает с серединой отрезка  $PQ$  — по утверждению (3.13). Следовательно, педальная окружность остаётся постоянной при вращении треугольника между описанной окружностью и вписанным эллипсом  $\gamma$ . По следствию (3.3), центр окружности девяти точек движется по окружности, центр которой совпадает с серединой отрезка  $PQ$ ; радиус же окружности девяти точек постоянен. Поэтому достаточно доказать касание для одного положения. Из условия следует, что окружность и эллипс симметричны относительно прямой  $PQ$ . Тогда в качестве

искомого положения подойдёт равнобедренный треугольник, основание которого перпендикулярно  $PQ$ .

(b) Пусть  $2a$  и  $2b$  — длины большой и малой осей эллипса,  $R$  — радиус описанной окружности,  $OP = p$ ,  $OQ = q$ . Точка  $X$  — середина  $PQ$ ,  $N$  — центр окружности девяти точек. Условие касания перепишем в виде  $a = \left| \frac{R}{2} \pm NX \right|$ . Следствие (3.3) даёт нам равенство  $NX = \frac{pq}{2R}$ , а теорема Лагерра —  $(R^2 - p^2)(R^2 - q^2) = 4b^2R^2$ . Кроме того,  $PQ^2 = 4a^2 - 4b^2$ . Соберём всё вместе:

$$\begin{aligned} PQ^2 = 4a^2 - 4b^2 &= 4 \left( \frac{R}{2} \pm NX \right)^2 - \frac{(R^2 - p^2)(R^2 - q^2)}{R^2} = \\ &= 4 \left( \frac{R}{2} \pm \frac{pq}{2R} \right)^2 - \frac{(R^2 - p^2)(R^2 - q^2)}{R^2} = (p \pm q)^2. \end{aligned}$$

Неравенство треугольника обратилось в равенство, поэтому точки  $O$ ,  $P$  и  $Q$  лежат на одной прямой. □

**Задача 38** (SAGF-2024, P7, переформулировано). Треугольник  $ABC$  вписан в окружность с центром  $O$  и радиусом  $R$  и описан вокруг эллипса с центром  $X$  и длиной малой оси  $l$ . Точка  $N$  — центр окружности девяти точек треугольника  $ABC$ .

- (a) Докажите, что если  $O$  лежит на малой оси эллипса, то  $2NX = R - l$ .  
 (b) Докажите, что в общем случае выполнено неравенство  $2NX \leq R - l$ .

**Доказательство.**

- (a) Равенство означает, что окружность девяти точек касается окружности, построенной на малой оси, как на диаметре. По аналогии с пунктом (a) предыдущей задачи, достаточно доказать утверждение для одного положения. Так как окружность и эллипс симметричны относительно малой оси, то в качестве искомого положения достаточно взять равнобедренный треугольник, одна из сторон которого параллельна большой оси эллипса.  
 (b) Воспользуемся уже известными нам тождествами и неравенством Коши:

$$R - l - 2NX = R - \sqrt{\frac{(R^2 - p^2)(R^2 - q^2)}{R^2}} - \frac{pq}{R} \geq R - \frac{1}{2} \left( \frac{R^2 - p^2}{R} + \frac{R^2 - q^2}{R} \right) - \frac{p^2 + q^2}{2R} = 0.$$

□

### 3.5.1 Лемма о степени ортоцентра

**Задача 39** (Лемма о степени ортоцентра). Дан треугольник  $ABC$  с центром описанной окружности  $O$  и ортоцентром  $H$ . Точки  $P$  и  $Q$  изогонально сопряжены в треугольнике  $ABC$ , а  $\rho$  — радиус общей педальной окружности точек  $P$  и  $Q$ . Тогда

$$4\rho^2 - HP^2 - HQ^2 = -\text{pow}(H, (ABC)).$$

Иными словами, если точки  $P_a, P_b, P_c$  симметричны  $P$  относительно сторон треугольника  $ABC$ , то

$$\text{pow}(H, (P_a P_b P_c)) + HP^2 = \text{pow}(H, (ABC)).$$

**Доказательство.** Введём стандартные обозначения  $OP = p, OQ = q, 2a$  и  $2b$  — длины большой и малой осей вписанной коники с фокусами  $P$  и  $Q$  (в частности,  $\rho = a$ ). Пусть точка  $Y$  симметрична  $O$  относительно центра  $X$  вписанной коники. Как мы уже запомнили,  $YN = \frac{pq}{R}$ . Воспользуемся известным утверждением:

**Утверждение 3.14.** Пусть  $A_1, \dots, A_n$  — точки на плоскости с вещественными массами  $m_1, \dots, m_n$ , где  $m_1 + \dots + m_n = 1$ . Пусть  $M$  — их центр масс, а  $X$  — произвольная точка. Тогда

$$PM^2 + m_1 MA_1^2 + \dots + m_n MA_n^2 = m_1 PA_1^2 + \dots + m_n PA_n^2.$$

Применяя это утверждение к треугольнику  $OPQ$  и точке  $H$ , заключаем, что  $HP^2 + HQ^2 - HO^2 = HY^2 + YP^2 + YQ^2 - YO^2 = HY^2 + PQ^2 - p^2 - q^2$  (последний переход — это тождество параллелограмма). Для завершения доказательства осталось проверить, что правая часть равна  $4a^2 - R^2$ . Но это следует из теоремы Лагерра и формул  $PQ^2 = 4a^2 - 4b^2, HY = \frac{pq}{R}$ . Мы опускаем финальные вычисления.  $\square$

**Следствие 3.15.** Точки  $P$  и  $Q$  изогонально сопряжены в треугольнике  $ABC$ . Точки  $P_a, P_b, P_c$  симметричны  $P$  относительно  $BC, AC, AB$ . Аналогично определим  $Q_a, Q_b, Q_c$ . Ортоцентр  $H$  треугольника  $ABC$  лежит на радикальной оси  $(P_a P_b P_c)$  и  $(Q_a Q_b Q_c)$  тогда и только тогда, когда  $HP = HQ$ .

#### Задача 40.

- (a) Треугольники  $ABC$  и  $DEF$  имеют общий ортоцентр и описаны вокруг одной параболы. Докажите, что вершины этих треугольников лежат на равносторонней гиперболе.
- (b) (Telv Sohl, 2019) Точки  $A, B, C, D, E$  и  $F$  лежат на конике, которая не является равносторонней гиперболой. Известно, что ортоцентры треугольников  $ABC$  и  $DEF$  совпадают (обозначим эту точку буквой  $H$ ). Докажите, что  $H$  лежит на радикальной оси  $(ABC)$  и  $(DEF)$ .

**Доказательство.**

(а) Обозначим параболу из условия буквой  $\Delta$ . Проведем равностороннюю гиперболу  $\Gamma$  через точки  $A, B, C, D$ . Тогда  $\Gamma, \Delta$  — 3-пара Понселе. Пусть  $H$  — общий ортоцентр треугольников  $ABC, DEF$ . При вращении  $ABC$  по Понселе, точка  $H$  всегда будет на лежать и на  $\Gamma$  и на директрисе  $\Delta$ . Значит, в силу непрерывности  $H$  фиксирован (формально, прямая  $AH$  будет двигаться полиномиально со степенью не выше 3 как прямая проективного направления проходящая через проективно движущуюся по конике точку. Тогда понятно, что если в бесконечном числе положений она проходит через некоторую точку, то она всегда через неё проходит). Задвигая  $A$  в  $D$ , побеждаем.

(б) По следствию (3.12) из теоремы Понселе, существует коника  $\mathcal{D}$ , вписанная в треугольники  $ABC$  и  $DEF$ . По предыдущему пункту, она не является параболой, поэтому у неё есть два фокуса  $P$  и  $Q$ . Вспомним, что по утверждению (3.13) радиус  $\rho$  педальной окружности точек  $P, Q$  фиксирован. Тогда по лемме о степени ортоцентра выполнены равенства

$$-\text{pow}(H, (ABC)) = 4\rho - HP^2 - HQ^2 = -\text{pow}(H, (DEF)),$$

что и требовалось. □

### 3.5.2 Теорема Айера

**Задача 41.** Треугольник  $ABC$  вращается между описанной окружностью  $\Omega$  и вписанной коникой с фокусами  $P$  и  $Q$ . Точка  $M_a$  — точка Микеля четырёхугольника  $BPCQ$ . Несложно проверить счётом углов, что  $M_a \in \Omega$ . Докажите, что отображение  $A \mapsto M_a$  — проективная инволюция.

**Доказательство.** Пусть касательные из  $M$  к конике повторно пересекают  $\Omega$  в точках  $S$  и  $T$ . Из равенства  $\angle BMP = \angle QMC$  и изогонального свойства коники следует, что  $\angle BMS = \angle TMC$ , т.е. прямые  $ST \parallel BC$ , а тогда они симметричны относительно центра  $X$  коники. Если  $ST$  и  $BC$  касаются коники в точках  $M'$  и  $A'$  соответственно, то  $X$  — середина  $M'A'$ . Пусть  $\varphi$  — гомография Понселе с описанной окружности на вписанную конику, тогда  $\varphi(A) = A', \varphi(M) = M'$ . Композиция  $\varphi^{-1} \circ Z_X \circ \varphi$  отправляет  $A$  в  $M$  и является проективной инволюцией. □

**Следствие 3.16.** Все прямые  $AM_a$  проходят через фиксированную точку или попарно параллельны.

**Задача 42\*.** Треугольник  $ABC$  вращается между описанной окружностью и вписанной коникой с фокусами  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $\angle ABP + \angle BCP + \angle CAP = \text{const}$ .

**Доказательство.** Пусть  $M_a$  — точка Микеля четырехугольника  $BPCQ$ ,  $S \in AM_a$  — фиксированная точка из предыдущей задачи. Несложным счётом углов получаем, что  $\angle ABP + \angle BCP = \angle QM_aC$ . Пусть прямые  $M_aQ$  и  $AP$  повторно пересекают  $(ABC)$  в точках  $K$  и  $T$  соответственно. Тогда  $\angle QM_aC = \angle KAC$ , и достаточно доказать, что угол  $\angle KAT = \angle KAP = \angle KAC + \angle CAP$  фиксирован. Отображение  $T \mapsto K$  можно представить в виде композиции центральных проекций с окружности на себя из точек  $P, S$  и  $Q$ . Мы хотим показать, что на самом деле это отображение является поворотом на фиксированный угол. Достаточно найти три положения. Зафиксируем  $A_0B_0C_0$  — один из треугольников Понселе. Тогда  $A \in \{A_0, B_0, C_0\}$  — искомые положения.  $\square$

**Задача 43 (Теорема Айера).** Даны треугольник  $ABC$  и точка  $P$ . Пусть  $P_aP_bP_c$  — её педальный треугольник, а  $\Omega_9$  — окружность девяти точек треугольника  $ABC$ . Докажите, что направленный угол между касательными, проведёнными к окружностям  $(P_aP_bP_c)$  и  $\Omega_9$  в их общей точке, равен  $\pm(90^\circ - \angle ABP - \angle BCP - \angle CAP)$ .

**Доказательство.** Пусть  $Q$  изогонально сопряжена к  $P$ . Как уже не раз упоминалось, радиус окружности девяти точек постоянен, а центр движется по окружности с центром в середине  $PQ$ . Педальная же окружность постоянна. Поэтому угол между этими окружностями фиксирован. Кроме того,  $\angle ABP + \angle BCP + \angle CAP = \text{const}$  по предыдущей задаче. Поэтому достаточно проверить, что равенство из условия верно для одного положения треугольника  $ABC$ . В качестве искомого положения можно взять треугольник, в котором  $BC \perp OP$  — в этом случае педальная окружность проходит через середину стороны, и углы между касательными в этой точке можно несложно посчитать. Технические детали мы оставляем заинтересованным читателям.  $\square$

### 3.5.3 Задача 10.4 с последнего финала олимпиады им. Шарыгина

**Задача 44 (Поризм Брокара).** Треугольник  $ABC$  вращается между описанной окружностью и вписанным эллипсом с фокусами  $P$  и  $Q$ . Предположим, что для одного положения треугольника точки  $P$  и  $Q$  являются точками Брокара с углом  $\varphi$ . Докажите, что для всех других положений треугольника точки  $P$  и  $Q$  также являются точками Брокара с углом  $\varphi$ .

**Доказательство 1.** Пусть  $ABC$  — треугольник с вписанным эллипсом Брокара  $\Gamma$ , который касается  $BC, AC, BA$  в точках  $K_a, K_b, K_c$ . Как известно,  $K_a, K_b, K_c$  — основания симедиан из  $A, B, C$ . Также известно, что точки  $P$  и  $Q$  лежат на окружности с диаметром  $OL$  («окружность Брокара»), поэтому  $L$  фиксирована (доказательства этих двух фактов есть в проекте ЛКТГ 2013 года о точках Брокара или в решебнике Акопяна: 555 geometry problems). Отсюда получаем, что у  $\Gamma$  фиксирован перспектор при вращении по Понселе.

**Лемма 3.17.** Если треугольник  $ABC$  вращается по Понселе между двумя кониками, и перспектор вписанной коники фиксирован, то эти коники касаются в двух точках.

**Доказательство.** Нужно задвинуть точки  $A, B, C$  в точки пересечения коник (возможно, комплексные) и проследить за перспектором.  $\square$

Также известно (см. мистический дополнительный раздел), что вершины треугольника Понселе проективно зависят друг от друга, если и только если вписанная и описанная коники дважды касаются. Применяя этот факт к нашей задаче, заключаем, что существует проективная зависимость между  $A, B, C$ . Пусть  $AP$  пересекла  $(ABC)$  в точке  $D$ , хотим показать, что дуга  $DB$  имеет фиксированную ориентированную градусную меру, т. е. что  $D, B$  отличаются поворотом на фиксированный угол вокруг центра  $(ABC)$ . Это верно в трех положениях — значит, верно всегда.  $\square$

**Доказательство 2.** Пусть  $\gamma$  — некий эллипс с фокусами  $X$  и  $Y$ , а  $\ell$  — произвольная касательная к нему. Рассмотрим такую точку  $L_\alpha \in \ell$ , что направленный угол  $\angle(XL_\alpha, \ell) = \alpha$  ( $\alpha \in (0, \pi)$ ). Из рассуждения перед утверждением (3.13) известно, что геометрическое место точек  $L_{\frac{\pi}{2}}$  — это окружность (с центром в середине  $XY$ ) — обозначим её буквой  $\omega$ . Тогда для любого другого  $\alpha$  геометрическое место точек  $L_\alpha$  — это тоже окружность, получающаяся из  $\omega$  поворотной гомотетией с центром в  $X$ .

Перейдём к решению задачи. Применим полученное утверждение для вписанного эллипса и угла  $\alpha = \pm\varphi$  (знак выбирается в зависимости от расположения точек). Тогда ГМТ  $L_\alpha$  — это окружность, пересекающаяся с описанной окружностью в трёх точках. Значит, эти окружности совпадают, что завершает доказательство.  $\square$

**Задача 45.** В треугольнике  $ABC$  отмечены точка пересечения медиан  $M$ , ортоцентр  $H$ , центр описанной окружности  $O$  и точка Лемуана  $L$ .

(a\*) (Ол. Шарыгина 2025, финал, 10.4) Точка  $S$  является точкой Шалтая треугольника  $LHM$  со стороны вершины  $L$ , а  $L^*$  инверсна  $L$  относительно описанной окружности. Тогда  $SL^* \parallel MN$ .

(b\*) Точка  $T$  является точкой Шалтая треугольника  $LOM$  со стороны вершины  $M$ , а  $M^*$  инверсна  $M$  относительно описанной окружности. Тогда  $TM^* \parallel OL$ .

**Замечание.** Утверждение пункта (b) равносильно тому, что образ  $M$  при инверсии относительно окружности с диаметром  $OL$  попадает на описанную окружность треугольника  $ABC$ .

**Доказательство.**

(a) Пусть  $\Gamma$  — эллипс с фокусами  $O, H$ , вписанный в  $ABC$ . Будем вращать  $ABC$  по описанной окружности вокруг  $\Gamma$ . При этом,  $H$  всегда будет оставаться ортоцентром  $ABC$  как изогональный образ центра  $(ABC)$  — точки  $O$ , и центроид  $M$  фиксирован в силу прямой Эйлера. По лемме Скутина,  $L$  будет двигаться по окружности  $\Delta$ , центр которой лежит на  $MN$ . Эту окружность мы отражаем относительно окружности  $(ABC)$  и окружности с диаметром  $MN$ . Получим две окружности, центры которых лежат на

МН; несложным счетом через лемму Скутина убеждаемся, что их радиусы равны (и равны  $\frac{R}{2}$ , где  $R$  радиус  $(ABC)$ ). Ясно, что при этом угловые скорости  $S, L^*$  при этом также будут совпадать — и так как в положении, когда  $ABC$  равнобедренный,  $SL^* = MN$ , то в других положениях  $SL^* \parallel MN$  — победа.

(b) Будем доказывать утверждение из замечания; его равносильность задаче нетрудно понять. Будем вращать треугольник по описанной окружности вокруг эллипса Брокара. При этом точки  $O, L$  фиксированы, как и точки Брокара  $P, Q$ . По лемме Скутина, точка  $M$  движется по некоторой фиксированной окружности. Она получается из  $(ABC)$  композицией инверсии с центром  $L$  и радиусом  $LP = LQ$ , симметрии относительно  $OL$  и симметрии относительно середины отрезка  $PQ$ . Мы хотим показать, что при инверсии относительно окружности с диаметром  $OL$  эта окружность перейдет в  $(ABC)$ . Ясно, что центр этой окружности лежит на  $OL$ . Задвигая  $A$  в точки пересечения  $OL$  с  $(ABC)$ , получим равнобедренный треугольник; при этом  $M$  попадет на  $OL$ . Простым счетом отрезков или перекидыванием двойных отношений можно убедиться, что при инверсии относительно окружности с диаметром  $OL$  в этом положении образ  $M$  совпадёт с  $A$ , т.е. попадёт на описанную окружность, а тогда траектория точки  $M$  совпадёт с описанной окружностью.

□

### 3.6 Вокруг классического доказательства теоремы Понселе

В этом подразделе собраны задачи, связанные с леммой о соосных окружностях и классическими фактами про многоугольники Понселе (подробности в подразделе (1.7)).

**Теорема 3.18.** Дано натуральное число  $2 \leq k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ . Многоугольник  $A_1A_2 \dots A_n$  вращается между двумя окружностями. Из теоремы (1.39) следует, что прямая  $A_kA_{n+2-k}$  касается фиксированной окружности. Тогда точка касания проективно зависит от  $A_1$ .

**Замечание.** На множестве касательных к конике естественным образом можно определить двойное отношение. Следовательно, можно сказать, что и сами прямые  $A_kA_{n+2-k}$  проективно зависят от  $A_1$ .

**Следствие 3.19.** Многоугольник  $A_1A_2 \dots A_{2s+1}$  вращается между двумя окружностями. Тогда точка касания стороны  $A_{s+1}A_{s+2}$  со вписанной окружностью проективно зависит от  $A_1$ .

**Замечание.** Следствие (3.19) было предложено на летней конференции турнира городов в 2022 году (проект [2], задача №25). Тогда никто из участников проекта его не осилил, а составители проекта обладали только сложным алгебраическим доказательством. Лишь некоторое время спустя было найдено простое геометрическое доказательство, которое мы и предлагаем вам проделать.

**Задача 46.**

- (а) (Обобщённая гомография Понселе). Даны окружности  $\Omega$  и  $\gamma$ . Из произвольной точки  $A \in \Omega$  проводятся касательные (если они существуют) к  $\gamma$ , повторно пересекающие  $\Omega$  в точках  $B$  и  $C$ . Из теоремы (1.39) следует, что все прямые  $BC$  касаются фиксированной окружности. Докажите, что точка касания проективно зависит от  $A$ .
- (б) Докажите теорему (3.18).

**Замечание.** Из теоремы (1.18) следует, что обычная и обобщённая гомографии Понселе также верны и для коник, пересекающихся не более, чем в двух точках (с учётом кратности). Тем не менее, разрешается пользоваться этими утверждениями для произвольной пары коник: обычной гомографией Понселе — всегда, а задачей (46) — после того, как решите её. Если вы желаете узнать максимально общее доказательство этих фактов, то мы удовлетворим ваше любопытство в дополнительном разделе (если до него дойдёт дело).

**Задача 47** (Д. Бродский). Окружность  $\omega$  находится внутри окружности  $\Gamma$ . Пусть  $X \in \omega, Y \in \Gamma$  — два велосипедиста, стартующих в ближайших точках окружностей  $\omega, \Gamma$ , и едущих по ним в одном направлении с одинаковыми угловыми скоростями. Точки  $P, Q$  на окружности  $\omega$  таковы, что  $PX = QX = XY$ . Докажите, что  $PQ$  касается фиксированной окружности.

**Задача 48.** Внутри окружности  $\Omega$  расположена окружность  $\omega$ . Рассмотрим замкнутую цепочку окружностей  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2n}$ . Окружность  $\gamma_i$  с центром  $O_i$  касается внешним образом  $\omega$ , внутренним образом  $\Omega$  и окружностей  $\gamma_{i-1}$  и  $\gamma_{i+1}$  (как обычно,  $\gamma_{i \pm 2n} = \gamma_i$ ). Докажите, что все прямые  $O_i O_{i+n}$  пересекаются в одной точке, которая зависит только от  $\omega$  и  $\Omega$ , но не от выбора цепочки.

**Задача 49** (ЮМТ 2024, обобщение). Многоугольник  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$  вращается между двумя окружностями. Докажите, что величина  $\frac{\sum_{i=1}^n A_i A_{i+n}}{S_{A_1 \dots A_{2n}}}$  постоянна.

**Задача 50.**

- (а\*) Многоугольник  $A_1 A_2 \dots A_n$  вращается между двумя окружностями. Прямая  $A_i A_{i+1}$  касается вписанной окружности в точке  $X_i$ . Докажите, что центр масс точек  $X_1, X_2, \dots, X_n$  постоянен.
- (б) Многоугольник  $A_1 A_2 \dots A_n$  вращается между двумя окружностями, а  $P$  — фиксированная точка плоскости. Прямая  $A_i A_{i+1}$  касается вписанной окружности в точке  $X_i$ . Докажите, что величина  $\sum_{i=1}^n P X_i^2$  постоянна.
- (с) Пусть теперь  $n = 2m$ . Докажите, что величина  $\sum_{i=1}^{2m} \frac{A_i A_{i+1}}{A_{m+i} A_{m+i+1}}$  постоянна.

Отдельный интерес вызывает (не)возможность построения вписанно-описанных многоголь-

ников циркулем и линейкой. Мы практически не будем затрагивать этот вопрос в проекте и приведём только следующую задачу, которая утверждает, что достаточно научиться строить нечётноугольники.

**Задача 51.** Окружность  $\beta$  лежит внутри окружности  $\alpha$ . Известно, что существует  $n$ -угольник, вписанный в  $\alpha$  и описанный вокруг  $\beta$ . С помощью циркуля и линейки постройте  $2n$ -угольник, вписанный в  $\alpha$  и описанный вокруг некоторой окружности  $\beta'$ , соосной с  $\alpha$  и  $\beta$ .

### 3.7 Разное

В разделе евклидовых инвариантов мы не стремимся к максимальной общности результатов. Многие задачи раздела остаются верными при замене вписанной окружности на произвольную двухфокусную конику. Если разница кажется нам существенной, мы формулируем обе версии (см., например, задачу (53)). Но зачастую решение практически не меняется (конечно, если вы придумали «правильное» решение). Предлагаем вам убедиться в этом.

**Задача 52.** Решите задачи (23), (24), (25), (28), (32) и (56a) для случая, когда (вне)вписанная окружность заменена на двухфокусную конику.

**Задача 53.** Треугольник  $ABC$  вращается между описанной окружностью и вписанной

(a) (Олимпиада им. Шарыгина, 2023, финал, 10.4) окружностью

(b\*) (Xiuyi Chen, aka LoloChen, 2024) двухфокусной коникой

с центром  $X$ . Точка  $A_1$  симметрична  $A$  относительно  $X$ . Докажите, что точка, изогонально сопряжённая  $A_1$  относительно треугольника  $ABC$ , движется по прямой.

Следующая задача в каком-то смысле является обратной к лемме Скутина.

**Задача 54\*** (Xinchen Yu, 2024). Треугольник  $ABC$  вращается между описанной окружностью и вписанной коникой с центром  $X$ . Точка  $G$  — центр масс треугольника  $ABC$ , точка  $Y$  такова, что  $\vec{GY} = -2\vec{GX}$ . Докажите, что точка, изогонально сопряжённая  $Y$ , фиксирована.

**Замечание.** Если коника является окружностью, то  $Y$  — это точка Нагеля, а изогонально сопряжённая к ней — центр положительной гомотетии вписанной и описанной окружностей, который и в самом деле фиксирован при вращении треугольника.

**Задача 55\*\*.** Сходство между задачами (23), (25) и (28) видно невооружённым глазом. Придумайте утверждение, обобщающее их.

Роман Кравченко предложил возможный подход к обобщению. Он сформулировал следующую лемму:

**Лемма 3.20** (Базовая лемма). Треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\Omega$ . В треугольнике отмечены две пары  $(P, P')$ ,  $(Q, Q')$  изогонально сопряжённых точек. Обозначим через  $\Phi_{PQP'}$  (или просто  $\Phi$ ) отображение из задачи (21a), применённое к тройке  $PQP'$ , т.е. образом точки  $T \in \Omega$  будет такая точка  $\Phi(T)$ , что  $T$  — точка Микеля четырёхугольника  $PQP'\Phi(T)$ . Положим  $\omega_{Q'} = \Phi(\Omega)$ . Разумеется,  $Q' \in \omega_{Q'}$ . Пусть прямые  $BQ'$  и  $CQ'$  повторно пересекают  $\Omega$  в точках  $B_1$  и  $C_1$ , прямые  $TB_1$  и  $AC$  пересекаются в точке  $T_b$ , прямые  $TC_1$  и  $AB$  — в точке  $T_c$ . Точки  $Q'$ ,  $T_b$ ,  $T_c$  лежат на одной прямой по теореме Паскаля; назовём эту прямую  $l_T$ . Нетривиальное утверждение состоит в том, что  $\Phi(T) \in l_T$ .

**Доказательство.** Если двигать  $T$  по описанной окружности, то точка  $Q' \in \Phi_{Q'}$  неподвижна, а точки  $T_b \in AC$  и  $\Phi(T) \in \omega_{Q'}$  проективно зависят от  $T$ , поэтому достаточно проверить коллинеарность  $Q', T_b, \Phi(T)$  в трёх положениях. Случаи  $T \in \{A, B, C\}$  очевидны.  $\square$

Докажем с помощью этой леммы задачи (23), (25) и (28).

**Доказательство задачи (23).** Как известно из задачи (52), вписанную окружность можно заменить на конику с фокусами  $P, P'$ , сделаем это. Положим в базовой лемме  $Q = O$ , тогда  $Q' = N$ , точки  $B_1$  и  $C_1$  превратятся в отражения ортоцентра относительно сторон, а прямая  $l_T$  — в прямую Штейнера точки  $T$  (да, вы правы, мы сейчас доказали с помощью теоремы Паскаля, что прямая Штейнера проходит через ортоцентр). Поскольку отображение  $\Phi$  не зависит от выбора треугольника Понселе, то при фиксированной  $T$  все прямые Штейнера проходят через фиксированную точку  $\Phi(T)$ , лежащую на  $\omega_N$ .  $\square$

**Доказательство задачи (25).** Пусть  $X$  — центр положительной гомотетии вписанной и описанной окружностей. Положим в базовой лемме  $P = P' = I$ ,  $Q = X$ , тогда  $Q' = N$  — точка Нагеля. Пусть прямая  $\ell$ , касающаяся вписанной окружности, пересекает описанную окружность в точках  $R$  и  $S$ . Достроим хорду  $RS$  до треугольника Понселе  $RST$ . В условии задачи сказано, что  $\ell \cap BC = D$ ,  $\ell \cap AC = E$ . Пусть точки  $D'$  и  $E'$  симметричны  $D$  и  $E$  относительно середин сторон  $BC$  и  $AC$  (т.е.  $D'E' = \ell'$ ). Известно, что  $D', E'$  и  $N$  лежат на одной прямой — это можно понять с помощью проективного движения  $\ell$  или прочитав второй абзац предложенного авторами проекта решения задачи (25). Аналогично доказательству базовой леммы, можно начать двигать  $T$ , тогда в силу гомографии Понселе  $l$  проективно зависит от  $T$ , в тогда и  $D'$  тоже. Следовательно, достаточно проверить коллинеарность точек  $N, D'$  и  $\Phi_{IXI}(T)$  в трёх положениях. Случаи  $T \in \{A, B, C\}$  очевидны.  $\square$

**Доказательство задачи (28).** Вписанную окружность снова можно заменить на конику  $\gamma$  с фокусами  $P$  и  $P'$ . Положим в базовой лемме  $Q = M$ , тогда  $Q' = L$  — точка Лемуана.

