МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 50

Ристо Малчески

ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ОД НАТПРЕВАРОТ КЕНГУР ЗА ОСМО И ДЕВЕТТО ОДДЕЛЕНИЕ

Скопје, 2025

Рецензент:
Д-р Методи Главче
Педагошки факултет, Скопје

СОДРЖИНА

IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

ПРЕДГОВОР

Пред вас е збирка решени задачи од престижниот меѓународен натпревар *Кенгур без граници*, наменета за учениците од осмо и деветто одделение од основното образование. Збирката ги содржи сите задачи од оваа категорија од 2008 до 2024 година.

Задачите, кои ги има вкупно 603, се поделени во четири глави и тоа:

- Алгебра,
- Текстуални задачи,
- Геометриски фигури,
- Геометрија и
- Логика и комбинаторика.

Понатаму, секоја глава е поделена на неколку параграфи, во кои задачите се групирани по сродност. Така, главата Текстуални задачи е поделена на шест параграфи и тоа:

- Броеви и цифри,
- Времето е важно,
- Мериме и споредуваме маси,
- Мериме и споредуваме должини,
- Купуваме и пресметуваме пари и
- Дополнетелни задачи.

Во збиркава се дадени комплетни решенија на задачите, при што решението на секоја задача следи одма по формулацијата на истата. Сепак на читателот му препорачувам прво да се обиде самостојна да ја реши задачата која ја обработува, а потоа да го консултира понуденото решение. Освен тоа, за некои задачи се понудени по два начини за нивно решавање. Ова е особено важно за развојот на математичкото мислење, па затоа на читателот му препорачувам, секаде каде што може, задачата да ја реши и на друг начин од тој што е понуден.

Во оваа пригода сакам да му се заблагодарам на рецензентот д-р Методи Главче чиј ангажман не само што придонесе да се намалат грешките кои го пратат издавањето на било кој ракопис, туку и со своите забелешки допринесе за подобрување на ракописот во целина. Се надевам дека оваа збирка задачи ќе најде свое место во подготовката на учениците за учество на натпреварот Кенгур без граници, со што ќе даде и свој придонес во развојот на учениците надарени за математика.

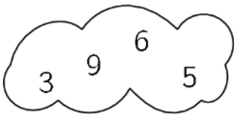
Како што реков, издавањето на секоја книга неодминливо е пропратено со грешки и тоа како од технички, така и од стручен аспект. Оттука, особено ќе бидам благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе придонесе за подобрување на ракописот, а посебно за отстранување на евентуалните грешки.

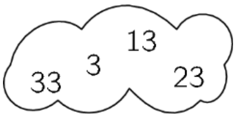
Скопје Авторот
31. јануари, 2025 г.

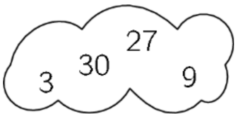
I АЛГЕБРА

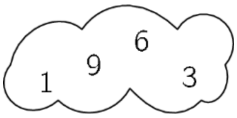
1. БРОЕВИ И ПРЕСМЕТУВАЊА

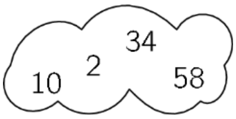
1. Кој од облаците содржи четири парни броеви?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Решение. **E).** Во облаците A, B, C, D соодветно непарни броеви се 3, 5, 9; 3, 13, 23, 33; 3, 9, 27; 1, 3, 9, а додека во облакот E сите броеви се парни.

2. Горјан ги наредил петте картички дадени подолу така што тие формираат најмал можен деветцифрен број. Кој дел е последен во низата гледајќи од лево кон десно?

A) $\boxed{4}$ B) $\boxed{8}$ C) $\boxed{31}$ D) $\boxed{59}$ E) $\boxed{107}$

Решение. **B).** Деветцифрениот број кој го формирал Горјан е

$$\boxed{107}\boxed{31}\boxed{4}\boxed{59}\boxed{8}$$

Значи, последна е картичката $\boxed{8}$.

3. Горјан ги наредил петте картички дадени подолу така што тие формираат најголем можен деветцифрен број. Кој дел е последен во низата гледајќи од лево кон десно?

A) $\boxed{4}$ B) $\boxed{8}$ C) $\boxed{31}$ D) $\boxed{59}$ E) $\boxed{107}$

Решение. B). Деветцифрениот број кој го формирал Горјан е

$$\boxed{8}\boxed{59}\boxed{4}\boxed{31}\boxed{107}$$

Значи, последна е картичката $\boxed{107}$.

4. Матео запишал три природни броја во растечки редослед и еднаквите цифри ги заменил со еднакви символи, а различните цифри со различни символи. Тој ги добил □◊◊, ♡△△, ♡△□. Како изгледа следниот број по овие три броја?

A) ♡♡◊ B) □♡□ C) ♡△◊ D) ♡◊□ E) ♡△♡

Решение. E). Првите два броја се со различни почетни символи, па затоа на срцето соодветствува цифра која е поголема за еден од цифрата која соодветствува на квадратчето. Понатаму, на ромбот соодветствува цифрата 9, па затоа на триаголничето соодветствува цифрата 0. Сега е јасно дека на квадратчето соодвествува цифрата 1. Значи, броевите се 199, 200 и 201. Следниот број е 202 и по замена на цифрите со символи добиваме ♡△♡.

5. Кај кој од дадените изрази вредноста е парен број?

A) 2009 B) $2+0+0+9$ C) $200-9$

D) $200\cdot 9$ E) $200+9$

Решение. D). Имаме:

$$2009=2009,\quad 2-0-0-9=11,\quad 200-9=191,$$
$$200\cdot 9=1800,\quad 200+9=209$$

и парен е само бројот 1800.

6. Кој од изразите

A) $2020-(2021-(2022-2023))$ B) $(2020-2021)-(2022-2023)$

C) $2020-(2021-2022)-2023$ D) $2020-(2021-2022-2023)$

E) $2020-2021-2022-2023$

има најголема вредност.

Решение. D). Имаме

$$2020-(2021-(2022-2023))=2020-(2021+1)=2020-2022=-2$$

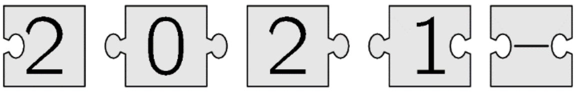
$$(2020-2021)-(2022-2023)=-1-(-1)=-1+1=0,$$

$$2020-(2021-2022)-2023=2020-(-1)-2023=2020+1-2023=-2,$$

$$2020-(2021-2022-2023)=2020-(-2024)=2020+2024=4048,$$

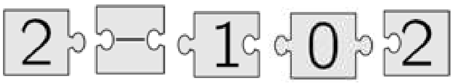
$$2020-2021-2022-2023=-1-4045=-4046.$$

7. Ако петте прикажани фигури се поставаат правилно, т.е. правилно се поврзат, се добива правоаголник на кој е запишан броен израз. Колку е вредноста на овој броен израз?



A) -100 B) -8 C) -1 D) 199 E) 208

Решение. A). Очигледно фигурите  и  се прва и последна во бројниот израз. Лесно се гледа дека единствен можен распоред е



.

Според тоа, бројниот израз е $2-102$ и неговата вредност е 100.

8. Во низа се запишани сите петцифрени броеви чиј производ на цифри е еднаков на $7!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$. Колку е збирот на цифрите на најголемиот од запишаните броеви?

A) 25 B) 27 C) 28 D) 30 E) 31

Решение. Е). Најголемиот број се добива ако ги добиеме најголемите можни пет цифри. Јасно, две од цифрите се 5 и 7. Сега производот на броевите 1, 2, 3, 4 и 6 е $2^4 \cdot 3^2$, па затоа следните по големина најголеми цифри се $3^2 = 9$ и $2^3 = 8$, а последната цифра е 2. Значи, најголемиот можен број е 98752 и збирот на неговите цифри е $9+8+7+5+2=31$.

9. Кој од следниве изрази има најголема вредност?

А) 2011^1 В 1^{2011} С) $1 \cdot 2011$ D) $1+2011$ Е) $1:2011$

Решение. D). Бидејќи

$2011^1 = 2011$, $1^{2011} = 1$, $1 \cdot 2011 = 2011$,

$1+2011 = 2012$, $1:2011 = \frac{1}{2011}$,

најголема вредност е $1+2011 = 2012$.

10. Пресметај ја вредноста на изразот: $2^0 + 2^3$.

А) 1 В) 7 С) 8 D) 9 Е) 10

Решение. D). Имаме:

$$2^0 + 2^3 = 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1 + 8 = 9.$$

11. Калкулаторот на Мартин е расипан, и наместо да множи тој дели, а одзема наместо да собира. Тој сакал да пресмета $(12 \times 3) + (4 \times 2)$. Кој резултат го дава калкулаторот?

А) 2 В) 6 С) 12 D) 28 Е) 38

Решение. А). Калкулаторот наместо да пресмета $(12 \times 3) + (4 \times 2)$ тој ќе пресмета $(12:3) - (4:2) = 4 - 2 = 2$.

12. Колку е $12+23+34+45+56+67+78+89$?

A) 389 B) 396 C) 404 D) 405 E) друг број

Решение. C). Имаме

$$\begin{aligned} A &= 12+23+34+45+56+67+78+89 \\ &= (12+89)+(23+78)+(34+67)+(45+56) \\ &= 4\cdot 101 = 404. \end{aligned}$$

13. Збирот на првите сто непарни природни броеви е одземен од збирот на првите сто парни природни броеви. Кој број е добиен?

A) 0 B) 50 C) 100 D) 200 E) 10100

Решение. C). Имаме:

$$\begin{aligned} A &= (2+4+6+...+200)-(1+3+5+...+199) \\ &= (2-1)+(4-2)+(6-5)+...+(200-199) \\ &= \underbrace{1+1+1+...+1}_{100 \text{ собирци}} = 100. \end{aligned}$$

14. Употребувајќи ја секоја од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 само по еднаш, се формираат два четирицифрени броја, такви што нивниот збир е најмал. Колку е вредноста на тој збир?

A) 2468 B) 3333 C) 3825 D) 4734 E) 6912

Решение. C). За да збирот на формираните броеви е најмал потребно и доволно е во двата најмалите две цифри 1 и 2 во некој распоред да се цифрите на илјадитите, потоа следните две по големина цифри 3 и 4 во некој распоред да се цифрите на стотките во двата броја, па следните две по големина цифри 5 и 6 да се во некој распоред цифрите на десетките на двата броја и на крајот цифрите 7 и 8 во некој распоред да се цифрите на единиците на двата броја. Значи, најмалиот збир ќе биде:

$$1000\cdot(1+2)+100\cdot(3+4)+10\cdot(5+6)+(7+8)=3825.$$

15. Сите четирицфрени природни броеви кои имаат исти цифри со бројот 2013 се запишани на табла во растечки редослед. Која е најголемата разлика помеѓу два соседни броја запишани на таблата?

A) 702 B) 703 C) 693 D) 793 E) 198

Решение. **A).** Низата броеви кои се запишани е

1023,1032, 1203, 1230,1302, 1320, 2013, 2031, 2103,
2130, 2301, 2310, 3012, 3021, 3102, 3120, 3201, 3210.

Јасно најголемата разлика на два соседни броја е $3012-2310=702$.

16. Во квадратчињата на шемата треба да се запишат четири знаци + и еден знак − така што ќе се добие точно равенство.

$$6\square 9\square 12\square 15\square 18\square 21=45$$

Каде треба да се запише знакот $-$?

A) меѓу 6 и 9 B) меѓу 9 и 12 C) меѓу 12 и 15
D) меѓу 15 и 18 E) меѓу 18 и 21

Решение. **D).** Ако секаде запишеме знак +, тогаш добиваме

$$6+9+12+15+18+21=81.$$

Значи, резултатот е за $81-45=36$ поголем од тој што треба да го добиеме. Ако еден знак + замениме со знак −, тогаш резултатот се намалува за двократната вредност на бројот пред кој е извршена промената. Значи, промената треба да се направи пред бројот $36:2=18$ и тогаш се добива $6+9+12+15-18+21=45$.

17. Во квадратчињата на шемата треба да се запишат три знаци + и два знаци − така што ќе се добие точно равенство.

$$6\underset{I}{\square}9\underset{II}{\square}12\underset{III}{\square}15\underset{IV}{\square}18\underset{V}{\square}21=33$$

Каде треба да се запише знакот $-$?

А) I и II B) II и III C) III и IV D) I и III E) I и V

Решение. **D).** Ако секаде запишеме знак +, тогаш добиваме

$$6+9+12+15+18+21=81.$$

Значи, резултатот е за $81-33=48$ поголем од тој што треба да го добиеме. Ако еден знак + замениме со знак $-$, тогаш резултатот се намалува за двократната вредност на бројот пред кој е извршена промената. Значи, промената треба да се направи пред два броја чиј збир е еднаков на $48:2=24$. Јасно, тоа се броевите 9 и 15, или броевите 6 и 18. Но, пред бројот 6 не може да го промениме знакот, па затоа остануваат броевите 9 и 15. Сега имаме

$$6-9+12-15+18+21=33.$$

18. Андреј го добил бројот 1015 како збир на броеви запишани само со цифрата 7 (цртеж десно). Тој сака да го добие бројот 2023 како збир на броеви запишани само со цифрата 7, но притоа цифрата 7 да ја употре-би точно 19 пати. Колку пати ќе биде употребен бројот 77?

$$\begin{array}{r} 777\\ 77\\ +\;\;77\\ 77\\ 7\\ \hline 1015 \end{array}$$

А) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. **E).** Имаме

$$\begin{aligned}2023&=1015+1008\\&=1015+1015-7\\&=777+77+77+77+7+777+77+77+77+7-7\\&=777+777+77+77+77+77+77+77+7\end{aligned}$$

што значи дека бројот 77 ќе биде употребен шест пати.

19. Еден ученик правилно ги собрал двоцифрените броеви дадени лево на таблата и добил резултат 137. Кој број ќе го добие ако ги собере двата четири-

$$\begin{array}{r} AB\\ +\,CD\\ \hline 137 \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} ADCB\\ +\,CBAD\\ \hline ? \end{array}$$

цифрени броја кои се запишани десно на таблата?

A) 13737 B) 13837 C) 14747 D) 23737 E) 137137

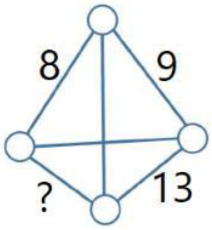
Решение. **B).** Од собирањето на двоцифрените броеви имаме

$$10(A+B)+C+D=137\,.$$

Затоа

$$\begin{aligned}\overline{ADCB}+\overline{CBAD}&=1000(A+C)+100(B+D)+10(A+C)+B+D\\&=1010\cdot(A+C)+101(B+D)\\&=101\cdot(10(A+C)+B+D)\\&=101\cdot 137=138137.\end{aligned}$$

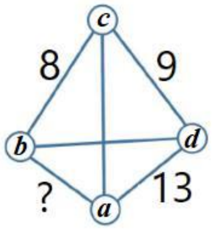
20. Пабло сака да запише по еден број во секое теме и на секој раб на пирамидата прикажана на цртежот десно, така што збирот на броевите запишани во секое две темиња е еднаков на бројот запишан на работ. Кој број ќе го запише на местото на прашалникот?



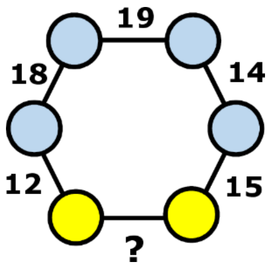
A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Решение. **B).** Нека почнувајќи од долното лево кругче во насока на движењето на стрелките на часовникот се запишани броевите a,b,c,d . Тогаш:

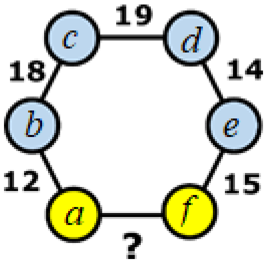
$$\begin{aligned}a+b&=(b+c)-(c+d)+(d+a)\\&=8-9+13=12.\end{aligned}$$



21. Во секое теме на шестаголникот прикажан на цртежот десно е запишан по еден број, така што бројот запишан на страната меѓу секои две соседни темиња е еднаков на збирот на броевите запишани во темињата. Кој број треба да е запишан на местото на прашалникот?



A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15



Решение. **D).** Нека почнувајќи од долното лево кругче во насока на движењето на стрелките на часовникот се запишани броевите a,b,c,d,e,f. Тогаш:

$$\begin{aligned} a+f &= (a+b)-(b+c)+(c+d)-(d+e)+(e+f) \\ &= 12-18+19-14+15=14. \end{aligned}$$

22. Филип сака да помножи три различни броеви од следниве броеви: $-5,-3,-1,2,4,6$. Кој е најмалиот производ кој Филип може да го добие?

A) –200 B) –120 C) –90 D) –48 E) –15

Решение. **B).** За да производот биде најмал тој мора да биде негативен. За да биде негативен, треба да има или еден или три негативни броеви и притоа избраните броеви да бидат најголеми по апсолутна вредност. Според тоа, Филип треба да ги избере броевите $-5,4,6$. Па, бараниот производ е -120.

23. Пресметај ја вредноста на изразот: $2023:(2+0+2+3)$?

A) 179 B) 198 C) 269 D) 289 E) 301

Решение. **D).** Имаме:

$$2023:(2+0+2+3)=2023:7=289.$$

24. Вредноста на изразот $(20+18):(20-18)$ е:

A) 18 B) 19 C) 20 D) 34 E) 36

Решение. **B).** Имаме:

$$(20+18):(20-18)=38:2=19.$$

25. Колку е вредноста на изразот $(20\cdot 21):(2+0+2+1)$?

A) 42 B) 64 C) 80 D) 84 E) 105

Решение. D). Имаме

$$(20\cdot 21):(2+0+2+1)=420:5=84.$$

26. Пресметај ја вредноста на изразот: $2022^1+2022^0+1^{-2022}+0^{2022}$.

A) 0 B) 1 C) 2021 D) 2022 E) 2024

Решение. E). Имаме:

$$2022^1+2022^0+1^{-2022}+0^{2022}=2022+1+1+0=2024.$$

27. Дијана и рекла на Јана да каже број чиј производ на цифри е 24. Колку е збирот на цифрите на најмалиот број што може да го каже Јана?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Решение. E). Бидејќи $24=1\cdot 24=2\cdot 12=3\cdot 8=4\cdot 6$ Јана може да каже еден од броевите 38, 83, 46 и 64. Значи, најмалиот број кој Јана може да го каже е 38 и збирот на неговите цифри е $3+8=11$.

28. Пабло помножил два двоцифрени броја, а потоа избришал по една цифра од секој од трите броја, како што е прикажано на цртежот десно. Колку е збирот на трите избришани цифри?

A) 5 B) 6 C) 9 D) 12 E) 14

Решение. B). Производот на бројот 3 со друг едноцифрен број дава резултат чија цифра на единиците е 2, ако бројот е 4. Сега имаме $\_3\cdot 24=3\_2$. Потоа, бидејќи $23\cdot 24=552$ и $13\cdot 24=312$, заклучуваме дека решение на бројниот ребус е $13\cdot 24=312$. Значи, трите избришани цифри се 1, 1 и 4, а нивниот збир е 6.

29. Филип го запишал збирот на квадратите на два броја како што е прикажано на долниот цртеж.

За жал дел од цифрите се покриени со истурено мастило. Која е цифрата на единиците на првиот број?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. **C).** Цифрата е единиците на вториот број е 2, па затоа цифрата на единиците на неговиот квадрат е 4. Значи, цифрата на единиците на квадратот на првиот број е $9-4=5$. Конечно, цифрита на единиците на првиот број е 5.

30. Броевите m и n се непарни. На кој од дадените изрази вредноста е непарен број?

A) $m(n+1)$ B) $(m+1)(n+1)$ C) $m+n+2$ D) $mn+2$ E) $m+n$

Решение. **D).** Нека $m=2a+1, n=2b+1$. Тогаш

$m(n+1)=(2a+1)(2b+1+1)=2(2a+1)(b+1)$ е парен број

$(m+1)(n+1)=(2a+1+1)(2b+1+1)=4(a+1)(b+1)$ е парен број

$m+n+2=2a+1+2b+1+2=2(a+b+2)$ е парен број

$mn+2=(2a+1)(2b+1)+2=2(2ab+a+b+1)+1$ е непарен број

$m+n=2a+1+2b+1=2(a+b+1)$ е парен број.

31. Бројот 2023 е збир на 2023 последователни цели броеви. Колку е збирот на цифрите на најголемиот од тие броеви?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Решение. **A).** Меѓу последователните цели броеви мора да има и негативни, бидејќи збир на 2023 последователни позитивни цели броеви е поголем од 2023.

Од $2023=2\cdot1011+1$ следува дека од -1011 до 1011 има 2023 броеви, кај кои средниот број е 0, па затоа и нивниот збир е 0. Сега, од -1010 до 1012 има 2023 броеви, чиј збир е 2023 бидејќи меѓу нив се броевите 1011 и 1012 за кои нема спротивни броеви. Најголем е бројот 1012 и збирот на неговите цифри е 4.

32. Вредноста на изразот $11{,}11-1{,}111$ е:

A) 9,009 B) 9,0909 C) 9,99 D) 9,999 E) 10

Решение. D). Имаме:

$$11{,}11-1{,}111=11{,}110-1{,}111=9{,}999.$$

33. Колку е вредноста на изразот $\frac{2011\cdot2{,}011}{201{,}1\cdot20{,}11}$?

A) 0,01 B) 0,1 C) 1 D) 10 E) 100

Решение. C). Со непосредно пресметување имаме

$$\frac{2011\cdot2{,}011}{201{,}1\cdot20{,}11}=\frac{10\cdot201{,}1\cdot2{,}011}{201{,}1\cdot20{,}11}=\frac{10\cdot2{,}011}{20{,}11}=\frac{20{,}11}{20{,}11}=1.$$

34. Колку е вредноста на изразот $\frac{3333}{101}+\frac{6666}{303}$, ако $\frac{1111}{101}=11$.

A) 5 B) 9 C) 11 D) 55 E) 99

Решение. D). Имаме:

$$\frac{3333}{101}+\frac{6666}{303}=3\cdot\frac{1111}{101}+\frac{6}{3}\cdot\frac{1111}{101}=3\cdot11+2\cdot11=55.$$

35. Пресметај ја вредноста на изразот: $\frac{20\cdot24}{2\cdot0+2\cdot4}$.

A) 12 B) 30 C) 48 D) 60 E) 120

Решение. D). Имаме

$$\frac{20\cdot24}{2\cdot0+2\cdot4}=\frac{20\cdot3\cdot8}{8}=60.$$

36. Просечниот број на деца од пет семејства не може да биде:

A) 0,2 B) 1,2 C) 2,2 D) 2,4 E) 2,5

Решение. E). Бидејќи $5 \cdot 0,2 = 1$, $5 \cdot 1,2 = 6$, $5 \cdot 2,2 = 11$, $5 \cdot 2,4 = 12$ се природни броеви, а $5 \cdot 2,5 = 12,5$ не е природен број заклучуваме дека просечниот број деца во пет семејства не може да биде 2,5.

37. За природните броеви x, y и z се исполнети равенствата $x \cdot y = 14$, $y \cdot z = 10$ и $z \cdot x = 35$. Колку е вредноста на $x + y + z$?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

Решение. C). Имаме

$$(x \cdot y) \cdot (y \cdot z) \cdot (z \cdot x) = 14 \cdot 10 \cdot 35, \text{ т.е. } (x \cdot y \cdot z)^2 = 70^2,$$

од каде добиваме $x \cdot y \cdot z = 70$. Сега

$$x = \frac{xyz}{yz} = 7, \quad y = \frac{xyz}{xz} = 2 \text{ и } z = \frac{xyz}{xy} = 5.$$

Значи, $x + y + z = 14$.

38. Колку знаци од знакот за собирање (+) во неточното бројно равенство

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 27$$

треба да се заменат со знакот за множење ($\cdot$) за да се добие точно равенство?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) не е можно

Решение. B). Имаме $1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 27$, што значи дека треба да се заменат два знаци за собирање со два знаци за множење.

39. На кој степен треба да се степенува бројот 4^4 за да се добие бројот 8^8 ?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 8 E) 16

Решение. B). Имаме

$$8^8=(2^3)^8=2^{3\cdot 8}=2^{24}=2^{2\cdot 12}=(2^2)^{12}=(2^2)^{3\cdot 4}=((2^2)^4)^3=(4^4)^3,$$

што значи дека бараниот степен е 3.

40. Филип на табла ги запишал броевите $1,-1,-1,1,-1,$. По петтиот запишан број тој продолжил да запишува броеви, при што секој нареден број е производ на претходните два запишани броја. Колку е збирот на првите 2013 запишани броеви?

A) -1006 B) -671 C) 0 D) 671 E) 1007

Решение. B). Да запишеме неколку членови на низата:

$$\underline{1,-1,-1},\underline{\underline{1,-1,-1}},\underline{1,-1,-1},\underline{\underline{1,-1,-1}},\underline{1,-1,-1},\dots. \qquad (1)$$

Забележуваме дека ако членовите на низата последователно ги групираме во тројки, тогаш збирот на броевите во секој тројка е -1. Сега, бидејќи $2013:3=671$, т.е. имаме 671 тројка чиј збир е -1, заклучуваме дека бараниот збир е -671.

Забелешка. Дека навистина се добива низата (1) може да се докаже со помош на математичка индукција. Навистина, нека низата е a_i, $i=1,2,3,...$. Тогаш $a_1=1, a_2=-1, a_3=-1$, т.е. првата тројка е од дадениот вид. Нека претпоставиме дека $k-$тата тројка е од дадениот вид, т.е. $a_{3k+1}=1, a_{3k+2}=-1, a_{3k+3}=-1$. Тогаш за $(k+1)-$та тројка имаме

$$a_{3(k+1)+1}=a_{3k+2}a_{3k+3}=(-1)\cdot(-1)=1,$$
$$a_{3(k+1)+2}=a_{3k+3}a_{3(k+1)+1}=(-1)\cdot 1=-1,$$
$$a_{3(k+1)+3}=a_{3(k+1)+1}a_{3(k+1)+2}=1\cdot(-1)=-1.$$

Сега, од принципот на математичка индукција следува дека сите тројки се од дадениот вид.

41. Нека S е бројот на точни квадрати на природни броеви што се наоѓаат меѓу броевите 1 и 2013^6. Нека Q е бројот на точни кубови на природни броеви што се наоѓаат меѓу 1 и 2013^6. Тогаш

A) $S=Q$ B) $2S=3Q$ C) $3S=2Q$ D) $S=2013Q$ E) $S^3=Q^2$

Решение. D). Имаме $2013^6=(2013^3)^2$, па затоа $S=2013^3$. Од друга страна $2013^6=(2013^2)^3$, па затоа $Q=2013^2$. Според тоа,

$$S=2013^3=2013\cdot 2013^2=2013Q.$$

42. Пресметај $x+y$, ако $\sqrt{x}+\sqrt{y}=x-y=9$.

A) $\sqrt{5}+2$ B) 9 C) 41 D) 81 E) 100

Решение. C). Имаме:

$$\begin{aligned}&x-y=9,\\&(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})=9,\\&\sqrt{x}-\sqrt{y}=1\end{aligned}$$

Според тоа,

$$x+y=\tfrac{1}{2}((\sqrt{x}+\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2)=\tfrac{1}{2}(9^2+1^2)=41.$$

2. РАВЕНСТВА, РАВЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА

1. Кој број треба да се стави на местото на буквата A за да пресметувањата $2\cdot 18\cdot 14=6\cdot A\cdot 7$ се точни?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

Решение. D). Имаме

$$\begin{aligned}&2\cdot 18\cdot 14=6\cdot A\cdot 7\\&2\cdot 6\cdot 3\cdot 14=42A\,,\\&12\cdot 42=42A,\\&A=12.\end{aligned}$$

2. Броевите 2, 3, 4 и уште еден број се запишаниво квадратната шема, по еден број во секое квадратче. Збирот на броевите во првиот ред е 9, а збирот на броевите во вториот ред 6. Кој е непознатиот број?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 4

Решение. B). Збирот на сите четири броја е еднаков на збирот на збировите на броевите запишани во првиот и збирот на броевите запишани во вториот ред, однос на $9+6=15$. Според тоа, ако a е четвртиот број, тогаш

$$a+2+3+4=15\text{, т.е. } a=6$$

3. Во табелата десно Горјан ги запишал броевите од 1 до 8 така што збирот на броевите запишани во полињата на секој од двата реда е еднаков и збирот на броевите запишани во полињата на секоја од четирите колони е еднаков. Кој број е запишан во сивото поле?

	4		▨
3		8	

A) 1 B) 2 C) 5 D) 6 E) 7

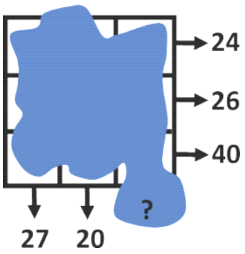
Решение. E). Збирот на запишаните броеви е

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36.$$

Според тоа, збирот на броевите запишани во секој ред е $36:2=18$, а збирот на броевите запишани во секоја колона е $36:4=9$. Значи, вторите броеви во првата, втората и третата колона соодветно се 6, 5 и 1. Сега, бидејќи $6+4+1=11$ во сивото поле е запишан бројот $18-11=7$. Пополнетата табела е прикажана на цртежот десно.

6	4	1	7
3	5	8	2

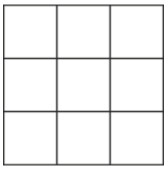
4. Во секое од квадратчињата од 3×3 квадратот е напишан по еден број. За жал броевите не се видливи бидејќи на листот се истурило мастило. Но, збирот на броевите во секој редица и збирот на броевите во две од колоните се познати, (види цртеж). Колку е збирот на броевите во третата колона?



A) 41 B) 43 C) 44 D) 45 E) 47

Решение. B). Збирот на сите броеви во 3×3 квадратот е еднаков на збирот на збировите од сите броеви во трите редици, однсно на збирот на збировите на броевите во трите колони. Затоа збирот на броевите во целиот квадрат е еднаков на $24+26+40=90$. Значи, збирот на броевите од третата колона е $90-(27+20)=43$.

5. Матео во секое поле на 3×3 табелата запишал различен број од 1 до 9, а потоа ги нашол збировите на броевите во секој ред и секоја колона. Пет од збировите кои ги добил се: 12, 13, 15, 16 и 17. Кој е шестиот збир?



A) 17 B) 16 C) 15 D) 14 E) 13

Решение. A). Збирот на сите броеви запишани во табелата е

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$$

Збирот на збировите на броевите запишани во трите редици е еднаков на збирот на сите броеви запишани во табелата, а истото важи и за збирот на збировите на броевите запишани во трите колони. Значи збирот на овие шест збира е два пати поголем од збирот на броевите на сите броеви запишани во табелата. Познати ни се пет од овие шест збира и нека шестиот збир го означиме со a. Имамр

$$a+12+13+15+16+17=2\cdot 45,$$
$$a+73=90,$$
$$a=17.$$

Еден распоред на броевите кој ги задоволува условите на задачата е даден на цртежот десно.

6	8	3
1	7	5
9	2	4

6. Барбара сака да ја пополни правоаголната шема (дадена на цртежот) запишувајќи три броја, по еден во секое празно квадратче. Притоа, збирот на броевите во првите три квадратчиња да биде 100, во средните три збирот да биде 200, а во последните три збирот да биде 300. Кој број Барбара треба да го запише во средното квадратче?

10				130

А) 50 В) 60 С) 70 D) 75 Е) 100

Решение. **B).** Броевите запишани во второто, третото и четвртото квадратче гледано од лево кон десно ќе ги означиме со x, y и z соодветно. Тогаш од условот на задачата имаме

$$\begin{cases} 10+x+y=100, \\ x+y+z=200, \\ y+z+130=300. \end{cases}$$

Ако ги собереме првата и третата равенка имаме

$$140+\underbrace{x+y+z}_{200}+y=400, \text{ т.е. } 340+y=400.$$

Значи, во средното квадратче Барбара треба да го запише бројот $y=400-340\ \ 60$.

7. Ако $y = x + z, z = 3x - y$ и x е најмалиот природен број, пресметај ја вредноста на изразот $y^2 - z$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. **C).** Имаме $x = 1$. Сега, ако ги собереме дадените равенства, добиваме $y + z = x + z + 3x - y$, од каде наоѓаме $y = 2x$. Значи, $y = 2$ и $z = 3 \cdot 1 - 2 = 1$. Конечно, $y^2 - z = 2^2 - 1 = 3$.

8. Ако $A + 22 = 2024$, колку е $\frac{A^2-4A+4}{1000}$.

A) 4000 B) 4044 C) 4048 D) 4052 E) 4056

Решение. **A).** Имаме $A - 2 = 2000$, па затоа

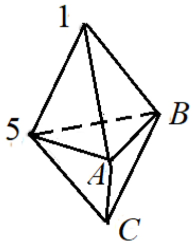
$$\frac{A^2-4A+4}{1000} = \frac{(A-2)^2}{1000} = \frac{2000^2}{1000} = 4000.$$

9. Ако $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{286}$ и $A:B = 11:13$, пресметај $A + B$.

A) 96 B) 72 C) 48 D) 24 E) 6

Решение. **A).** Имаме $A = \frac{11B}{13}$, па затоа $\frac{13}{11B} - \frac{1}{B} = \frac{1}{286}$, т.е. $B = 52$. Сега, $A = \frac{11 \cdot 52}{13} = 44$, па затоа $A + B = 96$.

10. Телото прикажано на цртежот десно е формирано од шест триаголници. Во секое негово теме е запишан по еден број. За секој ѕид на телото е пресметан збирот на запишаните броеви кои се во неговите темиња. Се покажало дека сите добиени збирови се еднакви. Колку е збирот на сите запишани броеви?



A) 9 B) 12 C) 17 D) 18 E) 24

Решение. C). Нека во темињата A,B,C се запипнаи броевите x,y,z, соодветно. Тогаш

$$\begin{cases}1+x+y=1+5+y,\\1+x+y=1+5+x,\\1+x+y=x+y+z,\end{cases}$$

од каде добиваме $x=5, y=5, z=1$. Според тоа, збирот на сите запишани броеви е $1+5+5+5+1=17$.

11. Во квадратчињата на табелата прикажана на цртежот десно се запишани едноцифрени броеви, така што збировите на броевите во колоните се еднакви, и збировите на броевите во редовите се еднакви. Некои од броевите се избришани. Најди го нивниот збир.

1		5
	6	1
6	0	
3	3	

A) 9 B) 11 C) 13 D) 15 E) 17

Решение. B). Ако недостасуваат броевите a,b,c,d (цртеж десно), тогаш $6+a=7+b=6+c=6+d$, па затоа $c=d=a=b+1$. Од друга страна од втората и третата колона имаме $9+a=6+2a$, па затоа $a=3$. Значи, недостасуваат броевите 3, 3, 3 и 2 и нивниот збир е 11.

1	a	5
b	6	1
6	0	c
3	3	d

12. Пабло треба да запише по еден број во секое квадратче на границата на табела со димензии 5×6. Бројот запишан во секое квадратче треба да биде еднаков на збирот на броевите запишани во соседните квадратчиња од границата на табелата (соседни се квадратчињата кои имаат заедничка страна). Два броја веќе се запишани во табелата (цртеж десно). Кој број ќе го запише Пабло во полето означено со x?

10					3
	x				

A) 10 B) 7 C) 13 D) –13 E) –3

Решение. B). При ознаки како на цртежот десно имаме: $10+b=a$, $a+c=b$, па затоа $10+a+c=a$, т.е. $c=-10$. Сега имаме:

$3+c=d$, па е $d=-7$,

$b+d=c$, па е $b=-3$,

$a+c=b$, па е $a=7$,

$e+a=10$, па е $e=3$,

$f+10=e$, па е $f=-7$,

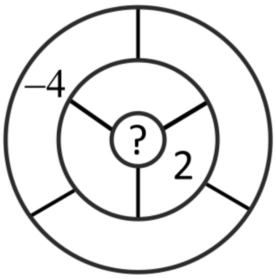
$g+e=f$, па е $g=-10$,

$h+f=g$, па е $h=-3$,

$g+x=h$, па е $x=7$.

10	a	b	c	d	3
e					
f					
g					
h	x				

13. Ристанка треба да запише број во секој од седумте делови од шемата прикажана на цртежот десно. Два делови се соседни ако имаат заеднички дел од нивните граници. Бројот во секој дел е збир на броевите од сите негови соседни делови. Ристанка веќе запишала два броја, како што е означено на цртежот. Кој број мора да го напише во центарот на шемата?



A) 1 B) –2 C) 6 D) –4 E) 0

Решение. C). Со x да го означиме бројот запишан на местото на прашалникот. Бројот –4 е еднаков на збирот на четирите од петте броеви кои се соседни на бројот 2. Значи, $-4+x=2$, т.е. $x=6$.

14. Матео одлучил да запише броеви во сите полиња на 3×3 табелата, така што збирот на броевите во сите можни 2×2 квадрати ќе биде секогаш еднаков. Во гри

2		4
?		3

агли тој запишал броеви како што е прикажано на цртежот десно. Кој број треба да го запише во четвртиот агол на табелата?

A) 0 B) 1 C) 4 D) 5 E) 6

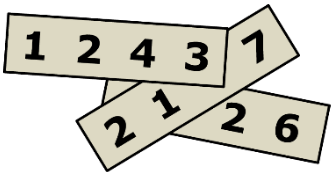
Решение. B). При ознаки како на цртежот десно имаме $2+a=b+4, a+x=b+3$. Сега, ако од втората равенка ја одземе првата, добиваме

2		4
a		b
x		3

$$a+x-2-a=b+3-b-4,$$

па затоа $x-2=-1$, т.е. $x=1$.

15. Три четирицифрени броеви се запишани на три различни парчиња од хартија. Парчињата од хартија се наместени така што три цифри се покриени, како што е прикажано на цртежот. Збирот на трите четирицифрени броеви е 10126. Кои се покриените цифри?



A) 5, 6 и 7 B) 4, 5 и 7 C) 4, 6 и 7 D) 4, 5 и 6 E) 3, 5 и 6

Решение. A). Од цртежот следува дека броевите се 1243, $2107+10a$ и $1000b+100c+26$, па затоа

$$1243+2107+10a+1000b+100c+26=10126,$$
$$1000b+100c+10a=6750,$$
$$100b+10c+a=675.$$

Според тоа, $a=5, c=7, b=6$.

16. Шестцифрениот број $\overline{2ABCDE}$ се множи со 3 и резултатот од множењето е шестцифрениот број $\overline{ABCDE2}$. Колку е збирот на цифрите на почетниот број?

A) 24 B) 27 C) 30 D) 33 E) 36

Решение. B). Нека $x=\overline{ABCDE}$. Тогаш

$$3\cdot(200000+x)=10x+2,$$
$$600000+3x=10x+2,$$
$$7x=599998,$$
$$x=85714.$$

Значи, $\overline{2ABCDE}=285714$, па збирот на цифрите на бројот е

$$2+8+5+7+1+4=27.$$

17. Шестцифрениот број $\overline{1ABCDE}$ се множи со 3 и резултатот од множењето е шестцифрениот број $\overline{ABCDE1}$. Колку е збирот на цифрите на почетниот број?

A) 21 B) 24 C) 27 D) 30 E) 36

Решение. **B).** Нека $x=\overline{ABCDE}$. Тогаш

$$3\cdot(100000+x)=10x+1,$$
$$300000+3x=10x+1,$$
$$7x=299999,$$
$$x=42857.$$

Значи, $\overline{1ABCDE}=1242857$, па збирот на цифрите на бројот е

$$1+4+2+8+5+7=27.$$

18. Пабло на табла запишал петцифрен број. Од него избришал една цифра и добил четирицифрен број. Збирот на петцифрениот и четирицифрениот број е 52713. Колку е збирот на цифрите на почетниот петцифрен број?

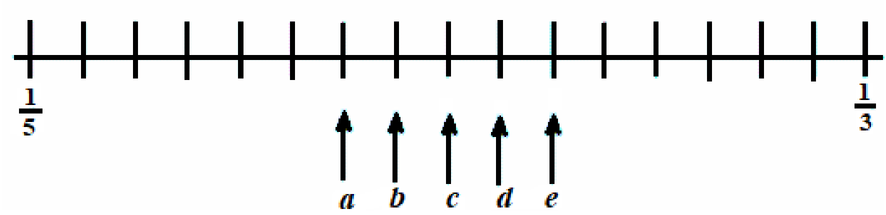
A) 26 B) 20 C) 23 D) 19 E) 17

Решение. **C).** Бидејќи збирот на петцифрениот и четирицифрениот број добиен со бришење на една цифра од петцифрениот број е непарен број, заклучуваме дека е избришана цифрата на единиците на петцифрениот број. Според тоа, ако петцифрениот број е $\overline{abcde}$, тогаш четирицифрениот број е $\overline{abcd}$. Според тоа,

$$\overline{abcde}+\overline{abcd}=52713,$$
$$10\overline{abcd}+e+\overline{abcd}=52713,$$
$$11\overline{abcd}+e=11\cdot 4792+1,$$

од каде следува $\overline{abcd}=4792$ и $e=1$. Значи, петцифрениот број е 47921 и збирот на неговите цифри е $4+7+9+2+1=23$.

19. На бројната права се означени дропките $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{3}$. На кое место е дропката $\frac{1}{4}$?



A) *a* B) *b* C) *c* D) *d* E) e

Решение. **A).** Имаме, $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$. Должината на една мала отсечка е $\frac{1}{16}\cdot\frac{2}{15}=\frac{1}{120}$. Сега, $\frac{1}{5}+\frac{x}{120}=\frac{1}{4}$, од каде добиваме $\frac{x}{120}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$, т.е. $\frac{x}{120}=\frac{1}{20}$, па затоа $x=6$. Значи, дропката $\frac{1}{4}$ е на местото *a*.

20. Кој од следниве броеви е најмалиот број кој не може да се запие како збир на три едноцифрени броеви?

A) 10 B) 15 C) 23 D) 25 E) 28

Решение. **D).** Имаме, $10=1+4+5$, $15=4+5+6$, $23=6+8+9$. Од друга страна $24=9+8+7<9+8+8=9+9+7=25<9+9+9=27$, па значи 25 и 28 не може да се запишат како збир на три едноцифрени броеви. Значи, бараниот број е 25.

21. Која од следниве дропки има најголема вредност?

A) $\frac{8+5}{3}$ B) $\frac{8}{3+5}$ C) $\frac{3+5}{8}$ D) $\frac{8+3}{5}$ E) $\frac{3}{8+5}$

Решение. A). Имаме

$$\frac{8}{3+5}=\frac{3+5}{8}=1,\ \frac{3}{8+5}=\frac{3}{13}<1,\ \frac{8+3}{5}=\frac{11}{5}<3 \text{ и } \frac{8+5}{3}=\frac{13}{3}>4.$$

Значи, најголема вредност има дропката $\frac{8+5}{3}$.

22. Збирот на три различни природни броеви е 7. Колку изнесува производот на тие броеви?

A) 12 B) 10 C) 9 D) 8 E) 5

Решение. D). Нека a,b,c се три различни природни броја такви што $a<b<c$ и $a+b+c=7$. Тогаш $a=1$, бидејќи ако $a\geq 2$, тогаш $b\geq 3$, $c\geq 3$, па затоа $a+b+c\geq 2+3+4=9$. Сега $b+c=6$, па како погоре заклучуваме дека $b=2, c=4$. Според тоа, бараниот производ е $1\cdot 2\cdot 4=8$.

23. Позитивниот број a е помал од 1, а бројот b е поголем 1. Кој од следниве броеви има најголема вредност ?

A) $a\cdot b$ B) $a+b$ C) $a:b$ D) b E) не зависи од a и b

Решение. B). Бидејќи $0<a<1<b$, имаме $b^2>1$ од каде добиваме $a:b<ab$. Од $b>0$ и $a<1$, добиваме $ab<b$. Понатаму, од $0<a$ следува $b<a+b$. Според тоа, $a:b<ab<b<a+b$.

24. Во изразот $\frac{K\cdot A\cdot N\cdot G\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{G\cdot A\cdot M\cdot E}$ на различни букви соодветствуваат различни ненулти цифри, а на исти букви исти цифри. Која е најмалата целобројна позитивна вредност на овој израз?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

Решение. B). Имаме $\frac{K\cdot A\cdot N\cdot G\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{G\cdot A\cdot M\cdot E}=\frac{K\cdot N\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{M\cdot E}$. Бидејќи

$$M\cdot E\leq 9\cdot 8=72, K\cdot A\cdot N\cdot R\cdot O\cdot O\geq 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1=120,$$

добиваме $\frac{K\cdot N\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{M\cdot E}\geq 2$. Од друга страна за

$$M=8, E=9, K=2, A=4, N=3, R=6, O=1$$

и на пример $G=7$, добиваме $\frac{K\cdot A\cdot N\cdot G\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{G\cdot A\cdot M\cdot E}=2$.

25. Ако $a-1=b+2=c-3=d+4=e-5$, кој од броевите a,b,c,d,e е најголем?

A) a B) b C) c D) d E) e

Решение. E). Имаме

$$e=a+4>a, e=b+7>b, e=c+2>c, e=d+9>d,$$

од каде следува дека најголем е бројот e.

26. Кај колку природни броеви n декадните записи на квадратот и кубот имаат еднаков број цифри?

A) 0 B) 3 C) 4 D) 6 E) бесконечно многу

Решение. B). Имаме

$$1^2=1,\quad 1^3=1,$$
$$2^2=4,\quad 2^3=8,$$
$$4^2=16,\quad 4^3=64,$$

и тоа се три броја со саканото својство, при што лесно се проверува дека нема други такви едноцифрени броеви.

Нека $n=\overline{a_1a_2...a_k}$, $k\geq 2$. Тогаш

$$n^3=\overline{a_1a_2...a_k}^3=\overline{a_1a_2...a_k}^2\cdot\overline{a_1a_2...a_k}\geq 10\cdot\overline{a_1a_2...a_k}^2=10n^2$$

што значи дека декадниот запис на n^3 има повеќе цифри од декадниот запис на n^2.

27. На таблата еден по друг се запишани 10 различни природни броеви, такви што секој од вториот па натаму е содржател на претходниот број. Кој е последниот запишан број, ако тој е меѓу 600 и 1000?

A) 768 B) 678 C) 868 D) 878 E) 968

Решение. **А).** Според условот на задачата секој број почнувајќи од вториот па натаму се добива од претходниот со множење со број поголем или еднаков на 2. Затоа, ако првиот број е еднаков на a, тогаш десеттиот број е поголем или еднаков на $2^9 a = 512a$. Според тоа, $512a \leq 1000$, од каде добиваме $a \leq \frac{1000}{512} < 2$, па затоа $a = 1$. Сега, ако сите множители се еднакви на 2, тогаш десетиот број ќе биде $2^9 \cdot 1 = 512 < 600$, што противречи на условот на задачата. Понатаму, ако два множители се поголеми или еднакви на 3, а другите се еднакви на 2, тогаш десеттиот број ќе биде поголем или еднаков на $2^7 \cdot 3^2 \cdot 1 = 1152 > 1000$, што повторно противречи на условот на задачата. Значи, имаме осум множители еднакви на 2 и еден еднаков на 3, па бараниот број е $2^8 \cdot 3 \cdot 1 = 768$.

28. Бројот 5 е решение на равенката

$$a(x+1)^{100} + b(x+1)^{50} + c = 0.$$

Кој од дадените броеви сигурно е решение на оваа равенка?

A) –7 B) –5 C) –4 D) 0

E) равенката нема други решенија.

Решение. **А).** Ако замениме $x+1=t$, добиваме дека $t_0 = 6$ е решение на равенката $at^{100} + bt^{50} + c = 0$. Сега, бидејќи степените на последната равенка се парни, добиваме дека и $t_1 = -6$ е решение на оваат равенка. Значи, за второто решение на почетната равенка важи $x+1=-6$, од каде добиваме $x = -7$.

3. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. Колку од броевите 2, 20, 202, 2020 се прости броеви?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. **B).** Дадените броеви се парни, што значи дека се деливи со 2. Тоа значи дека сите освен бројот 2 се сложени броеви. Според тоа, само бројот 2 е прост број.

2. Андреј, користејќи ги цифрите 1, 2, 3, 4 и 5, и тоа само по еднаш, запишал неколку прости броеви помали од 100. Кој број мора да биде меѓу запишаните прости броеви?

A) 2 B) 5 C) 31 D) 41 E) 53

Решение. **D).** Цифрата 4 може да се употреби само во записот на двоцифрен број и тоа на местото на десетките. Имено, едноцифрениот број 4 е сложен, а секој двоцифрен број со цифра на единиците 4 е делив со 2, па затоа не е сложен број. Прости броеви со цифра на единиците 4 се: 41, 43 и 47. Бројот 47 отпаѓа бидејќи 7 не е меѓу дадените цифри. Ако го запишеме бројот 43, тогаш ни остануваат цифрите 1, 2 и 5. Сега, цифрата 1 мора да учествува во записот на двоцифрен број, па така можни се броевите: 12, 15, 21 и 51, кои се сложени броеви. Значи, мора да биде запишан бројот 41 и тоа е бараниот број. Притоа другите броеви кои можеме да ги запишеме се: 2, 3, 5 или 2, 53 или 5, 23.

3. Две парчиња јаже имаат должина 1 m и 2 m. Александар ги сече парчињата на неколку делови. Сите делови имаат иста должина. Кој од следниве броеви не може да биде вкупниот број на делови добиени од двете парчиња?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 15

Решение. B). Ако од првото јаже се добиени n парчиња, тогаш од второто јаже се добиени $2n$ парчиња. Значи, вкупно имаме $3n$ парчиња, т.е. бројот на парчињата е делив со 3. Од понудените броеви единствено бројот 8 не е делив со 3.

4. Црвенкапа носи колачи на три бабички. Таа почнала со кошница полна со колачи. Пред да влезе во куќата на секоја од бабичките, Големиот Лош Волк јадел по половина од колачите во нејзината кошница. Црвенкапа на секоја од бабичките и давала еднаков на број на колачи. Кога Црвенкапа заминала од куќата на последната бабичка, во нејзината кошница повеќе немало колачи. Кој од следниве броеви сигурно е делител на бројот на колачите кои Црвенкапа ги имала на почетокот?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

Решение. D). Нека третата бабичка добила a колачи. Пред да влезе во нејзината куќа волкот изел a колачи, што значи дека по излегувањето од куќата на втората бабичка Црвенкапа имала $a+a=2a$ колачи. Таа на втората бабичка и дала a колачи, па затоа пред да влезе во нејзината куќа таа имала $a+2a=3a$ колачи. Значи волкот пред куќата на втората бабичка изел $3a$ колачи, па затоа кога Црвенкапа излегла од куќата на првата бабичка таа во кошницата имала $3a+3a=6a$ колачи. На првата бабичка таа и дала a колачи, што значи дека пред тоа Црвенкапа имала $a+6a=7a$ колачи. Значи, пред влегувањето во куќата на првата бабичка Црвенкапа имала $7a+7a=14a$ колачи. Според тоа, бројот на колачите кои Црвенкапа ги имала на почетокот сигурно е делив со 1, 2, 7 и 14. Од понудените броеви тоа е само бројот 7.

5. Во една кутија се ставени бели, сини и жолти топки. Бројот на белите топки е 4 пати помал од вкупниот број сини и жолти топки, а бројот на сините е 6 пати помал од вкупниот број бели и жолти топки. На кој од посочените броеви сигурно е делив вкупниот број топки во кутијата?

A) 24 B) 28 C) 30 D) 35 E) 40

Решение. D). Нека бројот на белите, сините и жолтите топки го означиме со b,s и z, соодветно. Тогаш $s+z=4b$ и $b+z=6s$. Според тоа, $b+4b-s=6s$, т.е. $5b=7s$. Последното значи дека $5|s$, односно $s=5k$. Сега $b=7k$, па затоа $z=4b-s=4\cdot 7k-5k=23k$. Сега, $z+b+s=23k+7k+5k=35k$, што значи дека вкупниот број топки сигурно е делив со 35.

6. Броевите од 1 до 10 се запишани еден по друг во нивниот природен редослед. Меѓу секои два броја е ставен еден од знаците за собирање $(+)$ или множење $(\cdot)$. Нека A е најголемиот број кој може да се добие на тој начин. Кое од дадениве тврдења е точно?

A) A е делив со 3.

B) A е десетцифрен број.

C) Последните три цифри на A се нули.

D) A не завршува на нула.

E) сите претходни одговори не се точни.

Решение. D). Кога множиме со 1 се добива истиот број, па затоа меѓу 1 и 2 треба да е знакот +. Од останатите броеви најголем можен резултат ќе добиеме ако истите ги помножиме. Значи,

$$A=1+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=3628801.$$

Јасно, A е седумцифрен број кој не е делив со 3, и завршува на 1. Тоа значи дека A не завршува на нула, т.е. точно е тврдењето D).

7. Марионка сака да пресече парче конец на девет парчиња со иста должина, па затоа ги означува точките во кои треба да сече. Менче сака да го пресече истото парче конец на осум еднакви парчиња, па затоа и таа ги означува точките во кои треба да сече. На крајот Зоран го зел конецот и го пресекол во сите означени точки. Колку делови добил Зоран?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

Решение. **B).** Марионка на конецот означила деветтини, а Менче означила осмини, бидејќи и едната и другата сакале конецот да го пресечат на еднакви делови. Значи, Марионка означила 8 места, а Менче означила 7 места на кои треба да се пресече конецот. Бидејќи броевите 7 и 8 се заемно прости, никои две означени места нема да се совпаднат. Значи, конецот е пресечен на $8+7=15$ места и се добиени 16 парчиња.

8. Најмалиот делител на бројот A кој е поголем од 1 е 45 пати помал од најголемиот делител на A кој е помал од A . Колку такви природни броеви постојат?

A) 0 B) 1 C) 2 D) повеќе од 2

E) не може да се определи

Решение. **C).** Бидејќи a е 45 пати помал од е најголемиот делител на A, следува дека најголемиот делител на A е $45a$. Тоа значи дека $3|A$. Но, a е најмалиот делител на A поголем од 1, па затоа $a\leq 3$. Природни броеви кои не се поголеми од 3 и се поголеми од 1 се 2 и 3. Бидејќи a е најмалиот и $45a$ е најголемиот делител на A , добиваме $A=45a^2$. Сега, за $a=2$, добиваме $A=180$, а за $a=3$, добиваме $A=405$. Значи, постојат два броја со саканото својство.

9. Во секое квадратче на 3×3 табела треба да се запише по еден природен број така, што збирот на броевите запишани во секој 2×2 квадрат е еднаков на 10. Четири броја се веќе запишани. Кој од дадените броеви може да е збирот на другите пет броја?

	2	
1		3
	4	

A) 9 B) 10 C) 12 D) 13 E) друг одговор

Решение. **E).** Да го означиме бројот во централното поле на табелата со x. Ако го искористиме условот на задачата ја добиваме табелата прикажана на цртежот десно. Збирот на петте броја кои недостасуваат е $20-3x$, што значи дека истиот дава остаток 2 при делење со 3. Ниту еден од дадените броеви не го исполнува овој услов.

$7-x$	2	$5-x$
1	x	3
$5-x$	4	$3-x$

10. Михаил, Григор и Кристијан се тројка (тројца браќа родени во ист ден). Нивните браќа близнаци Мартин и Иван се 3 години помлади. Кој од следниве броеви може да биде збир на годините на петте браќа?

A) 36 B) 53 C) 76 D) 89 E) 92

Решение. **D).** Нека близнаците имаат по a години. Тогаш Михаил, Григор и Кристијан имаат по $a+3$ години. Значи, збирот на годините на браќата е $2a+3(a+3)=5a+9=5(a+1)+4$. Според тоа, збирот на годините на браќата при делење со 5 дава остаток 4. Од понудените броеви единствен таков број е 89, па само тој може да биде збирот на годините на браќата.

11. Колку е збирот на најголемиот трицифрен број кој е делив со 4 и најмалиот четирицифрен број кој е делив со 3?

A) 1996 B) 1997 C) 1998 D) 1999 E) 2000

Решение. C). Најголемиот трицифрен број е $999=4\cdot249+3$, па затоа најголемиот трицифрен број кој е делив со 4 е $999-3=996$. Најмалиот четирицифрен број е $1000=3\cdot333+1$, па затоа најмалиот четирицифрен број кој е делив со 3 е $1000+2=1002$. Конечно, бараниот збир е $996+1002=1998$.

12. Која е првата цифра на најмалиот природен број чиј збир на цифри е еднаков на 2021?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Решение. B). Најмалиот број чиј збир на цифри е еднаков на 2021 се добива ако сите цифри се еднакви на 9, освен првата која треба да е еднаква на остатокот од делењето на бројот 2021 со бројот 9. Имаме $2021=9\cdot224+5$. Според тоа, најмалиот број чиј збир на цифри е еднаков на 2021 е $5\underbrace{999...999}_{224}$ и неговата прва цифра е 5.

13. На хартиена лента во растечки редослед се запишани сите природни броеви чиј збир на цифри е 2019. Кој број е на 217-тото место?

A) $588\underset{222}{99..9}$ B) $678\underset{222}{99..9}$ C) $57\underbrace{999..9}_{223}$

D) $48\underbrace{999..9}_{223}$ E) $66\underbrace{999..9}_{223}$

Решение. A). Најмалиот број чиј збир на цифрие 2019 се добива ако во записот имаме најголем можен број деветки, кои последователно се запишани почнувајќи од цифрата на единиците нанапред. Бидејќи $2019=9\cdot224+3$, тоа е бројот $3\underset{224}{99..9}$. Следните по големина броеви се со водечка цифра 4, една цифра 8 и 223 цифри 9 и нив ги има 224 (во бројот $3\underset{224}{99..9}$ цифрата 3 ја заменуваме со цифрата 4 и една од цифрите 9 ја заменуваме со цифрата 8). Следните два броја по големина имаат водечка цифра 5 и тоа се броевите $57\underbrace{999..9}_{223}$ и $588\underset{222}{99..9}$. Значи, на 2017-тото место се наоѓа бројот $588\underset{222}{99..9}$.

14. Марија продава кокошкини и паткини јајца. Јајцата се наредени во кутии со по: 4, 6, 12, 13, 22 и 29 јајца. Нејзиниот прв купувач ги купил сите јајца од една кутија. Марија забележала дека и останале два пати повеќе кокошкини од паткини јајца. Колку јајца купил првиот купувач?

A) 4 B) 12 C) 13 D) 22 E) 29

Решение. E). Марија вкупно имала $4+6+12+13+22+29=86$ јајца. На Марија и останале два пати повеќе кокошкини од паткини јајца, па затоа бројот на јајцата кои и останале е делив со 3. Понатаму, $86=3\cdot 28+2$, што значи дека бројот на јајцата кои ги продала при делење со 3 дава остаток 2. Единствен таков број е 29. Значи, првиот купувач купил 29 јајца.

15. Секоја цифра од низата која почнува со цифрите 2, 3, 6, 8, 8, ... е добиена на следниов начин: првите две цифри се 2 и 3 и потоа секоја цифра е цифрата на единиците од производот на претходните две цифри во низата. Која е 2017-тата цифра во низата?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

Решение. A). Да ги запишеме првите 16 члена на низата: 2, 3, **6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, 8, 8, 4, 2, 8,** 6, 8, ... Забележуваме дека почнувајќи од третиот член во низата периодично се повторуваат броевите **6, 8, 8, 4, 2, 8** што значи дека имаме периодично повторување на шест броја. Сега, бидејќи $2017-2=2015=6\cdot 335+5$ заклучуваме дека 2017-

тиот член на низата ќе биде петтиот број во периодата, а тоа е бројот 2.

16. Петцифрениот број $\overline{24X8Y}$ е делив со 4, 5 и 9. Колку е збирот на цифрите X и Y?

A) 13 B) 10 C) 9 D) 5 E) 4

Решение. E). За да бројот $\overline{24X8Y}$ е делив со 5, неговата последна цифра треба да е 0 или 5. За да тој е делив со 4, последната цифра Y мора да е една од цифрите 4, 8 и 0. Значи, $Y \in \{0,5\} \cap \{0,4,8\} = \{0\}$, т.е. $Y = 0$. Според тоа бројот е $\overline{24X80}$. За да бројот е делив со 9, треба збирот на неговите цифри да е делив со 9. Оттука следува дека $9 \mid 2+4+X+8+0=14+X$. Единствена таква цифра е $X=4$, и бараниот збир е $X+Y=0+4=4$.

17. Цвеќарката Маргарита има 24 бели, 42 црвени и 36 жолти ружи. Колку најмногу идентични букети може да направи ако треба да ги искористи сите цвеќиња?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

Решение. B). Бидејќи секој вид ружи треба да го подели на еднаков број букети, бројот на букетите ќе биде заеднички делител на броевите 24, 42 и 36. Значи најголемиот можен број букети ќе биде еднаков на $\text{NZD}(24,42,36)=6$.

18. Баба Митра испекла колач за своите внуци, кои треба да дојдат на гости. Но, заборавила дали ќе дојдат 3, 5 или сите 6 внуци. Кој е најмалиот број меѓусебно еднакви парчиња на кои треба да го раздели колачот за да може, кога внуците ќе дојдат, секој внук да добие еднаков дел од колачот?

A) 12 B) 15 C) 18 D) 24 E) 30

Решение. **E).** Бројот на парчињата на кои ќе биде поделен колачот мора да е делив со секој од броевите 3, 5 и 6. Бидејќи се бара најмалиот број парчиња, тоа е најмалиот заеднички содржател на броевите 3, 5 и 6, односно $\text{NZS}(3,5,6)=30$.

19. Најголемиот заеднички делител на природните броеви m и n е 12, а најмалиот заеднички содржател е квадрат на природен број. Колку од петте броеви $\frac{n}{3},\frac{m}{3},\frac{n}{4},\frac{m}{4},mn$ се квадрати на пририден број.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

E) не може да се определи

Решение. **B).** Имаме $\text{NZD}(m,n)=12$, па затоа

$$m=12k, n=12p, \text{NZD}(k,p)=1 \text{ и } \text{NZS}(m,n)=12kp.$$

Според тоа, $12kp=a^2$, од каде добиваме $2^2\cdot 3kp=a^2$. Последното значи дека $3kp=b^2$, па како $\text{NZD}(k,p)=1$ заклучуваме дека $3k=c^2$ и $p=d^2$, или пак $k=c^2$ и $3p=d^2$, при што и во двата случаја важи $\text{NZD}(c,d)=1$.

Заради симетрија доволно е да го разгледаме само едниот случај.

Ако $3k=c^2$ и $p=d^2$, тогаш $c=3q$, па затоа $k=3q^2$ и $p=d^2$, што значи

$$\frac{n}{3}=4p=4d^2=(2d)^2,$$
$$\frac{m}{3}=4k=4\cdot 3q^2=3\cdot(2q)^2,$$
$$\frac{n}{4}=3p=3d^2,$$
$$\frac{m}{4}=3k=3\cdot 3q^2=(3q)^2,$$
$$mn=12^2kp=12^2\cdot 3q^2\cdot d^2=3\cdot(12qd)^2,$$

што значи дека само два од петте броја се точни квадрати

20. Ако за природните броеви x и y важи $xy-x-y=34$, која е најмалата можна вредност на збирот $x+y$?

A) 38 B) 14 C) 12 D) 8 E) 6

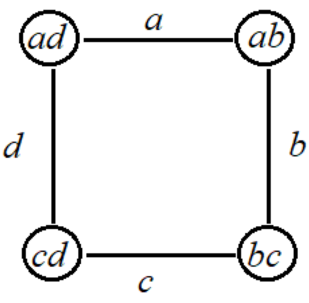
Решение. **B).** Даденото равенство е еквивалентно на равенството $(x-1)(y-1)=35$. Сега, бидејќи $35=5\cdot7=1\cdot35$ во множеството природни броеви решенија на последната равенка се подредените парови: (2, 36), (6, 8), (8, 6) и (36,2). Јасно, најмалата можна вредност на збирот $x+y$ е $6+8=14$.

21. Сања запишала по еден природен број на секој раб од еден квадрат. Потоа таа ги запишала производите на броевите од секои од рабовите во темињата во кои тие рабови се сечат. Збирот на броевите во сите темиња е 15. Колку е збирот на броевите запишани на рабовите на квадратот?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 15

Решение. **C).** Запишаните броеви и нивните производи да ги означиме како на цртежот десно. Тогаш важи

$$ab+bc+cd+da=15,$$
$$b(a+c)+d(a+c)=15,$$
$$(a+c)(b+d)=15.$$



Бројот 15 може да се запише како производ на два природни броја на следниве начини $15=1\cdot15=3\cdot5$. Но, збир на два природни броја е поголем од 1, па затоа едниот множител е 3, а другиот е 5. Конечно, $a+c+b+d=8$. Четирите броја во случајов се 1, 2, 2 и 3.

22. Колку решенија во множеството природни броеви има равенката $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) повеќе од 3

Решение. **D).** *Прв начин.* Нека (x,y) е решение на дадената равенка. Ако $x\le y$, тогаш $\frac{1}{y}\le\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x}$, па затоа $x\le 6$. Од друга страна $\frac{1}{y}>0$ и затоа $\frac{1}{x}<\frac{1}{3}$, односно $3<x$. Со непосредна проверка се добива дека единствени решенија се (4,12) и (6, 6). Но, равенката е симетрична, па затоа решение е и (12, 4). Конечно, равенката има 3 решенија.

Втор начин. Во множеството природни броеви дадената равенка е еквивалентна на равенката $xy=3x+3y$, што значи на равенката $(x-3)(y-3)=1\cdot 9=3\cdot 3$. Од последната равенка ги добиваме системите равенки

$$\begin{cases}x-3=1,\\ y-3=9,\end{cases}\quad\begin{cases}x-3=3,\\ y-3=3,\end{cases}\quad\begin{cases}x-3=9,\\ y-3=1,\end{cases}$$

чии решенија си (4, 12), (6,6) и (12, 4). Значи дадената равенка има е решенија.

23. За три прости броја ќе велиме дека се *специјални* ако нивниот производ е петпати поголем од нивниот збир. Колку специјални тројки прости броеви постојат?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

Решение. **B).** Нека p,q,r се специјални прости броеви. Тогаш

$$pqr=5(p+q+r),$$

па затоа еден од броевите p,q,r е еднаков на 5. Нека $p=5$. Тогаш $qr=5+q+r$, од каде добиваме $(q-1)(r-1)=6$. Во множеството прости броеви решение на последната равенка е $q=2, r=7$ или $q=7, r=2$.

Значи, единствени три спецјални прости броеви е 2, 5 и 7.

24. Андреј во низа запишал еден по друг неколку природни броеви кои не се поголеми од 10. Горјан забележал дека за секои два соседни броја во низата едниот е делител на другиот. Колку најмногу броеви можел да запише Андреј?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 9

Решение. **E).** Бројот 1 е делител на секој природен број, па тој може да е меѓу било кои два броја. Понатаму, бројот 2 е делител на парните броеви, па тоа може да е меѓу два броја. Сега, бројот 3 е делител на 9 и 6, па 3 мора да е меѓу 6 и 9. Да почнеме од бројот 9. Низата со најмногу членови има девет броја и една таква низа е:

9 3 6 2 8 4 1 10 5.

25. Четирицифрениот број N е таков што кога ќе се избрише произволна негова цифра, трицифрениот број формиран од преостанатите цифри во ист редослед, е делител на N. Колку вакви четирицифрени броеви постојат?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 25

Решение. **B).** Нека $N=\overline{abcd}$ е број со саканото својство. Тогаш постои k таков што $\overline{abcd}=k\cdot\overline{abc}$, од каде добиваме $d=(k-10)\cdot\overline{abc}$. Но, $\overline{abc}\neq 0$ и како d е едноцифрен, а $\overline{abc}$ е трицифрен број, последното равенство е можно ако и само ако $d=0$. Значи, $N=\overline{abc0}$. Понатаму, постои n таков што $\overline{abc0}=n\cdot\overline{ab0}$, т.е. $\overline{abc}=n\cdot\overline{ab}$, од каде добиваме $c=(n-10)\cdot\overline{ab}$. Но, $\overline{ab}\neq 0$ и како c е едноцифрен, а

$\overline{ab}$ е двоцифрен број, последното равенство е можно ако и само ако $c=0$. Значи, $N=\overline{ab00}$.

Сега, постои m таков што $\overline{ab00}=m\cdot\overline{a00}$, т.е. $\overline{ab}=m\cdot a$, од каде добиваме $b=(m-10)\cdot a$. Но, $a\neq 0$, па од последното равенство следува:

1) $m=11$, $b=a$ и ги добиваме броевите 1100, 2200, 3300, 4400, 5500, 6600, 7700, 8800, 9900, кои го имаат саканото својство, па во овој случај имаме 9 броеви кои го имаат саканото својство.
2) $m=12$, $b=2a$ и ги добиваме броевите 1200, 2400, 3600 и 4800, кои го имаат саканото својство, па во овој случај имаме 4 броеви кои го имаат саканото својство.
3) $m=13$, $b=3a$ и ги добиваме броевите 1300, 2600, 3900, кои при бришење на првата цифра го немаат саканото својство.
4) $m=14$, $b=4a$ и ги добиваме броевите 1400, 2800, кои при бришење на првата цифра го немаат саканото својство.
5) $m=15$, $b=5a$ и го добиваме бројот 1500 кој го има саканото својство.

Понатаму, постои p таков што $\overline{ab00}=p\cdot\overline{b00}$, т.е. $\overline{ab}=p\cdot b$, од каде добиваме $10a=(p-1)\cdot b$. Но, $a\neq 0$, па од последното равенство следува:

1) $a=1$, па е $10=(p-1)\cdot b$, т.е. ги добиваме броевите 1100, 1200 и 1500, но овие три решенија веќе ги најдовме,
2) $a=2$, па е $20=(p-1)\cdot b$, т.е. ги добиваме броевите 2100, 2200, 2400 и 2500, при што имаме само две решенија кои веќе ги определивме (Провери!),,
3) $a=3$, па е $30=(p-1)\cdot b$, т.е. ги добиваме броевите 3100, 3200, 3300, 3500 и 3600, при што имаме само две решенија кои веќе ги определивме (Провери!),

4) $a=4$, па е $40=(p-1)\cdot b$, т.е. ги добиваме броевите 4100, 4200, 4400, 4500 и 4800, при што имаме само две решенија кои веќе ги определивме (Провери!),

5) $a=5$, па е $50=(p-1)\cdot b$, т.е. ги добиваме броевите 5100, 5200 и 5500, при што имаме само едно решение кое веќе го определивме (Провери!),

6) $a=6$, па е $60=(p-1)\cdot b$, т.е. ги добиваме броевите 6100, 6200, 6300, 6500 и 6600 при што имаме само едно решение кое веќе го определивме (Провери!),

7) $a=7$, па е $70=(p-1)\cdot b$, т.е. ги добиваме броевите 7100, 7200, 7500 и 7700 при што имаме само едно решение кое веќе го определивме (Провери!),

8) $a=8$, па е $80=(p-1)\cdot b$, т.е. ги добиваме броевите 8100, 8200, 8400, 8500 и 8800 при што имаме само едно решение кое веќе го определивме (Провери!),

9) $a=9$, па е $90=(p-1)\cdot b$, т.е. ги добиваме броевите 9100, 9200, 9300, 9500 и 9900 при што имаме само едно решение кое веќе го определивме (Провери!).

Сега, од претходните разгледувања следува дека имаме $9+4+1=14$ броеви спо саканото својство.

26. Неколку различни природни броеви се запишани на таблата. Точно два од нив се деливи со 2 и точно 13 од нив се деливи со 13. Нека M е најголемиот од нив. Која е најмалата можна вредност на M ?

A) 169 B) 269 C) 273 D) 299 E) 325

Решение. C). Бидејќи од дадените броеви 13 се деливи со 13, а само 2 се деливи со 2, заклучуваме дека 11 од броевите покрај бројот 13 се деливи само со непарен број. Првите 11 непарни броеви се: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 и 21, па доволно е да ги земеме уште двата најмали парни броеви: 2 и 4. Сега овие броеви ги множиме со 13 и ги добиваме броевите:

$$13, 26, 39, 52, 65, 91, 117, 143, 169, 195, 221, 247, 273.$$

Значи, бараниот број е 273.

27. Матео го дели бројот 2015 со 1, 2, 3, ... итн. се до 1000. Тој го запишува остатокот од секое делење. Кој е најголемиот можен остаток?

A) 15 B) 215 C) 671 D) 1007 E) друга вредност

Решение. **C).** Нека $1 \le a \le 1000$. Имаме, $2015 = aq + r$, $0 \le r \le a - 1$, па затоа

$$2015 \le aq + a - 1,$$
$$2016 \le a(q+1).$$

Сега, ако $q = 1$, тогаш $a \ge 1008$, што противречи на $1 \le a \le 1000$.

Понатаму, ако $q = 2$, тогаш $a \ge 672$. Според тоа,

$$2015 - 2 \cdot 672 \ge 2015 - 2a \ge 2015 - 2 \cdot 1000, \text{ т.е. } 671 \ge r \ge 15.$$

Последното значи дека во случајов најголемиот остаток е 671 и тој се добива при делење на 2015 со 672.

Сега, ако $q \ge 3$, тогаш $3a \le aq + r = 2015$, па затоа $a \le \frac{2015}{3} < 672$. Но, тогаш најголемиот можен остаток е $a - 1 < 671$.

Конечно, најголемиот можен остаток се добива при делење со 672 и тој остаток е еднаков на 671.

28. Дадена е низата

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ...$$

во која секој природен број n е запишан n пати. Колку од првите 2018 членови на низата се деливи со 16.

A) 100 B) 98 C) 96 D) 95 E) 90

Решение. B). Заклучно со n-те броеви кои се еднакви на n во низата имаме $\frac{n(n+1)}{2}$ броеви. Според тоа, треба да го определиме најмалиот природен број n за кој важи $\frac{n(n+1)}{2} \geq 2018$, т.е. $n(n+1) \geq 4036$. Сега бидејќи

$$63 \cdot 64 = 4032 < 4036 < 64 \cdot 65$$

добиваме $n = 64$. Понатаму, $\frac{63 \cdot 64}{2} = 2016$, што значи дека 2018-тиот член на низата е вториот број еднаков на 64. Последното значи дека меѓу првите 2018 имаме $16+32+48+2=98$ членови на дадената низа кои се деливи со 16.

29. Во дадениот израз триаголничето и квадратчето треба да се заменат со природни броеви, така што ќе се добие точно равенство. Колку различни природни броеви може да се поставена на местото на квадратчето?

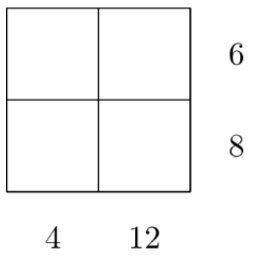
$$\frac{\square}{12} = \frac{5}{\triangle}$$

A) 3 B) 5 C) 9 D) 11 E) 12

Решение. E). *Прв начин.* Даденото равенство е еквивалентно на равенството $\square.\triangle = 60$. Според тоа, на местото на квадратчето може да се постави било кој делител на бројот 60. Од $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ следува дека бројот 60 има $(2+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 12$ делители, т.е. на местото на квадратчето може да се поставaт 12 различни броја.

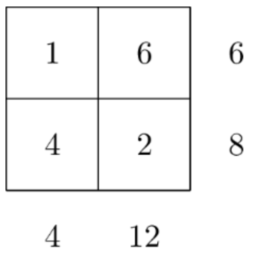
Втор начин. Даденото равенство е еквивалентно на равенството $\square.\triangle = 60$. Според тоа, на местото на квадратчето може да се постави било кој делител на бројот 60. Делители на бројот 60 се: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Значи, на местото на квадратчето може да поставиме 12 природни броја.

30. Во квадратна табела се запишани четири различни природни броја. Броевите се покриени, но производот на броевите во секој ред и секоја колона е запишан покрај табелата. Колку е збирот на четирите броја?



A) 10 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Решение. **C).** Во горното лево квадратче треба да запишеме заеднички делител на 4 и 6, што значи еден од броевите 1 или 2. Ако ставиме 2, тогаш и во долното лево квадратче пак е бројот 2, што противречи на фактот дека броевите треба да се различни. Значи, во горното лево квадратче е бројот 1, а под него е бројот 4. Сега лесно се добива дека во втората колона горе е бројот 6, а под него бројот 2. Конечно, бараниот збир е $1+4+6+2=13$.



31. Ако производот на два броја е еднаков на $2^3 \cdot 7^7 \cdot 13^8 \cdot 19^{10}$ на колку сигурно се дели нивниот збир?

A) 8 B) 7 C) 5 D) 3

E) на ниту еден од наведените броеви

Решение. **D).** Двата броја се од видот

$$A=2^a \cdot 7^m \cdot 13^n \cdot 19^p \text{ и } B=2^{3-a} \cdot 7^{7-m} \cdot 13^{8-n} \cdot 19^{10-p},$$

каде $0 \le a \le 3, 0 \le m \le 7, 0 \le n \le 8, 0 \le p \le 10$. Од

$$7 \equiv 1 (\operatorname{mod} 3), 13 \equiv 1 (\operatorname{mod} 3), 19 \equiv 1 (\operatorname{mod} 3)$$

следува $7^m \cdot 13^n \cdot 19^p \equiv 1 (\operatorname{mod} 3)$ и $7^{7-m} \cdot 13^{8-n} \cdot 19^{10-p} \equiv 1 (\operatorname{mod} 3)$. Ќе разгледаме четири случаи:

1) ако $a=0$, тогаш $2^a \equiv 1 (\operatorname{mod} 3)$ и $2^{3-a} \equiv -1 (\operatorname{mod} 3)$, што значи дека $A \equiv 1 (\operatorname{mod} 3)$ и $B \equiv -1 (\operatorname{mod} 3)$, па затоа $A+B \equiv 0 (\operatorname{mod} 3)$,

2) ако $a=1$, тогаш $2^a\equiv -1(\mathrm{mod}\,3)$ и $2^{3-a}\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, што значи дека $A\equiv -1(\mathrm{mod}\,3)$ и $B\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, па затоа $A+B\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$,

3) ако $a=2$, тогаш $2^a\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ и $2^{3-a}\equiv -1(\mathrm{mod}\,3)$, што значи дека $A\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ и $B\equiv -1(\mathrm{mod}\,3)$, па затоа $A+B\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$,

4) ако $a=3$, тогаш $2^a\equiv -1(\mathrm{mod}\,3)$ и $2^{3-a}\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, што значи дека $A\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ и $B\equiv -1(\mathrm{mod}\,3)$, па затоа $A+B\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$,

Значи, од понудените броеви збирот на двата броја сигурно е делив со 3.

Дека не мора да се дели со 8 и 7 доволно е да земеме $A=1$ и $B=2^3\cdot 7^7\cdot 13^8\cdot 19^{10}$, па $A+B$ при делење со 8 и 7 дава остаток 1.

Понатаму, за $A=2$ и $B=2^2\cdot 7^7\cdot 13^8\cdot 19^{10}$ добиваме $A\equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$ и

$$B\equiv 2^2\cdot 2^7\cdot(-2)^8\cdot(-1)^{10}=2^{17}=(2^4)^4\cdot 2=16^4\cdot 2\equiv 1^4\cdot 2=2(\mathrm{mod}\,5),$$

па затоа $A+B\equiv 4(\mathrm{mod}\,5)$.

4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Во кој од следните бројни изрази може да се замени бројот 8 со друг позитивен број (различен од 8), а да се добие ист резултат?

A) $(8+8):8+8$ B) $8\cdot(8+8):8$ C) $8+8-8+8$

D) $(8+8-8)\cdot 8$ E) $(8+8-8):8$

Решение. **E).** Имаме:

$(8+8):8+8=2+8$, $8\cdot(8+8):8=2\cdot 8$, $8+8-8+8=2\cdot 8$,

$(8+8-8)\cdot 8=8\cdot 8$, $(8+8-8):8=8:8=1$.

Значи, само вредноста на последниот израз не зависи од бројот 8, што значи дека само во овој случај кога бројот 8 ќе го замениме со произволен број се добива ист резултат.

2. Пабло запишал седум последователни природни броја. Збирот на најмалите три е 33. Колку е збирот на најголемите три броја?

