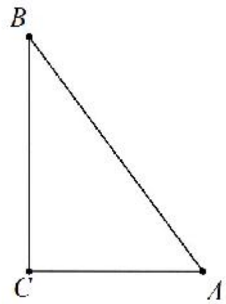
XLIX РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI одделение

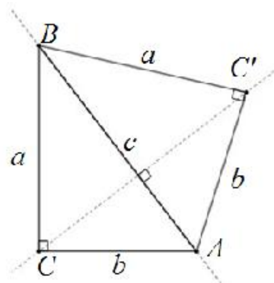
1. Определи ги сите прости броеви p за кои важи $2<\frac{p}{16}<3$.

Решение. Ако искористиме дека $\frac{2}{1}=\frac{32}{16}$ и $\frac{3}{1}=\frac{48}{16}$, даденото неравенсрво се трансформира во еквивалентното неравенство $\frac{32}{16}<\frac{p}{16}<\frac{48}{16}$. Значи, треба да ги определиме простите броеви p за кои важи $32<p<48$. Конечно, бараните прости броеви се: 37, 41, 43 и 47.

2. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C (цртеж десно). Должината на страната AC е $\frac{3}{4}$ од должината на страната BC, а должината на страната AB е за 25% поголема од дожината на страната BC. Нека C' е точката добиена при осна симетрија на точката C во однос на страната AB. Пресметај го периметарот на триаголникот ABC ако периметарот на четириаголникот $CAC'B$ е еднаков на $16{,}8\,cm$.



Решение. Нека $\overline{BC}=a,\ \overline{AC}=b,\ \overline{AB}=c$ се должините на страните на триаголникот ABC. Од условот на заадачата следува $b=\frac{3}{4}a=0{,}75a$ и $c=a+\frac{25}{100}a=1{,}25a$. Понатаму, ако точката C' е симетрична на точката C во однос на правата AB, тогаш од својствата на осната симетрија следува $\overline{BC'}=\overline{BC}=a$ и $\overline{AC'}=\overline{AC}=b$ (цртеж десно). Периметарот на четириаголникот $CAC'B$ е еднаков на $16{,}8\,cm$,па затоа $2a+2b=16{,}8$. Со замена за $b=0{,}75a$ добиваме $2a+2\cdot 0{,}75a=16{,}8$, односно $3{,}5a=16{,}8$, па затоа $a=4{,}8\,cm$. Според тоа, $b=0{,}75a=0{,}75\cdot 4{,}8=3{,}6\,cm$ и $c=1{,}25a=1{,}25\cdot 4{,}8=6\,cm$. Значи, периметарот на триаголникот ABC е $L=a+b+c=14{,}4\,cm$.



Забелешка. Триаголникот ABC навистина е правоаголен, но при решавањето на задачата овој услов никаде не го искористивме, што значи дека истиот е непотребен.

3. Марко запишал на лист еден трицифрен број.,Ако пред цифрата на стотките се допише цифрата 9 се добива четирицифрен број кој што е 21 пат поголем од бројот кој го запишак Марко. Кој број го запишал Марко.

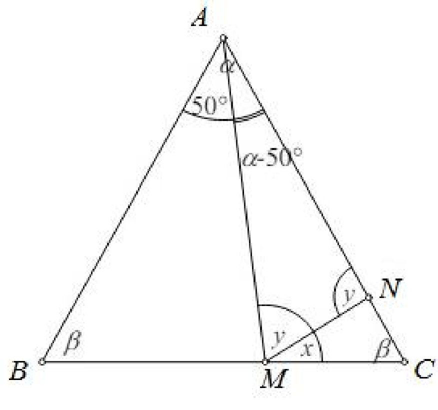
Решение. Нека бараниот број е $\overline{abc}$. Ако пред цифрата на стотките се допише цифрата 9 се добива бројот $\overline{9abc}$. Од услвоот на задачата имаме $\overline{9abc} = 21 \cdot \overline{abc}$, од каде добиваме $9000 + \overline{abc} = 21 \cdot \overline{abc}$. Значи, $20 \cdot \overline{abc} = 9000$, односно $\overline{abc} = 450$. СПоред тоа, МАрко го запишал бројот 450.