**Лемма 3.21.** Прямая  $l_T$  — это трилинейная поляра  $T$  относительно  $\triangle ABC$ .

**Доказательство 1.** Счёт в барицентрических координатах.  $\square$

**Доказательство 2.** Проведём касательную к  $(ABC)$  в точке  $T$  и уведём её на бесконечность проективным преобразованием. Описанная окружность превратится в параболу, а дальше решает счёт в декартовых координатах.  $\square$

**Доказательство 3.** Пусть чевианы через  $T$  пересекают противоположные стороны треугольника в точках  $A_0, B_0, C_0$ , а прямые  $B_0C_0$  и  $BC$  пересекаются в точке  $X$ . Тогда  $[A_0, X; B, C] = -1$ , т.е.  $X$  проективно зависит от  $A_0$ , а тогда и от  $T$  тоже. Следовательно, достаточно проверить коллинеарность точек  $X, T_b$  и  $L$  в трёх положениях. Случаи  $T \in \{A, B, C\}$  очевидны.  $\square$

**Доказательство 4.** Используем обозначения из предыдущего доказательства и введём cool ratio функции  $p, q, r$  стандартным образом. По теореме Менелая, достаточно проверить, что  $p(X) \cdot q(T_b) \cdot r(T_c) = 1$ . Применим CRL:  $q(T_b) = q(B_1)q(T)$ ,  $r(T_c) = r(C_1)r(T)$ . Кроме того,  $p(X) = -p(A_0) = -p(B)p(T) = p(A_1)p(T)$  ( $A_1$  — точка повторного пересечения  $AL$  и  $(ABC)$ ). Перемножая, получаем требуемое.  $\square$

Вернёмся к исходной задаче. Положим  $\Omega = (ABC)$ . Для начала заметим, что базовая лемма использует лишь проективное движение, теорему Паскаля и подобие. Первые два факта проективны, а для углов существует проективный аналог над  $\mathbb{C}P^2$  (см. (5.6)). Следовательно, лемма верна и на комплексной проективной плоскости. Наша цель — сделать проективное преобразование, при котором  $\Omega$  перейдёт в окружность, а вписанная коника  $\gamma$  — в такую конику, что центр  $\Omega$  является одним из её фокусов. Тогда в силу прямой Эйлера точка  $M$  будет фиксирована у всех треугольников получившегося поризма, а тогда по лемме Скутина  $L$  будет двигаться по окружности. По базовой лемме, все трилинейные поляры будут проходить через фиксированную точку этой окружности. Следовательно, изначально  $L$  двигалась по конике, и все трилинейные поляры пересекали эту конику в фиксированной точке, что и требовалось. Построим такое преобразование. Проведём две общие касательные к  $\Omega$  и  $\gamma$ . Пусть они касаются  $\Omega$  в точках  $X_1$  и  $X_2$  и пересекаются в точке  $K$ . Переведём эти точки в круговые проективным преобразованием  $\varphi$ . Известно, что касательные из круговых точек проходят через фокус, а тогда  $K$  перейдёт одновременно в центр окружности  $\varphi(\Omega)$  и фокус  $\varphi(\gamma)$ , что и требовалось.  $\square$

**Задача 56.**

(a\*) Шестиугольник  $ABCDEF$  вращается между двумя окружностями. Точка  $P$  — фиксированная, а точки  $Q$  и  $R$  изогонально сопряжены  $P$  относительно треугольников  $ACE$  и  $BDF$ . Докажите, что все прямые  $QR$  пересекаются в одной точке или попарно параллельны.

(b\*\*) Шестиугольник  $ABCDEF$  вращается между двумя произвольными кониками. Описанные окружности треугольников  $ACE$  и  $BDF$  четвёртый раз пересекают описанную конику в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что все прямые  $XY$  пересекаются в одной точке

или попарно параллельны.

Введём определение. Будем говорить, что семейство окружностей *принадлежит одной связке*, если центры всех этих окружностей лежат на одной прямой, или существует точка, имеющая одинаковую степень относительно всех окружностей семейства.

**Задача 57.** Треугольник  $\Delta$  вращается между двумя произвольными кониками. Докажите, что его

(a\*) описанная окружность

(b\*\*) окружность девяти точек

принадлежит фиксированной связке.

### 3.7.1 Ломаные Понселе

Незамкнутые ломаные Понселе уже становились предметом изучения геометров. В качестве примера можно вспомнить задачи 7 и 10 из предыдущего проекта про Понселе. В данном разделе мы изучим их подробнее и докажем несколько утверждений, обобщающих уже известные нам факты про замкнутые многоугольники.

Для начала сформулируем несложное утверждение, которое как интересно само по себе, так и может быть полезно в некоторых задачах данного блока.

**Утверждение 3.22.** Пусть  $\ell$  — радикальная ось окружностей  $\omega_1, \omega_2$  с центрами  $O_1$  и  $O_2$ . Докажите, что  $|\text{pow}_{\omega_1}(P) - \text{pow}_{\omega_2}(P)| = 2O_1O_2 \cdot \text{dist}(P, \ell)$ .

Доказательство мы не приводим; вы можете самостоятельно его проделать, опустив перпендикуляр на линию центров и посчитав отрезки.

Перейдём непосредственно к теме блока. Начнём с однозвенных ломаных.

**Задача 58.** Хорда АВ движется по фиксированной окружности  $\omega$  с центром О. Внутри  $\omega$  отмечена точка Р. Докажите, что следующие утверждения равносильны:

- Прямая АВ касается фиксированной коники, один из фокусов которой совпадает с Р.
- Центр  $O_1$  окружности (РАВ) движется по окружности или прямой.
- Проекция Р на АВ движется по окружности или прямой.

**Задача 59.** Незамкнутая трёхзвенная ломаная вращается между описанной окружностью и вписанной коникой. Обозначим буквой  $\omega$  описанную окружность треугольника, образованного звеньями ломаной.

(a) Предположим, что вписанная коника — это окружность. Докажите, что  $\omega$  касается двух фиксированных окружностей.

(b\*) Докажите, что в общем случае  $\omega$  принадлежит фиксированной связке.

**Замечание.** Данная задача обобщает пункты (а) и (b) задачи (20). Авторам проекта неизвестно, могут ли окружности из пункта (а) вырождаться в прямые.

**Замечание.** Роман Кравченко показал, что в пункте (а) центр одной из двух фиксированных окружностей совпадает с центром описанной окружности.

**Задача 60.** Даны окружность  $\Omega$  и коника с фокусами  $P$  и  $Q$ . Из произвольной точки  $A \in \Omega$  проводятся касательные (если они существуют) к конике, повторно пересекающие  $\Omega$  в точках  $B$  и  $C$ .

- (а) Докажите, что точка, изогонально сопряжённая  $P$  относительно треугольника  $ABC$ , движется по окружности или прямой.
- (b\*) Докажите, что педальная окружность точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  принадлежит фиксированной связке.
- (c\*) Пусть  $M$  — точка Микеля четырёхугольника  $BPCQ$ . Докажите, что существует фиксированная инверсия или осевая симметрия, переводящая  $A$  в  $M$ .

**Замечание.** Из пункта (с) следует, что точка  $M$  проективно зависит от  $A$  и движется по окружности или прямой, а все прямые  $AM$  проходят через фиксированную точку. Тем самым, данная задача обобщает задачу (41).

**Задача 61.** Незамкнутая трёхзвенная ломаная  $ABCD$  вращается между двумя окружностями. Прямая  $\ell$  — вторая внешняя касательная к вписанным окружностям треугольников  $ABC$  и  $BDC$ .

- (a\*) Докажите, что точка пересечения прямых  $\ell$  и  $BC$  движется по прямой.
- (b\*) Докажите, что прямая  $\ell$  касается фиксированной окружности или проходит через фиксированную точку.

## 4 Проективизация CRL

### 4.1 Сложение точек на вырожденной кубике

При введении cool ratio функции, мы пользовались таким понятием, как отрезок. Это понятие — чисто евклидово; поэтому, кажется, что cool ratio lemma — чисто евклидов инструмент, и его нельзя применять в общей проективной геометрии (т. е. на проективных плоскостях над произвольными полями; в частности, на  $\mathbb{C}P^2$ ). Однако, оказывается, что это совсем не так, и CRL можно адаптировать под проективную геометрию, причём адаптация будет связана с кубическими кривыми. Для начала, напомним, что это.

В дальнейшем — начиная с этого момента, и до конца (кроме нескольких исключений, о которых будет отдельно сказано), мы считаем, что все происходит на комплексной проективной

плоскости  $\mathbb{C}P^2$  (на самом деле  $\mathbb{C}$  можно заменить на алгебраически замкнутое поле характеристики 0).

**Определение 4.1.** Кубической кривой, или кубикой будем называть множество  $\{[x : y : z] \mid P(x, y, z) = 0\}$ , где  $P$  — однородный многочлен степени 3.

Общая теория кубических кривых и понятие сложения точек на кубике нам потребуется только в самом конце проекта. Тем не менее, участникам, заинтересованным в более глубоком изучении темы, мы советуем почитать, например, книгу [6].

Удивительно, но нас в первую очередь будут интересовать вырожденные кубики.

**Определение 4.2.** Пусть  $\mathcal{K} = \mathcal{C} \cup \ell$  — распавшаяся кубика. Выберем на прямой  $\ell$  произвольную точку  $O$ , не лежащую на конике; ее будем считать нулевой точкой сложения точек. Определим точку  $T \in \ell$  следующим образом: если  $X \neq Y$  ( $\ell$  пересекает  $\mathcal{C}$  в различных точках), то  $T$  такова, что  $[O, T; X, Y] = -1$ ; если же  $X = Y$  (т.е.  $\ell$  касается  $\mathcal{C}$ ), то  $T = X$ . Введем операцию  $+$ :  $\mathcal{K} \setminus \{X, Y\} \times \mathcal{K} \setminus \{X, Y\} \rightarrow \mathcal{K} \setminus \{X, Y\}$  следующим образом.

- если  $A \in \mathcal{C}, B \in \ell$ . Пусть прямая  $AB$  повторно пересекает  $\mathcal{C}$  в точке  $C$ . Тогда точка  $A + B$  является повторным пересечением прямой  $OC$  и  $\ell$ ;
- если  $A, B \in \ell$ , то  $A + B$  — это такая точка, что существует проективная инволюция, которая меняет местами пары точек:  $(A + B, O), (A, B), (X, Y)$ ;
- если  $A, B \in \mathcal{C}$ . Пусть  $C$  — пересечение прямых  $AB$  и  $\ell$ . Тогда точка  $A + B$  — это такая точка, что  $[A + B, C; O, T] = -1$ .

Оказывается, что такое определение действительно является аналогом сложения точек на кубике, но для распавшейся кубики. А именно, верны следующие утверждения.

**Утверждение 4.3.** Пусть  $\mathcal{C}$  — коника, а  $\ell$  — прямая. Тогда только что введения операция сложения корректно задает на  $\mathcal{K} \setminus \{X, Y\}$  структуру абелевой группы.

Оставим его без доказательства (содержательная часть доказательства — проверка ассоциативности, остальное очевидно; ее мы опустим). Отметим важное следствие:

**Следствие 4.4.** Пусть  $\mathcal{K} = \mathcal{C} \cup \ell$  — вырожденная кубика. Точки  $A, B$  лежат на  $\mathcal{C}$ , а точка  $C$  — на  $\ell$ . Точки  $A, B$  и  $C$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда  $A + B + C = O$ .

Следующая теорема является обобщением теоремы (2.10):

**Теорема 4.5.** Коника  $\Gamma$  пересекает  $\mathcal{C}$  в точках  $A, B, C$  и  $D$ , а прямую  $\ell$  — в точках  $E$  и  $F$ , причём никакие из этих точек не лежат в пересечении  $\mathcal{C}$  и  $\ell$ . Тогда  $A + B + C + D + E + F = O$ . При этом, верно и обратное: если на  $\mathcal{C}$  выбраны точки  $A, B, C$  и  $D$ , а на  $\ell$  точки  $E$  и  $F$ , то если  $A + B + C + D + E + F = O$ , то эти шесть точек лежат на одной конике.

**Доказательство.** Пусть  $\ell$  пересекает  $\mathcal{C}$  в точках  $X, Y$ ; они необязательно различны. Понятно, что достаточно доказать прямое утверждение (ибо дальше можно воспользоваться обратным ходом: провести конику через пять точек и воспользоваться единственностью обратного элемента). Пусть  $AB, CD$  пересекают  $\ell$  в точках  $U, V$ . Тогда,  $A + B + C + D + P + Q = P + Q - U - V$ , и мы хотим проверить, что  $P + Q = U + V$ . По теореме Дезарга об инволюции для пучка  $\mathcal{O}_{A,B,C,D}$  и прямой  $\ell$  существует проективная инволюция на  $\ell$ , меняющая местами точки в парах  $(X, Y), (P, Q), (U, V)$ , откуда и следует требуемое.  $\square$

**Задача 62.**

- (а) **Обобщённая теорема Менеля.** Алгебраическая кривая  $\mathcal{W}$  степени  $d$  пересекает прямые  $AB, BC, CA$  в точках  $C_i, A_i, B_i$  для  $i = 1, \dots, d$ . Докажите, что  $\prod_{i=1}^d \frac{\overrightarrow{AC_i}}{C_iB} \frac{\overrightarrow{BA_i}}{A_iC} \frac{\overrightarrow{CB_i}}{B_iA} = (-1)^d$ .
- (b\*) **Обобщение cr1.** Алгебраическая кривая  $\mathcal{W}$  степени  $d$  пересекает окружность в точках  $A_1, \dots, A_{2d}$ , а ее хорду  $XY$  в точках  $B_1, \dots, B_d$ . Докажите, что  $f(A_1) \dots f(A_{2d}) = f(B_1) \dots f(B_d)$ , где  $f$  — cool-ratio-функция для отрезка  $XY$ .

**Доказательство.**

- (а) Введём барицентрические координаты. Пусть кривая задаётся уравнением  $f(x, y, z) = 0$ , где  $f = \alpha x^d + \beta y^d + \gamma z^d + \dots$ , тогда значения  $\frac{\overrightarrow{AC_i}}{C_iB}$  — это корни уравнения  $f(x, y, 0) = 0$ . По теореме Виета,  $\prod_{i=1}^d \frac{\overrightarrow{AC_i}}{C_iB} \frac{\overrightarrow{BA_i}}{A_iC} \frac{\overrightarrow{CB_i}}{B_iA} = ((-1)^d \frac{\beta}{\alpha}) \left( (-1)^d \frac{\gamma}{\beta} \right) \left( (-1)^d \frac{\alpha}{\gamma} \right) = (-1)^d$ .
- (b) Снова введём барицентрические координаты. Изначальный треугольник задаем равнобедренным. CRL от точки на окружности это отношение  $y/z$  в бариках ( $x$  соответствует основанию треугольника). Хотим найти решения уравнения  $P(0, y, z) = 0$ , а также системы  $P(x, y, z) = 0$  и  $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} = 0$ . У первого уравнения произведение отношений  $\frac{y}{z}$  у корней — это коэффициент при  $\frac{y^n}{z^n}$ , по теореме Виета. В второй системе  $x$  выражаем через  $y$  и  $z$  по формуле  $x = -\frac{a^2 yz}{b^2(y+z)}$ , т.к.  $b = c$ , подставляем, домножаем на  $(y + z)^n$ . Аналогично, хотим найти произведение отношений  $\frac{y}{z}$  в корнях. Аналогично, по теореме Виета это отношение коэффициентов при  $y^{2n}$  и  $z^{2n}$ . Отношение такое же, т.к.  $y^{2n}$  может появиться только при  $(y + z)^n \cdot y^n$ .  $\square$

**Замечание.** Задача (62) остаётся верной, если заменить вырожденную кубику (три прямые в пункте (а) и прямую+окружность в пункте (b)) на произвольную. Но её доказательство становится значительно сложнее.

Если коника  $\mathcal{C}$  является окружностью, то в качестве нулевой точки обычно берут бесконечно удалённую точку прямой  $\ell$ . Мы будем придерживаться этого правила, если явно не оговорено иное.

Предположим, что  $\mathcal{K} = \Omega \cup \ell$  — распавшаяся кубика, и  $\Omega$  — это окружность. Другая окружность  $\gamma$  пересекает  $\ell$  в точках  $A, B$  и  $\Omega$  в точках  $C, D$ . Круговые точки  $\mathcal{J}_+$  и  $\mathcal{J}_-$  являются двумя

оставшимися точками пересечения  $\mathcal{K}$  и  $\gamma$ , а прямая  $\mathcal{J}_+\mathcal{J}_-$  проходит через нулевую точку кубики. Следовательно,  $\mathcal{J}_+ + \mathcal{J}_- = O$ , и равенство из теоремы (4.5) можно упростить. В обратную сторону рассуждение тоже верно. В итоге получаем следующее утверждение:

**Следствие 4.6.** Пусть  $\mathcal{K} = \Omega \cup \ell$  — распавшаяся кубика «окружность + прямая». Точки  $A, B$  лежат на  $\ell$ , а  $C, D$  — на  $\Omega$ . Точки  $A, B, C$  и  $D$  лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда  $A + B + C + D = O$ .

Отметим, что по некоторым причинам (поймём в дальнейшем) нам удобно считать, что если  $A$  на прямой  $\ell$  отлична от  $Y$ , то  $X + A = X$ . Аналогично с точкой  $Y$ . Сумма  $X + Y$  же не определена.

## 4.2 Проективное обобщение CRL

Итак поймем почему CRL действительно проективный объект. Рассмотрим некоторую конику и прямую, не касающуюся её.

**Определение 4.7.** Зафиксируем на конике  $\mathcal{C}$  точки  $X, Y, Z$ ; пусть касательная к  $\mathcal{C}$  в точке  $Z$  пересекает  $X Y$  в точке  $T$ . Пусть  $\mathcal{K}$  — вырожденная кубика, состоящая из коники  $\mathcal{C}$  и прямой  $\ell$ . *Обобщенной cool ratio-функцией* с основной прямой  $X Y$  и с центром  $Z$  будем называть функцию  $f_{XY;Z} = f: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , которое работает следующим образом: если  $P \in \mathcal{C}$ , то  $f(P) = [X, Y; P, Z]$ , а если  $P$  на  $X Y$ , то  $f(P) = [X, Y; T, P]$ .

Сразу заметим, что при данном  $c$  есть ровно одна такая точка  $A$  на  $\mathcal{C}$  что  $f(A) = c$  и ровно одна такая точка  $B$  на  $\ell$ , что  $f(B) = c$ .

Для начала, проведем мост между этим определением и привычным нам определением cool ratio функции.

Пусть  $X Y$  — хорда окружности  $\omega$ . Пусть  $N$  — середина одной из дуг, соединяющих  $X, Y$  на  $\omega$ . Рассмотрим обобщенную cool-ratio функцию для отрезка  $X Y$  и центра  $N$ . Тогда, заметим, что получится в точности обычная cool-ratio функция  $f_{XN}$  для точек на прямой и  $f_{XY}$  для точек на конике. Таким образом, мы получаем проективное обобщение cool-ratio функции. Вообще говоря, выбрать середину дуги — как и cool-ratio функцию для отрезка  $X Y$  — можно двумя способами, но они отличаются только знаком. Каждой середине дуги отвечает свой способ ввести функцию для отрезка  $X Y$ .

Следующая задача является ключевой в разделе. Она показывает, что cool ratio lemma и сложение точек на вырожденной кубике — это практически одно и то же.

**Задача 63.** Пусть прямая  $\ell$  пересекает  $\mathcal{C}$  в двух различных точках  $X, Y$ . На конике выберем также точку  $Z$ ; пусть  $T$  точка на  $X Y$  такая что  $Z T$  касается  $\mathcal{C}$ . Пусть  $f$  — обобщенная cool ratio функция для отрезка  $X Y$  и центра  $Z$ . Введем на  $\mathcal{K} = \mathcal{C} \cup \ell$  структуру сложения точек с начальной точкой в точке  $T$ . Пусть  $A, B \in \mathcal{K}$  — две точки. Тогда  $f(A + B) = f(A)f(B)$ .

**Доказательство.** Докажем, для начала, что  $f(-A) = \frac{1}{f(A)}$ . Пусть  $A$  лежит на  $\ell$ . Мы хотим, чтобы  $[X, Y; T, A][X, Y; T, -A] = 1$ , а знаем, что есть проективная инволюция, меняющая местами точки в парах  $(X, Y), (A, -A), (T, T)$ . Отсюда  $[X, Y; T, A] = [Y, X; T, -A] = \frac{1}{[X, Y; -A, T]}$  — победа. Пусть теперь  $A$  на  $\mathcal{C}$ . Тогда  $-AA$  проходит через  $T$ . Из проекции  $\mathcal{C}$  на себя с центром  $T$  получаем, что есть проективная инволюция, меняющая местами точки в парах  $(X, Y), (A, -A), (T, T)$  — далее аналогично.

Докажем наше утверждение в случае, когда  $A, B$  лежат на  $\ell$ .  $f(A + B) = f(A)f(B)$  — хотим проверить. Это можно посчитать: введем на  $\ell$  координаты так, чтобы  $Y = 0, X = \infty, T = 1$ . Тогда если  $A = x, B = y$ , то  $A + B = xy$  — убедитесь в этом. Осталось заметить, что  $f(x) = x$  — сопоставляет точке ее координату. Отсюда следует требуемое.

Пусть теперь прямая  $r$  пересекает  $\mathcal{C}$  в точках  $U, V$ , а  $\ell$  в точке  $W$ . Покажем, что тогда  $f(U)f(V)f(W) = 1$ . Этого будет достаточно для решения задачи из уже полученных результатов. И правда: пусть  $ZU, ZV$  пересекают  $\ell$  в точках  $S, L$ . Тогда  $f(U) = \frac{1}{f(S)}, f(V) = \frac{1}{f(L)}$ . Это следует из того соображения, что если  $Z, M, N$  коллинеарны то  $f(M) = \frac{1}{f(N)}$ . Имеем также  $W + U + V = T, U + Z + S = T, V + L + Z = T$ , откуда  $S = T - U - Z, L = T - V - Z$  откуда  $S + L = T - U - 2Z - V = T - U - V = W$ . Из предыдущего  $f(W) = f(S)f(L)$  — победа.  $\square$

Предлагаем вам решить следующую задачу, чтобы лучше прочувствовать связь между CRL и сложением точек на вырожденной кубике.

**Задача 64.** Переведите решения задач (1), (3), (4), (5), (6) и (12) на язык сложения точек.

**Доказательство.** Приведём решения некоторых задач, остальное делается аналогично. Обозначения сохранены.

**Задача 1:** Рассмотрим кубику  $\omega \cup AD$ . Касательная к  $\omega$  в точке  $S$  и прямая  $BC$  проходят через бесконечно удалённую точку прямой  $AD$  (= нулевую точку кубики), поэтому  $2S = B + C = O$ . Известно, что  $X + C + E = Y + S + E = O$ . Нам же нужно показать, что точки пересечения прямых  $SX$  и  $BY$  с прямой  $AD$  совпадают, т.е. что  $-S - X = -B - Y$ . Это легко следует из вышенаписанных равенств.

**Задача 4:** Доказываем общее утверждение из пункта (а). Так как точки  $A_{i-1}, P_i, A_i$  лежат на одной прямой, то  $A_{i-1} + P_i + A_i = O$ . Складывая отдельно равенства для чётных  $i$  и нечётных, заключаем, что

$$A_0 + A_1 + \dots + A_{2n} = P_1 + P_3 + \dots + P_{2n-1}, \text{ и } A_1 + \dots + A_{2n} + A_{2n+1} = P_2 + P_4 + \dots + P_{2n}.$$

Таким образом, условие замыкания ломаной равносильно равенству

$$P_1 + P_3 + \dots + P_{2n-1} = P_2 + P_4 + \dots + P_{2n},$$

т.е. не зависит от выбора точки  $A$ .

**Задача 5:** Пусть прямая  $\ell$  пересекает прямые  $AB$  и  $AC$  в точках  $C_1$  и  $B_1$  соответственно. Рассмотрим кубику  $\Omega \cup \ell$ . Тогда  $A + B + C_1 = A + C + B_1 = A + B_1 + C_1 + M = 0$ , откуда заключаем, что  $M = A + B + C$ .  $\square$

**Замечание.** Поскольку в решении через сложение точек не требуется, чтобы окружность и прямая пересекались в вещественных точках, то в условии пункта (а) задачи (4) прямая  $P - Q - R$  может и не пересекать окружность. Аналогично, в условии пункта (b) той же задачи можно избавиться от условия на взаимное расположение окружности и точки  $P$ . Также, поскольку оба пункта обладают проективной формулировкой, в их условиях можно заменить окружность на произвольную конику. Подобным образом обобщаются и остальные задачи.

Переформулировка задачи (5) настолько элегантна, что заслуживает быть вынесенной в отдельное утверждение:

**Утверждение 4.8.** Треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\Omega$ . Также дана произвольная прямая  $\ell$ . Рассмотрим кубику  $\mathcal{C} = \Omega \cup \ell$ . Пусть  $M$  — точка Микеля прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  и  $\ell$ . Тогда  $M = A + B + C$ .

## 5 Awesome Ratio lemma

### 5.1 Формулировка и доказательство

**Теорема 5.1 (Awesome ratio lemma).** Многоугольник  $A_1 \dots A_n$  на  $\mathbb{C}P^2$  описан около коники  $\mathcal{D}$  и вписан в конику  $\mathcal{C}$ . Фиксированная хорда  $XY$  коники  $\mathcal{C}$  касается коники  $\mathcal{D}$ . Рассмотрим кубику  $\mathcal{K} = \mathcal{C} \cup XY$ . Тогда  $\sum_{i=1}^n A_i = \text{const}$  при вращении  $A_1 \dots A_n$  по Понселе.

**Замечание.** На самом деле некоторый частный случай ARL мы уже доказали в предыдущих разделах. А именно тот, где все объекты вещественны,  $n = 3$ , а описанная коника является окружностью. Действительно, из задачи (23) известно, что точка Микеля  $M$  прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  и  $XY$  неподвижна при вращении треугольника. С другой стороны, в силу утверждения (4.8),  $M = A + B + C$ .

Приведём также альтернативную формулировку на языке обобщённых Cool Ratio функций.

**Теорема 5.2 (ARL на языке обобщённых CR-функций).** Многоугольник  $A_1 \dots A_n$  на  $\mathbb{C}P^2$  описан около коники  $\mathcal{D}$  и вписан в конику  $\mathcal{C}$ . Фиксированная хорда  $XY$  коники  $\mathcal{C}$ , где  $X \neq Y$ , касается коники  $\mathcal{D}$ . Пусть  $W$  — точка на  $\mathcal{C}$ , отличная от  $X$  и  $Y$ . Тогда  $\prod_{i=1}^n [A_i, W; X, Y] = \text{const}$  при вращении  $A_1 \dots A_n$  по Понселе.

Отсюда сразу получаем небольшое обобщение ARL.

**Следствие 5.3.** Пусть незамкнутая ломаная  $X_1X_2\dots X_k$  описана около  $\mathcal{D}$  и вписана в  $\mathcal{C}$ . Тогда в формулировке ARL место хорды  $XY$ , касающейся  $\mathcal{D}$ , можно взять хорду  $X_1X_k$ .

Перед доказательством нам понадобится такое понятие, как полиномиальное движение точек.