A) 39 B) 37 C) 42 D) 48 E) 45

Решение. **E).** Нека запишаните броеви се

$$a-3, a-2, a-1, a, a+1, a+2, a+3.$$

Имаме $a-1+a-2+a-3=33$, па затоа

$$\begin{aligned} a+1+a+2+a+3 &= a-1+2+a-2+4+a-3+6 \\ &= a-1+a-2+a-3+12 \\ &= 33+12=45. \end{aligned}$$

3. Во $\blacktriangle\cdot\blacktriangle=\square\cdot\bigcirc$, еднакви фигури означуваат еднакви цифри, а различни фигури различни цифри. Сите цифри се различни од еден. Колку различни цифри претставува триаголникот за кои равентвото е точно?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. C). Од

$2\cdot 2=4=4\cdot 1$,	$3\cdot 3=9=9\cdot 1$
$4\cdot 4=16=2\cdot 8=1\cdot 16$	$5\cdot 5=25=25\cdot 1$
$6\cdot 6=36=4\cdot 9=36\cdot 1$	$7\times 7=49=49\times 1$
$8\cdot 8=64=64\cdot 1=2\cdot 32=4\cdot 16$	$9\cdot 9=81=1\cdot 81=3\cdot 27$

добиваме дека има две такви цифри 4 и 6.

4. Производот на четири различни природни броеви е еднаков на 100. Колку е нивниот збир?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

Решение. D). Имаме, $100=10\cdot 10=2\cdot 5\cdot 10=1\cdot 2\cdot 5\cdot 10$. Значи четирите броја се 1, 2, 5 и 10, па нивниот збир е $1+2+5+10=18$.

5. Еден трицифрен број го има својството: ако се избрише првата цифра се добива точен квадрат и ако се избрише последната цифра повторно се добива точен квадрат. Колку е збирот на сите такви трицифрени броеви?

A) 1014 B) 1177 C) 1465 D) 1993 E) 2016

Решение. D). Двоцифрени броеви кои се точни квадрати се 16, 25, 36, 49, 64, 81. Според тоа бараните трицифрени броеви се 164, 364, 816, 649. Нивниот збир е $164+364+816+649=1993$.

6. Која е цифрата на десетките на најмалиот четирицифрен број кој е поголем од 2021 и чиј збир на цифри е еднаков на збирот на цифрите на бројот 2021?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. B). Бројот 2021 има збир на цифри 5. Броевите од 2022 до 2029 имаат збирови на цифри соодветно од 6 до 13. Бројот 2030 има збир на цифри 5, па значи тоа е најмалиот четирицифрен број кој е поголем од 2021 и чиј збир на цифри е еднаков на збирот на цифрите на бројот 2021. Неговата цифра на десетките е 3.

7. Производот на еден трицифрен и еден двоцифрен број е еднаков на 7632. Во записот на трите броја се сите цифри од 1 до 9 се јавуваат точно еднаш. Определи ја цифрата на десетките на трицифрениот број.

A) 8 B) 6 C) 5 D) 4 E) 1

Решение. **C).** Имаме $7632 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 53$. Понатаму, бидејќи цифрата на единиците на производот е 2, а цифрите 2, 3, 6 и 7 се веќе употребени, потребно е производ со цифра на единиците 2 да даваат два броја чии цифри на единиците се некои од цифрите 1, 4, 5, 8 и 9. Јасно, ниту една од цифрите 1 и 5 не е цифра на единицте на множителите. Зачи, останувaат комбинациите 4 и 8, односно 8 и 9.

Бидејќи 53 не е двоцифрениот множител, тој е делител на трицифрениот множител. Во случајот 4 и 8 за трицифрениот множител имаме $53 \cdot 8 = 424$ или $53 \cdot 6 = 318$ или $53 \cdot 16 = 848$ или $53 \cdot 18 = 954$. Во првите три случаи имаме повторување на цифрите, а во четвртиот случај множителите се 954 и 8, т.е. не се трицифрен и двоцифрен број. Во случајот 8 и 9 имаме $53 \cdot 6 = 318$ или $53 \cdot 16 = 848$ или $53 \cdot 3 = 159$. Во првите два случаи имаме повторување на цифрите, а во третиот случај множителите се 159 и 48. Значи, броевите се 7632, 159 и 48, па цифрата на десетките на трицифрениот множител е 5.

8. Во полињата на 3×3 квадрат се запишани позитивни броеви така што производот на броевите во секој ред и секоја колона е еднаков на 1, а во секој 2×2 квадрат е еднаков на 2. Кој број е запишан во централниот квадрат?

A) 16 B) 8 C) 4 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

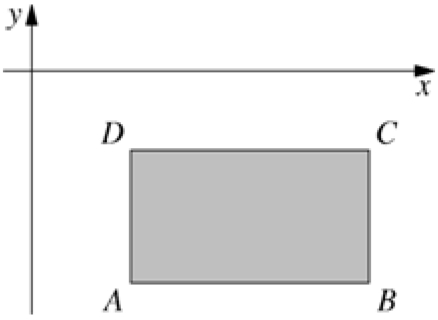
a	b	c
d	e	f
g	h	i

Решение. **А).** Нека во полињата на квадратот се запишани броевите прикажани на цртежот десно. Тогаш

$$16=2\cdot2\cdot2\cdot2=(abde)\cdot(becf)\cdot(dgeh)\cdot(efhi)$$
$$=(abc)\cdot(def)\cdot(ghi)\cdot(beh)\cdot(def)\cdot e$$
$$=1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot e=e$$

што значи дека во централното квадратче е запишан бројот 16.

9. Страните на правоаголникот $ABCD$ се паралелни со координатните оски. Тој е под x-оската и десно од y-оската како што е прикажано на цртежот десно. Координатите на точките A, B, C и D се цели броеви. За секоја од нив е пресметан количникот $\frac{y}{x}$. Во која од четирите точки се добива најмала вредност?



A) A B) B C) C D) D

E) зависи од изборот на правоаголникот

Решение. **А).** Бидејќи $y<0$, количникот $\frac{y}{x}$ е најмал кога количникот $|\frac{y}{x}|$ е најголем. Количникот $|\frac{y}{x}|$ е најголем кога $|y|$ е најголем, а x е најмал. Најмал x и најголем $|y|$ има точката A.

10. Определи го збирот на последните две цифри на најголемиот шестцифрен број кој се запишува со различни цифри, е делив со 3 и производот на цифрите му е 5040.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. **А).** Од $5040=2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7$ добиваме дека две цифри на шестцифрениот број се 5 и 7. Понатаму, бидејќи се бара најголемиот можен број цифрата на стоилјадитите мора да е $3^2=9$, а како цифрите се различни и производот на три различни едноцифрени броја е 16 само ако броевите се 1, 2 и 8, заклучуваме дека најголемиот шестцифрен број со саканите својства е бројот 987521. Значи, збирот на последните две цифри е 3.

Забелешка. Како што гледаме условот дека бројот е делив со 3 воопшто не го искористивме. Но, ако треба да се користи при решавање на задачата истиот следува од тоа што производот на цифрите на бројот е 5040, кој е делив со 9, па затоа е делив и со 3. Последното значи дека дадената задача е предефинирана.

11. Во равенството $\frac{E\cdot I\cdot G\cdot H\cdot T}{F\cdot O\cdot U\cdot R}=T\cdot W\cdot O$ на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри. Колку различни вредности има производот $T\cdot H\cdot R\cdot E\cdot E$?

А) 1 В) 2 С) 3 D) 4 Е) 5

Решение. **А).** Во дадениот израз имаме десет различни букви, што значи дека имаме десет различни цифри. Цифрите O и T се јавуваат на две страни на равенството. Јасно, $O\neq0$. Ако претпоставиме дека $T\neq0$, тогаш некоја од преостанатите осум цифри е 0, па како $E\cdot I\cdot G\cdot H=F\cdot O\cdot U\cdot R\cdot W\cdot O$. Но, тоа значи дека едната страна на равенството е еднаква на 0, а другата е различна од 0, што не е можно. Значи, $T=0$, па затоа $T\cdot H\cdot R\cdot E\cdot E=0$, т.е. дадениот израз прима една вредност.

12. Дамјан има девет броја: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Тој додава 2 на некои од нив и 5 на останатите броеви.

Кој е најмалиот број на различни резултати кои може да ги добие?

А) 5 В) 6 С) 7 D) 8 Е) 9

Решение. **В).** Бидејќи разликата на броевите кои Дамјан ги додава е $5-2=3$, исти резултати ќе добива кога на два броја чија разлика е 3 му ги додава броевите 2 и 5 (5 на помалиот и 2 на поголемиот). Затоа треба да ги определиме најголем можен број парови броеви чија разлика е 3, а притоа ниту еден од броевите да не се повторува.

За таа цел доволно е да тргнеме од бројот 1 и притот ги добиваме паровите: 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6. Од овие парови најмалиот можен број резултати е три:

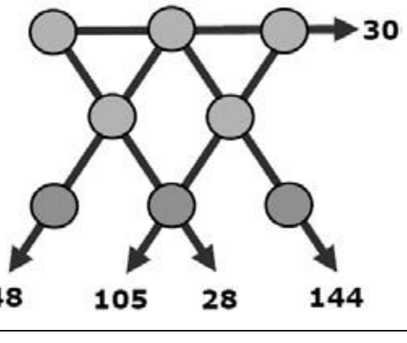
$$1+5=6, 4+2=6,$$
$$2+5=7, 5+2=7,$$
$$3+6=8, 6+2=8.$$

Понатаму, со додавање на било кој од броевите 2 и 5 на некој од броевите 7, 8 и 9 не може да се добие ниту еден од броевите 6, 7 и 8, па затоа најмалиот број резултати е 6.

Забелешка. а) При изборот на паровите броеви чија разлика е 3 може да се тргне и од најголемиот број. Така се добиваат паровите 9 и 6, 8 и 5, 7 и 4. Притоа збировите се 11, 10 и 9, а од броевите 1, 2 и 3 со додавање на броевите 2 и 5 најголемиот можен збир кој се добива е 8, па затоа најмалиот можен број резултати е 6.

б) Други парови со чија помо може да се добие најмалиот можен број резултати се: 2 и 5, 3 и 6, 4 и 7, односно 3 и 6, 4 и 7, 5 и 8. Провери!

13. Во круговите на цртежот десно се запишани броевите од 1 до 8, секој број по еднаш. Броевите кои ги покажуваат стрелките се еднакви на производите

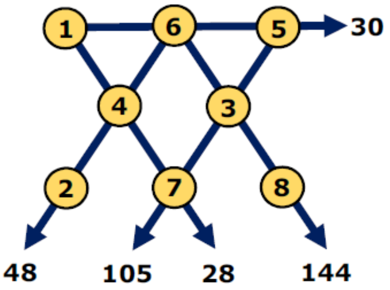


на броевите на соодветните прави. Колку е збирот на броевите запишани во најдолните кругчиња?

A) 11 B) 12 C) 15 D) 17 E) 19

Решение. **D).** Единствени броеви кои се делив со 5 се 30 и 105, па затоа во пресекот на двете прави е бројот 5. Понатаму, единствени броеви кои се деливи со 7 се броевите 105 и 28, па затоа во пресекот на соодветните прави е бројот 7. Сега, меѓу броевите 5 и 7 е бројот 3.

Сега, $144:3=48$, па затоа двата броја на правата на бројот 144 се 6 и 8, а како 8 не е делител на 30, добиваме дека горе е бројот 6, а долу е бројот 8. Јасно, горе лево е бројот 1, па под него е бројот 4 и на крајот долу лево е бројот 2. Конечно, бараниот збир е $2+7+8=17$.



14. Во равенството $\overline{KAN}-\overline{GAR}=\overline{OO}$ на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри. Која е најголемата можна вредност на бројот $\overline{KAN}$?

A) 987 B) 876 C) 865 D) 864 E) 785

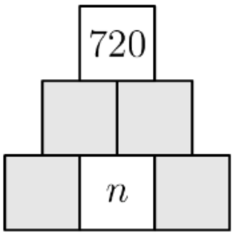
Решение. **D).** Разлика на два трицифрени броја е двоцифрен број, ако броевите припаѓаат на последователни стотки. Според тоа, $K=G+1$, па затоа даденото равенство го добива видот

$$100(G+1)+10A+N-100G-10A-R=11O,$$
$$100+N-R=11O,$$
$$11(9-O)=R-N-1.$$

Левата страна на последното равенство е делива со 11, па затоа мора да е и десната, а тоа е можно само ако $R-N-1=0$, т.е. $R=N+1$. Значи, $O=9$, па добиваме $\overline{KAN}-\overline{GAR}=99$. Сега најголемата вредност на K може да е 8, па затоа $G=7$, па најголемата вредност на A

може да е 6, па најголемата можна вредност на R може да е 5 и затоа $N=4$. Значи, најголемата можна вредност на $\overline{KAN}$ е 864.

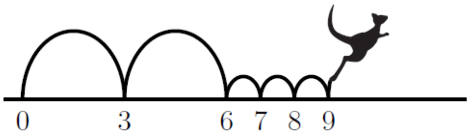
15. Горјан сака да го доврши дијаграмот така што секој почнувајќи од вториот ред секој квадрат го содржи производот на броевите кои се одма во квадратите под него. Колку различни вредности може да има бројот n?



A) 1 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Решение. D). Нека a и b се броевите кои недостасуваат во првиот ред. Тогаш na и nb се броевите во вториот ред, па затоа $abn^2=720$. Сега бидејќи $720=2^4\cdot 3^2\cdot 5$, бројот n^2 може да биде 1, 4, 9, 16, 36, 144. Значи, сите можни вредности на бројот n се: 1, 2, 3, 4, 6 и 12, т.е. n може да прими најмногу 6 вредности.

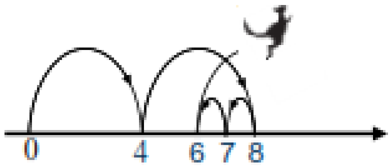
16. Кенгурот Скокалко скока на бројната права. Тој секогаш скока така што прави два големи скока десно, а потоа следуваат три мали скокови пак десно и оваа постапка ја повторува. Должината на големите скокови е 3 мерни единици, а на малите е 1 мерна единица. Скокалко тргнал од бројот 0. На кој од дадените броеви ќе скокне Скокалко?



A) 82 B) 83 C) 84 D) 85 E) 86

Решение. C). Во еден циклус Скокалко на бројната оска се поместува 9 броја во десно. Значи, по 9 циклуси тој ќе се најде на бројот $9\cdot 9=81$. Сега следуваа два скока со должина 3, па затоа Скокалко ќе прво ќе скокне на бројот 84, а потоа на бројот 87. Значи, од дадените броеви Скокалко ќе се најде само на бројот 84.

17. Кенгурот Скокалко скока на бројната права. Тој секогаш скока така што прави два големи скока десно, а потоа следуваат два мали скока лево и оваа постапка ја повторува (цртеж десно). Должината на големите скокови е 4 мерни единици, а на малите е 1 мерна единица. Скокалко тргнал од бројот 0. На кој од дадените броеви нема да скокне Скокалко?



A) 82 B) 83 C) 84 D) 85 E) 86

Решение. **C).** Во еден циклус Скокалко на бројната оска се поместува 8 броја во десно и два броја во лево, т.е. за 6 броја во десно. Тоа значи дека по 13 полни циклуси Скокалко најдесно стигнува до бројот 80, по што се враќа на броевите 79 и 78. Потоа тој редоследно оди на броевите 82, 86, 85, 84, 88 и продолжува на поголеми броеви од 88. Значи, од дадените броеви Скокалко нема да се најде само на бројот 83.

18. Горјан ја пресметал аритметичката средина на броевите: 17, 13, 5, 10, 14, 9, 12 и 16. Потоа избришал два од дадените броеви и забележал дека артиметичката средни на преостанатуте броеви не се променила. Кои броеви ги избришал Горјан?

A) 12 и 17 B) 5 и 17 C) 9 и 16 D) 10 и 12 E) 10 и 14

Решение. **E).** Аритметичката средина на дадените броеви е:

$$\frac{17+13+5+10+14+9+12+16}{8}=\frac{96}{8}=12.$$

Збирот на дадените броеви е $8\cdot 12=96$, а ако аритметичката средина не се менува по отстранување на два броја, тој збир ќе биде еднаков на $6\cdot 12=72$. Значи, треба да се отстранат два броја чиј збир е $96-72=24$. Единствени талви два броја се 10 и 14.

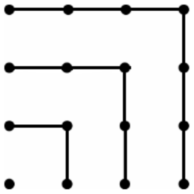
19. Средната вредност на бодовите на учениците на тест по математика е 6. Точно 60% од учениците го положиле тестот. Средната вредност на бодовите на учениците кои го положиле тестот е 8. Која е средната вредност на бодовите на учениците кои не го положиле тестот?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. C). Нека бројот на учениците е a. Тогаш учениците освоиле $6a$ поени. Понатаму, $0,6a$ ученици го положиле тестот и тие освоиле $0,6a\cdot 8=4,8a$. Значи, тестот не го положиле $0,4a$ ученици и тие освоиле $6a-4,8a=1,2a$ поени. Значи, учениците кои не го положиле тестот просечно освоиле $1,2a:(0,4a)=3$ поени.

20. Од фигурата прикажана на цртежот десно заклучуваме дека $1+3+5+7=4\cdot 4$. Колку е

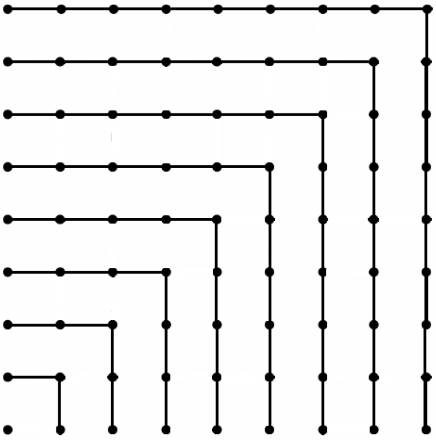
$$S=1+3+5+7+9+11+13+15+17?$$



A) $14\cdot 14$ B) $9\cdot 9$ C) $4\cdot 4\cdot 4$

D) $16\cdot 16$ E) $4\cdot 9$

Решение. B). Од цртежот гледаме дека збирот $1+3+5+7$ е еднаков на бројот на темињата на единичните квадрати на кои е разделен квадратот со должина на страна $3=\frac{7-1}{2}$.



Бараниот збир е аналоген на дадениот и како $\frac{17-1}{2}=8$ добиваме де-ка истиот е еднаков на бројот на темињата на единичните квадрати на кои е разделен квадрат со должина на страна 8 (види цртеж). Оттука следува дека

$$S=1+3+5+7+9+11+13+15+17=(8+1)\cdot(8+1)=9\cdot 9.$$

II ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Илина ги запишала сите трицифрени броеви кои имаат збир на цифри 8. Потоа ги собрала најмалиот и најголемиот запишан број. Кој збир таа го добила?

A) 707 B) 907 C) 916 D) 1000 E) 1001

Решение. B). Најмалиот од запишаните броеви е 107 а најголемиот е 800. Нивниот збир е $800+107=907$.

2. Кој број треба да се одземе од -17 за да се добие бројот -33?

A) -50 B) -16 C) 16 D) 40 E) 50

Решение. C). Имаме $-17-a=-33$, од каде добиваме $a=-17+33$, т.е. $a=16$. Значи, бројот кој треба да се одземе е 16.

3. Павел треба да го додаде бројот 26 на некој број. Наместо тоа, Павел од тој број одзел 26 и го добил бројот -14. Кој број требало да го добие Павел, ако точно ја решел задачата?

A) 28 B) 32 C) 36 D) 38 E) 42

Решение. D). Нека почетниот број е a. Тогаш

$$a+26=a-26+52=-14+52=38.$$

Значи, Павел требало да го добие бројот 38.

4. Нумерирањето на страниците на една книга почнува од бројот 1. Броевите кои се искористени за нумерирање на страниците ја содр-

жат цифрата 0 точно пет пати и цифрата 8 точно шест пати. Со кој број е нумерирана последната страниц:

A) 48 B) 58 C) 60 D) 68 E) 88

Решение. **B).** Циграта 0 е употребена точно пет пати, што значи за броевите 10, 20, 30, 40 и 50. Цифрата 8 е употребена шест пати, што значи за броевите 8, 18, 28, 38, 48 и 58.

Бидејќи книгата има парен број страници (по две на секој лист) последниот број мора да е парен. Прв парен број по бројот 58 е бројот 60, но тој не може да се употреби за нумерирање на книгата бидејќи тогаш цифрата 0 би била употребена шест пати. Значи, книгата има 58 страници и со бројот 58 е нумерирана последната страница.

5. Во улицата на Илина има 17 куќи. Таа живее во последната куќа на страната каде што сите куќи имаат парни броеви. Бројот на нејзината куќа е 12. Нејзината братучетка живее во последната куќа на страната каде што сите куќи имаат непарни броеви. Кој е бројот на нејзината куќа?

A) 5 B) 7 C) 13 D) 17 E) 21

Решение. **E).** На парната страна на улицата има $12:2=6$ куќи, што значи дека на непарната има $17-6=11$ куќи. Броевите на куќите на непарната страна се 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 и 21. Значи, куќниот број на куќата на братучетката на Илина е 21.

6. На станарите на Втората улица Дејан им дели весници. Весник ќе добијат сите станари чии куќи имаат парен број, почнувајќи од куќата со број 15, па се до куќата со број 53. Во колку куќи Дејан ќе однесе весници?

A) 19 B) 20 C) 27 D) 38 E) 53

Решение. **А).** Од 15 до 53 има $53-15=38$ броеви. Половината од нив се парни, половината се непарни. Значи, Дејан весници е однесе во $38:2=19$ куќи.

7. Филип на таблата запишал неколку позитивни броеви помали од 7. Андреј ги прецртал сите негови броеви и на местото на секој број ја запишал разликата на бројот 7 и тој број. Збирот на броевите кои ги запишал Филип е 22, а збирот на броевите кои ги запишал Андреј е 34. Колку броеви запишал Филип?

А) 7 В) 8 С) 9 D) 10 Е) 11

Решение. **В).** Нека Филип го запишал бројот a. Тогаш Андреј го запишал бројот $7-a$, па затоа збирот на запишаниот број од Филип и бројот со кој е заменет од Андреј е $a+7-a=7$. Бидејќи збирот на сите парови броеви е еднаков на збирот на броевите запишани од Филип и броевите запушани од Андреј добиваме дека тој збир е еднаков на $22+34=56$. Значи, двете деца запишале $56:7=8$ парови броеви, т.е. Филип запишал 8 броја.

8. Пабло запишал неколку последователни природни броеви. Кој од следните проценти не може да биде процент на непарните броеви меѓу запишаните броеви?

А) 40 В) 45 С) 48 D) 50 Е) 60

Решение. **В).** Меѓу броевите 2, 3, 4, 5, 6 имаме 2 непарни од 5 броја, па бројот на непарните броеви е 40% од вкупниот број броеви.

Меѓу броевите 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26 имаме 12 непарни од 25 броја, па бројот на непраните броеви е 48% од вкупниот број броеви.

Меѓу броевите 2, 3 имаме 1 непарен од 2 броја, па бројот на непарните броеви е 50% од вкупниот број броеви.

Меѓу броевите 3, 4, 5, 6, 7 имаме 3 непарни од 5 броја, па бројот на непарните броеви е 60% од вкупниот број броеви.

Нека меѓу последователни природни броеви имаме 45% непарни и 55% парни броеви. Бидејќи $\text{NZD}(45,55)=5$, добиваме дека на секои $45:5=9$ непарни броеви треба да имаме $55:5=11$ парни броеви. Но, тоа се 20 последователни природни броеви меѓу кои има 10 парни и 10 непарни, што е противречност.

9. Неколку различни природни броеви се запишани на таблата. Производот на најмалите два од нив 16. Производот на најголемите два од нив е 225. Колку е збирот на запишаните броеви?

A) 38 B) 42 C) 44 D) 58 E) 243

Решение. **C).** Имаме $16=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$, па затоа два можни различни броја чиј производ е 16 се: 1 и 16, или 2 и 8. Од $225=3\cdot 3\cdot 5\cdot 5$ следува дека два различни броја чиј производ е 225 се: 1 и 225, или 3 и 75, или 4 и 45, или 9 и 25.

Бидејќи 16 е производ на двата најмали, тоа мора да се броевите 2 и 8 (1 и 16 не може да бидат бидејќи 3, 4 и 9 се помали од 16). Бидејќи 225 е производ на двата најголеми, тоа се 9 и 25 (само овие два броја од броевите во четирите парови се поголеми од 8). Значи, броевите се 2, 8, 9 и 25, а нивниот збир е $2+8+9+25=44$.

10. Теодора треба да запише по еден број во секое поле од фигурата дадена на цртежот десно. Таа веќе запишала два од броевите. Теодора сака збирот на сите броеви запишани во полињата да биде 35, збирот на броевите запишани во првите три полиња да биде 22, а збирот на броевите запишани во последните три полиња да биде 25. Колку низнесува

3	▨		▨	4

производот на броевите кои Теодора треба да ги запише во сивите полиња?

A) 63 B) 108 C) 0 D) 48 E) 39

Решение. A). Со a,b,c да ги означиме броевите кои недостасуваат во средните полиња. Тогаш $3+a+b+c+4=35$, $3+a+b=22$ и $b+c+4=25$. Според тоа, $a+b+c=28$, $a+b=19$, $b+c=21$, па ако од првата равенка ја одземеме втората добиваме $c=9$. Потоа ако од првата равенка ја одземеме третата равенка, добиваме $a=7$. Конечно, бараниот производ е $ac=63$.

3	a	b	c	4

11. Во едно одделение 18 ученици правеле контролна по математика и сите добиле четворки и петки. Збирот на оценките е делив со 17. Колку ученици добиле четворки?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

Решение. B). Нека a ученици добиле оценка 4. Тогаш

$$4a+5\cdot(18-a)=17k\text{, т.е. } a=90-17k.$$

Сега, од $0\le a\le 18$ следува $0\le 90-17k\le 18$, од каде добиваме $\frac{72}{17}\le k\le\frac{90}{17}$. Од последните неравенства следува $k=5$, па затоа $a=90-17\cdot 5=5$.

12. На примен испит 25 ученици решавале тест по математика и сите решили 5 или 6 задачи. Збирот на сите задачи кои ги решиле е делив со 13. Колку ученици решиле по 6 задачи, ако нивниот број е сложен број?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

Решение. B). Нека a ученици решиле по 6 задачи. Тогаш

$$6a+5\cdot(25-a)=13k\text{, т.е. } a=13k-125.$$

Сега, од $0 \le a \le 25$ следува $0 \le 13k - 125 \le 25$, од каде добиваме $\frac{125}{13} \le k \le \frac{150}{13}$. Од последните неравенства следува $k = 10$ или 11. За $k = 10$ добиваме $a = 5$ и тоа е прост број. За $k = 11$ добиваме $a = 18$ и тоа е сложен број.

13. Пет природни броеви (кои не мора да се различни) се запишани на пет карти. Пабло го пресметува збирот на броевите на секој пар карти. Меѓу десетте збирови имало само три различни 57, 70 и 83. Кој е најголемиот природен број запишан на некоја од картите?

A) 35 B) 42 C) 48 D) 53 E) 82

Решение. **C).** Нека запишаните броеви се $a \le b \le c \le d \le e$. Јасно, $a + b = 57$ и како 57 е непарен број заклучуваме дека $a < b$. Понатаму, $d + e = 83$ и како 83 е непарен број заклучуваме дека $d < e$. Според тоа, $a < b \le c \le d < e$, па за да се добијат само три збира мора да е $b = c = d$. Тоа значи дека $a + b = 57, 2b = 70, b + e = 83$, од каде следува $a = 22, b = 35, e = 48$.

14. Средната вредност на два позитивни броја е 30% помала од едниот од нив. Колку проценти средната вредност е поголема од другиот број?

A) 75% B) 70% C) 30% D) 25% E) 20%

Решение. **A).** Нека дадените броеви се x и y. Нека средната вредност на двата броја е 30% помала од бројот x. Тоа значи дека

$$\frac{x+y}{2} = 0,7x.$$

Сега имаме $y = 0,4x$, од каде добиваме

$$1,4y = 0,4x + 0,4y$$

$$1,75y = \frac{x+y}{2},$$

што значи дека средната вредност на двата броја е 75% поголема од вториот број.

15. Дадена е дропка во која броителот и именителот се позитивни броеви. Броителот на оваа дропка го зголемуваме за 40%. За колкав процент треба да го намалиме именителот, така што новодобиената дропка е двојно поголема од дадената дропка?

A) 10% B) 20% C) 30% D) 40% E) 50%

Решение. **C).** Нека дропката е $\frac{a}{b}$ и именителот е променет за $x\%$. Тогаш $\frac{(1+\frac{40}{100})a}{(1+\frac{x}{100})b}=2\frac{a}{b}$, од каде добиваме $\frac{140}{100+x}=2$, т.е. $x=-30$. Значи, именителот на дропката треба да се намали за 30%.

16. Пабло три пати фрлил две стандардни коцки за играње. Збировите на паднатите броеви 5, 7 и 9. Во сите фрлања паднал еден ист непарен број. Кој од следниве парови броеви паднал при некое од фрлањата?

A) 1 и 4 B) 1 и 6 C) 2 и 3 D) 2 и 5 E) 4 и 6

Решение. **C).** Дадените збирови може да се претстават како

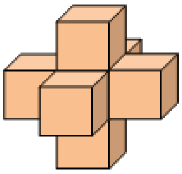
$$5=1+4=2+3,$$
$$7=1+6=2+5=3+4,$$
$$9=3+6=4+5.$$

Забележуваме дека единствено бројот 3 се јавува како собирок во едно од претставувањата на броевите. Значи, збировите се

$$5=2+3,\ 7=3+4,\ 9=3+6.$$

Конечно, од понудените парови во едно од фрлањата можеле да паднат само броевите 2 и 3.

17. Седум коцки за играње се залепени така што е добиено телото на цртежот десно. Лепењето е направено така што се лепат две страни со ист број на точки на нив. Колку точки има на површината на телото?



A) 24 B) 90 C) 95 D) 105 E) 126

Решение. **D).** На една коцка за играње збирот на сите точки е еднаков на $1+2+3+4+5+6=21$. Според тоа, на шесте надворешни коцки не се гледаат точките на шест ѕида кај кои збирот на точките е 21. Значи, збирот на точките кои се наоѓаат на ѕидовите на телото е еднаков на $6\cdot21-21=126-21=105$.

2. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

1. Патувањето од Скопје до Битола, преку Велес, трае 130 минути. Патот од Скопје до Велес трае 35 минути. Колку трае патувањето од Велес до Битола?

A) 95 минути B) 105 минути C) 115 минути

D) 165 минути E) 175 минути

Решение. A). Патувањето од Велес до Битола трае $130-95=35\,\text{min}$.

2. Колку часа има во десет чевртини од часот?

A) 40 B) 5 и половина час C) 4

D) 3 E) 2 часа и половина час

Решение. E). Од $\frac{10}{4}h=\frac{5}{2}h=2,5\,h$ следува дека во десет четвртини часа има 2 часа и половина час.

3. Колку ќе биде часот 17 часа по 17:00?

A) 8:00 B) 10:00 C) 11:00 D) 12:00 E) 13:00

Решение. B). Од 17:00 о 24:00 има 7 часа. Значи, по 17 часа ќе биде 10:00.

4. Дигиталниот часовник на Мартин само што почна да покажува 20:11. По колку минути часовникот повторно ќе покажува време запишано со цифрите 0, 1, 1, 2 во некој редослед?

A) 40 B) 49 C) 50 D) 55 E) 60

Решение. C). Следниот пат часовникот на Мартин ќе покажува време запишано со цифрите 0,1, 1 и 2 во 21:01. За тоа време ќе поминат $21\,h\,1\,\text{min}-20\,h\,11\,\text{min}=50\,\text{min}$.

5. Еден електронски часовник покажува 20:07. По колку време најрано часовникот ќе покажува време кое е запишано со истите цифри, но во друг редослед?

A) $4h\,20\,\text{min}$ B) $6\,h$ C) $10\,h\,55\,\text{min}$ D) $11\,h\,13\,\text{min}$ E) $24\,h$

Решение. A). Времината запишани со истите цифри се: 00:27, 02:07, 07:02, 07:20 и 20:07. По 20:07 првото време запишано со истите цифри, но во друг редослед е 00:27 и тоа е по $3\,h\,53\,\text{min}$ до полноќ плус $27\,\text{min}$ по полноќ, односно по $3\,h\,53\,\text{min} + 27\,\text{min} = 4h\,20\,\text{min}$.

6. На Костадинка и требаат 18 минути за да направи долго ланче со поврзување на 3 кратки ланчиња. Колку време ѝ треба на Костадинка за да направи ланче со поврзување на 6 долги ланчиња?

A) $27\,\text{min}$ B) $30\,\text{min}$ C) $36\,\text{min}$ D) $45\,\text{min}$ E) $60\,\text{min}$

Решение. D). Кога прави ланче со поврзување на два дела Костадинка прави две поврзувања. Значи, за едно поврзување и се потребни $18:2=9\,\text{min}$. За да направи ланче со поврзување на 6 делови, таа треба да направи 5 поврзувања, за што е се потребни $5\cdot 9=45\,\text{min}$.

7. Часовникот на Драган касни 10 минути, но тој мисли дека е 5 минути напред. Часовникот на Столе е 5 минути напред, но тој мисли дека касни 10 минути. Во ист момент, секој од нив гледа во сопствениот часовник. Драган мисли дека е 12:00 часот. Што мисли Столе, колку е часот?

A) 11:30 B) 11:45 C) 12:00 D) 12:30 E) 12:45

Решение. D). Бидејќи Драган мисли дека неговиот часовник покажува 5 минути повеќе, а мисли дека е 12:00, неговиот часовник покажува 12:05. Но, часовникот на Драган касни 10 минути, па затоа вистинското време е 12:15. Сега часовникот на Столе оди 5 минути напред, па неговиот часовник покажува 12:20. Столе мисли дека часовникот му касни 10 минути, па затоа тој смета дека е 12:30.

8. Во канцеларијата на Маја има два часовника. Едниот на секој час покажува 1 минута повеќе, а другиот на секој час покажува 2 минути помалку. Вчера Маја двата часовника ги наместила да покажуваат точно време. Кога денес пчогледнала во часовниците едниот покажал 11:00, а другиот 12:00. Во колку часот вчера Маја ги наместила часовниците?

А) 23:00 В) 19:40 С) 15:40 D) 14:00 Е) 11:20

Решение. **С).** Бидејќи едниот часовник оди напред 1 минута, а другиот заостанува 2 минути, со секој изминат час разликата на времињата кои ги покажуваат се зголемува за 3 минути. Сега разликата е 60 минути, што значи дека часовниците се наместени пред $60:3=20$ часа. Во текот на овие 20 часа првиот часовник покажува 20 минути повеќе, па точното време е 11:40. Пред 20 часа било 15:40.

9. Дома имам два часовника. Едниот на секој час покажува 3 минути повеќе, а другиот на секој час покажува 2 минути помалку. Вчера двата часовника ги наместив да покажуваат точно време. Кога денес пчогледнав во часовниците едниот покажа 9:00, а другиот 10:00. Во колку часот вчера ги наместив часовниците?

А) 20:36 В) 21:24 С) 19:30 D) 23:00 Е) 22:30

Решение. **В).** Бидејќи едниот часовник оди напред 3 минута, а другиот заостанува 2 минути, со секој изминат час разликата на времињата кои ги покажуваат се зголемува за 5 минути. Сега разликата е 60 минути, што значи дека часовниците се наместени пред $60:5=12$ часа. Во текот на овие 12 часа првиот часовник покажува 36 минути повеќе, па точното време е 9:24. Пред 12 часа било 21:24.

10. Јанко има пакетче со свеќи. Секоја од свеќите, откако ќе се запали, гори точно 40 min. Јанко на секои 10 min пали по една свеќа. По 55 min колку свеќи ќе горат?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. **C).** За 55 min Јанко ќе запали 6 свеќи (во 1-та, 11-та, 21-та, 31-та, 41-та и 51-та минута).Од овие 6 свеќи 2 ќе се изгаснати (во 41-та и во 51-та минута). Значи, по 55 min ќе горат 4 свеќи.

11. Шест зајаци јадат шест моркови за шест минути. Колку зајаци е изедат 100 моркови за 100 минути?

A) 100 B) 60 C) 6 D) 10 E) 600

Решение. **C).** Бидејќи 6 зајаци за 6 минути јадат 6 моркови, заклучуваме дека 6 зајаци за 1 минута јадат 1 морков. Значи, 6 зајаци за 100 минути ќе изедат 100 моркови.

12. Еден часовник е поставен на маса, на тој начин што стрелката која покажува минути е во правец североисток. По колку минути оваа стрелка за прв пат ќе биде во правец северозапад?

A) 45 B) 40 C) 30 D) 20 E) 15

Решение. **A).** Ако минутната стрелка покажува североисток, тогаш таа е на средината помеѓу броевите 12 и 3, што значи дека во тој момент таа покажува $xh\ 7\text{min}\ 30\text{sec}$. Кога потоа за прв пат стрелката ќе покажува северозапад, таа е на средината меѓу вроевите 9 и 12, што значи дека во во тој момент таа покажува $x\,h\,52\text{min}\,30\text{sec}$. Тоа значи дека ќе поминат $xh\ 52\text{min}\ 30\text{sec} - xh\ 7\text{min}\ 30\text{sec} = 45\text{min}$

13. Два автобуси сообраќаат по кружна патека, при што се движат со со една иста брзина. Интервалот на поминување на една станица е

еднаков на 25 минути. Колку автобуси се потребни дополнително да сообраќаат за да интервалот мешу два последователни автобуси се намали за 60%, без да се менува брзината на движење?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. **B).** Кога интервалот ќе се намли за 60%, меѓу две поминувања на автобус ќе има $0,4\cdot 25=10\,\text{min}$. Времето на поминување на еден автобус на патеката е $2\cdot 25=50\,\text{min}$. Значи, сега ќе бидат потребни $50:10=5$ автобуси, односно дополнителни 3 автобуси.

14. Ако Андреј оди на училиште со автобус, а потоа до дома се враќа пешки, тој патува 3 часа. Ако оди со автобус во двата правци, тој патува 1 час. Колку време ќе му треба ако оди и во двата правци пешки?

A) 3.5 часа B) 4 часа C) 4.5 часа D) 5 часа E) 5.5 часа

Решение. **D).** Бидејќи Андреј во двата правца со автобус патува 1 час, тој со автобус во еден правец патува 0,5 часа. Оттука, бидејќи кога со автобус оди на училиште, а потоа се враќа пешки му требаат 3 часа, тој пешки од дома до училиште оди $3-0,5=2,5$ часа. Затоа на Андреј ако во двата правца оди пешки, му требаат $2\cdot 2,5=5$ часа.

15. Шест момчиња живеат во ист стан во кој има две купатила. Секое од нив наутро користи едно од купатилата и тоа еднаш. Со користење на купатилата почнуваат точно во $07:00$ часот, и тие остануваат по 8,10,12,17, 21 и 22 минути, соодветно. Кое е најкраткото време во кое тие може да завршат со користење на купатилата наутро?

A) $07:45$ B) $07:46$ C) $07:47$ D) $07:48$ E) $07:50$

Решение. **B).** Вкупното време на користење на купатилата е

$$8+10+12+17+21+22=90\,\text{min}.$$

Бидејќи имаме две купатила, просечното време е $45 \min$. Значи, за да го добиеме најкраткото време, потребно е времињата да поделиме на два збира со најмала разлика. Очигледно тие збирови се

$$22+12+10=44 \text{ и } 21+17+8=46.$$

16. На секои три минути автобус оди од аеродромот до центарот на градот. Автомобил поаѓа од аеродромот во исто време како и еден автобус и до центарот на градот вози по истата патека. Патот од аеродромот до центарот на градот автобусите го поминуваат за 60 минути, а автомобилот за 35 минути. Колку автобуси автомобилот престигнал одејќи кон центарот на градот, не сметајќи го автобусот кој поаѓа во исто време со автомобилот?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 13

Решение. **А).** Автобусот патува 60 минути, а автомобилот 35 минути. Бидејќи $60-35=25$ до центарот на градот автомобилот ќе ги престигне сите автобуси кои пред него тргнале 25 и помалку минути. Понатаму, автобусите тргнуваат на секои 3 минути и бидејќи $25=8\cdot 3+1$, заклучуваме дека автомобилот ќе престигне 8 автобуси.

17. Матео има две сини и една зелена свеќа. Секоја сина свеќа изгорува за еден час, а зелената свеќа изгорува за 45 минути. Матео прво ја запалил едната сина свеќа и кога изгореле $\frac{2}{3}$ од неа, тој ја запалил зелената свеќа. Кога изгорела $\frac{1}{3}$ од зелената свеќа, Матео ја запалил втората сина свеќа. Ако и трите свеќи изгореле до крај, колку минути истовремено гореле точно две свеќи?

A) 35 B) 40 C) 45 D) 50 E) 115

Решение. **B).** Пред да биде запалена зелената свеќа, делот што останува сината свеќа која е прва запалена треба да гори уште

$\frac{1}{3}\cdot 60 = 20\text{ min}$. Пред да биде запалена втората сина свеќа зелената свеќа горела $\frac{1}{3}\cdot 45 = 15\text{ min}$, што значи дека точно две свеќи гореле 15 min, а следните 5 min гореле три свеќи. Потоа зелената свеќа горела уште $45-(15+5)=25\text{ min}$ и во овој период горела и втората сина свеќа. Значи, точно две свеќи гореле $15+25=40\text{ min}$.

18. Ана и Павел тргнале во планина кон планинарскиот дом. Во селото, во подножјето на планината, имало знак на кој пишувало дека до планинарскиот дом има 2 часа и 55 минути пешачење. Селото го напуштиле во 12 часот. Во 13 часот стигнале до една чешма каде имало знак дека до панинарскиот дом има само 1 час и 15 минути. Тука одмарале 15 минути и со иста брзина со која оделе претходно продолжиле кон планинарскиот дом. Во колку часот стигнале на целта?

A) 14:30 B) 14:00 C) 14:55 D) 15:10 E) 15:20

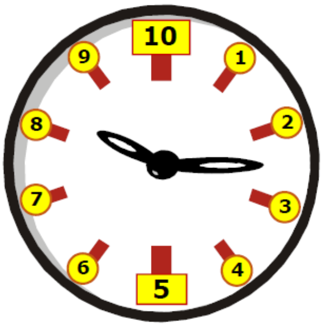
Решение. **B).** Ана и Павел пешачеле $13\,h-12\,h=1\,h=60\text{ min}$, а требало да пешачат $2\,h\,55\text{ min}-1\,h\,15\text{ min}=1\,h\,40\text{ min}=100\text{ min}$. Сега, за да го поминат остатокот од патот наместо $1\,h\,15\text{ min}=75\text{ min}$ тие ќе пешачат $a\text{ min}$ и притоа ќе важи $100:60=75:a$, од каде добиваме $a=45\text{ min}$. Конечно бидејќи по $13\,h$ тие одмарале 15 min, во планинарскиот дом ќе стигнат во $13\,h+15\text{ min}+45\text{ min}=14\,h$.

19. Киро и Рампо пливаат околу мал остров во насока на движењето на стрелките на часовникот. Киро прави полна обиколка за 30 минути, а Рампо за 6 минути помалку. Тие истовремено скокнале во водата. По колку минути за прв пат Рампо го стигнал Киро?

A) 48 B) 96 C) 120 D) 150 E) 180

Решение. C). Киро обиколката ја прави за 30 минути, а Рампо за 24 минути. Рампо за прва пат ќе го стигне Киро кога ќе направи еден цел круг повеќе од него. Времето за кое тоа ќе го направи е еднакво на $NZS(30,24)=120$ минути. За 120 минути Киро е направи $120:30=4$ обиколки на островот, а Рампо ќе направи $120:24=5$ обиколки на островот.

20. На планетата Недојдија денонокието трае исто колку и на Земјата, но наместо 24 часа тоа е разделено на 20 нови часови, а секој нов час наместо на 60 минути е разделен на 100 нови минути. Ако еден часовник од таа планета покажува 8:25, колку ќе покажува часовникот на Земјата во тој момент?



A) 7:54 B) 8:15 C) 8:25 D) 9:15 E) 9:54

Решение. E). Бидејќи 24 часа на Земјата имаат 1440 минути, а 20 часа на планетата Недојдија имаат 2000 минути, заклучуваме дека кога часовникот на Недојдија измерува $\frac{2000}{1440}=\frac{25}{18}$ минути часовникот на Земјата измерува 1 минута на Земјата. До 8:25 часовникот на Недојдија измерил $8\cdot 100+25=825$ минути. Значи, часовникот на Земјата ќе измери $\frac{825}{\frac{25}{18}}=\frac{825\cdot 18}{25}=33\cdot 18=594\min=9\,h\,54\min$, т.е. ќе покаже 9:54.

21. Книга која имала 290 страници, Матео почнал да ја чита во недела. Секој ден освен недела, тој читал по 4 страници, а во недела читал по 25 страници. Колку денови последователно ја читал книгата?

A) 50 B) 46 C) 40 D) 35 E) 41

Решение. Е). Првите седум дена Матео прочитал $25+6\cdot 4=49$ страници. Бидејќи $290=5\cdot 49+45$ Матео читал цели 5 седмици, по што му преостанале 45 страници. Сега, од $45=25+5\cdot 4$ следува дека последните 45 страници тој ги прочитал за 6 дена. Значи, Матео книгата ја прочитал за $5\cdot 7+6=41$ ден

22. Натпреварот Кенгур без граници во 2023 година се одржал на 16.03.2023. Збирот на цифрите со кои е запишана оваа дата е $1+6+0+3+2+0+2+3=17$. Колку пати од почетокот во 2023 година заклучно до таа дата збирот на цифрите е 17?

А) 5 В) 6 С) 7 D) 8 Е) 9

Решение. D). Бараните дати имаат вид $XY.01.2023, XY.02.2023$ и $XY.03.2023$. Во првиит случај збирот на цифрите со кои е запишан денот треба да е 9 и имаме три дена: 09, 18 и 27. Во вториот случај збирот на цифрите со кои е запипан денот треба да е 8 и имаме три дена: 08, 17 и 26. Во третиот случај збирот на цифрите со кои е запипан денот треба да е 7 и имаме три дена: 07, 16 и 25, од кои само првите два дена се до назначениот ден. Значи, вкупно имаме $3+3+2=8$ дати.

23. Даниел и Дијана во исто време почнале да земаат часови по пијано и тоа Даниел двапати седмично, а Дијана секоја втора седица. Даниел посетил 15 часови повеќе од Дијана. Колку седмици тие оделе на часови?

А) 30 В) 25 С) 20 D) 15 Е) 10

Решение. Е). Имаме:

- по I седмица Даниел посетил 2 часа, а Даниела 0 часови,
- по II седмица Даниел посетил 4 часови, а Даниела 1 час,
- по IV седмица Даниел посетил 8 часови, а Даниела 2 часа,

- по VI седмица Даниел посетил 12 часови, а Даниела 3 часови,
- по VIII седмица Даниел посетил 16 часови, а Данела 4 часови,
- по X седмица Даниел посетил 20 часови, а Даниела 5 часови.

Значи, Даниел и Дијана на часови оделе X седмици.

24. Оваа година бабата, нејзината ќерка и нејзината внука заедно имаат 100 години. Нивните возрасти се степени на бројот 2. Колку години има внуката?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

Решение. C). Степените на бројот 2 се: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ... Притоа $64+32+4=100$. Значи, внуката има 4 години.

25. Денес производот на годините на таткото и синот е 2015. Колкава е разликата на нивните години?

A) 26 B) 29 C) 31 D) 34 E) 36

Решение. D). Имаме,

$$2015=1\cdot 2015=5\cdot 403=13\cdot 155=31\cdot 65.$$

Според тоа, производот на годините на тако и син може да е само $2015=31\cdot 65$, па затоа разликата на нивните години е $65-31=34$.

26. Пред седум години, бројот на години на Лепа бил делив 8, а за осум години бројот на години на Лепа ќе биде делив со 7. Пред осум години, бројот на години на Драги бил делив со 7, а за седум години бројот на години на Драги ќе биде делив со 8. Ниту Драги, ниту Лепа немаат повеќе од сто години. Која од следниве реченици може да е вистинита?

A) Драги е две години постар од Лепа

B) Драги е една година постар од Лепа

C) Драги и Лепа се на иста возраст

D) Драги е една година помлад од Лепа

E) Драги е две години помлад од Лепа

Решение. А). Нека Лепа има a години. Тогаш $a-7=8x$ и $a+8=7y$, односно $8x+7=7y-8$, т.е. $8x+15=7y$. Бидејќи x и y се природни броеви и $8x+7<100$ добиваме $x=6, y=9$, т.е. $a=55$. Слично, нека b е бројот на годините на Драги. Тогаш $b-8=7z$ и $b+7=8u$, од каде добиваме $7x+8=8u-7$, т.е. $7z+15=8u$. Бидејќи u и z се природни броеви и $7z+8<100$ добиваме $z=7, u=8$. Сега, бројот на години на Драги е $b=49+8=57$. Значи, Драги е две години постар од Лепа.

27. Четири братучетки Ема, Ива, Рената и Зора имаат 3, 8, 12 и 14 години, при што нивните години не мора да соодветствуваат на редоследот по кој се напишани. Ема е помлада од Рената. Збирот на годините на Зора и Ема е делив со 5. Збирот на годините на Зора и Рената исто така е делив со 5. Колку години има Ива?

A) 14 B) 12 C) 8 D) 3

E) не може да се определи

Решение. А). Имаме само две можности во кои збирот на годините на две девојчиња е делив со 5 и тоа: $3+12=15$ и $8+12=20$. Бидејќи едната можност е на Зора и Ема, а другата на Зора и Рената. Значи, Ема, Зора и Рената имаат 3, 8 и 12 години во некој редослед. Според тоа, Ива има 14 години.

Забелешка. Како што ожеме да видиме при решавањето на задачата условот *Ема е помлада од Рената* не го искористивме, што значи дека истиот не е потребен. Но, ако во задачата се бара да се определи кое девојче колку години има, тогаш бидејќи Зора има 12 години, од овој услов ќе следува дека Ема има 3 години, Рената има 8 години и како погоре Ива има 14 години.

28. Три сестри, чиј просек на години е 10, се на различна возраст. Кога се во парови просеците на два такви пара се 11 и 12. Колку години има најстарата сестра?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 14 E) 16

Решение. **E).** Нека a,b,c се годините на сестрите. Имаме

$$a+b+c=30,\ a+b=22 \text{ и } a+c=24.$$

Ако од првата равенка ја одземеме втората добиваме $c=8$, а ако од првата равенка ја одземеме третата добиваме $b=6$. Според тоа, $a=30-8-6=16$.

29. Годината 2022 е специјална, бидејќи цифрата 2 во нејзиниот запис се јавува три пати. Оваа година е трета по ред, во која живеела желката Ева. Ева е родена точно во специјална година. Кој роденден ќе го прослави Ева во годината, која ќе биде четврта со три еднакви цифри, во која таа живеела?

A) 112 B) 123 C) 203 D) 223 E) 257

Решение. **A).** Наназад специјални години се 2022, 2000 и 1999, што значи дека Ева е родена во 1999 година. Следната специјална година е 2111, па затоа во четвртата специјална година од нејзиниот живот Ева ќе има $2111-1999=112$ години.

30. Математичарот Август де Морган тврдел дека има x години во годината x^2. Познато е дека умрел во 1899 година. Која година е роден?

A) 1806 B) 1848 C) 1849 D) 1899

E) друг одговор

Решение. **A).** Бидејќи де Морган имал x години во годината x^2, тој е роден во годината $x^2 - x = x(x-1)$. Бидеји де Морган умрел во 1899 година важи $x^2 < 1899$, од каде добиваме $x < \sqrt{1899} < 44$. За $x = 43$ добиваме $x^2 = 1849$, што значи дека де Морган е роден во 1806 година и тој живеел $1899 - 1806 = 93$ години. За $x = 42$ добиваме $x^2 = 1764$, што би значело дека де Морган е роден во 1722 година и тој живеел $1899 - 1722 = 177$ години, што не е можно. Значи, де Морган е родем во 1806 година.

31. Во едно одделение никои две момчиња не се родени на ист ден во седмицата и никои две девојчиња не се родени во ист месец. Кога ново момче или ново девојче ќе дојде во класот, еден од овие два услови не е исполнет. Колку ученици има во класот?

A) 18　　B) 19　　C) 20　　D) 24　　E) 25

Решение. **B).** Во седмицата има 7 дена, а во годината 12 месеци. Бидеји со доаѓање на нов ученик еден од условите се нарушува, тоа значи дека ако дојде момче ќе имаме 8 момчиња, а ако дојде девојќе ќе имаме 13 девојчиња. Значи, во одделението има 7 момчиња и 12 девојчиња, т.е. 19 ученици.

32. На една маса седат два пати повеќе деца отколку возрасни. Ако возрасните станат од масата, тогаш просечниот број години на тие што ќе останат да седат ќе биде пет пати помал. Кој од посочените броеви може да е еднаков на збирот на годините на возрасните? (Годините на сите се природни броеви и во двата случаи просечниот број години е природен број.)

A) 180　　B) 182　　C) 184　　D) 186　　E) 188

Решение. B). Нека на масата има $2n$ деца и n возрасни. Ако просечниот број години на децата е a, тогаш просечниот број години на сите кои седат на масата е $5a$. Според тоа, збирот на годините на децата е еднаков на $2na$, а збирот на годините на сите кои седат на масата е еднаков на $3n\cdot 5a=15na$. Значи, збирот на годините на возрасните е еднаков на $15na-2na=13na$. Од понудените броеви само бројот 182 е делив со 13, што значи дека збирот на годините на возрасните може да биде само 182.

33. Околу една маса седат двапати повеќе деца од возрасни. Ако сите возрасни станат од масата, тогаш просекот на годините на тие што ќе останат да седат ќе се намали пет пати. Годините на сите луѓе се природни броеви поголеми од 1, а збирот на годините возрасните луѓе е 156. За кој најголем број луѓе овие тврдења може да се вистинити?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

Решение. D). Нека на масата има n возрасни и $2n$ деца, т.е. има $3n$ луе. Со d да го означиме збирот на годините на децата. Тогаш $\frac{156+d}{3n}=5\frac{d}{2n}$, од каде добиваме $d=24$.

Јасно, $n>1$, бидејќи ако има само 1 возрасен, тој треба да има 156 години.

Ако $n=2$, тогаш $2n=4$, па е $3n=6$. На пример, возрасните може да имаат по 78 години, а децата по 6 години.

Ако $n=3$, тогаш $2n=6$, па е $3n=9$. На пример, возрасните може да имаат по 52 години, а децата по 4 години.

Ако $n=4$, тогаш $2n=8$, па е $3n=12$. На пример, возрасните може да имаат по 39 години, а децата по 3 години.

Ако $n=5$, тогаш $2n=10$, па е $3n=15$. На пример, четворица возрасни може да имаат по 31 година и еден да има 32 години, а шест деца да имаат по 2 години и четири деца по 3 години.

Ако $n=6$, тогаш $2n=12$, па е $3n=18$. На пример, возрасните може да имаат по 26 години, а децата по 2 години.

На масата не може да има повее од 12 деца, бидејќи тогаш некои деца треба да имаат по 1 година.

3. МЕРИМЕ И СПОРЕДУВАМЕ МАСИ И ВОЛУМЕНИ

1. Илина има девет парчиња злато кои имаат маси 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g, 7 g, 8 g и 9 g. Од нив таа направила четири прстени, употребувајќи по две парчиња злато за еден прстен. Масите на овие четири прстени се 17 g, 13 g, 7 g и 5 g. Кое златно парче не е употребено за изработка на прстен?

A) 1 g B) 2 g C) 3 g D) 4 g E) 5 g

Решение. C). Масата на сите парчиња злато е

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45\ g\ ,$$

а масата на прстените е $17+13+7+5=42\ g$. Значи, Илина не го употребила парчето со маса $45-42=3\ g$. Навистина:

$$17=9+8, 13=7+6, 7=5+2, 5=4+1.$$

2. Масите на сол и чиста вода во морската вода во Протарас се во однос $7:193$. Колку килограми сол има во $1000\ kg$ морска вода?

A) 35 B) 186 C) 193 D) 200 E) 350

Решение. A). Бидејќи масите на солта и чистата вода се однесуваат како $7:193$, во $200\ kg$ морска вода има $7\ kg$ сол.

Сега, од $1000=5\cdot 200$ заклучуваме дека во $1000\ kg$ има пет пати повеќе морска сол, односно има $35\ kg$ морска сол.

3. Кога една тегла е една петтина наполнета со вода нејзината маса 560 грама. Ако истата тегла е четири петтини исполнета со вода, тогаш таа има маса 740 грама. Колку е масата на празната тегла?

A) 60 g B) 112 g C) 180 g D) 300 g E) 500 g

Решение. E). Нека масата на водата во теглата е a грама. Тогаш

$$(\tfrac{4}{5}-\tfrac{1}{5})a=740-560,$$

т.е. $\frac{3}{5}a=180$, од каде добиваме $\frac{1}{5}a=60\ g$. Значи празната тегла има маса $560-60=500\ g$.

4. Филип располага со вага која мери со точност од 10 *g*. Тој сака да ја измери тежината на учебникот по математика со точност до половина грам. Кој е најмалиот број идентични копии на учебникот кои Филип треба да ги употреби за да ја постигне саканата цел?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 50

Решение. **D).** Нека имаме n учебници. Тогаш масата на овие n книги ќе биде измерена со точност од 10 *g*. Значи, масата на еден учебник ќе биде определена со точност $\frac{10}{n}\ g$. Значи, потребно е да важи $\frac{10}{n}=0,5$, од каде следува $n=\frac{10}{0,5}=20$. Според тоа, потребни се 20 учебници.

5. Една кофа е до половина полна со вода. Во неа се додадени уште $2\ l$ вода, по што кофата е $\frac{3}{4}$ полна со вода. Колку вода собира кофата?

A) 10 *l* B) 8 *l* C) 6 *l* D) 4 *l* E) 2 *l*

Решение. **B).** Додадените $2\ l$ се $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ од волуменот на кофата. Значи, волуменот на кофата е $4\cdot 2=8\ l$.

6. За време на дожд паднати се 15 литри вода на квадратен метар. За колку е зголемено нивото на водата во базен на отворен простор?

A) 150 *cm* B) 0,15 *cm* C) 15 *cm* D) 1,5 *cm*

E) Зависи од големината на базенот

Решение. D). Еден литар има $1000\,cm^3$, што значи дека 15 литри имаат $15 \cdot 1000 = 15000\,cm^3$. Понатаму, $1\,m^2 = 10000\,cm^2$, па затоа нивото на водата во базенот се зголемило за $15000 : 10000 = 1{,}5\,cm$.

7. Сликарот Пабло планирал да измеша 2 литри сина и 3 литри жолта боја за да добие 5 литри зелена боја. Но, тој се збунил и зел 3 литри сина и 2 литри жолта боја и добил друга нијанса зелена боја. Кое е најмалото количество од зелената боја кое треба да го отстрани така што со дотурање на некои количества сина и/или жолта боја ќе добие 5 литри од саканата нијанса зелена боја?

A) $\frac{5}{3}\,l$ B) $\frac{3}{2}\,l$ C) $\frac{2}{3}\,l$ D) $\frac{3}{5}\,l$ E) $\frac{5}{9}\,l$

Решение. A). Во добиената смеса има 3 литри сина боја наместо потребните 2 литри, што значи 1 литар повеќе сина боја отколку што е потребно. Јасно, за да вкупно остане повторно 5 литри боја, Пабло мора од смесата да го осттани вишокот количество сина боја и да го замени со жолта боја. Во смесата има 3 литри сина боја, па тој треба да отстрани $\frac{1}{3}$ од сината боја, што значи $\frac{1}{3}$ од целата смеса, односно $\frac{5}{3}\,l$ од целата смеса.

8. Група од 20 деца и возрасни со маси меѓу 18 и 100 *kg* заклучно се мерат еден по друг. Вкупната маса на првите десет е 630 *kg*. Колку килограми треба да има најмалку единаесеттото лице, за да средната маса на групата е најмалку 78 *kg*.

A) 20 B) 25 C) 28 D) 30 E) 48

Решение. D). За да средната маса на 20 лица е 78 *kg* потребно е нивната вкупна маса да биде поголема или еднаква на $20 \cdot 78 = 1560\,kg$.

Според тоа, масата на преостанатите десет луѓе треба да биде поголема или еднаква на $1560-630=930\,kg$. Единесеттото лици има најмала можна маса, ако другите десет имаат наголема можна маса. Тоа е во случја кога девет луѓе имаат по 100 kg, а единаесеттиот има 30 kg. Значи, единаесеттото лице мора да има најмалку 30 kg.

9. Во група од неколку кенгури, два најлесни кенгури заедно тежат 25% од вкупната тежина на групата. Три најтешки кенгури заедно тежат 60% од вкупната тежина на групата. Колку кенгури има во групата?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 15 E) 20

Решение. A). Од $25+60<100$ заклучуваме дека групата има повеќе од 5 кенгури. Нека групата има 7 кенгури и нека процентуалните учества на кенгурите во вкупната тежина на групата запишани во растечки редослед се a,b,c,d,e,f,g. Тогаш $a+b=25, e+f+g=60$, па затоа $c+d=15$, што не е можно бидејќи $25=a+b\le c+d=15$. Значи, во групата има помалку од 7 кенгури, па како нивниот број е поголем од 5, заклучуваме дека во групата има 6 кенгури. На пример, ако тежината на целата крупа е A, тогаш еден распоред на тежините кои го задоволуваат условот на задачата е:

$$0{,}12A, 0{,}13A, 0{,}15A; 0{,}19A; 0{,}20A; 0{,}21A.$$

10. Една вага не работи правилно. Ако мериме маса поголема или еднаква на 1000 g таа може да ја покаже било која вредност поголема од 1000 g. Ако мериме маса помала од 1000 g таа ја покажува точната вредност. Димитар има пет тегови кои имаат $A\,g, B\,g, C\,g$, $D\,g, E\,g$. Мерејќи ги по парови тој добил:

$$B+D=1200\,g,\ C+E=2100\,g,\ B+E=800\,g,$$

$B+C=900\ g$ и $A+E=700\ g$.

Кој тег има најголема маса?

А) A В) B С) C D) D Е) E

Решение. D). Од $B+E=800$ и $B+C=900$ седува $C=E+100$, па затоа $C>E$. Од $B+E=800$ и $A+E=700$ следува $B>A$.

Важи $B=800-E$ и $B+D>1000$, па затоа $800-E+D>1000$, т.е. $D>200+E$, односно $D>E$.

Понатаму, од $B=900-C$ и $B+D>1000$ следува $900-C+D>1000$, односно $D>C+100$, што значи $D>C$.

Со собирање на неравенствата $D>200+E$ и $D>C+100$, и ако се искористи дека $C+E>1000$, добиваме $2D>300+E+C>1300$, т.е. $D>650$.

Досега видовме дека $B>A$, $D>C>E$ и затоа доволно е уште да ги споредиме B и D. Ако $B\geq D$, тогаш $B>650$. Оттука добиваме $E=800-B<150$ и $C=900-B<250$, па затоа $C+E<400$, а треба $C+E\geq 1000$. Значи, $D>B$.

Конечно, $D>B>A$ и $D>C>E$, т.е. најголема маса има тегот D.

4. МЕРИМЕ И СПОРЕДУВАМЕ ДОЛЖИНИ

1. За еден природен број велиме дека е палиндром ако одлево надесно се чита исто како што се чита оддесно налево. Пример за палндром е бројот 2002. Бројчаникот на километражникот на еден автомобил покажува 15951. Најмалку по колку километри на бројчаникот на километражникот повторно ќе се појави палиндром?

A) 100 B) 110 C) 710 D) 900 E) 1010

Решение. B). По бројот 15951 следниот палиндром е бројот 16061. Значи, првото следно појавување на палиндром на бројчаникот ќе биде по $16061-15951=110\,km$.

2. Една зебра (пешачки премин) е составена од бели и црни ленти кои се поставени наизменично, и секоја е широка 50 *cm*. На улицата, зебрата започнува и завршува со бела лента. Зебрата има 8 бели ленти. Колку е широка улицата?

A) 7 m B) 7,5 m C) 8 m D) 8,5 m E) 9 m

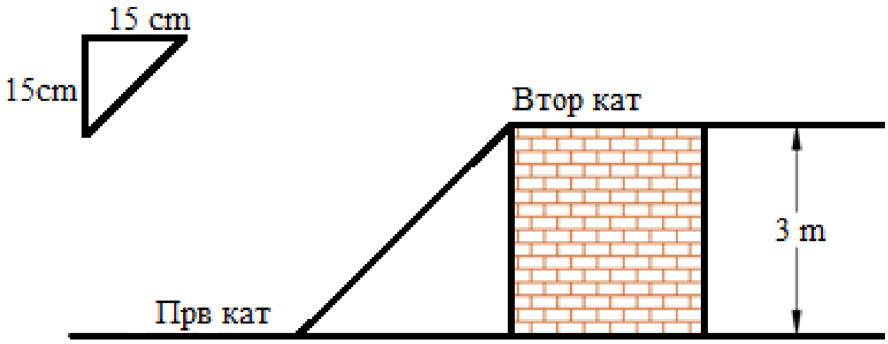
Решение. B). Ако зебрата почнува и завршува со бела трака и има 8 бели ленти, таа вкупно има 15 ленти. Според тоа ширината на улицата е $15\cdot 0,5=7,5\text{m}$.

3. Во алеата во паркот се засадени 13 јавори. Меѓу секои два јавори има по $5\,m$. Горјан истрчал од првото до последното дрво. Колку метри истрчал Горјан?

A) 50 B) 55 C) 60 D) 65 E) 70

Решение. C). Меѓу 13 дрва имаме 12 растојанија од по $5\,m$. Значи, Горјан истрчал $12\cdot 5=60m$.

4. Во зградата на Горјан скалилата се високи 15 cm и се широки 15 cm (види цртеж).



Колку скалила ќе изброи Горјан качувајќи се од првиот на вториот кат, ако растојанието меѓу подовите на двата ката е 3 m?

A) 8 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

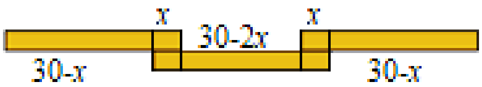
Решение. **D).** Височината меѓу катовите е $3m$ и истата е распределена на скалила чија висина е $15cm$. Според тоа, имаме

$$3m:15cm=300:15=20 \text{ скалила.}$$

5. Коста направил нова ограда во својата градина. Тој искористил 25 штици од дрво, секоја од кои е долга 30 см. Коста штиците ги поврзал така што во секоја спојка на било кои две штици има исто мало преклопување (види цртеж). Вкупната должина на новата ограда на Коста е 6,9 метри. Колкава е должината во сантиметри на преклопувањето меѓу кој било пар соседни штици?

A) 2.4 B) 2,5 C) 3 D) 4.8 E) 5

Решение. **B).** Со x да ја означиме должината на преклопувањето. Тогаш должините на преклопените и непроклопените делови на штиците се како на цртежот десно. Бидеји во долниот ред имаме 12 штици, а на секоја штица имаме по две преклошувања, вкупниот број преклопувања ќе биде 24, па



нивната должина ќе биде $24x$. Понатаму, имаме 23 внатрешни штици кај кои непреклопениот дел е со должина $30-2x$ и две крајни штици кај кои непреклопениот дел е со должина $30-x$. Оттука следува дека

$$\begin{aligned}&24x+23(30-2x)+2(30-x)=690,\\&24x-46x-2x+690+60=690,\\&24x=60,\\&x=2,5\,cm.\end{aligned}$$

6. Растојанието меу две полици во кујнскиот шкаф на Маја е $36\,cm$. Таа знае дека ако нареди 8 чаши една во друга, тогаш тие се високи $42\,cm$, а ако стави 2 чаши една во друга тогаш тие се високи $18\,cm$. Колку најмногу чаши може да нареди една во друга на една чполица?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. **D).** Кога над 2 чаши е стави уште 6 чаши височината се зголемува за $42-18=24\,cm$. Според тоа, со ставање на 1 чаша имаме зголемување на височината за $24:6=4\,cm$. Од $18\,cm$ до $36\,cm$ имаме $36-18=18\,cm$ и како $18=4\cdot4+2$ над почетните 2 чаши можеме да ставиме уште 4 чаши, односно вкупно 6 чаши.

7. Четири колички во супермеркет, ставени една во друга, имаат должина $108\,cm$, а 10 колички имаат должина $168\,cm$. Колку сантиметри е долга една количка?

A) 60 B) 68 C) 78 D) 88 E) 98

Решение. **C).** Должината на четири колички ставени во низа е еднаква на должината на една количка и три растојанија меѓу почетоците на рачките на количките. Должината на 10 колички ставени во низа е еднаква на должината на една количка и девет растојанија меѓу почетоците на рачките на количките. Значи, должината на шест растојанија меѓу почетоците на рачките на количките е еднаква на $168-108=60\,cm$.

Значи, должината на количката е $108-3\cdot 10=78\,cm$.

8. Кенгурот Скокалко скока на нагорнина, а потоа назад по истиот пат. Секој скок на удолнина е три пати подолг од скокот на нагорнина. Неговите скокови на нагорнина се со должина $1\,m$. Скокалко вкупно скокнал 2024 пати. Колку метри поминал на тој начин?

A) 506 B) 1012 C) 2024 D) 3036 E) 4048

Решение. **D).** Нека Скокалко на надолнина направил a скокови. Бидејќи скокот на надолнина е три пати подолг од скокот на нагорнина, тој на нагорнина направил $3a$ скокови. Значи, $a+3a=2024$, од каде добиваме $a=506$. Значи, Скокалко вкупно поминал

$$506\cdot 3+3\cdot 506\cdot 1=3036\,m.$$

9. Два кенгура, Џим и Сем, почнале да скокаат во исто време, од исто место, во иста насока, скокајќи по еднаш во една секунда. Секој скок на Џим е долг 6 *m*. Првиот скок на Сем е долг 1 *m*, вториот 2 *m*, третиот 3 *m* итн. Колку скокови му се потребни на Сем за да го стигне Џим?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 313 E) 14

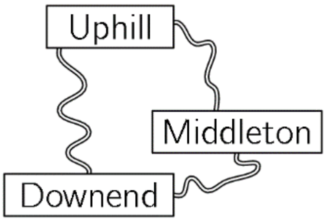
Решение. **B).** *Прв начин.* Поминатите метри во по-следователните скокови на кенгурите се дадени во следнава табела:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Џим	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66
Сем	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

Значи, по 11 скокови Сем ќе го стигне Цим.

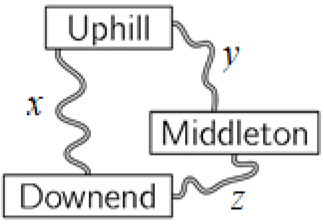
Втор начин. Ако на Сем му се потребни a скокови за да го стигне Цим, тој ќе помине $1+2+3+...+a=\frac{a(a+1)}{2}$ метри. За тоа време Цим ќе помине $6\textit{ц}$ метри. Значи, $\frac{a(a+1)}{2}=6a$, од каде добиваме $a=11$.

10. Три села се поврзани меѓу себе со патеки како што е прикажано на цртежот десно. Од Downend до Uphill, со заобиколување преку Middleton патот е за 1 *km* подолг од директниот пат. Од Downend до Middleton, со заобиколен пат преку Uphill патот е за 5 *km* подолг од директниот пат. Од Uphill до Middleton, со заобиколен пат преку Downend патот е за 7 *km* подолг од директниот пат. Колку е долг најкраткиот пат од трите директни патишта меѓу селата?



A) 1 *km* B) 2 *km* C) 3 *km* D) 4 *km* E) 5 *km*

Решение. **C).** При ознаки како на цртет десно имаме



$$x+1=y+z,$$
$$y+7=z+x,$$
$$z+5=x+y.$$

Ако собереме првата и втората равенка, тогаш $x+y+8=x+y+2z$, па затоа $z=4$. Слично, од втората и третата равенка добиваме $x=6$, а од третата и првата рaвевенка добиваме $y=3$.

11. Мартин и Јана стојат покрај кружна Фонтана дијаметрално спротивно еден на друг. Тие почнуваат да се движат едновремено во иста насока. Брзината на Мартин е $\frac{9}{8}$ од брзината на Јана.

По колку круга Мартин ќе ја стигне Јана?

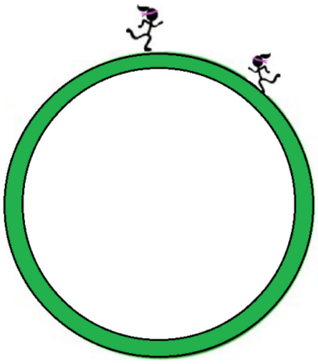
A) 4 B) 8 C) 9 D) 2 E) 72

Решение. **A).** Разликата меѓу Мартин и Јана е половина круг. Мартин оди за $\frac{9}{8}-1=\frac{1}{8}$ побрзо од Јана. Според тоа, Мартин ќе ја стигне јана по $\frac{1}{2}:\frac{1}{8}=4$ круга.

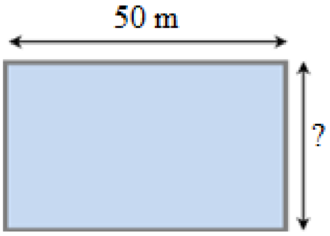
12. Две атлетичарки трчаат на кружна патека со должина 720 метри. Атлетичарките трчаат во спротивни насоки, со постојани брзини. За да истрча еден круг на првата атлетичарка ѝ се потребни четири минути, а додека на втората атлетичарка ѝ се потребни пет минути. Колку метри ќе истрча втората атлетичарка помеѓу две последователни срекавања на атлетичарките?

A) 355 B) 350 C) 340 D) 330 E) 320

Решение. **E).** Брзината на првата атлетичарка е $720:4=180\,m/\min$, а на втората атлетичарка е $720:5=144\,m/\min$. Ако втората атлетичарка истрчала x метри, тогаш првата истрчала $720-x$ метри. Затоа, $\frac{720-x}{180}=\frac{x}{144}$, од каде добиваме $144\cdot720-144x=180x$, т.е. $x=320$.



13. Симон и Јован биле на базен (цртеж десно). Симон трчал околу базенот, а Јован ја пливал должината на базенот. Симон трчал трипати побрзо отколку што пливал Јован. Јован шест пати ја препливал должината на базенот, а во исто време Симон пет пати завртел околу базенот. Колку е широк базенот?



A) 25 m B) 40 m C) 50 m D) 80 m E) 180 m

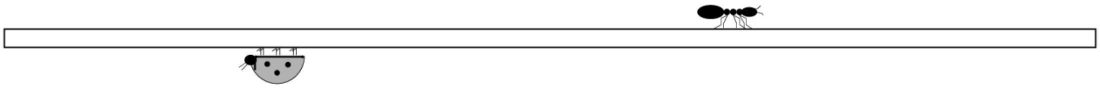
Решение. **B).** Ако a е брзината со која плива Јован, тогаш брзината со која трча Симон е $3a$. Нека x ширината на базенот. Јован испливал шест должини на базенот, односно $6\cdot 50=300\,m$. За тоа време Симон истрчал

$$5(100+2x)\,m=(500+10x)\,m.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}&\frac{300}{a}=\frac{500+10x}{3a},\\&900=500+10x,\\&10x=400,\\&x=40\,m.\end{aligned}$$

14. Мраваката Ени почнала да се движи од левиот крај на шината и поминала $\frac{2}{3}$ од нејзината должина. Бубамарата Буба почнала да се движи од десниот крај на истата шина и поминала $\frac{3}{4}$ од нејзината должина. Колкав дел од должината на шината е растојанието помеѓу Ени и Буба?



A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{5}{7}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{5}{12}$

Решение. **E).** Мравката поминала $\frac{2}{3}$ од шината, па и останало да помине $\frac{1}{3}$ од шината. Бубамарата поминала $\frac{3}{4}$, па и останало да помине $\frac{1}{4}$.

Според тоа, растојанието меѓу мравката и бубамарата е

$$1-(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

од должината на шината.

15. Пабло секогаш вози велосипед со иста брзина и осекогаш оди пешки со иста брзина. Со велосипедот патот од дома до училиптето и назад го поминува за 20 минути, а ако оди пешки, по истиот пат за тоа му се потребни 60 минути. Вчера на училиште тргнал со велосипед, по истиот пат како и обично, по пат го оставил велосипедот кај Филип и продолжил пешки. Од училиштето назад пешачел до куќата на Филип, го зел велосипедот и возел до дома. За тоа му требале 52 минути. Колкав дел од патот Пабло поминал возејќи велосипед?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Решение. **B).** Нека a е делот од патот кој вчера Пабло го поминал со велосипед. Тогаш пешки поминал $1-a$ од патот. Та значи дека со велосипед се возел $20a$ минути, а пешки одел $60(1-a)$ минути. Затоа $20a+60(1-a)=52$, од каде добиваме $40a=8$, односно $a=\frac{1}{5}$.

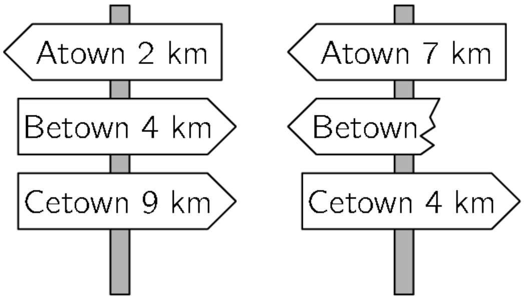
16. Андреј сака да пешачи 5 *km* во просек секој ден во март. На 16-ти март, вечерта пред спиење, тој пресметал дека досега вкупно поминал 95 *km*. Колкаво растојание треба да пешачи дневно во просек во преостанатите денови, ако сака да ја постигне почетната цел, 5 *km* во просек секој ден?

A) 5,4 *km* B) 5 *km* C) 4 *km* D) 3,6 *km* E) 3,1 *km*

Решение. **C).** Андреј во првите 16 дена поминал 95 *km*. Нека во следните 15 дена вкупно помине x *km*. Според условот на задачата има-ме, $\frac{95+x}{31}=5$, од каде добиваме $95+x=155$, односно $x=60$ *km*.

Бидејќи овие 60 *km* треба да ги помине за 15 дена, Андреј во просек дневно треба да пешачи $60:15=4$ *km*.

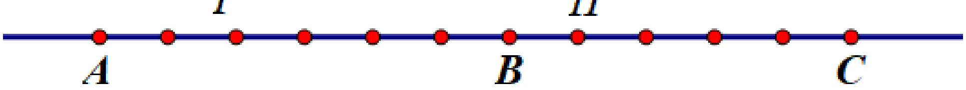
17. Најкраткиот пат помеѓу Atown до Cetown оди преку Betown. Двата знака се поставени по патот од Atown до Cetown. Кое е растојанието кое било напишано на скршениот знак?



A) 1 *km* B) 3 *km* C) 4 *km* D) 5 *km* E) 9 *km*

Решение. A). Нека положбите на градовите и знаците ќе ги претставиме на бројната права, при што растојанието меѓу секои две точки е 1 km .

Од патоказите заклучуваме дека градот Atown (A) е лево од знаците I и II. Ако градот A го поставиме во крајната лева точка, тогаш до знаците I и II има соодветно 2 и 7 растојанија. Сега градот Betown (B) е на четири растојанија десно од знакот I, што значи дека растојанието меѓу градовите Atown и Betown е $2+4=6\,km$. Но, знакот II е на 7 *km* од градот Atown, па затоа градот Betown е меѓу знакот II и градот Atown и е на растојание $7-6=1\,km$ од знакот II. Значи, на скршениот знак е запишано растојанието 1 *km*.



Коментар. Како што можеме да видиме при решавањето на задачата воопшто не ги искористивме податоците за градот Cetown. Задачата може да се реши и ако ги искористиме податоците за градовите Betown и Cetown, т.е. ако не се користат податоците за градот

Atown. Според тоа, дадената задача е преопределена, т.е. има повее информации отколку што се потребни за нејзино решавање.

Обиди се задачата да ја решиш само со користење на податоците за градовите Betown и Cetown.

18. Пабло има две цилиндрични свеќи со различни висини и дијаметри. Првата свеќа изгорува за 6 часа, додека втората свеќа изгорува за 8 часа. Тој ги запалил двете свеќи во ист момент и три часа потоа двете свеќи биле со иста височина. Кој е односот на нивните почетни височини?

A) 4:3 B) 8:5 C) 5:4 D) 3:5 E) 7:3

Решение. **C).** По три часа од првата свеќа ќе остане $\frac{1}{2}$, додека од втората свеќа, ќе остане $\frac{5}{8}$. Значи, односот на нивните оригинални висини е $\frac{5}{8}:\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$.

19. Велосипедист се движи со брзина од $5m$ во секунда. Секое тркало од неговиот велосипед има периметар од $125cm$. Колку цели завртувања прави секое тркало за 5 секунди?

A) 4 B) 5 C) 10 D) 20 E) 25

Решение. **D).** За 1 секунда велосипедистот поминува $5m$, па за 5 секунди велосипедистот ќе помина $5\cdot 5=25\,m=2500\,cm$. Тркалото има периметар $125cm$, па затоа тој е се заврти $2500:125=20$ пати.