4. Даден е рамнокрак $\triangle ABC\ (\overline{AB} = \overline{AC})$ таков што $\measuredangle BAC > 50^\circ$. На страната BC е избрана точка M, таква што $\measuredangle BAM = 50^\circ$ и на страната AC е избрана точка N таква што $\overline{AM} = \overline{AN}$. Определи ја мерката на $\measuredangle CMN$.

Решение. Во $\triangle AMB$ имаме да е $\measuredangle CMA$ надворешен агол, па затоа важи $x + y = \quad + 50^\circ$. Понатаму, $\measuredangle ANM$ е надворешен за $\triangle MCN$, па затоа $y = \quad + x$. Ако од второто равенство замениме во првото добиваме

$x + x + \quad = \quad + 50^\circ$, т.е. $2x = 50^\circ$.

Значи, $\measuredangle CMN = x = 25^\circ$.



VII одделение

1. На еден тест биле зададени 20 прашања. За точно одговорено прашање се добиваат 8 поени, за неточно одговорено прашање се одземаат 5 поени, а неодговорено прашање се бодува 0 поени. Кирил на тестот освоил 120 поени. На колку прашање Кирил не одгоорил?

Решение. Ако со x го означиме бројот на прашањата кои Кирил ги одговорил, а со y бројот на неодговорените прашања, тогаш $20-x-y$ е бројот на прашањата на кои Кирил погрешно одговорил. Значи, важи $8x-5(20-x-y)=120$, односно $13x+5y=220$, при што $x>0, y\geq 0$ и $x+y\leq 20$. Од добиената равенка следува дека 5 треба да е делител на x. Бидејќи $13\cdot 20=260>220$ заклучуваме дека $x\in\{5,10,15\}$.

Ако $x=5$, тогаш $y=31$, па како $x+y=36>20$, ова не е решение.

Ако $x=10$, тогаш $y=18$, па како $x+y=28>20$, ова не е решение.

Ако $x=15$, тогаш $y=5$, па како $x+y=20$, добиваме дека Кирил точно одговорил на 15 прашања и не дал одговор на 5 прашања.

2. Определи ги подредените парови (x,y), каде што x и y се природни броеви, такви што $x+y=100$ и $\frac{\frac{1}{x}+y}{x+\frac{1}{y}}=19$.

Решение. Имаме:

$$\frac{\frac{1}{x}+y}{x+\frac{1}{y}}=19 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\frac{1+xy}{x}}{\frac{xy+1}{y}}=19 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(1+xy)y}{(1+xy)x}=19.$$

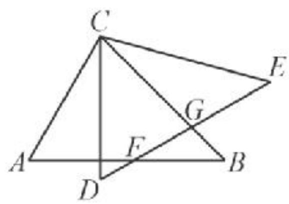
Задачата има решение ако $x,y,1+xy\neq 0$, па од последната равенка добиваме $\frac{y}{x}=19$, односно $y=19x$. Со замена во $x+y=100$ наоѓаме $x+19x=100$, т.е. $x=5$. Конечно, $y=19\cdot 5=95$, што значи дека единствен подреден пар кој ги задоволува условите на задачата е парот $(x,y)=(5,95)$.

Забелешка. Решението на задчата навистина е подреден пар природни броеви, но во решавањето на истата овој услов никаде не го искористивме, што значи дека истиот е непотребен.

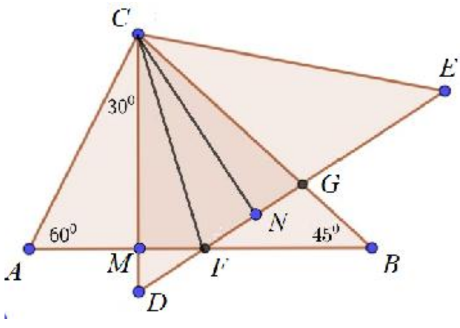
3. Една работилница требало да произведе определено количество од еден ист производ за неколку дена. Според планот за производство требало да се произведуваат по 10 производи не ден. Но, секој ден се произведувало 20% повече од предвиденото дневно производство. Осум дена пред крајниот рок биле произведени 72 производи повеќе од вкупно предвиденото количество според планот. Колку вкупно производи се произведени до крајниот рок?