**Определение 5.4.** Пусть  $\mathcal{T}$  — некоторая проективная прямая с введенными на ней однородными координатами  $(t_0 : t_1)$ ; ее мы будем мыслить как время,  $t = \frac{t_1}{t_0}$  — аффинная координата на этой прямой. Будем говорить, что переменная точка  $A_t$  движется со степенью  $d$ , если ее однородные координаты можно записать как  $(\phi_0(t_0, t_1) : \phi_1(t_0, t_1) : \phi_2(t_0, t_1))$ , где  $\phi_i$  — однородные многочлены степени  $d$  от двух переменных с комплексными коэффициентами, не имеющих общего делителя в совокупности (это дает корректность определения). Аналогично вводится понятие того, что прямая движется со степенью  $d$ .

Понятно, что пересечение двух прямых степеней  $a, b$  имеет степень не выше  $a+b$ , а прямая через точки со степенями  $a, b$  также имеет степень не выше  $a+b$ . Из рациональной параметризации коники понимаем, что при параметризации, образ точки с прямой, отображением параметризации из которой мы бьем в конику, имеет степень 2. Точка степени 1 всегда движется по прямой, причем движение происходит с сохранением двойных отношений, т. е. для любых четырех точек на  $\mathcal{T}$  их двойное отношение совпадает с двойным отношением положений точки степени 1. То же (про сохранение двойных отношений) верно для точки степени 2, движущейся по конике — ибо рациональная параметризация (например, проекция коники на прямую) сохраняет двойные отношения. Подробнее об этом можно прочитать в [2].

Также отметим, что в процессе доказательства мы будем пользоваться теоремами (1.40) и (3.18). Мы их формулировали (а вторую теорему ещё и доказывали) для случая вещественной плоскости, однако в ARL мы имеем дело с  $\mathbb{C}P^2$ . Возможны два способа разрешения проблемы:

- Если вас пугает словосочетание «комплексная проективная плоскость», вы можете без ущерба для общего понимания происходящего представлять, что все объекты вещественны — в частности, точки  $X$  и  $Y$ .
- Если вы желаете узнать доказательство в максимально общем случае, но не верите авторам на слово, что вышеупомянутые теоремы верны и над  $\mathbb{C}P^2$ , прочитайте дополнительный раздел (если он будет выложен), в котором эти теоремы доказаны в максимальной общности.

**Доказательство.** В первых двух пунктах мы считаем, что  $X \neq Y$ , т. е.  $XY$  НЕ касается  $\mathcal{C}$ .

1. Начнём со случая  $n = 2k + 1$ . Пусть  $O$  — произвольная точка на  $XY$ , отличная от  $X, Y$ ; сложение точек будем вести с началом в  $O$ . Пусть  $A_iA_{n+2-i}$  пересекает  $XY$  в точке  $P_i$ . Будем вращать вершину  $A_1$  по конике проективно (т.е. со степенью 2). По теореме (3.18), прямые  $A_iA_{n+2-i}$  проективно зависят от  $A_1$ . Как следствие, при  $i \neq k+1$  степень  $P_i$  равна 2, а степень  $P_{k+1}$  равна 1 (так как отображение, сопоставляющее точке на конике пересечение касательной в ней с некоторой фиксированной касательной к конике проективно). Пусть точка  $O'$  такова,

что  $[O', O; X, Y] = -1$ ; пусть  $Q_i$  такова, что  $[Q_i, P_i; O, O'] = -1$ . Тогда,  $A_i + A_{n+2-i} = Q_i$ . При этом, как и раньше, при  $i \neq k+1$  степень  $Q_i$  равна 2, а степень  $Q_{k+1}$  равна 1.

Докажем, что степень  $Q = Q_2 + \dots + Q_{k+1}$  равна 1.

Введем на  $XU$  аффинные координаты так, чтобы  $X, Y$  имели координаты  $0, \infty$ , а  $O$  имела координату 1. Тогда, явным вычислением легко убедиться, что сумма точек с координатами  $x$  и  $y$  имеет координату  $xy$ . Пусть теперь точки  $U, V$  движутся по этой прямой со степенью 2. Это означает, что аффинная координата  $U$  — это рациональная функция  $u(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ , где  $P, Q$  — взаимно-простые многочлены степени 2. Аналогично с  $V$ :  $v(t) = \frac{R(t)}{S(t)}$ . Значит,  $U + V$  имеет аффинную координату  $u(t)v(t) = \frac{PR}{SQ}$ , поэтому она является точкой степени 4. А теперь зададимся вопросом: может ли степень точки  $U + V$  быть меньше 4, и если да, то как? Иными словами, как понять, что в выражении  $\frac{PR}{SQ}$  что-то сократилось, и в числителе и знаменателе стоят многочлены степени меньше, чем 4? Заметим следующее. Если  $U$  попала в  $X$ , а точка  $V$  НЕ попала в  $Y$ , то  $U + V = X$ ; аналогично если  $U = Y$ , а  $V \neq X$ , то  $U + V = Y$ ; аналогично если  $V$  попала в  $X$  или в  $Y$ , а  $U$  НЕ попала в  $Y$  или  $X$ . Но что, если вдруг  $U = X$ ,  $V = Y$ ? Что в таком случае происходит с  $U + V$ ? Ведь ее координата должна быть равна  $0 \cdot \infty$  — а это непонятно что. Оказывается, именно в этот момент степень  $U + V$  сбрасывается! Действительно: пусть в момент времени  $t_0$  точка  $U$  попала в  $X$ , а точка  $V$  попала в  $Y$ . Это значит, что  $P(t_0) = S(t_0) = 0$  (т. к.  $t_0$  — это корень рациональной функции  $\frac{P}{Q}$  и полюс рациональной функции  $\frac{R}{S}$ ). Значит,  $P$  и  $S$  кратны  $t - t_0$  по теореме Безу; но это и значит, что в рациональной функции  $\frac{PR}{QS}$  в числителе и знаменателе сокращается линейный множитель, т.е. степень точки сбрасывается. Заметьте, что это рассуждение работает и с точками степеней  $n$  и  $m$ ; надо только аккуратно следить за кратностями и понимать, что значит, что точка в момент времени  $t_0$  посетила точку  $X$  с кратностью  $k$  (это значит, что степень вхождения  $t - t_0$  в многочлен в числителе равна  $k$ ).

Попробуем теперь осознать утверждение предложения при помощи индукции. Рассмотрим, для начала, сумму  $Q_{23} = Q_2 + Q_3$ . В момент времени, когда прямая  $A_2A_3$  совпала с прямой  $XU$ , то одна из точек  $Q_2, Q_3$  стала  $X$ , а другая —  $Y$ . Значит, в этот момент степень  $Q_{23}$  сбросилась. Аналогичное происходит, когда  $A_nA_{n-1}$  совпадает с  $XU$ . Значит, степень  $Q_{23}$  попросту равна 2. Теперь рассмотрим  $Q_2 + Q_3 + Q_4 = Q_{23} + Q_4 = Q_{234}$  — точка степени 4. Хочется опять попытаться сбросить степень этой точки на 2. Для этого заметим, что когда  $A_3A_4$  совпадает с  $XU$ , то одна из точек  $Q_3, Q_4$  заезжает в  $X$ , а другая в  $Y$ ; кроме того,  $Q_2$  — некоторая другая точка прямой  $XU$ . Это означает, что одна из точек  $Q_{23}, Q_4$  находится в  $X$ , а другая в  $Y$ . В этот момент степень  $Q_{234}$  сбрасывается. Аналогичное происходит, когда  $A_{n-1}A_{n-2}$  совпадает с  $XU$ . Таким образом, степень  $Q_{234}$  также равна 2. Ну а дальше, просто будем продолжать рассуждение по индукции до тех пор, пока не дойдем до точки  $Q_2 + \dots + Q_{k+1} = Q_{23\dots k} + Q_{k+1} = Q$ . По предположению индукции, степень  $Q_{23\dots k}$  равна 2. Степень  $Q_{k+1}$  же равна 1. Ну и опять же, просто замечаем, что когда  $A_kA_{k+1}$  или  $A_{k+2}A_{k+3}$  совпадает с  $XU$ ,

то пара  $(Q_k, Q_{k+1})$  совпадает с парой  $(X, Y)$ ; значит, и пара  $(Q_{23\dots k}, Q_{k+1})$  совпадает с парой  $(X, Y)$ , а значит степень сбрасывается. Значит, степень  $Q$  равна 1 — что и требовалось.

Отсюда почти сразу следует утверждение теоремы. И правда:

$$Q = Q_2 + \dots + Q_{k+1} = A_2 + A_3 + \dots + A_n$$

имеет степень 1. Кроме того, нетрудно заметить, что при  $A_1 = X$  имеем  $Q = X$  (ибо в этом случае одна из точек  $Q_2$  и  $Q_{k+1}$  заехала в точку  $X$ , а все остальные НЕ заехали в точку  $Y$ ; поэтому  $Q = X$ ), а при  $A_1 = Y$  имеем  $Q = Y$ . Пусть  $A_1Q$  в какой-то момент времени пересекает  $\mathcal{C}$  в точке  $S$ . Тогда, из проекции  $\mathcal{C}$  на  $XU$  получаем, что точка  $SA_1 \cap XU$  совпадает с  $Q$  в трех положениях, откуда  $A_1Q$  пересекает  $\mathcal{C}$  в фиксированной точке. Отсюда и следует заключение теоремы.

2. Теперь пусть  $n = 2k$ . На самом деле рассуждения будут почти аналогичными со случаем  $n = 2k + 1$ . Опять будем вращать  $A_1$  по  $\mathcal{C}$  проективно. Опять же, по теореме (3.18), прямая  $A_iA_{n+2-i}$  проективно зависит от  $A_1$ . Пусть  $A_iA_{n+2-i}$  пересекает  $XU$  в точке  $Q_i$ . В силу теоремы (1.40), отображение  $A_1 \mapsto A_{k+1}$  — проективная инволюция, поэтому  $A_{k+1}$  также движется проективно. Рассмотрим сумму  $R = Q_2 + \dots + Q_k$ . Мы знаем, что  $Q_i$  имеет степень 2; по рассуждениям, полностью аналогичным случаю  $n = 2k + 1$  (нужно последовательно рассматривать точки  $Q_2, Q_2 + Q_3, Q_2 + Q_3 + Q_4, \dots, R$  и при помощи соображений склейки доказывать, что каждая имеет степень 2 — точно так же, как мы делали в случае  $n = 2k + 1$ ), получаем, что  $R$  также имеет степень 2. Так как  $A_1A_{k+1}$  проходит через фиксированную точку, а  $A_1, A_{k+1}$  проективно двигаются по  $\mathcal{C}$ , то  $A = A_1 + A_{k+1}$  имеет степень 2; имеем  $A + R = \sum_{i=1}^n A_i$ , и хотим показать, что эта точка фиксирована. Точки  $A, R$  имеют степень 2, поэтому  $A + R$  имеет степень 4. Пусть  $A_1 = X$ . Тогда ясно, что  $A = Y$ , а  $R = X$  (т. к.  $R = \sum_{i=2}^k (A_i + A_{n+2-i})$ , и ровно одна из этих  $2k - 2$  точек заезжает в  $Y$ , а остальные НЕ заезжают в  $X$ ), и поэтому в этот момент степень  $Q$  сбрасывается. Таким образом, в положениях  $A_1 = X; Y, A_{k+1} = X; Y$ , степень  $Q$  сбрасывается; значит,  $Q$  — точка степени 0, что и требовалось.

3. Осталось разобрать случай, когда  $X = Y = T$ , т. е.  $XU$  касается  $\mathcal{C}$  в точке  $T$ . Введем аффинные координаты на  $XU$  так, чтобы  $T, O$  имели аффинные координаты  $0, \infty$  соответственно. Тогда, сумма точек с аффинными координатами  $x, y$  равна  $\frac{xy}{x+y}$  — это несложно проверить прямым вычислением.

А теперь заметим следующее. Опять же, пусть точки  $U = u(t), V = v(t)$  движутся по прямой  $XU$  со степенями 2, т. е.  $u(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}, v(t) = \frac{R(t)}{S(t)}$ , где  $P, Q, R, S$  — многочлены степени 2, причем  $(P, Q) = (R, S) = 1$ . Тогда  $U + V$  имеет координату  $\frac{PR}{PS+QR}$ , то есть степень 4. И опять поймем, когда степень  $U + V$  сбрасывается. Легко видеть, что если обе точки заезжают в  $T$  в один момент времени, то степень их суммы сбрасывается. Дальше уже несложно довести решение — это делается так же, как и в предыдущих двух случаях: рассмотрим, к примеру, случай  $n = 2k + 1$ ; введем обозначения из п. 1. Опять будем последовательно рассматривать точки

$Q_2, Q_2 + Q_3, \dots, Q = Q_2 + \dots + Q_{k+1}$ . На каждом шаге будем доказывать, что степени получившейся точки равна 2, а на последнем шаге — что она равна 1. Действительно, покажем, что степень  $Q_2 + Q_3$ , степень которой равна 4, сбрасывается, и в итоге равна 2. И правда: выберем момент, когда  $A_2A_3 = XY$ , и момент, когда  $A_nA_{n-1} = XY$ . Ясно, что в оба эти момента степень сбрасывается; поэтому, степень  $Q_2 + Q_3$  равна 2. Дальше продолжаем аналогичные рассуждения по индукции, и опять приходим к требуемому. Случай  $n = 2k$  аналогичен.  $\square$

Если перевести ARL с языка вырожденной кубики на язык CRL, получим следующее утверждение, крайне нетривиальное с точки зрения евклидовой геометрии.

**Следствие 5.5.** Многоугольник  $A_1 \dots A_n$  вписан в окружность  $\Omega$  и описан около коники  $\gamma$ . Хорда  $XY$  окружности  $\Omega$  касается  $\gamma$ . Тогда величина  $\prod_{i=1}^n f_{XY}(A_i) = \text{const}$  при вращении  $A_1 \dots A_n$  по Понселе.

Обсудим другой подход к ARL. Пусть прямые  $a, b, c$  над  $\mathbb{C}P^2$  пересекаются в точке  $P$ . Заметим, что

$$[a, b; PJ_+, PJ_-] \cdot [b, c; PJ_+, PJ_-] = [a, c; PJ_+, PJ_-].$$

Таким образом, рассматриваемые двойные отношения могут выступать аналогом направленных углов. Сходство усиливается следующим критерием концикличности:

**Утверждение 5.6.** Точки  $A, B, C, D \in \mathbb{C}P^2$  лежат на одной окружности или прямой тогда и только тогда, когда  $[BC, BD; BJ_+, BJ_-] = [AC, AD; AJ_+, AJ_-]$ .

**Доказательство.** Пусть прямые  $AC, AD, BC, BD$  пересекают бесконечно удалённую прямую  $l_\infty$  в точках  $X, Y, Z, T$  соответственно. Концикличность точек  $A, B, C, D$  равносильна тому, что точки  $A, B, C, D, J_+, J_-$  лежат на одной конике, что по теореме Дезарга об инволюции равносильно существованию инволюции на  $l_\infty$ , меняющей местами  $(X, T), (Y, Z)$  и  $(J_+, J_-)$ . Тогда

$$[BC, BD; BJ_+, BJ_-] = [Z, T; J_+, J_-] \stackrel{(*)}{=} [Y, X; J_-, J_+] = [X, Y; J_+, J_-] = [AC, AD; AJ_+, AJ_-],$$

где равенство  $(*)$  равносильно существованию вышеупомянутой инволюции.  $\square$

Комплексным проективным преобразованием переведём точки  $X$  и  $Y$  в круговые точки  $J_+$  и  $J_-$ . Пусть  $P$  — некоторая точка на  $\mathbb{C}$ . Воспользуемся утверждением (5.6) и получим следующие равносильные переформулировки ARL:

**Теорема 5.7 (ARL в форме направлений).** Многоугольник  $A_1 \dots A_n$  на  $\mathbb{C}P^2$  вращается между описанной окружностью  $\Omega$  и вписанной параболой  $\Gamma$ . Тогда:

- (a) сумма направлений  $\sum_{i=1}^n PA_i = \text{const}$ .
- (b) сумма направлений  $\sum_{i=1}^n A_iA_{i+1} = \text{const}$ .

Чтобы осознать равносильность пунктов (a) и (b), достаточно заметить, что  $PA_i + PA_{i+1} = A_i A_{i+1} + t$ , где  $t$  — направление касательной к  $\Omega$  в точке  $P$ .

Но и это ещё не всё. Применим полярное преобразование с центром в  $P$ . Вписанная парабола перейдёт в описанную конику, проходящую через  $P$ , а описанная окружность — во вписанную параболу с фокусом  $P$ . Получим следующие утверждения:

**Теорема 5.8 (Ещё ARL).** Многоугольник  $A_1 \dots A_n$  на  $\mathbb{C}P^2$  вращается между описанной коникой  $\mathcal{C}$  и вписанной параболой  $\Gamma$ , причём фокус  $P$  параболы лежит на  $\mathcal{C}$ . Тогда:

- (a) сумма направлений  $\sum_{i=1}^n PA_i = \text{const}$ .
- (b) сумма направлений  $\sum_{i=1}^n A_i A_{i+1} = \text{const}$ .

Впрочем, в утверждении (5.7) можно сделать полярное преобразование и в фокусе параболы. Получим ещё одну равносильную переформулировку ARL:

**Теорема 5.9 (Больше ARL богу ARL).** Многоугольник  $A_1 \dots A_n$  на  $\mathbb{C}P^2$  вращается между вписанной коникой  $\mathcal{D}$  и описанной окружностью  $\Omega$ , причём один из фокусов  $\mathcal{D}$  (назовём его  $P$ ) лежит на  $\Omega$ . Тогда

- (a) сумма направлений  $\sum_{i=1}^n PA_i = \text{const}$ .
- (b) сумма направлений  $\sum_{i=1}^n A_i A_{i+1} = \text{const}$ .

## 5.2 Приложения ARL

**Задача 65.**

- (a) Треугольник  $ABC$  вращается между описанной коникой  $\mathcal{C}$  и вписанной коникой  $\mathcal{D}$ . Точки  $X$  и  $Y$  таковы, что прямая  $XY$  касается  $\mathcal{D}$ . Докажите, что все коники  $(ABCXY)$  принадлежат одному пучку, одна из вершин которого лежит на  $\mathcal{C}$ .
- (b) Выведите в одну строчку из пункта (a) следующее утверждение: Треугольник  $ABC$  вращается между описанной коникой и вписанной параболой. Тогда описанные окружности всех треугольников  $ABC$  принадлежат одному пучку.

**Доказательство.**

- (a) Пусть касательные из  $X, Y$  к  $\mathcal{D}$ , отличные от  $XY$ , пересекаются в точке  $Z$ . Тогда, так как треугольники  $ABC, XYZ$  описаны около  $\mathcal{D}$ , то по теореме Понселе для треугольника,  $A, B, C, X, Y, Z$  лежат на одной конике. Итак, коника  $(ABCXY)$  всегда проходит через фиксированную точку  $Z$ .

По ARL сумма  $A + B + C$  фиксирована на кубике  $\mathcal{K} = \mathcal{C} \cup XY$ . Значит, сумма  $A + B + C + X + Y$  также фиксирована; следовательно, коника  $(ABCXY)$  пересекает конику  $\mathcal{C}$  в фиксированной точке, откуда и следует требуемое.

- (b) Возьмём в качестве  $X$  и  $Y$  круговые точки.

□

**Замечание.** Попробуем доказать задачу (65b) другим способом. Бросается в глаза сходство с задачей Диомидова и Калашникова — вернее, её образом после полярного преобразования в точке  $P$ . Там по прямой движется точка пересечения медиан, а здесь — центр описанной окружности.

Поскольку окружность  $(ABC)$  проходит через фокус  $F$  параболы, то принадлежность пучку равносильна тому, что центр окружности (= пересечение серединных перпендикуляров к  $FA$ ,  $FB$  и  $FC$ ) движется по прямой. Давайте поступим так же, как в задаче Диомидова и Калашникова, и сделаем полярное преобразование с центром в  $F$ . Вписанная параболы перейдёт в описанную окружность и наоборот. Если внимательно проследить за образами вышеупомянутых серперов, то увидим, что задача (65b) превращается в точности в уже упоминавшуюся на нашем проекте задачу 6 из проекта «Вокруг теоремы Понселе» с ЛКТГ-2014:

**Утверждение 5.10** (Задача 6 из проекта «Вокруг теоремы Понселе» с ЛКТГ-2014). Треугольник  $\Delta$  вращается между описанной окружностью  $\Omega$  и вписанной коникой  $\gamma$ . Докажите, что прямая Симсона фиксированной точки  $P \in \Omega$  относительно  $\Delta$  проходит через фиксированную точку.

Вот вам ещё одна причина подумать на досуге над задачей (55\*\*).

**Задача 66.** Шестиугольник  $ABCDEF$  вращается между описанной окружностью и вписанной коникой. Фиксированная прямая  $m$  касается вписанной коники и пересекает прямые  $AF$ ,  $AB$ ,  $DC$ ,  $DE$  в точках  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $T$  соответственно. Окружности  $(AXY)$  и  $(DZT)$  повторно пересекают описанную окружность в точках  $P$  и  $Q$ . Тогда прямая  $PQ$  проходит через фиксированную точку, лежащую на прямой  $m$ .

**Доказательство.** Рассмотрим кубику «описанная окружность + прямая  $m$ ». Согласно утверждению (4.8),  $X + Y + A + P = Z + T + D + Q = O$ . Следовательно,

$$P + Q = -(X + Y + Z + T + A + D) = (A + F) + (A + B) + (C + D) + (D + E) - A - D = \\ A + B + C + D + E + F \stackrel{ARL}{=} \text{const},$$

а тогда точка пересечения прямых  $PQ$  и  $m$  фиксирована.  $\square$

**Задача 67.** Пусть  $ABCD$  — четырехугольник Понселе, вписанный в конику  $\mathcal{C}$  и описанный около коники  $\mathcal{D}$ . Пусть  $X$  — произвольная точка плоскости. Докажите, что коники  $(ABCDX)$  образуют пучок.

**Доказательство.** Пусть  $\ell_1, \ell_2$  — касательные из  $X$  к  $\mathcal{D}$ . Тогда по ARL сумма  $A + B + C + D + X$  на кубиках  $\mathcal{K}_1 = \mathcal{C} \cup \ell_1$ ,  $\mathcal{K}_2 = \mathcal{C} \cup \ell_2$  фиксирована. Значит, существуют такие точки  $Y$  на  $\ell_1$  и  $Z$  на  $\ell_2$ , что  $A, B, C, D, X, Y, Z$  — одна коника. Осталось понять, что если вторые касательные их  $Y$  и  $Z$  к  $\mathcal{D}$  пересекаются в точке  $T$ , то  $T$  лежит на конике  $(ABCDXYZ)$  по теореме Понселе

для четырёхугольника. □

**Задача 68\*** (Ол. Шарыгина 2025, финал, 10.9). Четырёхугольник  $ABCD$  описан около окружности с центром  $I$ . Пусть  $L$  — точка пересечения диагоналей четырёхугольника а  $X, Y$  такие точки, что  $LI = LX = LY$ ,  $\angle XLI = \angle YLI = 90^\circ$ . Докажите, что точки  $A, B, C, D, X$  и  $Y$  лежат на одной равнобокой гиперболе.

**Доказательство 1.** Построим равностороннюю гиперболу  $ABCD$  и будем вращать четырёхугольник по Понселе между ней и вписанной окружностью. Точки  $L, I, X, Y$  при этом не меняются, так что достаточно доказать утверждение задачи для какого-то одного положения. Когда  $A$  попадает в точку пересечения окружности и гиперболы,  $C$  попадает в другую общую точку, а  $B$  и  $D$  совпадают, причем  $BA$  и  $BC$  касаются окружности, а ее центр симметричен ортоцентру  $H$  треугольника  $ABC$  относительно  $AC$ . Если двигать точку  $L$  по  $AC$ , то  $X$  и  $Y$  движутся по двум прямым, проходящим через  $H$  и находятся на равном расстоянии от  $AC$ . Докажем, что при любом их положении  $ABCDX$  — равносторонняя гипербола. Это можно сделать теоремой Паскаля, но проще рассмотреть пучок гипербол  $ABCH$  и вторые точки их пересечения с прямыми, по которым движутся  $X, Y$ . Очевидно, что соответствие между этими точками проективно и для трех вырожденных гипербол точки лежат на равном расстоянии от  $AC$ . Значит, это выполнено всегда. Аналогично получаем, что прямая  $BL$  касается гиперболы, как и должна. □

**Доказательство 2.** Проведём произвольную конику  $\Gamma$  через  $A, B, C$  и  $D$ . Пусть прямая  $XY$  пересекает эту конику в точках  $P$  и  $R$ . В силу поризма Понселе существует четырёхугольник  $PQRS$ , вписанный в  $\Gamma$  и описанный вокруг окружности (назовём её  $\omega$ ), причём  $L$  — его точка пересечения диагоналей. Применяя ТДИ для пучка коник  $(\Gamma, \omega, L)$ , заключаем, что  $L$  — середина отрезка  $PR$ . Это значит, что  $PQRS$  — дельтоид, и  $I$  лежит на  $QS$ . Как мы знаем, все коники  $(ABCDX)$  проходят помимо  $X$  ещё через три фиксированные точки. Две из них строятся так: проводятся касательные из  $X$  к  $\omega$  и пересекаются с произвольной коникой (мы выберем вырожденную конику  $PQRSX$ ). Четвёртая же точка дополняет  $X$  и найденные две до четырёхугольника Понселе. Из вышесказанного и соображений симметрии следует, что  $Y$  и будет искомой четвёртой фиксированной точкой всех коник  $ABCDX$ .

Теперь осталось показать, что эти коники являются равносторонними гиперболами. Для этого достаточно проверить, что четыре фиксированные точки из предыдущего абзаца образуют ортоцентрическую четвёрку. Это доказывается несложным счётом углов. □

Следующий факт, обобщающий задачу (42\*), был обнаружен и доказан участниками конференции. Обратите внимание на явное сходство с угловыми переформулировками ARL.

**Задача 69.** Многоугольник  $A_1 \dots A_n$  вращается между вписанной коникой  $\gamma$  с фокусами  $P, Q$  и описанной окружностью  $\Omega$ . Докажите, что:

(a\*) (П. Ким, Р. Кравченко)  $\sum_{i=1}^n \angle PA_i A_{i+1} = \text{const.}$

(b\*) (П. Ким)  $\prod_{i=1}^n \frac{PA_i}{QA_i} = \text{const.}$

### Доказательство.

(а) Данное решение принадлежит Роману Кравченко. Вложим нашу плоскость в  $\mathbb{C}P^2$ . Пусть прямые  $J_+P$ ,  $J_-P$  и  $A_iP$  повторно пересекают  $\Omega$  в точках  $X_+$ ,  $X_-$  и  $K_i$  соответственно, а  $W \in \Omega$  — произвольная точка. Будем писать обобщённые CR-функции относительно точки  $W$  (и разных базисных хорд). Согласно проективной CRL,

$$\begin{aligned} \text{const} \cdot f_{J_+X_+}(A_i)^{-2} \cdot f_{J_-X_-}(A_i)^2 &= f_{J_+X_+}(A_i)^{-1} \cdot f_{J_-X_-}(A_i) \cdot f_{J_+X_+}(K_i) \cdot f_{J_-X_-}(K_i)^{-1} = \\ [K_i, A_i; J_+, X_+] \cdot [A_i, K_i; J_-, X_-] &= [K_i, A_i; J_+, J_-] \cdot [A_i, K_i; X_+, X_-] \stackrel{P}{=} [K_i, A_i; J_+, J_-]^2. \end{aligned}$$

Из ARL следует, что произведение левых частей по всем  $i$  постоянно; следовательно,  $\prod_{i=1}^n [K_i, A_i; J_+, J_-]^2 = \text{const}$ , а тогда и без квадратов тоже в силу непрерывности. Вспомогательная лемма (5.6), заключаем, что  $\sum_{i=1}^n \angle A_{i-1}A_iP = \text{const}$ .