20. Виолета неколку пати скокала во далечина. Просечната должина на направените скокови била 3,80 m. Во следниот скок таа скокнала 3,99 m и просечната должина на досегашните скокови се зголемила на 3,81 m.

Колку треба да скокне во следниот скок за да просечната доилжина на сите направени скокови биде 3,82 m?

A) 3,97 m B) 4,00 m C) 4,01 m D) 4,03 m E) 4,04 m

Решение. **C).** Ако Виолета во n скокови $a_1, a_2, ..., a_n$ имала просек на скоковите $3{,}80\,m$, тогаш $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=3{,}80$, од каде добиваме дека

$$a_1+a_2+...+a_n=3{,}80n.$$

Понатаму, со скокот од $3{,}99\ m$ просечната должина на скоковите била 3,81 m, па затоа

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n+3{,}99}{n+1}=3{,}81,$$

односно

$$a_1+a_2+...+a_n+3{,}99=3{,}81(n+1).$$

Значи, $3{,}80n+3{,}99=3{,}81(n+1)$, т.е. $0{,}01n=0{,}18$, од каде добиваме $n=18$. Следниот скок нека е со должина x. Тогаш треба да важи

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n+3{,}99+x}{18+2}=3{,}82,$$

$$a_1+a_2+...+a_n+3{,}99+x=20\cdot 3{,}82,$$

$$3{,}8\cdot 18+3{,}99+x=76{,}4,$$

$$x=4{,}01\,m.$$

21. На аеродромот има хоризонтална подвижна лента долга $500\ m$, која се движи со брзина $4\ km/h$. Дарко и Маја во исто време згазнале на лентата, при што Маја продолжила да оди со брзина $6\ km/h$, а Дарко само стоел на лентата. Колку метри била Маја пред Дарко кога таа ја напуштила лентата?

A) 100 m B) 160 m C) 200 m D) 250 m E) 300 m

Решение. **E).** Дарко стои на подвижната лента, па растојанието од $500\ m$ го минува со брзина од $4\ km/h$. Маја продолжила да се движи со брзина од $(6+4)\ km/h = 10\ km/h$.Таа $500\ m$ ќе помине за $t = \frac{s}{v} = \frac{0,5}{10} = 0,05\ h$, и ќе ја напушти траката. За тоа време Марко ќе помине $s = vt = 4 \cdot 0,05 = 0,2\ km$, односно тој ќе помине $200\ m$. Значи, во моментот кога Маја ќе ја напушти подвижната лента, Дарко ќе заостане $300 m$.

22. Дамјан со својот велосипед се враќал од Куманово дома во Скопје. Тој требало да пристигне дома точно во 15:00 часот. Притоа за $\frac{2}{3}$ од планираното време тој поминал $\frac{3}{4}$ од вкупниот пат. Потоа, ја намалил својата брзина на преостанатиот дел од патот и стигнал дома точно на време. Колку е односот на брзините со кои возел Дамјан на првиот и вториот дел од патот?

A) $5:4$ B) $4:3$ C) $3:2$ D) $2:1$ E) $3:1$

Решение. C). Нека s и t се должината на патот и планираното време за Дамјан да дојде дома. Имаме $v_1 = \frac{\frac{3}{4}s}{\frac{2}{3}t} = \frac{9s}{8t}$ и $v_2 = \frac{\frac{1}{4}s}{\frac{1}{3}t} = \frac{3s}{4t}$. Според тоа, $v_1 : v_2 = \frac{9s}{8t} : \frac{3s}{4t} = 3:2$.

23. Ане, Борис и Кире се натпреваруваат во трчање. Тие ја започнале трката во исто време и секој трчал со своја константна брзина. Кога Ане завршил, Борис имал уште 15 m до целта, а Кире имал 35 m до целта. Кога Борис завршил, Кире имал уште 22 m до целта. Колку била долга патеката на која се натпреварувале?

A) 135 m B) 140 m C) 150 m D) 165 m E) 175 m

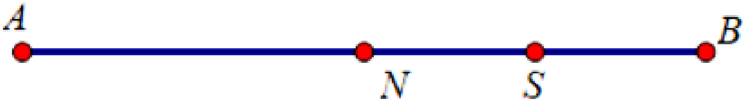
Решение. D). Од условот на задачата имаме дека $s = v_A t$, $s = v_B t + 15$ и $s = v_K t + 35$. Со елиминација на времето t имаме, $v_B = \frac{(s-15)v_K}{s-35}$

Дополнително, од вториот услов на задачата, имаме дека $s = v_B t_1$ и $s = v_K t_1 + 22$, од каде со елиминација на t_1, добиваме $v_B = \frac{s \cdot v_K}{s-22}$. Со изденачување на двете равенки за брзината на Борис, добиваме дека $s(s-35) = (s-15)(s-22)$, од каде $s = 165\, m$.

24. Ана вози од точката A до точката B, а потоа одма се враќа во точката A. Мими вози од точката B до точката A, а потоа одма се враќа во B. Патуваат по ист пат, почнуваат во исто време и возат со постојани брзини. Брзината на Ана е трипати поголема од брзината на Мими. Првиот пат се сретнале 15 минути од тргнувањето. По колку минути од тргнувањето ќе се сретнат вторпат?

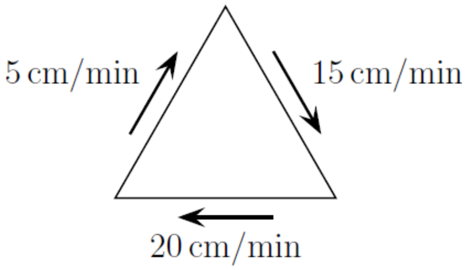
A) $20\,\min$ B) $25\,\min$ C) $30\,\min$ D) $35\,\min$ E) $45\,\min$

Решение. **C).** Нека v_A и v_M се брзините на Ана и Мими. Да претпоставиме дека првиот пат се сретнале во точката S. Од $v_A = 3v_M$, сле-дува $\overline{AS} = 3\overline{BS}$. Секое девојче своето растојание го поминало за $15\,\min$.



Бидејќи $\frac{v_A}{v_M} > 2$, втората средба ќе се случи пред Мими да стигне во точката A. Тоа место да го означиме со N. Меѓу двете срекавања Ана поминува растојание $2\overline{BS} + \overline{NS}$, а Мими растојание $\overline{NS}$. Затоа $2\overline{BS} + \overline{NS} = 3\overline{NS}$, од каде добиваме $\overline{BS} = \overline{NS}$. Тоа значи дека од почетокот до средбата Мими поминала растојание $\overline{BS} + \overline{NS} = 2\overline{BS}$, за што и се потребни $2 \cdot 15\,\min = 30\,\min$.

25. Мравка се движи долж страните на рамностран триаголник. Просечните брзини со кои н се движи по страните на триаголникот се $5\,cm/\min$, $15\,cm/\min$ и $20\,cm/\min$.



Која е средната брзина изразена во $cm/\min$ со која мравката прави една цела обиколка на триаголникот?

A) $\frac{34}{5}$ B) $\frac{80}{11}$ C) $\frac{180}{19}$ D) 15 E) $\frac{40}{3}$

Решение. **C).** Нека должината на страната на триаголникот е a. Еден сантиметар на првата страна таа поминува за $\frac{1}{5}\min$, на втората за $\frac{1}{15}\min$ и на третата а $\frac{1}{20}\min$. За да го обиколи триаголникот на мравката и се потребни

$$\frac{a}{5}+\frac{a}{15}+\frac{a}{20}=\frac{12a+4a+3a}{60}=\frac{19}{60}a\min.$$

Вкупната должина на патот е $3a\,cm$, што значи дека просечната брзина ќе биде $\frac{3a}{\frac{19}{60}a}=\frac{180}{19}\,cm/\min$.

5. КУПУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

1. На сточниот пазар размената на снекои стоки се врши според ценовникот даден на табелата десно. Колку кокошки треба да понесе на пазарот фармерот Трпко, за дома да се врати со една гуска, една мисирка и еден петел?

ЦЕНОВНИК		
1 мисирка	⇔	1 петел
1 гуска + 2 кокошки	⇔	3 петли
4 кокошки	⇔	1 петел

А) 18 В) 17 С) 16 D) 15 Е) 14

Решение. **А).** Еден петел чини 4 кокошки, па како 1 мисирка чини колку 1 петел, добиваме дека 1 мисирка чини 4 кокошки. Понатаму, 3 петли чинат 12 кокошки, што значи дека 1 гуска чини $12-2=10$ кокошки. Конечно, 1 гуска, 1 мисирка и 1 петел чинат $4+4+10=18$ кокошки.

2. Ивана има 20 денари. Секоја од нејзините четири сестри има по 10 денари. Колку денари Ивана треба да даде на секоја од своите сестри така што секоја од петте девојки да има иста сума на пари?

А) 2 В) 4 С) 5 D) 8 Е) 10

Решение. **А).** Сите пет сестри заедно имаат $20+4\cdot 10=60$ денари. Ако сите имаат иста сума пари, тогаш тое имаат по $60:5=12$ денари. Значи, секоја сестра на Ивана треба да добие по $12-10=2$ денари.

3. Четири чоколади чинат 6 евра повеќе од едно чоколадо. Колку чини едно чоколадо?

А) 1 € В) 2 € С) 3 € D) 4 € Е) 5 €

Решение. **В).** *Прв начин.* Од условот на задачата, ако цената на едно чоколадо е x, тогаш имаме

$$4x-6=x$$
$$3x-6=0$$
$$x=2.$$

Значи, цената на едно чоколадо е 2 €.

Втор начин. Четири чоколади чинат колку едно чоколадо и 6 евра. Значи, три чоколади чинат 6 евра, па затоа едно чоколадо чини $6:3=2$ евра.

4. Ивана купила три различни книги. За првата платила половина од парите кои ги имала и уште 1 евро. За втората платила половина од преостанатите пари и уште 2 евра. За третата платила половина од преостанатите пари и уште 3 евра, со што ги потрошила сите пари. Колку пари имала Ивана на почетокот?

A) 36 евра B) 45 евра C) 34 евра D) 65 евра E) 100 евра

Решение. **C).** Последните 3 евра се половина од парите пред Ивана да ја купи третата книга. Значи, пред да ја купи третата книга таа имала $3+3=6$ евра. Половина од парите пред да ја купи втората книга се $3+2=8$ евра. Значи, пред да ја купи втората книга Ивана имала $8+8=16$ евра. Половина од парите пред да ја купи првата книга се $16+1=17$ евра. Значи, пред тоа, т.е. на почетокот Ивана имала $17+17=34$ евра.

Забелешка. Задачата може да се реши и со составување на равенка. Обиди се да најде решение и на овој начин.

5. Трговецот Ласте набавил 50 шишиња минерална вода, секое по цена 10 денари. Откако продал 40 шишиња, тој имал 100 денари повеќе од парите кои ги платил за набавката на целата вода. Покасно тој, по иста продажна цена, ги продал и преостанатите шишиња вода. Колку пари добил Ласте од продажбата на водата?

А) 700 ден B) 750 ден C) 800 ден D) 900 ден E) 1000 ден

Решение. А). За набавката на водата Ласте потрошил $50\cdot 10=500$ денари. Тој 40 шишиња продал за $500+100=600$ денари, што значи 1 шише продал за $600:40=15$ денари. Конечно, од продажбата на целата вода Ласте добил $50\cdot 15=750$ денари.

6. Платата на Виктор е 20% од платата на неговиот шеф. За колку проценти платата на шефот е поголема од платата на Виктор?

А) 80% B) 120% C) 180% D) 400% E) 520%

Решение. D). Ако платата на шефот е y, тогаш платата на Виктор е $x=0,2y$. Значи, $y=\frac{x}{0,2}=5x$, т.е. платата на шефот е пет пати поголема од платата на Виктор. Според тоа, плата на шефот 400% поголема од платата на Виктор.

7. Кога Весна и Маја ги споредиле своите заштеди, заклучиле дека односот помеѓу нивните заштеди е $5:3$. Весна купила таблет кој чини 160 евра, па односот на нивните заштеди се променил во $3:5$. Колку пари имала Весна пред да го купи таблетот?

А) 192 B) 200 **C)** 250 D) 400 E) 420

Решение. C). Нека со x ја означиме заштедата на Весна, а со y заштедата на Маја. Тогаш од условот на задачата имаме дека $x:y=5:3$ и $(x-160):y=3:5$. Од првата равенка добиваме дека $y=\frac{3x}{5}$. Со замена во втората равенка добиваме $5x-800=3\cdot\frac{3x}{5}$, од каде добиваме $x=250$ евра, $y=150$ евра.

8. Андреј, Бојан и Велко отишле на пазар. Бојан потрошил 15% од сумата која ја потрошил Велко, а Андреј потрошил 60% повеќе од

сумата која ја потрошил Велко. Тројцата заедно потрошиле 5500 денари. Колку денари потрошил Андреј?

A) 300 B) 2000 C) 2500 D) 2600 E) 3200

Решение. **E).** Нека Велко потрошил a денари. Тогаш Бојан потрошил $0,15a$ денари и Андреј потрошил $1,6a$ денари. Според тоа,

$$\begin{aligned}&a+0,15a+1,6a=5500,\\&2,75a=5500,\\&a=2000.\end{aligned}$$

Значи, Андреј потрошил $1,6\cdot 2000=3200$ денари.

9. Кирил, Марко и Коста купиле маса за пинг-понг. Кирил платил 60% од цената на масата, Марко платил 40% од преостаната сума и Коста ги платил последните 30 евра. Колку евра чини масата за пинг-понг?

A) 100 B) 125 C) 145 D) 150 E) 200

Решение. **B).** Нека цената на масата е a евра. Кирил платил $0,6a$ евра, што значи дека Марко и Коста заедно платиле $0,4a$ евра. Од оваа сума Марко платил $0,4\cdot 0,4a=0,16a$ евра, а Коста платил $0,6\cdot 0,4a=0,24a$ евра. Значи, $0,24a=30$, односно $a=30:0,24=125$.

10. Даниел има 9 монети од по 2 денари, а Ана има 8 монети од по 5 денари. Колку најмалку монети треба да разменат за двајцата имаат еднакви суми пари?

A) 4 B) 5 C) 8 D) 12

E) таква размена не е можна

Решение. **B).** Двајцата заедно имаат $9\cdot 2+8\cdot 5=58$ денари. По размената треба да имаат по $58:2=29$ денари. Ако Ана му даде на Даниел две монети, тогаш таа ќе има најмалку $6\cdot 5=30$ денари. Значи, Ана треба да даде најмалку 3 монети. Кога таа на Даниел ќе му даде 3 монети, ќе и останат $5\cdot 5=25$ денари, а Даниел ќе има

$9\cdot 2+3\cdot 5=33$ денари. Сега доволно е Даниел на Ана да и даде две свои монети, по што двајцата ќе имаат по $25+2\cdot 2=29=33-2\cdot 2$ денари. Значи, најмалку треба да разменат $3+2=5$ монети.

11. Капетанот Спероу и неговите пирати откопале златници на островот на богатството. Тие ги поделиле златниците меѓу себе на еднакви делови. Ако имало четири пирати помалку, тогаш останатите пирати би добиле по 10 златници повеќе. Ако пак имало 50 златници помалку, секој пират би добил по 5 златници помалку. Колку златници капетанот Спероу и неговите пирати откопале на островот на богатството?

A) 80 B) 100 C) 120 D) 150 E) 250

Решение. D). Бројот на гусарите да го означиме со x, со y бројот на златниците кои ги добил секој гусар, а со z вкупниот број златници. Од условот на задаачата следува

$$\begin{cases} xy=z, \\ (x-4)(y+10)=z,. \\ x(y-5)=z \end{cases}$$

Решение на дадениот систем равенки $x=10,\ y=15,\ z=150$.

12. Андреј и Пабло купиле $11\,kg$ и $8\,kg$ грозје, соодветно. Филип не успеал да отиде на пазар, па затоа им предложил грозјето да го поделат на три еднакви дела, за што тој ќе им даде 57 евра, кои Андреј и Пабло ќе ги поделат праведно според грозјето кое го имаат. Колку евра Андреј ќе добие повеќе од Пабло?

A) 27 B) 37 C) 39 D) 45 E) 48

Решение. A). Вкупно има $19\,kg$ грозје, што значи дека секој ќе има по $19:3=\frac{19}{3}\,kg$ грозје. Тоа значи дека Андреј на Филип ќе му даде

$11-\frac{19}{3}=\frac{14}{3}$ грозје, а Пабло ќе му даде $8-\frac{19}{3}=\frac{5}{3}\,kg$ грозје. Според тоа, парите треба да ги поделат во однос $\frac{14}{3}:\frac{5}{3}=14:5$, односно од секои 19 евра Андреј да добие 14, а Пабло 5 евра. Бидејќи $57=3\cdot 19$, Андреј ќе добие $3\cdot 14=42$ евра, а Пабло ќе добие $57-42=15$ евра. Значи, Андреј ќе добие $42-15=27$ евра повеќе од Пабло.

6. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Во едно одделение има 9 момчиња и 13 девојчиња. Половина од децата од тоа одделение се на екскурзија. Кој е најмалиот број девојчиња кои не се на екскурзија?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. C). Во одделението има $9+13=22$ ученици. На екскурзија биле $22:2=11$ ученици. Значи, најмалку $13-11=2$ девојчиња не биле на екскурзија.

2. Михаил секој ден решавал шест задачи, а Лазар секој ден решавал четири задачи. Колку денови му се потребни на Лазар да реши еднаков број на задачи колку што Михаил решил за четири дена?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Решение. C). Михаил за четири дена решил $4\cdot 6=24$ задачи. На Лазар ќе му бидат потребни $24:4=6$ дена.

3. Во една соба има кучиња и мачиња. Бројот на шепите на мачињата е двапати поголем од бројот на носевите на кучињата. Бројот на мачињата е:

A) двапати поголем од бројот на кучињата

B) еднаков на бројот на кучињата

C) половина од бројот на кучињата

D) четвртина од бројот на кучињата

E) една шестина од бројот на кучињата

Решение. C). Нека x е бројот на мачињата. Тие имаат $4x$ шепи и овој број е двапати поголем од бројот на носевите на кучињата. Значи, кучињата имаат $4x:2=2x$ носеви. Според тоа, во собата има $2x$ кучиња. Сега, од $2x:x=2$ заклучуваме дека има двапати повеќе кучиња од мачиња, т.е. бројот на мачињата е половина од бројот на кучињата.

4. На една забава имало 4 момчиња и 4 девојчиња. Момчињата играле само со девојчиња, а девојчињата играле само со момчиња. На прашањето со колку партнерки играле момчињата одговорила 3,1, 2, 2, а три девојчиња одговориле дека бројот на партнерите со кои играле е 2, 2, 2. Со колку партнери играло четвртото девојче?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. **C).** Бидејќи збирот на бројот на партнерките со кои играле момчињата мора да е еднаков на збирот на партнерките со кои играле девојчињата, добиваме дека четвртото девојче играло со $3+1+2+2-(2+2+2)=2$ партнери.

5. Сања направила 555 купчиња од по 9 камчиња во едно купче. Потоа, таа камчињата ги собрала во едно купче и новото купче го поделила на купчиња од по 5 камчиња. Колку купчиња добила Сања?

A) 999 B) 900 C) 555 D) 111 E) 45

Решение. **A).** Имаме, $555\cdot 9=(5\cdot 111)\cdot 9=5\cdot(111\cdot 9)=5\cdot 999$ што значи дека Сања добила 999 купчиња од по 5 камчиња.

6. Кога пет пријатели се сретнале, секој од нив дал по едно колаче на останатите. Потоа секој од нив ги изел колачињата кои му биле дадени од пријателите. На крајот вкупниот број на колачиња се намалил за половина во однос на почетниот број. Колку колчиња имале петте пријатели на почетокот?

А) 20 В) 24 С) 30 D) 40 Е) 60

Решение. D). Секој од петте пријатели добил по четири колачиња од останатите, а потоа секој ги изел добиените колачиња. Значи, тие вкупно изеле $5\cdot 4=20$ колачиња. Конечно, на почетокот петте пријатели имале вкупно $20\cdot 2=40$ колачиња.

7. Матео набавил дрва за огрев. Дел од цепениците биле големи, па требало дополнително да се расечат. Откако направил 53 расекувања Матео избројал дека има 72 цепеници. Колку цепеници имал Матео на почетокот, ако со секое расекубање се добива една цепеница повеќе?

А) 54 В) 18 С) 19 D) 20 Е) 52

Решение. С). Бидејќи со секое расекување бројот на цепениците се зголемува за една, со 53 расекувања Матео добил нови 53 цепеници. Значи, на почетокот тој имал $72-53=19$ цепеници.

8. Дванаесет девојчиња се сретнале во кафетерија. Некои изеле по 2, а некои по 1 колаче. Две од девојчињата само пиеле минерална вода. Во просек, тие изеле по 1,5 колаче. Колку девојчиња изеле по две колачиња?

А) 2 В) 5 С) 6 D) 7 Е) 8

Решение. Е). Имаме 12 девојчиња кои во просек изеле по 1,5 колачиња, па затоа вкупниот број изедени колачиња е $12\cdot 1{,}5=18$. Бидејќи 2 девојчиња пиеле само минерална вода, добиваме дека колачињата ги изеле 10 девојчиња. Ако секое девојче изело по 1 колаче, добиваме дека ќе се изедени 10 колачиња. Оние $18-10=8$ колачиња ги изеле девојчињата кои изеле по 2 колачиња, секое девојче уште по едно. Значи, 8 девојчиња изеле по 2 колачиња.

9. За член на училишниот совет гласаат 130 ученици. Избран е кандидатот кој ќе освои најмногу гласови. На изборите се јавиле учениците: Софија, Кирил и Александар. До овој момент Софија добила 24 гласови, Кирил добил 29 гласови и Александар добил 37 гласови. Уште колку ученици треба да гласаат за Александар за тој сигурно да победи на изборите?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 **E) 17**

Решение. **E).** До овој момент гласале $24+29+37=90$ ученици. Значи, треба да гласаат уште $130-90=40$ ученици. Александар има $37-29=8$ гласови повеќе од Кирил. Значи, ако 8 од овие 40 ученици гласат за Кирил, тогаш Александар и Кирил ќе имаат еднаков број гласови, а остануваат уште $40-8=32$ гласа. Според тоа, за да победи на изборите за Александар треба да гласаат повеќе од половината од овие 32 ученици. Значи, треба да гласаат $32:2+1=17$ ученици.

10. Во една група има повеќе од 45%, но помалку од 50% девојчиња. Кој е најмалиот можен број девојчиња во оваа група?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. **C).** Нека групата има a деца и нека во групата има b девојчиња. Тогаш бројот на девојчињата е поголем од $0,45a$, а е помал од $0,5a$. Значи, $0,45a<b<0,5a$, па затоа $9a<20b<10a$. Сега, за $b=1,2,3,4$ ги добиваме неравенствата

$$9a<20<10a,\quad 9a<40<10a,\quad 9a<60<10a,\quad 9a<80<10a.$$

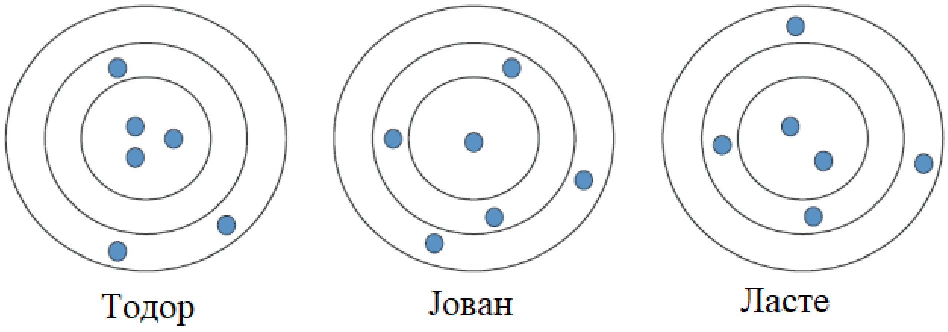
Лесно се гледа дека во сите четири случаи не постои природен број a за кој истовремено се исполнети и двете неравенства. Но, за $b=5$ и $a=11$ добиваме $9\cdot 11<20\cdot 5<10\cdot 11$, што значи дека најмалиот можен број девојчиња во групата е 5.

11. Мартин учествувал на натпревар по стрелаштво. Секогаш кога ќе ја погодел целта тој освојувал 5, 8 или 10 бодови. Тој еднаков број пати освоил 8 и 10 бодови. Вкупно освоил 99 бодови, а 25% од стрелањата ја промашил метата. Колку пати Мартин стрелал во метата?

A) 10 B) 12 C) 16 D) 20 E) 24

Решение. **D).** Нека Мартин x пати освоил по 8 и 10 бодови. Тој вкупно освоил 99 бода, па ако y пати освоил по 5 бодови добиваме $5y+18x=99$. Броевите 18 и 99 се деливи со 9, а се заемно прости со 5, па затоа $y=9t$, од каде добиваме $5t+2x=11$. Во множеството природни броеви решение на последната равенка е $t=1, x=3$. Значи, Мартин 3 пати освојувал по 8 и 10 бодови и 9 пати освоил по 5 бодови. Значи, за освоените бодови тој стрелал $3\cdot 2+9=15$ пати. Бројот 15 е 75% од вкупниот број на стрелањата, што значи дека Мартин стрелал $15:0,75=20$ пати.

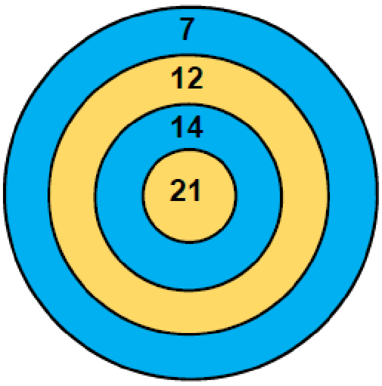
12. Тодор, Јован и Ласте со стрелички гаѓале мета. Нивните погодоци се прикажани на долните цртежи. Тодор освоил 46, а Јован освоил 34 чпоени. Колку поени освоил Ласте?



A) 37 B) 38 C) 39 D) 40 E) 41

Решение. **D).** Тодор и Јован заедно четири пати погодиле во кругот, четири пати во првиот и четири пати во вториот прстен. Тие заедно освоиле $46+34=80$ поени. Ласте, во кругот, првиот и вториот прстен погодил по два пати, па затоа тој освоил двојно помалку поени од поените кои заедно ги освоиле Тодор и Јован заедно. Значи, Ласте освоил $80:2=40$ поени.

13. Пабло и Андреј гаѓаат со стрелички во метата прикажана на цртежот десно, која е составена од еден круг и три прстени. За секој погодок во дел од метата се добива бројот на поени запишан во тој дел од метата. Двајцата освоиле по 250 поени. Колку поени се добива за погодок во делот кој сигурно и двајцата го погодиле?



A) 7 B) 12 C) 14 D) 21

E) не може да се определи

Решение. B). Ако некое од децата нема погодок во делот кој носи 12 поени, тогаш треба да важи $7n+14m+21k=250$. Последното не е можно бидејќи левата страна на добиеното равенство е делива со 7, а $250=7\cdot 35+5$. Значи, и Андреј и Пабло мора да го погодиле прстенот што носи 12 поени.

14. Еден змеј има 5 глави. Секогаш кога ќе се пресече една негова глава му пораснуваат пет нови глави. Ако нему шест пати последователно му е пресечена по една глава (една по една), колку глави има змејот?

A) 25 B) 28 C) 29 D) 30 E) 35

Решение C). По сечењето на една глава на змејот му пораснуваат пет нови глави. Тој губи една, а добива пет глави, што значи по секое сечење на една глава бројот на неговите глави се зголемува за 4. Значи, по шест сечења на по една глава змејот ќе има $5+6\cdot 4=29$ глави.

15. Пингвинот Пинги секој ден оди во риболов и уловува по 12 риби за своите две пингвинчиња. Секој ден на пингвинчето кое прво ќе дојде до него му дава 7 риби, а на другото пингвинче му дава 5 риби. Во последните неколку дена едно од пингвинчињата изело 44 риби. Колку риби изело другото пингвинче?

A) 34 B) 40 C) 46 D) 52 E) 58

Решение. **D).** Нека првото пингвинче изело x дена по 5 и y дена по 7 риби. Тогаш $5x+7y=44$. Во множеството природни броеви единствено решение на последната равенка е $x=6, y=2$. Значи, второто пингвинче изело 6 дена по 7 риби и 2 дена по 5 риби, што значи изело $6\cdot 7+2\cdot 5=52$ риби.

16. Секој ученик во едно одделение плива или танцува. Три петини од учениците во одделението пливаат и три петини од учениците танцуваат. Пет ученици и пливаат и танцуваат. Колку ученици има во одделението?

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

Решение. **C).** Нека со x го означиме бројот на ученици во одделението. Од условот на задачата имаме дека $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}-1=\frac{1}{5}$ од учениците и пливаат и танцуваат. Значи, $\frac{1}{5}x=5$, од каде следува $x=5\cdot 5=25$.

17. Едно истражување констатирало дека $\frac{2}{3}$ од потрошувачите го купуваат млекото A, а $\frac{1}{3}$ млекото B. По рекламирањето на млекото B направено е ново истражување, со кое се констатирало дека $\frac{1}{4}$ од купувачите кои порано го купувале млекото A почнале да го купуваат млекот B. Кое од следниве тврдења е точно?

A) сега $\frac{5}{12}$ од потрошувачите купуваат млеко A, а $\frac{7}{12}$ млеко B

B) сега $\frac{1}{4}$ од потрошувачите купуваат млеко A, а $\frac{3}{4}$ млеко B

C) сега $\frac{7}{12}$ од потрошувачите купуваат млеко A, а $\frac{5}{12}$ млеко B

D) сега $\frac{1}{2}$ од потрошувачите купуваат млеко A, а $\frac{1}{2}$ млеко B

E) сега $\frac{1}{3}$ од потрошувачите купуваат млеко A, а $\frac{2}{3}$ млеко B

Решение. D). По рекламирањето $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$ од потрошувачете почнале наместо млеко A да купуваат млеко B. Значи, млеко B купувале $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ од потрошувачите и исто толку купувале млеко A.

18. Една шестина од публиката на претставата за деца се возрасни. Ако две петтини од децата се момчиња, колкав дел од публиката се девојчиња?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

Решение. B). *Прв начин.* Според условот $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ од публиката се деца. Од нив момчиња се $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{3}$. Значи, девојчиња се $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$.

Втор начин. Според условот $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ од публиката се деца. Бидејќи $\frac{2}{5}$ од децата се момчиња, добивам дека $\frac{3}{5}$ од децата се девојчиња. Значи, $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{2}$ од публиката се девојчиња.

19. Андреј поделил неколку јаболки на шест еднакви купчиња. Борис истиот број на јаболки ги поделил на пет еднакви купчиња. Борис забележал дека секое од неговите купчиња има по две јаболка повеќе од секое од купчињата јаболка на Андреј. Колку јаболки има Андреј?

A) 60 B) 65 C) 70 D) 75 E) 80

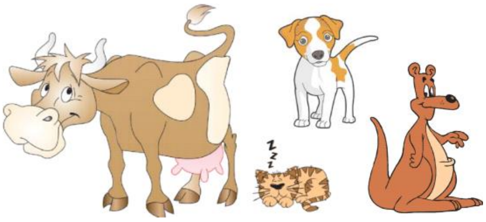
Решение. A). Ако со x го означиме бројот на јаболката во купчињата на Андреј, тогаш во купчињата на Борис има $x+2$ јаболка. Значи, $6x=5(x+2)$, од каде добиваме $x=10$. Значи, Андреј има $6\cdot 10=60$ јаболка.

20. Филип играл кошарка. Во првите 20 шутеви на кошот, Филип погодил 55% од шутевите. Во следните пет шутеви, неговиот процент на успешност се искачил на 56%. Колку од последните пет шутеви ги погодил Филип?

A) 1 B) 2 **C)** 3 D) 4 E) 5

Решение. C). Во првите 20 шутеви на кошот, Филип погодил 55% од шутевите, односно тој погодил $(20\cdot 55):100=11$ шутеви. Ако во 25 шутеви има успешност 56%, добиваме дека Филип погодил $(25\cdot 56):100=14$ шутеви. Значи, во последните 5 шутеви Филип погодил $14-11=3$ шутеви.

21. Матео чува кучиња, крави, мачки и кенгури како миленичиња. Тој и кажал на Елена дека има вкупно 24 миленици, дека $\frac{1}{8}$ од нив се кучиња, $\frac{3}{4}$ од нив не се крави и $\frac{2}{3}$ од нив не се мачки. Колку кенгури чува Матео?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Решение. D). Од условот на задачата имаме дека тој чува $24:8=3$ кучиња. Бидејќи $\frac{3}{4}$ од нив не се крави, тоа значи дека $\frac{1}{4}$ од нив се крави, т.е. Матео чува $24:4=6$ крави. Од миленичињата $\frac{2}{3}$ не се мачки, односно $\frac{1}{3}$ се мачки, па тој чува $24:3=8$ мачки. Конечно, бројот на кенгури кој ги чува Матео е $24-(3+6+8)=24-17=7$.

22. Елизабета има торба со 60 чоколади. Таа изела една десетина во понеделникот, потоа една деветина од остатокот во вторник, потоа една осмина од остатокот во среда, потоа една седмина од остатокот во четвртокот и така понатаму се додека не изела една половина од преостанатите чоколади од претходниот ден. Колку чоколади ѝ останале?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

Решение. E). Елизабета во понеделникот изела $\frac{1}{10}\cdot 60=6$ чоколади, па ѝ останале 54 чоколади. Во вторникот изела $\frac{1}{9}\cdot 54=6$ чоколади, па ѝ останале 48 чоколади. Потоа изела $\frac{1}{8}\cdot 48=6$ чоколади, па останале 42 чоколади, па изела $\frac{1}{7}\cdot 42=6$ чоколади па ѝ останале 36 чоколади. Наредниот ден излела $\frac{1}{6}\cdot 36=6$ чоколади, па ѝ останале 30 чоколади. Утредента изела $\frac{1}{5}\cdot 30=6$ чоколади, па ѝ останале 24 чоколади. Потоа, наредниот ден изела $\frac{1}{4}\cdot 24=6$ чоколади, па останале 18 чоколади, па потоа изела $\frac{1}{3}\cdot 18=6$ чоколади, па ѝ останале 12 чоколади. Деветтиот ден изела половина од чоколадите, односно излела $\frac{1}{2}\cdot 12=6$ чоколади, па ѝ останале 6 чоколади.

23. Во еден лифт може да влезат 12 возрасни луѓе или 20 деца. Колку деца може да влезат во лифтот, ако во него веќе има 9 возрасни луе?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 4 E) 6

Решение. С). Ако во лифтот вече има 9 возрасни луѓе, тога значи дека има место уште за 3 возрасни луѓе, што е $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ од капацитетот на лифтот. Значи, во лифтот може д а се сместат уште $\frac{1}{4}\cdot 20=5$ деца.

24. Симона и Маја се натпреварувале во решавање на задачи. Тие добиле ист лист со задачи. За секоја задача девојчето кое прво ќе ја реши задачата добива по 4 поени, а другото девојче добивала по 1 поен. Секое девојче решило по 60 задачи, и заедно освоиле 312 поени. Колку исти задачи тие решиле?

А) 53 В) 54 С) 55 D) 56 Е) 57

Решение. D). Со x да го означиме бројот на задачите кои ги решиле двете девојчиња. За овие задачи тие освоиле $5x$ поени. За преостанатите $60-x$ задачи секое девојче освоило по $4(60-x)$ поени. Според тоа, $5x+8(60-x)=312$, од каде добиваме $x=56$.

25. Грмушка има 10 стебленца. Секое стебленце има или 5 листа или 2 листа и 1 цвет. Кој од следниве броеви може да биде вкупниот број на листови на грмушката?

А) 45 В) 39 С) 37 D) 31

Е) Ниту еден од дадените

Решение. Е). Во долната табела се дадени сите можни броеви на цветовите и листовите на 10 гранки.

Цветови	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Листови	50	47	44	41	38	35	32	29	26	23	20

Значи, бројот на листовите не е ниту еден од дадените броеви.

26. Жителите на еден остров се само кралеви, кметови и слуги. Кралевите секогаш ја кажуваат вистината, кметовите секогаш лажат, а

секој од слугите наизменично лаже и кажува вистина. Кога секој од нив го прашале: *Дали си крал*?, 17 одговориле **ДА**. Кога секој од нив го прашале *Дали си слуга*?, 12 од нив одговориле **ДА**. Кога секој од нив го прашале *Дали си кмет*?, 8 од нив одговориле **ДА**. Колку жители има островот, ако половина од слугите на првото прашање одговориле со **ДА**?

A) 37 B) 45 C) 35 D) 25 E) 20

Решение. **D).** Според условот на задачата бројот на слугите е парен број. Нека на островот има x кралеви, y кметови, $2z$ слуги. Тогаш

$$x+y+z=17,$$
$$y+z=12,$$
$$z=8.$$

Според тоа, $z=8, y=4, x=5$ и на островот живеат $x+y+2z=25$ жители.

27. Во моето училиште 45 наставници, односно 60% од наставниците на работа доаѓаат со велосипед. Само 12% од наставниците, за да дојдат на работа, користат автомобил. Колку наставници користат автомобил за доаѓање на работа?

A) 4 B) 6 C) 9 D) 10 E) 12

Решение. **C).** Нека x е бројот на наставниците во училиштето. Тогаш $0,6x=45$, од каде добиваме $x=75$. Значи, $0,12x=0,12\cdot 75=9$ на работа доааат со автомобил.

28. Андреј има 49 сини и само едно црвено топче. Колку топчиња треба Андреј да отстрани за да 90% од нејзините топчиња бидат сини?

A) 4 B) 10 C) 29 D) 39 E) 40

Решение. **E).** Ако 90% од топчињата се сини, тогаш 10% се црвени.

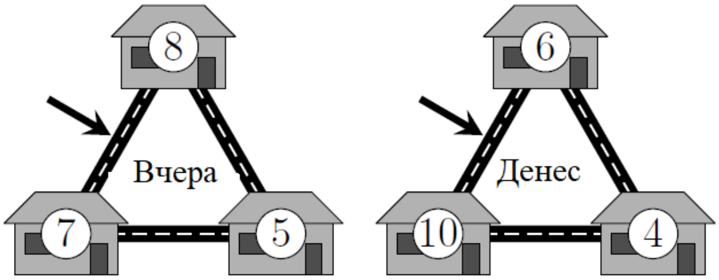
Ние имаме само едно црвено топче, па мораме да имаме 9 сини топчиња. Значи, Андреј треба да отстрани 40 сини топчиња.

29. Во едно одделение има 20 ученици. Тие седат во парови така што точно една третина од момчињата седи со девојче и точно една половина од девојчињата седи со момче. Колку момчиња има во одделението?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 16 E) 18

Решение. B). Со x да го означеме бројот на момчињата, а со y бројот на девочињата. Знаеме дека $\frac{1}{3}x=\frac{1}{2}y$, т.е. $y=\frac{2}{3}x$. Според тоа, $x+\frac{2}{3}x=20$, од каде добиваме $5x=60$, односно $x=12$.

30. Неколку глувци живеат во три соседни куќи. Сношти секој од нив ја напуштил куќата во која живее и се преселил во една од соседните куќи, секогаш движејќи се по најкраткиот пат. Броевите на цртежот ги покажуваат броевите на глувците во секоја куќа вчера и денес. Колку глувци го користеле патот означен со стрелката?



A) 9 B) 11 C) 12 D) 16 E) 19

Решение. B). *Прв начин.* Во куќата во која вчера имало 5 глувци сношти дошле 4 глувци. Тие стигнале од куќите кои се поврзани со означениот пат. Бидејќи глувците се движат по најкраткиот пат, овие 4 глувци не го користеле најкраткиот пат. Но, во двете куќи кои се поврзани со најкраткиот пат има $8+7=15$ глувци и како 4 не го користеле најкраткиот пат, добиваме дека $15-4=11$ го користеле најкраткиот пат.

Втор начин. Ако a глувци од куќата со 7 глувци го користеле означениот пат, тогаш $7-a$ не го користеле означениот пат. Ако b глувци од куќата со 8 глувци го користеле означениот пат, тогаш $8-b$ глувци не го користеле означениот пат. Затоа $7-a+8-b=4$, од каде добиваме $a+b=11$.

31. Филип има 150 монети. Кога ги фрлил на маса, 40% од монетите покажуваат грб, а 60% покажуваат писмо. Колку монети кои покажуваат писмо треба Филип да заврти за да еднаков број монети покажуваат писмо и грб?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

Решение. B). *Прв начин*. Бидејќи $60-40=20\%$ повеќе од монетите покажуваат писмо, за да се изедначи бројот на писмата и грбовите треба да превртиме $20:2=10\%$ од монетите. Значи, треба да превртиме $\frac{150\cdot10}{100}=15$ монети.

Втор начин. Имаме $\frac{150\cdot40}{100}=60$ грбови и $\frac{150\cdot60}{100}=90$ писма. Значи, има $90-60=30$ писма повеќе, па затоа треба да превртиме $30:2=15$ писма.

32. Мачорот Феликс уловил 12 риби за 3 дена. Секој следен ден тој ловел повеќе риби од претходниот. Третиот ден тој уловил помалку риби отколку што уловил првиот и вториот ден заедно. Колку риби уловил мачорот Феликс третиот ден?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Решение. A). Ако x,y и z се броевите на рибите кои мачорот Феликс ги уловил првиот, вториот и третиот ден соодветно, тогаш

$x<y<z$, $x+y+z=12$ и $z<x+y$. Значи, $2z<12$, од каде добиваме $z<6$. Сега од $x<y<z$ и затоа $x\le 3, y\le 4, z\le 5$. Значи,

$$12=x+y+z\le 3+4+5=12,$$

од каде следува $x=3, y=4, z=5$.

33. Танго се игра во парови, играат еден маж и една жена. На вечерниот танц имало не повеќе од 50 присутни. Во еден момент $\frac{3}{4}$ од мажите играле со $\frac{4}{5}$ од жените. Колку учесници на вечерниот танц танцувале во тој момент?

A) 20 B) 24 C) 30 D) 32 E) 46

Решение. B). *Прв начин.* Нека x е бројот на мажите, а y е бројот на жените кои биле на вечерниот танц. Според тоа, $x+y\le 50$ и $\frac{3}{4}x=\frac{4}{5}y$, односно $x=\frac{16}{15}y$. Но, тогаш од условот $x+y\le 50$ добиваме $y+\frac{16}{15}y\le 50$. Значи, $15\,|\,y$, т.е. $y=15k$, за некој $k\in\mathbb{N}$ и затоа $15k+16k\le 50$. Од последното неравенство следува $k=1$, т.е. $y=15$, па затоа $x=16$. Според тоа, танцувале $\frac{3}{4}\cdot 16=\frac{4}{5}\cdot 15=12$ мажи и исто толку жени, односно танцувале 24 учесници.

Втор начин. Бројот на мажите мора да е делив со 4, а бројот на жените мора да е делив со 5. Бараме ист број мажи и жени кои танцуваат, а вкупниот број на мажи и жени да е помал од 50.

Мажи	4	8	12	16	20	24	28	...
Танцуваат $\frac{3}{4}$	3	6	9	**12**	15	18	21	...

Жени	5	10	15	20	25	30	35	...
Танцуваат $\frac{4}{5}$	4	8	**12**	16	20	24	28	...

Значи, танцуваат 12 мажи и ист точкав број жени, т.е. 24 учесници.

34. Еден воз има 18 вагони. Со возот патуваат 700 патници. Во било која група од пет соседни вагони има вкупно 199 патници. Колку патници има во двата вагона кои се на средината на возот?

A) 70 B) 77 C) 78 D) 96 E) 103

Решение. D). Нека со a_i, $i=1,2,...18$ го означиме бројот на патници во i-тиот вагон. Треба да одредиме колку е a_9+a_{10}. Од условот на задачата

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=199,\\&a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=199,\\&a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}=199,\\&a_{14}+a_{15}+a_{16}+a_{17}+a_{19}=199.\end{aligned}$$

Ако ги собереме горните равенства во кои се јавуваат броевите a_i, $i=1,2,...18$ при што a_9,a_{10} се јавуваат два пати и ако земеме предвид дека

$$a_1+a_2+...+a_{16}+a_{17}+a_{18}=700,$$

добиваме $a_9+a_{10}+700=4\cdot 199$, т.е. $a_9+a_{10}=96.$

35. Во седум резервати живеат вкупно 2022 кенгури и определен број коали. Во секој парк бројот на кенгурите е еднаков на вкупниот број коали во сите преостанати паркови. Колку вкупно коали живеат во овие седум паркови?

A) 288 B) 337 C) 576 D) 674 E) 2022

Решение. B). Со $x_i, i=1,2,...,7$ да ги означиме броевите на кенгурите во седумте паркови, а со $y_i, i=1,2,...,7$ да ги означиме броевите на коалите во седумте паркови. Тогаш

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7, \\
x_2 &= y_1 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7, \\
x_3 &= y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7, \\
x_4 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_5 + y_6 + y_7, \\
x_5 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_6 + y_7, \\
x_6 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_7, \\
x_7 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6.
\end{aligned}$$

Ако ги собереме гпрмите равенства, добиваме

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 6(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7),$$

од каде добиваме

$$\begin{aligned}
&6(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7) = 2022, \\
&y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 = 337.
\end{aligned}$$

36. Оваа година на Скопскиот маратон точно 35% од маратонците се жени и има 252 повеќе мажи отколку жени. Колку маратонци учествуваат на маратонот?

A) 840 B) 810 C) 798 D) 624 E) 546

Решение. **A).** Нека на маратонот учествуваат a маратонци. Тогаш $0,35a$ се жени и $0,65a$ се мажи. Бидеји на маратонот учествуваат 252 мажи повеќе од жени, добиваме $0,65a - 0,35a = 252$. Значи, $0,3a = 252$, од каде добиваме $a = 840$.

37. Учениците од едно одделение сакаат музика и/или на спорт. Точно 30% од тие што се сакаат музика, сакаат и спорт, а 40% од од тие кои што сакаат спорт, сакаат и музика. Колку проценти од учениците од ова одделение со точност до цел број проценти сакаат и музика и спорт?

A) 10% B) 12% C) 21% D) 35% E) 70%

Решение. С). Нека a е бројот на учениците кои сакаат само музика, b е бројот на учениците кои сакаат само спорт и c е бројот на учениците кои сакаат и музика и спорт. Тогаш $0,3(a+c)=c$ и $0,4(b+c)=c$, од каде добиваме $a=\frac{7}{3}c$ и $b=\frac{3}{2}c$. Според тоа, процентот на учениците кои сакаат и музика и спорт е

$$\frac{c}{a+b+c}\cdot 100\%=\frac{c}{\frac{7}{3}c+\frac{3}{2}c+c}\cdot 100\%=\frac{6}{14+9+6}\cdot 100\%=\frac{600}{29}\%$$
$$\approx 20,689655\%\approx 21\%.$$

38. Во 2021 година неколку кенгури живееле на еден остров. Во 2022 година нивниот број се намалил за 90%, а во 2023 година бројот им се зголемил за 150% во однос на бројот на 2022. За колку проценти во 2024 година треба да се зголеми бројот на кенгурите во однос на нивниот број од 2023 година, за да бројот биде еднаков на бројот од 2021 година?

А) 60 В) 90 С) 150 D) 200 Е) 300

Решение. Е). Нека во 2021 имало a кенгури. Тогаш во 2022 година бројот на кенгурите бил $0,1a$. Сега во 2023 година имаме зголемување од 150% во однос на 2022 година, па затоа бројот на кенгурите во 2023 година бил $0,1a+1,5\cdot 0,1a=0,25a$. Конечно, бидејќи $\frac{a}{0,25a}\cdot 100\%=400\%$, добиваме дека во 2024 година бројот треба да е 400% поголем отколку во 2023 година, што значи дека зголемувањето во 2024 во однос на 2023 година треба да е 300%.

39. Во една кутија има 50 топчиња: бели, сини и црвени. Бројот на белите топчиња е 11 пати поголем од бројот на сините топчиња. Црвени топчиња има повеќе од сини, но помалку од бели. За колку белите топчиња се повеќе од црвените?

A) 2 B) 11 C) 19 D) 22 E) 30

Решение. **C).** Нека x е бројот на белите, y на сините и z на црвените топчиња. Тогаш

$$x+y+z=50,$$
$$x=11y,$$
$$y<z<x.$$

Со замена од втората во првата равенка добиваме $11y+y+z=50$, т.е. $z=50-12y$. Според тоа, $y\in\{1,2,3,4\}$.

Ако $y=1$, тогаш $z=38, x=11$ и не важи $y<z<x$.

Ако $y=2$, тогаш $z=26, x=22$ и не важи $y<z<x$.

Ако $y=3$, тогаш $z=14, x=33$ и важи $y<z<x$.

Ако $y=4$, тогаш $z=2, x=44$ и не важи $y<z<x$.

Значи, $y=3$, $z=14, x=33$ и притоа $x-z=19$.

40. На еден квиз има 20 прашања. За секој точен одговор на поставено прашање се добиваат 7 поени, за секој погрешен одговор на поставено прашање се одземаат 4 поени, а за секое неодговорено прашање се добиваат 0 поени. Натпреварувачот Емил учествувал на квизот и освоил 100 поени. На колку прашања Ерик не дал одговор?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. **B).** Јасно, Емил не одговорил точно на сите 20 прашања. Ако Емил точно одговорил на x прашања, а погрешно одговорил на y прашања, тогаш $7x-4y=100$. Во последната равенка два члена се деливи со 4, и како $7x\geq100$, т.е. $x\geq14\frac{2}{7}$ и $x<20$, залучуваме дека $x=16$. Значи, Емил точно не одговорил на $(7\cdot16-100):4=3$ прашања. Конечно, тој не одговорил на $20-16-3=1$ прашање.

41. Воз се состои од локомотива и вагони. Секој вагон има еднаков број кабини. Павел патува во третиот вагон во 18-тата кабина броејќи од локомотивата. Матеа патува во седмиот вагон во 50-тата кабина, повторно броејќи од локомотивата. По колку кабини има во секој вагон?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Решение. **B).** *Прв начин.* Ако x е бројот на кабините во еден вагон, тогаш $50=6x+z$, каде z е редниот број на кабината во седмиот вагон во кој е Матеа. Јасно, z е помал или еднаков на x. Од добиената равенка следува $6x<50=6x+z\leq 7x$, од каде добиваме $x<\frac{50}{6}<9$ и $7<\frac{50}{7}\leq x$. Значи, $7<x<9$, од каде следува $x=8$. Според тоа, еден вагон има 8 кабиини и како $18=2\cdot 8+2$ и $50=6\cdot 8+2$, добиваме дека Павел е во втората кабина на третиот вагон, а Матеа е во втората кабина на седмиот вагон.

Втор начин. Ако x е бројот на кабините во еден вагон, тогаш $18=2x+y$ и $50=6x+z$, каде y е редниот број на кабината во третиот вагон во која е Павел, а z е редниот број на кабината во седмиот вагон во кој е Матеа. Јасно, y и z се помали или еднакви на x. Од првата равенка следува $2x<18=2x+y\leq 3x$, од каде добиваме $x<9$ и $6\leq x$. Значи, $6\leq x<9$.

За $x=6$, добиваме $y=6, z=14>6=x$, што противречи на тоа дека z е помал или еднаков на x.

За $x=7$, добиваме $y=4, z=8>7=x$, што противречи на тоа дека z е помал или еднаков на x.

За $x=8$, добиваме $y=2, z=2$.

Значи, една вагон има 8 кабиини, Павел е во втората кабина на третиот вагон, а Матеа е во втората кабина на седмиот вагон.

Забелешка. Како што можеме да видиме во првиот начин, при решавањето на задачата воопшто не го искористивме условот дека Павел патува во третиот вагон во 18-тата кабина броејќи од локомотивата. Тоа значи, дека овој услов може да се изостави и задачата ќе остане добро дефинирана.

42. Една ракометна екипа редоследно постигнала 24, 17 и 25 голови во седмото, осмото и деветтото коло на првенството. Просечниот број постигнати голови во првите девет кола е поголем од просечниот број голови постигнати во првите шест кола. Просечниот број голови постигнати во првите десет кола е поголем од 22. Кој е најмалиот можен број постигнати голови во десеттото коло?

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

Решение. **C).** Нека екипата во првите шест кола постигнала $a,b,c,$ d,e,f голови и во десетото коло постигнала x голови. Тогаш

$$\frac{a+b+c+d+e+f+24+17+25}{9} > \frac{a+b+c+d+e+f}{6},$$
$$132 > a+b+c+d+e+f.$$

Сега, бидејќи просечниот број голови во првите десет кола е поголем од 22 добиваме дека

$$\frac{132+24+17+24+x}{10} > \frac{a+b+c+d+e+f+24+17+25+x}{10} > 22,$$
$$198+x > 220,$$
$$x > 22.$$

Значи, во десетото коло тимот постигнал повеќе од 22 голови.

Ако тимот постигнал 23 гола, тогаш треба да важи

$$\frac{a+b+c+d+e+f+24+17+25+23}{10} > 22,$$
$$a+b+c+d+e+f > 220-89=131,$$

Сега

$$132 > a+b+c+d+e+f > 131,$$

што не е можно бидејќи $a+b+c+d+e+f$ е природен број.

Ако тимот постигнал 24 голови, тогаш

$$\frac{a+b+c+d+e+f+24+17+25+24}{10}>22,$$

$$a+b+c+d+e+f>220-90=130.$$

Сега,

$$132>a+b+c+d+e+f>130,$$

па затоа во првите шест кола тимот постигнал 131 гол, во седмото, осмото, деветтото и десетото коло постигнал соодветно 24, 17, 25 и 24 гола, при што важи

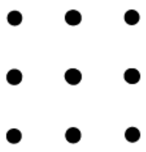
$$\frac{a+b+c+d+e+f+24+17+25}{9}=\frac{197}{9}>\frac{131}{6}=\frac{a+b+c+d+e+f}{6},$$

$$\frac{a+b+c+d+e+f+24+17+25+24}{10}=\frac{221}{10}>22.$$

III ГЕОМЕТРИЈА

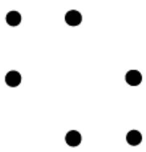
1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. На цртежот десно е дадена квадратна шема од девет точки. Кој е најмалиот број на точки кои што треба да се избришат за да во секој ред, колона и дијагонала нема три колинеарни точки?

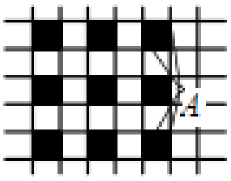


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. C). Ако избришеме две точки, тогаш тие може да припаѓаат на најмногу два реда, па затоа во третиот ред ќе имаме три колинерани точки. Значи треба да избришеме три или повеќе точки. На цртежот десно е покажано дека минималниот број точки е 3.

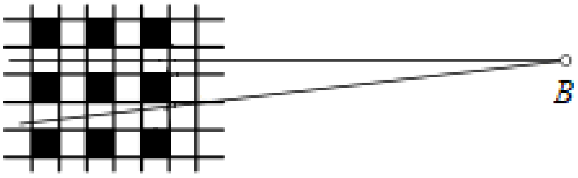


2. На цртежот десно од точката A се гледаат само три од црните квадрати прикажани на цртежот десно. Кој е најголемиот број црни квадрати кои може да се видат од некоја точка која припаѓа на рамнината на квадратот?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Решение. E). На цртежот десно е прикажана точката B од која може да се видат сите 9 квадрати дадени во условот на задачата.



3. На една права од лево кон десно се означени единаесет точки. Збирот на сите растојанија од првата до останатите точки е еднаков на 2018. Збирот на сите растојанија од втората до останатите точки е еднаков на 2000. Колкаво е растојанието меѓу првата и втората точка?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

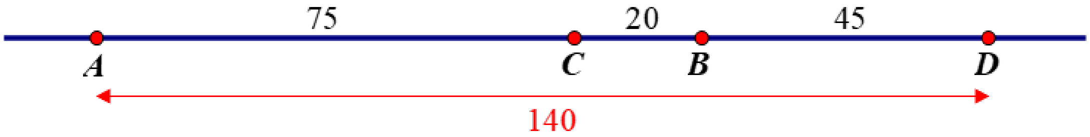
Решение. B). Одејќи од лево кон десно точките да ги означиме со $A_1, A_2, A_3 ..., A_{10}, A_{11}$ (направи цртгеж). Тогаш

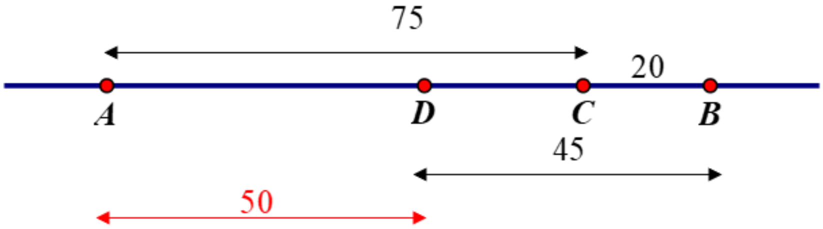
$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_1A_3} + \overline{A_1A_4} + ... + \overline{A_1A_{10}} + \overline{A_1A_{11}} = 2018$$
$$\overline{A_1A_2} + (\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3}) + ... + (\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_{10}}) + (\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_{11}}) = 2018$$
$$9\overline{A_1A_2} + (\overline{A_2A_1} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_2A_4} + ... + \overline{A_2A_{10}} + \overline{A_2A_{11}}) = 2018$$
$$9\overline{A_1A_2} + 2000 = 2018,$$
$$\overline{A_1A_2} = 2.$$

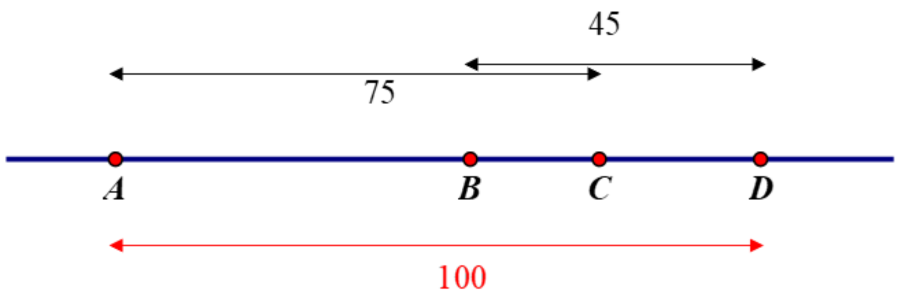
4. Селата A, B, C, D се распоредени покрај прав долг пат, но не задолжително во овој редослед. Растојанието од A до C е $75\,km$, растојанието од B до D е $45\,km$, а растојанието од B до C е $20\,km$. Која од следниве вредности не може д а е растојанието од A до D?

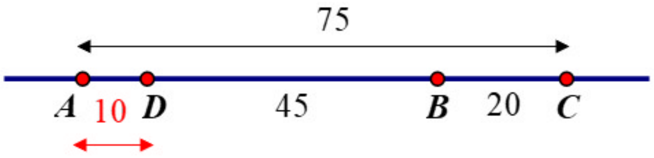
A) 10 B) 50 C) 80 D) 100 E) 140

Решение. C). Сите можни положби на селата се прикажани на долните цртежи.









Од понудените растојанија единствено $80\,km$ не може да е растојанието од A до D.

5. На една права во некој редослед се распоредени точките A, B, C, D. Познато е дека $\overline{AB}=13, \overline{BC}=11, \overline{CD}=14, \overline{DA}=12$. Определи го растојанието меѓу двете најоддалечени една од друга точки.

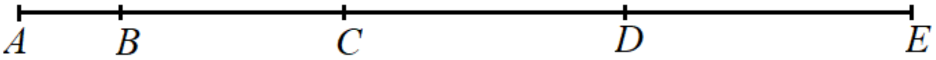
А) 14 В) 38 С) 50 D) 25 Е) друг одговор

Решение. **D).** Да ги разгледаме точките A, B и D. Бидејќи $\overline{AB}>\overline{DA}$ не е можно точката B да е меѓу точките A и D. Нека претпоставиме дека D е меѓу A и B. Тогаш $\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{DA}=1$. Но, тогаш ниту едно од растојанијата $\overline{BC}=11, \overline{CD}=14$ и $\overline{BD}=1$ не може да се запише како збир на другите две, што противречи на тоа дека точките B, C, D лежат на иста права. Останува точката A да е меѓу точките B и D. Тоа значи дека $\overline{BD}=\overline{BA}+\overline{AD}=25$. Но, тогаш важи равенството $\overline{BD}=25=11+14=\overline{BC}+\overline{CD}$ заклучуваме декод што следува дека C е меѓу B и D. Значи, бараното растојание е 25. Лесно се гледа дека распоредот на точките е D, A, C, B, симетрично B, C, A, D.

6. Пет точки лежат на права. Александар го мери растојанието меѓу секој пар точки. Добиените должини се дадени во растечки редослед 2, 5, 6, 8, 9, k, 15, 17, 20 и 22. Која е вредноста на k?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Решение. **E).** Нека на правата се распоредени точките A, B, C, D, E, во овој редослед (види цртеж).

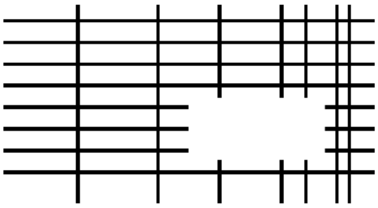


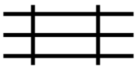
Тогаш $\overline{AE}=22$. Понатаму, $\overline{AD}=20$ и $\overline{BE}=17$, или пак $\overline{AD}=17$ и $\overline{BE}=20$. Без ограничување на општоста можеме да земеме $\overline{AD}=17$ и $\overline{BE}=20$. Сега имаме

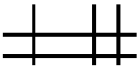
$$\begin{aligned}2\overline{BD} &= \overline{AD}-\overline{AB}+\overline{BE}-\overline{DE},\\ \overline{BD} &= \overline{AD}+\overline{BE}-(\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{DE}),\\ \overline{BD} &= \overline{AD}+\overline{BE}-\overline{AE},\\ \overline{BD} &= 20+17-22=15.\end{aligned}$$

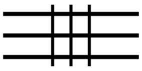
Понатаму, $\overline{AB}=\overline{AD}-\overline{BD}=2$ и $\overline{DE}=\overline{BE}-\overline{BD}=5$. Сега, од $2+6=8$ и $\overline{AB}=2$ заклучуваме дека $\overline{BC}=6$ и затоа $\overline{CD}=15-6=9$. Значи, растојанијата меѓу точките A, B, C, D, E се: $\overline{AB}=2$, $\overline{DE}=5$, $\overline{BC}=6$, $\overline{AC}=8$, $\overline{CD}=9$, $\overline{CE}=14$, $\overline{BD}=15$, $\overline{BE}=17$, $\overline{AD}=20$ и $\overline{AE}=22$, па затоа $k=14$.

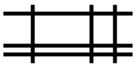
7. На цртежот десно е шрикажано множество хоризонтални и вертикални прави од кои недостасува еден дел. Кој дел недостасува?

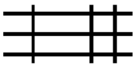


A) 

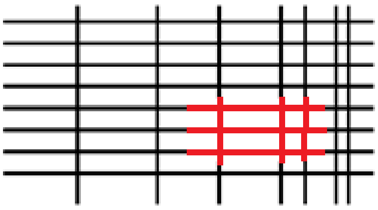
B) 

C) 

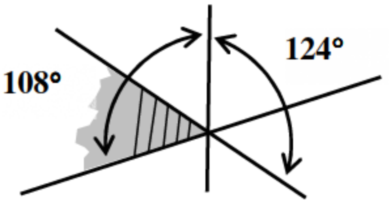
D) 

E) 

Решение. Е). Во делот кој недостасува имаме три хоризонтални и тру вертикални линии, па затоа деловите А) и В) отпаaат. Понатаму, меѓу хоризонталните линии двете растојанија се еднакви, па затоа делот D) отпаѓа. Меѓу вертикалните линии растојанијата не се еднакви, па затоа делот С) отпаѓа. Останува делот Е) кој целосно се вклопува на местото на кое недостасува делот од фигурата (цртеж десно).



8. Три прави се сечат како на цртежот десно. Два од аглите кои ги формираат правите се дадени. Колку е мерката на сивиот агол?



A) 52° B) 53° C) 54° D) 55° E) 56°

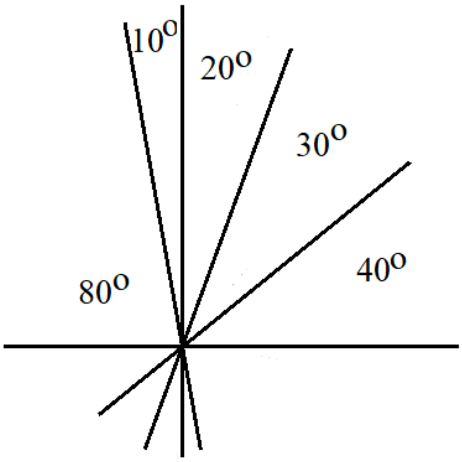
Решение. А). Суплементниот агол на аголот од 124° е еднаков на $180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$. Значи, мерката на сивиот агол е $108^\circ - 56^\circ = 52^\circ$

9. Неколку прави се нацртани така што сите агли

$$10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ, 90^\circ$$

се агли меѓу тие прави. Определи го најмалиот можен број вакви прави.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

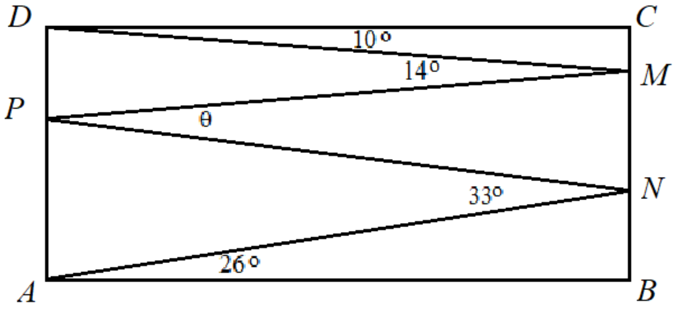


Решение. В). Ако се нацртани n прави, тогаш имаме $\frac{n(n-1)}{2}$ парови прави. Бидејќи сите агли се помали или еднакви на правиот агол, не е можно две прави да определуваат два од дадените агли.

Од претходно кажаното следува дека треба да важи $\frac{n(n-1)}{2} \geq 9$, од каде добиваме $n(n-1) \geq 18$. Последното неравенство е исполнето за $n \geq 5$. Конфигурација на 5 прави кои го задоволу-ваат условот на задачата е дадена на цртежот десно.

Забелешка. Конфигурацијата може да се направи и така што правата која зафаќа агол од 10° со вертикалната права може да зафаќа агол од 10° со хоризонталната права, т.е. да се ротира за агол од 90° околу пресечната точка во нсока на движењето на стрелките на часовникот (направи цртеж).

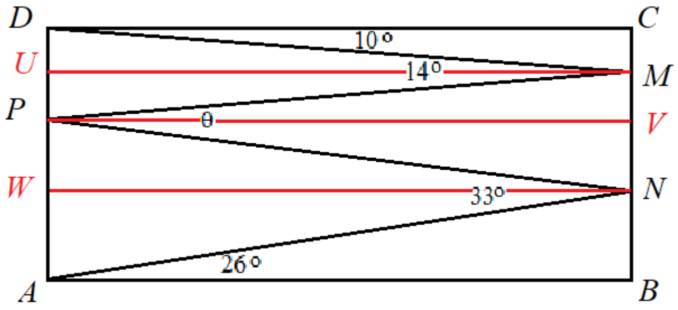
10. Васко во правоаголник нацртал искршена линија при што формирал агли од $10^\circ, 14^\circ, 33^\circ$ и 26° (цртеждесно).



Аголот θ е еднаков на:

A) 11° B) 12° C) 16° D) 17° E) 33°

Решение. **A).** Нека MU, PV и NW се паралелни на страната AB на правоаголникот $ABCD$. Тогаш



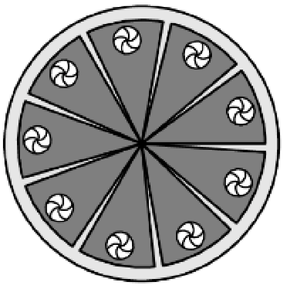
$$\measuredangle VPM = \measuredangle PMU = 14^\circ - \measuredangle UMD = 14^\circ - \measuredangle MDC = 14^\circ - 10^\circ = 4^\circ,$$

$$\measuredangle VPN = \measuredangle PNW = 33^\circ - \measuredangle WNA = 33^\circ - \measuredangle NAB = 33^\circ - 26^\circ = 7^\circ.$$

Според тоа, $\theta = \measuredangle VPM + \measuredangle VPN = 4^\circ + 7^\circ = 11^\circ$.

2. АГЛИ ВО КРУЖНИЦА И МНОГУАГОЛНИК

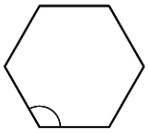
1. Софија испекла торта и ја поделила на десет еднакви парчиња. Изела едно парче, а преостанатите рамномерно ги распоредила како што е прикажано на цртежот десно. Колку е мерката на аголот меѓу две соседни парчиња торта?

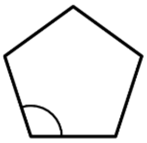


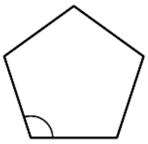
A) 5° B) 4° C) 3° D) 2° E) 1°

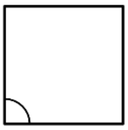
Решение. B). Централниот агол на секој исечок (секое парче) е еднаков на $\frac{360^\circ}{10}=36^\circ$. Бидејќи имаме девет еднакви празнини, мерката на аголот меѓу две соседни парчиња е $36^\circ:9=4^\circ$.

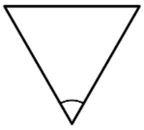
2. Во кој од следните правилни многуаголници означениот агол е најголем?

A) 

B) 

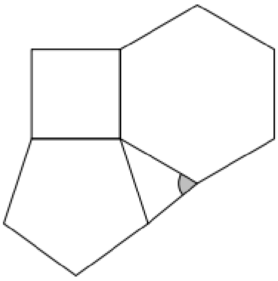
C) 

D) 

E) 

Решение. A). Внатрешниот агол на рамностран триаголникот е 60°, на квадратот е 90°, на правилниот петаголник е 108° и на правилниот шестаголник е 120°. Значи, најголем е аголот кај правилниот шестаголник.

3. На цртежот десно правилен петаголник и правилен шестаголник се залепени до квадрат, страна со страна. Определи ја мерката на означениот агол во триаголникот.



A) 24° B) 42° C) 60° D) 69° E) 74°

Решение. **D).** Внатрешниит агол на шестаголникот е 120°, на квадратот е 90° и на петаголникот е 108°. Дадениот триаголник е рамнокрак со агол при врвот еднаков на $360^\circ-(120^\circ+90^\circ+108^\circ)=42^\circ$. Значи, аголот при основата е $\frac{180^\circ-42^\circ}{2}=69^\circ$ и тоа е бараниот агол.

4. Определи број n, таков што внатрешниот агол на правилен $n-$аголник е шест пати поголем од неговиот соседен агол.

Решение **E).** Внатрешниот агол на правилен $n-$аголник е еднаков на $180^\circ-\frac{360^\circ}{n}$, а неговиот соседен агол е еднаков на $\frac{360^\circ}{n}$. Според тоа, треба да важи $180^\circ-\frac{360^\circ}{n}=6\cdot\frac{360^\circ}{n}$, од каде добиваме $n-2=6\cdot2$ т.е. $n=14$.

5. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од два вида ромбови: *потесни*, кои се обоени темносиво и *пошироки*, кои се бели и светлосиви. Определи ја мерката на тапиот агол на пошироките ромбови.

A) 106° B) 108° C) 110°

D) 112° E) 120°

Решение. **B).** Дадената фигура е правилен десетаголник и во неговиот центар се ставени 10 потесни ромбови. Остриот агол на секој од нив е еднаков на $360^\circ:10=36^\circ$. Сега, од светлосивите ромбови добиваме дека тапиот агол на пошироките ромбови е еднаков на $180^\circ-2\cdot36^\circ=108^\circ$.

6. Пет складни правоаголни триаголници се поставени така што нивните поголеми остри агли се допираат и е добиена ѕвездата прикажана на цртежот десно. Но, исто така е можно да се формира друга ѕвезда со поставување на повеќе од дадените правоаголни триаголници така што нивните помали остри агли ќе се допираат. Колку триаголници се потребни за да се формира втората ѕвезда?

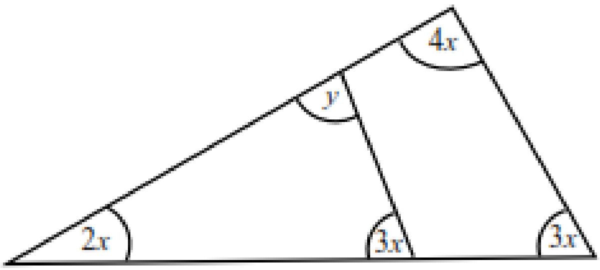
A) 10 B) 12 C) 18 D) 20 E) 24

Решение. **D).** Едниот остар агол на правоаголниот триаголник е еднаков на $360^\circ : 5 = 72^\circ$. Значи, вториот остар агол е еднаков на $90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$. Бидејќи малите остри агли мораат да бидат поставеи еден до друг, за формирање на ѕвездата се потребни $360^\circ : 18^\circ = 20$ триаголници.

7. Определи ја мерката на аголот означен со y на цртежот десно.

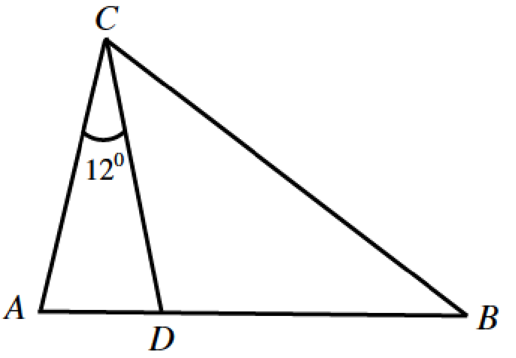
A) 20° B) 40° C) 60°

D) 72° E) 80°



Решение. **E).** Имаме $2x + 3x + 4x = 180^\circ$, па затоа $9x = 180^\circ$, односно $x = 20^\circ$. Сега, двата триаголника имаат еднакви агли па затоа важи $y = 4x = 4 \cdot 20 = 80^\circ$.

8. На страната AB на триаголникот ABC е земена точка D таква што $\measuredangle ACD = 12^\circ$. Определи ја мерката



на $\measuredangle ACB$ ако $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DB}$.

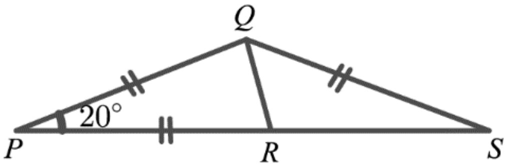
А) 24° B) 36° C) 45° D) 54° E) 60°

Решение. **D).** Триаголникот ACD дед рамнокрак со основа AD, па затоа $\measuredangle CAD = \measuredangle CDA = 84^\circ$. Сега $\measuredangle BDC = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$. Триаголникот BCD е рамнокрак со основа BC, од каде следува $\measuredangle CBD = \measuredangle BCD = 42^\circ$. Конечно, $\measuredangle ACB = \measuredangle ACD + \measuredangle DCB = 54^\circ$.

9. На цртежот десно важи

$\overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{QS}$ и $\measuredangle QPR = 20^\circ$.

Колку е мерката на $\measuredangle RQS$?



A) 50° B) 60° C) 65° D) 70° E) 75°

Решение. **B).** Триаголниците PQR и PQS се рамнокраки. Тоа значи дека $\measuredangle RSQ = 20^\circ$ и $\measuredangle PRQ = \measuredangle PQR = 80^\circ$. Значи, $\measuredangle QRS = 100^\circ$, од каде $\measuredangle RQS = 60^\circ$.

10. Горјан ги измерил сите агли на два триаголника. Едниот триаголник бил остроаголен, а другиот тапоаголен. Горјан се сеќава на мерките на четирите агли, кои биле: $120^\circ, 80^\circ, 55^\circ, 10^\circ$. Колкава е големината на третиот агол на остроаголниот триаголник?

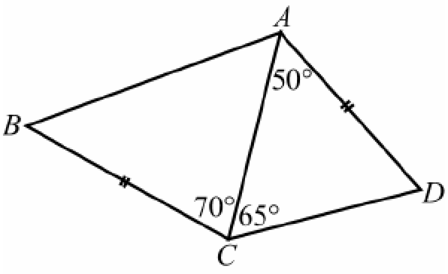
A) 5° B) 10° C) 45° D) 55°

E) не може да се определи

Решение. **C).** Меѓу дадените агли не постојат три чиј збир е 180°, што значи дека два припаѓаат на остроаголниот, а два на тапоаголниот триаголник. За да триаголникот е остароаголен потребно е да не го содржи аголот од 120° и збирот на двата агли да е поголем од 90°. Јасно, тоа се аглите 80° и 55°, па третиот агол е еднаков на

$$180^\circ-(80^\circ+55^\circ)=45^\circ.$$

11. Во четириаголникот $ABCD$, $\overline{AD}=\overline{BC}$, $\measuredangle DAC=50^\circ$, $\measuredangle DCA=65^\circ$, $\measuredangle ACB=70^\circ$, цртеж десно. Определи ја мерката на $\measuredangle ABC$.



A) 50° B) 55° C) 60° D) 65°

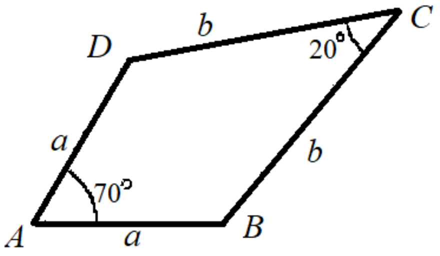
E) не може да се определи

Решение. B). Од триаголникот ACD следува

$$\measuredangle CDA=180^\circ-(50^\circ+65^\circ)=65^\circ.$$

Според тоа, триаголникот ACD е рамнокрак и важи $\overline{AD}=\overline{AC}$. Оттука следува $\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}$, па затоа триаголникот ABC е рамнокрак со врв во темето C. Конечно, $\measuredangle BAC=\measuredangle ABC=\frac{180^\circ-70^\circ}{2}=55^\circ$.

12. На цртежот десно е даден четириаголникот $ABCD$. Определи ја мерката на $\measuredangle ABC$?



A) 110° B) 120° C) 125°

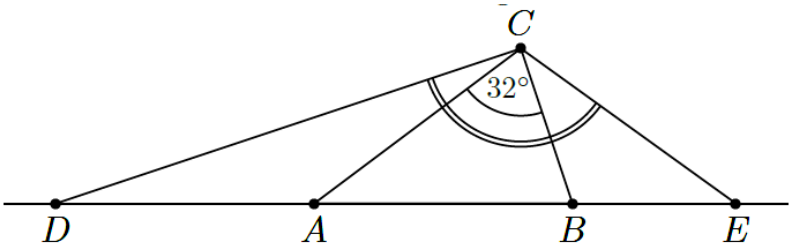
D) 135° E) 140°

Решение. D). Од $\overline{AB}=\overline{AD}$ следува дека ABD е рамнокрак. Слично, триаголникот BCD е рамнокрак. Според тоа,

$$\measuredangle ABC=\measuredangle ABD+\measuredangle DBC=\measuredangle ADB+\measuredangle CDB=\measuredangle ADC.$$

Значи, $\measuredangle ABC=(360^\circ-20^\circ-70^\circ):2=135^\circ$.

13. Даден е триаголник ABC $\measuredangle ACB=32^\circ$. Точките D,A,B,E се колинеарни и важи $\overline{DA}=\overline{AC}$ и $\overline{BE}=\overline{BC}$. Определи ја мерката на $\measuredangle DCE$.

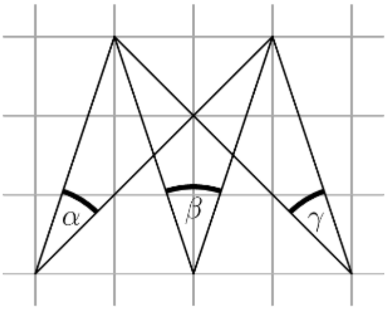


A) 72° B) 90° C) 96° D) 100° E) 106°

Решение. **E).** Триаголникот CDA е рамнокрак и важи $\measuredangle DCA = \frac{1}{2}\measuredangle CAB$ (надворешен агол). Триаголникот CEB е рамнокрак и важи $\measuredangle ECB = \frac{1}{2}\measuredangle ABC$ (надворешен агол). Според тоа,

$$\begin{aligned}\measuredangle DCE &= \measuredangle DCA + \measuredangle ACB + \measuredangle BCE \\ &= \frac{1}{2}\measuredangle CAB + \measuredangle ACB + \frac{1}{2}\measuredangle ABC \\ &= \frac{1}{2}(\measuredangle CAB + \measuredangle ACB + \measuredangle ABC) + \frac{1}{2}\measuredangle ACB \\ &= \frac{1}{2}\cdot 180^\circ + \frac{1}{2}\cdot 32^\circ = 106^\circ.\end{aligned}$$

14. Во квадратна мрежа се означени три агли α, β, γ, како што е прикажано на цртежот десно. Колку е збирот $\alpha+\beta+\gamma$?