Решение. Нека x е бројот на произведените производи 8 дена пред крајниот рок. Бидејќи секој ден се произведувале 20% по веќе од планираните 10 производи, т.е. по 12 производи, планираното производство требало да заврши за $\frac{x}{12}+8$ денови. Од друга страна, планираното производство било $x-72$ производи, па како било планирано да се произведуваат 10 производи на ден, тоа требало да заврши за $\frac{x-72}{10}$ денови. Оттука следува $\frac{x}{12}+8=\frac{x-72}{10}$, т.е. $10(x+96)=12(x-72)$. Решението на последната равенка е $x=912$. Според тоа, 8 дена пред крајниот рок се произведени 912 производи. Бидејќи се произведувале по 12 производи дневно до крајниот рок се произвеле $912+8\cdot 12=1008$ производи.

4. Даден е триаголник ABC со агли $\measuredangle BAC=60^\circ$ и $\measuredangle ABC=45^\circ$. Триаголниците ABC и DEC се складни и се поставени како на цртежот десно, при што $\measuredangle ACD=30^\circ$. Докажи дека три-аголникот CFG е рамнокрак.



Решение. *Прв начин*. Да означиме како на цртежот десно. Имаме $\measuredangle BAC=60^\circ$ и $\measuredangle ACM=30^\circ$, па затоа $\measuredangle AMC=90^\circ$, т.е. CM е висина во триаголникот ABC. Нека CN е висината на триаголникот DEC. Тогаш од складноста на триаголниците ABC и DEC следува складноста на триаголниците AMC и DNC. Сега, триаголникот BCM е правоаголен и како $\measuredangle MBC=45^\circ$, добиваме $\measuredangle BCM=45^\circ$. Според тоа, $\measuredangle BCN=\measuredangle BCM-\measuredangle NCM=45^\circ-30^\circ=15^\circ$, па како триаголникот NGC е правоаголен добиваме $\measuredangle NGC=75^\circ$.



Значи, $\measuredangle NGB = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$, па затоа $\measuredangle BFG = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$, односно $\measuredangle GFM = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. Понатаму, триаголниците FMC и FNC се правоаголни, имаат заедничка хипотенуза CF и еднаква катета $\overline{CM} = \overline{CN}$, што значи дека тие се складни. Затоа важи $\measuredangle MFC = \measuredangle NFC$, па затоа $2\measuredangle GFC = \measuredangle MFC + \measuredangle NFC = \measuredangle GFM = 150^\circ$, т.е. $\measuredangle GFC = 75^\circ$. Според тоа, $\measuredangle GFC = 75^\circ = \measuredangle FGC$, т.е. триаголникот CFG е рамнокрак.

Втор начин. Имаме $\measuredangle BAC = 60^\circ$ и $\measuredangle ACM = 30^\circ$, па затоа $\measuredangle AMC = 90^\circ$, т.е. CM е висина во триаголникот ABC. Нека CN е висината на триаголникот DEC. Тогаш од складноста на триаголниците ABC и DEC следува складноста на триаголниците AMC и DNC. Сега, триаголникот BCM е правоаголен и како $\measuredangle MBC = 45^\circ$, добиваме $\measuredangle BCM = 45^\circ$. Според тоа, $\measuredangle BCN = \measuredangle BCM - \measuredangle NCM = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$. Понатаму, триаголниците FMC и FNC се правоаголни, имаат заед-ничка хипотенуза CF и еднаква катета $\overline{CM} = \overline{CN}$, што значи дека тие се складни. Затоа важи $\measuredangle MCF = \measuredangle NCF$. Но, $\measuredangle MCN = 30^\circ$, па затоа

$$2\measuredangle FCN = \measuredangle MCF + \measuredangle FCN = \measuredangle MCN = 30^\circ,$$

т.е. $\measuredangle FCN = 15^\circ$. Според тоа, $\measuredangle FCN = 15^\circ = \measuredangle GCN$, што значи дека во триаголникот CFG висината CN е и симетрала на аголот при темето C, па затоа тој е рамнокрак.

VIII одделение

1. Ако $a+b+c=2024$ и $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=1$, пресметај ја вредноста на изразот $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$.