(б) Данное решение принадлежит Петру Киму. Докажем оба пункта сразу. Интерпретируем исходную плоскость  $\alpha$  как проективную плоскость  $\mathbb{R}P^2$  и будем считать, что она естественным образом вложена в проективное пространство  $\mathbb{C}P^2$  с помощью отображения  $i$ . Также рассмотрим проективную прямую  $\beta \simeq \mathbb{C}P^1$ , задающуюся уравнением  $y = 0$ . Рассмотрим отображение  $f: \Omega \rightarrow \beta$ , определённое формулой  $[x : y : z] \mapsto [x + iy : 0 : z]$ . Нетрудно проверить, что точки  $J_+$ ,  $A$  и  $f(A)$  лежат на одной прямой для любой точки  $A \in \Omega \subset \alpha$ , т.е. наше отображение является центральной проекцией из круговой точки; в частности, оно сохраняет двойные отношения. Кроме того, поскольку  $\Omega$  — вещественная окружность, то композиция  $f \circ i: \alpha \rightarrow \beta$ , неформально выражаясь, «тождественно» на конечной части, поэтому в дальнейшем мы позволим себе вольность и будем отождествлять эти точки. Пусть  $P_0, Q_0 \in \Omega$  — прообразы точек  $P, Q \in \beta$  при отображении  $f$ . Прямые  $J_+P_0$  и  $J_+Q_0$  касаются  $\gamma$ . Таким образом, хорда  $P_0Q_0$  является композицией двух шагов Понселе, а тогда по следствию (5.3) из ARL произведение  $\prod_{i=1}^n [A_i, W; P, Q] = \text{const}$  ( $W$  — произвольная точка на  $\Omega$ ). Если теперь спроецировать всё обратно на  $\beta$ , то получим, что  $\prod_{i=1}^n [A_i, f(W); F_1, F_2] = \text{const}$ , т.е.  $\prod_{i=1}^n \frac{a_i - f_1}{a_i - f_2} = \text{const}$  (строчными буквами обозначены комплексные координаты соответствующих точек), откуда следует требуемое. □

Приглашаем вас найти новые приложения ARL.

## Список литературы

- [1] А. В. Акопян, А. А. Заславский *Геометрические свойства кривых второго порядка* // М. МЦНМО: 2007
- [2] Д. Бродский *Движение точек* // Летняя конференция турнира городов, 2022
- [3] А. Л. Городенцев *Геометрия* // Москва, 2017
- [4] Е. Диомидов, А. Заславский, В. Калашников, П. Кожевников, Г. Челноков *Вокруг теоремы Понселе* // Летняя конференция турнира городов, 2014
- [5] А. Заславский, Д. Косов, М. Музафаров. *Траектории замечательных точек треугольника Понселе* // Квант, №2 (2003), стр. 22–25
- [6] В. В. Прасолов, Ю. П. Соловьев. *Эллиптические функции и алгебраические уравнения*. М.: Факториал, 1997
- [7] В. Протасов *Два века теоремы Понселе* // Квант, №5–6 (2014), стр. 2–12
- [8] М. Сидоренко *Clawson Conjugates* // [t.me/geometry\\_ukraine/893](https://t.me/geometry_ukraine/893)
- [9] А. Уткин *Изогональное сопряжение в четырехугольнике* // Квант, №2 (2019), стр. 37–42
- [10] И. Р. Шафаревич *Основные понятия алгебры* // М., 1985
- [11] mira74 *Ratio lemma* // <https://artofproblemsolving.com/community/q1h2357938p19166714>
- [12] TelvCohl's geometry blog // <https://artofproblemsolving.com/community/c284651>

# Poncelet Invariants

in the light of

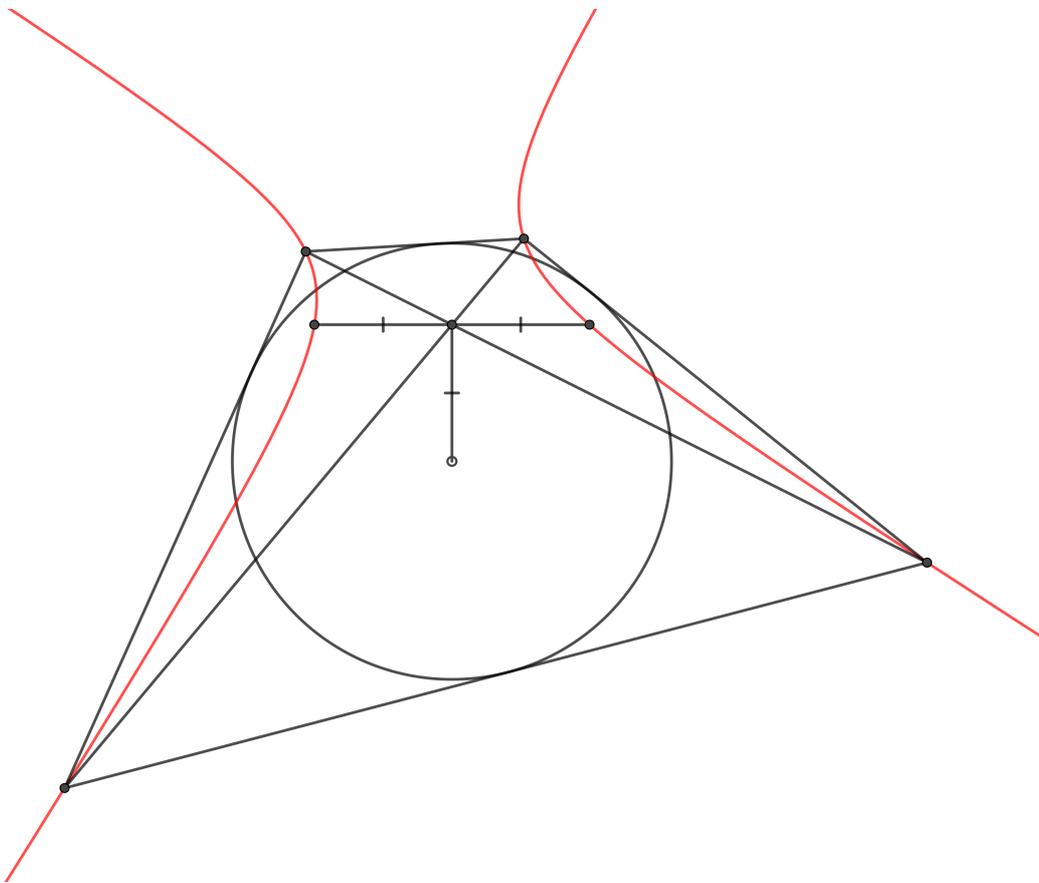
## Cool ratio lemma

*Authors of the project*

Y.E. Nagumanov, S.M. Kuznetsov, L.P. Gorbunov, A.A. Zaslavsky

*Presented by*

S.M. Kuznetsov, L.P. Gorbunov, A.A. Zaslavsky, P.V. Bibikov, P.A. Kozhevnikov



Summer conference of the International mathematical Tournament of towns

2025

# Table of contents

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Necessary information</b>	<b>5</b>
1.1 Projective geometry	5
1.2 Conics	7
1.3 Euclidean opinion about the conics	10
1.4 Isogonal conjugation in the quadrilateral	11
1.5 Projective involutions	12
1.6 The Clawson conjugation	12
1.7 Classical proof of the Poncelet theorem	13
<b>2 Cool ratio lemma</b>	<b>15</b>
2.1 Definitions and first CRL	15
2.2 CRL helps to prove the concyclicity	17
2.3 Generalized Cool Ratio Lemma	19
2.4 The liaison of CRL with classical metric theorems	19
<b>3 Euclidean invariants of the Poncelet theorem</b>	<b>22</b>
3.1 The Clawson conjugation and the Skutin lemma	22
3.2 Liaison with polar correspondence	24
3.3 The Laguerre theorem	25
3.4 Latent Poncelet. Part 1	26
3.5 The latent Poncelet. Liaison with isogonal conjugation	27
3.5.1 The orthocenter power lemma	28
3.5.2 The Aiyer theorem	29
3.5.3 Problem 10.4 from the last Sharygin olympiad	29
3.6 Around classical proof of the Poncelet theorem	29
3.7 Different	31
3.7.1 The Poncelet broken lines	32

## Introduction

The Poncelet theorem is one of facts of projective algebraic geometry. This famous theorem is an example of closing theorems, when some process of constructing of new points by drawing several lines is periodic. The theorem has many different proofs, variants, and generalizations. In spite of its notoriety, this theorem presents a very difficult fact, which can be proved by many different substantial ways. The most known synthetic proof using the pencils of circles can be found in [1], and the analytic proof using the density function in [8].

All scholars advanced in geometry hear about the Poncelet theorem at least one time. Some of them know several proofs of the theorem, and the most advanced know the different invariants appearing in Poncelet rotation. For example the common point of diagonals of the Poncelet quadrilateral is fixed... The construction of the theorem is very deep, and allows to found new results, some of them are very complicated and substantial. One of such results was found and proved by the authors of the project, and we will lead to it through the subjects which seem not connecting with the project. Note also that many proofs of the Poncelet theorem have one defect — they use euclidean notions of segments and angles. In the project we will use euclidean, projective, and algebraic reasoning, and consider the Poncelet invariants on the different hands.

Such euclidean instrument as cool ratio lemma (CRL) doesn't seem connecting with the Poncelet theorem. This lemma was formulated for the first time in the paper [11], published in 2020 on the known site aops.com. At first sight this is a simple calculating instrument. But the detail considering allows to discover some projective properties of CRL and its liaison with the addition of points on a cubic curve. It is shown that CRL remember the cross-ratios and has a deep nature connecting with the notion of *divisor* of the cubic, or, more exactly, its analog for the degenerated cubic. We will not submerge in this theory, but the advanced readers can think about the description of CRL in the terms of the analog of the divisor.

Also note that in the first five paragraphs of the project we will not work with non-degenerated cubics, hence we don't suppose any knowledge in this region from the participants.

But the main — in process of thinking about one problem formulated 11 years ago and solved recently by the authors, a complicated, nice theorem connecting connecting CRL and the Poncelet theorem was found.

In the project we will understand, what is CRL and how use it , prove the Poncelet theorem, and discuss their mysterious liaison. Also we will make a deep submerge in the world of euclidean Poncelet:

- formulate and prove new or few known invariants;
- educate the connection of the Poncelet theorem with the Clawson conjugation;
- find the (probably) new proof of the known Aiyer theorem;
- discuss the using of the Poncelet theorem in the problems which seem not connecting with it;

- present the new method of solving some problems using the latent Poncelet and basing on the rotation of the triangle around some conic, not given in the problem. This method allows to solve many difficult olympiad problems (for example 10.4 of Sharygin olympiad, 2025);
- and many other...

This is not the first appearing of the Poncelet theorem in the Summer conference. The project was dedicated to it in 2014 [4]. Our project is completely independent, hence the knowledge of the previous project is not necessary. But the most motivated participants can see the 2014 year project for the deep submerge into the atmosphere of the Poncelet theorem.

**The structure of the project is the following:**

The parts 1, 2, and 3 are given at the beginning of the Conference, and the parts 4, 5 after the intermediate finish.

The part 1 contains all necessary theoretic base. Since the project contains several different parts, the materials of paragraph 1 are also different by the themes and the difficulty. This has not to fright you. You can miss this paragraph and return to it when it is necessary.

In the part 2 we discuss in detail the cool ratio lemma and its applying in the olympiad problems, and in the part 4 we consider the projective nature of CRL and its liaison with the addition of points on the degenerated cubic. These two paragraphs are not connected with the Poncelet theorem, hence you can solve them, even if you are not interested to think about the remaining parts of the project.

The part 3 is dedicated to different invariants of the Poncelet theorem and its applying in the olympiad problems.

In the part 5 we demonstrate the liaison between the cool ratio lemma and the Poncelet theorem. We formulate and prove a complicated and very nice result at the joint of these two worlds, and consider several examples of its using.

Finally, in the additional paragraph we present three few known proofs of the Poncelet theorem. Two of them use the addition of points on the cubic and/or the exit into the space. The third, more algebraic proof of the theorem and some connected facts will be presented as the sequence of problems for the most advanced readers.

# 1 Necessary information

This paragraph contains necessary definitions of notions which will be used and important facts about these notions. We concentrate on the assertions and the constructions of the projective geometry, because the projective language will be actively used later. The assertions of these paragraph may be used without proof, but you may discuss with the tutor the facts which are not known to you.

## 1.1 Projective geometry

There we cite necessary facts of projective geometry. We restrict by the dimensions 1 and 2.

**Definition 1.1.** Let  $O$  be an arbitrary point of the plane. *The pencil of lines  $\mathcal{L}_O$  centered at  $O$  is the set of all euclidean lines passing through  $O$ .*

Consider the pencil  $\mathcal{L}_O$  and an arbitrary line  $\ell$ , not passing through  $O$ . Then all lines of pencil  $\mathcal{L}_O$ , except one, intersect  $\ell$ . Thus we obtain the correspondence between the points of  $\ell$  and the lines of  $\mathcal{L}_O$ . This motivates the following

**Definition 1.2.** *The projective line is an arbitrary pencil of lines  $\mathcal{L}_O$ . Any line of this pencil is called a projective point. If  $\ell$  is an arbitrary euclidean line, not passing through  $O$ , then the projective point  $J \in \mathcal{L}_O$ , corresponding to the line parallel to  $\ell$ , is called the infinite point of  $\ell$ . Allowing some liberty we will say that the euclidean line  $\ell$  is completed by the infinite point  $J$ .*

Now define the cross-ratio of four projective points on a projective line. Let  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ , and  $\ell_4$  be four projective points corresponding to four euclidean lines of the pencil  $\mathcal{L}_O$ .

**Definition 1.3.** *The cross-ratio of the quadruple of projective points  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  и  $\ell_4$  is the number*

$$[\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4] = \frac{\sin \angle(\ell_1, \ell_3)}{\sin \angle(\ell_2, \ell_3)} : \frac{\sin \angle(\ell_1, \ell_4)}{\sin \angle(\ell_2, \ell_4)}.$$

If the pencil  $\mathcal{L}_O$  is intersected by a line  $\ell$ , then the lines  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ , and  $\ell_4$  strike on  $\ell$  points  $A, B, C$ , and  $D$  respectively. We obtain that  $[\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4] = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$ . This allows to define the cross-ratio on the euclidean line.

**Definition 1.4.** *The cross-ratio of four collinear points  $A, B, C, D$  is the number  $[A, B; C, D] = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$ . The quadruple  $A, B, C, D$  is called a harmonic quadruple, if  $[A, B; C, D] = -1$ .*

It is convenient to consider a projective line as a usual euclidean line completed by the infinite point  $J$ . Then for example a quadruple  $A, B, M, J$  is harmonic, if  $M$  is the midpoint of segment  $AB$ .

The following fact is an important property of cross-ratio: if  $[A, B; C, D_1] = [A, B; C, D_2]$ , then  $D_1 = D_2$ . Thus the cross-ratio is the analog of the euclidean distance, but this projective «distance» is measured with respect to three points.

**Definition 1.5.** Let  $\ell_1$  and  $\ell_2$  be projective lines. A map  $f: \ell_1 \rightarrow \ell_2$  is called *projective*, if it conserves cross-ratios, i.e. for any quadruple  $A, B, C, D$  we have  $[A, B; C, D] = [f(A), f(B); f(C), f(D)]$ .

**Theorem 1.1.** Any projective map of a line to itself is uniquely defined by the images of three points. I.e., for any points  $A, B, C, A', B',$  and  $C'$  there exists a unique projective map  $f$ , such that  $f(A) = A', f(B) = B'$  and  $f(C) = C'$ .

Now remember the notion of the projective plane. Consider a pencil of lines in the space, i.e. the set of lines passing through the fixed point  $O$ . Such set of lines is called *the projective plane*. Each line passing through the fixed point is called *a projective point*, and each plane passing through this point is called *a projective line*. Note that this definition is concorded with the definition given above of the projective line as a pencil of lines on the plane. If we take an usual plane  $\alpha$  not passing through the center  $O$  of the pencil, then each projective point and projective line strike an usual point and a usual line respectively on it. All projective points not intersecting  $\alpha$  are called *infinite* and lie on *the infinite projective line*  $\alpha_\infty$ .

Sometimes the analytic view to the projective points and lines can be useful. Fix on the space a coordinates system  $Oxyz$  with the origin at the center  $O$  of our pencil. Compare each projective point with the direction vector of the corresponding euclidean line. Since this vector is defined with exactness to a non-zero coefficient, The coordinates of a projective point are also defined with exactness to multiplying into a non-zero constant. Such coordinates are called *homogeneous* and are denoted by  $(x : y : z)$ . If the plane  $\alpha$  are defined in the coordinates system  $Oxyz$  by the equation  $z = 1$ , then the projective point  $(x : y : z)$  strike on it the point with euclidean coordinates  $(x, y)$ , and the infinite projective line  $\alpha_\infty$  is defined by the equation  $z = 0$ .

Similarly each projective line is defined by an equation  $ax + by + cz = 0$  and can be given by the numbers  $a, b,$  and  $c$ . But this triplet of numbers (Which are the coordinates of the normal vector of this plane) is also defined with exactness to a non-zero coefficient. Hence our plane (and therefore projective line) corresponds to the triplet of homogeneous coordinates  $(a : b : c)$ . The point  $(x : y : z)$  lies on the plane  $(a : b : c)$  if and only if  $ax + by + cz = 0$ .

Note the equivalency of coordinate descriptions of projective points and lines. This equivalency can be formalized by the following assertion (*the projective duality*).

**Theorem 1.2 (The projective duality).** If some assertion of the projective geometry is correct, then the dual assertion obtained the replacing of any word «point» to «line» and any word «line» to «point» is also correct.

Remember now the notion of projective map of the projective plane.

**Definition 1.6.** A *projective map of the projective plane* is a map transforming all projective lines to projective lines.

Projective maps can be defined in the homogeneous coordinates by the following way. Consider a *linear map* of the space, i.e. a map transforming the coordinates of each point linearly:

$$(x, y, z) \mapsto (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z),$$

where  $a_{ij}$  are some real numbers. This map generates the projective map transforming the homogeneous coordinates by the following way:

$$(x : y : z) \mapsto (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z : a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z : a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z).$$

The euclidean coordinates on the plane  $\alpha$  are transformed, similarly to the case of the projective line, by fractionally linear formulas:

$$(x, y) \mapsto \left( \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \right).$$

There exists also the theorem allowing to define a projective map of the projective plane by the images of several points.

**Theorem 1.3.** For any two quadruples of points in general position  $(A, B, C, D)$  and  $(A', B', C', D')$  there exists a unique projective map transforming the first quadruple to the second one.

## 1.2 Conics

We remember in this paragraph the main notions connected with *the conics*. It is important that our main object is the projective plane (although the conics on the euclidean plane can also be considered in the problems), hence we need to give the definition of conics connected with the projective geometry, on the other hand it has to be formulated without previous preparation. Such definition is the following.

**Definition 1.7.** A *conic  $\mathcal{C}$  on the plane* is the set of zeros of a polynomial  $F \in \mathbb{R}[x, y]$  with degree 2 on variables  $x$  and  $y$ .

Depending on the polynomial  $F$  we can obtain *degenerated conics* (corresponding to reducible polynomials and presented by pairs of lines) and *non-degenerated conics* (corresponding to irreducible polynomials, which can be ellipses, hyperbolas, or parabolas). Later, if the converse is not indicated, we consider only non-degenerated conics.

Conics can be considered not only on the usual plane, but on the projective one. On the geometrical point of view this means, that we have to exit into the plane and to pass the line through a fixed point

and all points of the given conic. As a result we obtain *the projective conic*  $\widehat{\mathcal{C}}$ , which is in fact the cone generated by the given conic. It is not convenient to work with such object (Can you inscribe a triangle into such conic?..). Hence the analytic language, not demanding a geometric description will be useful here. Since an equation  $F(x, y) = 0$  on the usual plane give some condition for the coordinates  $(x, y)$ , we have to obtain the condition for the homogeneous coordinates  $(x : y : z)$  on the projective plane. We obtain this by the following way. Let the conic  $\mathcal{C}$  is defined by the polynomial  $F(x, y)$ , i.e.  $\mathcal{C} = \{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ . Replace  $F(x, y)$  to the homogeneous polynomial  $\widehat{F}(x, y, z) = z^2 F(x/z, y/z)$  on three variables. The set of zeros of  $\widehat{F}(x, y, z)$  is the projective conic  $\widehat{\mathcal{C}}$ :  $\widehat{\mathcal{C}} = \{(x, y, z) \neq (0, 0, 0) : \widehat{F}(x, y, z) = 0\}$ .

Later we will use the same designation for euclidean and corresponding projective conics. It will be clear from the context, do we consider the conic in the euclidean or the projective geometry.

Not also the following assertion:

**Statement 1.8.** A projective map of a circle is a conic, conversely, an arbitrary conic can be obtained as a projective map of a circle.

The first part is clear because a projective map do not increase the degree of the polynomial. The second one can also be proved by algebraic methods.

Sometimes the disposition of the conic with respect to the infinite line  $\ell_\infty$  will be important.

**Definition 1.9.** An *ellipse* not intersecting the infinite line. A *hyperbola* is a conic meeting the infinite line at two different points. Finally, a *parabola* touching the infinite line.

**Theorem 1.4.** Any five points in general position define a unique conic passing through them. Any 5 lines in general position define a unique conic touching them.

The notion of cross-ratio also can be defined on the conic.

**Definition 1.10.** Let  $A, B, C, D$  be four points on the conic  $\mathcal{C}$ . *The cross-ratio*  $[A, B; C, D]$  is the cross-ratio of lines  $[XA, XB; XC, XD]$ , where  $X$  is an arbitrary point of the conic, distinct from  $A, B, C$ , and  $D$ .

The correctness of this definition can be proved by the following way. Transform the conic  $\mathcal{C}$  into a circle by some projective map. This map conserve the cross-ratio, hence it is sufficient to prove the correctness for circles. And this is simple (we can use the equalities of inscribed angles or, applying an inversion, reduce the problem to the cross-ratio of collinear points).

This yields the following important assertion.

**Theorem 1.5** (The Sollertinsky lemma). Let  $\mathcal{L}_O$  be a pencil of lines, and  $f$  be the projective map of the plane. Denote by  $\mathcal{L}_{O'}$  the image of  $\mathcal{L}_O$  about  $f$ . Consider for each line  $\ell \in \mathcal{L}_O$  the common point of  $\ell$  and  $f(\ell)$ . Then the locus of these points is a conic passing through  $O$  and  $O'$ .

**Remark.** If  $f(OO') = OO'$ , the conic is the union of the line  $OO'$  and some other line.

Since the cross-ratio of four points is correctly defined on the conic, all facts about cross-ratios formulated above for lines are also correct for conics. For example a projective map of a conic to itself is uniquely defined by the images of three points. Really a conic is isomorphic to a line as a projective manifold.

Consider now the notions of pole and polar with respect to the conic. Again we will use an analytic definition. (This definition can be unusual for you, hence you can consider the poles and the polars applying the standard approach: using complete quadrilaterals, tangents and harmonic quadruples. But the analytical definition has several advances, thus it is useful to know it).

**Definition 1.11.** Let  $\mathcal{C}$  be the conic defined by the equation  $q(v) = 0$ , and  $u$  be an arbitrary vector. Consider *the bilinear form*  $Q(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}$  (in fact this strange formula contains the formula of square of sum). Two vectors  $u$  and  $u'$  are called *conjugated with respect to  $\mathcal{C}$* , if  $Q(u, u') = 0$ . For any fixed vector  $u$  the set of all conjugated vectors  $u'$  is called *the polar* of the point corresponding to  $u$ .

Note that the equation of the polar is  $Q(u, v) = 0$ , where  $Q$  and  $u$  are fixed. Thus it is linear on  $v$ , i.e. the polar is some projective line. Conversely, let  $\ell$  be an arbitrary projective line. Choose two non-collinear vectors  $v_1$  and  $v_2$  on it (i.e. two different projective points). Then there exists a unique (with exactness to the non-zero coefficient) vector  $u$ , such that  $Q(u, v_1) = Q(u, v_2) = 0$ : vector  $u$  corresponds to the common point of the polars of  $v_1$  and  $v_2$ . This point is called *the pole of line  $\ell$* .

Thus the conic  $\mathcal{C}$  define the correspondence between the points and the lines: each point corresponds to its polar, and each line corresponds to its pole. Such correspondence is called *polar*.

The image of the infinite line  $\ell_\infty$  about the polar correspondence with respect  $\mathcal{C}$ , is the point called *the center of the conic  $\mathcal{C}$* .

Note the following classical fact.

**Theorem 1.6** (The duality principle). Let  $\mathcal{C}$  be an arbitrary conic,  $A$  and  $B$  be arbitrary points,  $a$  and  $b$  be their polars. Then  $A$  lies on  $b$  if and only if  $B$  lies on  $a$ .

This assertion clearly follows from the symmetry of  $Q$ :  $Q(u, v) = Q(v, u)$ .

**About the complex word.** All notions considered above can be defined similarly for the complex numbers (really for an arbitrary field). We can define the complex projective line  $\mathbb{C}P^1$ , the complex projective plane  $\mathbb{C}P^2$ , the notions of conics, polars, projective maps, etc; the question is, how define the cross-ratio. We will not give the details of this theme — you can find them in [3]. We have to understand the cross-ratio as a function on four variables, which change similarly to the real case when the variable are rearranged, and is conserved by the projective maps and polar transformations. Also  $\mathbb{C}P^1$  can be considered as a sphere — in fact we completed the plane by one point, thus the complex projective line can be obtained as the stereographic projection of the sphere to the plane. It is convenient to consider the complex projective plane because any 2 conics on it have 4 common points, any conic has 2 points

with any line, and any circle passes through 2 fixed points with homogeneous coordinates  $\mathcal{J}_+(1 : i : 0)$  and  $\mathcal{J}_-(1 : -i : 0)$ , they are called *circular points*. And we can present this as usually. You can see the details in [2].

The following theorem allows to reduce some assertion about conics to the case of two circles:

**Theorem 1.7.**

- (a) Any two conics on  $\mathbb{C}P^2$  may be transformed into two circles by some projective map.
- (b) If two conics on  $\mathbb{R}P^2$  have at most two common point (calculating their divisibility), they can be transformed into two circles by some real projective map.

### 1.3 Euclidean opinion about the conics

Sometimes it is useful to consider the conics from euclidean point of view. Discuss briefly this opinion. Detailed information can be found in [1] (chapters 1 and 3.2).

**Definition 1.12.** Let points  $P, Q$  and a real number  $k > |PQ|$  be given. *Ellipse* with foci  $P$  and  $Q$  is the locus of points  $A$ , such that  $AP + AQ = k$ .

**Definition 1.13.** Let points  $P, Q$  and a real number  $k \in (0, |PQ|)$  be given. *Hyperbola* with foci  $P$  and  $Q$  is the locus of points  $A$ , such that  $|AP - AQ| = k$ .

**Definition 1.14.** Let a point  $F$  and a line  $\ell$  be given. *Parabola* with focus  $F$  and directrix  $\ell$  is the locus of points  $A$ , such that  $AF = \text{dist}(A, \ell)$ .

In some sense we can think, that the parabola has second infinite focus. It is not difficult to prove that these definitions are equivalent to the given in subsection (1.2) ones. We will not to consider the details.

The following simple properties are very important. Tare an attention to the case of the parabola — our non-formal reasoning about its second infinite focus obtains there a new development.

**Statement 1.15** (Optical property of conics).

- (a) Let a point  $A$  lie on the conic with foci  $F_1$  and  $F_2$ . Then the tangent to the conic at  $A$  is the bisector (external for the ellipse, internal for the hyperbola) of angle  $F_1AF_2$ .
- (b) Let a point  $A$  lie on the parabola with focus  $F$  and directrix  $\ell$ . The line  $m$  passes through  $A$  and is perpendicular to the directrix. Then the tangent to the parabola at  $A$  bisects the angle between  $AF$  and  $m$ .

**Statement 1.16** (Isogonal property of conics).

- (a) Let a point  $A$  lie outside the conic with foci  $F_1$  and  $F_2$ . Then the tangents from  $A$  to the conic are isogonals with respect to the angle  $F_1AF_2$ .

(b) Let a point  $A$  lie outside the parabola with focus  $F$  and directrix  $\ell$ . The line  $m$  passes through  $A$  and is perpendicular to the directrix. Then the tangents from  $A$  to the parabola are isogonals with respect to the angle between  $AF$  and  $m$ .

### Corollary 1.17.

- (a) Let the conic with foci  $F_1$  and  $F_2$  touche the sidelines of the triangle  $ABC$ . Then  $F_1$  and  $F_2$  are isogonally conjugated with respect to the triangle  $ABC$ .
- (b) Let the parabola with focus  $F$  and directrix  $\ell$  touche the sidelines of the triangle  $ABC$ . Then  $F$  lies on the circumcircle of the triangle  $ABC$ , and  $\ell$  passes through its orthocenter.