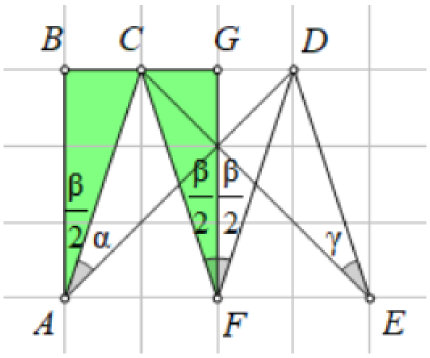


A) 60° B) 70° C) 75°

D) 90° E) 120°

Решение. **D).** При ознаки како на цртежот десно триаголниците CGF и CBA се складни, како правоаголни триаголници со еднакви катети. Затоа

$$\measuredangle CBA = \measuredangle GFC = \frac{\beta}{2}.$$

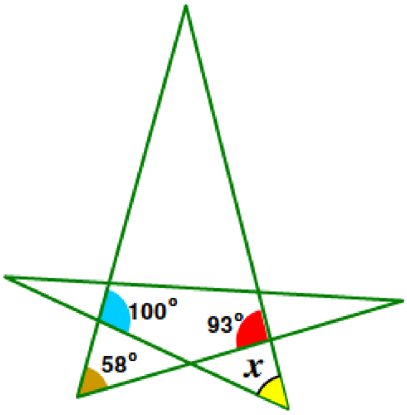


Понатаму, $\measuredangle DAB = 45^\circ$, бидејќи AD е дијагонала на квадрат. Значи,

$$\alpha+\frac{\beta}{2}=\measuredangle DAB=45^{\circ}.$$

Аналогно се докажува дека $\gamma+\frac{\beta}{2}=45^{\circ}$. Конечно, $\alpha+\beta+\gamma=90^{\circ}$.

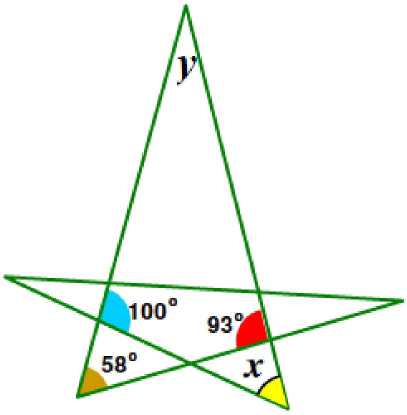
15. Фигурата прикажана на цртежот е петокрака ѕвезда. Колку е вредноста на аголот означен со x ?



A) 35° B) 42° C) 51°

D) 65° E) 109°

Решение. **C).** Ако горниот агол на петокраката ѕвезда го означиме со y (цртеж лево), тогаш

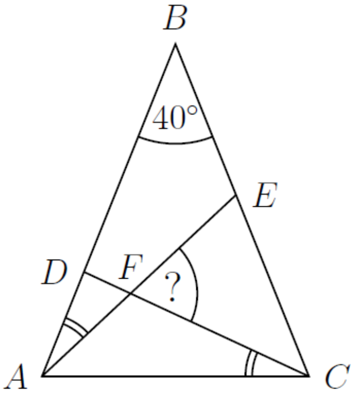


$$\begin{aligned}y&=180^{\circ}-(58^{\circ}+93^{\circ})\\&=180^{\circ}-151^{\circ}=29^{\circ}.\end{aligned}$$

Според тоа, за аголот x наоѓаме

$$\begin{aligned}x&=180^{\circ}-(100^{\circ}+29^{\circ})\\&=80^{\circ}-29^{\circ}=51^{\circ}.\end{aligned}$$

16. Триаголникот е рамнокрак ABC со основа AC и $\measuredangle ABC=40^{\circ}$. На краците AB и CB се земени точки D и E, такви што $\measuredangle EAB=\measuredangle DCA$. Ако F е пресекот на AE и CD, определи ја мерката на $\measuredangle CFE$.



A) 55° B) 60° C) 65°

D) 70° E) 75°

Решение. **D).** Аглите при основата на триаголникот се

$$\measuredangle ACB = \measuredangle CAB = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ .$$

Понатаму, $\measuredangle CFE$ е надворешен за триаголникот ACF, па затоа од

$$\measuredangle CFE = \measuredangle CAF + \measuredangle ACF = \measuredangle CAF + \measuredangle FAD = \measuredangle CAD = 70^\circ .$$

17. Во рамнокракиот триаголник ABC должината на симетралата CD $(D \in AB)$ на аголот C е еднаква на должината на основата BC. Определи го $\measuredangle CDA$.

A) 90° B) 100° C) 108° D) 120°

E) не е можно да се определи

Решение. **C).** Во триаголникот BCD аглите се $\frac{\beta}{2}, \beta, \beta$, па затоа $\frac{5\beta}{2} = 180^\circ$. Значи, $\beta = 72^\circ$. Сега, $\measuredangle CDA$ е надворешен агол за триаголникот BCD, па затоа $\measuredangle CDA = \frac{\beta}{2} + \beta = 108^\circ$.

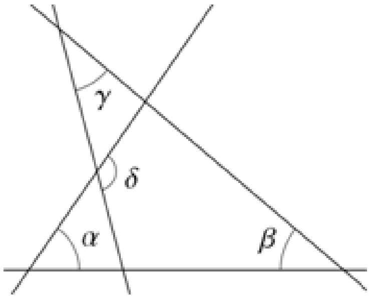
18. На цртежот важи

$$\alpha = 55^\circ ,\ \beta = 40^\circ \text{ и } \gamma = 35^\circ .$$

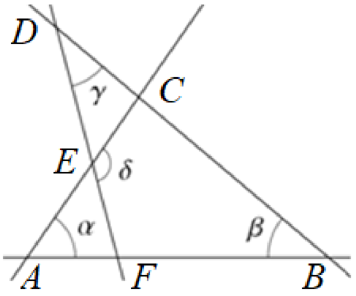
Колку е вредноста на аголот δ?

A) 100° B) 105° C) 120°

D) 125° E) 130°



Решение. **E).** Да ги воведеме како на цртежот десно. Тогаш



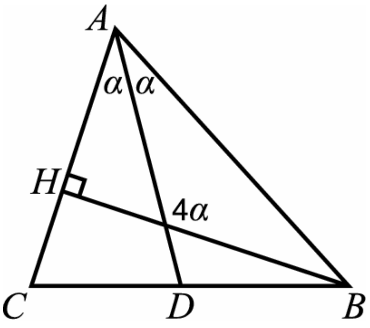
$$\measuredangle ECD = \measuredangle ACD = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ ,$$

како надворешен агол во триаголникот ABC. Сега

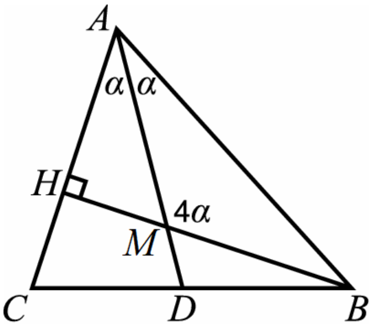
$$\delta = \measuredangle FEC = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ ,$$

како надворешен агол во триаголникот ECD.

19. На цртежот BH е висина спуштена од темето B, а AD е симетрала на аголот во темето A на триаголникот ABC. Тапиот агол меѓу BH и AD е четири пати поголем од аголот $\measuredangle DAB$. Колку е мерката на аголот $\measuredangle CAB$?

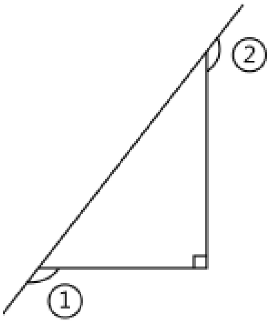


A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E) 90°



Решение. C). Пресекот на висината и симетралата да го означиме со M. Во триаголникот BMA аголот при темето B да го означиме со β_1. Тогаш $5\alpha+\beta_1=180^\circ$. Во триаголникот ABH важи $2\alpha+\beta_1=90^\circ$. Од последните две равенки добиваме $\alpha=30^\circ$, па затоа $\measuredangle DAB=2\alpha=60^\circ$.

20. Колкав е збирот на аглите означени на цртежот десно?



A) 150° B) 180° C) 270°

D) 320° E) 360°

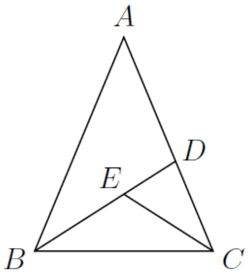
Решение. C). Збирот на двата остри агли кои се суплементни на аглите (1) и (2) е еднаков на $180^\circ-90^\circ=90^\circ$. Според тоа, $(1)+(2)=360^\circ-90^\circ=270^\circ$.

21. Големините на аглите, изразени во степени, во еден триаголник се три различни природни броеви. Кој е најмалиот можен збир на најмалиот и најголемиот агол во триаголникот?

A) 61° B) 90° C) 91° D) 120° E) 121°

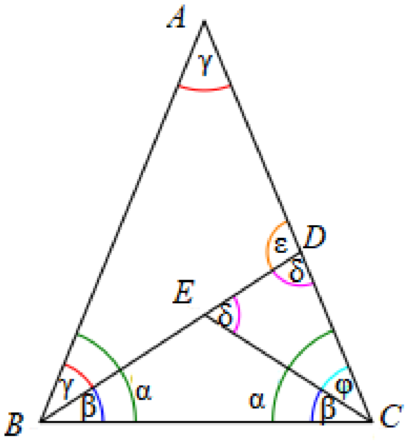
Решение. **C).** Со α,β,γ да ги означиме аглите на триаголникот, при што важи $\alpha<\beta<\gamma$. Бидејќи $\alpha+\gamma=180^\circ-\beta$, најмалиот можен збир на α и γ се добива за најголемата можна вредност на β. Бидејќи $\beta<\gamma$, добиваме дека β мора да е остар агол. Најголема целобројна вредност на остар агол во триаголник е 89°, па затоа најмаата вредност на $\alpha+\gamma$ е $180^\circ-89^\circ=91^\circ$.

22. Рамнокрак триаголник $ABC, \overline{AB}=\overline{AC}$ е поделен на три рамнокраки триаголници како на цртежот така што $\overline{AD}=\overline{DB}, \overline{CE}=\overline{CD}, \overline{BE}=\overline{EC}$. Определи ја мерката на $\measuredangle BAC$.



A) 24° B) 28° C) 30° D) 35° E) 36°

Решение. **E).** При ознаки како на цртежот десно имаме $\alpha=\beta+\gamma, \alpha=\beta+\varphi$, па затоа $\gamma=\varphi$. Понатаму,



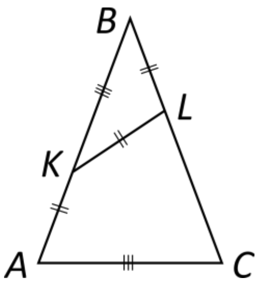
$$\varepsilon=180^\circ-2\gamma=180^\circ-2\varphi, \quad \delta=\frac{180^\circ-\varphi}{2},$$

па со замена во $\varepsilon+\delta=180^\circ$ добиваме

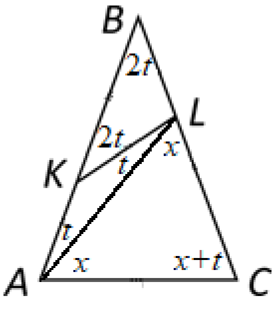
$$180^\circ-2\varphi+\frac{180^\circ-\varphi}{2}=180^\circ,$$

од каде наоѓаме $\varphi=36^\circ$.

23. Во рамнокрак триаголник ABC, точките K и L припаѓаат на страните AB и BC соодветни и важи $\overline{AK}=\overline{KL}=\overline{LB}$ и $\overline{KB}=\overline{AC}$. Колкав е аголот ACB?

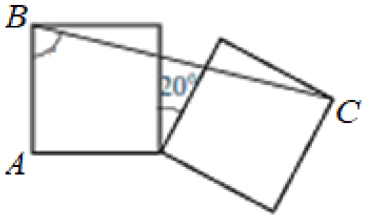


A) 30° B) 35° C) 36° D) 40° E) 44°



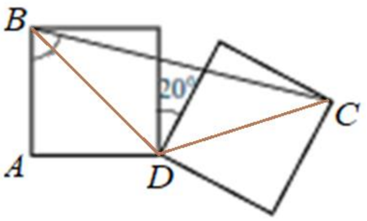
Решение. C). Триаголник ABC е рамнокрак, па затоа $\overline{CL}=\overline{KB}=\overline{AC}$. Според тоа, триаголниците ACL, ALK, BKL се рамнокраки, па ако се земе предвид дека надворешниот агол на триаголникот е еднаков на збирот на неговите два несоседни внатрешни агли ги добиваме ознаките како на цртежот десно. Сега, $2t+2t=x+t$, од каде добиваме $x=3t$. $2x+4t=180^\circ$, од каде добиваме $10t=180^\circ$, т.е. $2t=36^\circ$. Значи, $\measuredangle ACB=2t=36^\circ$.

24. На цртежот десно се прикажани два складни квадрати. Определи го $\measuredangle ABC$.



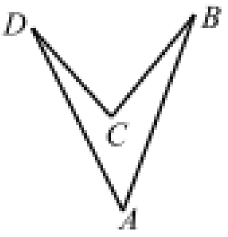
A) 70° B) 72° C) 75°

D) 80° E) 85°



Решение. D). Триаголникот BCD е рамнокрак со $\measuredangle BDC=45^\circ+20^\circ+45^\circ=110^\circ$, па затоа $\measuredangle DBC=\frac{180^\circ-110^\circ}{2}=35^\circ$. Конечно, $\measuredangle ABC=45^\circ+35^\circ=80^\circ$.

25. Определи ја мерката на надворешниот $\measuredangle DCB$ на четириаголникот $ABCD$, ако мерките на трите внатрешни агли на четириаголникот се $\measuredangle DAB=50^\circ$, $\measuredangle ABC=23^\circ$ и $\measuredangle ADC=15^\circ$.



A) 72° B) 85° C) 89° D) 90° E) 88°

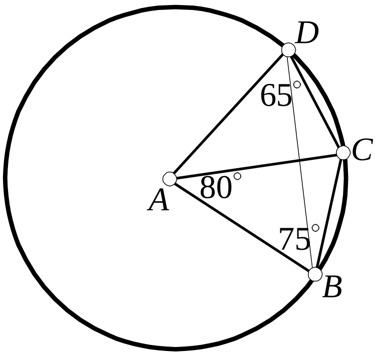
Решение. E). Од триаголниците ABC и ADC имаме:

$$\measuredangle DCB=360^\circ-(\measuredangle DCA+\measuredangle ACB)$$

$$=360^\circ-(180^\circ-\measuredangle CDA-\measuredangle DAC+180^\circ-\measuredangle CAB-\measuredangle ABC)$$

$$=360^\circ-360^\circ+\measuredangle CDA+(\measuredangle DAC+\measuredangle CAB)+\measuredangle ABC$$
$$=\measuredangle CDA+\measuredangle DAB+\measuredangle ABC$$
$$=15^\circ+50^\circ+23^\circ=88^\circ.$$

26. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AB}=\overline{AC}, \measuredangle BAD=80^\circ$, $\measuredangle ABC=75^\circ$ и $\measuredangle ADC=65^\circ$. Пресметај го $\measuredangle BDC$?



A) 10° B) 15° C) 20°

D) 30° E) 45°

Решение. B). Според условот на задачата триаголникот ABC е рамнокрак со основа BC. Според тоа $\measuredangle BCA=75^\circ$ и $\measuredangle BAC=30^\circ$. Бидејќи $\measuredangle BAD=80^\circ$ и $\measuredangle BAC=30^\circ$, имаме

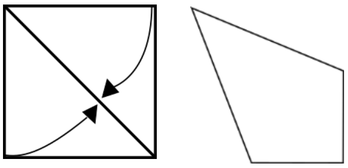
$$\measuredangle DAC=\measuredangle BAD-\measuredangle BAC=80^\circ-30^\circ=50^\circ.$$

За триаголникот ACD имаме $\measuredangle CAD=50^\circ$, $\measuredangle ADC=65^\circ$, па затоа

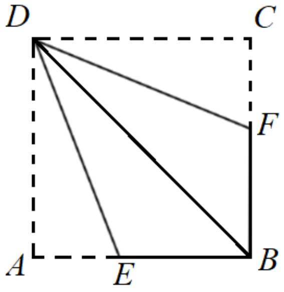
$$\measuredangle ACD=180^\circ-\measuredangle DAC-\measuredangle ADC=180^\circ-65^\circ-50^\circ=65^\circ.$$

Триаголникот DAC е рамнокрак со основа DC. Значи, $\overline{AC}=\overline{AD}$. Следствено, точките B,C,D лежат на кружница со центар во A и радиус $r=\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}$. Сега, $\measuredangle BDC=\frac{1}{2}\measuredangle BAC=\frac{1}{2}\cdot 30^\circ=15^\circ$, (периферски и централен агол над ист кружен лак).

27. Зоран превиткал квадратно парче хартија, така што две соседни страни ги поклопил со дијагоналата на квадратот, како на цртежот десно. Определи го најголемиот агол во новодобиениот четириаголник?



A) $112{,}5^\circ$ B) 120° C) 125° D) 135° E) 150°



Решение. **А).** Нека квадратот е $ABCD$ и со превиткувањето е добиен четириаголникот $DEBF$. Тогаш DF е симетрала на $\measuredangle BDC$, па затоа $\measuredangle BDF = 22^\circ 30'$. Според тоа,

$$\measuredangle BFD = 180^\circ - (45^\circ + 22^\circ 30') = 112^\circ 30'.$$

Сега, заради симетрија имаме $\measuredangle BED = 112^\circ 30'$.

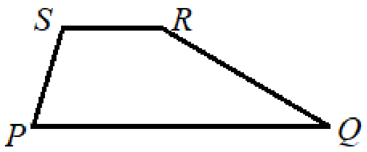
28. Периметарот на еден трапез е 5 а должините на неговите страни се природни броеви.

Колку се големините на двата негови најмали агли?

А) 30° и 30° В) 60° и 60° С) 45° и 45°

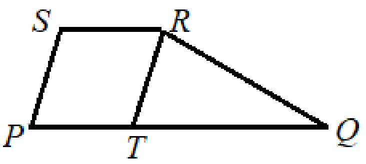
D) 30° и 60° Е) 45° и 90°

Решение. **В).** Нека $ABCD$ е дадениот трапез. Тогаш, без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{AB} = 2, \overline{BC} = 1, \overline{CD} = 1$ и $\overline{DA} = 1$. Значи, $ABCD$ е рамнокрак трапез, па ако низ темето C повлечеме права паралелна со кракот AD таа че ја сече основата AB во точка E, при што триаголникот EBC ќе биде рамностран. Значи најмалите два агли на трапезот се по 60°.



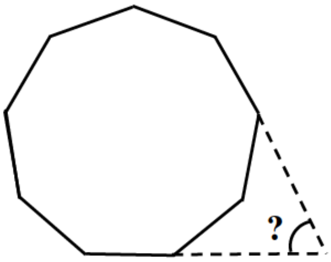
29. Во трапезот $PQRS$, страните PQ и RS се паралелни. Аголот RSP е еднаков на 120° и $\overline{RS} = \overline{SP} = \frac{1}{3}\overline{PQ}$. Која е мерката на $\measuredangle PQR$?

А) 15° В) $22,5^\circ$ С) 25° D) 30° Е) 45°



Решение. **D).** Нека правата која минува низ точката R и е паралелна со страната SP ја сече основата PQ во точката T. Тогаш четириаголникот $PTRS$ е ромб со агли 120° и 60°. Сега имаме $\overline{QT}=\overline{QP}-\overline{PT}=3\overline{RT}-\overline{RT}=2\overline{RT}$ и $\measuredangle RTQ=60^\circ$. Значи, триаголникот RTQ е половина од рамностран триаголник, па затоа $\measuredangle PQR=30^\circ$.

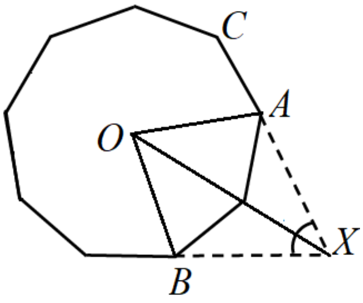
30. Даден е правилен деветаголник. Определи ја мерката на аголот означен со знакот прашалник.



А) 40° В) 45° С) 50°

D) 55° Е) 60°

Решение. **Е).** Централниот агол на правилниот деветаголник е еднаков на $\frac{360^\circ}{9}=40^\circ$. Според тоа, $\measuredangle OAC=\frac{180^\circ-40^\circ}{2}=70^\circ$, па затоа $\measuredangle OAX=180^\circ-70^\circ=110^\circ$. Конечно,

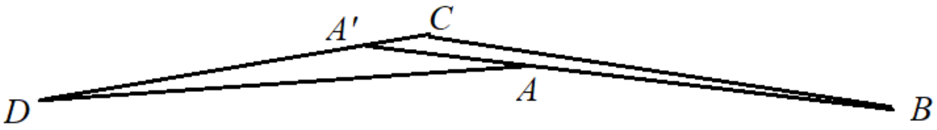


$$\measuredangle AXB=360^\circ-2\cdot(40^\circ+110^\circ)=60^\circ.$$

31. Даден е четириаголник $ABCD$, со должини на страни: $\overline{AB}=2006$, $\overline{BC}=2008$, $\overline{CD}=2007$ и $\overline{AD}=2009$. За означување на внатрешните агли на четириаголникот се употребени ознаките на соодветните темиња. Кои од овие агли сигурно се помали од 180°?

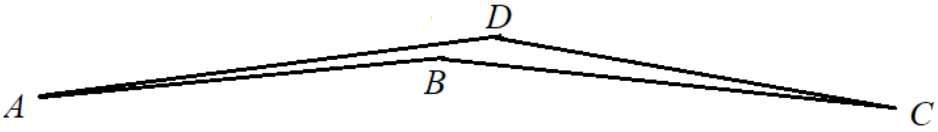
А) A,B,C В) B,C,D С) A,B,D D) A,C,D Е) A,B,C,D

Решение. **D).** Нека аголот A е поголем од 180° (види цртеж). Да ја продолжиме страната BA до пресекот со страната CD и нека A' е пресечната точка. Тогаш $\overline{AD}<\overline{AA'}+\overline{A'D}$ и $\overline{BA'}<\overline{BC}+\overline{CA'}$. Ако ги собереме добиените неравенства, наоѓаме



$$\begin{aligned}&\overline{AD}+\overline{BA'}<\overline{AA'}+\overline{A'D}+\overline{BC}+\overline{CA'},\\&\overline{AD}+\overline{BA}+\overline{AA'}<\overline{AA'}+\overline{CD}+\overline{BC},\\&\overline{AD}+\overline{BA}<\overline{CD}+\overline{BC},\\&2009+2006<2007+2008\\&2015<2015,\end{aligned}$$

што е противречност. Според тоа, со сигурност аголот A е помал од 180°. На потполно идентичен начин се докажува дека и аглите C и D се помали од 180°. Според тоа, единствено аголот при темето B може да е поголем од 180°, што може да се види од следниот цртеж.



Коментар. На потполно ист начин како погоре може да се докаже дека од две конвексни искршени линии со заеднички крајни точки, кои се наоѓаат од иста страна на правата која ги соединува крајните точки, внатрешната линија има помала должина. Обиди се самостојно да го докажеш ова тврдење.

3. ОСНА СИМЕТРИЈА

1. Ако буквите на зборот МАМА ги запишеме вертикално една под друга, тогаш зборот има вертикална оска на симетрија (вид цртеж десно). Кој од следните зборови, запишан на истиот начин, има вертикална оска на симетрија?

A) ROOT B) BOOM C) BOOT

D) LOOT E) TOOT

Решение. E). Буквите R, B и L немаат вертикални оски на симетрија, па затоа зборовите ROOT, BOOM, BOOT и LOOT запишани на зададениот начин немаат вертикална оска на симетрија. Единствено зборот TOOT го има саканото својство.

2. Која од наведените фигури има оска на симетрија?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Решение. A). Единствено само првата фигура има оска на симетрија и истото е прикажано на цртежот десно.

3. Кој од следниве сообраќајни знаци има најмногу оски на симетрија?

A) 

B) 

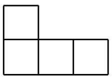
C) 

D) 

E) 

Решение. A). Знакот A има 4 оски на симетрија, B има 2 оски на симетрија, C има 3 оски на симетрија, D нема оски на симетрија и E има 1 оска на симетрија.

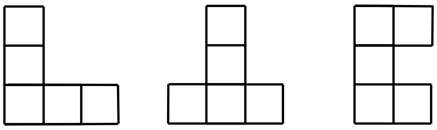
4. L-фигурата на цртежот е составена од 4 мали идентични квадратчиња. Треба да се додаде уште едно мало квадрат-



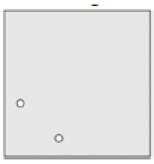
че, за да новодобиената фигура е основосиметрична. На колку начини може да се додаде квадратчето?

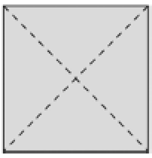
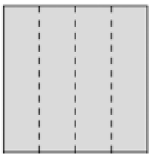
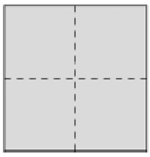
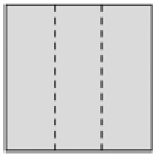
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. Тоа може да се направи на три различни начини како што е прикажано на цртежот десно.



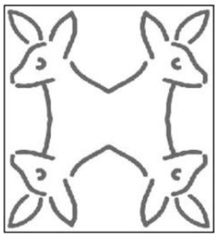
5. Филип превиткал квадратно парче хартија двапати, а потоа на свитканата хартија направил една дупка. Кога ја одвиткал хартијата, парчето хартија изгледало како на цртежот десно. Како Филип го превиткал парчето хартија?



A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

Решение. D). Добиените дупки по одвиткувањето се симетрични во однос на дијагоналата која ги поврзува долното лево и горното десно теме. Затоа превиткувањата B), C) и E) отпаѓаат. Понатаму, при превиткувањето A) ќе добиеме 4 дупки, па затоа и тоа отпаѓа. Останува превиткувањето D).

6. Колку оски на симетрија има фигурата на цртежот десно?



A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) бесконечно многу

Решение. C). Квадратот има 4 оски на симетрија, од кои 2 се оски на симетрија на целата фигура.

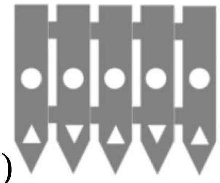
7. Оградата на Филип е составена од панели од по 5 штици на кои се издупчени кругови и триагол-

ници. Едно утро, панелот прикажан на цртежот десно паднал на земја. Што видел Филип приближувајќи се до оградата?

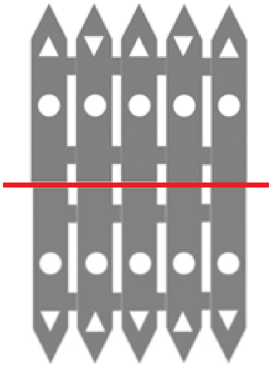
A) 

B) 

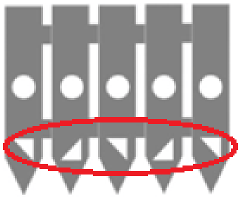
C) 

D) 

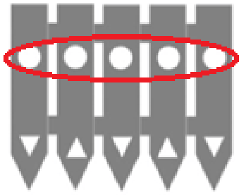
E) 



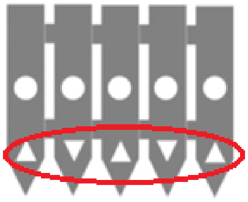
Решение. **C).** При паѓање на панелот на подот, се добива основиметрична слика на панелот во однос на правата на која и припаѓа долниот раб на оградата. На цртежот десно е даден панелот и неговата осносиметрична слика која се совпаѓа со C), а на долните цртежи се означени деловите на панелите кои не се осносиметрична слика на дадениот панел.



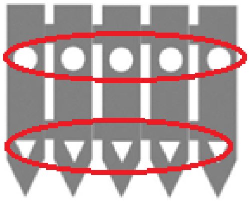
A)



B)

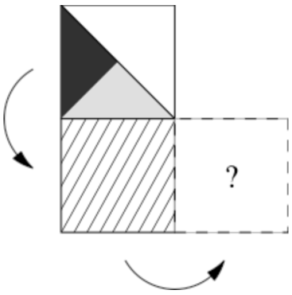


D)

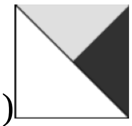


E)

8. Ева ја превртува сликата, така што долната страна на сликата станува горна страна, а потоа сликата ја превртува така што десната страна станува лева страна (види цртеж десно). Што гледа Ева?



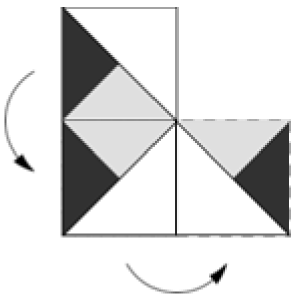
A) 

B) 

C) 

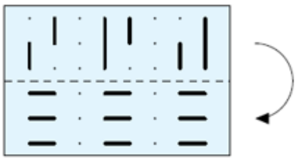
D) 

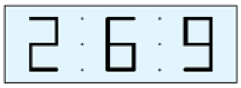
E) 



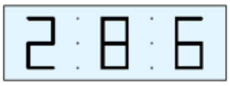
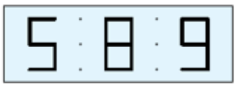
Решение. **В).** При секое првртување Ева ја гледа симетричната слика на квадратот во однос на страна преку која го превртува како оска на симетрија. Така го добиваме цртежот десно. Значи, Ева ќе го види квадратот В).

9. Матео има проѕирна хартија, на која се нацртани некои линии. Што ќе види Матео ако хартијата ја превитка по испрекинатата линија?

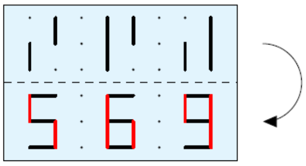


А)

В)

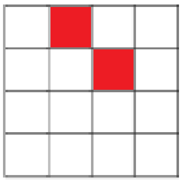
С)


D)

Е)


Решение. **С).** При превиткувањето на хартијата секоја горна линија се пресликува во линија која е симетрична во однос на испрекинатата права како оска на симетрија (цртеж десно).

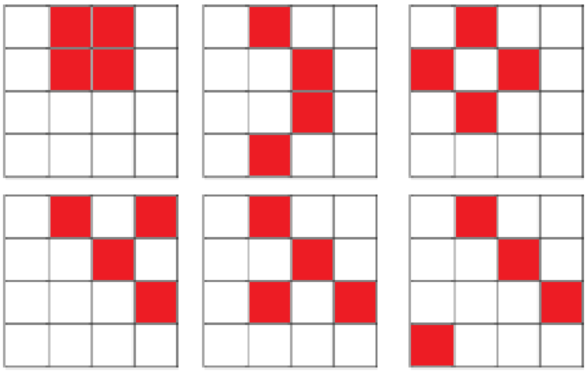


10. Две единечни квадратчиња на 4×4 квадра се обоени. На колку различни начини може да се обојат уште две квадратчиња така што квадратот има само една оска на симетрија?



А) 2 В) 3 С) 4 D) 5 Е) 6

Решение. **Е).** Квадратот има четири оски на симетрија. Во однос на трите оски точно по две квадратчиња се симетрични на секоја од оските и само таа оска е оска на симетрија на добиента фигура. Во однос на четвртата оска (дијагоналата од долу лево кон горе десно) се добива уште едно обоено квадратче, па сега четвртото квадратче може да е било кое од трите бели квадратчиња на оваа дијагонала. Значи, вкупно имаме шест можни боења.



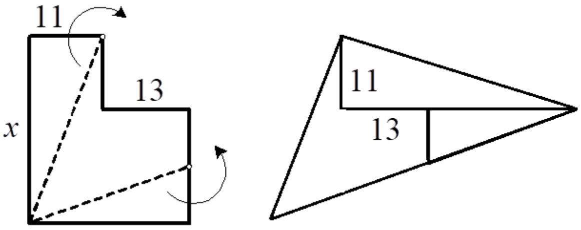
4. ПЕРИМЕТАР

1. Даден триаголник има страни со должина 6, 10 и 11. Рамностран триаголник има еднаков периметар како дадениот триаголник. Колку е долга страната на рамностраниот триаголник?

A) 18 B) 11 C) 10 D) 9 E) 6

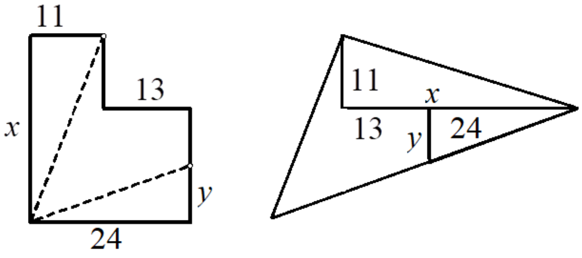
Решение. **D).** Периметарот на рамностраниот триаголник е еднаков на $6+10+11=27$. Значи, должината на неговата страна е $27:3=9$.

2. На левиот цртеж е претставена фигура составена од два правоаголници. Должините на две нејзини страни се 11 и 13 (види цртеж). Фигурата е исечена на три дела и деловите се составени во триаголник. Колку е должината на страната x?

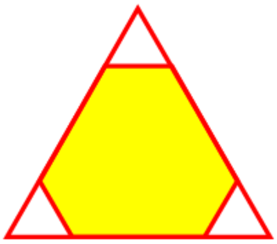


A) 36 B) 37 C) 38 D) 39 E) 40

Решение. **B).** Триаголникот е направен од два правоаголни триаголници со катети x и 11 за едниот и y и 24 за другиот, и еден петаголник кој не е конвексен (цртеж десно). Сега е очигледно дека $x=13+24=37$.



3. Од рамностран триаголник со страна $6\,\mathrm{cm}$ се отсечени три рамнострани триаголници, секој од кои содржи по едно теме од почетниот триаголник (види цртеж). Трите мали триаголници заед-

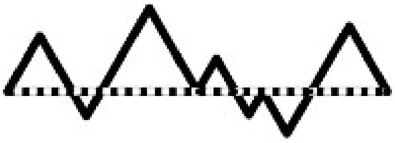


но имаат ист периметар како и жолтиот петаголник. Колку е должината на страната на малите триаголници?

A) 1 cm B) 1,2 cm C) 1,25 cm D) 1,5 cm E) 2 cm

Решение. D). Нека должината на страната на малите триаголници е x, а должината на страните на петаголникот се x и y. Од условот на задачата имаме $3\cdot 3x = 3x + 3y$, па затоа $6x = 3y$, т.е. $y = 2x$. Бидејќи должината на страната на триаголникот е $6\,\mathrm{cm}$ добиваме $2x + 2x = 6$, односно $x = 1{,}5\,\mathrm{cm}$.

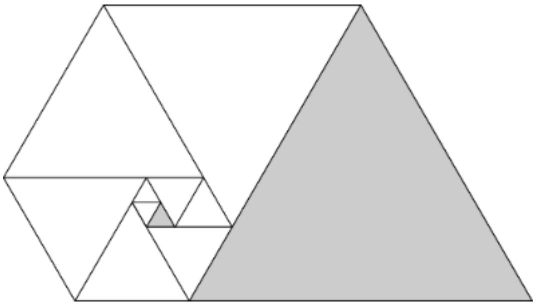
4. На цртежот испрекинатата линија и полната линија формираат седум рамнострани триаголници. Должината на испрекинатата линија е 20. Колкава е должината на полната линија?



A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

Решение. D). Испрекинатата линија е составена од по една страна на седумте рамнострани триаголници, а полната линија од по две страни на седумте рамнострани триаголници. Затоа должината на полната линија е двапати поголема од должината на испрекинатата линија. Според тоа, должината а полната линија е 40.

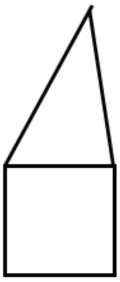
5. Сите триаголници на цртежот десно се рамнострани. Ако должината на страната на трите најмали триаголници е еднаква на $1\,cm$, колку е должината на страната на најголемиот триаголник?



A) $8\,cm$ B) $9\,cm$ C) $10\,cm$ D) $11\,cm$ E) $12\,cm$

Решение. Е). Редоследно, по големина, должините на страните на триаголниците се: $1+1=2\,cm$, $2+1=3\,cm$, $3+1=4\,cm$, $4+1=5\,cm$, $5+2=7\,cm$, $7+2=9\,cm$ и $9+3=12\,cm$.

6. Траголникот и квадратот прикажани на цртежот десно имаат еднакви периметри. Должината на страната на квадратот е $4\,cm$. Колку е периметарот на целата фигура ?

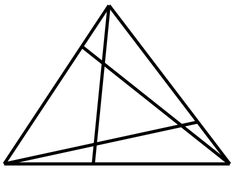


A) $12\,cm$ B) $24\,cm$ C) $298\,cm$ D) $32\,cm$

E) зависи од димензиите на триаголникот

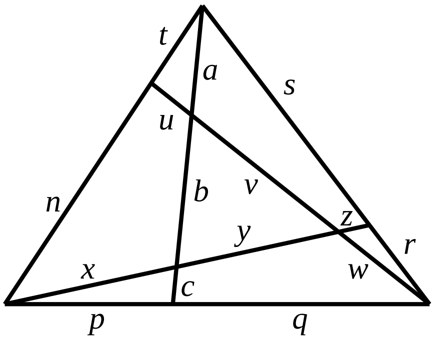
Решение. В). Периметрите на квадратот и триаголникот се еднакви на $4\cdot 4=16\,cm$. Значи, периметарот на петаголникот е еднаков на $16+16-2\cdot 4=24\,cm$.

7. Еден триаголник со три отсечки е разделен на четири триаголници и три четириаголници. Збирот на периметрите на четириаголниците е 25 cm. Збирот на периметрите на четирите делбени триаголници е 20 cm. Периметарот на почетниот триаголник е 19 cm. Колку е збирот на должините на трите делбени отсечки?



A) 11 cm B) 12 cm C) 13 cm

D) 15 cm E) 16 cm



Решение. Нека бараниот збир е L. Ако воведеме ознаки како на цртежот десно, од условот на задачата имаме:

$$(a+v+z+s\,)+(\,y+c+q+w)+(\,x+b+u+n)=25$$
$$(p+c+x)+(w+r+z)+(a+t+u)+(y+v+b)=20$$
$$(p+q)+(r+s)+(t+n)=19\,.$$

Ако првите две равенки ги собереме, добиваме

$$2[(a+b+c)+(x+y+z)+(u+v+w)]+(s+q+n)+(p+r+t)=45$$

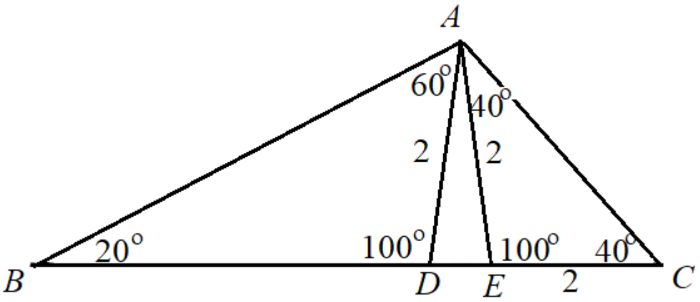
и ја искористиме третата равенка добиваме $2L+19=45$, т.е. $L=13$. Значи, бараниот збир е 13 cm.

8. Во триаголникот ABC аголот при темето B е еднаков на 20°, а аголот при темето C е еднаков на 40°. Должината на симетреалата на аголот во темето A е 2. Пресметај ја разликата $\overline{BC}-\overline{AB}$.

A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 4

E) не е можно да се определи.

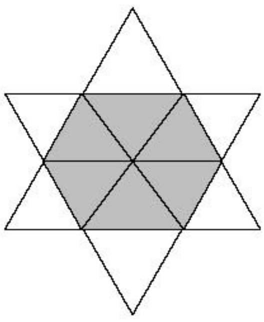
Решение. **C).** Нека точката $D\in BC$ е таква што AD е симетрала на аголот $\measuredangle BAC$ (види цртеж). Тогаш



$$\measuredangle BAD=\measuredangle DAC=60^\circ \text{ и } \measuredangle BDA=180^\circ-20^\circ-60^\circ=100^\circ.$$

Според тоа, $\measuredangle ADC=180^\circ-100^\circ=80^\circ$. Нека E е точка на BC таква што $\overline{BE}=\overline{AB}$. Тогаш триаголникот ABE е размнокрак и важи $\measuredangle AEB=\measuredangle BAE=80^\circ$. Според тоа, триаголникот DEA е рамнокрак, при што $\measuredangle DAE=20^\circ$ и $\overline{DA}=\overline{AE}=2$. Според тоа, $\measuredangle EAC=40^\circ$, што значи дека триаголникот EAC е рамнокрак. Значи, $\overline{EC}=\overline{AE}=2$. Конечно, $\overline{BC}-\overline{AB}=\overline{BC}-\overline{BE}=\overline{EC}=2$.

9. Ѕвездата на цртежот десно е формирана од 12 рамнострани триаголници. Нејзиниот периметар е еднаков на $36\,cm$. Колку е периметароит на сивиот шестаголник?

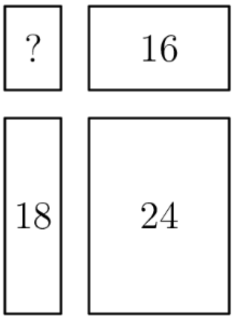


A) $6\,cm$ B) $12\,cm$ C) $18\,cm$

D) 24 cm E) 30 cm

Решение. **C).** Над секоја страна на сивиот шестаголник има две страни од ѕвездата со иста должина. Според тоа, периметарот на ѕвездата е двапати поголем од периметарот на сивиот шестаголник. Значи, периметарот на сивиот шестаголник е $36:2=18\,cm$.

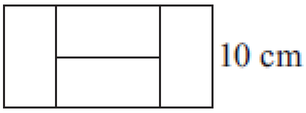
10. Матео исекол голем правоаголник и добил четири помали правоаголници. Периметрите на трите правоаголници се 16, 18 и 24, како што е прикажано на цртежот десно. Колку е периметарот на најмалиот правоаголник?



A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

Решение. **B).** Во збирот на периметрите на најголемиот и најмалиот правоаголник учествуваат сите страни на двата средни правоаголници и обратно. Ако со A го означиме периметарот на најмалиот правоаголник, тогаш $A+24=18+16$, па затоа $A=10$.

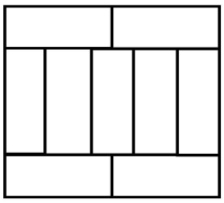
11. Четири складни правоаголници се споени и формираат правоаголник, како на цртежот. Должината на пократката страна на големиот правоаголник е 10cm. Колкава е должината на подолгата страна на големиот правоаголник?



A) 10 cm B) 20 cm C) 30 cm D) 40 cm E) 50 cm

Решение. **B).** Збирот на должинте на две пократки страни на малиот правоаголник е еднаков на должината на подолгата негова страна. На подолгата страна на големиот правоаголник лежат две пократки и една подолга страна на малиот правоаголник, па затоа нејзината должина е еднаква на $2\cdot 10=20\,cm$.

12. Големиот правоаголник на цртежот десно е составен од 9 мали идентични правоаголници. Поголемата страна на малите правоаголници е долга 10 *cm*. Колкав е периметарот на големиот четириаголник?



A) 40 *cm* B) 48 *cm* C) 76 *cm* D) 81 *cm* E) 90 *cm*

Решение. **C).** Сите мали правоаголници се меѓусебно складни. Со a и b да ги означиме должините на страните. Од цртежот имаме $2a=5b$, па како $a=10\,cm$, добиваме $5b=20$, односно $b=4\,cm$. Според тоа, периметарот на големиот правоаголник е

$$L=6a+4b=6\cdot10+4\cdot4=76\,cm.$$

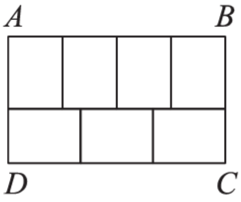
13. Маја ги собрала должините на три страни од еден правоаголник и добила $44cm$. Јана ги собрала должините на три страни од истиот правоаголник и добила $40cm$. Колку изнесува периметарот на правоаголникот?

A) $42cm$ B) $56cm$ C) $64cm$ D) $84cm$ E) $112cm$

Решение. **B).** Нека должините на страните на правоаголникот се a и b. Тогаш $2a+b=44$ и $a+2b=40$. Значи, $3a+3b=84$, од каде добиваме $a+b=28$.

Значи, периметарот на правоаголникот е $2(a+b)=56\,cm$

14. Правоаголникот $ABCD$ на цртежот десно е поделен на седум складни правоаголници. Определи го односот $\overline{AB}:\overline{BC}$.

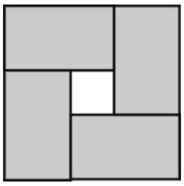


A) 1:2 B) 4:3 C) 8:5 D) 12:7 E) 7:3

Решение. **D).** Нека должината на пократката страна на малите правоаголници е a, а должината на подолгата страна е b. Тогаш $4a=3b$ и затоа $b=\frac{4}{3}a$. Сега,

$$\overline{AB}:\overline{BC}=4a:(a+b)=4a:(a+\tfrac{4}{3}a)=4:\tfrac{7}{3}=12:7\,.$$

15. На цртежот десно имаме четири еднакви правоаголници поставени во внатрешноста на квадрат. Периметарот на секој правоаголник е еднаков на 16 *cm*. Колку изнесува периметарот на квадратот?

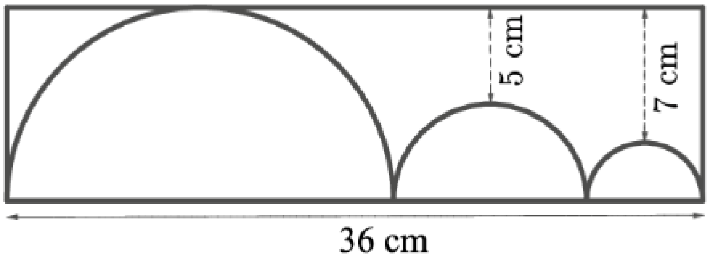


A) 16 *cm* B) 20 *cm* C) 24 *cm* D) 28 *cm* E) 32 *cm*

Решение. **E).** Со a и b да ги означиме должините на страните на малиот правоаголник. Тогаш периметарот на квадратот е еднаков на

$$4(a+b)=2\cdot 2(a+b)=2\cdot 16=32\,cm\,.$$

16. На цртежот се прикажани три полукружници сместени во правоаголник чија подолга страна е $36\,cm$. Растојанијата од најмалата и средната полукружница до спротивната страна се $7\,cm$ и $5\,cm$, соодветно. Колку е периметарот на правоаголникот?



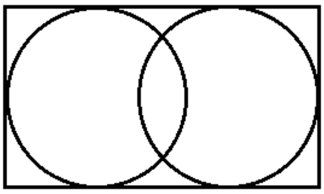
A) $82\,cm$ B) $92\,cm$ C) $96\,cm$ D) $108\,cm$ E) $120\,cm$

Решение. **B).** Нека a е должината на пократката страна на правоаголникот. Тогаш радиусите на полукружниците се $a, a-5, a-7$. Подолгата страна е еднаква на збирот на дијаметрите на полукружниците, па затоа

$$2a+2(a-5)+2(a-7)=36,$$

од каде добиваме $a=10\,cm$. Конечно, периметарот на правоаголникот е еднаков на $2(10+36)=92\,cm$.

17. На цртежот десно се прикажани правоаголник со димензии 7×11 и две кружници, секоја од кои допира три страни на правоаголникот. Колкаво е растојанието меѓу центрите на кружниците



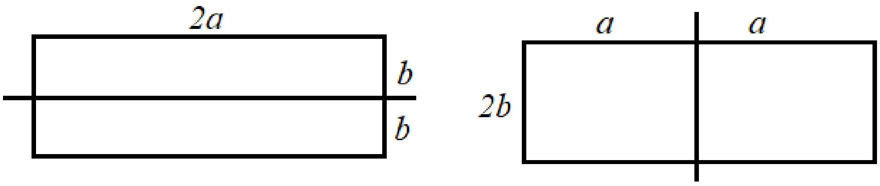
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. D). Радиусот на кружницата е еднаков на $7:2=3{,}5$. Според тоа, растојанието меѓу центрите на двете кружници е еднакво на $11-2\cdot 3{,}5=11-7=4$.

18. Дадени се два складни правоаголника. Со едно расекување по права паралелна на еден пар од страните Пабло добива два нови правоаголника, секој од кои има периметар $40\,cm$. Исто така Матео со сечење по права паралелна со другиот пар страни добива два правоаголника, секој од кои има периметар $50\,cm$. Колку е периметарот на еден од почетните правоаголници?

A) $40\,cm$ B) $50\,cm$ C) $60\,cm$ D) $80\,cm$ E) $100\,cm$

Решение. C). Нека должините на страните на почетните правоаголници се $2a$ и $2b$.

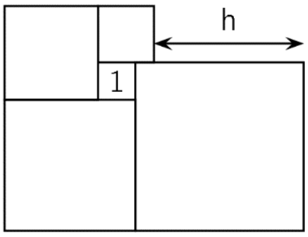


Тогаш при сечењата на Пабло и Матео добиваме

$$2(a+2b)=40,\ \ 2(2a+b)=50.$$

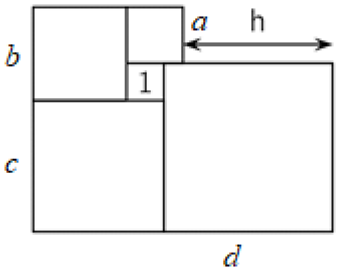
Решението на последниот систем равенки е $a=10\,cm, b=5\,cm$. Конечно, периметарот на секој од почетните правоаголници е еднаков на $2(2a+2b)=2\cdot(10+20)=60\,cm$.

19. Пет квадрати се поставени како што е прикажано на цртежот десно. Најмалиот квадрат има должина на страна 1. Колку е бројната вредност на должината h?



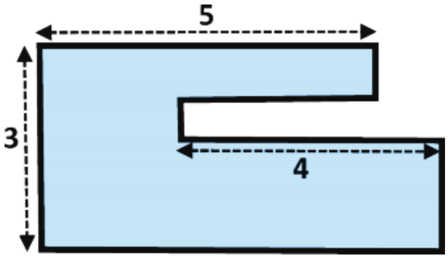
A) 3 B) 3.5 C) 4 D) 4.2 E) 4.5

Решение. **C).** Должината на страната на најмалиот квадрат е 1. При ознаки како на цртежот десно имаме



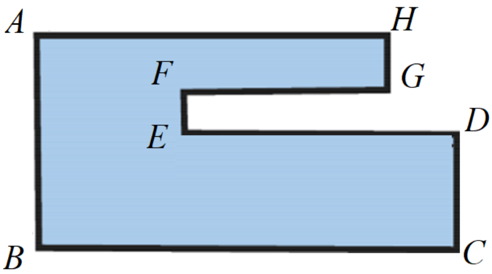
$$\begin{aligned} &b = a+1, \quad c = b+1, \quad d = c+1, \\ &h = c+d-(a+b) \\ &\quad = 2c+1-(2b-1) \\ &\quad = 2+2(c-b) \\ &\quad = 2+2\cdot 1 = 4. \end{aligned}$$

20. Градината на Горјан има форма како на цртежот десно. Сите страни на цртежот се паралелни или нормални меѓу себе. Некои од димензиите се дадени на цртежот. Колку е периметарот на градината на Горјан?



A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

Решение. **C).** При ознаки како на цртежот десно имаме:



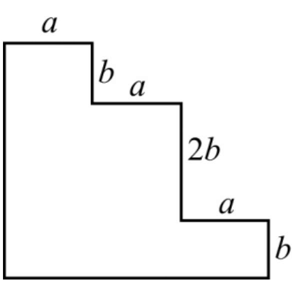
$$\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GH}=\overline{AB}=3,$$

$$\overline{BC}+\overline{FG}=\overline{ED}+\overline{AH}=4+5=9.$$

Според тоа, периметарот на градината на Горјан е:

$$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GH}+\overline{BC}+\overline{FG}+\overline{ED}+\overline{AH}=2\cdot 3+2\cdot 9=24.$$

21. Определи го периметарот на фигурата прикажана на цртежот десно. (Сите агли на дадената фигура се прави.)

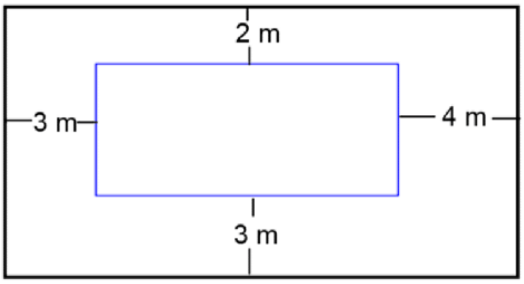


A) $3a+4b$ B) $3a+8b$ C) $6a+4b$

D) $6a+6b$ E) $6a+8b$

Решение. **E).** Ширината на фугурата е еднаква на $a+a+a=3a$, а нејзината висина е еднаква на $b+2b+b=4b$. Значи, периметарот на фигурата е еднаков на $2(3a+4b)=6a+8b$.

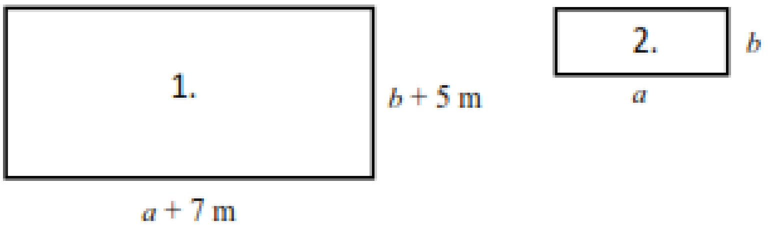
22. На цртежот се прикажани два правоаголника кои имаат паралелни страни. Која е разликата во периметрите на тие два правоаголника?



A) 12 m B) 16 m

C) 20 m D) 21 m E) 24 m

Решение. **E).** Должините на двата правоаголника се разликуваат за $3+4=7\ m$, а ширините за $2+3=5\ m$ (види цртеж).



Според тоа, периметрите се разликуваат за

$$2(a+7+b+5)-2(a+b)=2(a+b)+24-2(a+b)=24\ m.$$

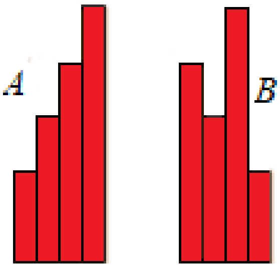
23. Еден правоаголникот има страни $6\ cm$ и $11\ cm$. Во краевите на една од подолги страни на правоаголникот се повлечени симетрали на неговите агли. Тие ја делат другата подолгата страна на три дела. Колку се должините на тие делови?

A) $1\,cm, 9\,cm, 1cm$ B) $2\,cm, 7\,cm, 2\,cm$ C) $3\,cm, 5\,cm, 3cm$

D) $4\,cm, 3\,cm, 4\,cm$ E) $5\,cm, 1\,cm, 5\,cm$

Решение. E). Секоја симетрала на агол на подолгата страна формира рамностран правоаголен триаголник со катета $6\,cm$. Двете катети кои припаѓаат на спротивната страна се преклопуваат за $1\,cm$. Значи, другата страна е поделена на три дела со должини $5\,cm, 1\,cm, 5\,cm$.

24. Фигурата A е формирана од четири ленти со ширина $10\,cm$, при што секоја следна лента е $25\,cm$ подолга од претходната. Фигурата B е составена од истите ленти, но во друг редослед. Колку сантиметри периметарот на фигурата B е поголем од периметарот на фигурата A.



A) 50 B) 40 C) 25 D) 20 E) 0

Решение. A). Ако должината на вертикалната страна на најмалиот правоаголник е $a\,cm$, тогаш должините на вертикалните страни на другите правоаголници се $a+25\,cm, a+50\,cm$ и $a+75\,cm$. Значи, периметарот на фигурата A е еднаков на

$$2(a+75+40)=2a+230\,cm.$$

Понатаму, периметарот на фигурата B е еднаков на

$$2\cdot 40+a+50+25+50+75+a=2a+280\,cm.$$

Конечно, периметгарот на фигурата B е

$$2a+280-(2a+230)=50\,cm$$

поголем од периметарот на фигурата A.

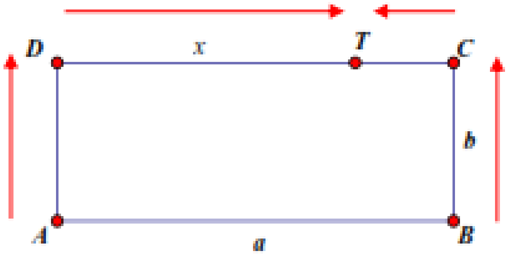
25. Четири деца се наоѓаат во четирите ќошиња на $10m\times 25m$ базен. Нивниот тренер се наоѓа некаде на една страна од базенот. Кога тој

ги повикал, три од децата излегле од базенот и дошле до него одејќи по рабовите на базенот по најкраткото растојание. Тие поминале вкупно 50 m. Кое е најкраткото растојание кое тренерот треба да го измине за да стигне до четвртото дете?

А) 10 m В) 12 m С) 15 m D) 20 m Е) 25 m

Решение. **D).** Со T да ја означиме положбата на тренерот, а со A, B, C, D положбите на децата во базенот. Тренерот можел да стои на подолгата или на пократката страна од базенот.

Нека тренерот стои на подолгата страна од базенот и нека тоа е страната CD (цртеж десно). Со стрелки да го означимедвижењето на децата околу базенот (најкратките можни патишта). Три деца излегле од базенот и тргнале по најкратките патишта кон тренерот. При ознаки како на цртежот имаме:

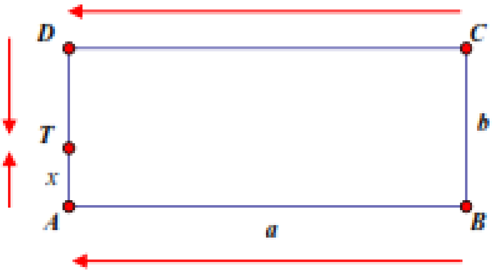


Ако се тоа A, B, C, тогаш $10+x+10+25-x+25-x=50$, па е $x=20$. Тоа значи дека тренерот требало да помине $20\,m$ до четвртото дете D.

Ако се тоа A, B, D, тогаш $10+x+10+25-x+x=50$, па е $x=5$. Тоа значи дека тренерот требало да помине $25-5=20\,m$ до четвртото дете C.

Ако се тоа A, C, D, тогаш $10+x+x+25-x=50$, па е $x=15$. Тоа значи дека тренерот требало да помине $25-15+10=20\,m$ до четвртото дете B.

Ако се тоа B, C, D, тогаш $10+x+25-x+25-x=50$, па е $x=10$. Тоа значи дека тренерот требало да помине $10+10=20\,m$ до четвртото дете A.



Нека тренерот стои на пократката страна од базенот и нека тоа е страната AD (цртеж десно). Со стрелки да го означиме движењето на децата околу базенот (најкратките можни патишта). Три деца излегле од базенот и тргнале по најкратките патишта кон тренерот. При ознаки како на цртежот имаме:

Ако се тоа A,B,C, тогаш $x+25+x+25+10-x=50$, па е $x=-10$, што не е можно бидејќи $x>0$.

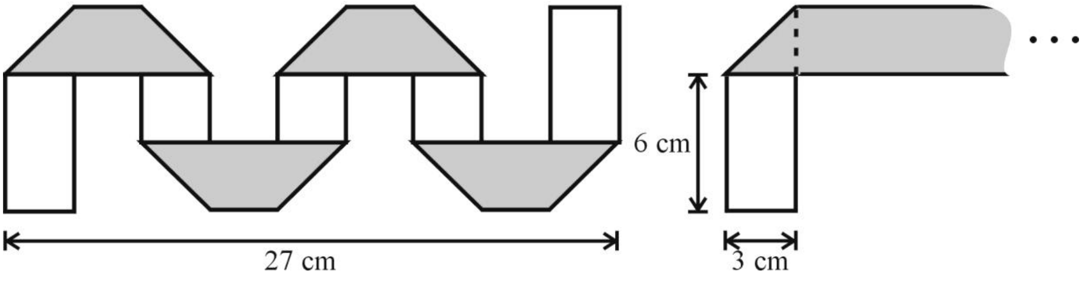
Ако се тоа A,B,D, тогаш $25+x+10+x-x=50$, па е $x=15$, што не е можно бидејќи $x<10$.

Ако се тоа A,C,D, тогаш $x+10-x+25+10-x=50$, па е $x=-5$, што не е можно бидејќи $x>0$.

Ако се тоа B,C,D, тогаш $25+x+25+10-x+10-x=50$, па е $x=20$, што не е можно бидејќи $x<10$.

Конечно, тренерот стои на подолгата страна, а до детето кое останало во базенот е помине $20\,m$.

26. Правоаголна лента широка 3 *cm* е бела од едната страна, а сива од другата страна. Тања ја свиткала лентата како на цртежот десно. Сивите трапези се складни. Колкава е должината на правоаголната лента?



А) 36 *cm* В) 48 *cm* С) 54 *cm* D) 57 *cm* Е) 81 *cm*

Решение. **D).** Да замислиме дека трапезите ги сечеме по висините повлечени од темињата на пократките основи кон подолгите основи и истите да ги исправиме. Ќе добиеме 5 правоаголници со должини на страни 3 cm и 9 cm, кои се поврзани со 5 квадрати со должина на страна 3 cm. Според тоа, лентата е долга $5\cdot 9+4\cdot 3=57\,cm$.

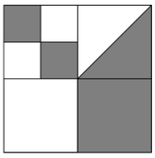
27. Даден е рамнокрак триаголник со доллжина на кракот $11\,cm$. Колку сантиметри може да биде најголемата вредност на периметарот ако должината на основата изразена во сантиметри е цел број?

A) 40 B) 41 C) 42 D) 43 E) 44

Решение. **D).** Ако a е должината на основата, а b е должината на кракот, тогаш од неравенството на триаголник следува $a<2b$, односно $a<22$. Значи, најголемата можна вредност на основата изразена во цел број сантиметри може да е $21\,cm$, а соодветната вредност на периметарот е $21+2\cdot 11=43\,cm$.

4. ПЛОШТИНА

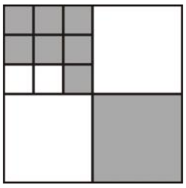
1. Големиот квадрат е поделен на помали квадрати и во еден од помалите квадрати е повлечена дијагонала, како на цртежот. Кој дел од големиот квадрат е обоен со сиво?



A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Решение. E). Големиот квадрат е поделен на четвртини. Во секоја од горните две четвртини обоена е половина од површината. Во долните две четвртини едната е бела, а другата е обоена, т.е. половината од површината е обоена. Значи, обоен е половина од големиот квадрат.

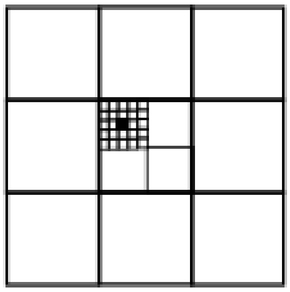
2. Голем квадрат е поделен на помали квадрати (цртеж десно). Колкав дел од квадратот е обоен со сиво?



A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{5}{12}$

Решение. D). Големиот сив квадрат е $\frac{1}{4}$ од целиот квадрат. Малите сиви квадрати се $\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{9}$ од големиот квадрат. Значи, сивата површина е $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{9}=\frac{9+7}{36}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$ од големиот квадрат.

3. Плоштината на најголемиот квадрат на цртежот десно е еднаква на 1. Колку е плоштината на најмалиот црн квадрат?



A) $\frac{1}{100}$ B) $\frac{1}{300}$ C) $\frac{1}{600}$

D) $\frac{1}{900}$ E) $\frac{1}{100}$

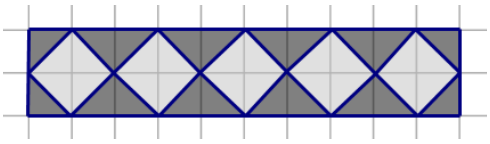
Решение. D). При првата поделба имаме 9 квадрати, потоа секој од нив е поделен на 4 квадрати и на крајот секој од добиените квадрати е поделен на 25 квадрати. Значи, во најголемиот квадрат има $9\cdot 4\cdot 25=900$ мали квадрати, па плоштината на црниот квадрат е еднаква на $\frac{1}{900}$.

4. Прекривката за маса на Темјана изгледа како на цртежот десно. Колкав процент од прекривката е обоен со црна боја?

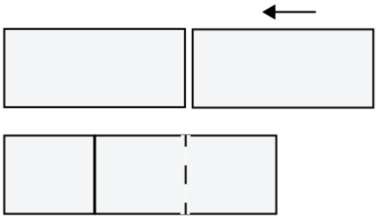
A) 16　　B) 24　　C) 25

D) 32　　E) 36

Решение. **D).** Чаршавот има квадратен облик и на секоја негова страна има по пет квадрати, секој од кои половината е црн, а половината е бел (цртеж десно). Според тоа, можеме да земеме дека чаршавот е 5×5 квадрат, во кој $5+5+3+3=16$ единечни квадрати се половина бели, половина црни. Значи, од $5\cdot 5=25$ квадрати точно $\frac{16}{2}=8$ се црни. Според тоа, $\frac{8}{25}\cdot 100=32\%$ од чаршавот на Темјана е обоен со црна боја.



5. Два складни правоаголници со целобрјни страни изразени во дециметри и плоштина $18\,dm^2$ се поставени еден врз друг, така што добиениот правоаголник може да се подели на три квадрати. Колку дециметри е периметарот на новиот правоаголник?



A) 22　　B) 24　　C) 26　　D) 28　　E) 30

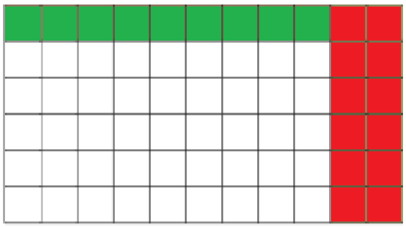
Решение. **B).** Нека должините на страните на правоаголниците се a и b, $b<a$. Тогаш $ab=18$ и новиот правоаголник има страни $3b$ и b.

Бидејќи a и b се природни броеви, можни се следниве случаи: $a=18, b=1$; $a=9, b=2$ и $a=6, b=3$. Притоа бидејќи при преклопувањето се добиваат три квадрати мора да е $3b \geq a$ и тоа важи само за $a=6, b=3$. Значи, должините на страните на правоаголникот се $3b=9, b=3$ и неговиот периметар е $2(3b+b)=24\,dm$.

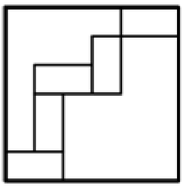
6. Правоаголна чоколадна табла е составена од еднакви квадрати. Наум скршил две цели ленти од таблата на квадрати и ги изел 12-те квадрати што ги добил. Потоа, Јасен скршил една цела лента од делот што преостанал од истата чоколадна табла и ги изел 9-те квадрати што ги добил. Колку квадрати од чоколадната табла останале?

A) 72 B) 63 C) 54 D) 45 E) 36

Решение. **D).** Бидејќи чоколадото е со правоаголен облик поделен на квадрати, две ребра можеме да откршиме по должина или по ширина. Ако Наум откршил две ребра кои вкупно имаат 12 квадрати, тогаш секое ребро има по 6 квадрати, па останало парче чоколадо со правоаголен облик чија ширина соодветствува на ширина од 6 квадрати. Потоа Јасен откршил едно ребро кое има 9 квадрати, па новиот остаток исто така е со правоаголен облик со димензии кои се должина 9 квадрати и ширина $6-1=5$ квадрати. Затоа останале $9\cdot5=45$ квадрати.



7. Пет еднакви правоаголници се ставени во внатрешноста на квадрат со страна $24\,\text{cm}$, како што е прикажано на цртежот.

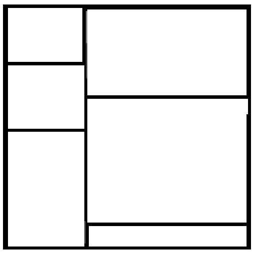


Колку е плоштината на еден таков правоаголник?

A) $12\,cm^2$ B) $16\,cm^2$ C) $18\,cm^2$ D) $24\,cm^2$ E) $32\,cm^2$

Решение. E). Со x да ја означиме пократката, а со y подолгата страна на правоаголниците. Тогаш $2x+2y=24$ и $3y=24$, од каде наоѓаме $y=8, x=4$. Значи, плоштината на правоаголникот е еднаква на $4\cdot 8=32\,cm^2$.

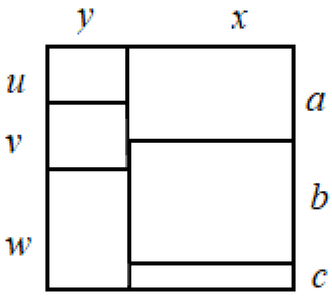
8. Лист хартија во облик на квадрат е исечен на шест правоаголни парчиња. Збирот на периметрите на шесте правоаголници е $120\,cm$. Колку е плоштината на листот хартија?



A) $48\,cm^2$ B) $64\,cm^2$ C) $110{,}25\,cm^2$

D) $144\,cm^2$ E) $256\,cm^2$

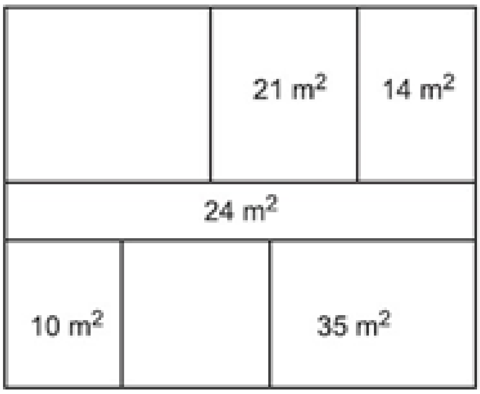
Решение. D). Страните на правоаголниците ќе ги означиме како на цртежот. Тогаш од условот на задачата имаме



$$6x+6y+2(a+b+c+u+v+w)=120.$$

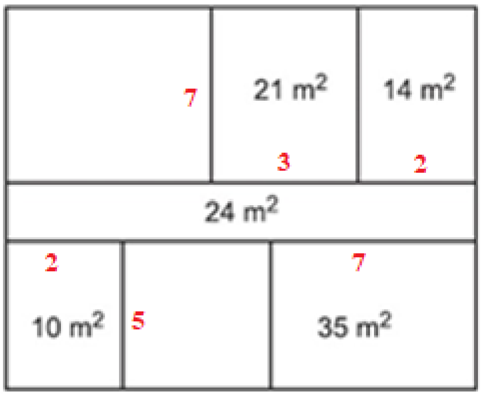
Ако m е должината на страната на квадратот, тогаш $x+y=m$, $a+b+c=m$ и $u+v+w=m$, од каде што добиваме $6m+2(m+m)=120$. Од последната равенка $m=12$, па плоштината на листот хартија е $P=m^2=12^2\ cm^2=144\,cm^2$.

9. Правоаголникот прикажанна цртежот десно е поделен на седум правоаголници, чии должни на страни се изразени во цел број сантиметри. За пет правоаголници се дадени нивните плоштини. Колку е најмалиот



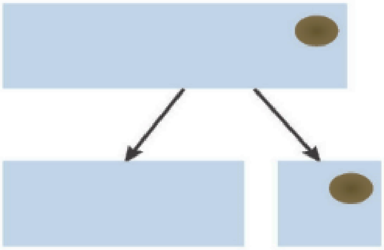
збир на плоштините на другите два правоаголници?

А) 36 В) 54 С) 64 D) 76 Е) 81



Решение. С). Од $НЗД(14,21)=7$ добиваме дека должината на заедничката срана на горните два правоаголници е $7\,cm$, а должините на другата страна е $3\,cm$ и $2\,cm$ (цртеж десно). Слично, од $НЗД(10,35)=5$, добиваме дека должината на заедничката страна на долните два правоаголници е $5\,cm$, а должините на другата страна се $2\,cm$ и $7\,cm$.

Сега, од $24=1\cdot 24=2\cdot 12=3\cdot 8=4\cdot 6$ и како должината на едната страна на средниот правоаголник мора да е поголема од $7+2=9\,cm$, заклучуваме дека таа може да биде $12\,cm$ или $24\,cm$. Јасно, збирот на плоштините на другите два правоаголници е најмал, ако неговите втори страни се со најмали можни должини, па затоа должината на страната на средниот правоаголник е $12\,cm$. Значи, едниот правоаголник има должини на страни $7\,cm$ и $12-(3+2)=7\,cm$, а другиот има должини на страни $5\,cm$ и $12-(7+2)=3\,cm$. Конечно, најмалиот збир на плоштините е $7\cdot 7+3\cdot 5=64\,cm^2$.



10. На правоаголен килим има оштетување. Горјан го исекол оштетувањето и добил нов правоаголен килим со периметар $590\,cm$ (цртеж десно). Колку квадратни метри е плоштината на почетниот килим, ако неговиот периметар е $7{,}6\,m$, а периметарот на исечениот правоаголен дел е $410\,cm$.

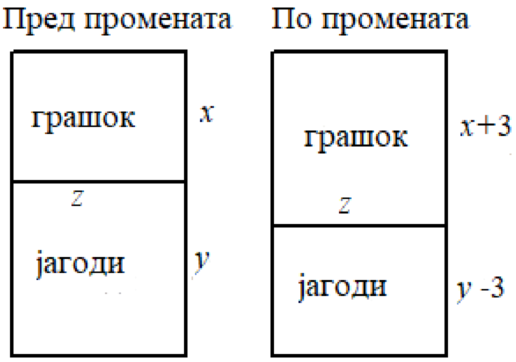
A) 7,6 B) 6,9 C) 6,24 D) 3,12 E) 2,8

Решение. D). Збирот на периметрите на двата добиени делови е поголем од периметарот на почетниот килим за две должини на едната страна на почетниот килим.Значи, должината на едната страна на почетниот килим е $\frac{590+410-760}{2}=120\,cm=1,2\,m$. Сега, должината на другата страна на почетниот килим е $\frac{760-2\cdot 120}{2}=260\,cm=2,6\,m$. плоштината на почетниот килим е $1,2\cdot 2,6=3,12\,m^2$.

11. Госпоѓата Марија во својата градина одгледувала грашок и јагоди. Оваа година правоаголната површина под грашок ја наголемила до квадратна, проширувајќи ја едната страна за 3 метри (види цртеж). Притоа, плоштината под јагоди се намалила за 15 m^2. Колкава е плоштината под грашок пред наголемувањето?

A) 5 m^2 B) 9 m^2 C) 10 m^2 D) 15 m^2 E) 18 m^2

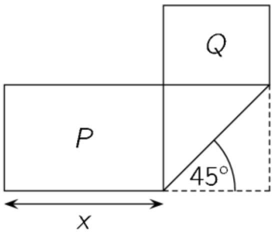
Решение. Нека x и y се должините на страните на правоаголните површини кои се наголемиле и намалиле за 3 m. Ако z е ширината на правоаголните површини, тогаш од условот на задачата имаме $z\cdot 3=15$ и $x+3=z$.



Според тоа, $z=5$ и $x=z-3=5-3=2\,m$.

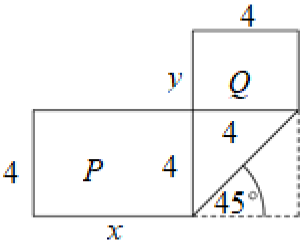
Значи, пред промената, госпоѓа Марија имала 10 m^2 под грашок.

12. Правоаголна лента од хартија со димензии 4×13 (цртеж десно) е преклопена како што е прикажано на долниот десен цртеж. Притоа се формирани два правоаголници со плоштини P и Q (види цртеж) при што $P=2Q$. Колкава е вредноста на x?



A) 5 B) 5,5 C) 6 D) 6,5 E) $4\sqrt{2}$

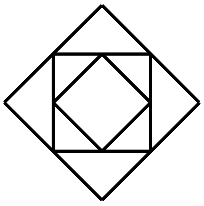
Решение. **C).** Бидејќи аголот на превиткување на 45°, отсечката по која се врши превиткувањето е дијагоналата на квадрат со страна 4. Според тоа, при ознаки како на цртежот десно имаме: $x+4+y=13$, па затоа $y=9-x$. Значи,



$$P=4x \text{ и } Q=4y=4(9-x),$$

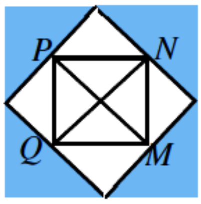
од каде бидејќи $P=2Q$ добиваме $4x=8(9-x)$, т.е. $x=6$.

13. На цртежот се дадени три квадрати. Темињата на средниот квадрат се средините на страните на големиот квадрат. Темињата на малиот квадрат се средините на страните на средниот квадрат. Плоштината на малиот квадрат е $6\,cm^2$. Колку е разликата меѓу плоштината на големиот квадрат и плоштината на средниот квадрат, во cm^2?



A) $6\,cm^2$ B) $9\,cm^2$ C) $12\,cm^2$ D) $15\,cm^2$ E) $18\,cm^2$

Решение. **C).** *Прв начин.* Малиот квадрат да го означиме $MNPQ$. Страните и дијагоналите на $MNPQ$ го делат средниот квадрат на 8 рамно-



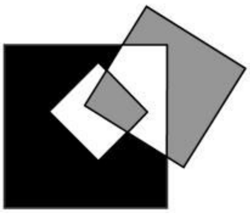
страни правоаголни триаголници, кои се склад-ни. Оттука следува дека плоштината на средниот квадрат е два пати поголема од плоштината на малиот квадрат. Слично, плоштината на големиот квадрат е два пати поголема од плоштината на средниот квадрат. Значи, разликата меѓу плоштините на големиот и средниот квадрат е еднаква на плоштината на средниот квадрат, па затоа таа е два пати поголема од плоштината на малиот квадрат, т.е. е еднаква на $2 \cdot 6\,cm^2 = 12\,cm^2$.

Втор начин. Должината на страната на малиот квадрат е $a = \sqrt{6}\,cm$, а неговата дијагонала има должина $d = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{12}\,cm$. Значи, должината на страната на средниот квадрат е $b = d = \sqrt{12}\,cm$, а неговата плоштина $P = b^2 = 12\,cm^2$. Должината на дијагоналата на средниот квадрат е $D = \sqrt{(\sqrt{12})^2 + (\sqrt{12})^2} = \sqrt{24}\,cm$, па според тоа, должината на страната на големиот квадрат е $D = \sqrt{24}\,cm$.

Сега, разликата меѓу плоштините на големиот и средниот квадрат е

$$S = (\sqrt{24})^2 - (\sqrt{12})^2 = 24 - 12 = 12\,cm^2.$$

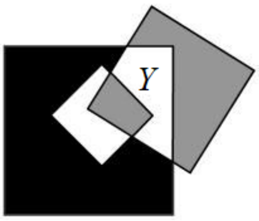
14. Во внатрешноста на квадрат со страна 7 *cm*, е нацртан квадрат со страна 3 *cm*. Потоа е нацртан квадрат со страна 5 *cm* кој ги сече првите два квадрати како на цртежот десно. Колку изнесува разликата меѓу плоштината на црниот дел и вкупната плоштина на сивите делови?



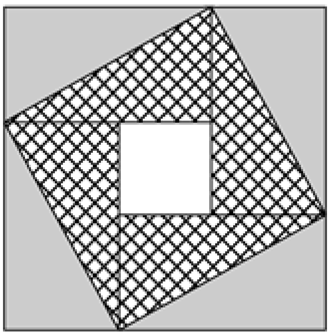
A) $0\,cm^2$ B) $10\,cm^2$ C) $11\,cm^2$ D) $15\,cm^2$

E) не е можно да се определи

Решение. **D).** Едната од белите плоштини ќе ја означиме со Y. Плоштината на црната површина е $7^2-3^2-Y=40-Y$, а вкупната плоштина на сивите делови заедно е $5^2-Y=25-Y$. Нивната разлика е $40-Y-(25-Y)=40-25=15\,cm^2$.



15. Голем квадрат се составен од четири идентични правоаголници и еден мал квадрат. Плоштината на големиот квадрат е $49\,cm^2$ и должината на дијагоналата еден од правоаголниците е 5 *cm*. Колку е плоштината на малиот квадрат?



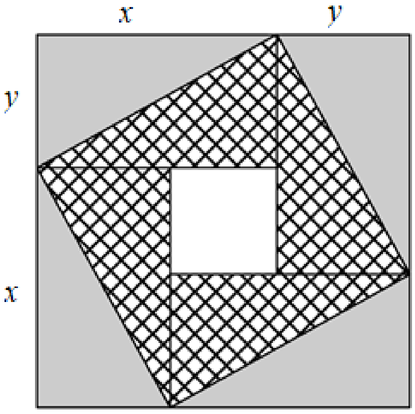
A) 1 cm^2 B) 4 cm^2 C) 9 cm^2 D) 16 cm^2 E) 25 cm^2

Решение. **A).** Нека со x и y ги означиме должините на страните на еден од идентичните правоаголници. Тогаш

$$x+y=7 \text{ и } x^2+y^2=25.$$

Имаме

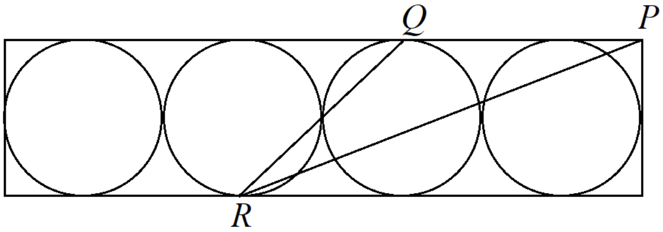
$$49=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$
$$=25+2xy,$$



па затоа $xy=12$. Плоштината на малиот квадрат е

$$P=49-4xy=49-4\cdot 12=49-48=1\,cm^2.$$

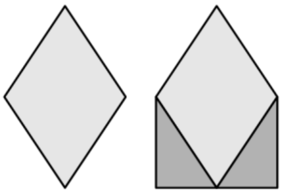
16. Четири кружници со радиус $6\,cm$ се впишани во правоаголник како на цртежот десно. Ако P е теме на правоаголникот, а Q и R се тангентни точки, колку е плоштината на триаголникот PQR?



A) $27\,cm^2$ B) $45\,cm^2$ C) $54\,cm^2$ D) $108\,cm^2$ E) $180\,cm^2$

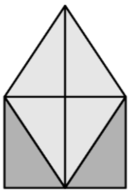
Решение. **D).** Должината на висината на триаголникот PQR повлечена од темето R е еднаква на дијаметарот на кружниците, т.е. на $12\,cm$, а должината неговата основа PQ е трипати поголема од радиусот на кружниците, т.е. е еднаква на $18\,cm$. Според тоа, плоштината на триаголникот PQR е $P=\frac{18\cdot12}{2}=108\,cm^2$.

17. На левиот цртеж е даден ромб. За колку проценти се зголемила плоштината кога на ромбот му се доцртани два правоагол и триаголници, како што е прикажано на десниот цртеж?

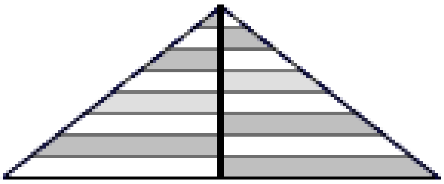


A) 20% B) 25% C) 30% D) 40% E) 50%

Решение. **E).** Ако на ромбот прикажан на десниот цртеж ги повлечеме дијагоналите, тие го делат на 4 складни триаголници, кои се складни со доцртани триаголници. Значи, од 4 станале 6 триаголници, па затоа површината се зголемила за $(\frac{6}{4}-1)\cdot100\%=50\%$.



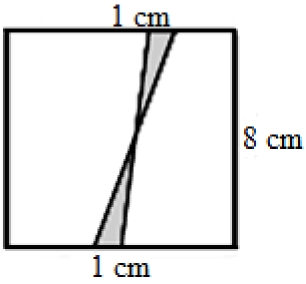
18. На цртежот десно е прикажан лентест рамнокрак триаголник и неговата висина. Секоја лента има иста висина. Кој дел дел од плоштината на целиот триаголник е белиот дел?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{5}$

Решение. А). Висината повлечена кон оснвата го дели рамнокракиот триаголник на два складни правоаголни троаголници. Тоа значи дека триаголникот при врвот и секој рамнокрак трапез кој е определен со една лента е поделен на два складни правоаголни триаголници и рамнокраки правоаголни трапези, соодветно. Еден од овие делови е бел, а другиот е сив, па затоа плоштината на белиот дел е еднаква на плоштината на сивиот дел. Според тоа, збирот на плоштините на белите делови е еднаков на $\frac{1}{2}$ од плоштината на триаголникот.

19. Две отсечки, секоја со должина еднаква на 1 *cm*, се означени на спротивните страни на квадрат со должина на страна еднаква на 8 *cm*. Краевите на отсечките се поврзани како на цртежот десно. Колкава е плоштината, изразена во cm^2, на делот од квадратот обоен во сиво?

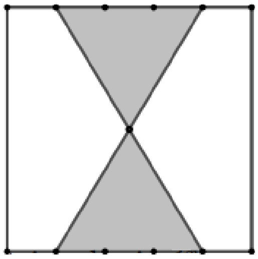


А) 2 В) 4 С) 6,4 D) 8 Е) 10

Решение. В). Плоштината на сивиот дел е еднаква на збирот на плоштините на два триаголника со основа 1 *cm* и збир на висините еднаков на 8 *cm*. Според тоа, бараната плоштина е

$$P=\frac{1\cdot h}{2}+\frac{1\cdot h'}{2}=\frac{h+h'}{2}=\frac{8}{2}=4\,cm^2.$$

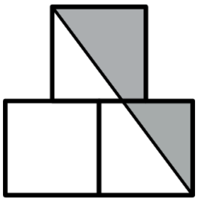
20. Две спртивни страни на квадратот прикажан на цртежот десно е поделен на по 5 еднакви делови. Плоштината на сивата фигура е $30\,cm^2$. Определи ја должината на страната на квадратот во сантиметри.



А) 8 В) 9 С) 10 D) 12 Е) 16

Решение. C). Ако должината на страната на квадратот е a, тогаш основите на двата триаголници имаат должина $\frac{3}{5}a$, а збирот на нивните висини е a. Според тоа, плоштината на обоениот дел е $\frac{a\cdot\frac{3}{5}a}{2}=30$, од каде добиваме $a=10\,cm$.

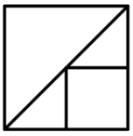
21. На цртежот десно, центарот на горниот квадрат е над заедничката страна на двата долни квадрати. Секој квадрат има страна со должина 1. Колку изнесува плоштината на засенчениот дел?

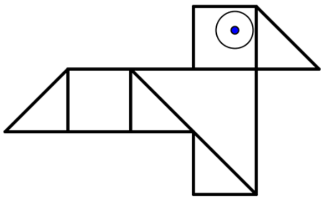


A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{7}{8}$ C) 1 D)$1\frac{1}{4}$ E) $1\frac{1}{2}$

Решение. C). Белиот и сивиот триаголник на цртежот се правоаголни триаголници кои имаат една катета со должина 1 и по еден еднаков остар агол, што значи дека тие се складни. Тоа значи дека плоштината на сивиот дел на дадената фигура е еднаква на 1.

22. Темјана има неколку квадратни парчиња со плоштина 4. Таа сече неколку од нив на квадрати и правоаголни триаголници како што е прикажано на цртежот десно.



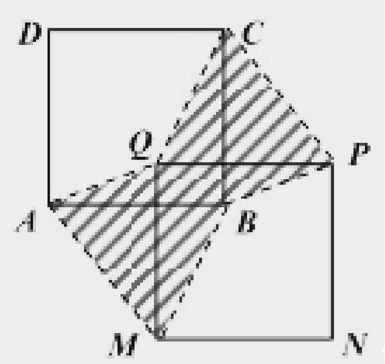


Темјана употребила неколку од нив и направила птица како на цртежот лево. Колку е плоштината на птицата?

A) 3 B) 4 C) $\frac{9}{2}$ D) 5 E) 6

Решение. E). При правењето на птицата се употребени сите делови добиени од едно парче и мал квадрат и два мали триаголника од друго парче хартија. Значи, при правењето на птицата се употребени 1,5 парчиња хартија, па затоа плоштината на птицата е $4\cdot1{,}5=6$.

23. Дадени се квадратите $ABCD$ и $MNPQ$, кај кои страните AB и PQ се паралелни и еднакви. Определи ја плоштината на квадратот $ABCD$, ако плоштината на штрафираниот дел е еднаква на $1\,cm^2$.

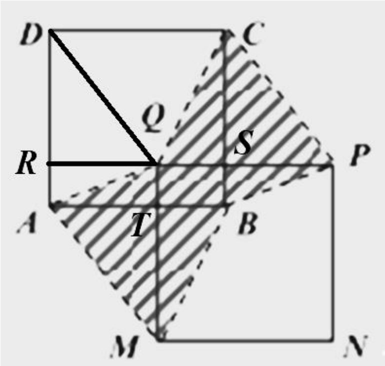


A) $1\,cm^2$ B) $1{,}5\,cm^2$ C) $2\,cm^2$

D) $1{,}25\,cm^2$ E) друг резултат

Решение. **A).** При ознаки како на цртежот десно важи $\triangle CDQ \cong \triangle BAM$, $\triangle ARQ \cong \triangle BSP$ и $\triangle DRQ \cong \triangle CSP$, па затоа

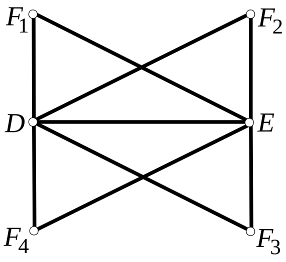
$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{ABCQ} + P_{ARQ} + P_{DRQ} + P_{CDQ} \\ &= P_{ABCQ} + P_{BSP} + P_{CSP} + P_{BAM} \\ &= P_{AMBPCQ} = 1\,cm^2. \end{aligned}$$

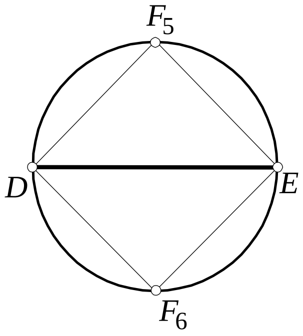


24. На лист хартија, Илина нацртала отсечка DE со должина $2\,cm$. Колку различни точки F може таа да нацрта на листот, така што триаголникот DEF е правоаголен и има плоштина $1\,cm^2$?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

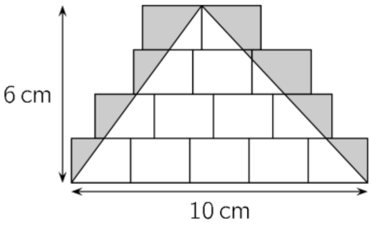
Решение. **C).** За бараниот триаголник DEF, отсечката DE може да е катета или хипотенуза. Ако DE е катета, тогаш должината на другата катета мора да е $1\,cm$. Постојат четири правоаголни триаголници DEF за кои што DE е катета, и имаат плоштина $1\,cm^2$. Тоа се DEF_1, DEF_2, DEF_3 и DEF_4 прикажани на горниот цртеж.





Ако DE е хипотенуза на бараниот триаголник, тогаш темето точката F припаѓа на кружницата со дијаметар DE, а висината спуштена од темето F има должина $1\,cm$. Тоа значи дека триаголникот DEF е рамнокрак (цртеж десно). Такви триаголници има два, и тоа DEF_5 и DEF_6.

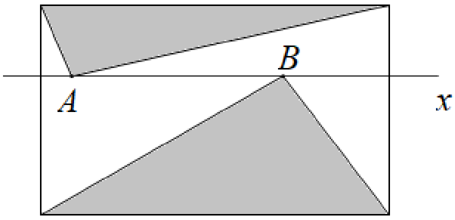
25. Неколку идентични правоаголници се нацртани на подот. Триаголник со основа 10 *cm* и висина 6 *cm* е нацртан врз нив, како на цртежот. Делот надвор од триаголникот е обоен со сиво. Колкава е плоштината на делот обоен во сиво?



A) 10 cm^2 B) $12\,cm^2$ C) 14 cm^2 D) 15 cm^2 E) 21 cm^2

Решение. **B).** Секој од правоаголниците нацртани на подот има должина $2\,cm$ и ширина $1{,}5\,cm^2$. Плоштината на еден таков правоаголник е $2\cdot 1{,}5=3\,cm^2$, од каде добиваме дека плоштината на фигурата составена од правоаголниците е $14\cdot 3=42\,cm^2$. Плоштината на триаголникот е $\frac{10\cdot 6}{2}=30\,cm^2$ см². Значи, плоштината на делот обоен во сиво е $42-30=12\,cm^2$.

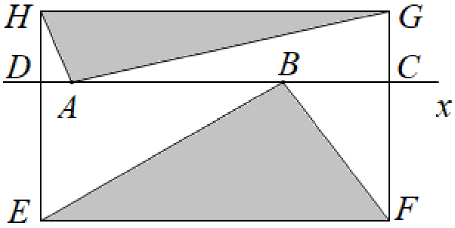
26. На цртежот десно се дадени правоаголник, права x која е паралелна на страната на правоаголникот и точки A и B од правата x. Збирот на плоштините на обоените делови



на правоаголникот е еднаков на $10\,cm^2$. Колкава е плоштината на правоаголникот?

A) $18\,cm^2$ B) $20\,cm^2$ C) $22\,cm^2$ D) $24\,cm^2$

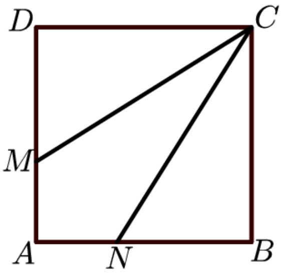
E) Зависи од положбата на точките A и B



Решение. **B).** При ознаки како на цртеот десно правоаголник $EFCD$ и EFB триаголникот имаат заедничка основа EF и еднакви висини, а исто важи и за правоаголникот $GHDC$ и триаголникот GHA. Затоа важи

$$P_{EFGH}=P_{AFCD}+P_{GHDC}=2P_{EFB}+2P_{GHA}$$
$$=2(P_{EFB}+P_{GHA})=2\cdot 10=20\,cm^2.$$

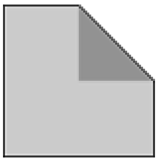
27. Должината на страната на квадратот $ABCD$ е еднаква на 3 cm. Точките M и N припаѓаат на страните AD и AB, соодветно, и се такви што отсечките CM и CN го делат квадратот на три делови со еднакви плоштини. Колкава е должината на отсечката DM?



A) 0,5 cm B) 1 cm C) 1,5 cm D) 2 cm E) 2,5 cm

Решение. **D).** Плоштината на квадратот е еднаква на $3^2=9\,cm^2$. Значи, плоштината на триаголникот CDM е еднаква на $\frac{1}{3}\cdot 9=3\,cm^2$. Според тоа, $\frac{\overline{CD}\cdot\overline{DM}}{2}=3$, од каде следува $\frac{3\overline{DM}}{2}=3$, т.е. $\overline{DM}=2\,cm$.

28. Едно ќоше од квадрат е свиткано кон центарот на квадратот и така е формиран петаголник, како на цртежот

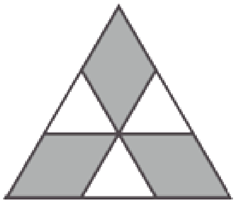


десно. Плоштината на петаголникот и плоштината на квадратот се последователни природни броеви. Колку е плоштината на квадратот?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

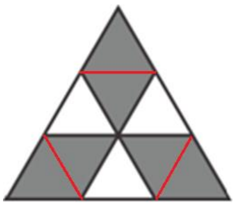
Решение. **C).** Плоштината на преклопениот триаголник е еднаква на осмината од плоштината на квадратот. Плоштината на триаголникот е a^2, а плоштината на петаголникот е $a^2 - \frac{1}{8}a^2 = \frac{7}{8}a^2$. За да двете плоштини се последователни природни броеви потребно е $8|a^2$. Значи, плоштината на квадратот е $a^2 = 8k$ и плоштината на петаголникот е $\frac{7}{8}a^2 = 7k$. Броевите $8k$ и $7k$ се последователни природни броеви ако $k = 1$. Значи, плоштината на квадратот е 8.

29. На цртежот е даден рамностран триаголник чија плоштина е 9. Со три прави паралелни со неговите страни секоја страна е поделена на три еднакви делови. Колку е плоштината на исенчениот дел од триаголникот?

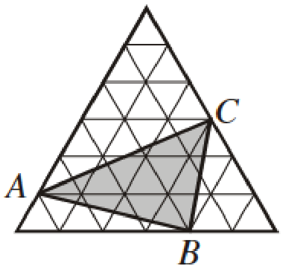


A) 12 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. **D).** Ако секој од трите ромба го поделиме на два триаголника како на цртежот десно, гледаме дека големиот триаголник е составен од 9 складни рамнострани триаголници. Плоштината на еден од овие триаголници е 1. Значи плоштината на сивиот дел е 6.



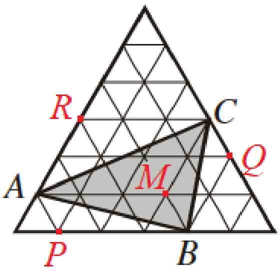
30. Рамностран триаголник е поделен на 36 рамнострани триаголници со плоштина $1cm^2$. Колку е плоштината на триаголникот ABC



прикажан на цртежот десно?

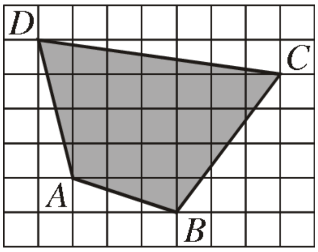
A) $11\,cm^2$ B) $12\,cm^2$ C) $15\,cm^2$ D) $9\,cm^2$ E) $10\,cm^2$

Решение. **A).** Нека M,P,Q,R се точки како на цртежот десно. Тогаш



$$\begin{aligned}P_{ABC}&=P_{ABM}+P_{BCM}+P_{CAM}\\&=\frac{1}{2}P_{APBM}+\frac{1}{2}P_{BQCM}+\frac{1}{2}P_{CRAM}\\&=\frac{6}{2}+\frac{4}{2}+\frac{12}{2}=11\,cm^2.\end{aligned}$$

31. На цртежот е прикажан исенчен четириаголник нацртан во квадратна мрежа. Секое квадратче од квадратната мрежа има страна $2\,cm$. Колку е плоштината на четириаголникот $ABCD$?



A) $96\,cm^2$ B) $84\,cm^2$ C) $76\,cm^2$ D) $88\,cm^2$ E) $104\,cm^2$

Решение. **B).** Четириаголникот $ABCD$ се наоѓа во правоаголник со должини на страни $5\cdot 2=10\,cm$ и $7\cdot 2=14\,cm$. Плоштината на овој правоаголник е $10\cdot 14=140\,cm^2$. Од оваа плоштина треба да ги одземеме плоштините на четири триаголници и еден квадрат и тие плоштини се:

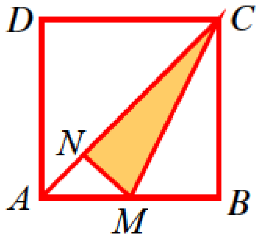
$$P_1=\frac{6\cdot 2}{2}=6\,cm^2,\ P_2=\frac{6\cdot 8}{2}=24\,cm^2,\ P_3=\frac{14\cdot 2}{2}=14\,cm^2,$$

$$P_4=\frac{8\cdot 2}{2}=8\,cm^2 \text{ и } P_5=4\,cm^2.$$

Значи, плоштината на четириаголни-кот $ABCD$ е еднаква на

$$140-(6+24+14+8+4)=84\,cm^2.$$

32. Да се определи количникот од плоштините на триаголникот MNC и квадратот $ABCD$ ако M е

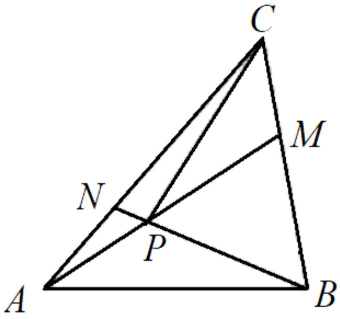


средна точка на страната AB, а MN е нормална на AC?

A) $1:6$ B) $1:5$ C) $7:36$ D) $3:16$ E) $7:40$

Решение. **D).** Триаголникот MNA е рамнокрак правоаголен, а должините на неговите катети се четвртина од дијагоналата на квадратот. Според тоа, ако a е должината на страната на квадратот, тогаш $\overline{MN}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$, $\overline{NC}=a\sqrt{2}-\frac{a\sqrt{2}}{4}=\frac{3a\sqrt{2}}{4}$. Плоштината на триаголникот MNC е еднаква на $P_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{3a\sqrt{2}}{4}=\frac{6a^2}{32}=\frac{3a^2}{16}$. Бидејќи плоштината на квадратот е $P_2=a^2$, имаме $\frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{3a^2}{16}}{a^2}=\frac{3}{16}$, т.е. бараниот однос е $3:16$.

33. Даден е триаголник ABC и точки M и N соодветно на страните BC и AC такви што $\overline{CM}=\frac{1}{3}\overline{BC}$ и $2\overline{AN}=\overline{NC}$. Отсечките AM и BN се сечат во точката P, а плоштината на триаголникот ACP е $2\,cm^2$. Колку е плоштината на триаголникот ABC?

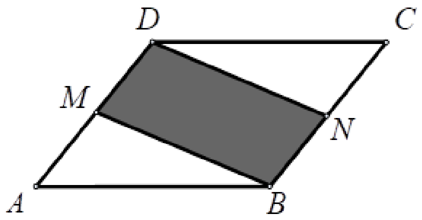


A) $14\,cm^2$ B) $16\,cm^2$ C) $20\,cm^2$ D) $24\,cm^2$ E) $26\,cm^2$

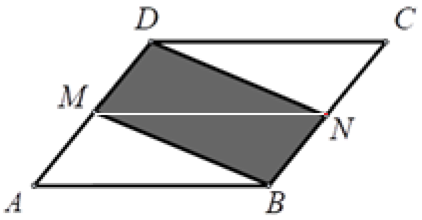
Решение. **A).** Со S да ја означиме плоштината на триаголникот ABC. Од $\overline{CM}=\frac{1}{3}\overline{BC}$ следува $P_{MCP}=\frac{1}{3}S-2$ и $\overline{BM}=2\overline{MC}$, па затоа $P_{BMP}=2P_{MCP}$. Според тоа, $P_{BCP}=P_{BMP}+P_{MCP}=3P_{MCP}=S-6$. Но, $P_{ABP}+2+P_{BPC}=S$, од каде добиваме $P_{ABP}+2+S-6=S$, односно $P_{ABP}=4\,cm^2$. Понатаму, од $2\overline{AN}=\overline{NC}$ следува $\overline{AN}=\frac{1}{3}\overline{AC}$, па затоа $P_{ANB}=\frac{1}{3}S$ и $P_{ANP}=\frac{2}{3}$.

Конечно, $\frac{1}{3}S = P_{ANB} = P_{ANP} + P_{ABP} = \frac{2}{3} + 4$, односно $S = 14\,cm^2$.

34. Плоштината на паралелограмот $ABCD$ е 10. Точките M и N се средини на страните AD и BC, соодветно. Колку е плоштината на четириаголникот $MBND$?



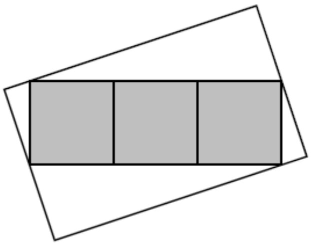
A) 0,5 B) 5 C) 2,5 D) 7,5 E) 10



Решение. B). Отсечката MN поврзува средни на две спротивни страни на паралелограмот $ABCD$, па затоа таа е паралелна со другите две страни. Тоа значи дека четириаголниците $ABNM$ и $MNCD$ се складни паралелограми, чии дијагонали DN и MB ги делат на по два складни триаголници. Затоа

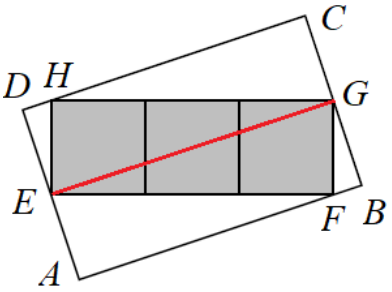
$$P_{MBND} = \frac{1}{2}P_{ABNM} + \frac{1}{2}P_{MNCD} = \frac{1}{2}P_{ABCD} = 5.$$

35. Правоаголник составен од три сиви квадрати, секој со плоштина $25\,cm^2$, се наоѓа во бел правоаголник како што е прикажано на цртежот десно. Две темиња на сивиот правоаголник се средини на пократките страни на белиот правоаголник, а другите две темиња припаѓаат на другите две страни на белиот правоаголник. Колку е плоштината на белиот правоаголник изразена во сантиметри квадратни?



A) 125 B) 136 C) 149 D) 150 E) 172

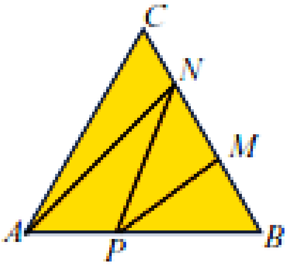
Решение. D). При ознаки на цртежот десно точките E и G се средини на страните BC и AD на правоаголникот $ABCD$, па затоа



четириаголниците $ABGE$ и $EGCD$ се правоаголници. Триаголникот EGH има иста основа и соодветна висина со правоаголникот $EGCD$, па затоа $P_{EGCD} = 2P_{EGH}$. Аналогно, $P_{EGAB} = 2P_{EGF}$. Конечно,

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{EGCD} + P_{EGBA} = 2P_{EGH} + 2P_{EGF} \\ &= 2(P_{EGH} + P_{EGF}) = 2P_{EFGH} \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 25\,cm^2 = 150\,cm^2. \end{aligned}$$

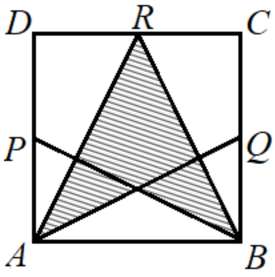
36. Рамностран триаголник ABC со должина на страна $120\,cm$ е поделен на четири триаголници со еднакви плоштини (цртеж десно). Определи ја должината на отсечката MN во сантиметри.



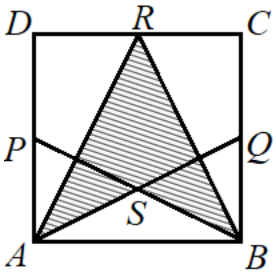
A) 30 B) 40 C) 45 D) 48 E) 50

Решение. C). Траиголниците BMP и MNP имаат еднакви плоштини и заедничка висина повлечена од темето P, па затоа важи $\overline{BM} = \overline{MN} = x$ и притоа важи $\overline{CN} = 120 - 2x$. Висината на триаголникот ANC е еднаква на висината на рамностраниот триаголник, т.е. на $\frac{120\sqrt{3}}{2}$, па затоа плоштината на овој триаголник е еднаква на $\frac{1}{2} \cdot \frac{120\sqrt{3}}{2}(120 - 2x) = \frac{1}{4}\frac{120^2\sqrt{3}}{4}$, од каде добиваме $x = 45$.

37. На цртежот десно е даден квадрат $ABCD$, во кој P, Q и R се средини на страните DA, BC и CD, соодветно. Колкав дел од квадратот $ABCD$ е обоен со сива боја?



A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{7}{16}$ E) $\frac{3}{8}$

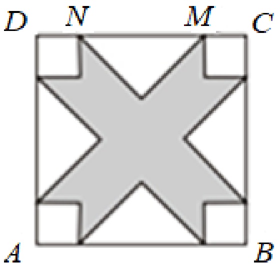


Решение. **E).** Нека квадратот $ABCD$ има должина на страна a. Плоштината на триаголникот ABR е $P_{\Delta ABR}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a=\frac{a^2}{2}$. Од условот на задачата, имаме дека четириаголникот $ABPQ$ е правоаголник, па неговите дијагонали се преполовуваат. Нека S е пресечната точка на дијагоналите на $ABPQ$. Значи, $P_{\Delta ABS}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot \frac{a}{4}=\frac{a^2}{8}$

Конечно плоштината на делот обоен во сиво е

$$P_{ASBR}=P_{\Delta ABR}-P_{\Delta ABS}=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{8}=\frac{3a^2}{8}=\frac{3}{8}P_{ABCD}\cdot$$

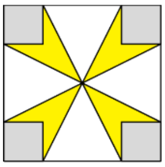
38. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна $10\,cm$ (цртеж десно). Растојанието меѓу точките M и N е еднакво на $6\,cm$. Четирите бели триаголници се рамнокраки правоаголни триаголници и се еднакви меу себе. Меѓу себе се еднакви и четирите бели квадрати. Колкава е плоштината на сивиот дел од квадратот?



A) $42\,cm^2$ B) $46\,cm^2$ C) $48\,cm^2$ D) $52\,cm^2$ E) $58\,cm^2$

Решение. **C).** Четирите бели триаголници формираат квадрат со должина на страна $6\,cm$. Четирите бели квадрати формираат квадрат со должина на страна $10-6=4\,cm$. Плоштината на сивиот дел ќе ја добиеме ако од плоштината на квадратот со страна $10\,cm$ ги одземеме плоштините на квадратите со страни $6\,cm$ и $4\,cm$. Значи, бараната плоштина е $P=10^2-6^2-4^2=48\,cm^2$.

39. Плоштината на големиот квадрат прикажан на цртежот десно е 16 cm^2, а плоштината на секој од малите квадрати е $1\,cm^2$. Колкава е плоштината на жолтиот цвет?



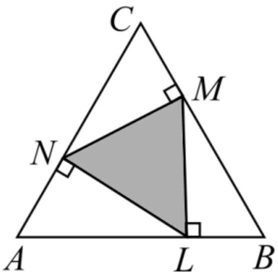
A) $3\,cm^2$ B) $\frac{7}{2}cm^2$ C) 4 cm^2 D) $\frac{11}{2}cm^2$ E) 6 cm^2

Решение. C). *Прв начин.* Должината на страната на големиот квадрат е $4\,cm$, а должината на страната на малиот квадрат е $1\,cm$. Според тоа, секој од четирите бели триаголници има основа која лежи на страната на големиот квадрат со должина $2\,cm$ и соодветна висина со должина $2\,cm$. Значи, плоштината на жолтиот цвет е

$$P = 16 - 4\cdot 1 - 4\cdot\frac{2\cdot 2}{2} = 4\,cm^2.$$

Втор начин. Должината на страната на големиот квадрат е $4\,cm$, а должината на страната на малиот квадрат е $1\,cm$. Значи, жолтиот цвет е составен од 8 складни триаголници со основа која се совпаѓа со страната на мал квадрат, па има должина $1\,cm$ и висина $1\,cm$. Значи, плоштината на жолтиот цвет е $P = 8\cdot\frac{1\cdot 1}{2} = 4\,cm^2$.

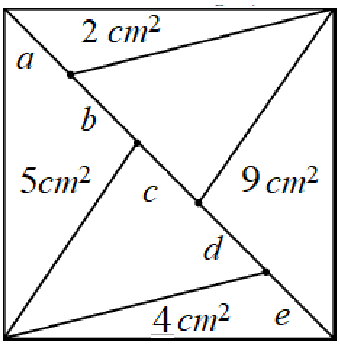
40. Точките *N*, *M* и *L* од страните на рамностраниот триаголник *ABC*, се такви што $NM \perp BC$, $ML \perp AB$ и $LN \perp AC$ (види цртеж). Плоштината на триаголникот *ABC* е 36. Колкава е плоштината на триаголникот *LMN*?



A) 9 B) 12 C) 15 D) 16 E) 18

Решение. B). Триаголникот *ABC* е рамностран, па затоа $\measuredangle NAL = 60^\circ$, што значи $\measuredangle ALN = 30^\circ$. Според тоа, $\measuredangle NLM = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$. Аналогно се докажува дека $\measuredangle LMN = \measuredangle MNL = 60^\circ$, што значи дека триаголникот LMN е рамностран. Понатаму, од $\measuredangle NAL = 60^\circ$ и $\measuredangle ALN = 30^\circ$ следува дека триаголникот ALN е половина од рамностран триаголник, а истото важи и за триаголниците BML и CNM. Но, $\overline{LM} = \overline{MN} = \overline{NL}$, па затоа триаголниците ALN, BML и CNM се складни со катети x и $2x$. Јасно, $x + 2x = a$, т.е. $x = \frac{a}{3}$ каде a е должината на страната на дадениот триаголник. Значи, должината на страната на триаголникот LMN е $\sqrt{(2x)^2 - x^2} = x\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, па затоа неговата плоштина е $\frac{1}{4}(\frac{a\sqrt{3}}{3})^2\sqrt{3} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3} \cdot 36 = 12$.

41. Квадрат со плоштина $30\,cm^2$ со една негова дијагонала е поделен на два дела, а потоа на триаголници, како што е прикажано на цртежот. Плоштината на некои од триаголниците е дадена на цртежот. Кој дел од дијагоналата е најдолг?



A) a B) b C) c D) d E) e

Решение. **D).** Сите триаголници имаат еднакви висини h, а тоа е половина од дијагоналата на квадратот. Понатаму, плоштината на половина од квадратот е еднаква на $15\,cm^2$, па затоа точни се равенствата

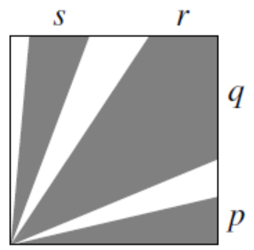
$$ah = 4, (a+b)h = 10, (b+c)h = 8, (c+d)h = 12, (e+d)h = 18, eh = 8,$$

од каде добиваме

$$ah = 4, bh = 6, ch = 2, dh = 10, eh = 8.$$

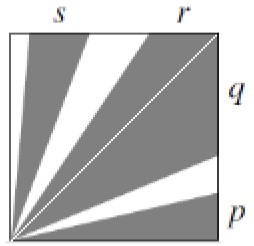
Значи, $ch < ah < bh < eh < dh$ и како $h > 0$ добиваме $c < a < b < e < d$.

42. Квадрат со плоштина 36 има сиви површини како на цртежот десно. Збирот на плоштините на сивите површини е 27. Колку изнесува $p+q+r+s$?



A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

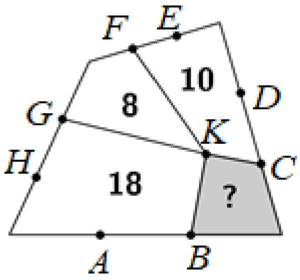
Решение. **D).** Должината на страната на квадратот е $a=\sqrt{36}=6$. Понатаму, за плоштината на обоениот дел од квадратот добиваме



$$27=\frac{as}{2}+\frac{ar}{2}+\frac{aq}{2}+\frac{ap}{2}=3s+3r+3q+3p \\ =3(p+q+r+s)$$,

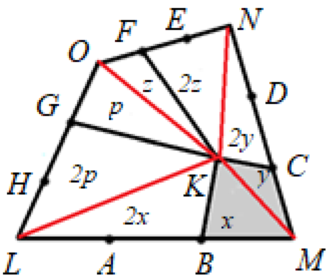
од каде добиваме $p+q+r+s=9$.

43. На цртежот десно е прикажан четириаголник кој е поделен на четири помали четириаголници со заедничко теме K. Другите обележани точки ги делат страните на големиот четириаголник на три еднакви делови. Запишаните броеви ги означуваат плошините на соодветните мали четириаголници. Колкава е плоштината на засенчениот четириаголник?

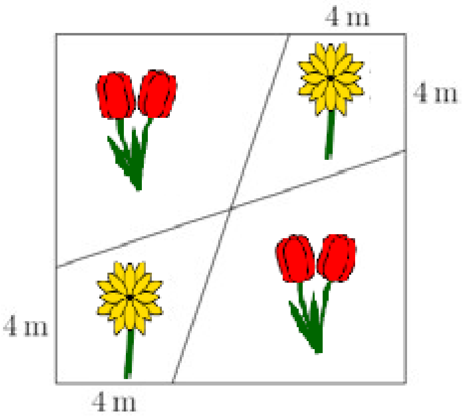


A) 4 B) 5 C) 6 D) 6,5 E) 7

Решение. **C).** Четириаголникот да го означиме со $LMNO$ и неговите темиња да ги поврзиме со точката K. Така добиваме осум триаголници такви што по два имаат основи кои се однесуваат 2:1 и имаат заеднички висини. Според тоа, нивните плоштини се: $2x$ и x, $2y$ и y, $2z$ и z, $2p$ и p (цртеж десно). Според тоа, $2x+2y+2z+2p=10+18$, па затоа $x+y+z+p=14$. Конечно, $x+y=14-(z+p)=14-8=6$.

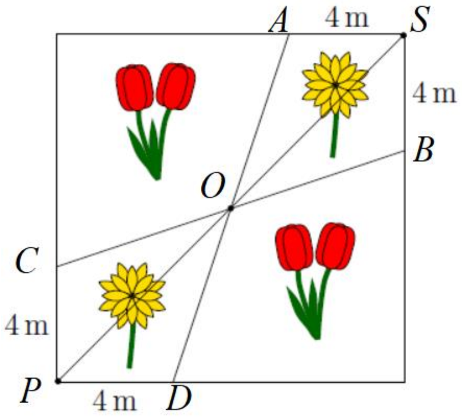


44. Градинарката Катица засадила лалиња и маргаритки во квадратна градина со должина на страна 12 m, при што цвеќето го распоредила како на цртежот десно. Колкава е вкупната плоштина на делот од градината во кој Катица засадила маргаритки?



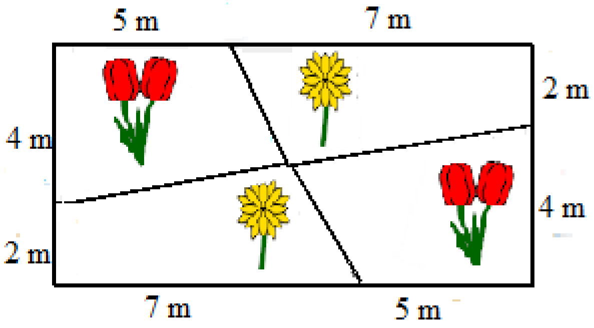
A) $48\,m^2$ B) $46\,m^2$ C) $44\,m^2$ D) $40\,m^2$ E) $36\,m^2$

Решение. **А).** Збирот на висините x и y на триаголниците PCO и BSO повлечени од темето O е еднаков на 12 m, а исто важи и за збирот на висините u и v на триаголниците PDO и SAO повлечени од темето O. Затоа бараната плоштина е еднаква на



$$P=\frac{4x}{2}+\frac{4y}{2}+\frac{4u}{2}+\frac{4v}{2}=2(x+y)+2(u+v)=2\cdot12+2\cdot12=48\,m^2.$$

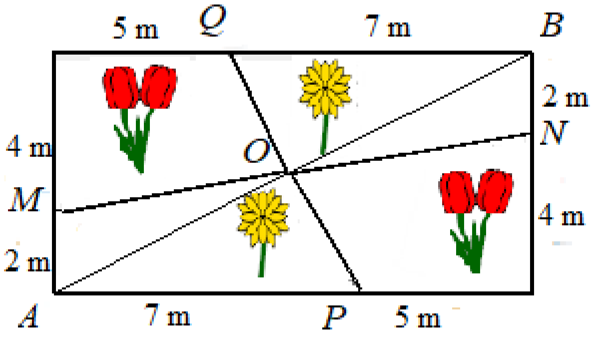
45. Градинарката Катица засадила лалиња и маргаритки во правоаголна градина со должина на страни 6 m и 12 m, при што цвеќето го распоредила како на цртежот десно. Колкава е вкупната плоштина на делот од градината во кој Катица засадила маргаритки?



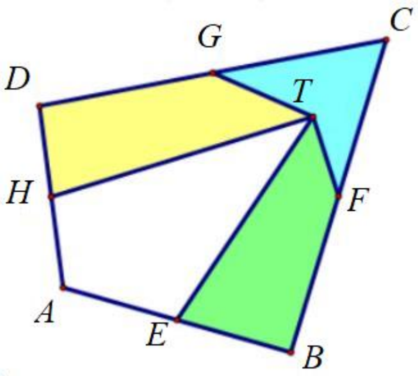
A) $28\,m^2$ B) $30\,m^2$ C) $33\,m^2$ D) $36\,m^2$ E) $39\,m^2$

Решение. С). При ознаки како на цртежот десно, на потполно ист начин како и во претходната задача се добива дека бараната плоштина е:

$P = \frac{2 \cdot 12}{2} + \frac{7 \cdot 6}{2} = 12 + 21 = 33\,m^2$.



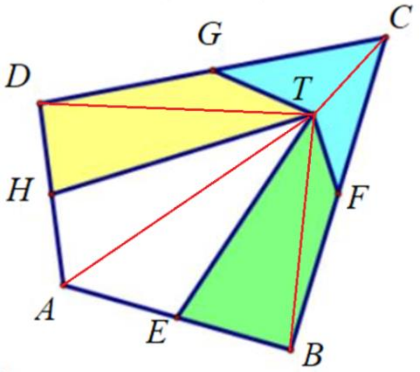
46. Точките E, F, G, H се средини на страните AB, BC, CD, DA на четириаголникот $ABCD$. Нека точката T е таква што плоштината на четириаголникот $CGTF$ е $12\,cm^2$, а плоштините на четириаголниците $EBFT$ и $GDHT$ се по $24\,cm^2$. Определи ја плоштината на четириаголникот $AETH$.



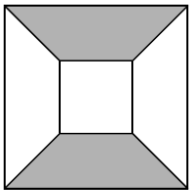
A) $30\,cm^2$ B) $32\,cm^2$ C) $34\,cm^2$ D) $36\,cm^2$ E) $38\,cm^2$

Решение. D). Ако точката T ја поврземе со темињата на четириаголникот, тогаш секои два триаголника кои имаат страна на страните на четириаголникот имаат еднакви основи и соодветни висини, што значи имаат еднакви плоштини. Затоа важи

$$P_{AETH} + P_{TFCG} = P_{EBFT} + P_{HTGD},$$
$$P_{AETH} + 12 = 24 + 24,$$
$$P_{AETH} = 36\,cm^2.$$



47. Во квадрат со страна $10\,cm$ е поставен квадрат со страна $4\,cm$, чии страни се паралелни на страните на

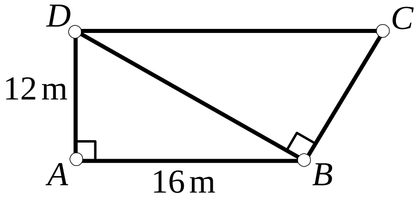


големиот квадрат (цртеж десно). Колку проценти од плоштината на големиот квадрат е обоена?

A) 25% B) 30% C) 40% D) 42% E) 45%

Решение. **D).** Плоштината на сивиот дел е еднаква на збирот на плоштините на два трапези со основи $10\,cm$ и $4\,cm$. Збирот на висините на овие два трапези е $h+h'=10-4=6\,cm$, па затоа збирот на нивните плоштини е $\frac{10+4}{2}h+\frac{10+4}{2}h'=7(h+h')=7\cdot 6=42\,cm^2$. Плоштината на големиот квадрат е $10\cdot 10=100\,cm^2$, што значи дека обоениот дел зафаќа 42% од големиот квадрат.

48. Еден трапез е направен од два слични триаголници како што е прикажано на цртежот. Колку е плоштината на трапезот?



A) 120 cm B) 192 cm C) 240 cm D) 246 cm E) 296 cm

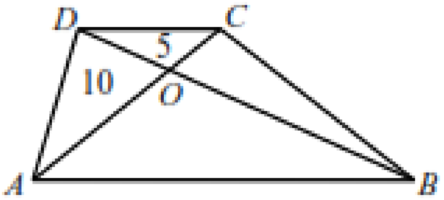
Решение. Хипотенузата на правоаголниот триаголник со катети $12\,cm$ и $16\,cm$ е дијагонала на трапезот, катета на другиот правоаголен триаголник и нејзината должина е еднаква на

$$l=\sqrt{12^2+16^2}=\sqrt{144+256}=20\,cm.$$

Од сличноста на правоаголните триаголници, имаме $12:16=\overline{BC}:\overline{BD}$ што значи $\overline{BD}=\frac{20\cdot 12}{16}=15\,cm$. Сега плоштината на трапезот е

$$P=\frac{12\cdot 16}{2}+\frac{20\cdot 15}{2}=12\cdot 8+10\cdot 15=96+150=246\,cm^2.$$

49. Даден е трапез $ABCD$ во кој пресечната точка на дијагоналите е означена со O. Определи ја плоштината на



трапезот ако плоштините на триаголниците AOD и COD се 10 и 5 соодветно.

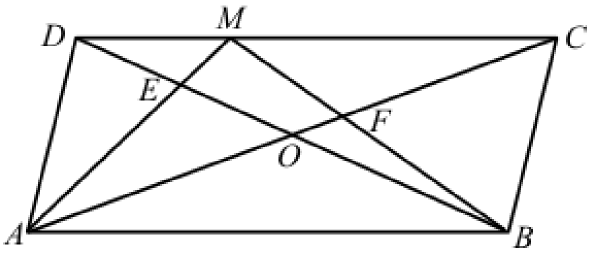
A) 60 B) 45 C) 40 D) 35 E) 30

Решение. **B).** Јасно, плоштините на триаголниците ACD и BCD се еднакви, па затоа плоштината на триаголникот BCO е еднаква на 10. Понатаму, од $P_{AOD}=10$ и $P_{COD}=5$, бидејќи триаголниците AOD и COD имаат заедничка висина повлечена од темето D следува $\overline{AO}:\overline{CO}=10:5=2$.

Но, триаголниците ABO и CDO имаат еднакви агли (Зошто?), па затоа тие се слични со коефициент на сличност 2. Од оваа сличност следува $P_{ABO}=2^2 P_{CDO}=20$. Конечно,

$$P_{ABCD}=P_{ABO}+P_{BCO}+P_{CDO}+P_{DAO}=20+10+5+10=45.$$

50. На цртежот десно е даден паралелограм $ABCD$ со плоштина S. Пресечната точка на дијагоналите на паралелограмот е O. На отсечката DC е означена точката M. Пресечната точка на AM и BD е E, пресечната точка на BM и AC е F. Збирот на плоштините на триаголниците AED и BFC е $\frac{1}{3}S$. Колкава е плоштината на четириаголникот $EOFM$, изразена преку S?



A) $\frac{1}{6}S$ B) $\frac{1}{8}S$ C) $\frac{1}{10}S$ D) $\frac{1}{12}S$ E) $\frac{1}{14}S$

Решение. **D).** Паралелограмот $ABCD$ и триаголникот ABM имаат исти основи и исти висини, па затоа $P_{ABM}=\frac{1}{2}S$. Понатаму, паралелограмот $ABCD$ и триаголникот COD имаат исти основи и висината на триаголникот е половина од висината на паралелограмот, па затоа $P_{COD} = \frac{1}{4}S$. Според тоа,

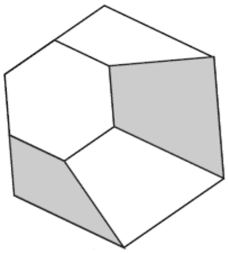
$$P_{ABCOD} = P_{ABCD} - P_{COD} = S - \frac{1}{4}S = \frac{3}{4}S .$$

Од друга страна

$$P_{ABCOD} = P_{AED} + P_{BFC} + P_{EOFBA} = \frac{1}{3}S + (P_{ABM} - P_{EOFM})$$
$$= \frac{1}{3}S + \frac{1}{2}S - P_{EOFM} = \frac{5}{2}S - P_{EOFM},$$

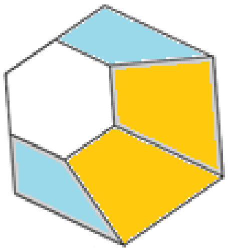
па затоа $\frac{3}{4}S = \frac{5}{6}S - P_{EOFM}$, т.е. $P_{EOFM} = \frac{1}{12}S$.

51. Правилен шестаголник е поделен на четири четириаголници и еден помал правилен шестаголник (цртеж десно). Плоштините на осенчениот дел и малиот четириаголник се однесуваат како 4:3. Колку е односот на плоштините на малиот и големиот шестаголник?



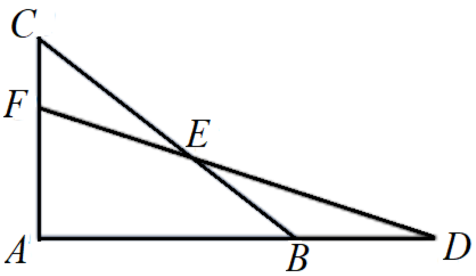
A) 3:11 B) 1:3 C) 2:3 D) 3:4 E) 3:5

Решение. A). Бидејќи шестаголникот е правилен, имаме два пара складни четириаголници, кои на цртежот десно се обоени со иста боја. Според тоа, осенчениот дел (сивата површина) од условот на задаачата е еднаков на половина од вкупната површина на овие четириаголници. Значи, $P_o = \frac{P_g - P_m}{2}$, од каде добиваме



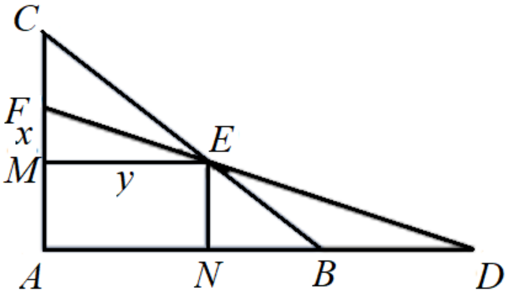
$\frac{P_o}{P_m} = \frac{\frac{P_g}{P_m} - 1}{2}$, па затоа $\frac{4}{3} = \frac{\frac{P_g}{P_m} - 1}{2}$, односно $\frac{8}{3} = \frac{P_g}{P_m} - 1$. Значи, $\frac{P_g}{P_m} = \frac{11}{3}$, т.е. $\frac{P_m}{P_g} = \frac{3}{11}$.

52. На хипотенузата BC на правоаголниот триаголник ABC земена е точка E, а на катетата AC земена е точка F. Правата FE ја сече хипотенузата AB во точката D. Да се определи во сантиметри квадратни плоштината на четириаголникот $ABEF$ ако $\overline{CF}=2\,cm, \overline{FA}=6\,cm, \overline{AB}=8\,cm$ и $\overline{BD}=4\,cm$.



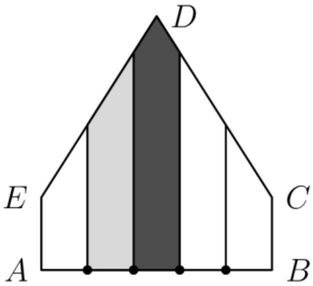
A) 30 B) 28 C) 32 D) 26 E) 34

Решение. **B).** Нека нормалите повлечени од точката E ги сечат катетите на триаголникот ABC во точките M и N (цртеж десно). Да ставиме $\overline{FM}=x$ и $\overline{ME}=y$.



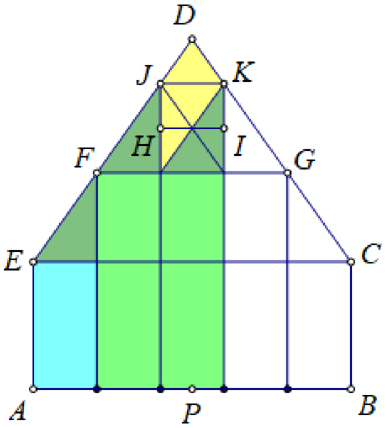
Триаголниците FME и END се слични и нека коефициентот на сличност е k. Тогаш $\overline{EN}=k\overline{FM}=kx$ и $\overline{ND}=k\overline{ME}=ky$. Понатаму, триаголникот ABC е рамнокрак правоаголен, па затоа $\overline{ME}+\overline{EN}=8$, односно $y+kx=8$. Од условот на задачата следува дека $x+kx=6$ и $y+ky=12$. Од последните две равенства следува $\frac{y+ky}{x+kx}=\frac{12}{6}$, односно $y=2x$. Според тоа, $2x+kx=8$ и $x+kx=6$, па затоа $x=2$. Сега $y=4$, па затоа $P_{ABEF}=P_{ABC}-P_{CFF}=\frac{8\cdot8}{2}-\frac{2\cdot4}{2}=28\,cm^2$.

53. Во петаголникот $ABCDE$ важи $\measuredangle A=\measuredangle B=90^\circ$, $\overline{AE}=\overline{BC}$ и $\overline{ED}=\overline{DC}$. Четири точки ја делат отсечката AB на пет еднакви делови. Во овие точки се нацртани нормачи на AB, како на цфртежот десно. Црниот дел на петаголникот



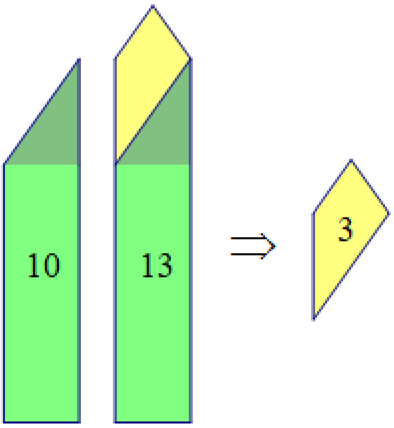
има плоштина 13cm^2, а сивиот дел има плоштина 10cm^2. Колку е плоштината на дадениот петаголник изразена во cm^2.

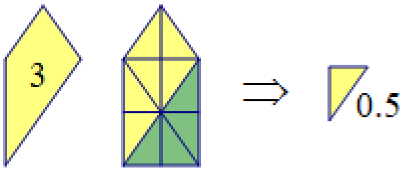
А) 45 В) 47 С) 49 D) 58 Е) 60

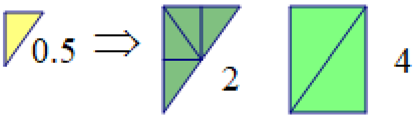


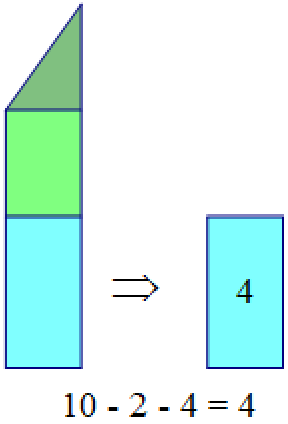
Решение. **А).** Бидејќи $\measuredangle A=\measuredangle B=90^\circ$ и $\overline{AE}=\overline{BC}$ четириаголникот $ABCE$ е правоаголник. Ако P е средината на отсечката AB, тогаш петаголникот $ABCDE$ е оносиметричен во однос на правата DP. Да ги нацртаме отсечките FG, HI и JK и да забележиме дека истите се паралелни на AB. Да ги разгледаме плоштините на добиените фигури на горниот цртеж.

Имаме:



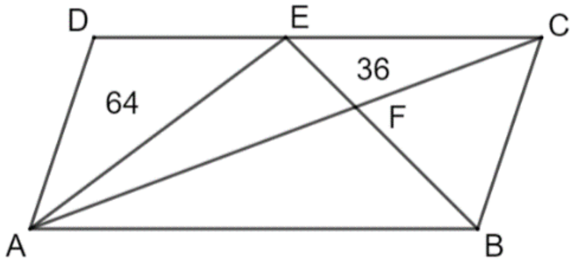






Конечно, плоштината на дадениот петаголник е еднаква на

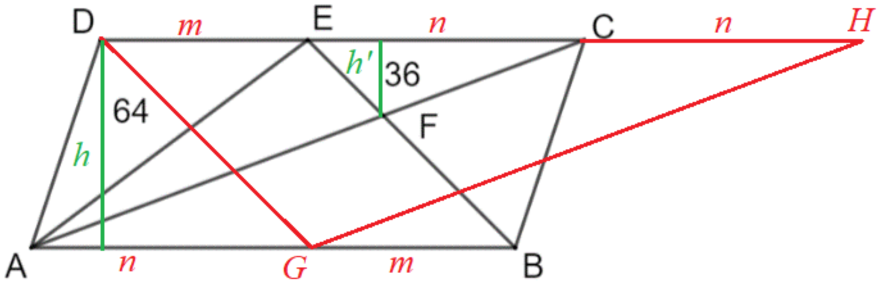
$$2\cdot(4+2)+2\cdot10+13=45\,cm^2.$$



54. Ако ги употребиш податоците дадени на цртежот десно, определи ја плоштината во квадратни сантиметри на паралелограмот $ABCD$, ако плоштините на триаголниците ADE и CEF се $64\,cm^2$ и $36\,cm^2$, соодветно.

A) 300 B) 280 C) 340 D) 360 E) 320

Решение. **E).** Да означиме $\overline{DE}=m, \overline{EC}=n$ и нека h и h' се соодветно висините на триаголникот ADE (паралелограмот $ABCD$) и триаголникот CEF, види цртеж. Низ точката D повлекуваме пра-ва паралелна на BE која AB ја сече во точката G, а потоа низ G повлекуваме права паралелна на AC која правата DC ја сече во точката H. Тогаш четириаголниците $BEDG$ и $AGHC$ се паралелограми, па затоа важи $\overline{DH}=m+2n$.



Понатаму, триаголниците CEF и HDG имаат паралелни страни, па затоа тие се слични. Од оваа сличност последователно добиваме

$$\frac{m+2n}{h}=\frac{n}{h'},$$
$$(m+2n)h'=nh,$$
$$nh'=nh-mh'-nh',$$
$$mh+nh'=mh+nh-mh'-nh',$$

$$mh+nh'=(m+n)(h-h'),$$
$$P_{ABF}=P_{EDA}+P_{EFC},$$
$$P_{ABF}=100\,cm^2.$$

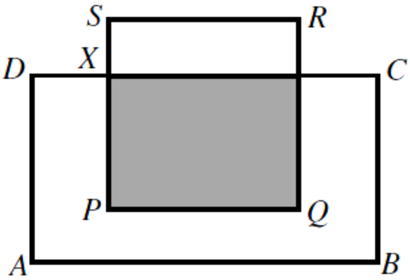
Сега, ако искористиме дека

$$P_{AEF}=P_{BCF}=\sqrt{P_{ABF}\cdot P_{ECF}}=\sqrt{100\cdot 36}=60\,cm^2,$$

добиваме

$$P_{ABCD}=P_{ABF}+P_{BCF}+P_{CEF}+P_{AEF}+P_{ADE}$$
$$=100+60+36+60+64=320\,cm^2.$$

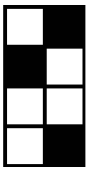
55. На цртежот десно се дадени правоаголник $ABCD$ со димензии $10\,cm$ и $6\,cm$ и квадрат $PQRS$ со страна $6\,cm$. Плоштината на сивиот дел е половина од плоштината на правоаголникот $ABCD$. Определи ја должината на отсечката SX, каде X е пресекот на SP и CD.

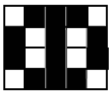


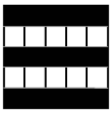
A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 4

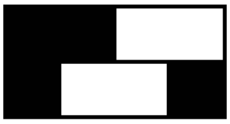
Решение. **A).** Нека $\overline{SX}=x$. Тогаш $6(6-x)=30$, од каде добиваме $6-x=5$. Значи, $x=1$, т.е. $\overline{SX}=1\,cm$.

56. Во едно училиште за пирати секој ученик треба да сошие знаме, при што користи црна и бела свила. Црниот дел од знамето треба да е три петтини од целото знаме. Колку од прикажаните знамиња го исполнуваат овој услов?







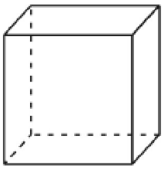


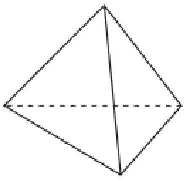
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. **C).** Првото знаме има 3 црни од вкупно 8 квадрати, т.е. има $\frac{3}{8}$ црн дел. Второто знаме во секој ред има по 3 црни од 5 квадрати, што значи дека има $\frac{3}{5}$ црн дел. Третото знаме има 2 црни од вкупно 3 квадрати, што значи дека има $\frac{2}{3}$ црн дел. Четвртото знаме има три црни од вкупно пет реда, па затоа има $\frac{3}{5}$ црн дел. Петтото знаме има $\frac{1}{2}$ црн дел.

6. СТЕРЕОМЕТРИЈА

1. Илина си игра со коцки и тетраедри. Таа има 5 коцки и 3 тетраедри. Колку ѕидови заедно имаат коцките и тетраедрите на Илина?



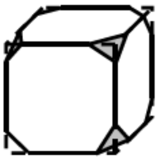


A) 42 B) 48 C) 50 D) 52 E) 56

Решение. A). Една коцка има 6 ѕидови, а еден тетраедар има 4 ѕидови. Пет коцки и три тетраедри заедно имаат

$$5\cdot 6+3\cdot 4=30+12=42 \text{ ѕидови.}$$

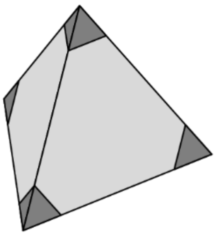
2. Сите ќошиња на коцката се отсечени како што е прикажано на цртежот десно. Колку рабови има добиеното тело?



A) 26 B) 30 C) 36 D) 40 E) друг одговор

Решение. C). Со сечењето на секој ќош бројот на рабовите се зголемува за 3. Коцката има 12 рабови и 8 ќоша, па затоа телото ќе има $12+8\cdot 3=36$ рабови.

3. Пабло од секое теме на правилен тетраедар отсекол по еден дел како што е прикажано на цртежот десно. Колку темиња има телото кое го добил?



A) 8 B) 9 C) 11 D) 12 E) 15

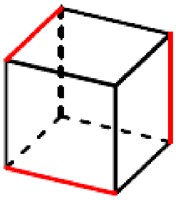
Решение. D). При сечењето наместо едно теме се добиваат три темиња. Значи, бројот на темињата се зголемува три пати, па така добиеното тело ќе има $3\cdot 4=12$ темиња.

4. Некои рабови коцки треба да се обојат во црвена боја така што на секој ѕид на коцката има најмалку еден црвен раб.

Кој е најмалиот можен број рабови кои треба да се обојат со црвена боја?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. **B).** Еден раб припаѓа на два ѕида, па ако има два обоени раба, тогаш тие се заеднички за најмногу 4 ѕидови. Значи, два раба не се доволни. На цртежот десно е покажано дека целта може да се постигне со три раба и тоа е најмалиот можен број рабови.

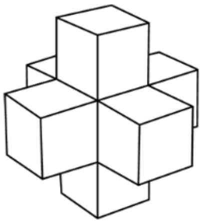


5. Пабло има 5 коцки. Тој ги наредил по големина една над друга, од најголема до најмала и направила кула. Рабовите на две соседни коцки секогаш се разликуваат за $2\ cm$. Најголемата коцка има раб колку што е висината на кулата направена од двете најмали коцки. Колку е висината на кулата изградена од сите пет коцки?

A) $6\ cm$ B) $14\ cm$ C) $22\ cm$ D) $44\ cm$ E) $50\ cm$

Решение. **E).** Ако најмалата коцка има раб x cm, тогаш втората по големина коцка има раб $x+2\ cm$, третата по големина има раб $x+4\ cm$, четвртата по големина коцка има раб $x+6\ cm$ а најголемата коцка има раб $x+8\ cm$. Од условите на задачата имаме $x+(x+2)=x+8$ од каде добиваме $x=6\ cm$. Според тоа, должините на рабовите на коцките се 6, 8, 10, 12 и 14 cm, па затоа висината на изградената кула е $6+8+10+12+14=50\ cm$.

6. Мето изградил фигура од седум единечни коцки како што е прикажано на цртежот десно. Уште колку коцки тој мора да употреби за да направи коцка со должина на раб 3.

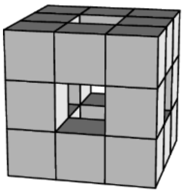


A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Решение. Е). *Прв начин.* Коцка со должина на раб 3 содржи $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ единечни коцки. Значи, Методи треба да употреби уште $27 - 7 = 20$ коцки.

Втор начин. За првиот ред се потребни 8 коцки, за вториот ред 4 коцки и за третиот ред 8 коцки. Значи, Методи треба да употреби уште $8 + 8 + 4 = 20$ коцки.

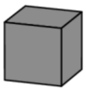
7. Коцка со димензии $3 \times 3 \times 3$ е направена од коцки со димензии $1 \times 1 \times 1$. Средните коцки кои се од напред и од назад, од лево и од десно, од врвот и дното на големата коцка и коцката во средината, се извадени, како што е прикажано на цртежот. Колку $1 \times 1 \times 1$ коцки се останати?

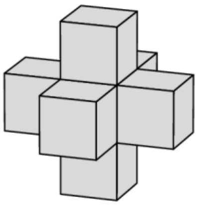


A) 15　B) 18　C) 20　D) 21　E) 22

Решение. C). Коцката $3 \times 3 \times 3$ има 27 коцки $1 \times 1 \times 1$. Коцката има 6 ѕида. Бидејќи од секој ѕид е извадена по 1 коцка и е извадена коцката која е во средината на коцката $3 \times 3 \times 3$, извадени се 7 коцки. Значи вкупно остануваат $27 - 7 = 20$ коцки.

8. Пабло има голем број идентични коцки од кои го направил телото прикажано на цртежот десно така што на секој ѕид на една коцка залепил уште по една коцка. Добиеното тело сака да го прошири на ист начин така што на секој ѕид ќе залепи по една нова коцка. Колку коцки дополнително ќе залепи Пабло?

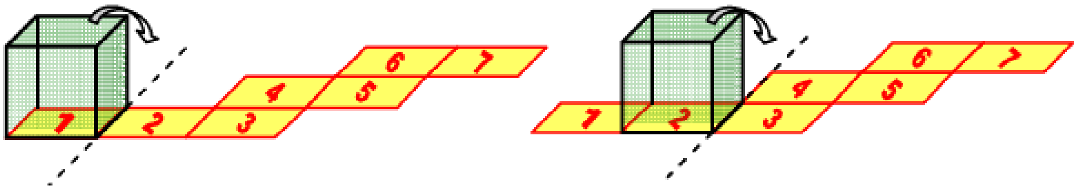




A) 18　B) 16　C) 14　D) 12　E) 10

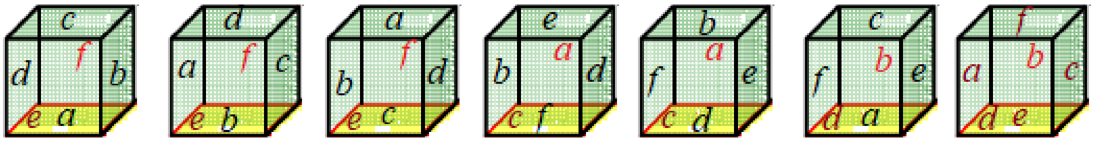
Решение. A). Пабло треба да залепи коцки на $6 \cdot 5 = 30$ ѕидови. Притоа една коцка може да се залепи на две коцки чии ѕидови имаат заеднички раб. Такви ѕидови се по 8 на секое нивно, што вкупно е $8 + 8 + 8 = 24$. Но, коцката која се лепи покрива 2 ѕида, па затоа ни се потребни $24:2=12$ коцки. Преостанатите коцки ги лепиме на оние ѕидови кои немаат заеднички рабови со другите коцки, а тоа се 6 ѕида. Значи, вкупно на Пабло му се потребни $12+6=18$ коцки.

9. Коцка тркаламе по рамнина, преку нејзините рабови. Нејзиниот долен ѕид ги зазема полињата 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 (види цртеж). Кои две полиња се заземени од ист ѕид на коцката?



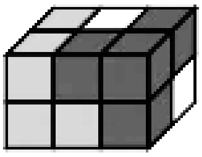
A) 1 и 7 B) 1 и 6 C) 1 и 6 D) 2 и 7 E) 2 и 6

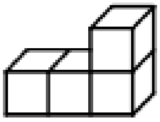
Решение. B). Во почетната положба предниот и задниот ѕид на коцката да ги означиме соодветно со e и f, а долниот, десниоот, горниот и левиот ѕид соодветно со a,b,c и d.

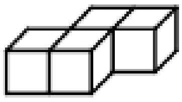


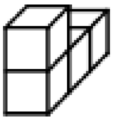
При тркалањето коцката последователно ќе биде на ѕидовите a,b,c,f,d,a и e (предните ѕидови се означени со кафеав, задните со црвени, а другите со црни букви). Значи ист ѕид ќе падне на полињата 1 и 6.

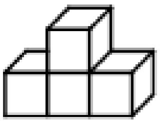
10. Еден квадар е направен од три дела. Секој од деловите е направен од четири коцки и е обоен во една иста боја (види цртеж). Кој од следните делови е од бела боја?

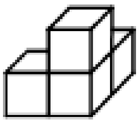



A)

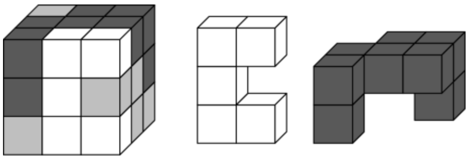

B)


C)

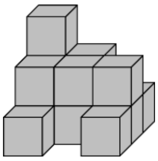
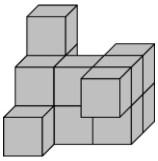
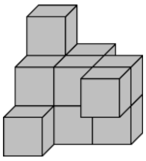
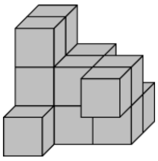
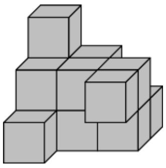

D)


E)

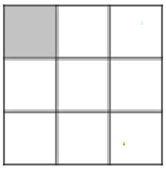
Решение. D). Јасно, белиот дел се наоѓа на задната страна од квадарот, која има 6 коцки. Бидејќи горните лева и десна коцка не се бели, останува трите бели коцки да се во долниот ред на задната страна. Значи тоа е делот D.

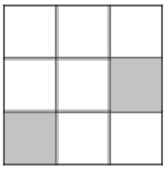


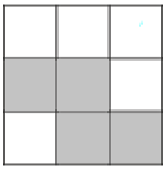
11. Коцка со димензии $3\times3\times3$ е направена од бели, сиви и црни коцки со димензија $1\times1\times1$, како што е прикажано на првиот цртеж десно. На другите два цртежи се прикажани белиот и црниот дел од коцката. На кој од наведените цртежи е прикажан сивиот дел од коцката?

A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. E). *Прв начин.* Најгорниот ред има 1 сива коцка, па затоа фигурата D отпаѓа. На предниот ѕид во долниот ред има 1 сива коцка, па затоа фигурата A отпаѓа. На десниот ѕид во средниот ред има 2 сиви и 1 црна коцка, па затоа фигурата B отпаѓа. На десниот ѕид во долниот ред има 2 сиви коцки, па затоа фигурата C отпаѓа. Останува фигурата E која целосно се совпаѓа со сивиот дел на коцката.


од горе


од напред


од десно

Втор начин. Црниот и белиот дел на коцката е видливи на коцката. Од сивиот дел ги гледаме само деловите кои се видливи од горе, од напред и од десно и тоа е прикажано на горните цртежи.

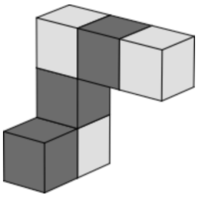
Погледот од горе соодветствува на A, B, C и E.

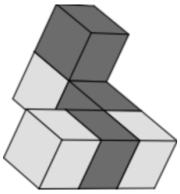
Погледот од напред соодветствува на B, C, D и E.

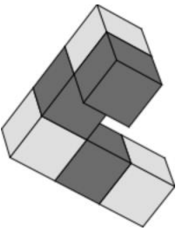
Погледот од десно соодветстува на D и E.

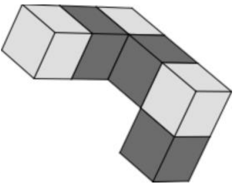
Бидејќи само делот Е се јавува во сите три случаи, заклучуваме дека бараната фигура е Е.

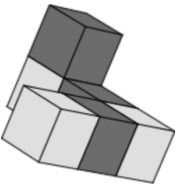
12. Павлина составила неколку коцки како на цртежот десно. Таа се движи околу добиеното тело и го гледа од различни агли. Кое од следниве тела Павлина не може да го види?

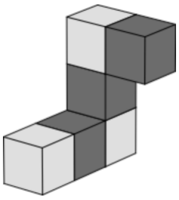


A) 

B) 

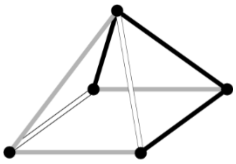
C) 

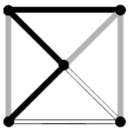
D) 

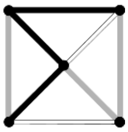
E) 

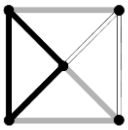
Решение. **B).** Ако даденото тело го обиколуваме тргнувајќи од белата крајна коцка, тогаш се движиме во насока обратна од насоката на движење на стрелките на часовникот. Очигледно ова важи за телата A), D) и E), а ако го превртиме телото C) забележуваме дека тоа важи и за ова тело. Но, кога споменатото обиколување го правиме на телото B), тогаш се движиме во насока на движењето на стрелките на часовникот, па затоа Павлина не може да го види ова тело.

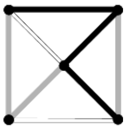
13. На цртежот десно е прикажана пирамида. На кој од следниве цртежи е прикажана пирамидата гледано од горе?

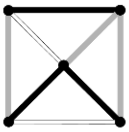


A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

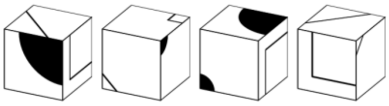
Решение. В). Рапоредот боите на страните на основата е: црна, сива, бела и сива и тоа е кај сите пет цртежи. Тргнувајќи од десното теме на црниот раб на основата распоредот на боите на рабовите на пирамидата е: црна, црна, сива и бела. Бидејќи овој распоред треба да се запази на половинките од дијагоналите на квадратот кој го гледаме, заклучуваме дека бараниот квадрат е В).

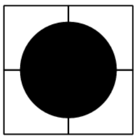
14. Осум кукли се ставени во осум исти кутии во облик на коцка. Кутии се запакувани во кутија која исто така има форма на коцка. Малите кутии целосно ја исполнуваат големата кутија. Колку кутии со играчки се сместени на дното на големата кутија?

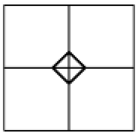
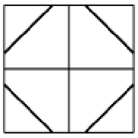
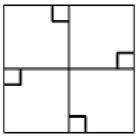
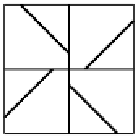
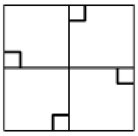
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. D). Бидејќи големата кутија е во форма на коцка и е целосно исполнета сп еднакви коцки, бројот на кутиите во нејзината ширина, должина и висина ќе биде еднаков. Понатаму, од $2\cdot 2\cdot 2=8$ заклучуваме дека на секој раб има по 2 коцки. Значи, на дното има $2\cdot 2=4$ мали кутии.

15. Дадени се четири идентични коцки кои се прикажани на цртежот десно. Димитар од нив направил квадар, при што на едната негова страна се појавил црн круг (види цртеж). Како кај овој квадар изгледа спротивниот ѕид на ѕидот на кругот?

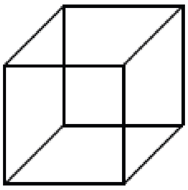




A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

Решение. А). Од првата и втората коцка заклучуваме дека шесте ѕидови на идентичните коцки се со различни фигури. Понатаму, погледот на првата коцка од десно е идентичен со погледот на четвртата коцка од напред. Тоа значи дека спротивниот ѕид на кој имаме голема четвртина на црн круг е ѕидот на кој имаме помал триаголник поставен на ист начин како и четвртината од кругот. Значи, кај квадарот спротивниот ѕид на ѕидот на кругот е квадратот прикажан на цртежот А.

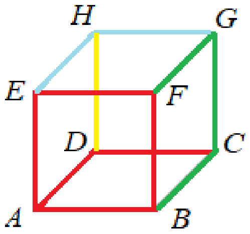
16. Кирил има седум парчиња жица со должини $1cm$, $2cm, 3cm, 4cm, 5cm, 6cm$ и $7cm$. Тој, без преклопување, користи неколку од парчињата жица за да направи коцка со должина на раб $1cm$. Кој е најмалиот број на парчиња жица кои може да ги искористи?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. D). Од секое теме на коцката излегуваат по 3 раба, т.е. непарен број рабови. Тоа значи дека во секое теме мора да почнува или да завршува некое од искористените парчиња жица. Коцката има 8 темиња, па затоа мора да се употребат четири парчиња жица.

Да ја означиме коцката како на цртежот десно. Тогаш четирите парчиња жица се со должина $6cm, 3\,cm, 2\,cm, 1\,cm$ и нивното поставување е

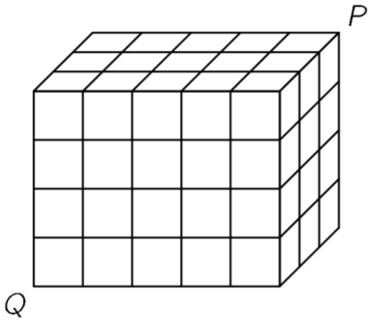


$A \to B \to F \to E \to A \to D \to C,\quad H \to D$

$B \to C \to G \to F,\quad G \to H \to E,$

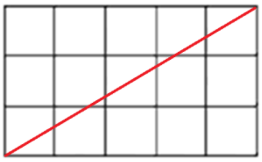
и истите се обоени во црвена, жолта, зелена и сина боја.

17. Дрвен паралелопипедот со димензии $3 \times 4 \times 5$ се состои од 60 идентични мали коцки. Еден термит се пробива по неговата дијагонала од темето P до темето Q. Оваа дијагонала не ги пресекува рабовите на било која мала коцка



која е во внатрешноста на паралелопипедот. Низ колку од малите коцки поминува термитот на своето патување?

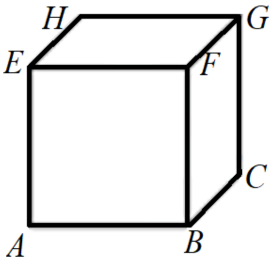
A) 8　B) 9　C) 10　D) 11　E) 12



Решение. C). Ако поставиме поставиме рамнина која минува низ точките P и Q, а е нормална на горниот ѕид на квадарот, тогаш таа горниот ѕид ќе го сече по дијагоналата која минува низ $5+3-1=7$ квадрати, односно во 7 коцки (види цртеж). Сега ако левото долно теме од дијагоналата го движиме надолу кон темето Q, тогаш во секој следен ред бројот на пресечените коцки ќе се зголемува за 1 (тоа е коцката во која дијагоналата преминува од еден во друг ред). Значи, дијагоналата која минува низ точките P и Q ќе сече $7+3=10$ мали коцки.

18. Дрвена коцка со димензии $11 \times 11 \times 11$ е добиена со редење на 11^3 единечни коцки. Кој е најголемиот број мали коцки кои што се видливи од една место на гледање?

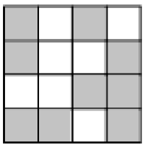
A) 328　B) 329　C) 330　D) 331　E) 332

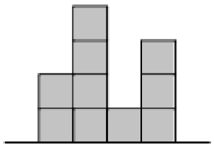


Решение. D). Од една точка можеме да видиме најмногу три ѕида на коцката (цртеж десно). На ѕидот $ABFE$ гледаме $11 \cdot 11 = 121$ коцка. На ѕидот $EFGH$ гледаме $11 \cdot 11 = 121$ коцки од кои 11 коцки на работ FE се веќе броени. На ѕидот $BCGF$ гледаме $11 \cdot 11 = 121$ коцки од кои 11 коцки на работа BF и уште 10 коцки на работ FG се веќе броени.

Значи, најголемиот број коцки кои можеме да ги видиме од една точка на гледање е $3 \cdot 121 - 2 \cdot 11 - 10 = 331$.

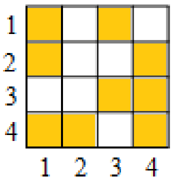
19. Ивона направила „град“ од идентични дрвени коцки. Првата слика е поглед на „градот“ одозгора, додека втората е поглед од една страна. Не е познато од која страна е направен погледот. Кој е најголемиот број коцки кои Ивона можела да ги искористи?



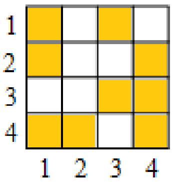


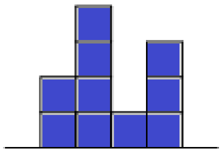
A) 25 B) 24 C) 23 D) 22 E) 21

Решение. **B).** Да ги означиме редовите и колоните како на цртежот десно. Можни се четири случаи, кои одделно ќе ги разгледаме.