Discuss the liaison of the conics and the polar correspondence.

**Theorem 1.8.** Let a point  $O$  and a circle  $\gamma$  be given. Then the image of  $\gamma$  with respect to the polar correspondence about an arbitrary circle centered at  $O$  is a conic with one of foci coinciding with  $O$ . If  $O$  lies inside  $\gamma$ , this conic an ellipse, If  $O$  lies outside  $\gamma$  it is a hyperbola, and if  $O$  lies on  $\gamma$ , it is a parabola. Conversely: if  $F$  is the focus of a conic  $\Gamma$ , then the image of  $\Gamma$  with respect to a polar correspondence centered at  $F$  is a circle.

## 1.4 Isogonal conjugation in the quadrilateral

**Definition 1.18.** The points  $P$  and  $Q$  are called *isogonally conjugated with respect to the polygon*  $A_1A_2 \dots A_n$ , if the directions from each vertex of the polygon to these points are isogonal with respect to the corresponding angle.

**Theorem 1.9.** Let a quadrilateral (or, generally, closed quadrilateral broken line)  $ABCD$  and a point  $P$  be given. Then the following assertion are equivalent:

- (a) There exists a point  $Q$ , isogonally conjugated to  $P$  with respect to  $ABCD$ .
- (b)  $\angle APB = \angle DPC$
- (c) The projections of  $P$  to the sidelines of the quadrilateral are concyclic or collinear.
- (d) There exists a conic with focus  $P$ , touching the sidelines of the quadrilateral.

**Remark.** Take an attention, in (c) the projections can be not only concyclic, but collinear. There exists exactly one point, such that its projections are collinear — the Miquel point. Formally this is not a contradiction: using the simple count of angles we can see, that there exists a point isogonally conjugated to the Miquel point, this point is infinite. How find the direction to this point? We obtain the answer from the following theorem:

**Theorem 1.10.** The Miquel point of the quadrilateral is isogonally conjugated to the infinite point of its Gauss line.

You can read the proof of the theorem (1.9) and to make a detailed acquaintance with the isogonal conjugation in the quadrilateral in [9].

## 1.5 Projective involutions

**Definition 1.19.** *The involution* is a map  $f : M \rightarrow M$  from an arbitrary set  $M$  to itself, such that  $f \circ f = \text{id}$ . I.e,  $f(f(x)) = x$  for any  $x \in M$ . If the cross-ratio is defined on  $M$  (for example, if  $M$  is a projective line, a pencil of lines, or a conic), then it is possible that  $f$  conserves the cross-ratios (i.e. for any different  $a, b, c, d \in M$  we have  $[a, b; c, d] = [\varphi(a), \varphi(b); \varphi(c), \varphi(d)]$ ). In this case  $f$  is called *the projective involution*.

**Statement 1.20.** Two projective involutions coinciding on two pairs of elements are equal.

**Proof.** Let  $\varphi$  and  $\psi$  be projective involutions,  $\varphi(a) = \psi(a) = b$ ,  $\varphi(c) = \psi(c) = d$ ,  $\varphi(x) = y$ ,  $\psi(x) = z$ . Then  $[a, b; c, y] \stackrel{\varphi}{=} [b, a; d, x] \stackrel{\psi}{=} [a, b; c, z]$ , which yields that  $y$  and  $z$  coincide.  $\square$

**Statement 1.21.**

- (a) Any projective involution of the projective line is an inversion or a central symmetry.
- (b) Any projective involution of the circle is a central projection.

**Proof.** It is clear that all mentioned maps are projective involutions, now the assertion follows from (1.20).  $\square$

## 1.6 The Clawson conjugation

We begin this subsection by a new definition of the Miquel point. It is most universal than the standard one because it works for degenerated quadrilaterals

**Definition 1.22.** Let points  $A, B, C, D$  be given on the plane. Some of them can be collinear, also the points in one of pairs  $(A, C)$ ,  $(B, D)$  can coincide. *The Miquel point of the quadruple*  $(A, B, C, D)$  is the center of the spiral similarity, mapping the segment  $AB$  to the segment  $DC$ , or, which is equivalent, the center of the spiral similarity, mapping the segment  $AD$  to the segment  $BC$ . Sometimes, allowing some liberty we will call the Miquel point of the quadruple  $(A, B, C, D)$  «the Miquel point of the quadrilateral  $ABCD$ ».

**Remark.** If  $A, B, C, D$  are different points in general position, this definition coincides with the standard one.

**Remark.** Remember that the B-Dumpty point of the triangle  $ABC$  is the projection of its circumcenter to the symmedian from  $B$ . It is easy to prove that if  $S$  is the B-Dumpty point, then  $\angle SAB = \angle SBC$  and  $\angle SCB = \angle SBA$ . Therefore the B-Dumpty point is the Miquel point of «the quadrilateral»  $ABCB$ .

Let  $A, B, C, D$  be points in general position on the plane. The lines  $AB$  and  $CD$  meet at point  $E$ , the lines  $BC$  and  $AD$  meet at point  $F$ , the lines  $AC$  and  $BD$  meet at point  $G$ . Let  $M$  be the Miquel point of  $(A, B, C, D)$ . All talked above yields that  $MA \cdot MC = MB \cdot MD = ME \cdot MF$ , and the bisectors of angles  $\angle AMC$ ,  $\angle BMD$ , and  $\angle EMF$  coincide. Therefore there exists an inversymmetry centered at  $M$ , which swaps  $A$  and  $C$ ,  $B$  and  $D$ ,  $E$  and  $F$ . This map is called *the Clawson conjugation* with respect to  $ABCD$ .

**Remark.** If  $BC \parallel AD$ , then  $M$  coincides with  $E$ , and the Clawson conjugation is the inversymmetry about the trapezoid  $ABCD$ .

**Statement 1.23.** Let points  $P$  and  $Q$  be conjugated by Clawson with respect to  $ABCD$ . Then  $\angle APB = \angle ADQ + \angle QCB$ .

**Proof.** Since the Clawson conjugation maps  $A$  to  $C$  and  $P$  to  $Q$ , the triangles  $MAP$  and  $MQC$  are similar. Also the triangles  $MBP$  and  $MQD$  are similar. Therefore  $\angle APB = \angle APM + \angle MPB = \angle QCM + \angle MDQ = (\angle QCB + \angle BCM) + (\angle MDA + \angle ADQ) = \angle ADQ + \angle QCB$ . The last equality follows from the similarity of triangles  $MBC$  and  $MAD$ .  $\square$

The assertion (1.23) can be used for the control of the Clawson conjugation. For this it is sufficient to examine that the equality is correct for two adjacent sides. Note now an important corollary:

**Corollary 1.24.** The Clawson conjugation swaps the points isogonally conjugated with respect to the quadrilateral.

**Proof.** Let  $P$  and  $Q$  be isogonally conjugated with respect to  $ABCD$ . Then  $\angle APB = \angle DPC = \angle PDC + \angle DCP = \angle ADQ + \angle QCB$ . Similar equalities are correct for the remaining sides, therefore  $P$  and  $Q$  are conjugated by Clawson.  $\square$

**Statement 1.25.** The Clawson conjugation is a projective involution on  $\mathbb{C}P^1$ .

**Proof.** Clearly it is an involution, prove the projectivity. Let  $m$  be the complex coordinate of the Miquel point. If the conjugation maps  $P(p)$  to  $Q(q)$ , then  $(m - a)(m - c) = (m - p)(m - q)$ . Therefore the map  $p \mapsto q$  is fractionally-linear, thus it conserves the cross-ratios.  $\square$

The previous assertion and the assertion (1.20) yield, that the Clawson conjugation is a *unique* involution on  $\mathbb{C}P^1$ , swapping the opposite vertices of the quadrilateral.

Now let  $ABCD$  be a cyclic quadrilateral with circumcenter  $O$ . From the Brocard theorem we have that  $O$  is the orthocenter of triangle  $EFG$ , and  $M$  be the projection of  $O$  to  $EF$ . Therefore  $MO$  coincides with the symmetry axis, and the Clawson conjugation maps  $G$  to  $O$ .

To make more detailed education of the Clawson conjugation see [6]

## 1.7 Classical proof of the Poncelet theorem

Here and later we denote by  $\text{pow}_\omega(X)$  the power of the point  $X$  with respect to the circle  $\omega$ .

**Theorem 1.11** (Coaxial circles lemma). Let circles  $\omega_1$  and  $\omega_2$  and a real number  $k$  be given. Then the locus of points  $P$ , such that  $\text{pow}_{\omega_1}(P) = k \cdot \text{pow}_{\omega_2}(P)$  is a circle (a line for  $k = 1$ ), coaxial with  $\omega_1$  and  $\omega_2$ .

**Theorem 1.12.** Let  $A_1A_2A_3 \dots$  be a Poncelet trajectory, i.e. points of the circle (or the conic)  $\Omega$  such that the rays  $A_1A_2, A_2A_3 \dots$  touche the circle (or the conic)  $\omega$ . Let  $B_1B_2B_3 \dots$  be another Poncelet trajectory. Then the lines  $A_1B_1, A_2B_2 \dots$  touche some circle (or conic) coaxial with  $\Omega$  and  $\omega$ .

The classical synthetic proof of the Poncelet theorem is based on the theorem (1.12), which follows from the coaxial circles lemma. You can read it for example in citeZasl.

Note also two simple, but important corollaries of the theorem (1.12):

**Theorem 1.13.** Let  $A_1A_2 \dots A_n$  be a polygon inscribed into a circle (or a conic)  $\Omega$  and circumscribed around a circle (or a conic)  $\omega$ . Then for any natural  $k < n$  all lines  $A_iA_{i+n}$  touch some circle (or conic), coaxial with  $\Omega$  and  $\omega$ .

**Remark.** Of course the assumption of closing can be omitted, and the general assertion is correct: if the broken line  $A_1A_2 \dots A_k$  rotates between two circles (or conics)  $\Omega$  and  $\omega$ , then the line  $A_1A_k$  touches for any time some circle (or conic), coaxial with  $\Omega$  and  $\omega$ .

**Theorem 1.14.** Let  $A_1A_2 \dots A_{2n}$  be a polygon inscribed into a circle (or a conic)  $\Omega$  and circumscribed around a circle (or a conic)  $\omega$ .

- (a) The main diagonals  $A_iA_{i+n}$  concur at the limit point of the pencil containing  $\Omega$  and  $\omega$ .
- (b) Let  $A_iA_{i+1}$  touche the inonic at point  $X_i$ . Then the lines  $X_iX_{i+n}$  concur at the same limit point.

Our project propose another, more algebraic approach for the proof of the Poncelet theorem, the theorem (1.13), and the theorem (1.14), it is based on  $2 - 2$ -correspondences. We give its detailed description in the additional section.

## 2 Cool ratio lemma

Before solving the problems make acquaintance with the designations. The problems marked by one asterisk have (in the subjective opinion of the authors) relatively high difficulty. If the problem contains several points, some of them can be marked by the asterisk. The solutions of problems marked by two asterisks are unknown to the authors. May the force be with you!

### 2.1 Definitions and first CRL

We begin by a classical assertion known as *the Odnakov lemma*, *the sines ratio lemma*, or *boring ratio lemma*.

**Theorem 2.1** (Boring ratio lemma). Let a triangle  $AXY$  and a point  $C$  on the sideline  $XY$  be given. Then  $\frac{XC}{YC} = \frac{AX \cdot \sin(\angle XAC)}{AY \cdot \sin(\angle YAC)}$

Consider now the sines ratio in the right part. Let  $AC$  meet for the second time the circumcircle of  $(AXY)$  at point  $B$ . By the sines law  $\frac{\sin(\angle XAC)}{\sin(\angle YAC)} = \frac{BX}{BY}$ , which yields the following theorem.

**Theorem 2.2** (Cool ratio lemma). Let a circle and its chord  $XY$  be given. Points  $A$  and  $B$  lie on the circle. The lines  $AB$  and  $XY$  meet at point  $C$ . Then  $\frac{XA}{AY} \cdot \frac{XB}{BY} = \frac{XC}{CY}$

This formulating has one defect, the lemma can not be used conversely: if both points  $C$  and  $D$  lie on the circle or on the line  $XY$ , then the equality of ratios  $\frac{XC}{YC}$  and  $\frac{XD}{YD}$  does not yield that  $C$  and  $D$  coincide. Let us correct this.

**Определение 2.1.** Fix points  $X$  and  $Y$ . The line  $XY$  divides the plane into two semiplanes. Call one of them *the upper*, and the remaining one *the lower*. *Cool-ratio function about the base  $XY$*  is the function  $f_{XY}(T)$  from  $\mathbb{R}^2 \setminus Y$  to  $\mathbb{R}$ , with an absolute value  $\frac{XT}{YT}$ , having a sign  $-$ , if  $T$  lies on the segment  $XY$  or the lower semiplane, and a sign  $+$  otherwise.

**Remark.** Take an attention, that  $f_{XY}$  and  $f_{YX}$  are **not** the same!

**Remark.** In the problems we will often define the cool-ratio-function for a unique segment. To simplify the exposition we will omit in this case the index  $XY$ , announcing previously which segment is used as a base.

**Statement 2.2.** Let  $\omega$  be a circle or a line passing through  $X$  and  $Y$ . Then  $f_{XY}$  is a bijective map from  $\omega \setminus Y$  to  $\mathbb{R}$ .

Now, considering different cases, we can formulate the following theorem.

**Theorem 2.3** (Cool ratio lemma). Let a circle  $\omega$  and its chord  $XY$  be given. Points  $A$  and  $B$  lie on the circle, and a point  $C$  lies on the line  $XY$ . Then  $A, B, C$  are collinear if and only if  $f_{XY}(A) \cdot f_{XY}(B) = f_{XY}(C)$ .

But it is not necessary to consider the cases.

**Proof.** Let  $T$  be the common point of the tangent at  $A$  to  $\omega$  and  $XY$ . The collinearity of  $A$ ,  $B$ , and  $C$  is equivalent to the equality  $[X, Y; A, B] = [X, Y; T, C] \iff \frac{f(A)}{f(B)} = \frac{f(T)}{f(C)} \iff \frac{f(A)}{f(B)} = \frac{f^2(A)}{f(C)} \iff f(A) \cdot f(B) = f(C)$ .  $\square$

This result allows to prove very non-trivial facts.

**Example** (The butterfly theorem). Let points  $A, B, C, D$  lie on a circle  $\omega$ . Let  $P$  be the common point of  $AC$  and  $BD$ . Let  $XY$  be a chord of  $\omega$  such that  $P$  lies on  $XY$ , and  $PX = PY$ . Let  $XY$  meet  $AD$  and  $BC$  at points  $M$  and  $N$  respectively. Prove that  $PM = PN$ .

**Proof.** Define the cool-ratio-function  $f$  with the base  $XY$ . Then  $f(M)f(N) = f(A)f(D)f(B)f(C) = f^2(P) = (-1)^2 = 1$ , which is equivalent to the symmetry of  $M$  and  $N$  about the midpoint of  $XY$ .  $\square$

**Example** (Partial case of the Pascal theorem). Let points  $A, B, C, D, E, F$  lie on a circle  $\omega$ , and  $XY$  be a chord of  $\omega$ , such that  $AD$  and  $BC$ ,  $CF$  and  $DE$  meet on  $XY$ . Prove that  $AF$  and  $BE$  meet on  $XY$ .

**Proof.** Define the cool-ratio-function  $f$  with the base  $XY$ . Let  $AD$  and  $BC$  meet at  $M$ , and  $CF$  and  $DE$  meet at  $N$ . Then  $f(A) \cdot f(F) = \frac{f(A) \cdot f(F) \cdot f(C) \cdot f(D)}{f(C) \cdot f(D)} = \frac{f(M) \cdot f(N)}{f(C) \cdot f(D)} = \frac{f(B) \cdot f(E) \cdot f(C) \cdot f(D)}{f(C) \cdot f(D)} = f(B) \cdot f(E)$ . Therefore  $AF$  and  $BE$  also meet on  $XY$ .  $\square$

**What is CRL?** Many people do not accept CRL, because it uses some relations between segments, which are not clear intuitively, and seems to be a pure calculative method. But we can remember, that the cross-ratio (from euclidean point of view) also uses the segments and the sines. Although this the cross-ratio is not considered as a non-synthetic geometry and is actively used in the problems. Why? The reason is that the cross-ratio can be generalized for projective planes; but the main — the cross-ratio is considered as an invariant with respect to the projections, the symmetries, and the projective maps. In the other words, we upset the cross-ratios and solve the problems using their properties, but not thinking that the segments and the sines are used in their definition. And we can understand CRL similarly!

**Problem 1.** Let  $ABCD$  be a trapezoid with bases  $BC$  and  $AD$  inscribed into a circle  $\omega$ . Let  $S$  be the midpoint of the arc  $AD$ , not containing  $B$ . A point  $E$  lie on the extension of  $AD$  beyond  $A$ . The segments  $CE$  and  $SE$  meet for the second time  $\omega$  at points  $X$  and  $Y$  respectively. Prove that  $AD$ ,  $SX$ , and  $BY$  concur.

**Problem 2.** A triangle  $ABC$  and points  $E, F$  on the sides  $AB$  and  $AC$  respectively are given. The point  $M$  is is the projection of the circumcenter to  $EF$ ,  $AM$  meets the circumcircle of  $ABC$  at point  $D$ . Let  $EF$ ,  $BC$ , to the circumcircle at  $D$  concur. Prove that  $M$  is the midpoint of  $EF$ .

**Problem 3.** A triangle  $ABC$  and its bisector  $AD$  are given. Let  $P$  and  $Q$  lie on the circumcircle  $(ABC)$  in such a way that  $\angle BPD = \angle DQC = 90^\circ$ . The lines  $PQ$  and  $BC$  meet at point  $T$ . Prove

that the line  $AT$  touches the circle  $(ABC)$ .

#### Problem 4.

- (a) (The circumcevian ping-pong theorem) A chord  $XY$  of a circle  $\omega$  is drawn. Points  $P$ ,  $Q$ , and  $R$  are fixed on the line  $XY$ , and  $A$  is an arbitrary point of  $\omega$ . Let  $AP$  meet  $\omega$  for the second time at  $A_1$ ,  $A_1Q$  meet  $\omega$  at  $A_2$ ,  $A_2R$  meet  $\omega$  at  $A_3$ . Prove that the common point of  $AA_3$  and  $XY$  do not depend on  $A$ .
- (b) Let a circle and  $2n$  lines passing through a point  $P$ , lying outside the circle be given. Choose an arbitrary point  $A_1$  on the first line. Let the tangent from this point to the circle meet the second line at  $A_2$ , the tangent from  $A_2$  meet the third line at  $A_3$ , etc (cyclically). Prove that if this process will close after  $k$  circulations (i.e.  $A_{2nk+1} = A_1$ ), then this will be true for any other point  $A_1$ .

## 2.2 CRL helps to prove the concyclicity

Consider now another subject.

**Theorem 2.4** (Second cool ratio lemma). Let a circle  $\omega$  and its chord  $XY$  be given. Points  $A$  and  $B$  lie on  $\omega$ , and points  $C$  and  $D$  lie on the line  $XY$ . Then  $A, B, C, D$  are concyclic if and only if  $f_{XY}(A) \cdot f_{XY}(B) = f_{XY}(C) \cdot f_{XY}(D)$ .

**Example.** Let  $M, Q$  lie on the sideline  $BC$ , and  $P, N$  on the circumcircle of triangle  $ABC$ . It is known that  $AP$  and  $AQ$ ,  $AM$  and  $AN$  are symmetric about the bisector of angle  $BAC$ . Prove that the lines  $PM$  and  $QN$  concur at the circumcircle, and their common point lies on the circumcircle of triangle  $AQM$ .

**Proof.** Define the cool-ratio-function  $f$  with the base  $BC$ . Let  $AM$ ,  $AQ$ , and  $PM$  meet the circumcircle at points  $K$ ,  $L$ , and  $X$  respectively. Then  $f(X) = \frac{f(M)}{f(P)} = \frac{\frac{f(A)}{f(N)}}{\frac{f(A)}{f(Q)}} = \frac{f(Q)}{f(N)}$ , from this we obtain that  $X$  lies on the line  $QN$ . But  $f(X) = \frac{f(M)}{f(P)} = f(M) \cdot f(L) = \frac{f(M) \cdot f(Q)}{f(A)}$ . Therefore  $f(A) \cdot f(X) = f(M) \cdot f(Q)$ , i.e.  $A, X, M, Q$  are concyclic.  $\square$

And can we replace a circle+a line into two circles? The following assertion gives a positive answer to this question.

**Theorem 2.5** (Third cool ratio lemma). Let circles  $\omega_1$  and  $\omega_2$  meeting at points  $X$  and  $Y$  be given. Points  $A$  and  $B$  lie on  $\omega_1$ , and points  $C$  and  $D$  lie on  $\omega_2$ . Then  $A, B, C, D$  are concyclic if and only if  $f_{XY}(A) \cdot f_{XY}(B) = f_{XY}(C) \cdot f_{XY}(D)$ .

Now note the following interesting idea.

**Statement 2.3.** An inversion about a circle passing through  $X$  and  $Y$  conserves  $|f_{XY}|$ .

If the center of the inversion circle lies on  $XY$ , it coincides with the midpoint of this segment, and the inversion swaps points lying inside and outside the segment. This yields the following assertion:

**Corollary 2.4.** Points  $A$  and  $B$  are marked on the line  $XY$ . Let  $M$  be the midpoint of  $XY$ . Then the following assertions are equivalent:

- $f_{XY}(A) = -f_{XY}(B)$  (or  $[X, Y; A, B] = -1$ );
- $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MX^2$  (i.e.  $A$  and  $B$  are inverse about the circle with diameter  $XY$ ).

**Problem 5.** Let  $\Omega$  be the circumcircle of triangle  $ABC$ . An arbitrary line  $\ell$  meets this circumcircle at different points  $X$  and  $Y$ . Let  $M$  be the Miquel point of lines  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$ , and  $\ell$ . Denote  $f = f_{XY}$ . Prove that  $f(M) = f(A) \cdot f(B) \cdot f(C)$ .

**Problem 6.** Let  $ABCD$  be an isosceles trapezoid. Some circle passing through  $A$  touches the base  $BC$  at point  $E$ . Let  $X$  be the second common point of this circle with the circumcircle of the trapezoid. The line  $XE$  meets the circumcircle at point  $Y$ , and the line  $DY$  meets  $BC$  at point  $F$ . Prove that  $CF = BE$ .

**Problem 7.** Two circles  $\omega_1$  and  $\omega_2$  meeting at points  $P$  and  $Q$  are given. Points  $A$  and  $B$  lie on  $PQ$ , points  $K, L$  lie on  $\omega_1$ , and points  $M, N$  lie on  $\omega_2$ . It is known that the lines  $AK, BL$  touch  $\omega_1$ , and the lines  $AM, BN$  touch  $\omega_2$  in such a way that exactly two of points  $K, L, M, N$  lie on each side from  $SY$ . Prove that  $K, L, M$ , and  $N$  are concyclic.

**Problem 8.** Let  $B, C, D, E, F$  be concyclic points. The lines  $DE$  and  $DF$  meet  $BC$  at points  $X$  and  $Y$  respectively. The circumcircles of triangles  $XYD$  and  $BCD$  meet for the second time at point  $Z$ . Prove that  $E, F$ , the reflection of  $D$  about the midpoint of  $BC$ , and the reflection of  $Z$  about  $BC$  are concyclic.

**Problem 9.** Let  $AA_1, BB_1$ , and  $CC_1$  be the altitudes of triangle  $ABC$ . The lines  $AC$  and  $A_1C_1$  meet at point  $B_2$ . The line passing through  $B_1$  and parallel to  $A_1C_1$  meets  $AB$  and  $BC$  at points  $X$  and  $Y$  respectively. Prove that  $X, Y, B_2$ , and the midpoint of  $AC$  are concyclic.

**Problem 10\*** (Oral Moscow geometric olympiad 2025 10.5). Let  $ABC$  be an acute-angled scalene triangle. The perpendicular bisector to  $BC$  and the sidelines  $AB, AC$  form a triangle  $\Delta$ . Let  $X$  be the common point of the tangents at  $B$  and  $C$  to the circumcircle of  $ABC$ . The line  $AX$  meets this circle for the second time at point  $G$ , and  $M$  is the midpoint of  $BC$ . Prove that the circumcircles of the triangles  $XGM$  and  $\Delta$  are tangent.

**Problem 11\***. The median  $AM$  of triangle  $ABC$  meets its circumcircle at point  $F$ . The inscribed parabola with focus  $F$  touches  $BC$ ,  $AC$ , and  $AB$  at points  $P$ ,  $Q$ , and  $R$  respectively. Prove that  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $M$  are concyclic.

## 2.3 Generalized Cool Ratio Lemma

**Theorem 2.6** (Generalized Cool Ratio lemma). Let a circle  $\omega$  and its chord  $XY$  be given. Points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , and  $D$  lie on  $\omega$ , and points  $E$ ,  $F$  lie on the line  $XY$ . Then  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  lie on a conic if and only if

$$f_{XY}(A) \cdot f_{XY}(B) \cdot f_{XY}(C) \cdot f_{XY}(D) = f_{XY}(E) \cdot f_{XY}(F).$$

**Problem 12**. Let a circle and a line meeting at two points be given. Some conic meets the circle at points  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , and  $T$ , and meets the line at points  $A$  and  $B$ . The lines  $AX$ ,  $AY$ ,  $BZ$ , and  $BT$  meet the circle for the second time at points  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ , and  $T'$  respectively. Prove that  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ ,  $T'$ ,  $A$ , and  $B$  lie on a conic.

## 2.4 The liaison of CRL with classical metric theorems

**Statement 2.5** (Liaison with spiral similarity). A triangle  $ABC$  and points  $E$ ,  $F$  lying on its sidelines  $AB$  and  $AC$  respectively are given. Let  $M$  be the common point of the circumcircles of triangles  $ABC$  and  $AEF$ . Then  $|f_{AB}(M)| = |f_{EF}(M)| = \frac{AE}{BF}$ .

In the previous problems we fixed one chord and use it as the base for CRL. But sometimes it is useful to introduce several cool-ratio-functions and use them to reformulate the required assertion! We can take as example the Thales, Ceva, and Menelaos theorems. Later, if a triangle  $ABC$  is given, we recommend to use the designations:  $p(T) = f_{BC}(T)$ ,  $q(T) = f_{CA}(T)$ ,  $r(T) = f_{AB}(T)$ , in such a way that  $p(A), q(B), r(C) > 0$  (i.e, all three functions are positive inside the triangle  $ABC$ .)

**Statement 2.6** (The Thales theorem). Let a triangle  $ABC$  and points  $E$ ,  $F$  lying on its sidelines  $AB$  and  $AC$  respectively be given. Then the lines  $EF$  and  $BC$  are parallel if and only if  $r(E) \cdot q(F) = 1$ .

**Statement 2.7** (The Ceva theorem). Let  $D$ ,  $E$ , and  $F$  be points lying on the sidelines  $BC$ ,  $AB$ , and  $AC$  respectively of a triangle  $ABC$ . Then the line  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  concur or are parallel if and only if  $p(D) \cdot q(E) \cdot r(F) = -1$ .

**Statement 2.8** (The Menelaos theorem). Let points  $D$ ,  $E$ , and  $F$  lie on the sidelines  $BC$ ,  $AB$ , and  $AC$  respectively of a triangle  $ABC$ . Then  $D$ ,  $E$ ,  $F$  are collinear if and only if  $p(D) \cdot q(E) \cdot r(F) = 1$ .