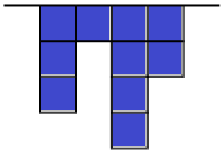


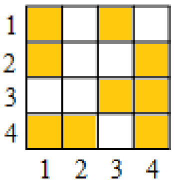
Ако погледот е однапред, тогаш во првата колона може да има најмногу $3\cdot 2=6$ коцки, во втората може да има најмалку 4 коцки, во третата може да има најмногу $2\cdot 1=2$ коцки и во четвртата може да има најмногу $3\cdot 3=9$ коцки. Според тоа, во овој случај најголемиот број кои Ивона можела да ги употреби е $6+4+2+9=21$.



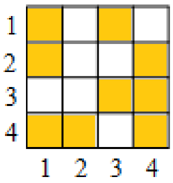


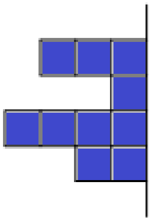
Ако погледот е одназад, тогаш во првата колона може да има најмногу $3\cdot 3=9$ коцки, во втората може да има најмалку 1 коцка, во третата може да има најмногу $2\cdot 4=8$ коцки и во четвртата може да има најмногу $3\cdot 2=6$ коцки. Според тоа, во овој случај најголемиот број кои Ивона можела да ги употреби е $9+1+6+4=24$.



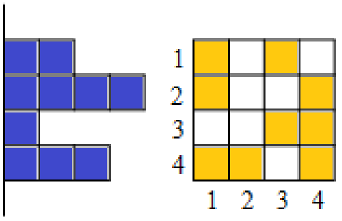


Ако погледот е оддесно, тогаш во првиот ред може да има најмногу $2\cdot 3=6$ коцки, во вториот може да има најмалку $2\cdot 1=2$ коцки, во третиот може да има најмногу $2\cdot 4=8$ коцки и во четвртиот може да има најмногу $3\cdot 2=6$ коцки. Според





тоа, во овој случај најголемиот број кои Ивона можела да ги употреби е $6+2+8+6=22$.



Ако погледот е одлево, тогаш во првиот ред може да има најмногу $2\cdot2=4$ коцки, во вториот може да има најмногу $2\cdot4=8$ коцки, во третиот може да има најмногу $2\cdot1=2$ коцки и во четвртиот може да има најмногу $3\cdot3=9$ коцки. Значи, во овој случај најго-лемиот број кои Ивона можела да ги употреби е $4+8+2+9=23$.

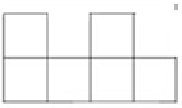
Според тоа, Ивона можела да употреби најмногу 24 коцки.

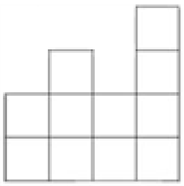
20. Андреј направил тело од единечни коцки поставувајќи ги една над друга над квадратчињата од квадратната шема со димензии 4×4. На дијаграмот е прикажан бројот на коцки поставени врз секој од единечните квадрати на квадратната шема. Кога Андреј ќе погледне од задната страна, што тој ќе види?

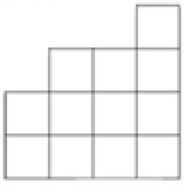
Задна страна

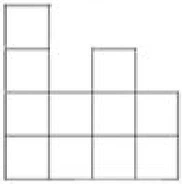
4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

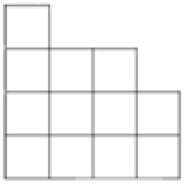
Предна страна

A) 

B) 

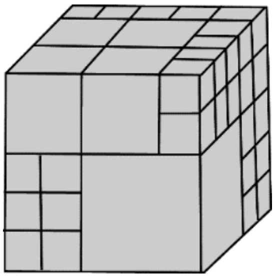
C) 

D) 

E) 

Решение. **C).** Андреј во секоја колона ќе гледа кула чија висина е еднаква на најголемиот број коцки во колоната. Притоа бидејќи гледа од задната страна најголемите височини ќе бидат распоредени во обратен редослед. Значи, тој од лево кон десно ќе гледа кули високи 2, 3, 3 и 4 коцки.

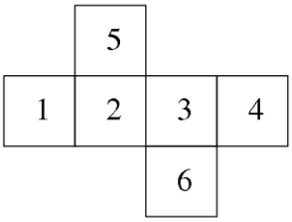
21. Десно е прикажана коцка која е расечена на помали коцки на следниот начин: 1 коцка со раб 3, 4 коцки со раб 2, а останатите коцки се со раб 1. Колку коцки се со раб 1?



A) 26 B) 36 C) 48 D) 66 E) 69

Решение. **D).** Коцката има димензии $5\times5\times5$, што значи дека е составена од $5\cdot5\cdot5=125$ коцки со раб 1. Една коцка со раб 2 е составена од $2\cdot2\cdot2=8$ коцки со раб 1, па како коцки со раб 2 има 4, добиваме дека бројот на коцките со раб 1 се намалува за $4\cdot8=32$. Една коцка со раб 3 е составена од $3\cdot3\cdot3=27$ коцки со раб 1, па затоа бројот на коцките со раб 1 се намалу за 27. Конечно, имаме $125-32-27=66$ коцки со раб 1.

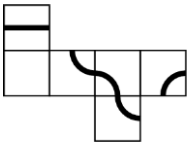
22. Дадена е мрежа на коцка со броеви запишани на нејзините ѕидови (цртеж десно). Стојан точно ги собира броевите од спротивните ѕидови на коцката. Кои три збирови ги добил Стојан?

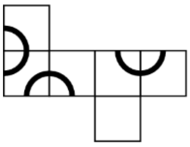


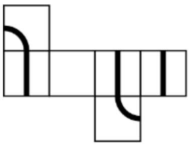
A) 4,6,11 B) 4,5,12 C) 5,6,10 D) 5,7,9 E) 5,8,8

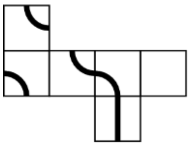
Решение. **A).** Спротивните ѕидови се: 1 и 3, 2 и 4, 5 и 6. Значи, добиените збирови се 4, 6 и 11.

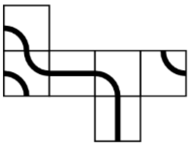
23. Мравка се движи по означената линија на површината на коцка, се додека не се врати на почетната позиција. Од која следниве мрежи може да се состави коцка, така што вакво патување е можно?


A)

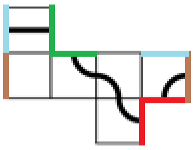

B)

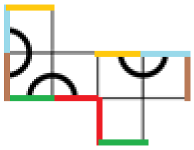

C)

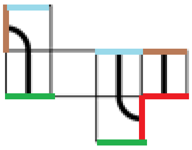

D)

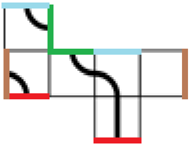

E)

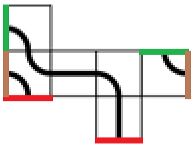
Решение. Е). Да ги означиме со иста боја рабовите кои се поврзуваат при формирање на коцката.


А)


Б)

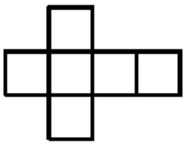

В)

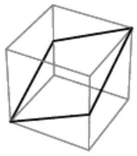

Г)

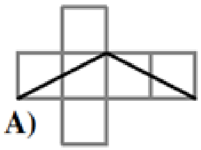

Д)

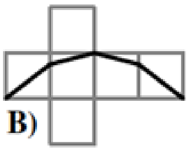
Како што можеме да видиме само на мрежата Д) сите линии се надоврзуваат во затворена линија.

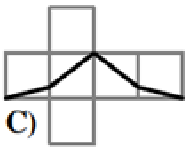
24. На цртежите десно се прикажани мрежа на коцка и коцката која е составена и на која е нацртана искржена линија со која површината на коцката е поделена на два еднакви дела.

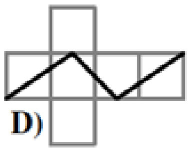


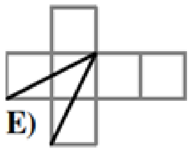



А)


Б)

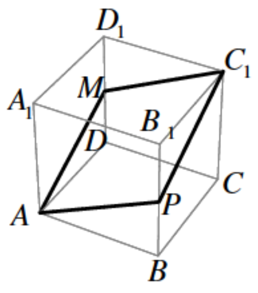

В)

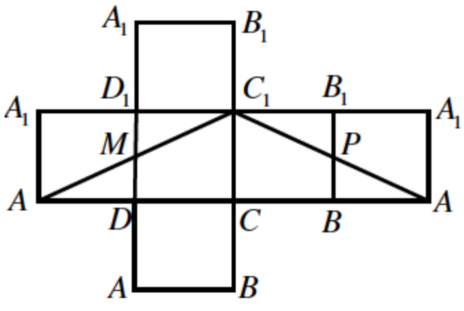

Г)


Д)

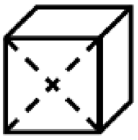
На кој цртеж е прикажана мрежата на коцката по цртањето на делбената линија?

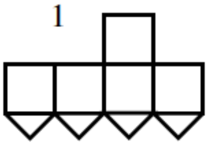
Решение. А). Ако коцката и делбената линија ги означиме како на цртежот долу лево, тогаш по расекувањето на коцката по рабовите AA_1, AD, AB, BC, A_1D_1, A_1B_1, B_1C_1, тогаш мрежата на коцката е како на долниот цртеж десно, а тоа е мрежата А).

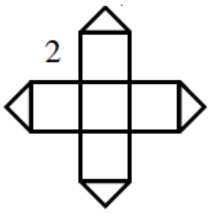


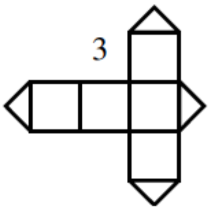


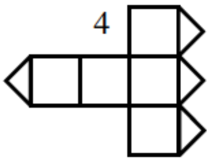
25. Еден ѕид на коцката е расечен по неговите дијагонали. Кои од следниве мрежи на коцката не се можни?

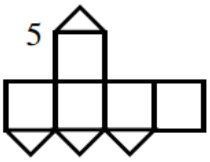


1


2


3


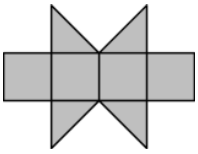
4


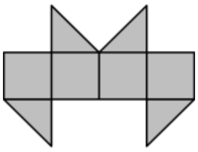
5


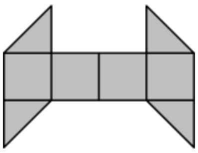
A) 1 и 3 B) 1 и 5 C) 3 и 4 D) 3 и 5 E) 2 и 4

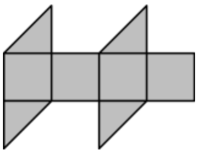
Решение. D). Кај мрежата 1 предниот ѕид на коцката е биде составен од триаголниците. Кај мрежата 2 горниот ѕид на коцката ќе биде оставен од триаголниците. Кај мрежата 4 десниот ѕид од коцката ќе биде оставен од триаголниците. Кај мрежата 3 горниот и долниот триаголник ќе се преклопат со првиот квадрат од лево. Кај мрежата 5 горниот триаголник ќе се преклопи со првиот квадрат од десно. Значи, 3 и 5 не се мрежи на коцката.

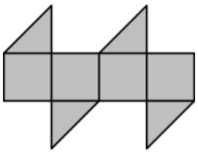
26. Која од дадените фигури не е мрежа на коцка?

A)


B)


C)


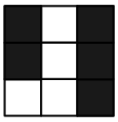
D)


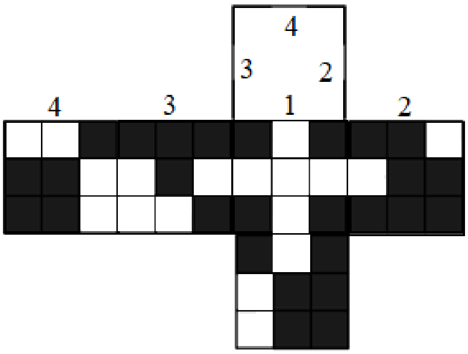
E)


Решение. C). При превиткувањето по заедничките страни на квадратите кај фигурата C) долните два триаголници ќе се преклопат, што значи дека нема да формираат квадрат. Кај сите други фигури при превиткувањето горните триаголници формираат квадрат, а исто важи и за долните триаголници.

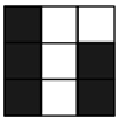
27. Коцка 3×3×3 е составена од 15 црни коцки и 12 бели коцки. Пет страни на големата коцка се прикажани на долниот цртеж.

На кој цртеж е прикажана шестата страна на големата коцка?

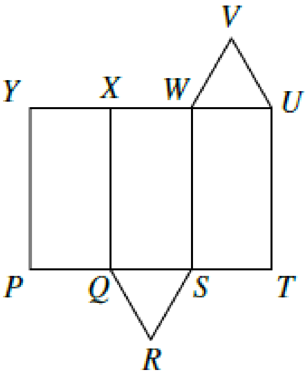
A) 
B) 
C) 
D) 
E) 



Решение. A). Допирните рабови на два ѕида се составени од три коцки кои се наоѓат на овие рабови, па затоа во мрежата на коцката распоредот на црните и белите квадрати на рабовите мора да е симетричен на секој допирен раб. Ако почнеме од квадратот кој има црни квадратчиња во темињата, а другите квадратчиња се бели, го добиваме распоредот на дадените пет ѕидови кој е прикажан на цртежот десно. На цртежот се означени кои рабови на белиот ѕид треба да се совпаднат со рабовите на четирите ѕида со кои овој ѕид се допира. Притоа, ако се има предвид превитку-вањето на мрежата, при кое распоредот на полињата на работ 4 е во обратен редолсед добиваме дека на местото на белиот ѕид треба да е квадратот прикажан на цртежот десно, а тоа е квадратот A), кој е ротиран за 180°.

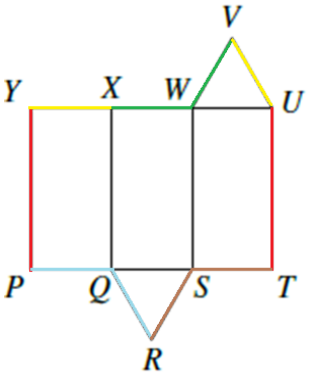


28. На цртежот десно е дадена мрежа на правилна тристрана призма. Која отсечка ќе се совпадне со отсечката UV кога од мрежата ќе се направи призмата?



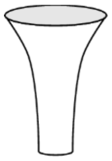
A) WV B) XW C) XY

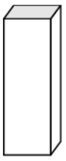
D) QR E) RS



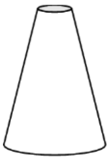
Решение. C). На цртежот десно со различни бои се обоени отсечките кои се совпаѓаат при составување на призмата. Значи со работ UV ќе се совпадне работ XY (двете отсечки се обоени со жолта боја).

29. Секоја од петте вазни (прикажани на цртежите во понудените одговори на задачата) има иста висина и секоја од нив има волумен од 1 литар. Во секоја вазна се тура половина литар вода. Во која вазна ќе биде највисоко нивото на водата?

A) 

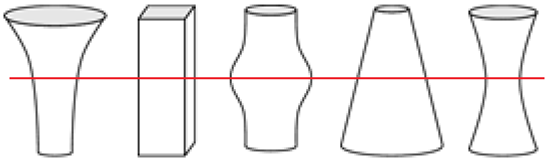
B) 

C) 

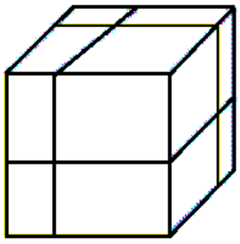
D) 

E) 

Решение. A). Бидејќи сите вазни имаат иста висина и во сите е турено половина литар вода, нивото на водата ќе биде симетрично во вазните B, C и E (цртеж десно). Вазната A има најмала долна основа и постепено се шири кон врвот, па затоа нивото на водата во неа ќе биде најголемо.



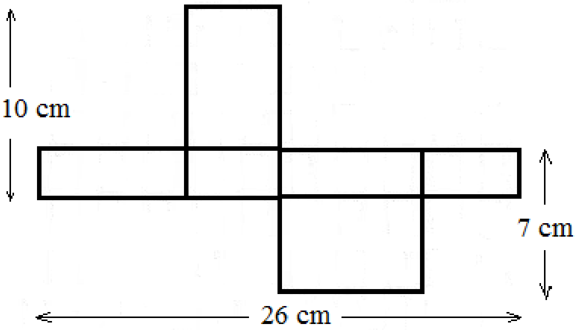
30. Коцка ја сечеме со три рамнини паралелни на ѕидовите на коцката и добиваме осум мали квадари (види цртеж). Каков е односот на збирот на плоштините на овие осум квадари и плоштината на коцката?



A) 1:1 B) 4:3 C) 3:2 D) 2:1 E) 4:1

Решение. **D).** Нека должината на работ на коцката е a. Со секое сечење на коцката плоштината на добиените тела се зголемува за $2a^2$. Значи, збирот на плоштините на осумте квадари ќе биде $6a^2+3\cdot 2a^2=12a^2$. Конечно, бараниот однос е $\frac{12a^2}{6a^2}=2=2:1$.

31. На цртежот десно е прикажан мрежа на квадар, на која се означени неколку должини. Колку е волуменот на овој квадар?



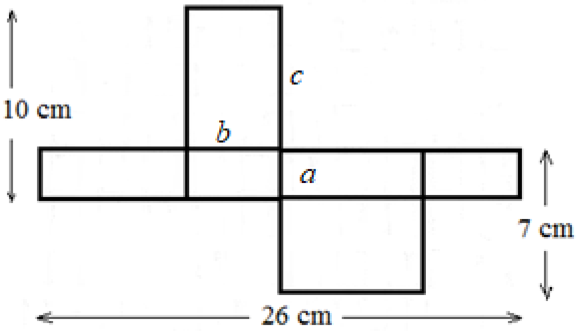
A) $43\,cm^3$ B) $70\,cm^3$ C) $80\,cm^3$

D) $100\,cm^3$ E) $120\,cm^3$

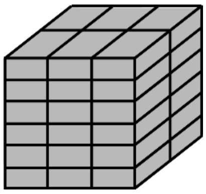
Решение. **C).** При ознаки како на цртежот десно имаме

$$a+b=7,$$
$$a+c=10,$$
$$2b+2c=26.$$

Спотред тоа, $b+c=13$, па затоа $2a+2b+2c=30$, од каде добиваме $a+b+c=15$. Сега лесно се добива дека $a=2, b=5, c=8$. Значи, волуменот на квадарот е еднаков на $2\cdot 5\cdot 8=80\,cm^3$.



32. Ѕидарот Марко со помош на цигли кај кои најкраткиот раб е $4\,cm$ ја направил коцката која е прикажана на цртежот десно. Кои се димензиите на циглите изразени во сантиметри?

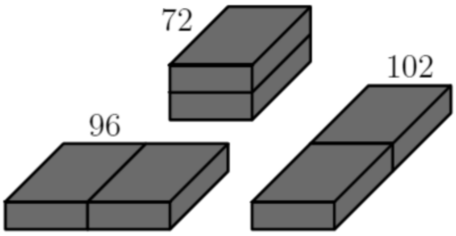


A) $4\times 6\times 12$ B) $4\times 6\times 16$ C) $4\times 8\times 12$

D) $4\times 8\times 16$ E) $4\times 12\times 16$

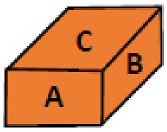
Решение. C). Најкраткиот раб е 6 пати на работ на големата коцка, средниот раб е 3 пати и најдолгиот раб е 2 пати. Значи, средниот раб е $6:3=2$ пати подолг, т.е. тој е долг $8\,cm$, а најдолгиот раб е $6:2=3$ пати подолг, т.е. тој е долг $12\,cm$. Конечно, димензиите на циглите се $4\times 8\times 12$.

33. Ѕидарот Марко има две идентични цигли. Тој ги наредил на три различни начини поврзувајќи ги истите ѕидови. Плоштините на трите добиени квадрати се дадени цртежот десно. Определи ја плоштината на една цигла?



A) 36 B) 48 C) 52 D) 54 E) 60

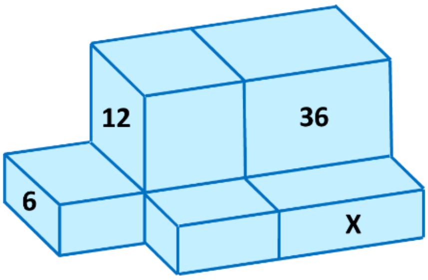
Решение. D). Плоштините на трите различни ѕида на циглата да ги означиме со A, B, C (цртеж десно). Тогаш



$$4A+2B+4C=96,$$
$$2A+4B+4C=102,$$
$$4A+4B+2C=72.$$

Ако ги собереме горните равенства, добиваме $10(A+B+C)=270$, односно $2(A+B+C)=54$.

34. Неколку квадари се залепени со ѕидовите со еднакви плоштини како што е покажано на цртежот десно. Броевите ги покажуваат плоштините на соодветните ѕидови изразени во сантиметри квадратни. Колкава е плоштината на ѕидот означен со X?

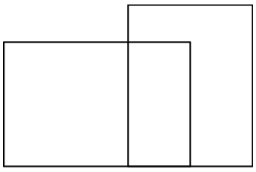


A) 16 B) 18 C) 20 D) 24 E) 26

Решение. **В).** Ѕидовите кои имаат плоштини 6 и 12 имаат иста страна, па затоа другите две страни се однесуваат како 2:1. Сега, ѕидовите кои имаат плоштини X и 36 имаат иста страна, а другите две страни се исти како и кај ѕидовите со плоштини 6 и 12 па затоа се однесуваат како 2:1. Но, тоа значи дека $36:X=2:1$ т.е. $X=18$.

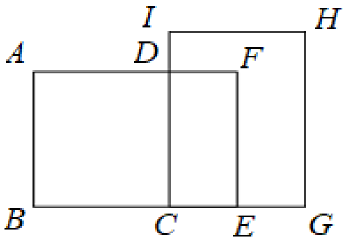
7. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Колку четириаголници се прикажани на цртежот десно?

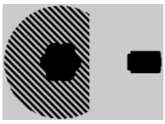


A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

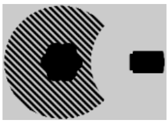
Решение. D). При ознаки како на цртежот десно четириаголници на дадениот цртеж се: $ABCD, ABEF, DCEF, ICFH$. Според тоа, на дадениот цртеж има 4 четириаголници.

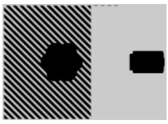


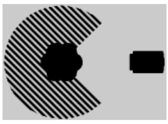
2. Кога верверичката ќе се спушти на земја таа не се оддалечува повеќе од $5m$ од стеблото на дрвото. Таа исто така останува на најмалку $5m$ подалеку од куќичката на кучето. Која од следниве слики ја прикажува областа во која може да се движи верверичката?

A) 

B) 

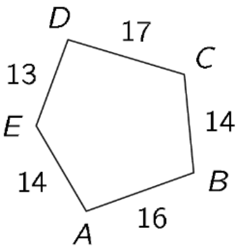
C) 

D) 

E) 

Решение. C). Верверичката се движи во кружен прстен со разлика на радиусите на кружниците од кои е формиран еднаква на $5m$, од кој е исечен делот кој го зафаќа кругот со радиус $5m$ и центар на средината на вратата на куќичката на кучето. Ваков штрафиран дел е прикажан на цртежот C).

3. На цртежот е нацртан петаголник. Горјан нацртал пет кружници со центри во точките A, B, C, D, E така што кружниците со центри на иста страна на петаголникот се допираат. Должините на страните на



петаголникот се дадени. Која точка е центар на кружницата со најголем радиус?

А) A В) B С) C D) D Е) E

Решение. А). Нека радиусите на кружниците со центри во точките A, B, C, D, E се a, b, c, d, e, соодветно. Тогаш

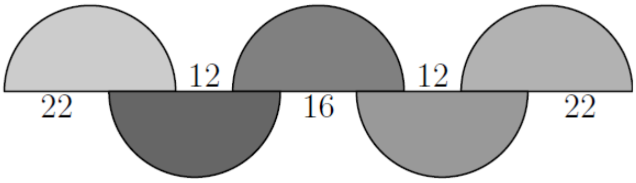
$$\begin{aligned} a+b&=16,\\ b+c&=14,\\ c+d&=17,\\ d+e&=13,\\ e+a&=14. \end{aligned}$$

Тогаш

$$\begin{aligned} 2a&=(a+b)-(b+c)+(c+d)-(d+e)+(e+a)\\ &=16-14+17-13+14=20, \end{aligned}$$

од каде добиваме $a=10$. Сега, $b=6, c=8, d=9, e=4$.

4. На цртежот се прикажани пет складни полукружници и се означени должините на некои отсечки. Колку е радиусот на овие полукружници?



А) 12 В) 16 С) 18 D) 12 Е) 22

Решение. С). Ако со r го означиме радиусот на полукружниците, тогаш

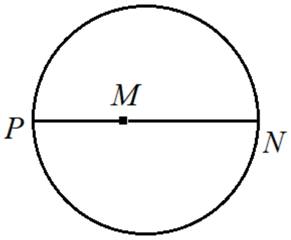
$$\begin{aligned} &2r+12+2r+12+2r=22+2r+16+2r+22\\ &6r+24=4r+60,\\ &2r=36,\\ &r=18. \end{aligned}$$

5. Дадени се кружница и точка M во рамнината на кружницата, така што најкраткот растојание од M до кружницата е $20\,cm$, а најдолгото растојание е $24\,cm$. Колку сантиметри е должината на радиусот на кружницата?

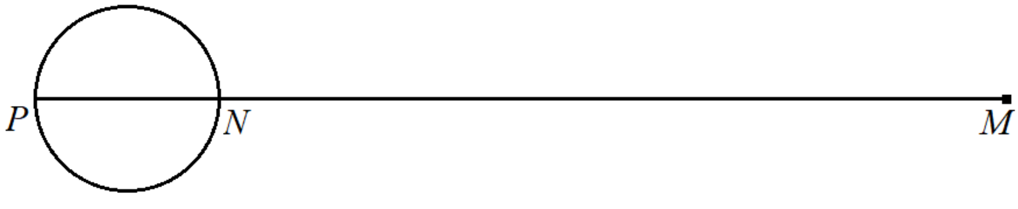
A) 2 B) 20 C) 22 D) 4 или 2 E) 2 или 22

Решение. **E).** Можни се два случаја:

1) Нека точката M е во внатрешноста на кружницата. Повлекуваме дијаметар кој ја содржи точката M и нека тој ја сече кружницата во точките P и N (цртеж десно). Тогаш кружницата со центар во M и радиус $\overline{MP}$ лежи во внатрешноста на дадената кружница, а дадената кружница лежи во кружницата со центар во M и радиус и $\overline{MN}$. Затоа најкраткото и најдолгото растојание од M до кружницата се $\overline{MP}$ и $\overline{MN}$. Според тоа, радиусот на кружницата е $\frac{\overline{MP}+\overline{MN}}{2}=\frac{24+20}{2}=22\,cm$.



2) Нека точката M е во надворешноста на кружницата. Повлекуваме права низ точката M и ценгтарот на дадената кружница, која ја сече кружницата во точките P и N (види цртеж). Тогаш кружницата со центар во M и радиус $\overline{MN}$ лежи во надворешноста на дадената кружница, а дадената кружница лежи во кружницата со центар во M и радиус и $\overline{MP}$. Затоа најкраткото и најдолгото растојание од M до кружницата се $\overline{MN}$ и $\overline{MP}$. Според тоа, радиусот на кружницата е $\frac{\overline{MP}-\overline{MN}}{2}=\frac{24-20}{2}=2\,cm$.

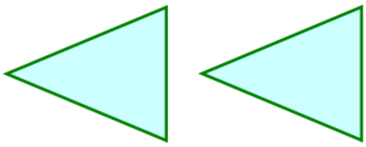


6. Фудбалска топка е направена од бели шестаголници и црни петаголници, како што е прикажано на цртежот десно. Вкупно на топката има 12 петаголници. Колку шестаголници има на топката?

A) 12 B) 15 C) 18 D) 20 E) 24

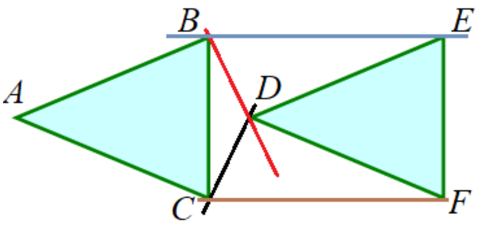
Решение. D). Нека имаме a шестаголници. Секој шестаголник има по 3 соседни страни со петаголнците, а петаголниците меѓу себе немаат соседни страни. Значи, вкупно $3a$ страни на шестаголниците се соседни со $5\cdot 12=60$ страни на петаголниците. Според тоа, $3a=60$, односно $a=20$.

7. Дадени се два триаголници (како на цртежот). На колку начини може да се изберат две темиња, по едно од секој триаголник, така што правата што минува низ нив не сече ниту еден од триаголниците?

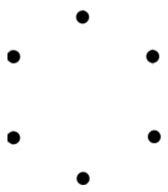


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) повеќе од 4

Решение. D). Триаголниците ќе ги означиме како на цртежот. Сега е јасно дека такви парови темиња се C и D, B и D, C и F, B и E, т.е. имаме четири можни избори.



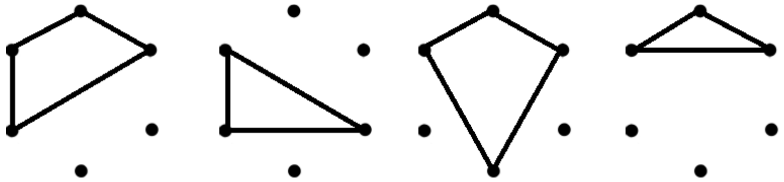
8. Филип нацртал 6 темиња на правилен шестаголни. Некои од нив ги поврзал со отсечки. Која фигура не можел сигурно да ја добие?



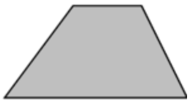
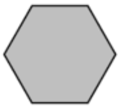
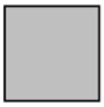
A) трапез B) правоаголен триаголник

C) квадрат D) делтоид E) тапоаголен триаголнк

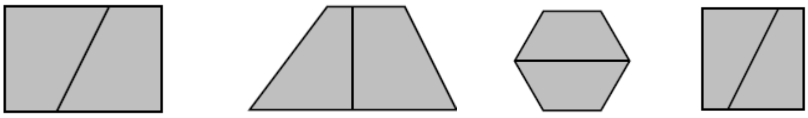
Решение. C). За да добие четириаголник со прави агли Филип мора да поврзи четири темиња кои лежат на спротивни страни на шестаголникот. Но, тогаш добива правоаголник со должини на страни a и $a\sqrt{3}$. Другите фигури може да се добијат како што е прикажано на долните цртежи.



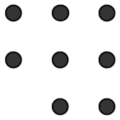
9. Која од дадените фигури не може да се подели на два трпез со едно повлекување на права линија?

A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. A). Два трапези вкупно имаат 8 агли. Триаголникот има 3 агли, па бидејќи со повлекување на една права која го сече може да се добијат 3 (минува низ теме и сече страна) или 4 (сече две страни) нови агли, не е можно истиот да се подели на два трапези. Останатите фигури може да се поделат на два трапези (види ги долните цртежи).

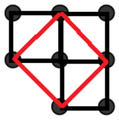


10. Колку квадрати може да се нацртаат со темиња во дадените точки?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

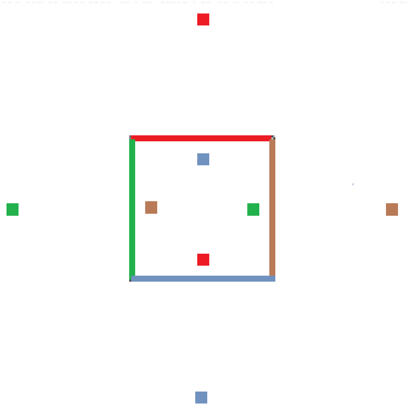
Решение. C). Сите квадрати чии темиња се дадените точки се прикажани на цртежот десно. Значи имаме 4 квадрати.

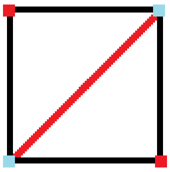


11. Даден е квадрат со должина на страна $1cm$. Колку точки има во рамнината кои се оддалечени точно $1cm$ од две темиња на овој квадрат?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

Решение. E). Да разгледаме две соседни темиња на квадратот. Секоја точка која е оддалечена $1cm$ од две такви темиња , заедно со нив определува темиња на рамностран триаголник со должина на страна $1cm$. Бидејќи над секоја страна може да се конструираат два такви триаголници, вкупниот број на такви точки е $4 \cdot 2 = 8$.





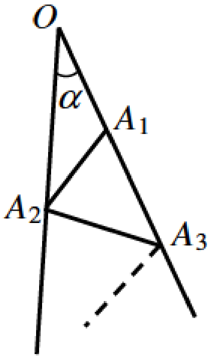
Сега да земеме две несоседни темиња на квадратот, т.е. крајни точки на негова дијагонала. Секоја точка која е оддалечена $1cm$ од две такви темиња заедно со нив определува темиња на рамнокрак правоаголен триаголник чие трето теме е теме на квадратот. Бидејќи над секоја дијагонала има два такви триаголника, вкупниот број на такви точки е $2 \cdot 2 = 4$ и тоа всушност се темињата на квадратот.

Значи, имаме $8+4=12$ точки со саканото својство.

12. Во фигурата на цртежот десно важи $\measuredangle \alpha = 7^\circ$ и

$$\overline{OA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \dots .$$

Колку најмногу отсечки A_iA_{i+1} може да се нацртаат на овој начин?



A) 10 B) 11 C) 12 D) 13

E) произволно многу

Решение. C). Триаголниците

$$OA_1A_2,\ A_1A_2A_3,\ A_2A_3A_4,\ A_3A_4A_5,$$
$$A_4A_5A_6,\ A_5A_6A_7,\ A_6A_7A_8,\ A_7A_8A_9,$$
$$A_8A_9A_{10},\ A_9A_{10}A_{11},\ A_{10}A_{11}A_{12},\ A_{11}A_{12}A_{13}$$

се рамнокраки со основи

$$OA_2,\ A_1A_3,\ A_2A_4,\ A_3A_5,\ A_4A_6,\ A_5A_7,\ A_6A_8,$$
$$A_7A_9,\ A_8A_{10},\ A_9A_{11},\ A_{10}A_{12},\ A_{11}A_{13},$$

и агли при основите

$$7^\circ, 14^\circ, 21^\circ, 28^\circ, 35^\circ, 42^\circ, 49^\circ, 56^\circ, 63^\circ, 70^\circ, 77^\circ, 84^\circ.$$

Ако може да се нацрта уште една отсечка, тогаш ќе добиеме рамнокрак триаголник $A_{12}A_{13}A_{14}$ и тој ќе има агли при основата 91°, што не е можно.

13. Рамностран триаголник ротира околу неговиот центар: прво за 3°, па за 9° и така натаму (во n-тиот чекор ротира за $(3^n)^\circ$). Колку различни позиции ќе има триаголникот при баквите ротации (вклучувајќи ја почетната позиција)?

A) 3　　B) 4　　C) 5　　D) 6　　E) 360

Решение. B). Триаголниците се добиваат со ротации за

$$\begin{aligned}3+3^2+3^3+3^4+...+3^{4k} &= 3\cdot(1+3+3^2+3^3+3^4+...+3^{4k-1})\\ &= 3\cdot\frac{(1+3+3^2+3^3+3^4+...+3^{4k-1})(3-1)}{3-1}\\ &= 3\cdot\frac{3^{4k}-1}{2},\end{aligned}$$

$$3+3^2+3^3+3^4+...+3^{4k+1} = 3\cdot\frac{3^{4k+1}-1}{2},$$

$$3+3^2+3^3+3^4+...+3^{4k+2} = 3\cdot\frac{3^{4k+2}-1}{2},$$

$$3+3^2+3^3+3^4+...+3^{4k+3} = 3\cdot\frac{3^{4k+3}-1}{2},$$

степени. Понатаму, за $i=0,1,2,3$ и за секој $k\in\mathbb{N}$ имаме

$$3\cdot\frac{3^{4(k+1)+i}-1}{2}-3\cdot\frac{3^{4k+i}-1}{2}=3^{4k+i}\cdot 120^\circ,$$

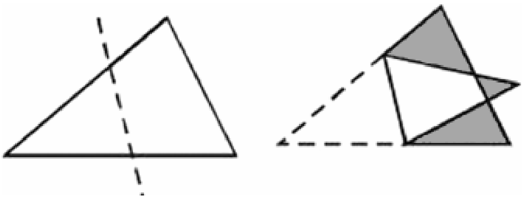
односно аглите со кои се добиваат $(4k+i)-$тиот и $4(k+1)+i-$тиот триаголник се разликуваат за цел број пати по 120°. Тоа значи дека овие два триаголника се совпаѓаат. Конечно, бидејќи првите четири триаголници се добиваат со ротации на почетниот триаголник за $3^\circ, 12^\circ, 39^\circ, 120^\circ$ заклучуваме тие се различни, односно дека при ваквите ротации триаголникот ќе има 4 различни позиции.

14. Квадрат со должина на страна $6\,cm$ и триаголник делумно се преклопуваат. Квадратот покрива 60% од плоштината на триаголникот, а триаголникот покрива $\frac{2}{3}$ од плоштината на квадратот. Определи ја плоштината на триаголникот.

A) $22\frac{4}{5}\,cm^2$ B) $24\,cm^2$ C) $36\,cm^2$ D) $40\,cm^2$ E) $60\,cm^2$

Решение. **D).** Плоштината на квадратот е $36\,cm^2$. Ако со x ја означиме плоштината на триаголникот, добиваме $\frac{60}{100}x=\frac{2}{3}\cdot 36$, од каде наоѓаме $x=40\,cm^2$.

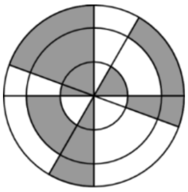
15. Даден триаголник се превиткува преку испрекинатата линија и се добива фигурата десно. Плоштината на дадениот триаголник е 1,5 пати поголема од плоштината на добиената фигура. Плоштината на сивиот дел од добиената фигура е 1. Колку е плоштината на дадениот триаголник?



A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) друг одговор

Решение. C). Нека x е плоштината на дадениот триаголник, а y е плоштината на белиот четириаголник од добиената фигура. Тогаш $x=2y+1$ и $x=1{,}5(y+1)$. Според тоа, $2y+1=1{,}5(y+1)$, од каде следува $y=1$. Конечно, $x=2\cdot1+1=3$.

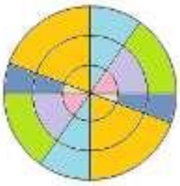
16. На цртежот десно се прикажани три концентрични кружници со четири дијаметри (отсечки кои кои минуваат низ заедничкиот центар на кружниците). Колку проценти од добиената фигура се засенчени?



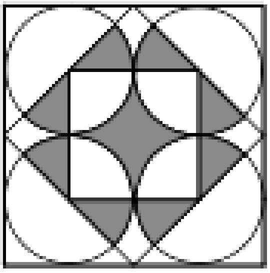
A) 30% B) 35% C) 40%

D) 45% E) 50%

Решение. E). За секој сив дел постои бел дел кој е складен со сивиот. Истото во различни бои е прикажано на цртежот десно. Според тоа, сивиот дел е 50% од целата површина.



17. Колкав дел од површината на големиот квадрат е обоен во сива боја?

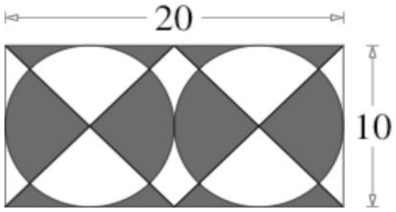


A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi+2}{16}$

D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

Решение. A). Аглите на сивите делови од кружниците во средниот квадрат се еднакви на 45°, па затоа секои два дела покриваат четвртина од кругот во кој се наоѓаат. Според тоа, плоштината на сивиот дел е еднаква на плоштината на најмалиот квадрат. Неговите темиња се совпаѓаат со средините на страните на средниот квадрат, па затоа должината на неговата страна е еднаква на половина од должината на страната на големиот квадрат (средна линија во триаголник). Значи, ако должината на страната на големиот квадрат е a, тогаш должината на страната на малиот квадрат е $\frac{a}{2}$. Конечно, плоштината на обоениот дел е $\frac{a^2}{4}$, т.е. $\frac{1}{4}$ е плоштината на големиот квадрат е обоена во сиво.

18. Колкава е плоштината на обоената површина на цртежот десно?



A) 50 B) 80 C) 100

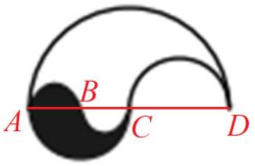
D) 120 E) 100

Решение. **C).** Правоаголникот да го поделиме на два квадрати со димензии 10×10. Потоа ако секој од добиените квадрати го ротираме околу неговиот центар за агол од 90°, тогаш во секој квадрат обоената површина ќе се совпадне со белата површина. Тоа значи дека во секој од двата квадрати половината е бел, а половината е сив. Конечно, плоштината на сивиата површина е $10\cdot 20:2=100$.

19. На цртежот десно е прикажано логото на една компанија. Тоа е направено од полукружници со радиуси $2\,cm, 4\,cm, 8\,cm$. Колкав дел од логото е затемнет?

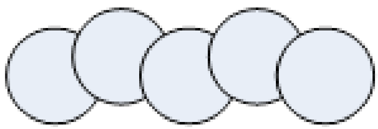
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

Решение. **B).** Ако го повлечеме дијаметарот AD, тогаш $\overline{AC}=\overline{CD}$ и $\overline{AB}=\overline{BC}$. Затоа плоштината на целиот амблем е еднаква на плоштината на пллукругот над дијаметарот AD, а плоштината на затемнетиот дел е еднаква на плоштината на полукругот над дијаметарот CD. Имаме,



$$P_{AD}=\frac{8^2\pi}{2}=32\pi,\ P_{CD}=\frac{4^2\pi}{2}=8\pi\text{, односно }\frac{P_{CD}}{P_{AD}}=\frac{8\pi}{32\pi}=\frac{1}{4}.$$

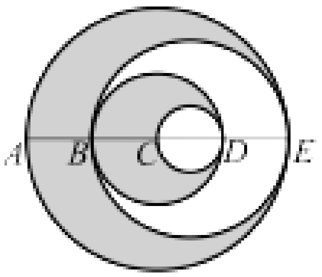
20. На дадениот цртеж плоштината на секој круг е $1\,cm^2$. Плоштината на заедничкиот дел на било кои два круга е $\frac{1}{8}\,cm^2$. Колку е плоштината на фигурата?



A) $4\,cm^2$ B) $\frac{9}{2}\,cm^2$ C) $\frac{35}{8}\,cm^2$ D) $\frac{39}{8}\,cm^2$ E) $\frac{19}{4}\,cm^2$

Решение. **B).** Вкупната плоштина на петте круга е $5\,cm^2$. Притоа имаме 4 поклопувања и со секое поклопување вкупната плоштина се намалува за $\frac{1}{8}\,cm^2$. Значи, плоштината на фигурата е $5-4\cdot\frac{1}{8}=\frac{9}{2}\,cm^2$.

21. На цртежот десно важи $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$. Определи го односно на плоштините на сивиот и белиот дел на дадената фигура.



A) 2:1 B) 4:3 C) 5:3 D) 6:5 E) 8:5

Решение. **C).** Нека $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=2r$.

Тогаш плоштината на најголемиот круг е $P_1=(4r)^2\pi$, следниот по големина круг е $P_2=(3r)^2\pi$, на третиот е $P_3=(2r)^2\pi$ и на најмалиот круг е $P_4=r^2\pi$. Плоштината на белиот дел од фигурата е

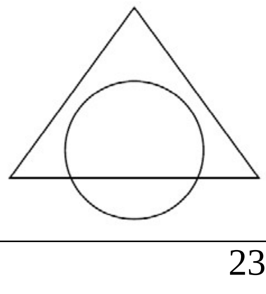
$$P_2-P_3+P_4=(3r)^2\pi-(2r)^2\pi+r^2\pi=6r^2\pi,$$

а на сивиот дел е

$$P_1-(P_2-P_3+P_4)=(4r)^2\pi-6r^2\pi=10r^2\pi.$$

Значи, бараниот однос е $10r^2\pi:(6r^2\pi)=5:3$.

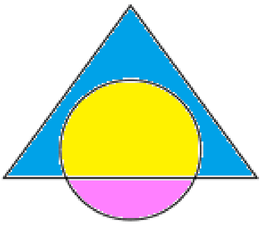
22. Круг и триаголник се преклопени како на цртежот десно. Плоштината на пресекот на кругот и



триаголникот е еднаква на 45% од плоштината на добиената фигура. Плоштината на триаголникот надвор од кругот е еднаква на 40% од плоштината на целата фигиура. Колкав процент на кругот е надвор од триаголникот?

A) 20% B) 25% C) 30% D) 35% E) 50%

Решение. **B).** Со P да ја означиме плоштината на целата фигура. Бидејќи плоштината на пресекот на кругот и триаголникот (жолтиот дел) е $45\%P = 0,45P$, а плоштината на триаголникот надвор од кругот (синиот дел) е $40\%P = 0,4P$, добиваме дека плоштината на кругот надвор од триаголникот е еднаква на



$$P-(0,45P+0,4P)=0,15P.$$

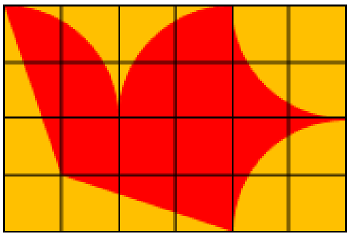
Плоштината на целиот круг е збир на плоштините на жолтиот и розевиот дел од кругот, т.е. $0,45P+0,15P=0,6P$. Според тоа, процентот на кругот кој е надвот од триаголникот е еднаков на

$$\frac{0,15P}{0,60P}=\frac{15}{60}=\frac{1}{4}=25\%.$$

23. На цртежот десно се прикажани четири срциња кои се преклопуваат. Плоштините на срцињата се $1\,cm^2$, $4\,cm^2$, $9\,cm^2$ и $16\,cm^2$, соодветно. Колку е плоштината на осенчената површина?

A) $9\,cm^2$ B) $10\,cm^2$ C) $11\,cm^2$ D) $12\,cm^2$ E) $13\,cm^2$

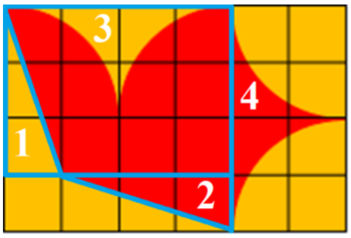
Решение. **B).** Плоштината на големиот осенчен дел е еднаква на $16-9=7\,cm^2$. Плоштината на малиот осенчен дел е $4-1=3\,cm^2$. Вкупната плоштина на осенчениот дел е $7+3=10\,cm^2$.



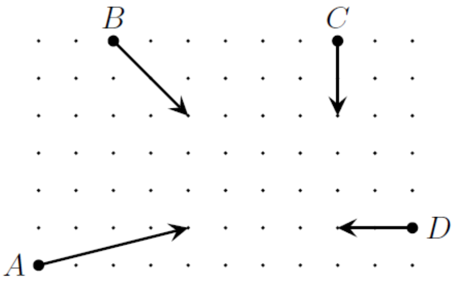
24. На цртежот десно е прикажано знамето на извидничкиот клуб на Фросина, на кое е нацртан гулаб во лет. Границата на гулабот е составена само од отсечки и делови од кружница. Површната на гулабот има плоштина $192\,cm^2$. Кои се димензиите на знамето?

A) $6\,cm \times 4\,cm$ B) $12\,cm \times 8\,cm$ C) $20\,cm \times 12\,cm$

D) $24\,cm \times 16\,cm$ E) $30\,cm \times 20\,cm$



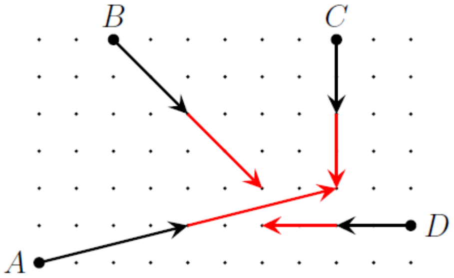
Решение. **D).** Со повлекувањето на сините отсечки (цртеж десно) ги добиваме портокаловиот триаголник 1 и црвениот триаголник 2 кои се складни. Понатаму, складни се и портокаловиот лик 3 и црвениот лик 4. Оттука плоштината на ликот на гулабот е еднаква на плоштината на правоаголникот кој е составен со 12 складни квадрати кои ја формираат мрежата. Значи, плоштината на еден мал квадрат е $192:12=16\,cm^2$, па затоа должината на неговата страна е $4\,cm$. Значи, димензиите на знамето се $4 \cdot 4=16\,cm$ и $6 \cdot 4=24\,cm$.



25. Дијаграмот на цртежот десно ги покажува почетните положби, насоките на движења и должините за кои четири автомобили A,B,C,D се поместуваат за пет секунди. Ако автомобилите шродолжат да се движат во истите насоки и со истите брзини, кои два автомобили ќе се судрат?

A) A и B B) A и C C) A и D D) B и C E) C и D

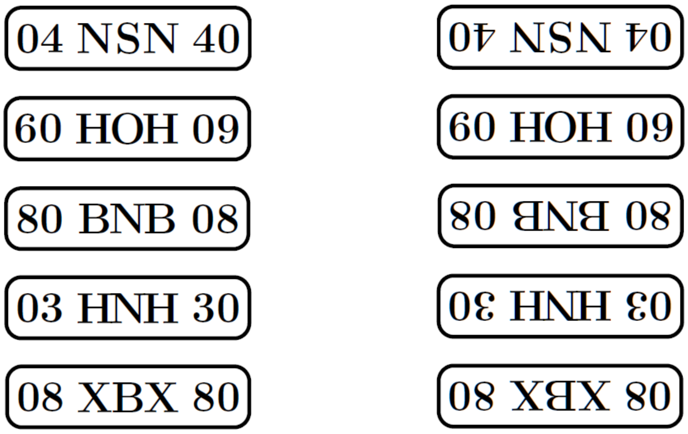
Решение. **В).** Во следните 5 секунди, автомобилите ќе се поместат за исто растојание во истите насоки, односно за истите вектори. Положбите на автомобилите се дадени на цртежот десно. Значи, ќе се судрат автомобилите А и С.



26. На Пабло од автомобилот му паднала регистерската таблица. Тој се збунил и ја прицврстил наопаку, но за среќа регистерската ознка останала иста. Која од следниве таблици може да е регистарската таблица на Пабло?

A) 04 NSN 40
B) 60 HOH 09
C) 80 BNB 08
D) 03 HNH 30
E) 08 XBX 80

Решение. **В).** Кога регистерската таблица се поставува наопаку, таа всушност се ротира за 180°. Дадените пет таблици ротирани се прикажани на долните цртежи:



Како што можеме да забележиме само втората таблица дава при ротација за 180° слика која е идентична на опргиналот.

27. Нека M е производот на периметарот на триаголник и збирот на висините на триаголникот, кој има плоштина еднаква на 1. Кое од следниве тврдења не е точно?

A) M може да е поголем од 1000,

B) секогаш M е поголем од 6,

C) M може да е еднаков на 18

D) ако триаголникот е рамностран, тогаш M е поголем од 16

E) M може да е помал од 12

Решение. **E).** Нека должините на страните на триаголникот се a,b,c, а должините на соодветнките висини се x,y,z. Тогаш од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}(a+b+c)(x+y+z) &\geq 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{xyz}\\ &=9\cdot 2\cdot\sqrt[3]{\frac{ax}{2}\cdot\frac{by}{2}\cdot\frac{cz}{2}}\\ &=18\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot 1}=18,\end{aligned}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$ и $x=y=z$, т.е. ако и само ако триаголникот е рамностран. Според тоа, точни се тврдењата B), C), D), но не е точно тврдењето E). Понатаму, за триаголник со плоштина 1 и страни

$$a=2\sqrt{\frac{64-\sqrt{64^2-2^2}}{2}}, b=64, c=64,$$

висините се

$$x=\sqrt{\frac{64+\sqrt{64^2-2^2}}{2}}, y=\frac{1}{32}, z=\frac{1}{32},$$

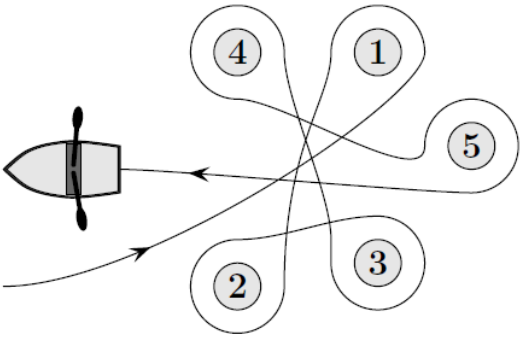
и важи

$$(a+b+c)(x+y+z)>1000.$$

IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. ЛОГИЧКИ ГЛАВОБОЛКИ

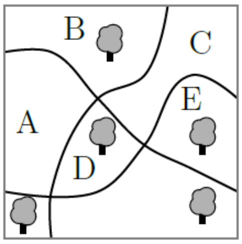
1. Андреј со чамец вози околу 5 пловки (цртеж десно). Кои пловки Андреј ќе ги заобиколи во насока на движењето на стрелките на часовникот?



A) 2, 3, 4 B) 1, 2, 3 C) 1, 3, 5
D) 2, 4, 5 E) 2, 3, 5

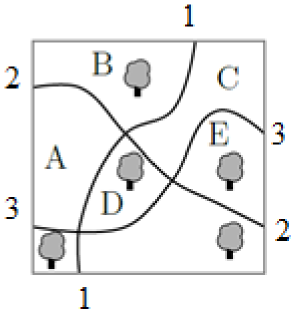
Решение. **E).** Тоа се пловките кои при движењето му се од десна страна, т.е. пловките 2, 3 и 5.

2. Во паркот кој е прикажан на цртежот десно има пет дрва и три патеки. Во кој дел од паркот треба да се засади уште едно дрва така што на двете страни од секоја патека ќе има еднаков број дрва?



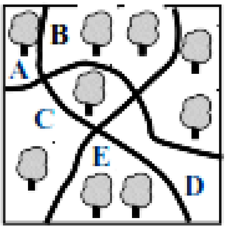
A) A B) B C) C D) D E) E

Решение. **B).** Патеките да ги означиме како на цртежот десно и притоа страните да ги разликуваме кога одиме од долу нагоре.



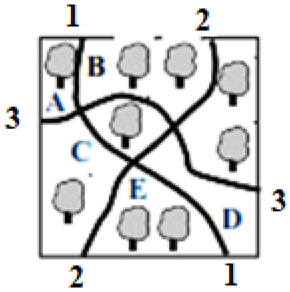
Лево од 1 имаме две, а десно три дрва. Лево од 2 имаме три, а десно две дрва. Лево од 3 имаме две, десно три дрва. Значи, дрвото треба да го засадиме во делот кој е лево од 1, десно од 2 и лево од 3. Тоа е делот B).

3. Во пракот кој е прикажан на цртежот десно има 9 дрва и три патеки. Во кој дел од паркот треба да се засади уште едно дрва така што на двете страни од секоја патека ќе има еднаков број дрва?



A) A B) B C) C D) D E) E

Решение. **E).** Патеките да ги означиме како на цртежот десно и притоа страните да ги разликуваме кога одиме од долу нагоре.

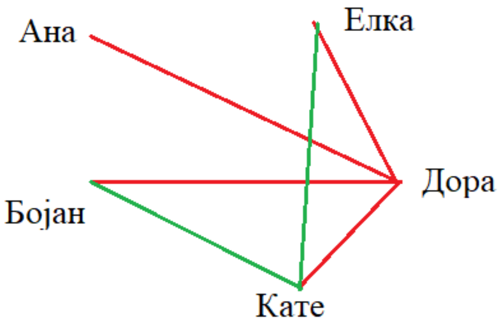


Лево од 1 имаме четири, а десно пет дрва. Лево од 2 имаме пет, а десно четири дрва. Лево од 3 имаме четири, десно пет дрва. Значи, дрвото треба да го засадиме во делот кој е лево од 1, десно од 2 и лево од 3. Тоа е делот E).

4. Ана, Бојан, Кате, Дора и Елка се сретнале на забава и се ракувале точно по еднаш со секој со кој се познаваат. Ана се ракувала еднаш, Бојан се ракувал двапати, Кате се ракувала трипати и Дора се ракувала четири пати. Колку пати се ракувал Ерик?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

Решение. **B).** Бидејќи Дора се ракувала четири пати, тоа значи дека се ракувала со сите. Од друга страна, бидејќи Ана се ракувала само еднаш, тоа значи дека се ракувал само со Дора. Кате се ракувала трипати, па како не се ракувала со Ана, таа се ракувала со Дора, со Бојан и со Елка. Бојан се ракувал двапати и тоа со Дора и со Кате.

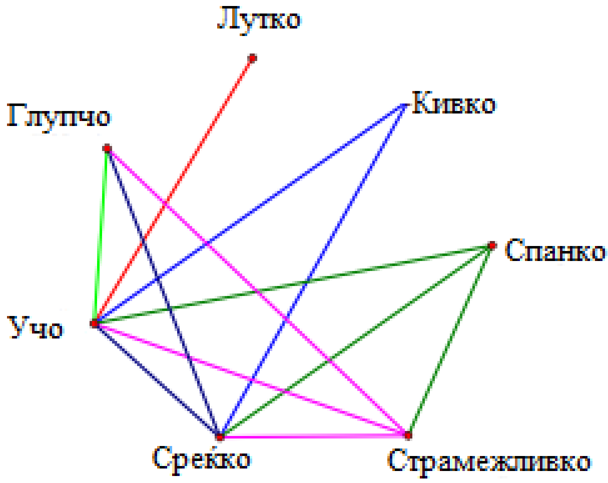


Конечно, добиваме дека Елка се ракувала Дора и со Кате, односно два пати. Ракувањата се прикажани на цртежот.

5. Снежана организирала турнир во шах во кој секое џуџе одиграло една партија со секое од преостанатите џуџиња. Во понеделник Лутко одиграл една партија, Кивко две, Спанко три, Страмежливко 4, Среќко пет и Учо шест партии. Колку партии во понеделникот одиграл Глупчо?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. C). Да ги прикажеме графички одиграните партии во понеделник. Тргнуваме од Учо и ги поврзуваме останатите шест џуџиња. Со тоа Лутко е поврзан. Сега одиме со Среќко кој го поврзуваме со преостанатите четири џуџиња. Со тоа Кивко е поврзан. Потоа одиме со Страмежливко кој го поврзуваме со преостанатите две џуџиња. Со тоа Спанко е поврзан и се нацртани сите врски додадени во условот на задачата. Значи, Глупо ги одиграл партиите со Учо, Среќко и Страмежливко, т.е. одиграл 3 партии.



6. Наставничката Ирина прашала пет од своите ученици колку од нив учеле претходниот ден. Петар рекол ниту еден, Биљана рекла само еден, Оливера рекла точно два, Евгенија рекла точно три и Горан рекол точно четири. Ирина знае дека оние ученици што не учеле претходниот ден не ја кажуваат вистината, а оние што учеле ја кажуваат вистината. Колку од овие ученици учеле претходниот ден?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. B). Бидејќи петте деца дале пет различни изјави, само едно од децата дало точен исказ.

Тоа значи, само едно дете учело и тоа е Билјана.

7. Во една чинија со овошје има двапати повеќе јаболки од круши. Кристина и Лилјана го поделија овошјето од чинијата така што Кристина зеде двапати повеќе парчиња овошје од Лилјана. Кој од следниве искази е секогаш вистинит?

A) Кристина зеде барем една круша.

B) Кристина зеде двапати повеќе јаболка од круши.

C) Кристина зеде двапати повеќе јаболка од Лилјана.

D) Кристина зеде толку јаболка колку што Лилјана доби круши.

E) Кристина зеде круши онолку колку што Лилјана доби јаболка.

Решение. **E).** Исказот A) не е точен ако Кристина ги земе сите јаболка, а притоа и исказот D) не е точен. Исказот B) не е точен ако Кристина ги земе сите круши и исто толку јаболка, а притоа и исказот C) не е точен.

Ќе покажеме дека исказот E) е секогаш точен. Нека во кутијата има a круши и $2a$ јаболка. Тогаш Кристина зела $2a$ парчиња овошје, а Лилјана зела a парчиња овошје. Ако Кристина зела x круши, тогаш таа зела $2a-x$ јаболка. Според тоа, во кутијата останале $a-x$ круши и $2a-(2a-x)=x$ јаболка кои ги зела Лилјана. Конечно, Кристина зела x круши, а Лилјана x јаболка, што значи дека секогаш е точен исказот E).

8. Глувците цел ден краделе кашкавал насечен на парчиња. Ги гледа мрзливиот мачор Дивко, кој го забележал следново: секое глувче украло различен број на парчиња, секое глувче украло помалку од 10 парчиња, и ниту едно глувче не украло двојно повеќе парчиња од друго глувче. Колку најмногу глувчиња можел да забележи Дивко?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Решение. **C).** Не може да се истовремено украдени 1 и 2 парчиња кашкавал, 2 и 4 парчиња кашкавал, 4 и 8 парчиња кашкавал и 3 и 6 парчиња кашкавал. Значи, може да се украдени

$$2,3,5,7,8,9; \qquad 2,5,6,7,8,9; \qquad 1,3,4,5,7,9;$$
$$1,4,5,6,7,9; \qquad 1,3,5,7,8,9; \qquad 1,5,6,7,8,9.$$

Според тоа, Дивко најмногу може да забележи 6 глувчиња.

9. Матео има волшебен квадрат кој зборува. Должината на страната на квадратот е $32\,cm$. Кога кажува вистина страната на квадратот се намалува за $2\,cm$, а ако излаже неговиот периметар двојно се зголемува. Квадратот кажал четири тврдења од кои две се вистинити и две не се вистинити, но не е познато во кој редослед тврдењата се кажани. Колку е најголемата можна вредност на периметарот на квадратот по овие четири тврдења?

A) 28 B) 80 C) 88 D) 112 E) 120

Решение. **D).** *Прв начин.* Кога квадратот не лаже неговиот периметар се намалува за $4\cdot 2=8\,cm$, а кога лаже периметарот се зголемува двојно. Затоа најголемиот периметар се добива ако прво истиот два пати двојно се зголеми, а потоа два пати се намали за по $8\,cm$. Почетната вредност на периметарот е $32\,cm$, па редоследно тој ќе биде $64\,cm, 128\,cm, 120\,cm$ и $112\,cm$.

Втор начин. Почетниот периметра е $32\,cm$. Кога квадратот кажува лага да означиме со Л, а кога кажува вистина да означиме со В. Имаме шест можности за искажување на две лажни и две вистинити тврдења:

- ВВЛЛ и периметарот редоследно е $24\,cm, 16\,cm, 32\,cm, 64\,cm$,
- ВЛЛВ и периметарот редоследно е $24\,cm, 48\,cm, 96\,cm, 88\,cm$,
- ЛЛВВ и периметарот ресоледно е $64\,cm, 128\,cm, 120\,cm, 112\,cm$,

- ЛВВЛ и периметарот редоследно е $64\,cm, 56\,cm, 48\,cm, 96\,cm$,
- ЛВЛВ и периметарот редоследно е $64\,cm, 56\,cm, 112\,cm, 104\,cm$,
- ВЛВЛ и периметарот редоследно е $24\,cm, 48\,cm, 40\,cm, 80\,cm$.

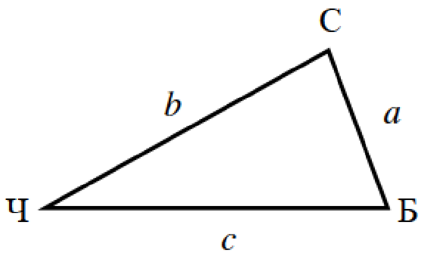
Значи, во завосност од распоредот на тврдењата имаме шест можни периметри, од кои најголем е $112\,cm$.

10. Секое од трите врапчиња Сики, Чаки и Баки, направиле сопствено гнездо. Сики вели: „Моето гнездо е повеќе од два пати подалеку од гнездото на Чаки, отколку од гнездото на Баки“. Чаки вели: „Моето гнездо е повеќе од два пати подалеку од гнездото на Баки, отколку од гнездото на Сики“. Баки вели: „Моето гнездо е повеќе од два пати подалеку од гнездото на Чаки, отколку од гнездото на Сики“. Ако се знае дека две од врапчињата ја говорат вистината, кое од нив лаже?

A) Сики B) Чаки C) Баки D) ниту еднож

E) не може да се определи

Решение. **B).** Можеме да сметаме дека во општ случај гнездата на трите птици се темиња на триаголник. Овој триаголник да го означиме со *ЧБС* (Ч гнездото на Чаки, Б гнездото на Баки и С гнездото на Сики). Можно е триаголникот да е дегенериран, т.е. сите три гнезда да припаѓаат на една права. Должините на страните на триаголникот да ги означиме со a, b, c (види цртеж). Од условот на задачата следува $b > 2a, c > 2b, c > 2a$. Можни се следниве случаи:



1) Сики и Чаки говорат вистина, а Баки лаже. Тогаш $a < 0{,}5b$, па од неравенството на триаголник следува $2b < c \le a + b < 1{,}5b$, што не е можно.

2) Чаки и Баки говорат вистина, а Баки лаже. Тогаш $b<0,5c$ и $a<0,5c$. Повторно од неравенството на триаголник следува $c\le a+b<0,5c+0,5c=c$, што не е можно.

3) Сики и Баки говорат вистина, а Чаки лаже. Тогаш $a<0,5b$, па од неравенството на триаголник следува $c\le a+b<1,5b$, што не противречи на спротивното тврдење на Чаки, т.е. на $c\le 2b$. Значи, овој случај е можен.

11. Секоја година меѓународниот математички натпревар Кенгур без граници се одржува во третиот по ред четврток во месец март. Кој е последниот датум во кој може да се одржи натпреварот во некоја година?

A) 14 март B) 15 март C) 20 март D) 21 март E) 22 март

Решение. **D).** Третиот четврток е на најкасниот датум во месецот ако првиот четврток е на најкасниот датум во месецот. Првиот четврток најкасно може да е на 7 март. Според тоа, вториот четврток најкасно е на 14 март и третиот четврток најкасно е на 21 март.

12. Родендените на Ана, Бети, Кате, Данче и Ева, во некој редослед се на $20.02.2001$, $12.03.2000$, $20.03.2001$, $12.04.2000$ и $23.04.2001$. Ана и Ева се родени во ист месец. Исто така Бети и Кате се родени во ист месец. Ана и Кате се родени во ист ден но во различен месец. Исто така, Данче и Ева се родени во ист ден но во различен месец. Кое од овие девојчиња е најмладо?

A) Ана B) Бети C) Кате D) Данче E) Ева

Решение. **B).** Исти месеци се во датите $12.03.2000$ и $20.03.2001$, односно во датите $12.04.2000$ и $23.04.2001$, па ова се родендените на Ана и Ева, односно на Бети и Кате, во некој распоред.

Понатаму, исти денови се во датите 12.03.2000 и 12.04.2000, како и во датите 20.02.2001 и 20.03.2001, па ова се родендените на Ана и Кате, односно на Данче и Ева, во некој распоред.

Во четирите парови се повторуваат девојчињата Ана, Ева и Кате и се повторуваат датите 12.03.2000, 12.04.2000 и 20.03.2001. Од условот за месеците останува датата 23.04.2001 и девојчето Бети, а од условот за деновите останува датата 20.02.2001 и девојчето Данче. Според тоа, најмлада е Бети, која е родена на 23.04.2001.

Забелешка. Ако се искористат добиените заклучоци лесно се добива дека Ана е родена на 12.03.2000, Ева е родена на 20.03.2001 и Кате е рдоена на 12.04.2000.

13. Во сад со овошје има јаболка, грозје, цреши, јагоди и банани. Ана сака јаболка. Петар сака јаболка, цреши, јагоди и банани. Лена сака грозје, цреши, јагоди и банани. Доротеј сака јаболки, грозје и цреши. Елица сака јаболки и цреши. Овошјето го поделиле така што секој добил различен вид овошје и тоа што го сака. Кој ги добил црешите?

A) Ана B) Петар C) Лена D) Доротеј E) Елица

Решение. **E).** Ако секој го добил овошјето кое го сака, тогаш Ана добила јаболка, Сега, Елица сака јаболка и цреши, па како јаболката се кај Ана, заклучуваме дека Елица добила цреши.

Понатаму, Доротеј добил грозје, а Петар и Лена добиле јагоди и банани во некој редослед.

14. Броевите 2, 5, 7 и 12 се запишани на една страна од четирите карти, по еден број на секоја карта, а на другата страна од картите е запишано: „бројот е делив со 7“, „бројот е прост“, „бројот е непарен“ и „бројот е поголем од 100“, по една реченица на секоја карта. Познато е дека бројот запишан на секоја од картите не соодветствува со

тоа што е запишано на другата нејзина страна. Кој број е запишан на картата на која стои „бројот е поголем од 100“?

A) 2 B) 5 C) 7 D) 12

E) не е можно да се определи

Решение. C). Да забележиме дека:

- исказот „бројот е делив со 7“, може да е запишан на картите со броевите 2, 5 или 12,
- исказот „бројот е прост“ може да е запишан само на картата со бројот 12,
- исказот „бројот е непарен“ може да е запишан на картите со броевите 2 или 12,
- исказот „бројот е поголем од 100“ може да е запишан на било која од картите.

Сега, очигледно е дека на картата со број 12 е запишано „бројот е непарен“, на картата 2 е запишано „бројот е непарен“, на картата со број 5 е запишано „бројот е делив со 7“ и на картата 7 е запишано „бројот е поголем од 100“.

15. Тврдењата подолу се однесуваат на еден четирицифрен број.

4132 Две цифри се точни, но се на погрешни места.

9826 Една цифра е точна и е на вистинското место.

5079 Две цифри се точни, но една е на погрешно место.

2741 Една цифра е точна и е на погрешно место.

7642 Ниту една цифра не е точна.

Која е цифрата на единиците на четирицифрениот број?

A) 0 B) 1 **C)** 3 D) 5 E) 9

Решение. C). Од петтото тврдење следува дека цифрите 2, 4, 6 и 7 не се од бараниот број, па затоа имаме:

_13_ Две цифри се точни, но се на погрешни места.

98_ _ Една цифра е точна и е на вистинското место.
50_9 Две цифри се точни, но една е на погрешно место.
_ _ _1 Една цифра е точна и е на погрешно место.

Сега од второто тврдење имаме дека една од цифрите 8 или 9 е точна. Ако тоа е цифрата 8, тогаш од третото тврдење добиваме дека 5 и 0 се цифри од бараниот број. Значи, четирицифрениот број е запишан со цифрите 1, 3, 8, 5 и 0, што не е можно бидејќи тоа се пет различни цифри. Значи од цифрите 9 и 8 цифрата 9 е во записот на бараниот број. Сега имаме:

_13_ Две цифри се точни, но се на погрешни места.
9_ _ _ Една цифра е точна и е на вистинското место.
50_9 Две цифри се точни, но една е на погрешно место.
_ _ _1 Една цифра е точна и е на погрешно место.

Од вториот исказ следува дека цифрата 9 е цифра на илјадитите, па како во 50_9 само една цифра е на погрешно место, добиваме дека цифрата 5 не е во записот на бројот и бројот е 90_ _. Сега имаме

_13_ Две цифри се точни, но се на погрешни места.
90 _ _ Две цифри се точни и се на вистинските места.
_ _ _1 Една цифра е точна и е на погрешно место,

од каде следува дека бараниот број е 9013. Цифрата на единиците на бројот е 3.

16. Бранко е 5 *cm* повисок од Арон, но 10 *cm* е понизок од Цане. Дарко е 10 *cm* повисок од Цане, но 5 *cm* е понизок од Емил. Кој од следниве искази е точен?

А) Арон и Емил се со еднакви височини

Б) Арон е 10 *cm* повисок од Емил

В) Арон е 10 *cm* понизок од Емил

Д) Арон е 30 *cm* повисок од Емил

E) Арон е 30 *cm* понизок од Емил

Решение. **E).** Нека височините на височините на Арон, Бранко, Цане, Дарко и Емил ги означиме со a,b,c,d,e, соодветно. Тогаш важи

$$b=a+5, \qquad c=b+10=a+15,$$
$$d=c+10=a+25, \qquad e=d+5=a+30.$$

Според тоа, Арон е 30 *cm* понизок од Емил.

17. Еден компјутерски фајл содржи информации за Раде, Фросина, Лена, Жана и Ана. Информацијата за Раде е по информацијата за Лена, а информацијата за Фросина е пред таа за Раде и непосредно по информацијата за Жана. Притоа информацијата за Лена е по информацијата за Жана, но Жана не е на прво место. На кое место во фајлот е информацијата за Ана?

A) прво B) второ C) трето D) четврто E) петто

Решение. **A).** Информациите ќе ги означиме со почетните имиња на децата, кои букви ќе го означуваат местото на кое се наоѓа информацијата. Бидејќи информацијата за Раде е по информацијата за Лена имаме $L<R$. Слично $F<R$ и $Z<F$. Исто така $Z<L$, па затоа $Z<L<R$ и $Z<F<R$. Но, Жана не е на прво место, што значи дека Z не е најмал број, па затоа најмал број е A, што значи дека информацијата за Ана е на прво место.

18. Во една трка, Ласте стигнал на целта пред Максим, Виктор стигнал на целта по Јане, Максим стигнал пред Јане и Едвин стигнал на целта пред Виктор. Кој од петте тркачи, стигнал на целта последен?

A) Виктор B) Максим C) Ласте D) Јане E) Едвин

Решение. **A).** Ако со почетните букви на имињата ги означиме времињата на пристигнување на натпреварувачите, добиваме

$$L < M, J < V, M < J, E < V, \text{ т.е. } L < M < J < V \text{ и } E < V.$$

Значи, последен стигнал Виктор.

19. Матеј и Мартин учествувале на една маратонска трка. Откако трката завршила тие забележале дека Мартин завршил пред двојно повеќе маратонци од оние што завршиле пред Матеј, а Матеј завршил пред 1,5 пати повеќе маратонци од оние што завршиле пред Мартин. Мартин завршил на 21-вото место. Колку вкупно маратонци учествувале во трката?

A) 31 B) 41 C) 51 D) 61 E) 81

Решение. **B).** По Мартин биле $2a$, а пред Матеј биле a маратонци. По Матеј биле $1{,}5b$, а пред Мартин биле b маратонци. Мартин бил 21-ви, па затоа $b = 20$. Понатаму, $2a + b = a + 1{,}5b$, од каде добиваме $a = 0{,}5b = 10$. Конечно, во трката учествувале вкупно $2a + b + 1 = 41$ маратонец.

20. Горјан стои во ред во кој бројот на луѓето е содржател на бројот 3. Тој забележал дека пред него и зад него има еднаков број луѓе. Во редот ги видел и своите двајца пријатели, двајцата стојат зад него. Едниот пријател е на 19-то место, а другиот е на 28-то место. На кое место е Горјан?

A) 14. B) 15. C) 16. D) 17. E) 18.

Решение. **D).** Бидејќи пред Горјан и зад Горјан има по n луѓе тој е на $(n+1)-$место и во редот има $2n+1$ луѓе. Затоа $n+1 < 19$ и $28 < 2n+1$. Последното значи дека $n \in \{14,15,16,17\}$. Според тоа, $2n+1 \in \{29,31,33,35\}$. Но, бројот на луѓето е содржател на бројот 3, па затоа во редот има 33 луѓе и Горјан е 17-ти во редот.

21. Во една вреќа се наоѓаат топки со пет различни бои, со исти големина и маса. Две од нив се црвени, три се сини, десет се бели, четири се зелени и три се црни. Миле вади топки од вреќата, една по една, без да ги враќа и без да гледа во нив. Кој е најмалиот број на топки кои што тој треба да ги извади од вреќата за да меѓу нив има две топки со иста боја?

A) 2 B) 12 C) 10 D) 5 E) 6

Решение. **E).** Бидејќи имаме топки во 5 бои, ако Миле извади 5 топки, може да се случи сите да се со различни бои. Но, ако извади шест топки, тогаш од принципот на Дирихле следува дека две топки мора да се истобојни.

22. Во една кутија има само зелени, црвени, сини и жолти топчиња, со иста големина и маса. Ако од кутијата без гледање извадиме 27 топчиња, тогаш меѓу извадените топчиња секогаш има барем едно зелено топче. Ако од кутијата без гледање извадиме 25 топчиња, тогаш меѓу извадените топчиња секогаш има барем едно црвено топче. Ако од кутијата без гледање извадиме 22 топчиња, тогаш меѓу извадените топчиња секогаш има барем едно сино топче. Ако од кутијата без гледање извадиме 17 топчиња, тогаш меѓу извадените топчиња секогаш има барем едно жолто топче.

Кој е најголемиот можен број топчиња во таа кутија?

A) 27 B) 29 C) 51 D) 87 E) 91

Решение. **B).** Со a, b, c, d редоследно да го означиме бројот на зелените, црвените, сините и жолтитие топчиња. Бидејќи меѓу 27 топчиња има барем едно зелено добиваме $b+c+d \leq 26$. Бидејќи меѓу 25 топчиња има барем едно црвено добиваме $a+c+d \leq 24$. Бидеј-ќи меѓу 22 топчиња има барем едно сино добиваме $a+b+d \leq 21$. Бидејќи меѓу 17 топчиња има барем едно жолто добиваме $a+b+c \leq 16$.

Ги собераме добиените неравенства и наоѓаме $3a+3b+3c+3d \leq 87$, односно $a+b+c+d \leq 29$. Значи, најголемиот можен број топчиња во кутијата е 29.

23. Во касата на пиратите вкупно има 30 златни, сребрени и бронзени монети. За да провери дали се лојални, капетанот Флинт побарал од пиратите да ги пребројат монетите во касата независно еден од руги ги запишал резултатите од нивните броења, кои се прикажани во табелата. На местата на кои е прашалниот знак, броевите биле зачкртани и не се гледаат. Само еден од пиратите точно ги пребројал монетите, а останатите тројца соопштиле погрешни броеви во сите три одговори. Кој пират точно ги пребројал моне-тите?

	Златни	Сребрени	бронзени
Том	?	9	11
Пит	7	?	12
Цим	10	?	10
Цо	9	10	?

A) Том B) Пит C) Цим D) Цо

E) не може да се определи

Решение. B). Ако Том точно ги пребројал монетите, тогаш тој соопштил дека има 10 златни монети, што значи дека и Цим точно ги пребројал златните монети, што е противречност. Ако Цим точно ги пребројал монетите, тогаш тој соопштил дека има 10 сребрени монети, што значи дека и Цо точно ги пребројал сребрените монети, што е противречност. Ако Цо точно ги пребројал монетите, тој соопштил дека има 11 бронзени монети, што значи дека и Том точно ги пребројал бронзените монети, што е противречност. Значи, останува Пит точно да ги пребројал монетите, па тој соопштил дека има 11 сребрени монети. Тогаш табелата изгледа

	Златни	Сребрени	бронзени
Том	10	9	11
Пит	**7**	**11**	**12**
Цим	10	10	10
Цо	9	10	11

како што е прикажано на цртежот горе десно, и тогаш немаме противречност.

24. Лав се наоѓа во едната од трите соби. На вратата на првата соба пишува „Лавот е тука“. На врата на втората соба пишува „Лавот не е тука“. На вратата на третата соба пишува „$2+3=2\times 3$“. Од трите реченици напишани на вратите само една е вистинита. Во која соба е лавот?

A) Во првата соба .

B) Во втората соба.

C) Во третата соба.

D) Може да биде во која било соба.

E) Може да биде во првата или втората соба.

Решение. **C).** Јасно, исказот на третата врата не е вистинит. Тогаш ако е вистинит исказот на првата врата, вистинит ќе биде и исказот на втората врата што е противречност. Значи, исказот на првата врата не е вистинит, а вистинит е исказот на втората врата. Тоа значи, лавот не е во првата и не е во втората соба, па останува лавот да е во третата соба.

25. Хотел на еден Хрватски остров се рекламира користејќи го слоганот: „350 сончеви денови секоја година!“. Ако рекламата е точна, колку најмалку денови во 2018 година треба да остане Вангел на островот за да биде сигурен дека во текот на одморот ќе има два последователни сончеви денови?

A) 17　　B) 21　　C) 31　　D) 32　　E) 35

Решение. **D).** Бидејќи 2018. година не е престапна, таа има 365 дена. Од $365-350=15$ добиваме дека на островот има 15 облачни денови.