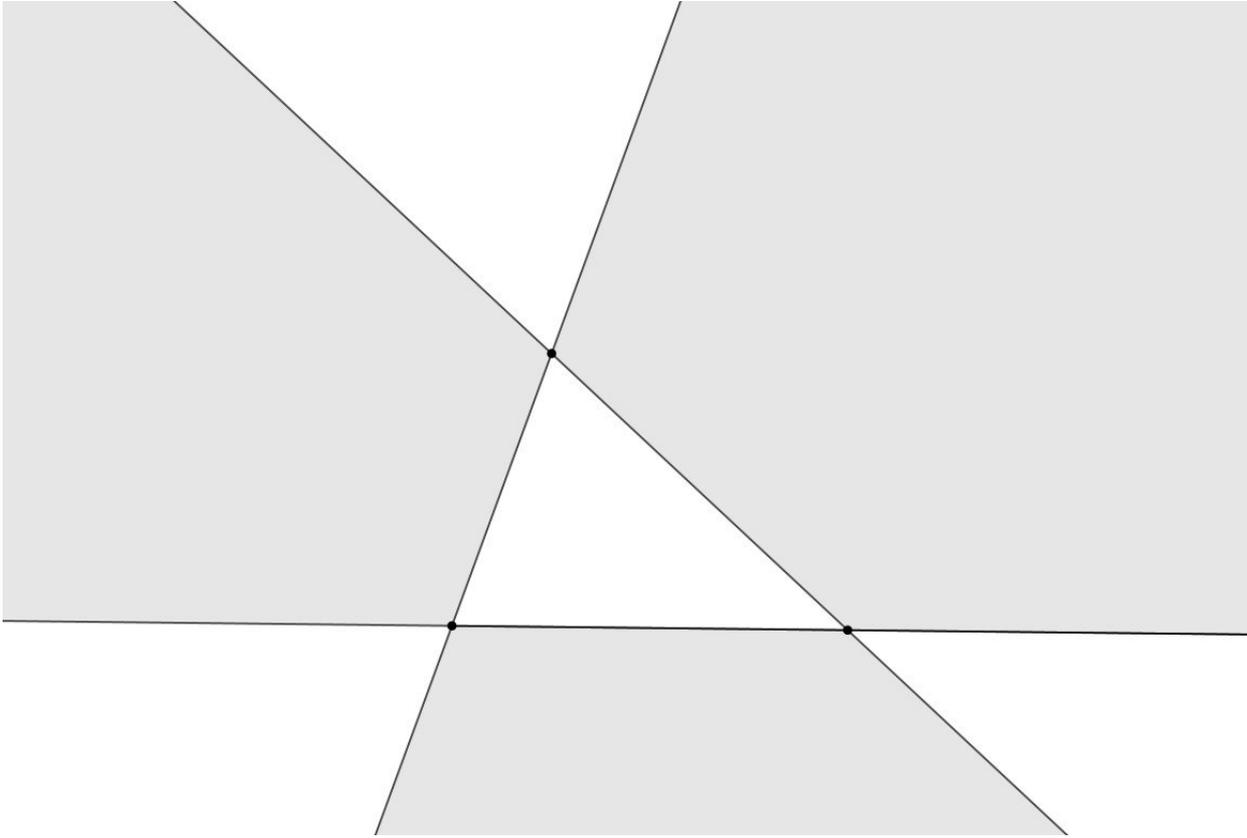
**Statement 2.9** (The trigonometric Ceva theorem). Let a triangle  $ABC$  and points  $D$ ,  $E$ , and  $F$  lying on  $(ABC)$  be given. Then the lines  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  concur if and only if  $p(D) \cdot q(E) \cdot r(F) = -1$ .

Note also several simple but important properties:

**Statement 2.10.**

(a)  $p(T) \cdot q(T) \cdot r(T) = \pm 1$ , with a sign + in gray sectors (see. the figure).

(b)  $p(A) \cdot q(B) \cdot r(C) = 1$



**Problem 13.** A triangle  $ABC$  is given. The altitudes  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  meet the circumcircle for the second time at points  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  respectively. The line  $B_2A_1$  meets the circumcircle at  $X_1$ , and  $B_2C_1$  meets it at point  $Y_1$ . The circumcircle of the triangle  $A_1A_2X_1$  meets for the second time  $BC$  at point  $X_2$ , and the circumcircle of the triangle  $C_1C_2Y_1$  meets  $AB$  at  $Y_2$ . Prove that  $X_2Y_2 \parallel AC$ .

**Problem 14.** Let  $D$  be an arbitrary point on the circumcircle of a triangle  $ABC$ , and  $M$  be the midpoint of  $BC$ . The circle  $AMD$  meets for the second time the line  $BC$  at point  $X$ . The line  $BD$  meets  $AC$  at point  $Y$ . The tangents to the circumcircle at  $B$  and  $C$  meet at point  $T$ . Prove that  $X$ ,  $Y$ , and  $T$  are collinear.

**Problem 15.**

(a) Triangles  $ABC$  and  $DEF$  are inscribed into a circle  $\Omega$ . The line  $BC$  meets  $DE$  and  $DF$  at points  $X$  and  $Y$  respectively. The circle  $(DXY)$  meets  $\Omega$  for the second time at point  $D_1$ . Points  $E_1$  and  $F_1$  are defined similarly. Prove that the lines  $AD_1$ ,  $BE_1$ , and  $CF_1$  concur.

(b\*) (Difficult problem from JCG). The triangles  $ABC$  and  $A'B'C'$  are inscribed into the same circumcircle, and the lines  $AA'$ ,  $BB'$ , and  $CC'$  concur. Let  $A_1$  be a common point of

(ABC) and the circle passing through A and the meeting points of  $B'C'$  with AB, AC. Points  $B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1$  are defined similarly. Prove that the lines  $A_1A'_1, B_1B'_1,$  and  $C_1C'_1$  concur.

Note another theorem which can be considered as analog of the theorem (2.6) for the case, when a circle+a line a replaced into three lines in general position.

**Theorem 2.7** (The Carno theorem). Let a triangle ABC be given, points  $A_1, A_2$  lie on BC, points  $B_1, B_2$  lie on AC, points  $C_1, C_2$  lie on AB. Then  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  lie on a conic if and only if

$$p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot q(B_1) \cdot q(B_2) \cdot r(C_1) \cdot r(C_2) = 1.$$

**Problem 16\*** (Moscow mathematical olympiad 2006, 10.6). Points P and Q lie on the circumcircle of a triangle ABC. Let  $A_1$  be a point on the line BC such that the lines  $PA_1$  and  $QA_1$  are symmetric about BC. Points  $B_1$  and  $C_1$  are defined similarly. Prove that  $A_1, B_1,$  and  $C_1$  are collinear.

**Problem 17.** Let a triangle ABC be given, points  $A_1, A_2$  lie BC, points  $B_1, B_2$  lie on AC, points  $C_1, C_2$  lie on AB in such a way that  $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$  lie on a conic. Let  $A_3, A_4, B_3, B_4, C_3, C_4$  lie on the circumcircle of ABC in such a way that  $A_1A_2A_3A_4, B_1B_2B_3B_4, C_1C_2C_3C_4$  are concyclic quadruples. Prove that:

- (a) the triangle formed by the lines  $A_3A_4, B_3B_4,$  and  $C_3C_4,$  is perspective to ABC.
- (b) If  $AA_3, BB_3,$  and  $CC_3$  concur, then  $AA_4, BB_4,$  and  $CC_4$  also concur.

Compact record of ratios of segments is one of advantages of CRL, Hence we usually tend to translate the calculations into the cool-ratio-functions language. But sometimes to verify the final equality it is useful to return to the standard record of segments. In this way it is important not forget to verify the coincidence of the signs. The following problems are devoted to this subject.

**Problem 18** (SMT<sup>1</sup>-2019). Let AD, BE, and CF be concurrent cevians in a triangle ABC with circumcircle  $\omega$ , and M be the midpoint of BC. The circles  $\omega$  and (AEF) meet for the second time at point X. The line XD meets  $\omega$  at point Y. The line YM meets  $\omega$  at point Z. Prove that the line AZ touches (AEF).

**Problem 19.** A triangle ABC is given. Let D and E lie on the sidelines AB and BC respectively, in such a way that ADEC is cyclic. Let there exist a point T on the sideline AC, such that  $BT = BD, CT = CE.$  Prove that the circumcircle of the triangle DET passes through the foot of the internal bisector of angle B.

<sup>1</sup>Southern Mathematical Tournament is the Russian team tournament of mathematical battles.

### 3 Euclidean invariants of the Poncelet theorem

This section is devoted to different invariants of the Poncelet theorem and the using of this theorem in the olympiad problems. The subsections are independent, thus it is not necessary to solve the problems in the proposed order. But it can be useful solving several problems to return back and scoop some useful idea.

Of course many problems are not original: they are taken from the papers and the olympiads including the recent ones. Hence you can see some problems or even know their solutions. This is not dreadful: there are many problems in this sections (may be too many), Thus you in all cases will not be bored.

#### The rules of the game:

- In all problems «the triangle rotates between two circles / conics» denotes the rotation in sense of the Poncelet theorem.
- «Inscribed conic» denotes that the conic touches the sidelines of the polygon — partially it can lie outside the triangle. But we differ the incircle and the excircle.
- If the existence of the circle having some properties has to be proved (a point moves around it, a variable circle touches it, etc.), the required circle can degenerate to a point or a line. Similarly, the assertion «the lines pass through a fixed point» allows that this point is infinite. And the term «inversion» may denote not only a usual inversion, but the composition of an inversion and the reflection about its center (so called «antiinversion»). This list can be prolonged. The general rule is: if it seems to you, that the formulating of some problem is not correct, turn to the authors.
- Some problems contain several points. The reasons to group several assertions to one problem can be different. Sometimes the previous points help to prove the following ones — see for example the proof of the Laguerre theorem. Or we join an assertion and its generalization (for example in problem (53)), different properties of a common construction, or similar assertions, for example in problem (45). As an exception the principle of joining can be not evident and will be clear later.

#### 3.1 The Clawson conjugation and the Skutin lemma

**Problem 20.** Let a quadrilateral  $ABCD$  rotate between a circumcircle  $\Omega$  and an inconic  $\gamma$  with foci  $P$  and  $Q$ .

- Prove that the Clawson conjugation related with the quadrilateral is constant.
- Let the inconic be a circle, and  $AB$  and  $CD$  meet at point  $E$ . Prove that all circles  $(BCE)$  touche some fixed circle.
- Return to the case of an inellipse. Prove that the sum  $\angle ABP + \angle CDP$  is constant.

The following interesting theorem can be proved using the Clawson conjugation, but it is not immediately coherent with the Poncelet theorem, hence we do not formulate it as a problem.

**Theorem 3.1** (The Miquel theorem about isogonal conjugation). Let a triangle  $ABC$  and two pairs  $(P, P')$ ,  $(Q, Q')$  of isogonally conjugated points be given. Then the Miquel point of the quadrilateral  $PQP'Q'$  lies on the circumcircle of  $ABC$ .

This theorem is useful for the proof of the Skutin lemma — one of the most important results of this section.

**Theorem 3.2** (The Skutin lemma). Let a triangle  $ABC$  rotate between a circumcircle  $\Omega$  and an inellipse  $\gamma$ . A fixed point  $P$  does not lie on  $\Omega$ . Then the point  $Q$  isogonally conjugated to  $P$  with respect to  $ABC$  moves around some circle.

**Problem 21.** Let  $F_1$  and  $F_2$  be the foci of the ellipse, and  $M$  be the Miquel point of  $F_1PF_2Q$ .

- (a) Record the map  $M \mapsto Q$  in complex numbers and prove the Skutin lemma.
- (b) Consider a composition of the inversion with center  $P$  and radius  $\sqrt{PF_1 \cdot PF_2}$  and the reflection about the bisector of angle  $F_1PF_2$  and prove the Skutin lemma.

Considering with attention any of two proofs of the Skutin lemma we can describe the trajectory of the orthocenter:

**Corollary 3.1.** The orthocenter of the Poncelet triangle moves around the circle centered at the reflection of  $O$  about the center of inellipse with radius  $\frac{OF_1 \cdot OF_2}{R_{(ABC)}}$ .

**Problem 22.** Let the inconic be a circle with radius  $r$ . Prove that the Nagel point of  $ABC$  moves around the circle centered at  $O$  with radius  $R - 2r$ .

**Problem 23.** Let a triangle  $ABC$  rotate between two circles, and  $\ell$  be a fixed tangent to the incircle.

- (a) Prove that the Miquel point of lines  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$ , and  $\ell$  is constant.
- (b) Remember that the orthocenters of four triangles formed by four given lines are collinear on *the Aubert line*. Prove that the Aubert line of four lines from p.(a) passes through a fixed point.
- (c\*) Let  $\omega_H$  be the trajectory of the orthocenter of  $ABC$ . Prove that the fixed point obtained in in the previous point lies on  $\Omega_H$ .

**Remark.** Compare p.(b) with the problem 6 from the project «On the Poncelet theorem» from Summer Conference-2014:

**Statement 3.2.** Let  $ABC$  rotate between two circles, and  $P$  be a fixed point on the circumcircle. Prove that all Simson lines of  $P$  with respect to  $ABC$  pass through a fixed point.

**Problem 24.**

- (a) (Telv Cohl<sup>2</sup>, 2014) A triangle  $ABC$  is given. Let  $\ell$  be a variable tangent to its incircle. The line  $\ell$  and their reflections about the sidelines of  $ABC$  form a complete quadrilateral. Prove that its Miquel point moves around a circle or a line.
- (b) Prove the same assertion when the line  $\ell$  is fixed, and the triangle  $ABC$  rotates between two circles.

**Problem 25.** Let  $ABC$  rotate between two circles. A fixed line  $\ell$  touching the incircle meets  $BC$  and  $AC$  at points  $D$  and  $E$  respectively. Let  $\ell'$  be a line passing through the reflections of  $D$  and  $E$  about the midpoints of  $BC$  and  $AC$  respectively.

- (a\*) (SAGF<sup>3</sup> 2024, P3) Prove that  $\ell'$  passes through a fixed point.
- (b\*) Let  $\omega_N$  be the trajectory of the Nagel point of  $ABC$ . Prove that the fixed point from the previous assertion lies on  $\omega_N$ .

**Problem 26.**

- (a) (The Morley theorem) Let points  $P$  and  $Q$  be isogonally conjugated with respect to a triangle  $ABC$ . Choose a complex coordinate system such that  $(ABC)$  is a unit circle and denote the complex coordinates of all points by the corresponding small letters. Prove that

$$p + q + abc\overline{pq} = a + b + c.$$

- (b) Let a triangle  $\Delta$  rotate between a circumcircle and an inconic, and  $P, Q$  be fixed points. By the Skutin lemma the points  $P', Q'$  isogonally conjugated to  $P$  and  $Q$  with respect to  $\Delta$  move around two circles. Prove that their angle velocities are equal.

### 3.2 Liaison with polar correspondence

The following fact was proposed by E.Diomidov and V.Kalashnikov in 2014 to the readers of «Journal of Classical Geometry» as an open problem. As is known to the authors, the problem was not solved during a long time.

**Statement 3.3.** Let a triangle  $\Delta$  rotate between its circumcircle  $\Omega$  and (ex)incircle  $\gamma$ . Then the trilinear polar of a fixed point  $P \in \Omega$  with respect to  $\Delta$  passes through a fixed point.

<sup>2</sup>Telv Cohl is a known Taiwan geometer and problems compositor, author of blog [12].

<sup>3</sup>SAGF — geometric online-olympiad organized by K.Belsky. Four problems in each of two days, the complexity corresponds to the problems G3-G8 of IMO shortlist.

The short and nice proof was found by the authors less than one year ago. The following problem is the key one:

**Problem 27.** Let a triangle  $\Delta$  rotate between a circumconic and an inparabola. Prove that the centroid of  $\Delta$  moves along a line, if the circumconic is:

- (a) an ellipse;
- (b) a hyperbola;
- (c\*) a parabola.

It is not difficult to prove that the problem of Diomidov and Calashnikov follows from the previous one (but you can solve it independently).

**Problem 28.** Prove the assertion (3.3) if P lies:

- (a) inside  $\gamma$ .
- (b) outside  $\gamma$ .
- (c\*) on  $\gamma$ .
- (d\*\*) It may be proved (see the calculation in barycentric coordinates in [5]), that the Lemoine point of ABC moves around an ellipse. Prove that the fixed point in the last case lies on this ellipse.

The following problem is the unique one in this section considering the complex projective plane. Namely, we will work with the limit points of a pencil of conics (the pentagon and the conics may be considered as real).

**Problem 29\*** (F.Nilov). Let a pentagon ABCDE be inscribed into a conic  $\Gamma$  and circumscribed around a conic  $\gamma$ . Its diagonals form a pentagon  $A_1B_1C_1D_1E_1$  ( $A_1 = BD \cap CE$  etc.), inscribed into a conic  $\Gamma_1$  and circumscribed around a conic  $\gamma_1$ . Prove that the pencils generated by pairs  $(\Gamma, \gamma)$  and  $(\Gamma_1, \gamma_1)$  have the same limit points.

### 3.3 The Laguerre theorem

**Theorem 3.3** (The Euler formula). Let a triangle  $\Delta$  be inscribed into a circle with center O and radius R and circumscribed around a circle with center I and radius r. Then

$$R^2 - OI^2 = 2Rr. \quad (3.1)$$

There is a natural question about the generalization of the Euler formula for an arbitrary inconic. The Laguerre theorem give the answer:

**Theorem 3.4** (The Laguerre theorem, 1879). Let a triangle ABC be inscribed into a circle centered at O with radius R and circumscribed around an ellipse with foci  $F_1, F_2$  and minor axis

l. Then

$$(R^2 - OF_1^2)(R^2 - OF_2^2) = R^2 l^2. \quad (3.2)$$

**Remark.** The theorem is also correct, if we replace an ellipse to a hyperbola, and consider  $l^2$  as the square of the imaginary axis (equal to  $l^2 = a^2 - d^2$ , where  $d$  is the distance between the foci of the hyperbola, and  $a$  is the distance between the common points of the hyperbola with the line passing through its foci).

**Remark.** The Laguerre theorem yields a converse assertion: if the equality (3.2) holds, then there exists a triangle inscribed into the circle and circumscribed around the conic.

Prove now the Laguerre theorem.

**Problem 30.**

- (a) Let  $m$  be an arbitrary tangent to the ellipse with foci  $F_1, F_2$  and minor axis  $2b$ . Then  $\text{dist}(F_1, m) \cdot \text{dist}(F_2, m) = b^2$ .
- (b) **General trident lemma.** Let  $L_1$  and  $L_2$  be the second points of the circumcircle  $(ABC)$  with the rays  $AF_1$  and  $AF_2$ . Prove that  $F_1L_1 \cdot F_2L_2 = BL_1 \cdot BL_2$ .
- (c) Obtain the Laguerre theorem from the pp. (a), (b).

**Theorem 3.5 (3-Poncelet pairs theorem).** Let spheres  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  touche a plane  $\alpha$  on the different hands. A sphere  $\Omega$  touches these two sphere by the same manner and meets  $\alpha$  by a circle  $\omega$ . The common external tangents to  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  meet  $\alpha$  by an ellipse  $\gamma$ . Then there exists a triangle with circumcircle  $\omega$  and inellipse  $\gamma$ .

**Theorem 3.6 (The Grace theorem).** Let  $\omega$  and  $\omega_A$  be the insphere and the  $A$ -exsphere of a tetrahedron  $ABCD$ . Then there exists a sphere passing through  $B, C, D$  and touching  $\omega, \omega_A$ .

**Problem 31.**

- (a\*) Prove the 3-Poncelet pairs theorem.
- (b) Obtain the Grace theorem from the 3-Poncelet pairs theorem.

### 3.4 Latent Poncelet. Part 1

The using of the Poncelet theorem in olympiad problems do not necessary mean the process of rotation. Sometimes the configuration is static, and the Poncelet theorem appears in face of the following simple corollaries:

**Corollary 3.4.** Let  $ABC$  be a triangle with circumcircle  $\Omega$  and incircle  $\omega$ . Take an arbitrary point  $D$  on  $\Omega$ . The tangents from  $D$  to  $\omega$  (if they exist) meet  $\Omega$  for the second time at  $E$  and  $F$ . Then  $EF$  touches  $\omega$ .

**Corollary 3.5.** Let  $ABC$  be a triangle with circumcircle  $\Omega$  and incircle  $\omega$ . An arbitrary chord  $EF$  of  $\Omega$  touches  $\omega$ . Then the second tangents from  $E$  and  $F$  to  $\omega$  meet on  $\Omega$ .

**Corollary 3.6.** Let the triangles  $ABC$  and  $DEF$  are inscribed into the same conic. Then they are circumscribed around a common conic; in partial the main diagonals of the hexagon formed in the intersection of the triangles concur. Of course the converse assertion is also correct.

**Problem 32.** Denote by  $\omega_a$  the excircle of triangle  $ABC$  touching the side  $BC$ . The circles  $(ABC)$  and  $\omega_a$  meet at points  $X$  and  $Y$ . The tangents at  $X$  and  $Y$  to  $\omega_a$  meet for the second time the circumcircle  $(ABC)$  at points  $P$  and  $Q$ . Prove that the tangents to  $(ABC)$  at points  $P$  and  $Q$  are also the tangents to  $\omega_a$ .

**Problem 33.** Let  $I$  be the incenter of a triangle  $ABC$ , and  $X, Y$  be the points on its circumcircle such that  $AI = AX = AY$ . Prove that  $XY$  touches the incircle of  $ABC$ .

**Problem 34** (Preparations, May 2022, P2/3). A cyclic quadrilateral  $ABCD$  is given. Let  $\omega_A$  and  $\omega_C$  be the incircles of triangles  $DAB$  and  $BCD$  centered at  $I_A$  and  $I_C$  respectively. The common external tangent to  $\omega_A$  and  $\omega_C$  meets the circumcircle  $(ABCD)$  at points  $X$  and  $Y$ . Prove that  $I_A, I_C, X,$  and  $Y$  are concyclic.

**Problem 35** (IGO-2019, Advanced, P5). A parabola with focus  $F$  is given. Consider all triangles inscribed into the parabola having the orthocenter at  $F$ . Prove that all such triangles have a common circumcircle.

**Problem 36.** Let  $O$  and  $H$  be the circumcenter and the orthocenter of a triangle  $ABC$ . The line  $AH$  meets for the second time the circumcircle  $(ABC)$  at point  $A_1$ , and the perpendicular bisector to  $AH$  meets  $(ABC)$  at points  $A_2$  and  $A_3$ . Points  $B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$  are defined similarly. Prove that the Lemoine points of the triangles  $ABC, A_1A_2A_3, B_1B_2B_3,$  and  $C_1C_2C_3$  lie on a circle with the center on the line  $OH$ .

### 3.5 The latent Poncelet. Liaison with isogonal conjugation

For any pair of isogonally conjugated points there exists an inconic with foci at these points. Hence it may be useful to rotate the triangle between the circumcircle and this conic. The Skutin lemma and the Laguerre theorem also can be useful, especially if some other remarkable points are mentioned in the problem.

Let an ellipse with foci  $P$  and  $Q$  and the major axis  $2a$  be given. Let a line  $\ell$  touche it at point  $X$ , and  $P'$  be the reflection of  $P$  about  $\ell$ . The optical property yields that  $P', X,$  are collinear  $Q$ , thus  $P'Q = PX + QX = 2a$ . From this we obtain a simple but very useful result:

**Statement 3.7.** Let an ellipse with foci  $P$ ,  $Q$  and major axis  $2a$  is inscribed into a triangle  $\Delta$ . Then the radius of the pedal circle of  $P$  and  $Q$  with respect to  $\Delta$  equals  $a$ .

**Problem 37** (The third Fontené theorem). Let  $P$  and  $Q$  be isogonally conjugated with respect to a triangle  $ABC$ .

- (a) Prove that if  $PQ$  passes through the circumcenter of  $ABC$ , then the pedal circle of  $P$  and  $Q$  the nine-points circle of  $ABC$ .
- (b) Prove the converse assertion.

**Remark.** The locus of points  $P$  from the previous problem is called *the Mac-Key cubic*.

**Problem 38** (SAGF-2024, P7, reformulated). Let a triangle  $ABC$  be inscribed into a circle centered at  $O$  with radius  $R$  and circumscribed around an ellipse centered at  $X$  with minor axis  $l$ . A point  $N$  is the center of the nine-point circle of  $ABC$ .

- (a) Prove that if the circumcenter  $O$  lies on the minor axis, then  $2NX = R - l$ .
- (b) Prove that in general case  $2NX \leq R - l$ .

### 3.5.1 The orthocenter power lemma

**Problem 39** (The orthocenter power lemma). Let  $O$  and  $H$  be the circumcenter and the orthocenter of a triangle  $ABC$ . Points  $P$  and  $Q$  are isogonally conjugated with respect to  $ABC$ , and  $\rho$  is the radius of the pedal circle of  $P$  and  $Q$ . Then

$$4\rho^2 - HP^2 - HQ^2 = -\text{pow}(H, (ABC)).$$

In other words if  $P_a, P_b, P_c$  are the reflections of  $P$  about the sidelines of  $ABC$ , then

$$\text{pow}(H, (P_aP_bP_c)) + HP^2 = \text{pow}(H, (ABC)).$$

**Corollary 3.8.** Let  $P$  and  $Q$  be isogonally conjugated with respect to a triangle  $ABC$ . The points  $P_a, P_b, P_c$  are the reflections of  $P$  about  $BC, AC, AB$ . Define similarly  $Q_a, Q_b, Q_c$ . The orthocenter  $H$  of  $ABC$  lies on the radical axis of circles  $(P_aP_bP_c)$  and  $(Q_aQ_bQ_c)$  if and only if  $HP = HQ$ .

**Problem 40.**

- (a) Let triangles  $ABC$  and  $DEF$  have a common circumcenter and be circumscribed around the same parabola. Prove that their vertices lie on an equilateral hyperbola.
- (b) (Telv Cohl, 2019) Let  $A, B, C, D, E,$  and  $F$  lie on a conic which is not an equilateral hyperbola. It is known that the triangles  $ABC$  and  $DEF$  have a common orthocenter  $H$ . Prove that  $H$  lies on the radical axis of circles  $(ABC)$  and  $(DEF)$ .

### 3.5.2 The Aiyer theorem

**Problem 41.** Let a triangle  $ABC$  rotate between a circumcircle  $\Omega$  and an inconic with foci  $P$  and  $Q$ . Let  $M_a$  be the Miquel point of  $BPCQ$ . It is easy to see that  $M_a \in \Omega$ . Prove that the map  $A \mapsto M_a$  is a projective involution.

**Corollary 3.9.** All lines  $AM_a$  pass through a fixed point or are parallel.

**Problem 42\*.** Let a triangle  $ABC$  rotate between a circumcircle and an inconic with foci  $P$  and  $Q$ . Prove that  $\angle ABP + \angle BCP + \angle CAP = \text{const.}$

**Problem 43 (The Aiyer theorem).** A triangle  $ABC$  and a point  $P$  are given. Let  $P_aP_bP_c$  be the pedal triangle of  $P$ , and  $\Omega_9$  be the nine-points circle of  $ABC$ . Prove that the directed angle between the tangents to the circles  $(P_aP_bP_c)$  and  $\Omega_9$  at its common point equals  $\pm(90^\circ - \angle ABP - \angle BCP - \angle CAP)$ .

### 3.5.3 Problem 10.4 from the last Sharygin olympiad

**Problem 44 (The Brocard porism).** Let a triangle  $ABC$  rotate between a circumcircle and an inellipse with foci  $P$  and  $Q$ . Suppose that for one position  $P$  and  $Q$  are the Brocard points with angle  $\varphi$ . Prove that for all positions  $P$  and  $Q$  are also the Brocard points with angle  $\varphi$ .

**Problem 45.** Let  $M$ ,  $H$ ,  $O$ , and  $L$  be the centroid, the orthocenter, the circumcenter, and the Lemoine point of a triangle  $ABC$ .

(a\*) (Sharygin olympiad 2025, final, 10.4) Let  $S$  be the  $L$ -Humpty point of the triangle  $LHM$ , and  $L^*$  be the inverse map of  $L$  about the circumcircle. Prove that  $SL^* \parallel MH$ .

(b\*) Let  $T$  be the  $M$ -Humpty point of  $\triangle LOM$ , and  $M^*$  the inverse map of  $M$  about the circumcircle. Prove that  $TM^* \parallel OL$ .

**Remark.** The assertion (b) can be reformulated: the inverse map of  $M$  about the circle with diameter  $OL$  lies on the circumcircle of  $ABC$ .

## 3.6 Around classical proof of the Poncelet theorem

This subsection contains problems about the coaxial circles lemma and classical properties of the Poncelet polygons (see the details in subsection (1.7)).