Најдолго треба да се остане ако деновите наизменично се менуваат сончев ден и облачен ден.

Ако првиот ден е сончев, тогаш првите 15 парни денови 2, 4, 6,..., 30 се облачни, па затоа 31. и 32. ден се сончеви.

Ако првиот ден е облачен, тогаш првите 15 непрани денови 1, 3, ..., 29 се облачни, па затоа 30. и 31. ден се сончеви.

Значи, во неповолниот случај Вангел мора да остане најмалку 32 дена.

26. На еден остров живеат само вистинољупци и лажговци. Лажговците секогаш лажат, а вистинољупците секогаш ја говорат вистината. Во еден ред имало 25 жители од островот. Секој од нив, освен првиот, рекол дека човекот кој е пред него во редот е лажливец. Првиот во редот дека сите кои се зад него во редот се лажливци. Колку луѓе во редот биле лажливци?

A) 0 B) 12 C) 13 D) 24

E) не е можно да се определи

Решение. C). Лажливците ќе ги означуваме со Л, а вистинољупците цо В. Ако последниот во редот е лажливец, тогаш тој што е одма пред него е вистинољубец. Понатаму, тој што е одма пред него е лажчивец итн. Така добиваме дека низата е

ЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛ.

Бидејќи првиот во редот рекол дека сите зад него се лажливци, очигледно тој излагал, т.е. горната состојба е можна. Значи, во редот има 13 лажливци.

Ако последниот во редот е вистинољубец, тогаш како погоре заклучуваме дека редот е

ВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВ.

Но, првиот рекол дека сите зад него се лажливци, што не е точно, Значи, овој случај не е можен.

27. Горјан ги прашал Зоран и Петар кој ден е денес. Зоран секогаш лаже во понеделник, вторник и среда, а Петар секогаш лаже во четврток, петок и сабота. Зоран рекол: „Вчера беше еден од деновите кога јас лажам“. Истиот одговор го дал и Петар. Кој ден е денес?

A) четврток B) петок C) сабота D) недела E) понеделник

Решение. **A).** Ако денес е ден кога Зоран говори вистина, тогаш денес е четврток, бидејќи тоа е единствениот ден во кој по деновите во кои лаже, тој говори вистина.

Ако денес е ден кога Зоран лаже, тогаш вчера тој говорел вистина, па затоа денес мора да е понеделник бидејќи тоа е единствениот ден во кој по деновите во кои говори вистина, тој лаже.

Значи, по изјавата на Зоран Горјан знае дека денес е понеделник или четврток.

На потполно ист начин од изјавата на Петар следува дека денес е четврток или недела.

Бидејќи четврток е единствен ден кој е можен и во двата случаја заклучуваме дека денес е четврток.

28. Едно дете секогаш кажува вистина во четврток и петок, а секогаш лаже во вторник. Другите денови од седмицата случајно кажува вистина или лага. Во седум последователни денови го прашале за неговото има. Прите шест дена ги дал следниве одговори: Јован, Боби, Јован, Боби, Перо, Боби. Кој одговор го дал седмиот ден?

A) Јован B) Боби C) Перо D) Диме E) друг одговор

Решение. **А).** Бидејќи во низата немаме две исти последователни одговори, заклучуваме дека наведените одговори се или од петок до среда, или од сабота до четврток.

Нека наведените одговори се од сабота до четврток. Значи, детето се вика Боби. Но тоа значи дека во вторник тој кажал Боби, т.е. дал точен одговор, што е противречност.

Нека наведените одговори се од петок до среда. Значи, детето се вика Јован. Сега, тој во во вторник кажал Перо. Што значи дека излагал, па затоа во четврток кажал точен одговор, т.е. кажал дека се вика Јован.

29. Во собата се наоѓаат неколку луѓе. Секој од нив е или лажливец (кој секогаш лаже) или витез (кој секогаш ја говори вистината). Од собата се слушнале неколку гласови:

Прв глас. Во собата има најмногу тројца. Сите сме лажговци.

Втор глас. Во собата има најмногу четворица. Не сме сите лажговци.

Трет глас. Во собата има петмина. Тројца се лажговци.

Колку луѓе има во салата и колку од нив се лажговци?

А) 3, од кои 1 е лажливец

B) 4, од кои 3 се лажговци

C) 4, од кои 2 се лажговци

D) 5, од кои 2 се лажговци

E) 5, од кои 3 се лажговци

Решение. **C).** Првиот глас е на лажливец, бидејќи како витез не може да каже: „Сите сме лажговци.“ Според тоа, не е точен и неговиот прв исказ. Значи, во собата има повеќе од тројца.

Вториот глас е на витез, бидејќи неговиот втор исказ е точен. Значи, точен е и неговиот прв исказ. Значи, во собата нема повеќе од четворица. Ако се земе и првиот исказ на првиот човек, заклучуваме дека во собата има точно четворица.

Третиот глас е на лажливец, бидејќи неговиот прв исказ не е точен. Тогаш не е точен и неговиот втор исказ (дека има тројца лажговци). Значи, во собата има двајца лажговци и двајца витези.

30. На еден остров имало 2013 жители. Некои од нив се витези, а останатите се лажговци. Витезите секогаш ја зборуваат вистината, а лажговците секогаш лажат. Секој ден еден од жителите велел: По моето заминување од островот, бројот на витези на островот ќе биде ист со бројот лажговци, и потоа заминувал од островот. По 2013 искажувања сите жители на островот заминале. Колку од нив биле лажговци?

A) 0 B) 1006 C) 1007 D) 2013

E) не е можно да се определи

Решение. **B).** Бидејќи по 2013 кажувања сите жители на островот заминале, т.е. останале 0 жители, последниот жител кој заминал бил витез. Јасно, претпоследниот жител кој заминал не може да биде витез, бидејќи ако е витез, тогаш ќе останел само еден жител, а витезите не лажат. Понатаму, пред да останат 2 жители, лицето кое заминало мора да е витез, а пред да останат три жители лицето кое заминало мора да е лажго. Продолжувајќи ја постапката добиваме дека од назад последователно заминувал: витез, лажго, витез, лажго, витез итн. што значи дека на островот имало 1007 витези и 1006 лажговци.

31. Во еден град има 21 витез и 2000 лажговци. Витезите секогаш ја говорат вистината, а лажговците секогаш лажат. Волшебник поделил 2020 од овие 2021 луѓе на 1010 парови. Секој човек во парот го

опишува другиот човек од парот или како витез или како лажливец. Како резултат на тоа, 2000 луѓе беа наречени витези, а 20 луѓе беа наречени лажговци. Колку парови составени од двајца лажговци имало во поделбата?

A) 980 B) 985 C) 990 D) 995 E) 1000

Решение. **D).** Со В да означуваме витез, а со Л да означуваме лажливец. Тогаш во поделбата волшебникот може да состави парови: В-В, В-Л, Л-Л. Сега секој од трите вида парови го дал следниов опис на парот:

- парот В-В дал опис В-В,
- парот В-Л дал опис Л-Л,
- парот Л-Л дал опи В-В.

Бидеји 20 луѓе се наречени лажговци добиваме дека 10 парови одговориле Л-Л, што значи дека имаме 10 парови од видот В-Л. Во овие 10 парови има 10 лажговци, што значи дека преостанатите $2000-10=1990$ лажговци се распоредени во парови Л-Л. Конечно, имаме $1990:2=995$ парови составени од двајца лажговци.

2. ПАТЕКИ И ЛАВИРИНТИ

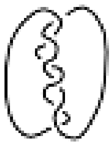
1. Колку ленти има на цртежот десно?

А) 3 В) 4 С) 5

D) 6 Е) 7

Решение. **В).** На дадениот цртеж има 6 краеви и тоа се 3 ленти. Исто така има и едно затворена лента, што значи четири ленти.

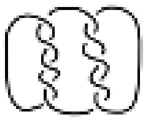
2. Во која од наведените плетенки е употребен повеќе од еден конец?



I

II

III



IV

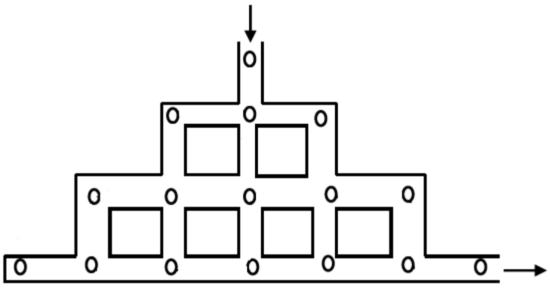
V

А) I, III, IV, V В) III, IV, V С) I, III, V

D) во сите патеки Е) во ниту една патека

Решение. **С).** За плетенката I се употребени 2 конци, за плетенката II е употребен 1 конец, за плетенката III се употребени 2 конци, за плетенката IV е употребен 1 конец и за плетенката V се употребени 3 конци.

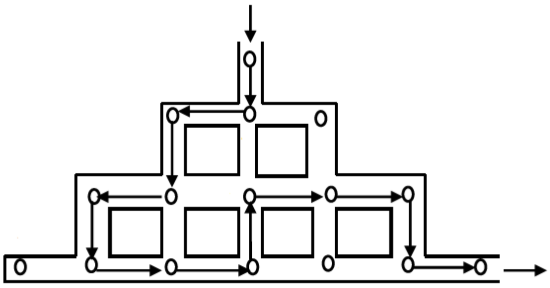
3. Хрчакот Фридолин оди во Земјата на чудата. Пред да влезе во оваа легендарна земја, тој мора да помине низ систем на тунели прикажан на цртежот. Не му е дозволено да се врати на раскрсница која веќе ја поминал. На секоја раскрсница нашол семка од тиква.



Колку најмногу семки од тиква хрчакот Фридолин може да собере?

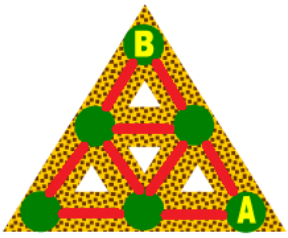
A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

Решение. B). Хрчакот најмногу семки ќе собере ако прво отиде до најдалечната лева раскрсница, а потоа одејќи десно, горе и долу помине најголем број раскрсници кои пред тоа не ги поминал. Една од патеките по кои треба да се движи е прикажана на цртежот десно.



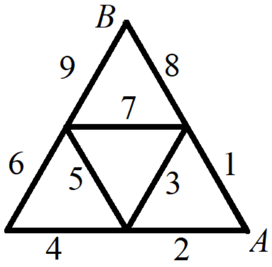
Како што можеме да видиме хрчакот Фридолин ќе собере 13 семки од тиква.

4. Во паркот секоја од деветте патеки кои ги поврзуваат кружните одмаралишта има должина $100\ m$. Ана сака да направи прошетка, така што да тргне од точката A и да стигне во точката B (види цртеж). Притоа, таа по една патека може да помине само еднаш. Која е должината на најдолгиот пат кој Ана може да го избере?



A) $900m$ B) $800m$ C) $700m$ D) $600m$ E) $400\ m$

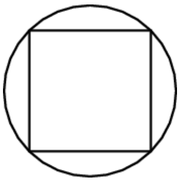
Решение. C). Патиштата да ги нумерираме како на цртежот десно. Бидејќи точките A и B се поврзани само со по два патишта, а тие се почетна и крајна точка, јасно е дека може да се помине само по еден пат со кои се поврзани овие точки. Значи, Ана не може да помине повеќе од седум патишта, т.е. повеќе од $700m$.

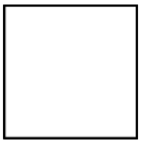


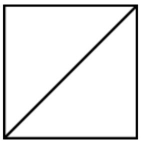
Следните маршрути покажуваат дека Ана може да помине $700m$:

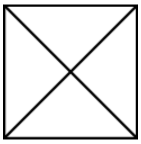
2, 3, 7, 5, 4, 6, 9 или 2, 3, 7, 6, 4, 5, 9 или 2, 5, 6, 4, 3, 7, 9 или
2, 5, 7, 3, 4, 6, 9 или 2, 4, 6, 5, 3, 7, 9 или 2, 4, 6, 7, 3, 5, 9.

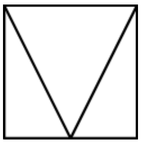
5. Кој од следниве цртежи не може да се нацрта без да се крева моливот од листот или без да се црта некоја од линиите по втор пат?

A) 

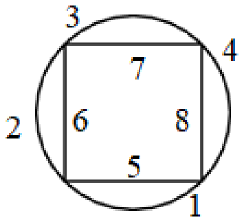
B) 

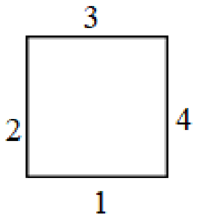
C) 

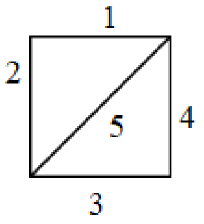
D) 

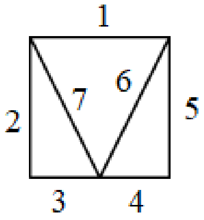
E) 

Решение. **D).** Кога цртаме само низ почетното и крајното теме на патот кој го исцртуваме можеме да поминеме по непарен број линии чија крајна точка е тоа теме. Имено, низ другите темиња имаме влез и излез, што значи при секое поминување имаме парен број линии. Тоа значи дека фигурата која има повеќе од две темиња поврзани со непарен број линии не може да се нацрта. Во нашиот случај тоа е фигурата D). На долните цртежи е покажано како може да се нацртаат останатите фигури.

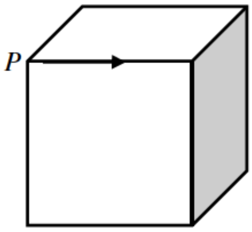








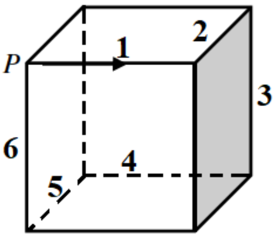
6. Тргнувајќи од точката P мравка се движи по работ на коцката во насока на стрелката. На крајот на работ таа врти и тргнува по десниот раб, додека стигне до неговиот крај. Потоа врти



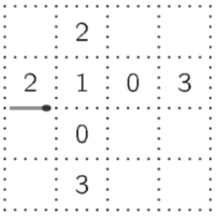
и тргнува по левиот раб, дои до неговиот крај, врти по десниот раб итн. се додека не се врати во точката P. Ако должината на работ на коцката е 1, определи ја должината на патот на мравката.

A) 2 B) 4 C) 6 D) 9 E) 12

Решение. **C).** Патот кој мравката го поминува при опишаниот начин на движење е прикажан на цртежот десно. Значи таа ќе помине 6 отсечки со должина 1, т.е. должината на патот ќе биде еднаква на 6.

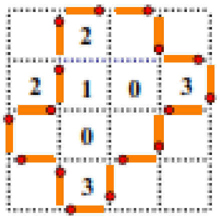


7. Ана сака да направи пат од чкорчиња, притоа користејќи што е можно помалку чкорчиња. Таа го става секое чкорче на парче хартија, како на цртежот, во правец на испрекинатите линиии. Нејзиот пат треба да стигне до левиот дел од чкорчето кое е веќе поставено. Бројот кој се наоѓа во едно квадратче го означуваат бројот на чкорчињата кои треба да бидат поставени околу тоа квадратче. Колку чкорчиња ќе употреби Ана?



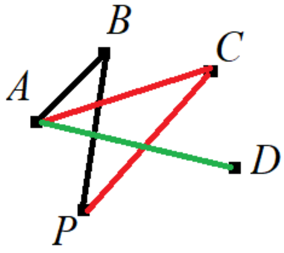
A) 12 B) 14 **C)** 16 D) 18 E) 20

Решение. **C).** Патот кој треба да го направи Ана е прикажан на цртежот десно. Според тоа, за правење на патот Ана ќе употреби 16 чкорчиња.



8. Тргнувајќи од пристаништето со брод, треба да ги посетиме острови A, B, C, D. Познато е дека до B или до C можеме да стигнеме само од пристаништето или од островот A, а D е поврзан само со A. Ако пристаништето и островите се означени со точки на план, а патувањето од точка до точка со отсечка, кој е најмалиот број отсечки потребни за да се посетат сите острови?

A) 6 B) 5 C) 8 D) 4 E) 7

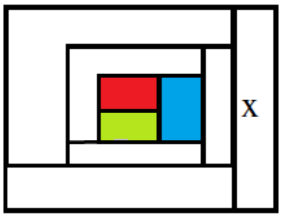


Решение. **A).** Планот на островите и пристаништето е претставен на цртежот десно. До островот D можеме да стигнеме само од островот A, па затоа по зелената отсечка мора да поминеме двапати. Така ја имаме маршрутата

$$P\to C\to A\to D\to A\to B\to P,$$

која се состои од 6 отсечки.

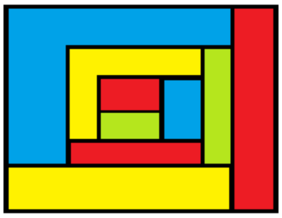
3. БОЕЊЕ И ПОКРИВАЊЕ



1. Секој дел во правоаголникот треба да се обои со една од четирите бои: црвена, зелена, сина и жолта. Секои два соседни дела треба да се обоени со различна боја. Три дела се веќе обоени (цртеж десно). Со која боја е обоен делот X ? (Соседни се деловите кои имаат заедничка страна или заеднички дел на две страни.)

A) црвена B) сина C) зелена D) жолта

E) не може да се определи

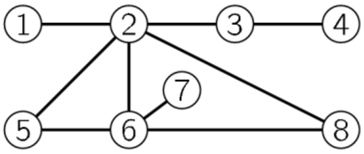


Решение. **A).** Бараното боење е еднозначно и истото е прикажано на цртежот десно. Според тоа, делот кој е означен со X е обоен со црвена боја.

2. Правоаголник е поделен на 40 исти квадрати. Правоаголникот содржи повеќе од еден ред квадрати. Стојан го нашол средниот ред квадрати и истиот го обоил. Колку квадрати не обоил Стојан?

A) 20 B) 30 **C)** 32 D) 35 E) 39

Решение. **C).** Имаме, $40=1\cdot 40=2\cdot 20=4\cdot 10=5\cdot 8$. Сега, бидејќи Стојан го обоил средниот ред заклучуваме дека правоаголникот има 5 реда, и во еден ред има 8 квадрати. Бидејќи е обоен еден ред, останале необоени 4 реда, па затоа необоени останале $4\cdot 8=32$ квадрати.



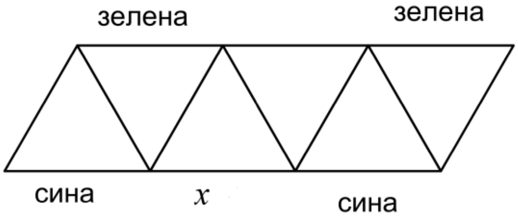
3. Андреј ги обоил секој од осумте кругови на цртежот црвено, жолто или сино, така што било кои два круга кои се поврзани со лини-

ја не се обоени во иста боја. Кои два круга мора да бидат обоени во иста боја?

А) 5 и 8 В) 1 и 6 С) 2 и 7 D) 4 и 5 Е) 3 и 6

Решение. А). Броевите 5 и 8 се истовремено поврзани со броевите 2 и 6. Но, броевите 2 и 6 се поврзани меѓу себе, па круговите во кои се тие броеви мора да бидат обоени во различни бои. Сега, кругот 5 мора да е обоен во различни бои од 2 и 6, а исто и кругот 8 мора да е обоен во различни бои од 2 и 6. Но, Андреј бои во три бои, па затоа 5 и 8 мора да се обоени во иста боја.

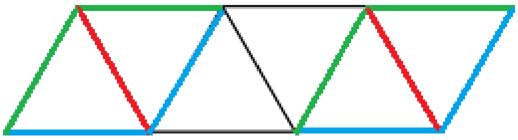
4. На цртежот е означена бојата на некои страни на триаголниците. Бојан сака да ги обои останатите страни на триаголниците со сина, црвена и зелена боја, но така да секој триаголник мора да има различна боја на секоја страна. Со која боја ќе се обои страната означена со x?



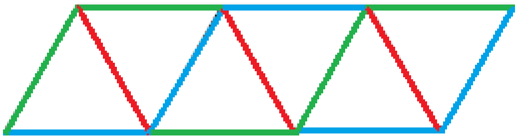
А) зелена В) црвена С) сина D) црвена или сина

Е) не може да се определи

Решение. А). Заедничките страни на двата леви и двата десни триаголници мора да се црвени. Сега боењето на двата крајни леви и двата крајни десни триаголници е еднозначно и истото е прикажано на цртежот десно.



Сега е јасно дека заедничката страна на двата средни триаголници мора да е црвена, па затоа страната означена со x мора да е зелена. Целосното боење на фигурата е



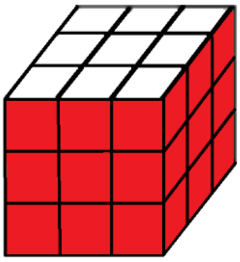
прикажано на цртежот десно.

5. Андреј купил 27 идентични мали коцки, секоја од кои има точно два соседни ѕида обоени црвено. Тој ги искористил сите мали коцки да состави голема коцка. Кој е најголемиот број на црвени ѕидови на големата коцка составени на овој начин?

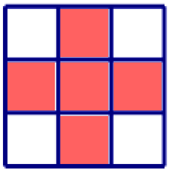
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. C). Големата коцка е составена од 27 мали коцки, па затоа таа има димензии $3\times3\times3$. Бидејќи немаме коцка со три црвени ѕидови, во секое теме на големата коцка ќе има барем по еден бел ѕид на мала коцка. Јасно, во две дијаметрално спротивните темиња барем по еден ѕид не може да е црвен, што значи дека големата коцка може да има најмногу четири црвени ѕида.

Понатаму, во темињата на големата коцка белите ѕидови на малите коцки можеме да ги поставиме така што тие ќе лежат на два спротивни ѕида на големата коцка. Навистина, доволно е на секој вертикален раб на големата коцка малите коцки да ги поставиме така што нивните црвени ѕидови ќе се совпаднат со ѕидовите на големата коцка (види цртеж). Сега доволно е во средината на големите ѕидови трите мали коцки да ги поставиме така што еден нивен црвен ѕид ќе биде надворешен. На тој начин предниот, задниот, левиот и десниот ѕид на големата коцка ќе бидат црвени. Значи, голената коцка може да има најмногу четири црвени ѕида.

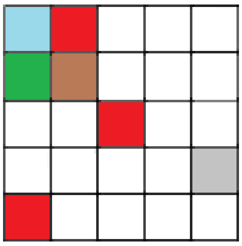


Забелешка. При горното поставување горниот и долниот ѕид на големата коцка може да се бели како на цртежот, но може малите коцки да се поставаат така што дел од овие ѕидови ќе се црвени. Овие два ѕида може да



имаат најмногу по пет мали црвени квадрати, како што е прикажано на цртежот горе десно.

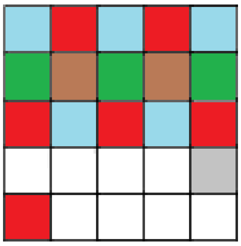
6. Квадрат 5×5 е поделен на единечни квадратчиња. Сакаме да ги обоиме единечните квадратчиња со помош на црвена, сина, зелена и кафеава боја, така што секои две соседни квадратчиња се обоени во различна боја. Соседни се квадратчињата кои имаат заедничко теме или заедничка страна. Некои квадратчиња се веќе обоени. Со која боја ќе биде обоено сивото квадратче?



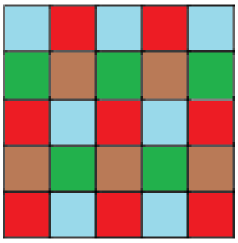
А) црвена B) зелена C) кафеава D) зелена или кафеава

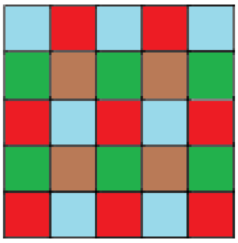
Е) не е можно да се определи

Решение. **D)** Второто квадратче во третиот ред мора да е сино, па затоа првото квадратче во третиот ред мора да е црвено. Сега, второто квадратче во третата колона мора да е зелено, што значи дека првото мора да е сино. Сега боењето на првите три реда е еднозначно (цртеж десно).



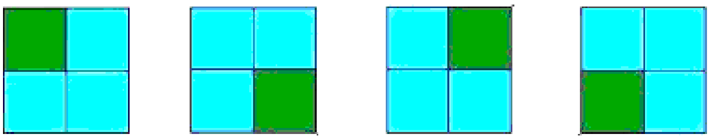
Понатаму, првото квадратче во третиот ред мора да е зелено или кафеано. Понатаму боењето е еднозначно, што значи дека сивото квадратче е кафеано или зелено (види ги цртежите десно).





7. Квадрат е поделен на четири мали еднакви квадрати. Секој од малите квадрати е обоен во сина или зелена боја. За две боења ќе сметаме дека се еднакви ако едното може да се добие од другото со вр-

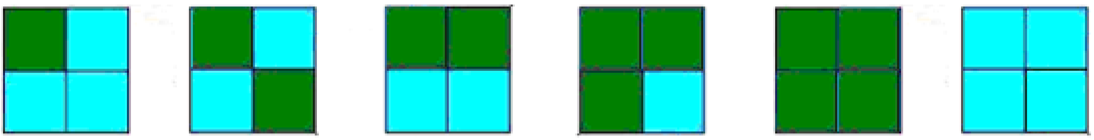
тење на квадратите. На долните цртежи е даден пример на четири исти боења.



На колку различни начини може да се обои квадратот?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Решение. B). Со З да означиме зелена боја, а со С сина боја. Ако полињата ги боиме почнувајќи од горното лево поле и одејќи во насока на вртењето на стрелките на часовникот, тогаш сите други исти боења се добиваат со вртење на квадратот. Значи, при вакво боење различни се боењата: ЗЗЗЗ, ЗЗЗС, ЗЗСС, ЗСЗС, ЗССС, СССС, т.е. имаме шест различни боења.

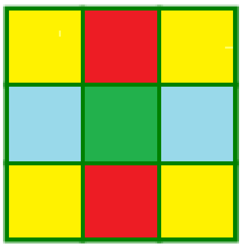


8. Матео има голема колекција од единечни коцки, при што секоја коцка е обоена во една боја. Тој сака да направи голема коцка, составена од 27 единечни коцки. Притоа коцките кои имаат заедничко теме треба да се обоени во различни бои. Кој е најмалиот потребен број бои за да Матео ја направи големата коцка?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 27

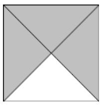
Решение. B). Единечна коцка која се наоѓа во теме на големата коцка има заедничко теме со седум единечни коцки. Според тоа, за саканото боење на големата коцка на Матео му се потребни најмалку осум бои. Ќе дадеме боење со кое ќе докажеме дека осум бои се и доволни.

За коцката која е во долното аголно поле на долниот ред има три коцки со кои таа има соседно теме. Затоа овие четири коцки ќе ги



обоиме во четири различни бои: жолта, црвена, зелена и сина. Понатаму, боењето во четирите бои е лесно (види цртеж десно).

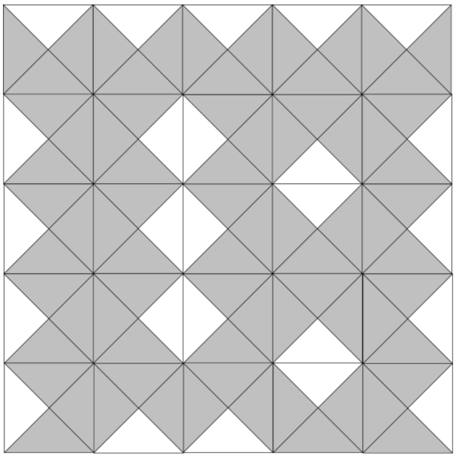
Сега, на потполно ист начин средниот ред на коцката го боиме со преостанатите четири бои, на пример, кафеава, сива, лилјакова и розева. На крајот, за горниот ред го повторуваме боењето од првиот ред.



9. Квадратна 5×5 табла е поплочена со единечни идентични меѓу себе плочки со шара како што е дадено на цртежот десно. Било кои две плочки што имаат заедничка страна се допираат со иста боја, бела или сива. Една страна на единечна плочка е бела ако е страна на бел триаголник и сива ако е страна на сив триаголник. Обиколката на квадратната шема се состои од отсечки со должина 1. Кој е најмалиот можен број на единечни сиви отсечки на обиколката на 5×5 таблата, што може да се направи при нејзино поплочување?

А) 4 В) 5 С) 6 D) 7 Е) 8

Решение. **В).** Бидејќи плочките имаат по една бела и три сиви страни, во секој агол на 5×5 таблата мора да има барем една сива отсечка. Тоа значи дека бројот на сивите отсечки е поголем или еднаков на 4. Ако ги поплочиме горната, левата и десната страна на таблата така што во аглите ќе има точно по една сива отсечка, тогаш останатиот дел од таблата се поплочува на единствен начин, при што бидејќи должината на страната на таблата е непарен број се јаву-



ва најмалку уште една сива отсечка. Значи, најмалиот можен број сиви отсечки е $4+1=5$. Вакво поплочување е прикажано на цртежот горе десно.

10. Секој природен број треба да се обои според следниве три правила.

1) Секој број е или црвен или зелен.

2) Збирот на било кои два различни црвени броеви е црвен број.

3) Збирот на било кои два различни зелени броеви е зелен број.

На колку различни начини може да се направи вакво боење?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) повеќе од 6

Решение. **D).** Да ги разгледаме броевите 1 и 2. Ако двата броја се обоени во иста боја, тогаш сите броеви се обоени во истата таа боја. Значи, во овој случај имаме две боења, сите броеви се црвени или сите броеви се зелени.

Ако бројот 1 е црвен, а бројот 2 е зелен, тогаш за бројот 3 можни се два случаја:

1) Бројот 3 е црвен и тогаш бидејќи $4=3+1, 5=4+1, 6=5+1, \ldots$ мора сите броеви понатаму да се црвени.
2) Бројот 3 е зелен. Но, тогаш мора и бројот 4 да е зелен, бидејќи ако овој број е црвен тогаш од $5=4+1$ следува дека бројот 5 е црвен, а од $5=2+3$ следува дека бројот 5 е зелен, што е противречност, бидејќи секој број е обоен во една боја.

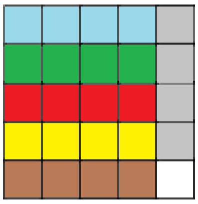
Според тоа, во овој случај имаме уште 2 боења кои ги задоволуваат условоте на задачата.

Ако бројот 1 е зелен, а бројот 2 е црвен, тогаш како погоре добиваме уште две боења кои ги задоволуваат условите на задачата.

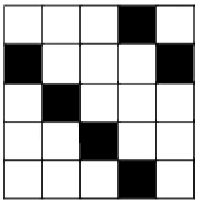
Конечно, имаме $2+2+2=6$ боења кои ги задоволуваат условите на задачата.

11. Квадрат 5×5 е поделен на единечни квадрати. Кој е најмалиот број единечни квадратчиња кои што треба да се обојат така што во секој 4×1 и 1×4 правоаголник има најмалку еден обоен квадрат?

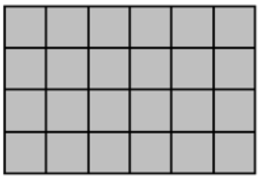
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

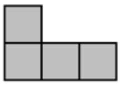
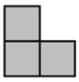
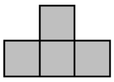
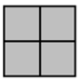


Решение. B). Нека квадратчињата од условот на задачата се обоени во црна боја. Сега, ако квадратот го обоиме како на цртежот десно, тогаш во секој различно обоен 1×4 правоаголник мора да има најмалку по едно црно квадратче. Според тоа, мора да има најмалку 6 црни квадратчиња. Пример на боење со 6 црни квадратчиња кои го задоволуваат условот на задачата е даден на цртежот лево.

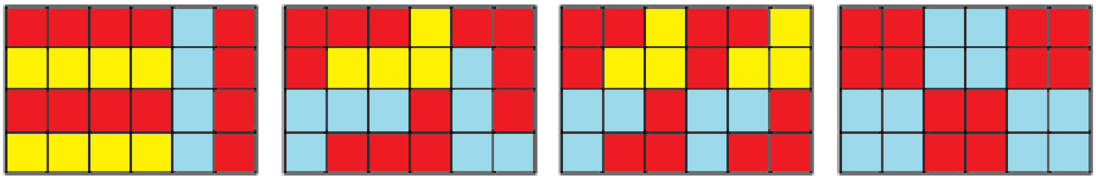


12. Горјан треба да го покрие правоаголникот со димензии 4×6, при што треба да употреби еднакви фигури без притоа тие да се преклопуваат, да излегуваат надвор од правоаголникот и меу нив не смее да има празни места. Со која од дадените фигури Горјан не може да ја постигне саканата цел?

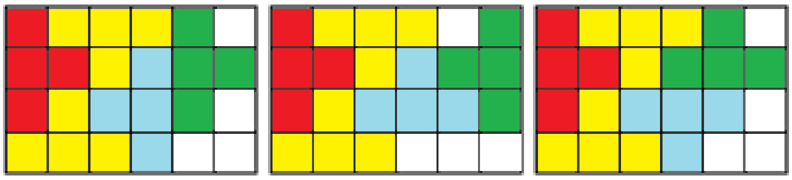


A)  B)  C)  D)  E) 

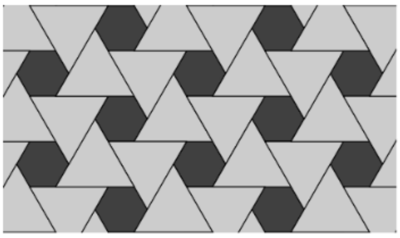
Решение. D). Покривањата со фигурите A), B), C) и E) се дадени на долните цртежи.



Нека претпоставиме дека правоаголникот може да се покрие со фигури од видот D). Тогаш на левата страна мора да биде поставена фигура чии три квадратчиња ќе се поклопуваат со три рабни квадратчиња (цртеж десно – црвена фигура). Понатаму, положбата на следните две фигури е еднозначно определена (жолтите фигури). Сега полето кое граничи со двете жолти фигури може да се покрие на три начина (сините фигури). Понатаму, во сите три случаи може да се постави уште по една фигура (зелените фигури), при што тоа на цртежот лево може да се постигне на четири начини, на средниот цртеж поставувањето е еднозначно и на десниот цртеж на два начина. Притоа во сите случаи белите полиња кои преостануваат не може да се покријат со фигура од дадениот вид.



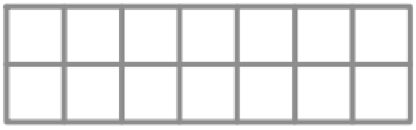
13. На цртежот десно е прикажан дел од под, покриен со мозаик од складни шестаголни и складни триаголни плочки. Ако за мозаикот се употребени 3000 шестаголни плочки, распоредени во 50 редови, колку триаголни плочки се приближно употребени?



A) 9000 B) 6000 C) 3000 D) 1500 E) 1000

Решение. B). Забележуваме дека ако одиме по дијагонала, тогаш долу десно од секоја шестаголна плочка има по две триаголни плочки, при што на тој начин триаголните плочки се скоро сите пребројани. Значи, приближно се употребени двојно повеќе триаголни плочки, односно приблиќно 6000 триаголни плочки.

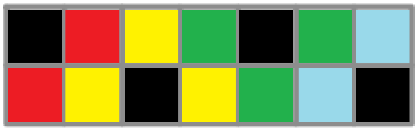
14. Таблица 2×7 е обоена во бело. Ако едно квадратче се обои во црно, тогаш



сите квадратчиња кои му се соседни, се обојуваат во сиво. Колку бели квадратчиња најмалку треба да се обојат во црно за да не остане ниту едно бело квадратче? (Соседни се квадратчињата кои имаат заедничка страна.)

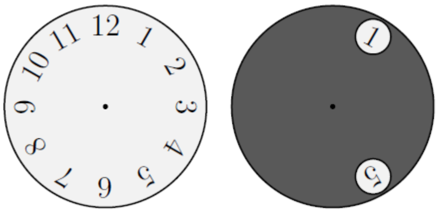
A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Решение. **D).** Со секое црно обоено квадратче најмногу три квадратчиња стануваат сиви. Тоа значи, ако обоиме 3 квадратчиња, тогаш ќе останат најмалку $14-(3+3\cdot 3)=2$ бели квадратчиња. На цртежот десно е прикажано дека целта може да се постигне со боење на четири квадратчиња. Притоа квадратчињата кои ја менуваат бојата се прикажани во различни бои за секое црно обоено квадратче.



4. РАСПОРЕДУВАЊА

1. Преку часовникот е поставен сив круг, како што е прикажано на цртежот десно. Потоа сивиот круг е заротиран околу неговиот центар така што по ротацијата во едниот отвор се појавил бројот 8. Кои два броја може да се појават во другиот отвор?



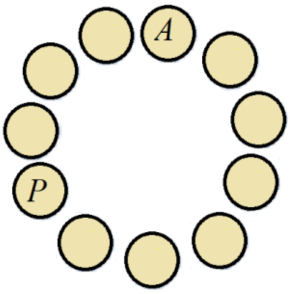
A) 4 или 12 B) 1 или 5 C) 1 или 4 D) 7 или 11 E) 5 или 12

Решение. **A).** Разликата меѓу времињата кои се појавуваат на цртежот е $5-1=4$. При секоја ротација оваа разлика не се менува, па затоа во празните места може да се појават броевите $8-4=4$ или $8+4=12$.

2. Група девојки седи во круг. Ана е четврта од лево од Ратка и седма од десно од неа. Колку девојки има во групата?

A) 9 B) 10 C) 11

D) 12 E) 13

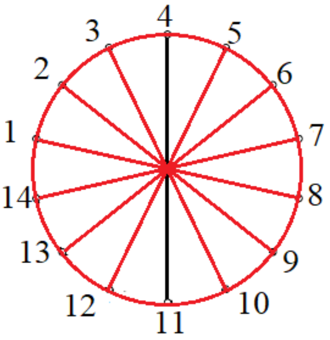


Решение. **C).** Според условот лево од Ратка има 3 места до Ана, а десно од неа има 6 места до Ана (види цртеж). Според тоа, во кругот вкупно има $1+3+1+6=11$ девојки.

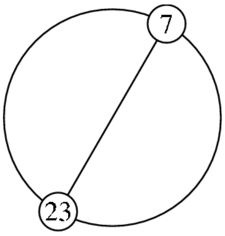
3. Неколку деца се наредени во круг на еднакви растојанија едно од друго и се нумерирани со броевите 1, 2, 3, ... во насока на движењето на стрелките на часовникот. Познати е дека Бети е со број 11 и е точно наспроти Катерина, која е со број 4. Колку деца има во кругот?

A) 13 B) 14 C) 16 D) 17 E) 22

Решение. B). Бидејќи децата со редни броеви 4 и 11 се дијаметрално спротивни на половината од кругот се децата со редни броеви 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10. Значи, на кругот има $2\cdot 7=14$ деца (цртеж десно).



4. Сите природни броеви од 1 до n, во растечки редослед, се запишани на еднакво растојаниена кружницата. Дијаметарот на кружницата минува низ точките во кои се запишани броевите 7 и 23, како на цртежот. Која е вредноста на n?



A) 30 B) 32 C) 34 D) 36 E) 38

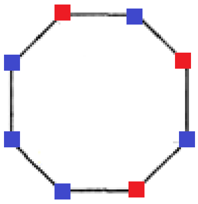
Решение. B). Броевите се запишани на еднакво растојание на кружницата, броевите 7 и 23 лежат на дијаметар на кружницата и $23-7=16$. Тоа значи дека има по 15 броеви запишани од двете страни на дијаметарот.

Според тоа, вкупно има запишано $2\cdot 15+2=32$ броеви, односно $n=32$.

5. Неколку момчиња и девојчиња седнале околу тркалезна маса. Има три девојчиња и никои две девојчиња не седат едно до друго. Ако има точно три момчиња до кои седи момче, колку вкупно момчиња седат околу масата?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Решение. B). Бидејќи има три девојчиња и две девојчиња не седат едно до друго, околу масата има три момчиња кои се меѓу девојчињата. Сега, ако седи уште едно момче, тогаш ќе имаме две момчиња момчиња до кои седи момче. Но, ние треба да имаме три момчиња до кои седи момче. Затоа околу масата треба да седи уште едно



момче и тоа не треба да е до некои од двете момчиња до кои не седи момче. Имено, во тој случај ќе имаме 4 момчиња до кои седи момче. Значи, треба да имаме 3 момчиња едно до друго. Бараниот распоред е прикажан на цртежот десно (со црвени квадратчиња се означени девојчињата, а со сини момчињата).

6. Во една книга се запишани 30 раскази. Должините на расказите се меѓусебно различни и имаат 1, 2, 3, 4, 5, …, 30 страници, во некој редослед. Секој расказ почнува од нова страница. Првиот расказ почнува од првата страница. Кој е најголемиот можен број на раскази кои почнуваат од непарна страница?

A) 15 B) 18 C) 20 D) 21 E) 23

Решение. Е). Некој расказ ќе почне од непарна страница, ако пред него има парен број раскази со непарен број страници. За да бројот е максимален, секогаш треба да се пишуваат по две поглавја со непарни страни последователно. На тој начин ќе бидат напишани $8+15=23$ поглавја кои почнуваат на непарна страна. Еден таков пример е ако распоредот на запишани поглавја е следниот:

1, 3, **5,** 7, **9,** 11, **13,** 15, **17,** 19, **21,** 23, **25,** 27, **29,**

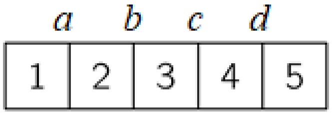
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30.

7. Александра има хартиена лента со броевите 1, 2, 3, 4 и 5 запишани во пет квадратчиња, како на цртежот. Таа ја превиткала лентата, така што квадратчињата целосно се преклопуваат, формирајќи пет слоја.. Кој од следниве распореди од горниот слој кон долниот слој, не е можно да се добие?

1	2	3	4	5

A) 3, 5, 4, 2, 1 B) 3, 4, 5, 1, 2 C) 3, 2, 1, 4, 5

D) 3, 1, 2, 4, 5 E) 3, 4, 2, 1, 5



Решение. **Е).** Линиите по кои се врши превиткувањето да ги означиме како на цртежот десно.

Распоредот 3, 5, 4, 2, 1 може да се добие ако по ред превиткуваме по d, па по c, па по b и по a.

Распоредот 3, 4, 5, 1, 2 може да се добие ако по ред превиткуваме по c, па по d, па по a и по b.

Распоредот 3, 2, 1, 4, 5 може да се добие ако по ред превиткуваме по b, па по a, па по c и по d.

Распоредот 3, 1, 2, 4, 5 може да се добие ако по ред превиткуваме по a, па по b, па по c и по d.

За распоредот 3, 4, 2, 1, 5 прво треба да превиткаме по c. Тогаш 5 ќе дојде под 2, па затоа нема превиткување со кое 2 може да дојде под 4.

8. Дванаесет обоени коцки се наредени во редица. Од нив, 3 се сини, 2 се жолти, 3 се црвени и 4 се зелени, но не се наредени во овој редослед. На еден од краевите има жолта коцка, а на другиот има црвена коцка. Коцките обоени црвено се соседни. Коцките обоени зелено се соседни. Десеттата коцка од лево кон десно е обоена сино. Која е бојата на шестата коцка од лево кон десно?

А) зелена B) жолта C) сина D) црвена E) црвена или сина

Решние. **А).** Бидејќи десеттата коцка е сина, црвена коцка е на едниот крај, жолта е на другиот крај и трите црвени коцки меѓу себе се допираат тие не може да се на крајот. Значи, трите црвени коцки се на почетокот и го имаме распоредот прикажан на долниот цртеж.

Ц	Ц	Ц			🟨				С		Ж

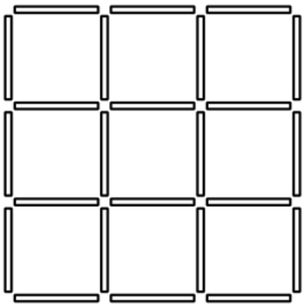
Сега имаме 4 зелени коцки кои се соседни па тие се во четири последователни полиња меѓу третата црвена и десетата сина коцка. Тоа значи дека шестата коцка мора да е зелена.

9. 2021 топчиња се наредени во ред и редоследно се нумерирани со броевите од 1 до 2021. Секое топче е еднобојно и тоа: црвено, зелено или сино. Во редот меѓу било кои три последователни топчиња, секогаш има топчиња од сите три бои. Борис ги погодува боите на пет точиња. Ова се неговите претпоставки: топчето 2 е зелено; топчето 20 е сино; топчето 202 е црвено; топчето 1002 е сино; топчето 2021 е зелено. Само една од неговите претпоставки е погрешна. Кој е бројот на топчето чија боја Борис не ја погодиил?

A) 2 B) 20 C) 202 D) 1002 E) 2021

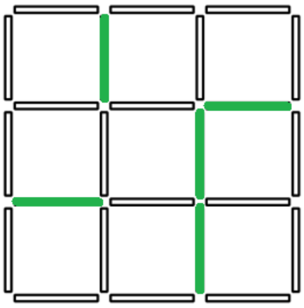
Решение. **B).** Јасно, нема две последователни топчиња кои се обоени со иста боја. Сега, бидејќи било кои три последователни топчиња се обоени во три различни бои, добиваме дека топчињата со редни броеви кои при делење со 3 даваат ист остаток се истобојни. Така имаме: $2=3\cdot 0+2$ е зелено, $20=3\cdot 6+2$ е сино, $202=3\cdot 67+1$ е црвено, $1002=3\cdot 334$ е сино, $2012=3\cdot 670+2$ е зелено. Две топчиња со зелена боја се нумерирани со броеви кои при делење со 3 даваат остаток 2, па мора и третото кое дава остаток 2 при делење со 3 да е зелено, но Борис кажал дека тоа е сино. Значи, Борис не ја погодил бојата на топчето со реден број 20.

10. Наташа има стапчиња со должина 1. Стапчињата се сини, црвени, жолти или зелени. Таа сака да направи 3×3 мрежа, како на цртежот, така што секое 1×1 квадратче во мрежата има четири страни обоени во различни бои. Кој е најмалиот број на зелени стапчиња кои таа може да ги искористи?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. **C).** Секое од малите 1×1 квадратчиња треба да има страни кои се обоени во различни бои. За да бидат искористени што е можно помалку зелени стапчиња, потребно е зел-ните стапчиња да бидат поставени така што ќе бидат заедничка страна за две мали квадратчиња. Тоа може да се направи на повеќе начини. Еден од нив е прикажан на цртежот десно. Значи, најмалку Наташа може да искористи 5 зелени стапчиња.



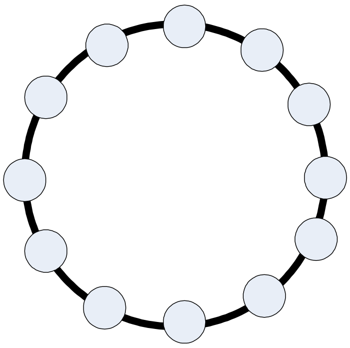
11. Сара броевите од 1 до 9 ги запишала во единечните квадратчиња од 3×3 квадратна шема, во секое квадратче по еден број. На почетокот таа ги запишала броевите 1,2,3 и 4 како што е прикажано на цртежот. Два броја се соседни ако тие се запишани во квадратиња кои имаат заедничка страна. По запишување на сите броеви, таа забележала дека збирот на соседите на бројот 9 е 15. Колку е збирот на соседите на бројот 8?

1		3
2		4

A) 12 B) 18 C) 20 D) 26 E) 27

Решение. **E).** Бројот 9 не може да е во централногто квадратче, бидејќи тогаш негови соседи ќе се броевите 5, 6 7 и 8, па збирот ќе биде 26. Понатаму, ако во централното квадратче е запишан бројот a, тогаш треба бројот a собран со два од броевите 1, 2, 3 и 4 да даде збир 15. Тоа е можно само ако $a=8$ и другите два броја се 3 и 4. Значи, бројот 9 е меѓу броевите 3 и 4, а средниот број е бројот 8. Соседни на бројот 8 се 5, 6, 7 и 9, а нивниот збир е $5+6+7+9=27$.

12. Броевите од 1 до 12 се запишани во кругчињата од цртежот, во секое кругче по еден број. Два соседни запишани бројчиња се

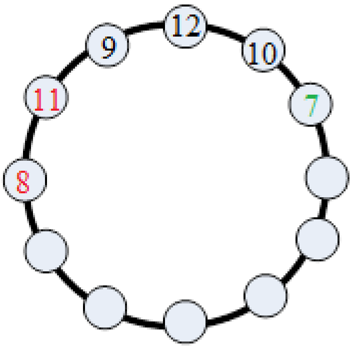


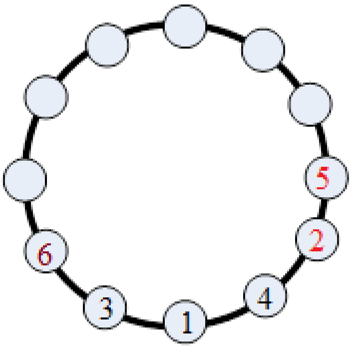
разликуваат со 2 или 3. Кои од дадените парови броеви се соседи?

A) 5 и 8 B) 3 и 5 C) 7 и 9

D) 6 и 8 E) 4 и 6

Решение. **D).** Соседи на 12 може да само броевите 10 и 9. Понатаму, соседи на 11 може да се само 9 и 8. Сега, соседи на 10 може да се 12, 8 и 7. Но, бројот 8 е веќе запишан, па остаиува вториот сосед на 10 да е 7 (види цртеж десно). Според тоа, имаме единствен распоред на броевите 7, 8, 9, 10, 11 и 12.

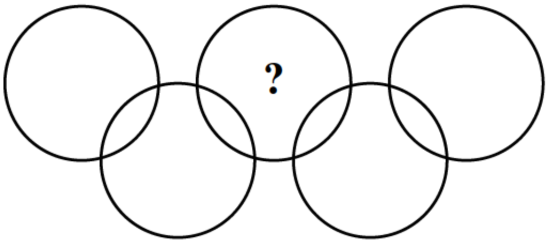




Од друга страна соседи на 1 може да се само броевите 3 и 4. Понатаму, соседи на 2 може да се само 4 и 5. Сега соседи на 3 може да се 1, 5 и 6. Но, бројот 5 е веќе запишан, па останува вториот сосед на 3 да е 6 (види цртеж лево). Според тоа, имаме единствен распоред на броевите 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Конечно од досегашните разгледувања следува дека соседи се уште броевите 6 и 8, како и броевите 5 и 7.

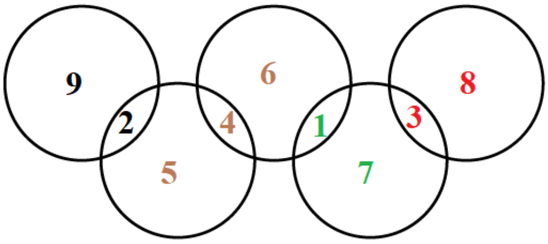
13. Во секој дел од фигурата прикажана на цртежот десно е запишан точно по еден од броевите од 1 до 9. Притоа збирот на броевите запишани во секој круг е еднаков на 11. Кој број е запишан во делот во кој се наоѓа прашалниот знак?



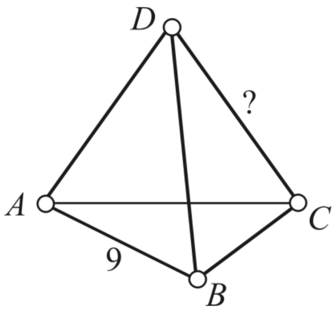
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Решение. **В).** Бидејќи било кои други два броја собрани со бројот 9 даваат збир поголем од 11, бројот 9 мора да е запишан во круг кој е поделен на два дела и тоа во делот кој не е заеднички. Сега, во другиот дел мора да е запишан бројот $11-9=2$. Понатаму, бројот 8 може да е во кругот во кој е бројот 2 или во другиот краен круг кој е поделен на два дела. Ако 8 е во кругот во кој е бројот 2, тогаш третиот број е $11-(8+2)=1$ и остануваат броевите 3, 4, 5, 6 и 7. Сега ако се земе предвид дека од броевите кои преостануваат само $3+7=4+6=10$, добиваме дека во кругот во кој е бројот 1 може да се броевите 3 и 7, односно броевите 4 и 6. Ако се тоа броевите 3 и 7, тогаш ниту еден од овие два броја собран со било кои два од броевите 4, 5 и 6 не дава збир 11, па овој случај не е можен. Ако се тоа броевите 4 и 6, тогаш ниту еден од овие два броја собран со било кои два од броевите 3, 5 и 7 не дава збир 11. Последното значи дека бројот 8 не може да е во кругот во кој е бројот 2.

Понатаму, бидејќи од преостанатите броеви само $8+3=11$, заклучуваме дека броевите 8 и 3 се во другиот краен круг, при што бројот 3 е во заедничкиот дел со другиот круг. Сега е веќе јасно дека од преостанатите броеви 1, 4, 5, 6 и 7, во кругот со бројот 3 мора да се броевите 1 и 7, при што бројот 1 е во заедничкиот дел со другиот круг. Остануваат уште броевите 4, 5 и 6, па затоа со бројот 1 мора да се броевите 4 и 6, а со бројот 2 мора да се броевите 4 и 5 (цртеж десно). Конечно, на местото на прашалниот знак е бројот 6.



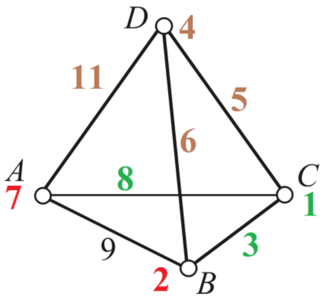
14. Во секое од четирите темиња и секој од шесте рабови на еден тетраедар е запишан еден од десетте броеви 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11. Секој број е запишан еднаш. За секои две темиња на тетраедарот



збирот на броевите запишани во нив е еднаков на бројот запишан во работ чии краеви се тие. На работ AB е запишан бројот 9 (види цртеж). Кој број е запишан на работ CD?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 11

Решение. **B).** Бројот 8 не може да е запишан во теме, бидејќи тогаш тој број собран со броевите запишани во другите три темиња би дал три збира поголеми од 8, а ние имаме само два такви броја (9 и 11). Ако бројот 7 е запишан во некое од темињата C или D, тогаш ќе добиеме четири збира кои се поголеми од 7, а ние имаме само три такви броја (8, 9 и 11). Значи, бројот 7 може да е запишан во некое од темињата A или B.



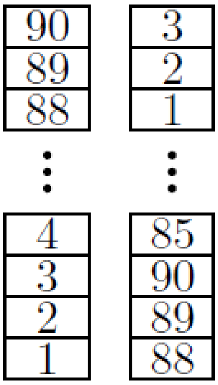
Заради симетрија доволно е да го разгледаме само случајот кога бројот 7 е запишан во темето A. Тогаш во темето B е запишан бројот 2. Понатаму, во едно од темињата C или D мора да е запишан бројот 1. Заради симетрија доволно е да го разгледаме само случајот кога бројот 1 е запишан во темето C. Тогаш на работ BC е запишан бројот бројот 3. Тоа значи дека во темето D мора да е запишан бројот 4. Според тоа, на работ CD е запишан бројот 5. Целосната конфигурација е дадена на цртежот десно.

Понатаму, од $9=6+3$ добиваме дека во темињата A или B може да се запишани броевите 3 и 6. Но, тогаш во другите две темиња мора да се запипани броевите 1 и 2, па на работ кој ги поврзува мора да е бројот 3, што не е можно, бидејќи бројот 3 е веќе запишан.

Слично, од $9=5+4$ добиваме дека во темињата A и B може да се запишани броевите 4 и 5. Но, тогаш во другите две темиња мора да се броевите 1 и 2. Сега на работ кој кој ги поврзува 1 и 4 е бројот 5, што не е можно бидејќи бројот 5 е веќе запишан.

Значи, единствена можност е на работ CD да е запишан бројот 5.

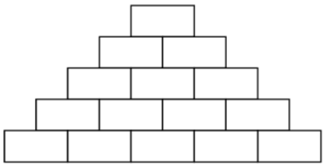
15. Деведесет цигли се поставеи една врз друга и се нумерирани со броевите од 1 до 90 оддолу нагоре. Матео зема по 3 цигли одгоре надолу и ги реди без да го менува редоследот на трите цигли (види цртеж десно). Колку цигли има меѓу циглите со број 39 и 40 во новото редење?



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. E). Одгоре надолу земаме тројки цигли. Прво ја земаме циглата со бројот 40, за што е потребно даземеме 51 цигла. Притоа циглата со бројот 40 е последна во купчето и над неа се циглите со броевите 41 и 42. Сега го земаме следното купче во кое се циглите со броевите 39, 38 и 37. Циглата со бројот 39 е најгоре, т.е. циглите со броевите 38 и 37 се под неа. Значи, меѓу циглите со броевите 40 и 39 редоследно се циглите со броевите 41, 42, 37 и 38, т.е. има 4 цигли.

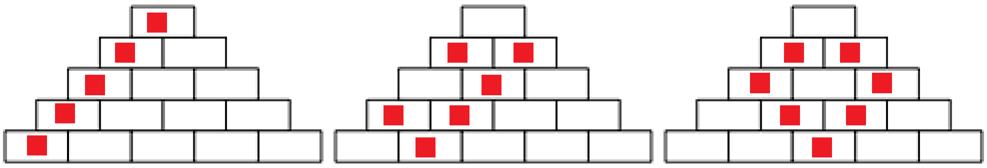
16. Симона сака да запише по еден природен број во секое поле на цртежот така да секој број над долниот ред е збир од двата броја во полињата веднаш под него. Кој е најголемиот број на непарни броеви кои Симона може да ги запише?



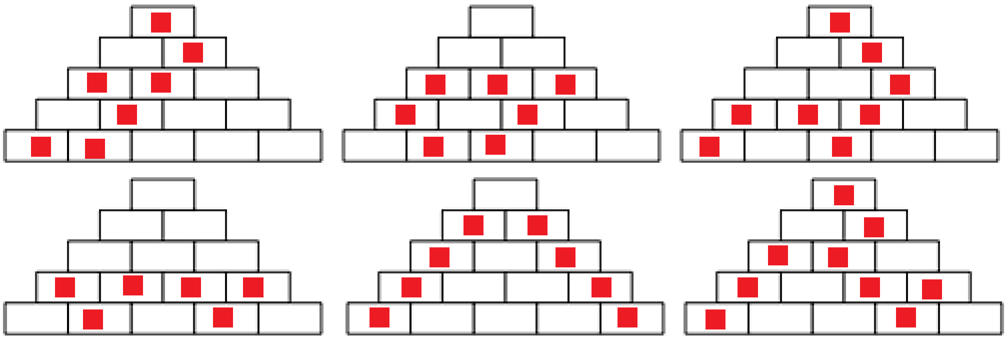
A) 5 B) 7 C) 8 D) 10 E) 11

Решение. D). Бројот на непарните броеви е определен со бројот на непарните броеви и нивниот распоред во првиот ред.

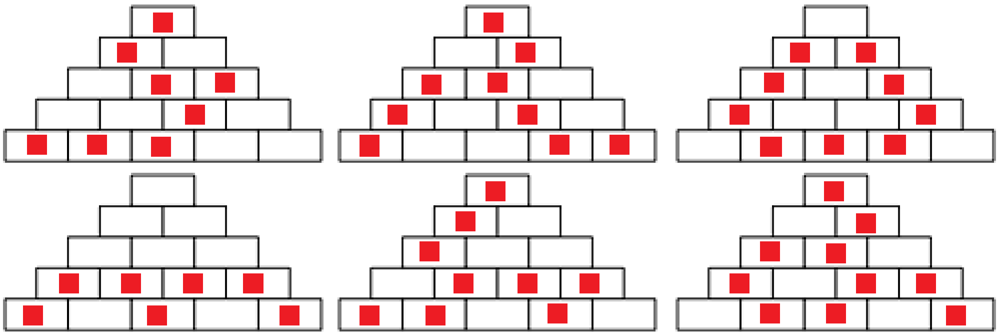
Ако долу имаме еден непарен број, тогаш ќе има 5, 6 или 7 непарни броја (види ги долните цртеи во кои полињата со непарните броеви се означени со црвени квадратчиња).



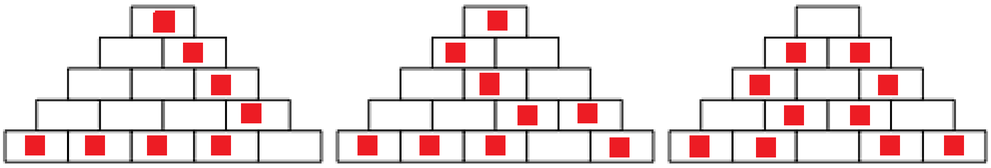
Ако долу имаме два непарни броја, тогаш ќе имаме 6, 7, 8 или 9 непарни броја (види цртеж долу).



Ако долу имаме три непарни броја, тогаш ќе имаме 7, 8, 9 или 10 непарни броја (види цртеж долу).



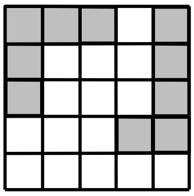
Ако долу имаме четири непарни броја, тогаш ќе имаме 8, 9 или 10 непарни броја (види цртеж долу).

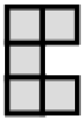


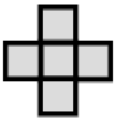
На крајот ако долу имаме 5 непарни броја, тогаш вкупно ќе имаме 5 непарни броја.

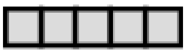
Значи, Симона може најмногу да запише 10 непарни броја.

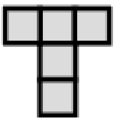
17. Илина поставила две фигури составени од по пет мали квадрати на квадратна плоча како на цртежот десно. Која од следниве пет фигури таа може да ја смести на празниот дел од таблата, така што не би имало место за ниту една од преостанатите четири фигури?

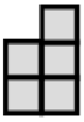



A)

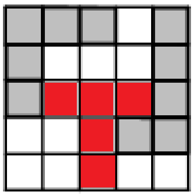

B)


C)

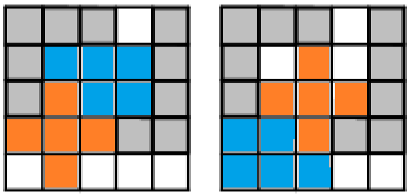

D)

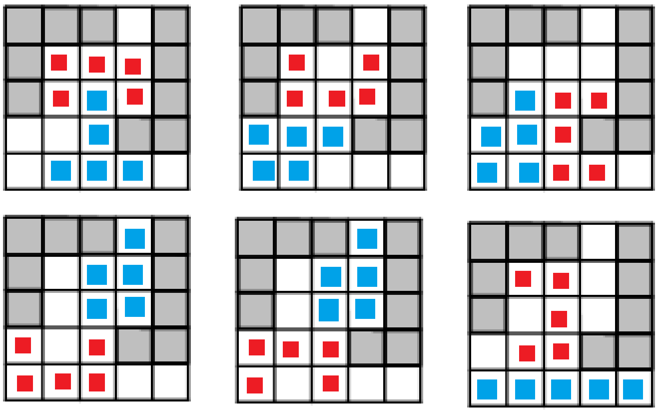

E)

Решение. Ако ја ставиме фигурата под D) како на цртежот десно, тогаш ниту една од другите фигура не може да се постави.

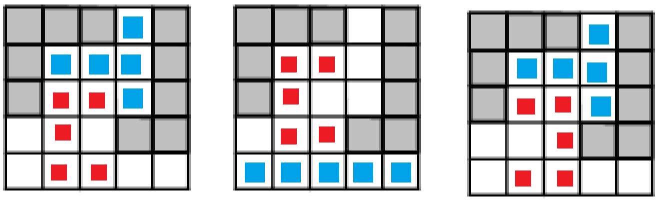


Понатаму, крстот B) во празниот дел може да се постави на два начина, при што секогаш може да се постави една од другите четири фигури. Ова е покажано на цртежите десно.



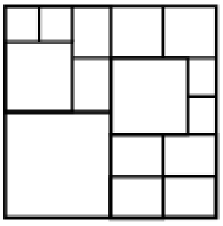


Фигурата A) на празниот дел може да се постави дури на девет начини и за секое поставување може да се постави уште една од другите фигури (види ги цртежите десно).



Фигурата C) на празниот дел може да се постави на единствен начин и како што е покажано на цртежите десно секогаш може да се постави уште една фигура.

Фигурата Е) на празните места може да се постави на повеќе начини и може да се види дека за секое нејзино поставување на полињата кои остануваат празни може да се постави барем една од преостанатите четири фигури. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. .

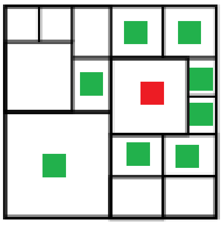


18. Еден остров е поделен на 15 парцели, како што е прикажано на цртежот десно. На страните на парцелите има ограда. Во секоја парцела живее по еден жител, кој што е витез или лажливец. Витезите секогаш говорат вистина, а лажливците секогаш лажат. Секој од жителите рекол: „Барем еден од моите сосоеди е лажливец“. Двајца се соседи, ако парцелите во кои живеат имаат заеднички дел од оградата. Колку најмногу лажливци може да има на овој остров?

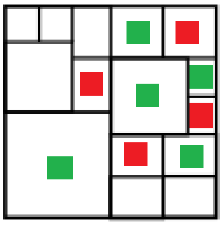
A) 4　B) 5　C) 6　D) 7　E) 8

Решение. **C).** Ако во парцелата живее витез ќе ставаме зелено квадратче, а ако живее лажливец ќе ставаме црвено квадратче. Да забележиме дека при ваквото означување не смее да има соседни полиња со црвени квадратчиња, бидејќи во спротивно лажливец би кажал вистина.

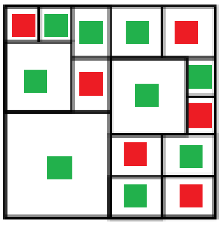
Во полето кое има најмногу соседни полиња (вториот по големина квадрат) може да живее лажливец или витез. Одделно ќе ги разгледаме двата случаја.



Ако во полето кое има најмногу соседни полиња живее лажливец, тогаш во секое нему соседно поле живее витез (цртеж десно). Остануваат шест полиња, во кои може да живеат најмногу уште тројца лажливци (двајца во првото и третото поле во горниот ред, а еден во било кое од двете полиња во последниот ред), што значи дека во овој случај најголемиот број лажливци може да е 4.



Ако во полето кое има најмногу соседни полиња живее витез, тогаш во осумте соседни полиња може да има најмногу 4 лажливци кои се наизменично кружно распоредени витез-лажливец (на цртежот десно е даден едниот од можните два распореди).



Понатаму, во соседните полиња на лажливците мора да се витези, па затоа во долното десно аголно поле може да има уште еден лажливец, и во горните две леви полиња може да има најмногу уште еден лажливец (на цртеж десно е даден едниот од двата можни распореди).

19. Во алеата покрај булеварот, Мартин садел јавори и липи. Тој посадил дваесет садници. Кој е максималниот број на јавори што тој ги засадил, ако меѓу два засадени јавори немало три дрва?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Решение. **C).** Нека засадените дрва ги нумерираме од почетокот кон крајот на алеата редоследно со броевите од 1 до 20. Бидејќи меѓу било кои два јавора не смее да има три дрва разликите меѓу броевите со кои се нумерирани јаворите мора да се различни од 4.

Нека се засадени k јавори и истите нека се означени со броевите $a_i, i=1,2,...,k$. Да ги разгледаме броевите $a_i, b_i = a_i + 4, i=1,2,...,k$. Тоа се $2k$ броеви кои припаѓаат на множеството $\{1,2,...,23,24\}$. Сега, ако $k=13$, тогаш од принципот на Дирихле следува дека меѓу брое-вите $a_i, b_i, i=1,2,...,13$ постојат два кои се еднакви меѓу себе. Но, броевите $a_i, i=1,2,...,13$ се различни меѓу себе, а исто важи и за бро-евите, па затоа постојат m и n такви што $a_m = b_n = a_n + 4$, односно $a_m - a_n = 4$, што е противречност. Од добиената противречност следува $k \le 12$. Пример на алеа со 12 јавори е: **J J J J Л Л Л Л J J J J Л Л Л Л J J J J.**

5. ПРЕБРОЈУВАЊА

1. Располагаме со три жетони на кои се запишани броевите 1, 5 и 11. Колку различни четирицифрени броеви може да формираме, ако ги поставиме еден до друг жетоните?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

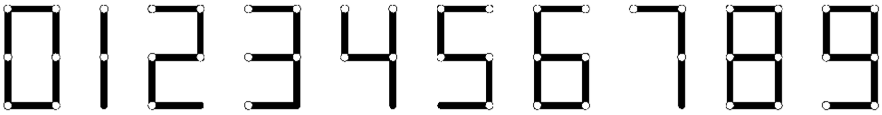
Решение. B). Жетонот 5 можеме да го поставиме лево, десно и на средина. Во првите два случаја имаме по еден четирицифрен број и тоа: 5111 и 1115, а во третиот случај имаме два четирицифрени броја и тоа: 1511 и 1151. Значи, вкупно имаме 4 броја.

2. Десет кенгури се наредени во еден ред како на цртежот. Во даден момент, два кенгура кои се еден до друг и се свртени еден кон друг, ги заменуваат местата така што едниот го прескокнува другиот. Ова се повторува се додека вакви прескокнувања се можни. Колку прескокнувања се направени?

A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 21

Решение. C). Бидејќи едениот од кенгурите го прескокнува другиот доволно е да ги преброиме прескокнувањата на кенгурите кои се завртени кон десно. Секој од нив ги прескокнува сите кенгури кои се завртени кон лево. Значи првиот, вториот и третиот кенгур прескокнуваат по $2+2=4$ кенгури, а шестиот седмиот и осмиот кенгур прескокнуваат по 2 кенгури. Значи, вкупно имаме $3\cdot 4+3\cdot 2=18$ прескокнувања.

3. Со помош на кибритени чкорчиња може да се запишат цифрите како што е прикажано на долниот цртеж:



Колку различни природни броеви може да се запишат на таков начин ако се употребат точно 6 чкорчиња?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

Решение. **C).** Во долната табела е даден бројот на чкорчињата потребни за составување на секоја од цифрите:

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Чкорчиња	6	2	5	5	4	5	6	3	7	6

Бидејќи ниту една цифра не може да се направи со едно чкорче, а вкупно користиме 6 чкорчиња, ги имаме следниве можности:

$$6=2+4=3+3=2+2+2.$$

Со две чкорчиња може да се состави цифрата 1, со три цифрата 7, со четири цифрата 4 и со шест цифрите 6 и 9. Значи, можеме да ги составиме следниве броеви: 6, 9, 14, 41, 77 и 111.

4. Колку четирицифрени броеви A постојат, такви што половината од бројот A е делива со 2, неговата третина е делива со 3 и неговата петтина е делива со 5?

A) 1 B) 7 C) 9 D) 10 E) 11

Решение. **D).** Од условот на задачата следува дека четирицифрениот број A да биде делив со 4, 9 и 25, односно со $\text{NZS}(4,9,25)=900$. Такви четирицифрени броеви се

1800, 2700, 3600, 4500, 5400, 6300, 7200, 8100, 9000 и 9900.

Значи, вкупно има 10 броеви со саканото својство.

5. Колку четирицифрени броеви имаат својство нивните цифри гледани од лево на десно да се последователни природни броеви подредени во растечки редослед?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Решение. **B).** Бараните броеви се од видот $\overline{abcd}, a \neq 0$, при што важи $b = a+1, c = b+1 = a+2, d = c+1 = a+3$. Според тоа, за секоја почетна цифра a бројот е еднозначно определен. Пнатаму, најмалата вредност на a е 1, а за најголемата мора да важи $a+3=9$, т.е. $a=6$. Значи, има 6 броја со саканото својство.

6. Колку има трицифрени броеви, кај кои цифрата на десетките е аритметичка средина на другите две цифри?

A) 12 B) 16 C) 25 D) 34 E) 45

Решение. **E).** Од условот на задачата следува дека броевите се од видот $\overline{abc}, a \neq 0$ и $a+c=2b$. Можни се следниве случаи:

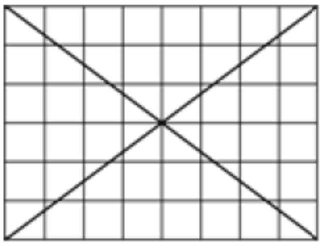
- $b=1$ и тогаш ги добиваме броевите 210, 111,
- $b=2$ и тогаш ги добиваме броевите 420, 321, 222, 123,
- $b=3$ и тогаш ги добиваме броевите 630, 531, 432, 333, 234, 135,
- $b=4$ и тогаш ги добиваме броевите 840, 741, 642, 543, 444, 345, 246, 147,
- $b=5$ и тогаш ги добиваме броевите 951, 852, 753, 654, 555, 456, 357, 258, 159,
- $b=6$ и тогаш ги добиваме броевите 963, 864, 765, 666, 567, 468, 369,
- $b=7$ и тогаш ги добиваме броевите 975, 876, 777, 678, 579,
- $b=8$ и тогаш ги добиваме броевите 987, 888, 789,
- $b=9$ и тогаш го добиваме бројот 999.

Од досега изнесеното следува дека имаме

$$2+4+6+8+1+3+5+7+9=45$$

броеви со саканите својства.

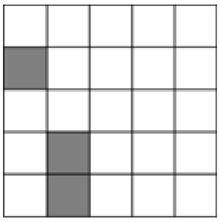
7. Во правоаголна 6×8 шема (види цртеж), 24 од единечните квадрати не се пресечени со неговите дијагонали. Колку единечни квадрати нема да бидат пресечени од дијагоналите на 6×10 правоаголна шема?



A) 28 B) 29 C) 30 D) 31 E) 32

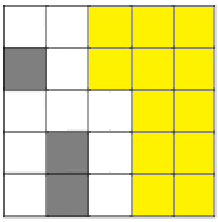
Решение. **E).** Една дијагонала сече 6 реда и 10 колони. Во секој ред и во секоја колона дијагоналата сече по 1 квадрат, при што квадратите кои се наоаѓат во темињата ги броиме и во редот и во колоната. Значи, една дијагонала сече $6+10-2=14$ квадрати. Двете дијагонали сечат 28 квадрати, па затоа нема да бидат пресечени $60-28=32$ квадрати.

8. Андреј на квадратна 5×5 шема реди плочки (види цртеж). Андреј веќе има поставено две плочки, една квадратна и една правоаголна (како на цртежот). Тој сака да постави уште една 3×1 плочка, која треба да препокрие точно три единечни квадрати од квадратната шема. Две плочки не смее да се допираат. На колку начини Андреј може да ја постави плочката?

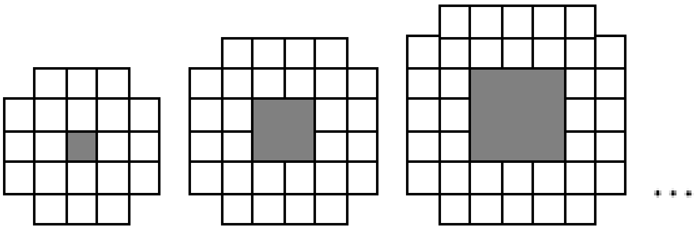


A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Решение. **E).** Андреј плочката 3×1 може да ја постави на полињата кои се обоени со жолта боја. Според тоа, тој во првиот ред може да ја постави на 1 начин, во вториот ред на 1 начин, во третата колона на 3 начини (најгоре, во средина и најдолу) и во четвртата колона на 3 начини (најгоре, во средина и најдолу). Значи, Андреј плочката 3×1 може да ја постави на $1+1+3+3=8$ начини.



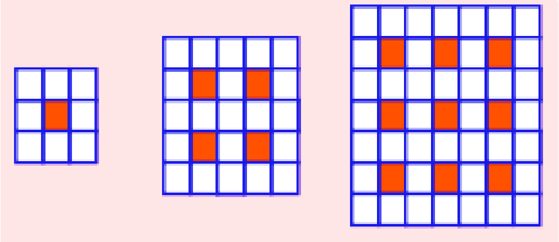
9. На долните цртежи се дадени првите три фигури на една низа кои се направени од единечни квадратчиња според определено правило. Колку квадратчиња содржи десеттата фигура во низата, не сметајќи ги квадратчињата во централниот квадратен отвор?



A) 76 B) 80 C) 84 D) 92 E) 100

Решение. **D).** Првата фигура е квадрат со страна 5, од кој се отстранети четирите аголни полиња и квадрат со страна 1. Втората фигура е кбадрат со страна 6, од кој се отстранети четирите аголни полиња и квадрат со страна 2. Третата фигура е квадрат со страна 7, од кој се отстранети четирите аголни полиња и квадрат со страна 3. Значи, десеттата фигура е квадрат со страна 14, од кој се отстранети четирите аголни полиња и квадрат со страна 10. Значи, оваа фигура има $14^2 - 4 - 10^2 = 92$ квадратчиња.

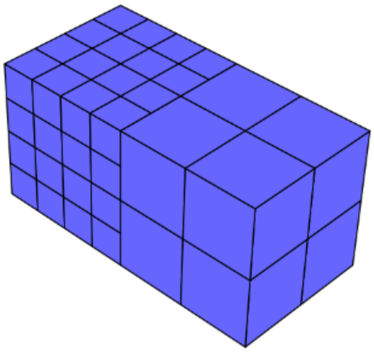
10. На цртежот десно се прикажани првите три од низа квадрати, во кои според определено правило се распоредени бели и црвени квадратчиња. Колку бели квадратчиња содржи четвртиот квадрат?



A) 50 B) 60 C) 65 D) 70 E) 75

Решение. **C).** Во првиот квадрат има вкупно 3^2 квадратчиња, од кои 1^2 се црвени. Во вториот квадрат има 5^2 квадратчиња, од кои 2^2 се црвени. Во третиот квадрат има 7^2 квадратчиња, од кои 3^2 се црвени. Имаме $3 = 2\cdot 1 + 1$ и 1, $5 = 2\cdot 2 + 1$ и 2, $7 = 2\cdot 3 + 1$ и 3, што значи дека правилото е во $k-$тиот квадрат да има $(2k+1)^2$ квадратчиња од кои k^2 се црвени. Значи, во четвртиот квадрат има $9^2=(2\cdot4+1)^2$ квадратчиња, од кои 4^2 се црвени. конечно, бели квадратчиња се $9^2-4^2=81-16=65$.

11. Квадарот на цртежот десно е формиран од 64 мали коцки со еднаква димензија и 8 поголеми коцки со двојно поголем раб. Потоа квадраот е обоен. Колку коцки од двата вида имаат по два обоени ѕида?

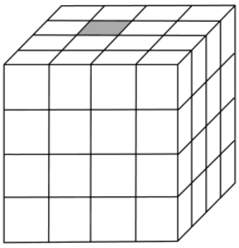


A) 8 B) 16 C) 20

D) 24 E) 34

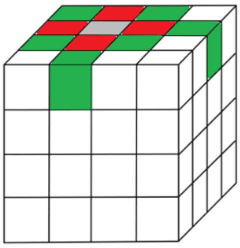
Решение. **D).** Имаме 4 големи коцки со по два обоени ѕида. Понатаму, бројот на малите коцки кои имаат по два обоени ѕида е $4\cdot3+4\cdot2=20$. Значи, вкупно имаме $20+4=24$ коцки со два обоени ѕида.

12. Коцката на цртежот е поделена на 64 помали коцки. Само една од коцките е сива. Првиот ден, сивата коцка ги променила сите свои бели соседи во сиви коцки (две коцки се соседни ако имаат заеднички ѕид). Вториот ден, сите сиви коцки ги промениле сите свои бели соседи во сиви коцки. Колку сиви коцки имало на крајот од вториот ден?

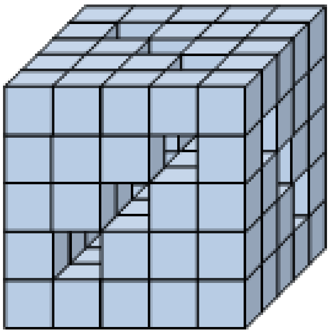


A) 11 B) 13 C) 15 D) 16 E) 17

Решение. **E).** На крајот на првиот ден бојата е променета на 4 коцки во горниот ред на големата коцка (означени со црвена боја) и коцката во вториот ред на големата коцка која е под сивата коцка. Значи, имаме $1+4+1=6$ сиви коцки. На крајот на вториот ден сиви се уште коцката од третиот ред која е под почетната сива коцка, четирите коцки од вториот ред кои се под четирите коцки од првиот ред кои првиот ден ја променија бојата и уште 6 коцки кои во првиот ред се соседни на сивите коцки по првиот ден (означени со зелена боја). Тоа се дополнително $1+4+6=11$ сиви коцки. Значи, на крајот на вториот ден ќе има $6+11=17$ сиви коцки.

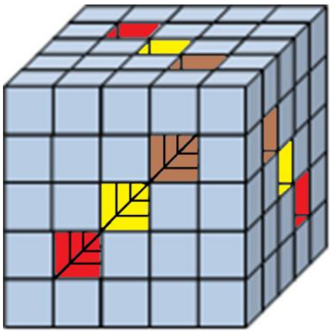


13. Горјан имал 125 мали коцки. Тој залепил некои од нив едни со други и формирал голема коцка со девет тунели кои минуваат низ целата коцка, како што е прикажано на цртежот. Колку мали коцки не искористил Горјан?



A) 52 B) 45 C) 42 D) 39 E) 36

Решение. **D).** Големата коцка е со димензија $5\times5\times5$, што значи дека за секој тунел се извадени по 5 мали коцки. Но три од овие коцки се броени по три пати и тоа коцките во црвените, жолтите и кафеавите тунели. Значи, Горјан не употребил $9\cdot5-3\cdot2=39$ коцки.



14. На колку различни начини може да се прочита зборот BANANA со буквите од дадената табела, ако низ секое квадратче може да се по минува само еднаш и од едно во друго квадратче може да се премине само акодвете квадратчиња имаат заедничка страна?

B	A	N
A	N	A
N	A	N

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

Решение. Е). Да ги означиме полињата на табелата како на цртежот десно. Тогаш зборот BANANA може-ме да го прочитаме на следниве начини:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

123654, 123658, 123698, 147852, 147856, 147896,
125478, 125874, 125689, 125896, 145236, 145632, 145698, 145896,
т.е. дека постојат 14 начини за да се прочита зборот BANANA.

15. На правата се означени неколку точки. Андреј на таа права меѓу секои две соседни означени точки означил по една точка. Оваа постапка ја повторил уште три пати. На крајот пребројал дека се означени 225 точки. Колку точки биле означени на почетокот?

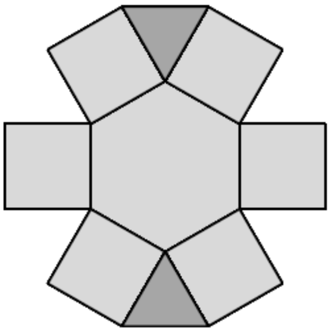
А) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 25

Решение. C). Нека на почетокот биле означени a точки. Во долната табела е дадено колку точки се означуваат во секој чекор и колку вкупно означени има по секој чекор.

	Број точки на почетокот	Дополнително означени точки	Вкупен број на точки
I чекор	a	$a-1$	$2a-1$
II чекор	$2a-1$	$2a-2$	$4a-3$
III чекор	$4a-3$	$4a-4$	$8a-7$
IV чекор	$8a-7$	$8a-8$	$16a-15$

Значи, $16a-15=225$, од каде добиваме $a=15$.

16. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од два триаголника, шест квадрати и еден шестаголник. Филип сака да ги запише броевите од 1 до 9, во секој многуаголник по еден број, така што производот на два соседни броја не е поголем од 15.



Броевите се соседни ако лежат во многуаголници кои имаат заедничка страна. На колку начини тоа може да го направи?

A) 12 B) 8 C) 32 D) 24 E) 16

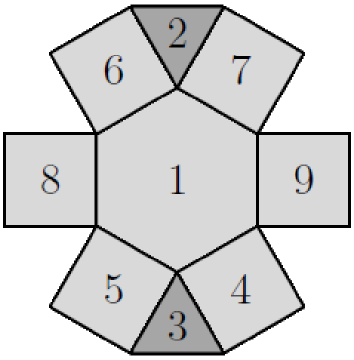
Решение. **E).** Броевите 8 и 9 мора да се запишани во полиња со најмногу еден сосед и тој сосед мора да е бројот 1. Затоа броевите 8 и 9 мора да се во квадратните полиња кои се соседни само со шестаголникот и во шестаголникот мора да е бројот 1. Ова може да се направи на два начина.

Понатаму, броевите 6 и 7 не може да се во триаголниците. Бидејќи овие броеви можеме да ги помножиме најмногу со 2, во едниот триаголник мора да е бројот 2 и негови соседи да се броевите 6 и 7. Сега, за бројот имаме две можности и за секоја од нив две можности за запишување на броевите 6 и 7. Значи, имаме четири можности.

Останува да ги запишеме броевите 3, 4 и 5. Јасно, бројот 3 мора да е во преостанатиот триаголник, а 4 и 5 треба да се негови соседи. Значи имаме 2 можности.

Конечно, бројот на распоредите на броевите е $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$.

Еден распоред на броевите е прикажан на цртежот десно.



17. Еден сеф се отвара со трицифрен број во кој цифрите 1, 3 и 5 се употребени точно по еднаш. Колку обиди се погтребни најмалку за да сме сигурни дека ќе г отвориме сефот?

A) 13 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. **D).** За првата цифра имаме 3 можности, па откако истата ќе ја избереме за втората цифра имаме 2 можности и на крајот за третата цифра имаме 1 можност. Значи, потребно е да направиме најмалку $3\cdot 2\cdot 1=6$ проби.

18. Вчера го запишав пасфордот на мојот компјутер. Бројот што го запишав има 6 цифри, но се сеќавам дека пасфордот имаше седум цифри. Никако не можам да се сетам која цифра не сум ја запишал и на која позиција е таа. Колку различни пасфорди морам да пробам за да бидам сигурен дека го имам точниот број? (Пасфордот може да почне со било која цифра, вклучувајќи ја и нулата)

A) 55 B) 60 C) 64 D) 70 E) 80

Решение. **D).** Ако шестцифрениот број кој е запишан го претставиме во облик $XXXXXX$, тогаш седмата цифра може да се запише на местото на било која од вертикалните црти $|X|X|X|X|X|X|$. Според тоа, имаме 7 можни позиции и на секоја од нив можеме да запишеме било која од 10-те цифри. Значи, треба да направиме $7\cdot 10=70$ пасфорди.

19. Дадени се две множества од петцифрени броеви: множество A во кое производот на цифрите на секој број е 25 и множество B во кое производот на цифрите на секој број е 15. Кое множество има повеќе елементи и за колку?

A) множеството A има $\frac{5}{3}$ пати повеќе елементи од B

B) множеството A има два пати повеќе елементи од B

C) множеството B има $\frac{5}{3}$ пати повеќе елементи од A

D) множеството B има два пати повеќе елементи од A

E) двете множества имаат еднаков број елементи

Решение. **D).** Цифрите на елементите на множеството A се 1, 1, 1, 5 и 5. Броевите ги добиваме така што од пет места избираме две на кои ја запишуваме цифрата 5, а на другите места ја запишуваме цифрата 1. Така добиваме $\frac{5\cdot4}{2}=10$ броја.

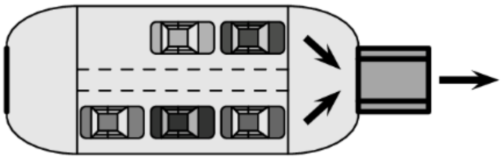
Цифрите на елементите на множеството B се 1, 1, 1, 3 и 5. Броевите ги добиваме така што од пет места избираме две на кои ги запишуваме цифрите 3 и 5, или цифрите 5 и 3. Така добиваме $\frac{5\cdot4}{2}\cdot2=20$ броја.

20. На две паралелни прави a и b се земени 6 точки: 4 на правата a и 2 на правата b. Колку триаголници постојат чии темиња се дадените 6 точки?

A) 6 B) 8 C) 12 D) 16 E) 18

Решение. **D).** Триаголник може да се формира така што две темиња ќе припаѓаат на едната, а третото теме на другата права. Ако две темиња се на правата a, тогаш тие може да се изберат на $\frac{4\cdot3}{2}=6$ начини, а третото теме на правата b може да се избере на 2 начини. Значи, во овој случај имаме $2\cdot6=12$ триаголници. Ако двете темиња се на правата b, тогаш имаме само 1 можност, а за изборот на третото теме на правата a имаме 4 можности. Значи, во овој случај имаме $1\cdot4=4$ триаголници. Конечно, вкупно имаме $12+4=16$ триаголници.

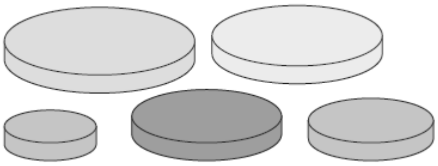
21. На шемата десно е прикажан распоредот на пет коли на ферибрcard. На колку начини колите може да излезат една по друга од ферибродот?



A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

Решение. **D).** Кога колите ќе излезат една по друга од ферибродот, тие се нареден на пет места. Сега еден распоред добиваме ако од петте места изберeме две места и потоа двете коли ги поставиме на овие две места во почетниот редоследн во кој биле на ферибродот, па истото го направиме со трите коли на преостанатите три места. Од дадени 5 места 2 можеме да изберeме на $\frac{5\cdot4}{2}=10$ начини, па затоа колите една по друга од ферибродот може да излезат на 10 начини.

22. Андреј има пет дискови со различни дијаметри. Тој решил да направи кула со помош на три дискови така што секој диск во кулата ќе има помал дијаметар од дискот кој е под него. На колку начини може Андреј да ја направи кулата?

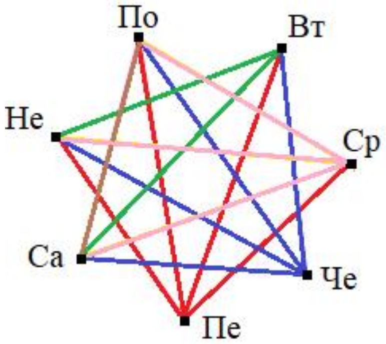


A) 5 B) 6 C) 8 D) 10 E) 15

Решение. D). Три дискови Андреј може да избере така што ќе отстрани два од петте диска. Изборот на двата диска кои ќе ги отстрани може да го направи на $\frac{5\cdot4}{2}=10$ начини. Сега за секој избор со преостанатите три диска кулата може да ја постави на единствен начин. Значи, Андреј може да направи 10 различни кули.

23. Влатко сака да си направи седмичен распоред за трчање. Тој сака да трча точно двапати седмично и тоа секогаш во исти денови од седмицата. Влатко не сака да трча во два последователни денови. Колку различни распореди може да направи Влатко?

A) 16 B) 14 C) 12
D) 10 E) 8



Решение. B). Изборот на првиот ден за трчање Влатко може да го направи на 7 различни нчини. Вториот ден за трчање може да го избере на 4 различни наини. Така добива $7\cdot4=28$ начини на избор на деновите, при што секој избор е броен два пати (на пример, По-Ср и Ср-По, види цртеж десно). Значи, вкупниот број на избори е еднаков на $\frac{7\cdot4}{2}=14$.

24. Неколку тима од по тројца шахисти учествуваат на турнир во шах. Секој шахист од тимот игра точно еднаш против секој шахист од сите останати тимови. Поради организациски причини вкупно на турнирот може да се одиграат најмногу 250 партии шах. Колку најмногу тимови може да учествуваат на овој турнир?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

Решение. **E).** Нека на турнирот учествуваат n тимови. Тогаш вкупниот број шахисти е $3n$. Бидејќи секој шахист игра со сите шахисти од другите тимови добиваме дена секој шахист игра $3n-3$ партии. Значи, на турнирот треба да се одиграат $\frac{3n(3n-3)}{2}$ партии. Сега важи $\frac{3n(3n-3)}{2}\leq250$, од каде добиваме $n(n-1)\leq\frac{500}{9}=55\frac{5}{9}$. Сега, бидејќи $7\cdot6=42<55\frac{5}{9}<56=8\cdot7$ заклучуваме дека на турнирот може да учествуваат најмногу 7 тимови.

25. Колку осумцифрени броеви може да се запишат само со цифрите 1, 2 и 3, така што разликата меѓу секои две соседни цифри е 1?

A) 81 B) 32 C) 64 D) 243 E) 27

Решение. **B).** По цифрите 1 и 3 може да се запише само цифрата 2, а по цифрата 2 може да се запишат цифрите 1 и 3. Секоја од цифрите 1, 2 и 3 може да биде почена. Во долната табела се дадени можните редоследи на цифрите за секоја различна почетна цифра.

1	2	1, 3	2	1, 3	2	1, 3	2
2	1, 3	2	1, 3	2	1, 3	2	1, 3
3	2	1, 3	2	1, 3	2	1, 3	2

Значи, вкупно имаме

$$2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2=32$$

осумцифрени броеви со саканото својство.

26. Определи го бројот на десетцифрените броеви запишани само со цифрите 1, 2 и 3, кај кои разликата на две соседни цифри е еднаква на 1.

A) 16 B) 32 C) 64 D) 80 E) 100

Решение. **C).** По цифрите 1 и 3 може да се запише само цифрата 2, а по цифрата 2 може да се запишат цифрите 1 и 3. Секоја од цофроте 1, 2 и 3 може да биде почена. Во долната табела се дадени можните редоследи на цифрите за секоја различна почетна цифра.

1	2	1, 3	2	1, 3	2	1, 3	2	1, 3	2
2	1, 3	2	1, 3	2	1, 3	2	1, 3	2	1, 3
3	2	1, 3	2	1, 3	2	1, 3	2	1, 3	2

Значи, вкупно имаме

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=64$$

десетцифрени броеви со саканото својство.

27. За еден природен број запишан со ненулти цифри ќе велиме дека е *седмичен*, ако секои две негови соседни цифри запишани во истиот редослед во кој се наоѓаат формираат број кој е делив со 7 (на пример бројот 2149 е *седмичен*). Определи го бројот на деветцифрените *седмични* броеви.

A) 121 B) 144 C) 169 D) 196 E) 225

Решение. D). Во долната табела е дадено кои цифри треба да следуваат по секоја од цифрите од 1 до 9, за да еден број е седмичен.

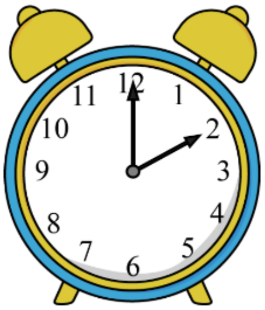
Цифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Следуваат цифрите	4	1,8	5	2,9	6	3	7	4	1,8

Деветцифрен седмичен број може да почнува со било која цифра разлилна од нула. Во долната табела почнувајќи од првата цифра се прикажани можните следни осум цифри. Во последната колона од табелата е даден брорјот на седмичните броеви за соодветната почетна цифра.

Редоследно цифрите во бројот									Број на броеви
1	4	2,9	1,8	4	2,9	1,8	4	2,9	$2^5=32$
2	1,8	4	2,9	1,8	4	2,9	1,8	4	$2^5=32$
3	5	6	3	5	6	3	5	6	1
4	2,9	1,8	4	2,9	1,8	4	2,9	1,8	$2^6=64$
5	6	3	5	6	3	5	6	3	1
6	3	5	6	3	5	6	3	5	1
7	7	7	7	7	7	7	7	7	1
8	4	2,9	1,8	4	2,9	1,8	4	2,9	$2^5=32$
9	1,8	4	2,9	1,8	4	2,9	1,8	4	$2^5=32$

Според тоа, вкупно имаме $32+32+64+4+32+32=196$ деветцифрени седмични броеви.

28. Андреј забележал дека збирот на секои три соседни броја на часовната кружница е делив со 3. На колку начини може броевите од 1 до 12 да се подредат на кружница, така што збирот на секои три соседни броја е делив со 3?



A) 6912 B) 6948 C) 6876 D) 6840 E) 6984

Решение. **А).** Да разгледаме четири последователни броја распоредени во насока на движењето на стрелките на часовникот: a,b,c,d. Бидејќи збировите $a+b+c$ и $b+c+d$ се деливи со 3, заклучуваме дека броевите a и d даваат ист остаток при делење со 3. Тоа значи дека секој трет број при делење со 3 дава ист остаток.

Да ги означиме броевите со $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10},a_{11},a_{12}$. Од претходно кажаното следува дека броевите a_1,a_4,a_7,a_{10} при делење со 3 даваат ист остаток, броевите a_2,a_5,a_8,a_{11} при делење со 3 даваат ист остаток и броевите a_3,a_6,a_9,a_{12} при делење со 3 даваат ист остаток. Бидејќи меѓу броевите од 1 до 12 имаме по четири броја кои при делење со 3 даваат ист остаток, секоја од четворките може да се формира на $4!=24$ начини. Понатаму, во првата тројка a_1,a_2,a_3 распоредот на остатоците можеме да го направиме на $3!=6$ начини и распоредот од првата тројка мора да се запазува во секоја следна тројка. На овој начин добивме $24^3\cdot 6$ распореди и заради цикличноста на распоредите овој број треба да го поделиме со 12. Според тоа, бараниот број распореди е $24^3\cdot 6:12=6912$.

29. Во понеделник Александар споделил фотографија со 5 свои пријатели кои ја примиле и ја виделе истиот ден. Следниот ден секое лице кое ја примило фотографијата ја испратило на двајца свои пријатели, кои сѐ уште не ја виделе фотографијата, кои ја примиле и ја виделе истиот ден, па следниот ден секој од нив ја пратил фотографијата до двајца свои пријатели, кои ја примиле и ја виделе фотографијата истиот ден и така се ширел кругот на пријатели кои ја добиле и ја виделе фотографијата. Кој ден бројот на луѓето кои ја виделе фотографијата ќе биде за прв пат поголем од 2018?

А) Среда В) Четврток С) Петок D) Сабота Е) Недела

Решение. C). Фотографијата првиот ден ја виделе 5 луѓе, вториот ден ја виделе $5\cdot 2=10$ луѓе, третиот ден ја виделе $5\cdot 2^2=20$ луѓе, четвртиот ден ја виделе $5\cdot 2^3=40$ луѓе, петтиот ден ја виделе $5\cdot 2^4=80$ луѓе итн. $n-$тиот ден ја виделе $5\cdot 2^{n-1}$. Според тоа, во првите n дена фотографијата вкупно ја виделе

$$\begin{aligned}A&=5(1+2+2^2+2^3+...+2^{n-2}+2^{n-1})\\&=5\cdot\frac{(1+2+2^2+2^3+...+2^{n-2}+2^{n-1})(2-1)}{2-1}\\&=5\cdot\frac{2+2^2+2^3+...+2^{n-2}+2^{n-1}+2^n-1-2-2^2-2^3-...-2^{n-2}-2^{n-1}}{2-1}\\&=5\cdot(2^n-1).\end{aligned}$$

Заначи, треба да го определиме најмалиот број n за кој важи

$$5\cdot(2^n-1)\geq 2018.$$

Сега, од

$$5\cdot(2^8-1)=1275<2018<2555=5\cdot(2^9-1),$$

следува дека бараниот број е $n=9$. Значи, следниот вторник фотографијата за прв пат ќе ја видат повеќе од 2018 луѓе.

30. Определи го бројот на разностраните триаголници со периметар 27, чии должини на страни се природни броеви.

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 17

Решение. B). Нека a,b,c се должините на страните на триаголниците. Тогаш $a+b+c=27$. Бидејќи триаголниците се разнострани, без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a<b<c$. Од неравенството на триаголник следува $c<a+b$. Според тоа, $c<27-c$, од каде добиваме $2c<27$. Но, c е природен број, па затоа $c\leq 13$. Понатаму, $3c>a+b+c=27$, па затоа $c>9$.

Ако $c=13$, тогаш $a+b=14$ и како $a<b<c$ ги добиваме разностраните триаголници: (3,11,13), (4,10,13), (5,9,13), (6,8,13).

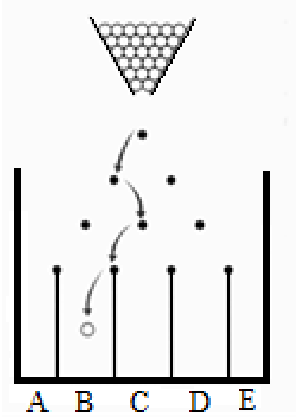
Ако $c=12$, тогаш $a+b=15$ и како $a<b<c$ ги добиваме разностраните триаголници: (4,11,12),(5,10,12), (6,9,12), (7,8,12).

Ако $c=11$, тогаш $a+b=16$ и како $a<b<c$ ги добиваме разностраните триаголници: (5,10,12), (6,9,12), (7,8,12).

Ако $c=10$, тогаш $a+b=17$ и како $a<b<c$ го добиваме разностраниот триаголник: (8,9,10).

Според тоа, бројот на разностраните триаголници со периметар еднаков на 27 е $4+4+3+1=12$.

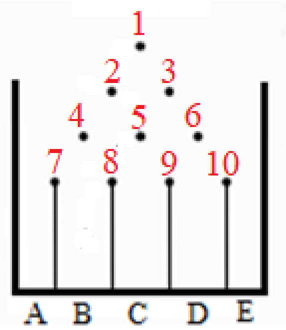
31. Топче се пушта од врвот на таблата на која во редици се поставени прегради (види цртеж). Ако топчето удри во преграда, тоа продолжува лево или десно од преградата. Една можна патека на движење на топчето е прикажана на цртежот. Кој е бројот на различните патеки по кои топчето може да стигне до корпата B?



Забелешка. Топчињата кои се пуштаат се такви што тие можат да поминат меѓу преградите на таблата.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

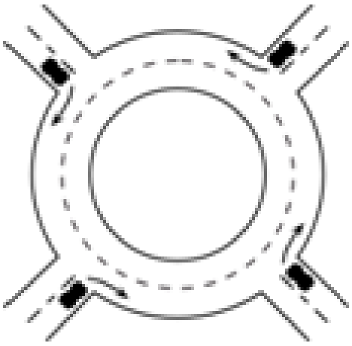
Решение. **C).** При ознаки како на цртежот десно можни патеки се:



$$1-2-4-7-B,$$
$$1-2-4-8-B,$$
$$1-2-5-8-B,$$
$$1-3-5-8-B.$$

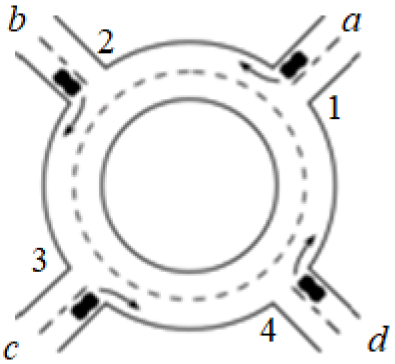
Значи, имаме точно 4 патеки.

32. Четири автомобил во исто време се вклучуваат во кружен тек од четири различни различни насоки, како што е прикажано на цртежот десно. Секој автомобил го напушта кружниот тек пред да направи цел круг и никои два автомобила не го напуштаат кружниот тек од ист излез. На колку различни начини автомобилите можат да го напуштат кружниот тек?



A) 9 B) 12 C) 15 D) 24 E) 81

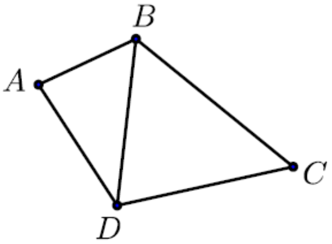
Решение. **A).** Автомобилите да ги означиме со броевите 1, 2, 3, 4, а правците кои влегуваат (излегуваат) од кружниот тек со a,b,c,d. Бидејќи секој автомобил прави помалку од цел круг во начините за излез на сите автомобили од кружниот тек не смее да се појават комбинациите $1a,2b,3c,4d$. Понатаму, четирите автомобили излегуваат од четири различни излези, па затоа во секој начин на излез мора да се појават сите броеви 1, 2, 3, 4 и сите букви a,b,c,d. Така, сите начини за излез од кружниот тек се:



$$(1b,2c,3d,4a),\ (1b,2d,3a,4c),\ (1b,2a,3d,4c),$$
$$(1c,2a,3d,4b),\ (1c,2d,3a,4b),\ (1c,2d,3b,4a),$$
$$(1d,2a,3d,4b),\ (1d,2c,3a,4b),\ (1d,2c,3b,4a).$$

Значи, вкупно имаме 9 начини за излез на автомобилите од кружниот тек.

33. Четири градови A,B,C и D се поврзани со патишта, како на цртежот десно. Трка се организира така што почнува од градот D,



завршува во градот B и по секој пат се поминува само по еднаш. На колку начини може да се организира трката?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

Решение. **C).** Трката може да се организира така што на 3 различни начини ќе излеземе од градот D, по што на единствен начин се стигнува до B. Потоа од B трката може да се продолжи на 2 различни начини, за да понатаму трката се реализира на единствен начин. Значи, имаме $3\cdot 2=6$ различни начини за реализирање на трката.

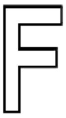
Патиштата според кои трката може да се реализира се:

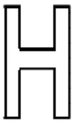
$$D\to A\to B\to C\to D\to B,\quad D\to A\to B\to D\to C\to B,$$
$$D\to B\to A\to D\to C\to B,\quad D\to B\to C\to D\to A\to B,$$
$$D\to C\to B\to A\to D\to B,\quad D\to C\to B\to D\to A\to B.$$

6. РАСЕКУВАЊЕ И СОСТАВУВАЊЕ ФИГУРИ

1. Матео има ножици и пет букви направени од картон. Тој може да ја пресече секоја од буквите со права линија само еднаш. Од која буква, пресекувајќи ја, Матео може да добие најмногу делови?

A)

B)

C)

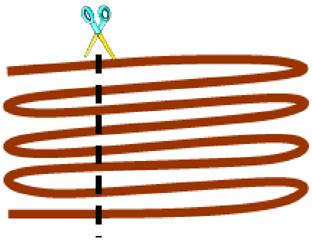
D)

E)


Решение. **E).** Со едно сечење по права линија буквата O може да се раздели на два дела. Со едно сечење буквата F може да се раздели на најмногу четири дела. Со едно сечење буквата S може да се раздели на најмногу четири дела. Со едно сечење буквата H може да се раздели на најмногу четири дела. Со едно сечење буквата M може да се раздели на најмногу пет дела.

2. Едно јаже е превиткано на половина. Потоа пак на половина и на крај по трет пат на половина. Така превитканото јаже е пресечено напреку при што се добиени 9 делови. Две од добиените јажиња се со должини 4 m и 9 m. Која од следните должини не може да е должината на јажето?

A) 52 m B) 68 m C) 72 m D) 88 m

E) сите одговори се можни



Решение. **C).** Од условот на задачата пресеченото јаже ќе изгледаат како на цртежот. Според тоа по сечењето ќе има три вида на парчиња со должини $x, 2x, y$. Парчиња со должини y ќе има 4, со должини $2x$ ќе има 3, а со должини x ќе има 2. Вкупната должина на јажето е $2x+3\cdot 2x+4y$. Можни се следните случаи:

а) $x=4$, $y=9$. Тогаш

$$2x+3\cdot 2x+4y=2\cdot 4+3\cdot 8+4\cdot 9=8+24+36=68\text{ m}$$

б) $x=9$, $y=4$. Тогаш

$$2x+3\cdot 2x+4y=2\cdot 9+3\cdot 18+4\cdot 4=18+54+16=88\text{ m}$$

в) $2x=4$, $y=9$. Тогаш

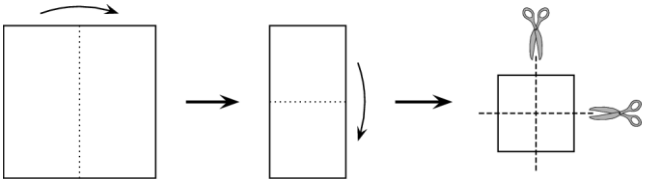
$$2x+3\cdot 2x+4y=4+3\cdot 4+4\cdot 9=4+12+36=52\text{ m},$$

г) $2x=9$, $y=4$. Тогаш

$$2x+3\cdot 2x+4y=9+3\cdot 9+4\cdot 4=9+27+16=52\text{ m}.$$

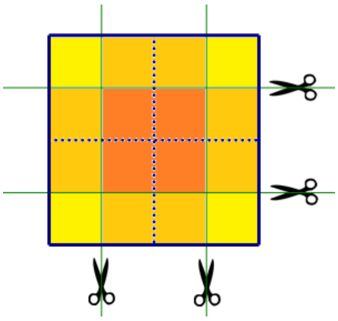
Значи, јажето не може да биде долго 72m.

3. Јована два пати превиткала квадратно парче хартија и тогаш два пати го пресекла како на цртежот десно. Колку парчиња хартија во форма на квадрат добила Јована?



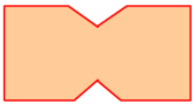
А) 3　　　B) 4　　　C) 5　　　D) 6　　　E) 8

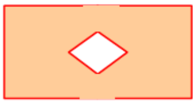
Решение. **C).** На цртежот десно со испрекинати линии се прикажани местата на кои Јована го превиткала листот, а со цели линии се прикажани местата по кои листот е пресечен. При сечењето се добиени 4 мали квадрати, 4 правоаголници составени од по два мали квад-рати и 1 квадрат составен од четири мали квадрати. Значи, Јована добила $4+1=5$ делови во форма на квадрат.



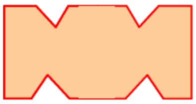
4. Дамјан, еден лист хартија го превиткува како што е прикажано на цртежот и прави

два пресеци со ножици. Потоа тој го одвиткува листот. Која од следните фигури не може да ја добие Дам-јан?


A)


B)

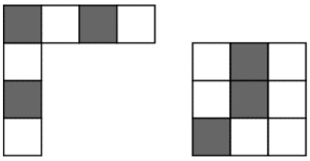

C)

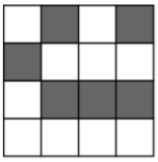

D)

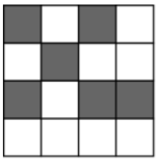

E)

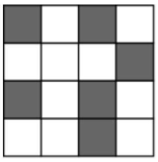
Решение. D). Фигурата А може да се добие ако се отсечат двата леви ќоша на завитканиот лист. Фигурата В се добива ако на средината на левата страна се отсече рамнокрак правоаголен триаголник чија хипотенуза лежи на страната. Фигурата С се добива ако се отсечат двата десни ќоша на завитканиот лист. Фигурата Е се добива со отсекување на горниот десен и долниот лев ќош на завитканиот лист. За да се добие фигурата D потребно е на горната и на долната страна да се направат по две сечења, што значи вкупно 4 сечења, па оваа фигура не може да се добие со две сечења.

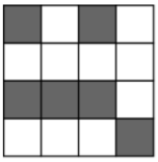
5. Кој од дадените квадрати не може да се формира со помош на фигурите прикажани на цртежот десно?

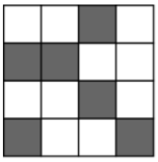


A) 

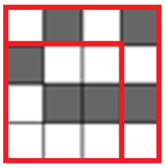
B) 

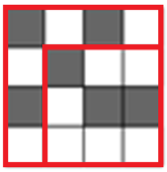
C) 

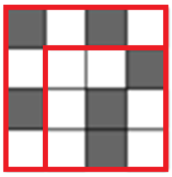
D) 

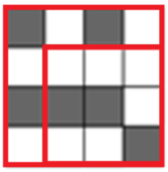
E) 

Решение. E). Квадратите A, B, C, D може да се формираат како што и прекижано на долните цртежи.



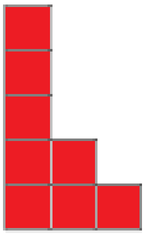


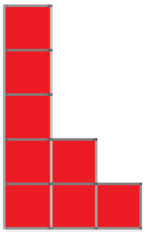


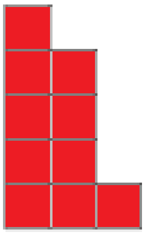


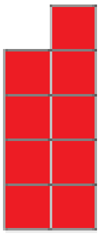
Квадратот Е не содржи фигура L од дадениот облик, па не може да се состави.

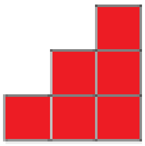
6. Со која од дадените фигури заедно со фигурата прикажана на цртежот десно може да се формира правоаголник, без притоа квадратињата да се преклопуваат или да има празни места?

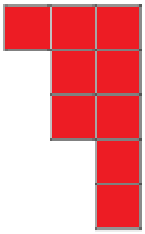


А)


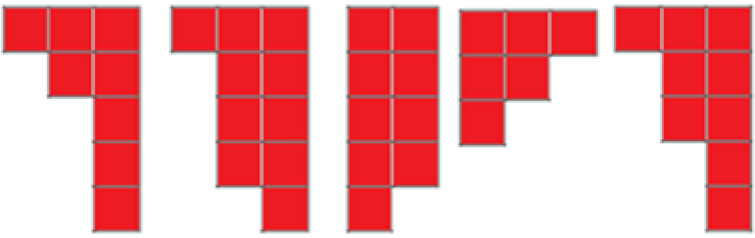
В)


С)


D)


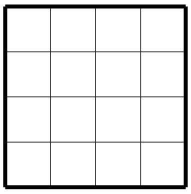
Е)


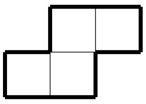
Решение. **В).** Очигледно на пократката страна на правоаголникот треба да лежат 3 или четири квадратчиња. Затоа првите четири понудени фигури треба да ги ротираме за 180°, а четврата е ја оставиме во истата положба (цртеж долу).



Сега е јасно дека со втората фигура, т.е. со фигурата В) и со дадената фигура се формира правоаголник 3×6.

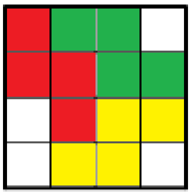
7. Ана има квадратно парче хартија прикажано на левиот цртеж. Сечејќи по линиите од парчето хартија таа сече копии од фигурата дадена на десниот цртеж (S-тетрамино). Кој е најмалиот број на квадратчиња што може да и преостанат на Ана?



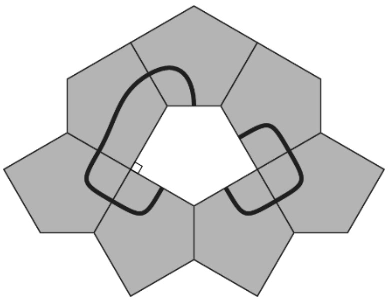


A) 10 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

Решение. **C).** Ако Ана постави едно S-тетрамино на долниот ред така што ќе го покрие левото аголно поле, тогаш таа не може да постави друго S-тетрамино со кое ќе ги покрие двете полиња во првиот ред или двете полиња во првата колона. Значи, Ана не може да ги покрие сите полиња на фигурата која има 16 полиња. Едно S-тетрамино покрива 4 полиња, па затоа Ана може да покрие најмногу 12 полиња, т.е. најмалку 4 полиња ќе останат непокриени. Еден пример за вакво покривање (сечење) е прикажан на цртежот десно.



8. Фигурата прикажана на цртежот десно е формирана од еднакви петаголници. Која плочка треба да се стави на празното место за да се добијат две затворени линии?



A) 

B) 

C) 

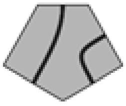
D) 

E) 

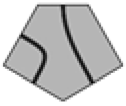
Решение. **C).** Петаголникот кој недостасува е ротиран за 180° во однос на понудените петаголници. Затоа истите ќе ги ротираме за 180°

A)

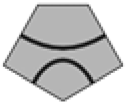
B)



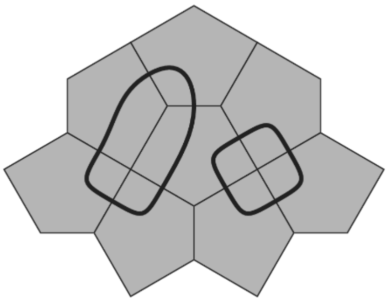
C)



D)



E)



Сега е јасно дека тоа е петаголникот C), (цртеж десно).

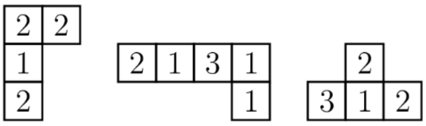
9. Колку прави ја делат рамнината на пет делови?

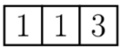
A) 3 B) 4 C)5 D) 6 E) не е можна таква поделба

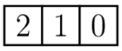
Решение. **В).** Две прави кои се сечат ја делат рамнината на 4 дела. Ако сме избрале две такви прави, тогаш со избор на било која права бројот на делбените делови ќе биде 6 и 7. Притоа ако третата права минува низ пресечната точка на двете прави или е паралелна на едната од нив се добиваат 6 делови (направи цртеж), а во спротивно се добиваат 7 делови (направи цртеж). Според тоа, не смее да има прави кои се сечат.

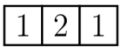
Една права ја дели рамнината на 2 дела. Со додавање на права која е паралелна на веќе нацртаните прави се добива уште по еден дел. Значи, треба да додадеме уште три прави, па затоа 4 паралелни прави ја делат рамнината на 5 делови.

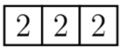
10. Филип може да состави квадрат со помош на трите дела прикажани на цртежот десно и еден дел кој недостасува. Кој е тој дел ако збирот на броевите во секој ред и секоја колона е еднаков.

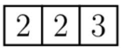


A) 

B) 

C) 

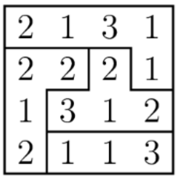
D) 

E) 

Решение. **А).** Четирите дела од кои треба да се состави квадратот имаат $4+5+4+3=16$ квадратчиња. Според тоа, квадратот е со димензија 4×4. Еден од дадените делови има четири квадратчиња во еден ред и збирот на броевите во овој ред е $2+1+3+1=7$. Значи, збирот на сите броеви во квадратот треба да е $4\cdot7=28$. Збирот на броевите во трите дела е еднаков на

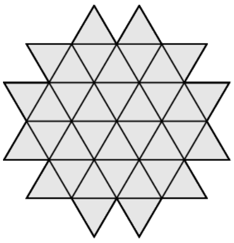
$$(2+2+1+2)+(2+1+3+1+1)+(2+3+1+2)=7+8+8=23.$$

Значи, збирот на броевите во делот кој треба да се употреби е $28-23=5$. Од дадените броеви само делот А) има збир на броевите 5. Составениот квадрат е



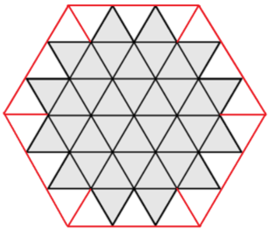
прикажан на цртежот десно.

11. На цртежот е прикажана фигура која е добиена со составување на 36 складни рамнострани триаголници. Кој е најмалиот број на такви триаголници кои треба да се додадат на фигурата за да се добие шестаголник?



A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 24

Решение. D). При добивање на шестаголник ќе додадеме најмал број триаголници ако го составиме најмалиот можен шестаголник. Тој се добива ако низ темињата на крајните триаголници на фигурата повлечеме прави паралелни на спротивните страни на тие триаголници. Така го добиваме шестаголникот прикажан на цртежот десно. Сега лесно се гледа дека најмалиот можен број триаголници е 18.

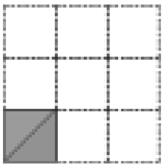


12. Симон има 52 складни рамнокраки правоаголни триаголници. Тој сака да направи квадрат користејќи некои од нив. Колку квадрати со различни димензии може да направи?

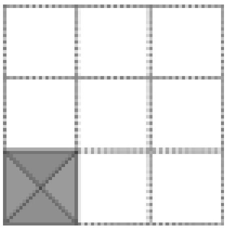
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Решение. C). Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека должините на катетите на овие триаголници се 1.

Првиот основен квадрат Симон може да го состави од два такви триаголници, а потоа различни квадрати ќе добие со помош на основните квадрати. Нека n е бројот на триаголниците кои може да ги постави на една страна на квадратот. Тогаш вкупниот број употребени триаголници ќе биде



$2n^2$, па затоа ќе важи $2n^2 \leq 52$, од каде добиваме $n^2 \leq 26$. Значи, $n=1,2,3,4,5$, т.е. во овој случај имаме 5 различни квадрати.



Вториот основен квадрат Симон може да го состави со помош на четири триаголници, а потоа различни квадрати да добива со помош на тие основни квадрати. Нека n е бројот на триаголниците кои може да ги постави на една страна на квадратот. Тогаш вкупниот број употребени триаголници ќе биде $4n^2$, па затоа ќе важи $4n^2 \leq 52$, од каде добиваме $n^2 \leq 13$. Значи, $n=1,2,3$, т.е. во овој случај имаме 3 различни квадрати.

Сега треба да видиме дали може да се состави квадрат ако на една негова страна се ставени n триаголници налегнати со катетата и m триаголници налегнати со хипотенузата. Тогаш бидејќи катетата има должина 1, а хипотенузата има должина $\sqrt{2}$, должината на страната на квадратот ќе биде $n+m\sqrt{2}$. Значи, неговата плоштина ќе биде $(n+m\sqrt{2})^2 = n^2+2mn\sqrt{2}+m^2$. Но плоштината на еден триаголник е $\frac{1}{2}$, па затоа плоштината на квадратот ќе биде рационален број, т.е. $n^2+2mn\sqrt{2}+m^2 \in \mathbb{Q}$, од каде добиваме $mn=0$. Тоа значи $m=0$ и го добиваме првиот основен квадрат или $n=0$ и го добиваме вториот основен квадрат. Значи, Симон може да состави $5+3=8$ различни квадрати.

13. Даден квадрат е расечен на 2009 квадрати, чии должини на страни се природни броеви. Определи ја најмалата можна должина на дадениот квадрат.

A) 44 B) 45 C) 46

D) не постои таков квадрат E) друг одговор

Решение. **В).** Бидејќи $44 \cdot 44 = 1936$, квадрат со страна 44 не може да се расече на 2009 квадрати чии должини на страни се природни броеви. Од квадрат сп должина на страна 45 ќе исечеме правоаголник со должини на страни 3 и 6. Преостанатиот дел од квадратот може да се расече на $2025 - 18 = 2007$ единечни квадрати. Сега правоаголникот со страни 3 и 6 го расекуваме на два квадрати со должина на страна 3. Значи, најмалата должина на страната на квадратот е 45.

7. ИГРИ И ТУРНИРИ

1. Природните броеви од 1 до 10 се запишани на таблата. Пабло ја игра следнава игра: во еден потег брише два броја и на нивно место го запишува нивниот збир намален за еден. Играта завршува кога на таблата ќе биде запишан само еден број. Кој е тој број?

A) 16 B) 31 C) 46 D) 51 E) друг одговор

Решение. C). Збирот на сите броеви запишани на таблата е

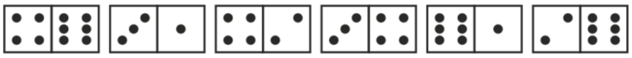
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55.$$

Во секој чекор при замена на броевите a и b, со бројот $a+b-1$ збирот се намалува за 1. Од почеток до крајот на играта Пабло прави 9 чекори, па затоа на крајот ќе остане бројот $55-9=46$.

2. Група од 50 деца седат во круг. Фрлаат топка и секој кој ќе ја добие топката истата ја фрла на шестото дете од себе во насока на движењето на стрелкиет на часовникот. Андреј ја фати топката 100 пати. Колку деца за тоа време не ја фатиле топката ниту еднаш.

A) 0 B) 8 C) 10 D) 25 E) 40

Решение. D). Нека децата во насока на движењето на стрелките на часовникот ги нумерираме со броевите од 1 до 50 и нека топката е кај првото дете. Тогаш во првиот круг топката била кај децата со редни броеви: 1, 7, 13, 19, ..., 43, 49, односно кај 9 деца. Детото 49 ја додало топката на детето 5, па сега топката била кај децата: 5, 11, 17, ..., 41, 47, односно кај 8 деца. Детето 47 ја додало топката кај детето 3, па сега топката била кај децата: 3, 9, 15, ..., 39, 45, односно кај 8 деца. Детето 45 ја додало топката кај детето 1, па сега постапката се повторува. Значи, топката ја фатиле $9+8+8=25$ деца, а воопто не била кај $50-25=25$ деца.

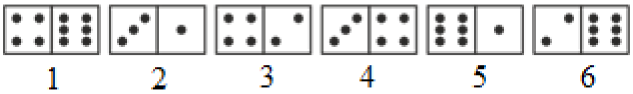


3. Домино плочките се правилно наредени ако две домина кои се допираат имаат ист број точки на соседните половинки. Павле наредил шест домина како што е прикажано на цртежот. Тој во еден потез може или да ги замени местата на две домина или за 180° да ротира едно домина. Кој е најмалиот број потези што треба да ги направи Павле за домината да се правилно наредени?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

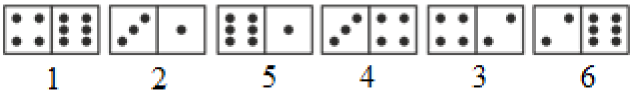
E) тоа не е можно да се направи

Решение. **C).** Домино плочките да ги означиме од лево кон десно со броевите од 1 до 6.



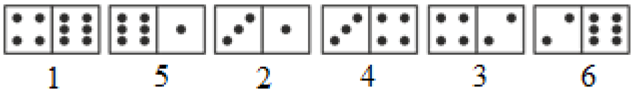
Забележуваме дека на шесте плочки има 3 четворки, 3 шестки, 2 единици, 2 двојки и 2 тројки. Притоа четворка и шестка се наоѓаат на краевите на плочките, па затоа најмал број потези би бил ако тие останат на своите места. Понатаму, имаме пет пара со еднаков број точки кои треба правилно да ги поставиме, а ниту еден од нив не е правилно поставен. Притоа, ако земеме предвид дека со пместување или ротација на една плочка можеме правилно да поставиме најмногу два пара точки, заклучуваме дека ни се потребни најмалку три потези. Дека тоа може да се постигне со три потези доволно е да постапиме на следниов начин.

Прв потез. За да двојките се една до друга, бидеји едната двојка останува на своето место доволно е местата да ги заменат плочките 3 и 5, по што состојбата е:

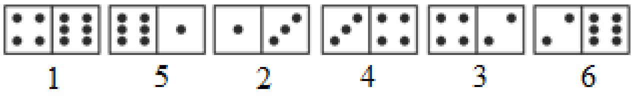


при што и двете четворки се една до друга.

Втор потез. Понатаму, за да третата шестка дојде на место до првата шестка треба домината 2 и 5 да ги заменат местата, по што состојбата е:



Трет потез. Со ротација на доминото 2 единиците и тројките ќе се поставaт правилно, т.е. сите плочки ќа бидат правилно наместени. Состојбата е:



4. На турнир, секоја од шесте екипи игра по еден натпревар против секоја друга екипа. Во секое коло трите натпревари се одвиваат истовремено. Една ТВ станица одлучила кој натпревар ќе го пренесува за секое коло и тоа е прикажано на дијаграмот десно. Во кое коло тимот D ќе игра против тимот F?

1	2	3	4	5
A – B	C – D	A – E	E – F	A – C

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. **A).** Тимот А не може во второто коло да игра против тимот D, па затоа против D ќе игра во четвртото коло, а во ова коло третиот натпревар ќе биде B-C. Сега е јасно дека во второто коло тимот А ќе игра против тимот F, па затоа во второто коло третиот натпревар ќе биде B-E (види ја табелата десно). Понатаму, тимот Е треба да игра со C и со D, па како со C не може да игра во петтото коло, распоредот ќе биде со C во првото и со D во петтото коло. Значи, третиот натпревар во првото коло е D-F, а третиот натпревар во

1	2	3	4	5
A-B	C-D	A-E	E-F	A-C
C-E	**A-F**	**B-D**	**A-D**	**D-E**
D-F	**B-E**	**C-F**	**B-C**	**B-F**

петтото коло е B-F. Конечно, во третото коло се играат уште натпреварите B-D и C-F.

Значи, во првото коло тимот D ќе игра против тимот F

5. Коста ги запишува резултатите од четвртфиналето, полуфиналето и финалето на еден тениски турнир. Резултатите се (не се подредени по редослед): Бранко го победил Андон, Киро го победил Дамјан, Ѓорѓи го победил Христо, Ѓорѓи го победил Киро, Киро го победил Бранко, Александар го победил Филип и Ѓорѓи го победил Александар. Кој пар бил во финалето?

A) Ѓорѓи и Христо B) Ѓорѓи и Киро C) Киро и Бранко

D) Ѓорѓи и Александар E) Киро и Дамјан

Решение. **B).** Ѓорѓи ги победил Александар, Христо и Филип, што значи победил во четвртфиналето, полуфиналето и финалето. Киро ги победил Бранко и Дамјан, а изгубил од Ѓорѓи, што значи дека победил во четвртфиналето и полуфиналето, а изгубил во финалето. Значи, во финалето играле Ѓорѓи и Киро.

6. Во финалето на еден фудбалски турнир биле постигнати многу голови. Во првото полувреме биле постигнати вкупно 6 голови, и во водство биле гостите. Во второто полувреме домаќините постигнале 3 гола и победиле. Колку вкупно голови постигнале домаќините во финалето?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. **C).** Резултатот во првиот дел на натпреварот може да биде 0:6, 1:5 или 2:4. Во второто полувреме домаќините постигнале 3 гола и победиле. Гостите не дале ниту еден гол, што значи дека со постигнатите 3 гола во второто полувреме домаќините постигнале повеќе голови. Тоа е единствено можно кога резултатот од првото поолувреме е 2:4, па затоа вкупниот резултат е 5:4. Значи, домаќините вкупно постигнале 5 голови.

7. На еден турнир во фудбал учествуваат 4 екипи. Секоја екипа игра по еден натпревар со секоја друга екипа. На секој натпревар, победникот добива 3 поени, поразениот добива 0 поени, а ако натпреварот заврши без победник двате екипи добиваат по 1 поен. По сите одиграни натпревари, кој од следниот број на поени е невозможно вкупно да освоила некоја екипа?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 **E)** 8

Решение. **E).** Секоја екипа игра по три натпревари. Во табелата е прикажан можниот број бодови на една екипа.

Победени натпревари	Нерешени натпревари	Изгубени натпревари	Вкупно поени
3	0	0	$3\cdot3=9$
2	1	0	$2\cdot3+1\cdot1=7$
2	0	1	$2\cdot3=6$
1	2	0	$2\cdot1+1\cdot3=5$
1	1	1	$1\cdot3+1\cdot1=4$
1	0	2	$1\cdot3=3$
0	3	0	$3\cdot1=3$
0	2	1	$2\cdot1=2$
0	1	2	$1\cdot1=1$
0	0	0	0

Значи, од дадените поени екипата не може да освои само 8 поени.

8. Во финалето на еден натпревар за танцување, секој од трите членови на жирито на петте натпреварувачи дава 0 поени, 1 поен, 2 поени, 3 поени или 4 поени. Било кои два натпреварувачи не добиле иста

оценка од било кој судија. Во долната табела се дадени збировите на сите оценки на натпреварувачите и некои поединечни оценки. Колку поени добил Адам од судијата III?

	Адам	Берта	Цвета	Дејан	Емил
I	2	0			
II		2	0		
III					
Збир	7	5	3	4	11

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. B). Од судијата III Берта добила оценка 3. Сега Цвета не може да добие оценка 3 од судијата III, но не може да добие ниту оценка 1 од судијата III, бидејќи тогаш судијата I мора да и даде оценка 2 (противречност). Значи, Цвета од судијата III може да добие оценка 2 или 0. Да го разгледаме случајот кога од судијата III добила оценка 0. Тогаш ја имаме табелата:

	Адам	Берта	Цвета	Дејан	Емил
I	2	0	3		
II		2	0		
III		3	0		
Збир	7	5	3	4	11

Збирот на оценките на Емил е 11, а тоа е можно само ако оценките се 3, 4 и 4. Притоа оценката 3 може да ја добие само од судијата II

	Адам	Берта	Цвета	Дејан	Емил
I	2	0	3		4
II		2	0		3
III		3	0		4
Збир	7	5	3	4	11

Сега, Дејан има збир 4 и тој не може да има оценка 3 и може да има најмногу една оценка 2. Значи неговите оценки се 1, 1 и 2, при што оценката 2 е добиена од судијата III. Така ја имаме долната табела.

	Адам	Берта	Цвета	Дејан	Емил
I	2	0	3	1	4
II		2	0	1	3
III		3	0	2	4
Збир	7	5	3	4	11

Конечно, бидејќи секој судија дава различни оценки на натпреварувачите, добиваме дека Адам од судијата III добил оценка 1, а од судијата II добил оценка 4.

	Адам	Берта	Цвета	Дејан	Емил
I	2	0	3	1	4
II	4	2	0	1	3
III	1	3	0	2	4
Збир	7	5	3	4	11

Сега да го разгледаме случајот кога Цвета од судијата III добила оценка 2 и да ја дополниме како погоре табелата.

	Адам	Берта	Цвета	Дејан	Емил
I	2	0	1		
II		2	0		
III		3	2		
Збир	7	5	3	4	11

Сега, Дејан има збир на оценки 4, па како не може да има оценка 2, неговите оценки се 0, 1 и 3. Притоа оценката 0 е од судијата III, оценката 1 е од судијата II и останува оценката 3 да е од судијата I. Така ја имаме табелата.

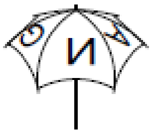
	Адам	Берта	Цвета	Дејан	Емил
I	2	0	1	3	
II		2	0	1	
III		3	2	0	
Збир	7	5	3	4	11

Понатаму, како и во првиот случај заклучуваме дека Емил има оценки 4, 3, 4 добиени во овој редослед од судиите I, II, III, а Адам има оценки 2, 4, 1 добиени во овој редослед од судиите I, II, III. Ова е прикажано во долната табела.

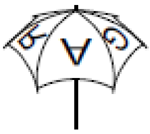
	Адам	Берта	Цвета	Дејан	Емил
I	2	0	1	3	4
II	4	2	0	1	3
III	1	3	2	0	4
Збир	7	5	3	4	11

8. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

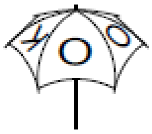
1. На мојот чадор има напишано KANGAROO, што е прикажано на цртежот десно. Еден од дадените цртежи го прикажува мојот чадор. Кој е тој цртеж?

A) 

B) 

C) 

D) 

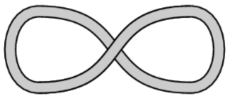
E) 

Решение. E). Тоа не може да е:

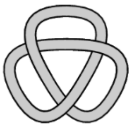
- A) бидејќи буквата N е обратно запишана,
- B) бидејќи R не е меѓу двете O,
- C) бидејќи буквата R е обратно запишана,
- D) бидејќи буквата G е обратно запишана.

Единствено може да е E) биццдејќи зборот е кружно запишан и по двете O следува K.

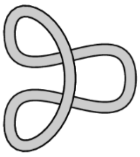
2. Кое од долните јажиња не може да се добие без сечењето на јажето кое е прикажано на цртежот десно?

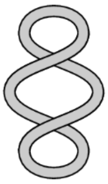


A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Решение. B). Ако горниот дел на даденото јаже го превртиме нагоре, заклучуваме дека јажето е во форма на прстен.

Ако надоворешниот дел на јажето A) го превртиме нагоре, а потоа два пати долниот дел го завртиме во лево добиваме прстен.

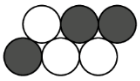
Ако горниот дел на јажето C) го превртиме нагоре, а потоа десниот дел го повлечеме во десно добиваме прстен.

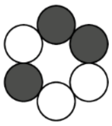
Ако горнот дел на јажето D) го превртиме налево добиваме прстен.

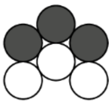
Ако долниот дел на јажето Е) го превртиме надесно, а горниот дел налево добиваме прстен.

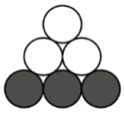
Само кај јажето В) имаме јазол, односо два прстена кои поминуваат еден во друг и не може без сечење да се доведат во форма на еден прстен.

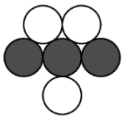
3. Црно-бела гасеница која е прикажана на цртежот десно се склупчила за да спие. На кој од долните цртежи е прикажано како може да изгледа склупчената гасеница?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Решение. **A).** Единствено на првиот цртеж може наизменично со непрекината линија да се поврзат белите и црните кругчиња. Значи, тоа е цртежот А).

На другите цртежи тоа не е можно. На пример, на цртежите В) и С) можеме да поврземе најмногу 4 кругчиња, а на цртежите D) и Е) најмногу 5 кругчиња.

4. Бравата на велосипедот има четири тркалца нумерирани по ред со цифрите од 0 до 9. Секое од четирите тркалца се ротира за 180° од положбата прикажана на цртежот десно и се добива бројот со кој се отклучува бравата. Кој може да е точниот број за отклучување на бравата на велосипедот?

A) 

B) 

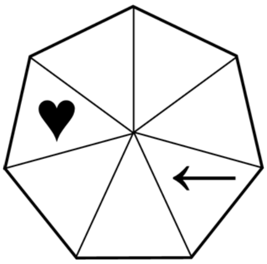
C) 

D) 

E) 

Решение. **B).** Бројот 1893 се добива со пет завртувања на секој дел во иста насока. Бројот 0815 не може да се добие бидејќи 0 се добива со 4 завртувања, а 8 со пет завртувања во иста насока. Бројот 1972 не може да се добие бидејќи 1 се добива со пет завртувања, а 9 со 6 завртувања во иста насока. Бројот 4892 не може да се добие бидејќи бројот 4 се добива со 8, а бројот 8 со 5 завртувања во иста насока. Бројот 8436 не може да се добие бидејќи бројот 8 се добива со 2 завртувања, а бројот 4 со 1 завртување во иста насока. Значи, точниот број за отклучување на бравата е 1893.

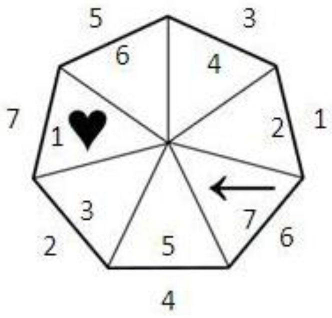
5. Правилен седумаголник е разделен на седум меѓусебно складни триаголници. Во еден од нив има стрелка а во друг има срце (види цртеж). Во исто време ги поместуваме и стрелката и срцето на следниот начин: срцето за три последователни триаголници во насока на движењето на стрелките на часовникот, а стрелката за четири последователни триаголници во насока обратна од движењето на стелките на часовникот. По колку такви поместувања тие првпат ќе се најдат во почетните положби?



A) 7　　B) 8　　C) 9　　D) 10

E) тоа никогаш нема да се случи

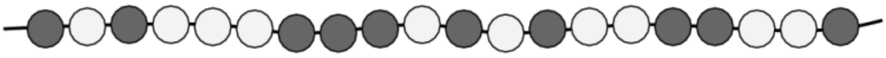
Решение. **А).** *Прв начин.* На цртежот десно броевите внатре во фигурата го означуваат движењето на стрелката, а оние надвор движењето на срцето. Значи, потребни се 7 чекори.



Втор начин. Бидејќи $\text{NZD}(7,3) = \text{NZD}(7,4) = 1$ и срцето и стрелката најрано по 7 чекори може да се најдат во почетната положба.

6. Еден ѓердан е направен од црни и бели бисери. Катерина сака даземе точно 5 црни бисери од него. Но таа може да зема бисери поч-

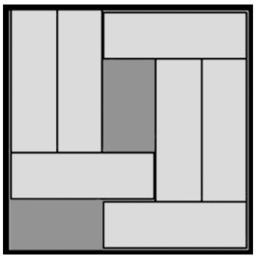
нувајќи од краевите на герданот, со ред, па мора да зема и бели бисери. Кој е најмалиот број на бели бисери кои таа мора да ги земе?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

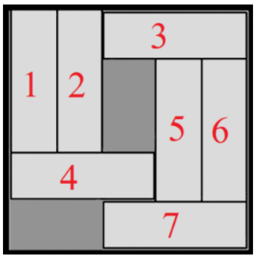
Решение. **B).** Ако ги земе два црни бисери од краевите на ѓерданот Катерина нема да земе ниту еден бел бисер. Сега, ако го земе белиот бисер на левата страна, ќе може да земе 1 црн бисер, па досега има земено $2+1=3$ црни бисери. Треба да земе уште 2 црни бисери, па затоа најмал број бели бисери ќе земе ако таа прво ги земе двата бели бисери на десната страна, а потоа двата црни бисери на истата страна. Така Катерина ќе земе $1+2=3$ бели и $3+2=5$ црни бисери.

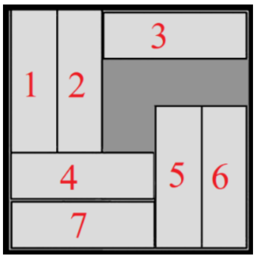
7. Квадратна рамка со димензии 5×5 е поставена на рамна површина. Во нејзината внатрешност се поставени седум плочки со димензии 1×3. Дозволено е правоаголните плочки да се по-местуваат со лизгање. Кој е најмалиот број дозволени поместувања за да се направи место уште за една плочка 1×3?



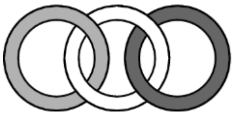
A) 2 B) 3 C) 4 D) 4 E) не е мо7но.

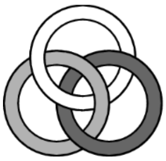
Решение. **B).** Да ги означиме правоаголните 1×3 како на долниот лев цртеж. Тогаш е јасно дека во првиот потез мораме да ја поместиме плочката 7 до левиот крај на квадратот. Сега доволно е уште плочките 5 и 6 да ги поместиме до долниот дел на квадратот. Значи, потребни се 3 потези.

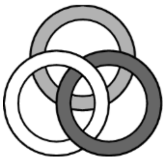


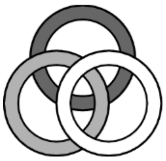


8. Три прстени се поврзани како на цртежот. На кој од цртежите подолу трите прстени се поврзани на ист начин како на почетниот цртеж?



A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Решение. **D).** На почетниот цртеж сивиот прстен е поврзан со белиот прстен, белиот со црниот прстен, но сивиот и црниот прстен не се поврзани.

На цртежот A) сите прстени се поврзани меѓусебно.

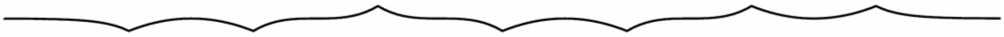
На цртежот B) само белиот и црниот прстен се поврзани.

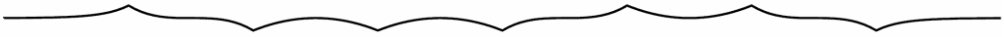
На цртежот C) никој од прстените не е поврзан со друг прстен.

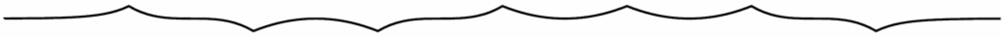
На цртежот E) се поврзани сивиот и црниот прстен кои не се поврзани на дадениот цртеж.

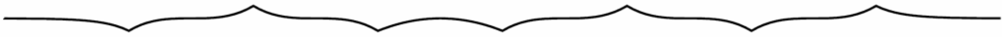
На цртежот D) сивиот прстен е поврзан со белиот прстен, белиот со црниот прстен, но сивиот и црниот прстен не се поврзани, што е исто како на дадениот цртеж.

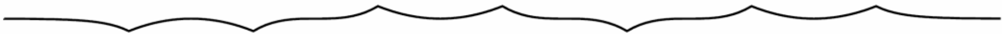
9. Лист хартија три пати го преклопуваме на половина и потоа го одвиткуваме, така што кога гледаме од страна гледаме 7 места на свиткувања.

A 

B 

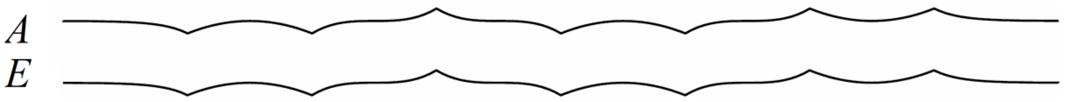
C 

D 

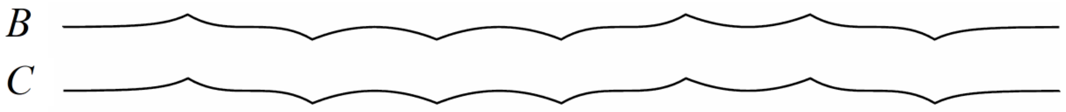
E 

Кој од прикажаните цртежи не може да се направи на тој начин?

Решение. D). Ако ликот *E* прво го пресликаме симетрично во однос на хоризонталната, а потоа во однос на вертикалната права го добиваме ликот *A* (види цртеж). Тоа значи дека двата лика се добиваат со ист начин на превиткување.

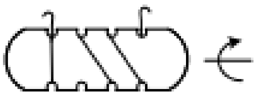


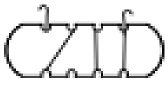
Ако ликот *C* прво го пресликаме симетрично во однос на хоризонталната, а потоа во однос на вертикалната права го добиваме ликот *B* (види цртеж). Тоа значи дека двата лика се добиваат со ист начин на превиткување.

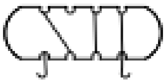


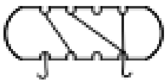
Едниот начин е три пати превиткуваме во лево, а другиот начин е два пати превиткуваме во лево и еднаш во десно. Притоа во однос на четвртото прекршување останатите шест прекршувања мора да се „централно симетреични“. Ова не е случај со линијата D, па затоа истата не може да се добие на опишаниот начин.

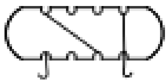
10. Андреа навиткала јаже околу дрвена плочка како на цртежот десно. Таа ја звртела дрвената плочка како што е покажано со стрелката на цртежот. Што видела Андреа по завртувањето?

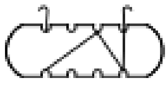



A)

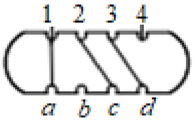

B)


C)


D)


E)

Решение. B). Нека длабнатините во плочата каде што поминува јажето ги означиме со $1,2,3,4$ и a,b,c,d,



цртеж десно. Тогаш од задната страна на плочата јажето се гледаат поврзувањата $(a,2),(c,3)$ и $(d,4)$. Бидејќи плочата се превртува преку горната страна длабнатините се во горниот ред и наведените поврзувања се прикажани на цртежот В.

11. Кутија со димензии $30\times30\times50$ сакаме да ја наполниме со коцки со еднаква големина. Кој е најмалиот можен број коцки со кои тоа можеме да го направиме?

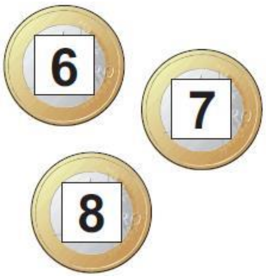
A) 15 B) 30 C) 45 D) 75 E) 150

Решение. **C).** Најмалиот можен број коцки се добива ако работ на коцката има најголема можна димензија. Јасно, должината на работ на коцката треба да е делител на должините на рабовите на кутијата, при што најмалиот број коцки се добива ако коцката има должина на раб $a=\text{NZD}(30,30,50)=10$. Притоа ни се потребни $3\cdot3\cdot5=45$ коцки.

12. Во една кутија има седум карти и на секоја од нив е запишан по еден од броевите од 1 до 7. Младен без да гледа извлекол три карти, а потоа Весна извлекла две карти, така што во кутијата останале две карти. Тогаш Младен и рекол на Весна: „Сигурен сум дека збирот на твоите карти е парен број.“ Колку е збирот на картите кои ги извлекол Младен?

A) 10 B) 12 C) 6 D) 9 E) 15

Решение. **B).** Во кутијата има три парни и четири непарни броеви. Збирот на два броја е парен ако и само ако двата собирци се со иста парност. Значи, Младен може да е сигурен дека збирот на картите на Весна е парен броја ако и само ако тој ги извлекол трите парни карти: 2, 4 и 6. Според тоа, збирот на неговите броеви е $2+4+6=12$.



13. На 6 ливчиња Матео напишал 6 последователни броја. Тој ги залепил ливчињата на двете страни на три монети и истовремено ги фрлил трите монети на масата. При првото фрлање на масата се гледале броевите 6, 7 и 8. Матео овие броеви ги обоил во црвено. При второто фрлање збирот на броевите кои се гледале бил 23, а при третото бил 17. Колку е збирот на броевите кои не биле обоени во црвено?

A) 18 B) 19 C) 23 D) 24 E) 30

Решение. **A).** Бидејќи при второто фрлање збирот на броевите кои се гледаат е 23, а $6+7+8=21$ мора да има број поголем од 8, т.е. меѓу запишаните броеви сигурно е бројот 9.

Сега, ако и бројот 10 е меѓу запишаните броеви, тогаш ги имаме броевите 6, 7, 8, 9, 10, па шестиот број може да е 5 или 11. Јасно, како меѓу броевите 5, 6, 7, 8, 9, 10, така и меѓу броевите 6, 7, 8, 9, 10,11 не постојат три броја чиј збир е 17. Значи, меѓу запишаните броеви не е бројот 10, па шесте последователни броеви се 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Притоа, имаме $6+8+9=23$ и $4+5+8=17$. Според тоа, не се обоени во црвено броевите 4, 5 и 9 и нивниот збир е $4+5+9=18$.

14. Девет карти се означени со броевите од 1 до 9 и се ставени на масата со броевите надолу. Марко, Вито, Коста и Зоран зеле секој по две карти. Збирот на броевите на картите на Марко е 6, разликата на броевите на картите на Вито е 5, производот на броевите на картите на Коста е 18 и еден од броевите на картите на Зоран е двапати поголем од другиот број. Кој број останал на масата?

A) 1 B) 3 C) 6 D) 8 E) 9

Решение. **E).** Картите на Марко може да бидат 1 и 5, или 2 и 4.

Ако картите на Марко се 2 и 4, тогаш бидејќи $18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$ картите на Коста мора да се 3 и 6. Но, тогаш Зоран не може да има карти кај кои едната е двапати поголема од другата, па затоа овој случај не е можен.

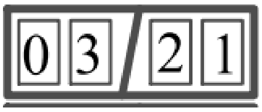
Значи, картите на Марко се 1 и 5. Картите на Коста може да се 2 и 9, односно 3 и 6. Ако картите на Коста се 2 и 9, тогаш картите на Вито мора да се 3 и 8. Но, тогаш Зоран не може да има карти кај кои едната е двапати поголема од другата, па затоа овој случај не е можен.

Значи, картите на Марко се 1 и 5, а картите на Коста се 3 и 6. Сега картите на Вито може да се 2 и 7, односно 4 и 9. Ако картите на Вито се 4 и 9, тогаш Зоран не може да има карти кај кои едната е двапати поголема од другата, па затоа овој случај не е можен.

Значи, картите на Марко се 1 и 5, картите на Коста се 3 и 6, картите на Вито се 2 и 7, па затоа картите на Зоран се 4 и 8.

Конечно, на масата останале картата со број 9.

15. Десно е прикажана датата 21 март, запишана во формат м.м./д.д., т.е. првите две цифри го означуваат месецот, а вторите две соодветнбиот ден во тој месец. Колку цифри најмалку ни се потребни, за да може секоја дата во годината да се запише на тој начин?



A) 31 B) 29 C) 23 D) 20 E) 19

Решение. C). Бидејќи месеците ги запишуваме како 01, 02, ...09, 10, 11 и 12, за запишување на истите ни се потребни сите 10 цифри и цифрата 1 двапати, што значи 11 цифри. Понатаму, бидејќи деновите ги запишуваме во видот 01, 02, ..., 10, 11, 12, ..., 20, 21, 22, 23, ..., 30, 31 за запишување на истите ни се потребни сите 10 цифри и цифрите 1 и 2 по двапати, што значи 12 цифри. Јасно, цифрата 1 мора да е четири пати, бидејќи треба да се запише датата 11/11, а цифрата 2 мора да е три пати бидејќи треба да се запише датата 02/22. Сите други цифри мора да се по два пати заради запишување на датите 03/03, 04/04, 05/05, 06/06, 07/07, 08/08, 09/09. Конечно, најмалиот број потребни цифри е $11+12=23$.

16. Цифрите од 0 до 9 може да се запишат со помош на хоризонтални и вертикални линии како што е прикажано на долниот цртеж.

Филип избрал три различни цифри. Неговите цифри вкупно имаат 5 хоризонтални и 10 вертикални линии. Колку е збирот на неговите цифри?

А) 9 В) 10 С) 14 D) 18 Е) 19

Решение. **А).** Секоја цифра има 0, 1, 2 или 3 хоризонтални линии. Значи 5 хоризонтални линии во три цифри можеме да добиеме на еден од следниве три начина:

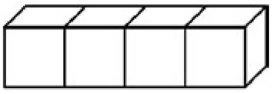
$$5=2+2+1,\quad 5=3+1+1,\quad 5=3+2+0.$$

Првиот случај не е можен, бидејќи само цифрата 0 има две хоризонтални линии, а избрани се три различни цифри.

Вториот случај не е можен бидејќи само цифрите 4 и 7 имаат по една хоризонтална линија, па како заедно имаат 5 вертикални линии третата цифра треба да има 5 вертикални линии, а најголемиот број вертикални линии е 4.

Останува третиот случај. Единствена цифра без хоризонтални линии е 1 и таа има 2 вертикални линии. Значи, другите две цифри треба да имаат по 4 вертикални линии. Единствени такви цифри се 0 и 8 и тие имаат 2 и 3 хоризонтални линии, соодветно. Збирот на трите броја е $0+1+8=9$.

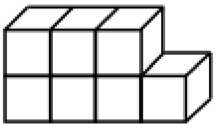
17. На стандардна коцка за играње збирот на точките на спротивните ѕидови е еднаков на 7. Четири стандардни коцки се залепени на начин како што е прикажан на цртежот десно. Кој е најмалиот можен збир на бројот на точките кои се наоѓаат на сите страни на добиениот квадар?



A) 52 B) 54 C) 56 D) 58 E) 60

Решение. D). На секоја коцка збирот на точките на горниот и долниот ѕуд е 7, а исто важи и за предниот и задниот ѕид. Најмалиот можен број точки се добива ако на левиот и десниот ѕид на квадарот има по 1 точка. Според тоа, најмалиот можен збир на бројот на точките е $8\cdot 7+2=58$.

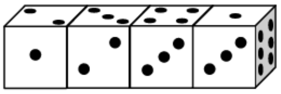
18. Збирот на броевите на точките на секои два спротивни ѕида на стандардна коцка за играње е еднаков на 7. На цртежот десно е прикажано тело составено од седум залепени коцки. Кој е најмалиот можен збир на броевите на точките на видливите ѕидови на добиеното тело?



A) 56 B) 59 C) 62 D) 66 E) 69

Решение. E). Во првиот горниот ред на трите коцки имаме 3 пара спротивни ѕидови, а на долниот ред на четирите коцки имаме 5 пара спротивни ѕидови. Најмалиот можен збир на точките на ѕидовите се добива ако на горните три ѕида има по 1 точка, да долните ѕидови на коцките под нив има по 1 точка, на левите ѕидови има по 2 точки на горниот десен ѕид има 2 точки и на долниот десен ѕид има 1 точка. Ваков распоред е можен бидејќи ѕидовите со 1 и 2 точки се соседни. Значи, најмалиот можен збир е еднаков на $8\cdot 7+7\cdot 1+3\cdot 2=69$.

19. Четири идентични коцки за играње се наредени како на цртежот десно. Коцките не се стандард-



ни, т.е. збирот на бројот точките на спротивните ѕидови не е еднаков на 7. Колку е збирот на точките кои се наоѓаат на шесте страни кои се допираат?

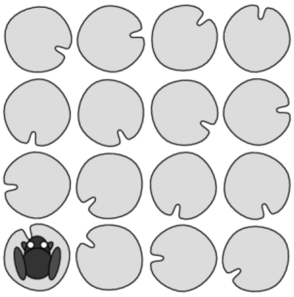
A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

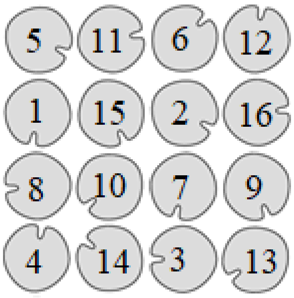
Решение. **B).** Коцките ќе ги броиме од лево кон десно. Според втората, третата и четвртата коцка на соседните ѕидови на ѕидот со 3 точки има 2, 4, 1 и 6 точки. Значи, наспроти ѕидот со 3 точки е ѕидот со 5 точки. Сега, на ѕидот со 1 точка соседни се ѕидовите со 2, 3, 5 и 6 точки, па затоа на спротивниот ѕид има 4 точки. Значи, наспроти ѕидот со 6 точки спротивен е ѕидот до 2 точки.

Според тоа, спротивни се 1 и 4, 2 и 6, 3 и 5.

Ѕидовите кои не се гледаат содржат на првата коцка 3 и 5, на втората 1 и 4, на третата 2 и 6 и на четвртата коцка 2 точки. Понатаму, ако првата коцка ја превртиме кон напред, а потоа кон десно ѕидот на кој има 2 точки ќе биде како на втората коцка, т.е. на горниот ѕид ќе има 3 точки. Тоа значи дека во почетната положба на левиот ѕид ќе има 3 точки. Значи, оваа коцка ја допира втората коцка со ѕид кој има 5 точки. Конечно, бараниот збир е: $5+1+4+6+2+2=20$.

20. Во едно езеро имало 16 листови на локвен, поставени во облик на квадратна 4×4 шема, како што е прикажано на цртежот. Жаба седи на лист што се наоѓа во еден од аглите на квадратот. Таа може да скока од лист на лист хоризонтално и вертикално, така што секогаш прескокнува барем еден лист, но на ист лист не се враќа двапати. Кој е најголемиот број на листови кои жабата може да ги посети, при што може да се врати и на листот на кој се наоѓа на почетокот?



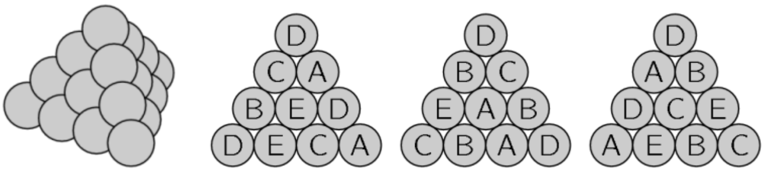


A) 16 B) 15 C) 14

D) 13 E) 12

Решение. **А).** Сите шеснаесет листови жабата може да ги посети ако оди по патеката прикажана на цртежот десно.

21. Триаголна пирамида е направена со 20 топчиња, како што е прикажано на долниот лев цртеж. Секое топче е означена со една од буквите A, B, C, D или E. При правењето на пирамидата се искористени по четири топчиња означени со секоја од дадените букви. На долните цртежи се прикажани три од четирите ѕида на пирамидата. Со која буква е означено средното топче на четвртиот ѕид?



A) A B) B C) C D) D E) E

Решение. **D).** На долните цртежи со иста боја се означени топчињата кои припаѓаат на ист раб на пирамидата. Водејќи сметка дека топчињата кои се на заедничките рабови на пирамидата не треба да ги броиме повеќекратно, можеме да забележиме дека секое од топчињата A, B, C и E се појавува по четири пати, а топчето D се појавува три пати. Значи, топчето кое не се гледа е означено со D.

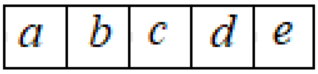
22. Еден воз има пет вагони, и притоа во секој вагон има барем по еден патник. За два патника ќе велиме дека се „соседи“ ако тие или се наоѓаат во ист вагон или се наоѓаат во два соседни вагона. Секој

патник има или точно пет или точно десет „соседи“. Колку патници има во возот?

A) 13 B) 15 C) 17 D) 20

E) има повеќе од една можност

Решение. C). Нека гледајќи од лево кон десно во вагоните има a,b,c,d,e патници (цртеж десно). Тогаш бидејќи секој патник има 5 или 10 соседи, т.е. бројот на соседите на секој патник е делив со 5, добиваме:



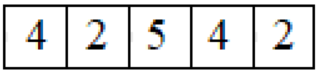
a	b	c	d	e

$$
\begin{aligned}
&a-1+b=5k\\
&a+b-1+c=5m,\\
&b+c-1+d=5n,\\
&c+d-1+e=5u,\\
&d+e-1=5v.
\end{aligned}
$$

Ако од втората ја одземеме првата равенка добиваме $c=5(m-k)$. Но, бројот на патниците во било кој среден вагон не може да е поголем или еднаков на 10, бидејќи тогаш патник од овој вагон ќе има најмалку $9+1+1=11$ соседи, што противречи на условот на задачата. Значи $c=5$. Сега, патник од вториот вагон може да има најмногу 10 соседи, па затоа $a+b-1+c\leq 10$, односно $a+b\leq 6$. Од друга страна $2\leq a+b=5k+1$, па затоа $a+b=6$. На потполно ист начин се добива дека $d+e=6$.

Конечно, $a+b+c+d+e=6+5+6=17$.

На цртежот десно е даден распоред на 17 патници кој ги задоволува условите на задачата. Обиди се да најдеш распоред различен од дадениот.



4	2	5	4	2