**Theorem 3.7.** Let a natural number  $2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  be given. A polygon  $A_1A_2 \dots A_n$  rotates between two circles. By the theorem (1.13) the line  $A_kA_{n+2-k}$  touches some fixed circle. Then the touching point projectively depends on  $A_1$ .

**Remark.** Define in a natural way the cross-ratio of tangents to a conic. Then we can say that the line  $A_kA_{n+2-k}$  projectively depends on  $A_1$ .

**Corollary 3.10.** Let a polygon  $A_1A_2 \dots A_{2s+1}$  rotate between two circles. Then the touching point of the sideline  $A_{s+1}A_{s+2}$  with the incircle projectively depends on  $A_1$ .

**Remark.** The corollary (3.10) was proposed on the Summer conference in 2022 (project [2], problem 25). Any of participants could not solve it, and the authors of the project had then only a complicated algebraic proof. A simple synthetic proof which we propose to do was found later.

**Problem 46.**

- (a) (Generalized Poncelet homography). Let circles  $\Omega$  and  $\gamma$  be given. The tangents from an arbitrary point  $A \in \Omega$  (if they exist) to  $\gamma$  meet  $\Omega$  for the second time at points  $B$  and  $C$ . By the theorem (1.13) all lines  $BC$  touche some fixed circle. Let  $K$  be the touching point. Prove that  $K$  projectively depend on  $A$ .
- (b) Prove the theorem (3.7).

**Remark.** The theorem (1.7) yields that the standard and the generalized Poncelet homographies hold also for conics having at most two common points. But we allow to use these assertions for an arbitrary pair of conics: you always may use the standard homography, and use the problem (46) — after solving it. If you want to know the general proof of these facts we will give it in the additional section.

**Problem 47** (D. Brodskiy). Let a circle  $\omega$  lie inside a circle  $\Gamma$ . Let  $X \in \omega, Y \in \Gamma$  be two cyclists starting from two closest points of  $\omega, \Gamma$  and moving along these circles in the same direction with equal angle velocities. Let  $P, Q$  be points on  $\omega$  such that  $PX = QX = XY$ . Prove that  $PQ$  touches a fixed circle.

**Problem 48.** A circle  $\omega$  lies inside a circle  $\Omega$ . Consider a closed chain of circles  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2n}$  such that  $\gamma_i$  centered at  $O_i$  touches externally  $\omega$ , touches internally  $\Omega$ , and touches  $\gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}$  (as usual,  $\gamma_{i \pm 2n} = \gamma_i$ ). Prove that all lines  $O_i O_{i+n}$  concur, and their common point depend only on  $\omega$  and  $\Omega$ , but not on the chain.

**Problem 49** (SMT 2024, generalization). A polygon  $A_1A_2 \dots A_{2n}$  rotates between two circles. Prove that the value  $\frac{\sum_{i=1}^n A_i A_{i+n}}{S_{A_1 \dots A_{2n}}}$  is constant.

**Problem 50.**

- (a\*) A polygon  $A_1A_2 \dots A_n$  rotates between two circles. The line  $A_i A_{i+1}$  touches the incircle at point  $X_i$ . Prove that the mass-center of  $X_1, X_2, \dots, X_n$  is fixed.
- (b) A polygon  $A_1A_2 \dots A_n$  rotates between two circles, and a point  $P$  is fixed. The line  $A_i A_{i+1}$  touches the incircle at point  $X_i$ . Prove that  $\sum_{i=1}^n PX_i^2$  is constant.
- (c) Let now  $n = 2m$ . Prove that  $\sum_{i=1}^{2m} \frac{A_i A_{i+1}}{A_{m+i} A_{m+i+1}}$  is constant.

The (im)possibility of construction of bicentral polygons using a compass and a ruler is very interesting. We practically do not touch it in the project and give only the following problem, which yields that it is sufficient to construct polygons with odd number of sides

**Problem 51.** A circle  $\beta$  lies inside a circle  $\alpha$ . It is known that there exists a  $n$ -gon inscribed into  $\alpha$  and circumscribed around  $\beta$ . Using a compass and a ruler construct a  $2n$ -gon inscribed into  $\alpha$  and circumscribed around some circle  $\beta'$  coaxial with  $\alpha$  and  $\beta$ .

### 3.7 Different

We do not tend to the maximal generality of results in this section. In many problems a circle may be replaced to an arbitrary conic with two foci. If the difference seems essential, we formulate both version (see for example the problem (53)). But often the solution is practically the same (of course if your solutions is appropriate). We propose to you to verify this.

**Problem 52.** Solve the problems (23), (24), (25), (28), (32) и (56a) if the (ex)incircle is replaced to a conic with two foci.

**Problem 53.** Let a triangle  $ABC$  rotate between a circumcircle and an inscribed

(a) (Sharygin olympiad, 2023, final, 10.4) circle

(b\*) (Xiuyi Chen, aka LoloChen, 2024) conic

centered at  $X$ . Let  $A_1$  be the reflection of  $A$  about  $X$ . Prove that the point isogonally conjugated to  $A_1$  with respect to  $ABC$  moves along a line.

The following problem is in some sense the converse to the Skutin lemma.

**Problem 54\*** (Xinchen Yu, 2024). A triangle  $ABC$  rotates between a circumcircle and an inconic centered at  $X$ . Let  $G$  be the centroid of  $ABC$ , and a point  $Y$  be such that  $\vec{GY} = -2\vec{GX}$ . Prove that  $Y$  is isogonally conjugated to a fixed point.

**Remark.** If the conic is the incircle, then  $Y$  is the Nagel point isogonally conjugated to the center of the positive homothety of the incircle and the circumcircle, which is clearly fixed.

**Problem 55\*\*.** It is easy to see the similarity of the problems (23), (25), and (28). Formulate a general assertion including them.

**Problem 56.**

(a\*) A hexagon  $ABCDEF$  rotates between two circles. Let  $P$  be a fixed point, and points  $Q$ ,  $R$  be isogonally conjugated to  $P$  with respect to the triangles  $ACE$  and  $BDF$  respectively. Prove that all lines  $QR$  are concurrent or parallel.

(b\*\*) Let a hexagon  $ABCDEF$  rotate between two arbitrary conics. The circumcircles of triangles  $ACE$  and  $BDF$  meet for the fourth time the circumconic at points  $X$  and  $Y$ . Prove

that all lines  $XY$  are concurrent or parallel.

We will call a family of circles a *copula*, if the centers of all these circles are collinear, or there exists a point having the same power with respect all circles.

**Problem 57.** Let the triangle  $\Delta$  rotate between two arbitrary conics. Prove that its  
 (a\*) circumcircle  
 (b\*\*) nine-point circle  
 lies on a fixed copula.

### 3.7.1 The Poncelet broken lines

The inclosed Poncelet broken lines were educated by the geometers. For example see the problems 7 and 10 from the previous project about Poncelet. In this subsection we educate them more detailly and prove several assertions generalizing the known facts concerning the Poncelet polygons.

Formulate firstly a simple assertion which is interesting itself and can be useful in several problems of this subsection.

**Statement 3.11.** Let  $\ell$  be the radical axis of circles  $\omega_1, \omega_2$  centered at  $O_1$  and  $O_2$  respectively. Prove that  $|\text{pow}_{\omega_1}(P) - \text{pow}_{\omega_2}(P)| = 2O_1O_2 \cdot \text{dist}(P, \ell)$ .

We do not give the proof, you can obtain it projecting the point to the centerline and counting the segments.

Return to the subject. Consider firstly the broken lines with one link

**Problem 58.** Let  $AB$  be a moving chord of a fixed circle  $\omega$  centered at  $O$ , and  $P$  be a fixed point inside  $\omega$ . Prove that the following assertion are equivalent:

- The line  $AB$  touches a fixed conic with focus  $P$ .
- The circumcenter  $O_1$  of  $(PAB)$  moves along a circle or a line.
- The projection of  $P$  to  $AB$  moves along a circle or a line.

**Problem 59.** An inclosed three-links broken line rotate between a circumcircle and an inconic. Let  $\omega$  be the circumcircle of the triangle formed by the links of the broken line.

- (a) Suppose that the inconic is a circle. prove that  $\omega$  touches two fixed circles.  
 (b\*) Prove that in general case  $\omega$  lies in a fixed copula.

**Remark.** This problem generalizes the points (a) and (b) of the problem (20). The authors do not known is it possible that the circles from p.(a) degenerate to lines.

**Problem 60.** A circle  $\Omega$  and a conic with foci  $P$  and  $Q$  are given. The tangents from an arbitrary point  $A \in \Omega$  to the conic (if they exist) meet for the second time  $\Omega$  at points  $B$  and  $C$ .

- (a) Prove that the point isogonally conjugated to  $P$  with respect to  $ABC$  moves along a circle or a line.
- (b\*) Prove that the pedal circle of  $P$  with respect to  $ABC$  lies on a fixed copula.
- (c\*) Let  $M$  be the Miquel point of  $BPCQ$ . Prove that there exists a fixed inversion or symmetry mapping  $A$  to  $M$ .

**Remark.** The p.(c) yields that  $M$  projectively depends on  $A$  and moves along a circle or a line, and all lines  $AM$  concur. Thus this problem generalizes the problem (41).

**Problem 61.** An unclosed three-links broken line  $ABCD$  rotates between two circles. Let  $\ell$  be the second common external tangent to the incircles of triangles  $ABC$  and  $BCD$ .

- (a\*) Prove that the common point of  $\ell$  and  $BC$  moves along a line.
- (b\*) (G.Zabaznov) Prove that  $\ell$  touches a fixed circle or passes through a fixed point.

## References

- [1] A. V. Akopyan, A. A. Zaslavsky. *Geometry of Conics* // M.: Mathematical world: 2007
- [2] D. Brodskiy *Point moving* // Summer conference of the International mathematical Tournament of towns, 2022
- [3] A. L. Gorodentsev *Geometry, 1st year* // Moscow, 2017 (in Russian)
- [4] G.Chelnokov, E.Diomidov, V.Kalashnikov, P.Kozhevnikov, A.Zaslavsky *On the Poncelet theorem* // Summer conference of the International mathematical Tournament of towns, 2014
- [5] A. Zaslavsky, D. Kosov, M. Muzafarov. *Trajectories of the centers of the Poncelet triangle* // Kvant, №2 (2003), p. 22–25 (in Russian)
- [6] M. Sydorenko *Clawson Conjugates* // t.me/geometry\_ukraine/893
- [7] V. V. Prasolov, Y. P. Soloviev. *Elliptic Functions and Elliptic Integrals*. M.: American Mathematical Society, 1997
- [8] V. Protasov *Two centuries of Poncelet theorem* // Kvant, №5–6 (2014), p. 2–12 (in Russian)
- [9] A. Utkin *Isogonal conjugate in quadrilateral* // Kvant, №2 (2019), p. 37–42 (in Russian)
- [10] I. R. Shafarevich *Basic Notions of Algebra* // Springer, 1989
- [11] mira74 *Ratio lemma* // <https://artofproblemsolving.com/community/q1h2357938p19166714>
- [12] TelvCohl's geometry blog // <https://artofproblemsolving.com/community/c284651>

# Оригами

## Проект представляют:

Канель-Белов А.Я., Корнеев С.А., Нилов Ф.К.,  
Оноприенко А.А., Певницкий Д.Л.,  
Полозков С.С., Романова П.С.,  
Яценко И.В.

Великий российский математик В.И. Арнольд сформулировал множество красивых задач. В частности, в 1956 году он сформулировал следующую задачу о мятом рубле.

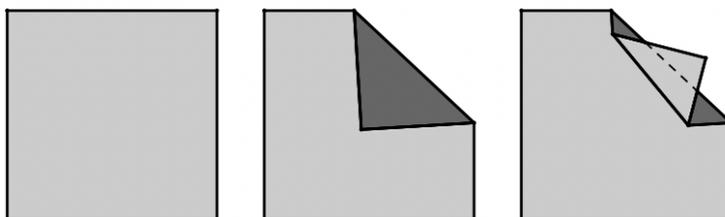
**Проблема 1.** Можно ли сложить прямоугольный лист бумаги (купюру) на плоскости так, что периметр полученной фигуры превысит периметр исходного листа?



Сразу возникает вопрос: что значит “сложить” в формулировке? В зависимости от разных определений получаются разные ответы.

**Упражнение.** Произвольный многоугольник  $M$  согнули вдоль пересекающей его прямой и получили многоугольник  $M'$ . Докажите, что его периметр не увеличился.

Из упражнения выше немедленно следует, что при любом числе последовательных перегибов невозможно увеличить периметр данного многоугольника. На рисунке ниже помимо перегиба изображена другая операция, которую назовем *отгибом*.

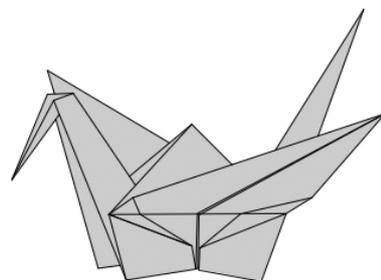
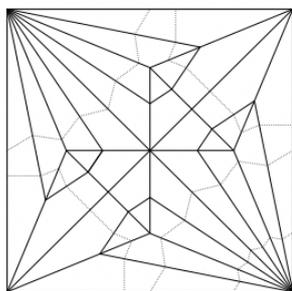


Очевидно, что она увеличивает периметр, однако до сих пор остается открытой следующая

**Проблема 2.** Можно ли увеличить периметр многоугольника, последовательно выполняя перегибы и отгибы?

Возможно, у вас получится её решить.

Под *складыванием* можно понимать ещё более общую операцию: представьте себе, что мы разметили складки заранее и сгибаем лист целиком, так, что все области, на которые разбит лист складками, остаются плоскими, а перегибание происходит только по складкам. На картинке ниже изображена соответствующая развёртка и сложенный из неё японский журавлик. Точечным пунктиром обозначены складки, которые добавляются при расправлении крыльев, загибании шеи, хвоста и головы (голова — правый нижний угол, крылья — левый нижний и правый верхний, хвост — левый верхний).



Таким же образом, можно рассмотреть любую *абстрактную схему* оригами (разбиение данного прямоугольника на многоугольники, где по сторонам многоугольников, не лежащих на границе исходного прямоугольника, потенциально проводится сгибание). Весьма нетривиальным **вопросом** является *наличие реализации данной абстрактной схемы* (т.е. можно ли провести соответствующее изгибание по нарисованным складкам). Было бы интересно получить в нём продвижения. Нашей целью будет решение следующих двух задач.

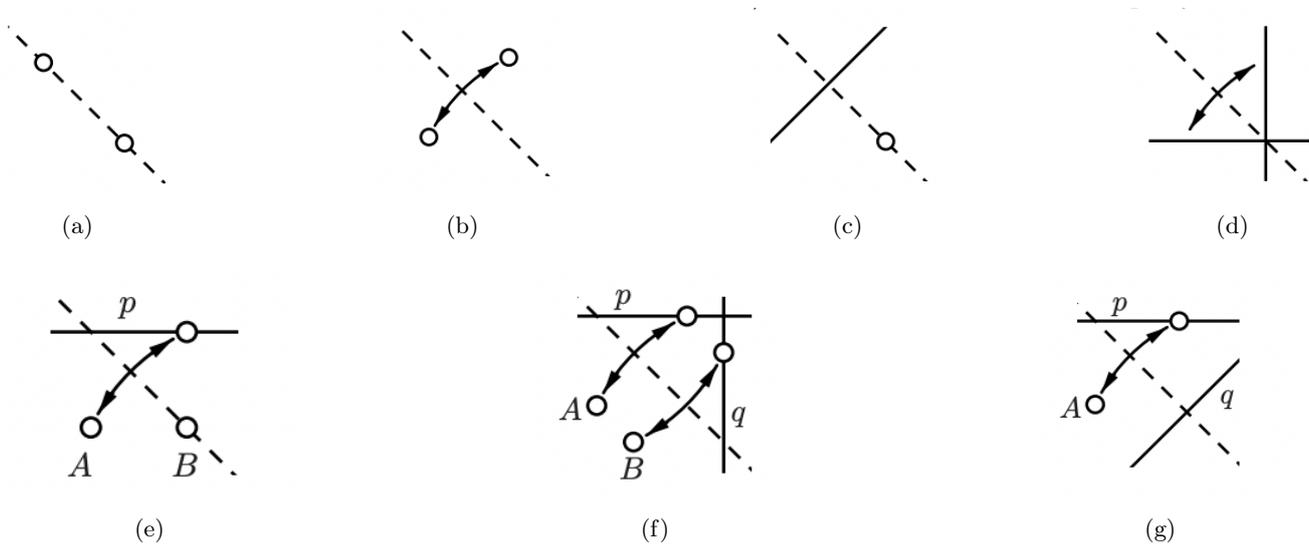
**Задача 1.** Докажите что существует абстрактная схема оригами, увеличивающая периметр.

**Задача 2.** Можно ли периметр сделать сколь угодно большим?

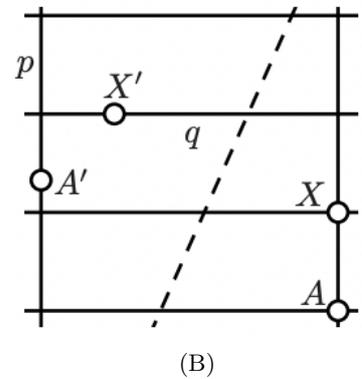
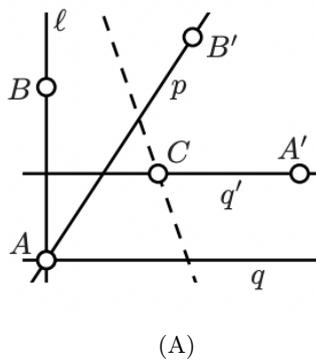
## Правила построения оригами

Мы начнём с формулировки 7 правил, которыми пользуются оригамисты. Подобно построению с помощью циркуля и линейки, оригами-построение состоит из последовательного складывания листа по правилам из этого списка.

1. Лист можно сложить так, что две отмеченные точки будут на складке. (Рис (а)).
2. Лист можно сложить так, что одна отмеченная точка перейдёт в другую отмеченную точку. (Рис (b)).
3. Лист можно сложить так, что отмеченная точка попадёт на складку, а отмеченная прямая перейдёт в себя (то есть, линия складки будет ей перпендикулярна). (Рис (c)).
4. Лист можно сложить так, что отмеченная прямая перейдёт в другую отмеченную прямую. (Рис (d)).
5. Пусть отмечены прямая  $p$  и две точки  $A$  и  $B$ . Тогда лист можно сложить так, что точка  $B$  попадёт на складку, а  $A$  на прямую  $p$ . (Рис (e)).
6. Пусть отмечены две прямые  $p$  и  $q$  и две точки  $A$  и  $B$ . Тогда лист можно сложить так, что точка  $A$  попадёт на прямую  $p$ , а точка  $B$  попадёт на прямую  $q$ . (Рис (f)).
7. Пусть отмечены две прямые  $p$  и  $q$  и точка  $A$ . Тогда лист можно сложить так, что точка  $A$  попадёт на прямую  $p$ , а прямая  $q$  перейдёт в себя (то есть, линия складки будет ей перпендикулярна). (Рис (g)).



### Серия А: построения оригами



**Задача 1.** Дан квадратный лист бумаги со стороной 1. Отмерьте на этом листе расстояние  $\frac{5}{6}$ .

**Задача 2.** На листе бумаги отмечены три вершины треугольника. Проведите оригами-построение его центра описанной окружности, ортоцентра и точки пересечения медиан и убедитесь, что они лежат на одной прямой (Эйлера).

**Задача 3.** Проведите оригами-построение правильного треугольника.

**Задача 4.** Федя отметил на листе бумаги три точки. Сможет ли Даниил согнуть лист по некоторой прямой так, чтобы эти точки оказались в вершинах равностороннего треугольника?

**Задача 5.** Проведите оригами-построение правильного пятиугольника.

**Задача 6.** Проведите оригами-построение произвольного правильного нечётноугольника.

**Задача 7.** Можно ли провести оригами-построение произвольного правильного чётноугольника?

**Задача 8.** (Трисекция угла). Разбить данный угол на три равные части, используя картинку (А).

**Задача 9.** (Удвоение куба) Построить два отрезка с отношением длин  $\sqrt[3]{2}$ , используя картинку (В).

**Задача 10.** Лёша вырезал из бумаги квадратный лист со стороной 2024. Сможет ли он, сделав не более 20 сгибов, построить отрезок длины 1?

**Задача 11.** Федя вырезал из бумаги квадратный лист со стороной 2016. Сможет ли он, сделав не более десяти сгибов, построить отрезок длины 1?

**Задача 12.** Постройте сколь угодно много сгибов, касающихся некоторой параболы.

**Задача 13.** Постройте сколь угодно много сгибов, касающихся некоторого эллипса.

**Задача 14.** Постройте сколь угодно много сгибов, касающихся некоторой гиперболы.

**Задача 15.** Докажите, что для любой точки, которую можно построить с помощью циркуля и линейки, можно построить сгибаниями.

**Задача 16.** Дан центр окружности, точка на окружности и произвольная точка  $M$ , отличная от центра. Проведите оригами-построения точки  $M'$ , инверсной точке  $M$  относительно окружности.

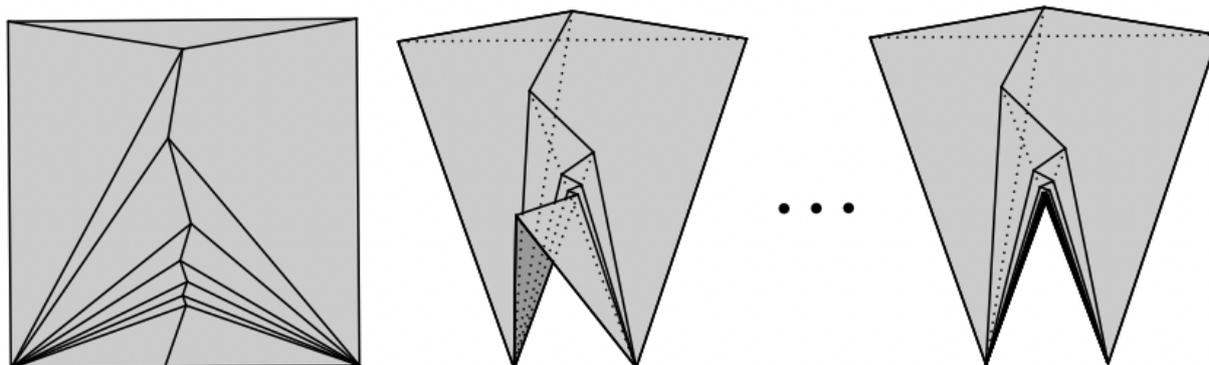
**Задача 17.** Можно ли оригами-построением разделить данный угол на 5 равных частей?

**Задача 18.** Можно ли оригами-построением разделить данный угол на 7 равных частей?

**Задача 19.** Можно ли построить два отрезка с отношением длин  $\pi$ ?

### Серия Б: конструкции, увеличивающие периметр

Следующий пример основан на идее Ивана Яценко, он также даёт лишь незначительное увеличение периметра, но состоит в последовательном применении одного и того же простого действия. Если повторить его достаточно много раз, то получим фигуру сколь угодно близкую к фигуре справа, у неё периметр слегка больше чем у квадрата.



**Задача 1.** Разберитесь в этом построении и докажите, что этот процесс действительно даёт увеличение периметра. Оцените число повторений, после которых периметр становится больше периметра исходного квадрата. Найдите количество слоёв в самом толстом месте полученной фигуры.

Предположим, квадрат сложен в виде плоской фигуры. Отметим все его складки и развернём. Складки дают разбиение квадрата на многоугольники, как, например, на левой картинке в рисунке выше. Это разбиение называется сеткой складок.

**Задача 2.** Докажите, что:

- а) многоугольники в сетке складок можно раскрасить в чёрный и белый цвета так, что соседние по стороне многоугольники имеют разный цвет;
- б) при этом сумма чёрных углов, сходящихся в одной внутренней вершине сетки равна  $180^\circ$ ;
- в) постройте разбиение квадрата на многоугольники такое, что для него выполняются условия 1 и 2, но при этом оно не является сеткой складок.

**Задача 3.** Предположим, выпуклый многоугольник  $M$  можно сложить на плоскости в виде другого выпуклого многоугольника  $M_0$ . Докажите, что периметр  $M_0$  не превосходит периметра  $M$ . (В частности, из квадрата нельзя сложить выпуклый многоугольник с большим периметром).

Назовём фигуру  $F$  вкладываем, если она удовлетворяет следующему условию: любую плоскую фигуру, которую можно сложить из  $F$ , можно полностью накрыть копией  $F$ . Другими словами, если фигура  $F'$  сложена из  $F$ , то  $F'$  конгруэнтна подмножеству  $F$ .

**Задача 4.** Верно ли, что круги и только они являются вкладываемыми?

## Серия В: изгибаемые и жёсткие многогранники, их объёмы

Широко известна формула Герона, выражающая площадь  $S$  треугольника через длины его сторон  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Её можно переписать в виде:

$$S^2 = \frac{1}{16}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)$$

К сожалению, эта формула не распространяется на произвольные многоугольники. Однако, можно пытаться рассматривать многоугольники некоторого специального вида, например, вписанные.

**Задача 1.** Выведите аналогичную формулу, выражающую площадь через длины сторон, для вписанного четырёхугольника.

**Задача 2.** Существует ли аналогичная формула, выражающая площадь через длины сторон, для вписанного многоугольника?

А что происходит в пространстве?

**Задача 3.** Выведите следующую формулу, выражающую объём тетраэдра через длины его рёбер:

$$V^2 = \frac{1}{144} [l_1^2 l_5^2 (l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_6^2 - l_1^2 - l_5^2) + l_2^2 l_6^2 (l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 - l_2^2 - l_6^2) + l_3^2 l_4^2 (l_1^2 + l_2^2 + l_5^2 + l_6^2 - l_3^2 - l_4^2) - l_1^2 l_2^2 l_4^2 - l_2^2 l_3^2 l_5^2 - l_1^2 l_3^2 l_6^2 - l_4^2 l_5^2 l_6^2]$$

Назовём *изгибанием многоугольника* непрерывную деформацию на плоскости, при которой изменяется хотя бы один из углов, но рёбра остаются равными исходным.

Легко понять, что треугольник является *жесткой фигурой*, т.е. он не допускает изгибаний. В то же время произвольный многоугольник с большим числом вершин уже является изгибаемым. А что происходит в пространстве? Напомним некоторые определения.

*Многогранником* мы называем такую совокупность конечного числа плоских многоугольников в трёхмерном евклидовом пространстве, что:

- а) каждая сторона любого из них является стороной в точности ещё одного многоугольника;
- б) от любого из многоугольников можно перейти к любому другому по цепочке многоугольников, в которой последовательные многоугольники имеют общую сторону;
- в) если два многоугольника имеют общую вершину, то соединяющую их цепочку можно составить из многоугольников, которые все имеют эту вершину.

Отметим, что многогранник может иметь *самопересечения*, т.е. образующие его многоугольники могут пересекаться.

Назовём *изгибанием многогранника* непрерывную деформацию в пространстве, при которой изменяется хотя бы один из двугранных углов при рёбрах, но грани остаются равными исходным.

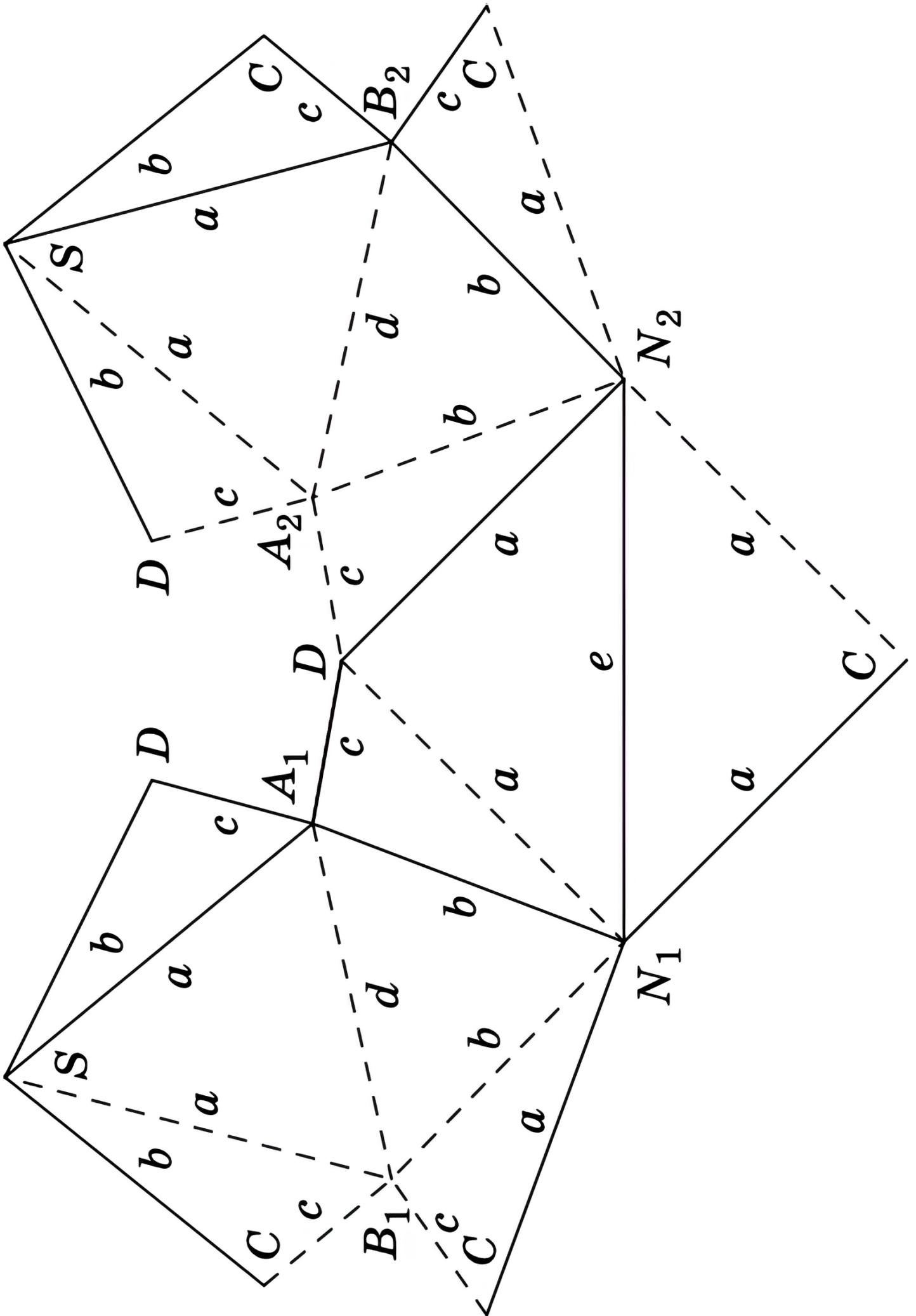
**Задача 4.** Пусть в пространстве дан четырёхугольник  $ABCD$  с равными противоположными сторонами  $AB = CD$ ,  $AD = BC$ , вершины которого не лежат в одной плоскости. Обозначим через  $l$  прямую, проходящую через середины диагоналей  $AC$  и  $BD$ . Пусть  $N$  — произвольная точка пространства, отличная от  $A, B, C, D$  и не лежащая на оси  $l$ . Пусть точка  $S$ , симметрична точке  $N$  относительно  $l$ . Соединим точки  $S$  и  $N$  отрезками с вершинами четырёхугольника  $ABCD$ . Рассмотрим образовавшийся октаэдр  $ABCDSN$ . Докажите, что он допускает изгибания.

**Задача 5.** Пусть в пространстве дан четырёхугольник  $ABCD$  с попарно равными сторонами  $AB = AD$ ,  $CB = CD$ . Рассмотрим плоскость  $p$ , проходящую через диагональ  $AC$  перпендикулярно диагонали  $BD$ . Возьмём любую точку  $N$ , не лежащую на плоскости  $p$  и отличную от вершин четырёхугольника  $ABCD$ . Пусть  $S$  — точка, симметричная  $N$  относительно плоскости  $p$ . Соединим точки  $S$  и  $N$  отрезками с вершинами четырёхугольника  $ABCD$ . Рассмотрим образовавшийся октаэдр  $ABCDSN$ . Докажите, что он допускает изгибания.

Отметим, что октаэдры из предыдущих задач имеют самопересечения. Существует ещё ровно один тип изгибаемого октаэдра (также с самопересечениями). Эти октаэдры были обнаружены бельгийским инженером Рене Брикарром в 1897 году. А существуют ли изгибаемые многогранники без самопересечений?

В 1975 году американский математик Роберт Коннелли придумал, как избавиться от пересечения (так называемые «зарубки Коннелли»), и появились «настоящие» изгибаемые многогранники. В 1978 г. немецким математиком Клаусом Штеффеном был найден многогранник без самопересечений, имеющий всего 9 вершин и 14 граней.

**Задача 6.** Склейте многогранник Штеффена согласно развертке ниже и убедитесь в том, что он допускает изгибания.



## Дополнение: теорема Коши, конструкция Тарасова

**Задача 1.** Пусть на некоторых ребрах выпуклого многогранника расставлены знаки “+” и “-”. Тогда найдется вершина, при обходе вокруг которой происходит менее 4 перемен знака.

Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – совокупность точек на сфере. Совокупность дуг  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$  больших кругов на сфере называется *сферическим многоугольником*. Каждая из дуг совокупности называется *стороной* сферического многоугольника. Углом сферического многоугольника называется угол между касательными, проведенным к смежным касательным в их общей вершине. Сферический многоугольник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от каждой большой окружности, содержащей сторону. Каждый выпуклый многогранный угол с вершиной  $S$  вырезает на сфере с центром  $S$  выпуклый сферический многоугольник. Заметим при этом, что равным плоским углам многогранного угла соответствуют равные стороны сферического многоугольника, а равным двугранным углам – равные углы сферического многоугольника.

Пусть  $A_1A_2 \dots A_n$  и  $B_1B_2 \dots B_n$  – два сферических многоугольника с соответственно равными сторонами  $A_iA_{i+1} = B_iB_{i+1}$ . Припишем каждой вершине  $A_i$  знак + или - в зависимости от того, больше или меньше он угла при вершине  $B_i$ . Если эти углы равны, то вершина остается нейтральной.

**Задача 2.** Пусть у двух выпуклых многоугольников на сфере соответственные стороны равны, а среди соответственных углов есть неравные. Отметим знаком «+» (или «-») вершины тех углов первого многоугольника, которые строго больше (или меньше) соответствующих углов второго многоугольника. Докажите, что число перемен знака при обходе вершин первого многоугольника не меньше 4.

Заметим, что утверждение предыдущей задачи для невыпуклых многоугольников является неверным.

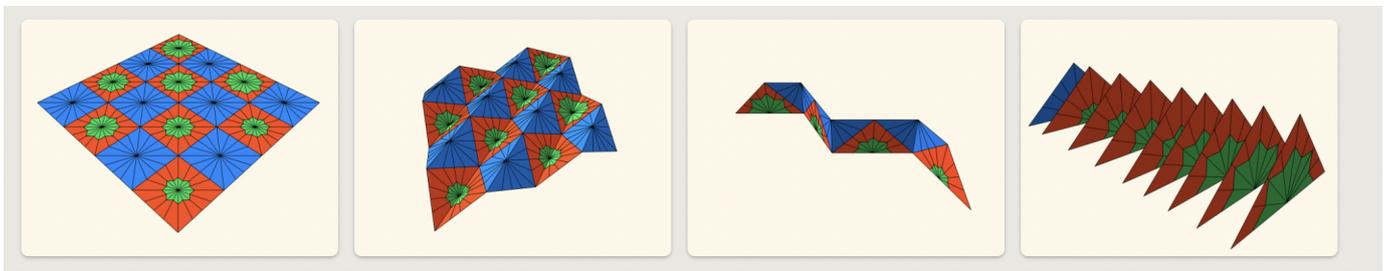
**Задача 3.** Пусть два выпуклых многогранных угла имеют соответственно равные плоские углы. Припишем каждому ребру первого многогранного угла знак «+» (или «-») в зависимости от того, больше (или меньше) он соответствующего двугранного угла другого многогранного угла. Тогда число перемен знака при обходе ребер первого многогранного угла не меньше 4.

**Задача 4. Теорема Коши.** Два выпуклых многогранника с соответственно равными гранями, имеющие одинаковый комбинаторный тип, равны.

Перейдем к конструкции увеличения периметра мятого рубля, придуманной Алексеем Тарасовым. Анимацию можно посмотреть на замечательном сайте <https://etudes.ru/etudes/napkin-folding-problem/>

Возьмём квадратный лист бумаги и разобьём его на клетки, например,  $4 \times 4$ . Раскрасим клетки в шахматном порядке в две краски и в каждом квадрате из центра пустим определённое количество лучей. Расставим в красных квадратах зелёные звёздочки так, чтобы их размер увеличивался при хождении по спирали. Теперь сложим лист бумаги в полоску, затем в прямоугольник, и в самом конце — в треугольник. Эта слойка устроена следующим образом. Есть несколько синих слоев в одной половине, а в другой половине — красные слои. Способ построения зелёных звёздочек был таков, что после проведённого сложения они уменьшаются к середине многослойного треугольника, как бы вложены друг в друга. Начнём сминать слойку так, чтобы синие слои шли выпуклым образом наружу и красно-зелёные слои тоже. Мы получаем поверхность, которая, в конце концов, складывается в плоский многоугольник.

У получившегося многоугольника есть красное основание (синие треугольники находятся там же, внутри слойки) и зелёная гребёнка. При этом у гребёнки иголок столько же, сколько было зелёных звёздочек, т. е. красных квадратов.



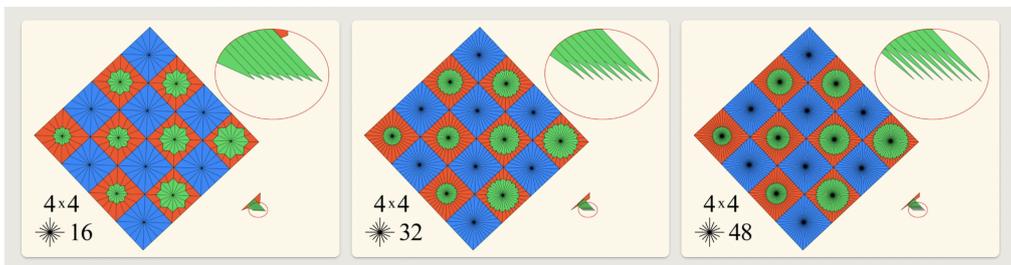
А увеличился ли периметр относительно изначального квадрата? Решена ли поставленная задача? Если сравнить фигуры, то видно, что периметр сильно уменьшился. Зачем же тогда складывали таким сложным способом?

На конкретном примере был рассмотрен общий алгоритм. И в этом алгоритме есть два параметра — количество клеток в разбиении изначального квадрата и количество лучей в каждом квадрате. Посмотрим, что будет, если менять эти параметры.



При том же разбиении  $4 \times 4$  будем увеличивать количество  $N$  лучей внутри каждой клетки. Это приведёт к утоньшению иголочек гребёнки, их меньшему пересечению и, соответственно, небольшому увеличению периметра.

Есть ещё второй параметр  $k$  — количество клеток разбиения изначального квадрата. Если увеличивать этот параметр, то по построению будет увеличиваться и количество иголок в гребёнке.



Совместное увеличение обоих параметров  $N, k$  — и количества клеток, и количества лучей в каждой клетке — даёт увеличение периметра. Насколько же он может увеличиваться? Оказывается, до бесконечности. А это значит, что в какой-то момент он станет больше, чем периметр изначального квадрата!

Задача о мятом рубле — поскладывать прямоугольник и увеличить периметр — решена. Но сколько же раз надо складывать?

**Задача 5.** Оцените параметры  $N, k$ , которые дают увеличение периметра смятого квадрата.

# Origami

The project is presented by:  
Kanel-Belov A.Ya., Korneev S.A., Nilov F.K.,  
Onoprienko A.A., Pevnitskiy D.L.,  
Polozkov S.S., Romanova P.S.

The great Russian mathematician V.I. Arnold formulated many beautiful problems. In particular, in 1956 he formulated the following problem about a crumpled ruble.

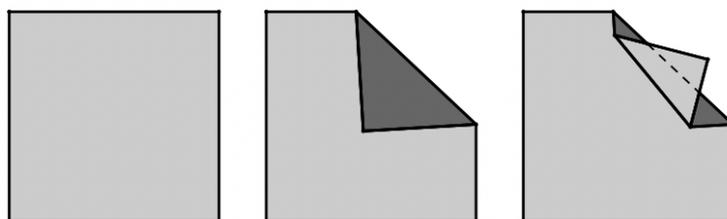
**Problem 1.** Is it possible to fold a rectangular sheet of paper (a banknote) on a plane so that the perimeter of the resulting figure exceeds the perimeter of the original sheet?



The question immediately arises: what does “*fold*” mean in the formulation? Depending on the different definitions, different answers are obtained.

**Exercise.** An arbitrary polygon  $M$  is bent along a line intersecting it and the result is polygon  $M'$ . Prove that its perimeter has not increased.

From the exercise above it immediately follows that it is impossible to increase the perimeter of a given polygon with any number of successive folds. In the figure below, in addition to folds, another operation is shown, which we will call *folding*.

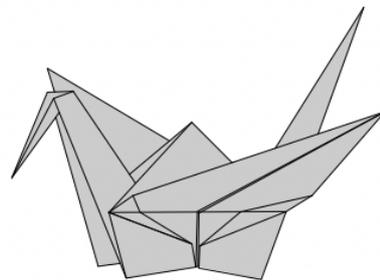
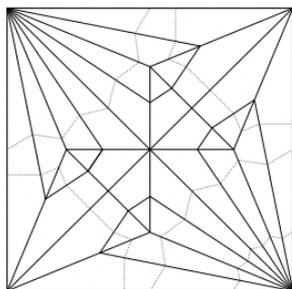


It is obvious that it increases the perimeter, but the following question still remains open

**Problem 2.** *Is it possible to increase the perimeter of a polygon by successively bending and unbending it?*

Perhaps you will be able to solve it.

By *folding* we can understand an even more general operation: imagine that we have marked the folds in advance and fold the sheet as a whole, so that all the areas into which the sheet is divided by folds remain flat, and the folding occurs only along the folds. The picture below shows the corresponding pattern and a Japanese crane folded from it. The dotted line indicates the folds that are added when straightening the wings, bending the neck, tail and head (the head is the lower right corner, the wings are the lower left and upper right, the tail is the upper left).



In the same way, one can consider any *abstract scheme* of origami (dividing a given rectangle into polygons, where bending is potentially carried out along the sides of the polygons that do not lie on the boundary of the original rectangle). A very non-trivial **question** is *the existence of a realization of this abstract scheme (i.e., is it possible to perform the corresponding bending along the drawn folds)*. It would be interesting to make progress in it. Our goal will be to solve the following two problems.

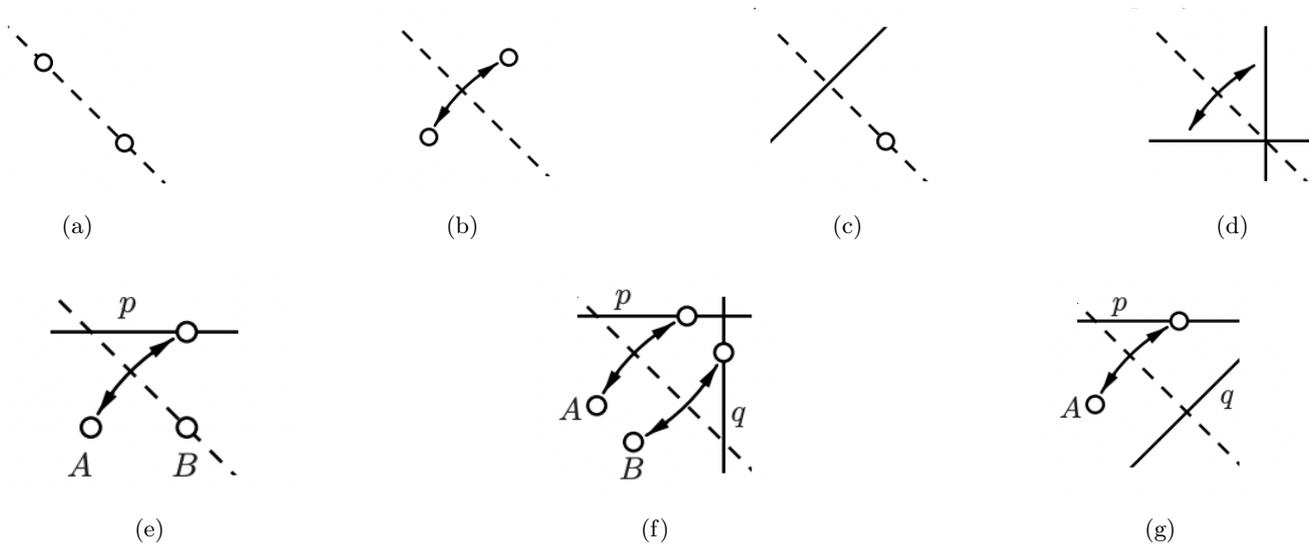
**Problem 1.** *Prove that there exists an abstract origami scheme that increases the perimeter.*

**Problem 2.** *Is it possible to make the perimeter arbitrarily large?*

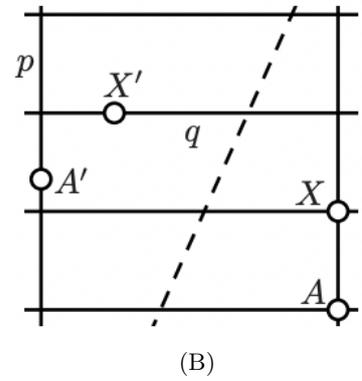
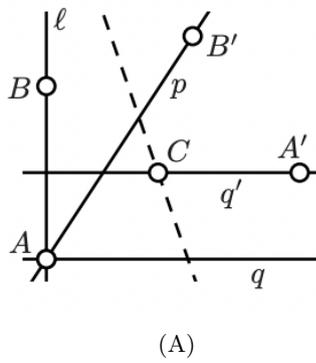
## Origami Construction Rules

We will begin by formulating the 7 rules that origami artists use. Like compass and ruler construction, origami construction consists of successive folding of a sheet of paper according to the rules in this list.

1. The sheet can be folded so that the two marked points are on the fold. (Fig. (a)).
2. The sheet can be folded so that one marked point goes into another marked point. (Fig. (b)).
3. The sheet can be folded so that the marked point falls on the fold, and the marked line goes into itself (that is, the fold line will be perpendicular to it). (Fig. (c)).
4. The sheet can be folded so that the marked line passes into another marked line. (Fig. (d)).
5. Let a line  $p$  and two points  $A$  and  $B$  be marked. Then the sheet can be folded so that point  $B$  falls on the fold, and  $A$  on line  $p$ . (Fig. (e)).
6. Let two lines  $p$  and  $q$  and two points  $A$  and  $B$  be marked. Then the sheet can be folded so that point  $A$  falls on line  $p$ , and point  $B$  falls on line  $q$ . (Fig. (f)).
7. Let two lines  $p$  and  $q$  and a point  $A$  be marked. Then the sheet can be folded so that point  $A$  falls on line  $p$ , and line  $q$  goes into itself (that is, the fold line will be perpendicular to it). (Fig. (g)).



**Series A: Origami Constructions**



**Problem 1.** A square sheet of paper with a side of 1 is given. Measure the distance  $\frac{5}{6}$  on this sheet.

**Problem 2.** Three vertices of a triangle are marked on a sheet of paper. Make an origami construction of its circumscribed circle center, orthocenter, and median intersection point and make sure that they lie on one straight line (Euler).

**Problem 3.** Make an origami construction of a regular triangle.

**Problem 4.** Fedya marked three points on a sheet of paper. Will Daniil be able to bend the sheet along a certain straight line so that these points are at the vertices of an equilateral triangle?

**Problem 5.** Make an origami construction of a regular pentagon.

**Problem 6.** Make an origami construction of an arbitrary regular odd-sided polygon.

**Problem 7.** Is it possible to make an origami construction of an arbitrary regular even-sided polygon?

**Problem 8.** (Trisection of an angle) Divide the given angle into three equal parts using the picture (A).

**Problem 9.** (Doubling the cube) Construct two segments with length ratio  $\sqrt[3]{2}$  using picture (B).

**Problem 10.** Lesha cut out a square sheet of paper with a side of 2024. Will he be able to construct a segment of length 1 by making no more than 20 folds?

**Problem 11.** Fedya cut out a square sheet of paper with a side of 2016. Will he be able to construct a segment of length 1 by making no more than ten folds?

**Problem 12.** Construct as many folds as you like that are tangent to some parabola.

**Problem 13.** Construct as many folds as you like that are tangent to some ellipse.

**Problem 14.** Construct as many folds as you like that are tangent to some hyperbola.

**Problem 15.** Prove that for any point that can be constructed using a compass and ruler, it can be constructed by folds.

**Problem 16.** Given the center of a circle, a point on the circle, and an arbitrary point  $M$  different from the center, make an origami construction of the point  $M'$ , the inverse of the point  $M$  relative to the circle.

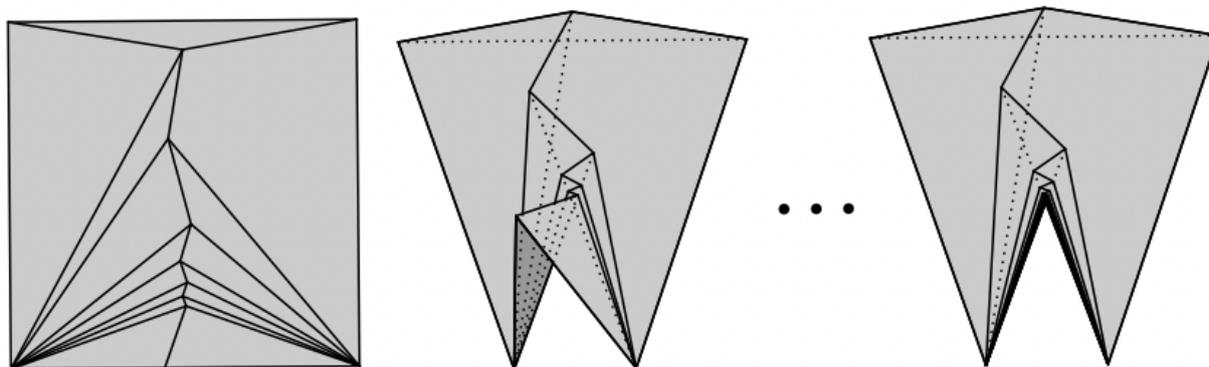
**Problem 17.** Is it possible to divide this angle into 5 equal parts using origami construction?

**Problem 18.** Is it possible to divide this angle into 7 equal parts using origami construction?

**Problem 19.** Is it possible to construct two segments with a length ratio of  $\pi$ ?

### Series B: structures that increase the perimeter

The following example is based on Ivan Yashchenko's idea, it also gives only a slight increase in perimeter, but consists of the consistent application of the same simple action. If you repeat it enough times, you will get a figure as close as you like to the figure on the right, its perimeter is slightly larger than that of a square.



**Problem 1.** Understand this construction and prove that this process does indeed increase the perimeter. Estimate the number of repetitions after which the perimeter becomes greater than the perimeter of the original square. Find the number of layers in the thickest place of the resulting figure.

Let's assume that a square is folded into a flat figure. Let's mark all its folds and unfold it. The folds give a partition of the square into polygons, as, for example, in the left picture in the figure above. This partition is called a *fold grid*.

**Problem 2.** Prove that:

- a) the polygons in the fold grid can be colored black and white so that adjacent polygons on the side have different colors;
- b) in this case, the sum of the black angles converging at one internal vertex of the grid is equal to  $180^\circ$ ;

c) construct a partition of the square into polygons such that conditions 1 and 2 are satisfied, but at the same time it is not a a fold grid.

**Problem 3.** Suppose a convex polygon  $M$  can be folded on the plane to form another convex polygon  $M_0$ . Prove that the perimeter of  $M_0$  does not exceed the perimeter of  $M$ . (In particular, a square cannot be folded to form a convex polygon with a larger perimeter.)

Let us call a figure  $F$  an insert if it satisfies the following condition: any plane figure that can be folded from  $F$  can be completely covered by a copy of  $F$ . In other words, if a figure  $F'$  is folded from  $F$ , then  $F'$  is congruent to a subset of  $F$ .

**Problem 4.** Is it true that circles and only they are inserts?

## Series B: flexible and rigid polyhedrons, their volumes

Heron's formula is widely known, expressing the area  $S$  of a triangle through the lengths of its sides  $a, b, c$ :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

It can be rewritten as:

$$S^2 = \frac{1}{16}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)$$

Unfortunately, this formula does not apply to arbitrary polygons. However, one can try to consider polygons of some special type, for example, inscribed ones.

**Problem 1.** Derive a similar formula expressing the area through the lengths of the sides for an inscribed quadrilateral.

**Problem 2.** Is there a similar formula expressing the area in terms of the lengths of the sides for an inscribed polygon?

And what happens in space?

**Problem 3.** Derive the following formula expressing the volume of a tetrahedron through the lengths of its edges:

$$V^2 = \frac{1}{144} [l_1^2 l_5^2 (l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_6^2 - l_1^2 - l_5^2) + l_2^2 l_6^2 (l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 - l_2^2 - l_6^2) + l_3^2 l_4^2 (l_1^2 + l_2^2 + l_5^2 + l_6^2 - l_3^2 - l_4^2) - l_1^2 l_2^2 l_4^2 - l_2^2 l_3^2 l_5^2 - l_1^2 l_3^2 l_6^2 - l_4^2 l_5^2 l_6^2]$$

Let us call *bending of a polygon* a continuous deformation on a plane in which at least one of the angles changes, but the edges remain equal to the original ones.

It is easy to understand that a triangle is a *rigid figure*, i.e. it does not allow bending. At the same time, an arbitrary polygon with a large number of vertices is already bendable. And what happens in space? Let us recall some definitions.

A *polyhedron* is a set of a finite number of flat polygons in three-dimensional Euclidean space such that:

a) each side of any of them is a side of exactly one more polygon;

- b)** from any of the polygons one can move to any other along a chain of polygons in which successive polygons have a common side;
- c)** if two polygons have a common vertex, then the chain connecting them can be composed of polygons that all have this vertex.

Note that a polyhedron can have *self-intersections*, i.e. the polygons that form it can intersect.

Let us call *bending of a polyhedron* a continuous deformation in space in which at least one of the dihedral angles at the edges changes, but the faces remain equal to the original ones.

**Problem 4.** Let  $ABCD$  be a quadrilateral in space with equal opposite sides  $AB = CD$ ,  $AD = BC$ , whose vertices do not lie in the same plane. Let  $l$  denote the line passing through the midpoints of the diagonals  $AC$  and  $BD$ . Let  $N$  be an arbitrary point in space different from  $A, B, C, D$  and not lying on the  $l$  axis. Let  $S$  be a point symmetric to  $N$  with respect to  $l$ . Connect  $S$  and  $N$  with segments with the vertices of the quadrilateral  $ABCD$ . Consider the resulting octahedron  $ABCDSN$ . Prove that it admits bending.

**Problem 5.** Let a quadrilateral  $ABCD$  be given in space with pairwise equal sides  $AB = AD$ ,  $CB = CD$ . Consider a plane  $p$  passing through the diagonal  $AC$  perpendicular to the diagonal  $BD$ . Take any point  $N$  not lying on the plane  $p$  and different from the vertices of the quadrilateral  $ABCD$ . Let  $S$  be a point symmetrical to  $N$  with respect to the plane  $p$ . Connect the points  $S$  and  $N$  with segments with the vertices of the quadrilateral  $ABCD$ . Consider the resulting octahedron  $ABCDSN$ . Prove that it admits bending.

Note that the octahedra from the previous problems have self-intersections. There is exactly one more type of flexible octahedron (also with self-intersections). These octahedra were discovered by the Belgian engineer René Bricard in 1897. Are there flexible polyhedra without self-intersections?

In 1975, American mathematician Robert Connelly figured out how to get rid of the intersection (the so-called "Connelly notches"), and "true" flexible polyhedra appeared. In 1978, German mathematician Klaus Steffen found a polyhedron without self-intersections, with only 9 vertices and 14 faces.

**Problem 6.** Glue the Steffen polyhedron according to the pattern below and make sure it allows for bending.