Решение. *Прв начин*. Од $a+b+c=2024$ следува $a=2004-(b+c)$, $b=2004-(c+a)$ и $c=2004-(a+b)$. Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}&=\frac{2024-(b+c)}{b+c}+\frac{2024-(c+a)}{c+a}+\frac{2024-(a+b)}{a+b}\\&=\frac{2024}{b+c}-\frac{b+c}{b+c}+\frac{2024}{c+a}-\frac{c+a}{c+a}+\frac{2024}{a+b}-\frac{a+b}{a+b}\\&=\frac{2024}{b+c}-1+\frac{2024}{c+a}-1+\frac{2024}{a+b}-1\\&=\frac{2024}{b+c}+\frac{2024}{c+a}+\frac{2024}{a+b}-3\\&=2024\cdot(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b})-3\\&=2024-3=2021.\end{aligned}$$

Втор начин. Имаме

$$\begin{aligned}2004&=(a+b+c)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})\\&=\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}\\&=\frac{a+b}{a+b}+\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{a}{b+c}+\frac{a+c}{c+a}+\frac{b}{c+a}\\&=1+\frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}\\&=3+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.\end{aligned}$$

Значи, $2004=3+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$, од каде следува $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=2021$
.

2. Кате, Нена и Ана саделе цвеќиња. Ако Кате засади 16 цвеќиња повеќе отколку што засадила, тогаш би имала засадено толку цвеќиња колку што засадиле Нена и Ана заедно. Ако Нена засади 39 цвеќиња повеќе отколку што засадила, то-гаш би имала засадено двојно повеќе отколку што засадиле Кате и Ана заедно. Нивните презимиња се Крстеска, Петрова и Милевска. Колку цвеќиња засадила секоја од нив и кое ѝ е презимето, ако бројот на цвеќиња што ги засадила Крстеска е делив со 5, бројот на цвеќиња што ги засадила Петрова е делив со 7, а бројот на цвеќиња што ги засадила Милевска е прост број и никоја не засадила повеќе од 15 цвеќиња.

Решение. Нека Кате, Нена и Ана засадиле x, y и z цвеќиња, соодветно. Од условот на задачата следува $x+16=y+z$ и $y+39=2(x+z)$. Од првата равенка следува $y=x-z+16$, па ако замениме во втората добиваме $x-z+16+39=2x+2z$, од каде следува $x=55-3z$. Бидејќи $x\le 15$, од последната равенка добиваме $55-3z\le 15$, од каде добиваме $z\ge 13\frac{1}{3}$. Но, z е природен број и не е поголем од 15, па затоа $z=14$ или $z=15$.

Ако $z=14$, добваме $x=13$ и $y=15$. Притоа, $x=13$ е прост број (Милевска), $y=15$ е делив со 5 (Крстеска) и $z=14$ е делив со 7 (Петрова).

Ако $z=15$, добиваме $x=10$ и $y=11$. Но, ниту еден од броевите 10, 11 и 15 не е делив со 7, па затоа во случајов немаме решение на задачата.

Значи, единствено решение е $x=13$, $y=15$ и $z=14$, односно Кате Милевска засадила 13 цвеќиња, Нена Крстеска засадила 15 цвеќиња и Ана Петрова засадила 14 цвеќиња.

3. Нека природните броеви a,b,c се должини на страните на еден триаголник. Ако висината повлечена кон страната a е еднаква збирот на останатите две висини, тогаш $a^2+b^2+c^2$ е квадрат на природен број. Докажи!

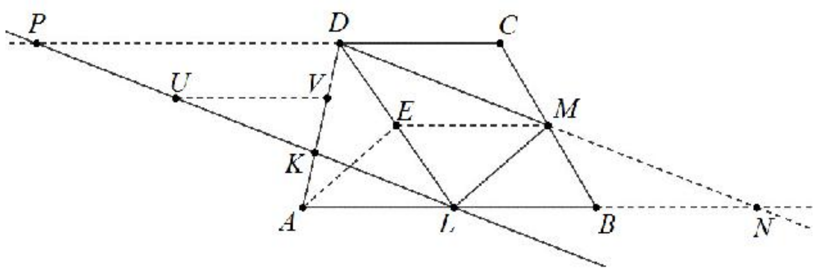
Решение. Нека h_a, h_b, h_c се должините на висините повлечени кон страните a,b,c, соодветно. Од условот на здачата имаме $h_a=h_b+h_c$. Но, $ah_a=bh_b=ch_c$, па затоа $\frac{h_c}{a}=\frac{h_a}{c}$ и $\frac{h_b}{a}=\frac{h_a}{b}$. Сега, со замена во $h_a=h_b+h_c$ добиваме $\frac{h_a}{a}=\frac{h_b+h_c}{a}=h_a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$, односно $\frac{1}{a}=\frac{b+c}{bc}$. Последното равенство го квадрираме и добиваме $\frac{1}{a^2}=\frac{b^2+2bc+c^2}{b^2c^2}$, од каде последователно следува:

$$\begin{aligned}
&b^2c^2=a^2(b^2+2bc+c^2),\\
&b^2c^2=a^2(a^2+b^2+c^2+2bc-a^2),\\
&b^2c^2=a^2(a^2+b^2+c^2)+2a^2bc-a^4,\\
&a^2(a^2+b^2+c^2)=b^2c^2-2a^2bc+a^4,\\
&a^2(a^2+b^2+c^2)=(a^2-bc)^2,\\
&a^2+b^2+c^2=(a-\tfrac{bc}{a})^2.
\end{aligned}$$

Од $\frac{1}{a}=\frac{b+c}{bc}$ следува $\frac{bc}{a}=b+c$, па како b и c се природни броеви следува дека $\frac{bc}{a}$ е природен број, што значи дека $a-\frac{bc}{a}$ е цел број. Конечно, $(a-\frac{bc}{a})^2$ е квадрат на цел број, што значид ека е квадрат на природен број, па од $a^2+b^2+c^2=(a-\frac{bc}{a})^2$ следува дека $a^2+b^2+c^2$ е квадрат на природен број, што и требаше да се докаже.

4. Во трапезот $ABCD$ симетралата на аголот во темето D ја сече основата AB во точката L и точката M е средина на страната BC, Правата паралелна на DM, којаминува низ точката L, ја сече AD во точката K. Ако $\measuredangle DLM$ е прав агол, определи го односот $\overline{DK}:\overline{KA}$.

Решение. Нека продолжението на DM ја сече AB во точката N, а продолжението на LK ја сече CD во точката P. Нека $\overline{LB}=x$ и $\overline{CD}=y$. Од $\overline{MC}=\overline{MB}$, $\measuredangle CMD=\measuredangle BMN$ и $\measuredangle DCM=\measuredangle NMB$ следува дека триаголниците DCM и NBM се скалдни, па затоа $\overline{BN}=\overline{CD}=y$.



Од $LN \parallel DP$ и $PL \parallel DN$ следува дека четириаголникот $PLND$ е паралелограм, па затоа $\overline{PD}=\overline{LN}=\overline{LB}+\overline{BN}=x+y$. Понатаму, DL е симетрала на аголот во темето D, па затоа $\measuredangle LDC=\measuredangle ADL$. Од друга страна $AB \parallel CD$, па $\measuredangle ALD=\measuredangle LDC$, како наизменични агли. Според тоа, $\measuredangle ALD=\measuredangle LDC=\measuredangle ADL$, што значи дека триаголникот LDA е рамнокрак, со основа DL. Тоа значи дека висината AE повлечена кон основата DL е и тежишна линија. Но, тоа значи дека EM е средна линија во триаголникот LND, па затоа $\overline{EM}=\frac{\overline{LN}}{2}=\frac{x+y}{2}$. Понатаму, според условот $\measuredangle DLM$ е прав агол, па како $AE \perp DL$, добиваме дека $AE \parallel LM$, што значи дека четириаголникот $ALME$ е паралелограм. Според тоа, $\overline{AL}=\overline{EM}=\frac{x+y}{2}=\frac{\overline{PD}}{2}$. Нека U и V се средните на отсечките PK и DK.

Тоа значи дека UV е средна линија на триаголникот PDK, па затоа $\overline{UV}=\frac{\overline{PD}}{2}=\overline{AL}$. Сега, од $\overline{UV}=\overline{AL}$, $\measuredangle LAK=\measuredangle UVK$ и $\measuredangle AKL=\measuredangle VKU$ следува дека триаголниците UVK и LAK се складни. Затоа важи $\overline{DK}=2\overline{KV}=2\overline{KA}$, односно $\overline{DK}:\overline{KA}=2:1$.

IX одделение

Решение.

1. Определи го природниот број $\overline{abcdef}$ кој е запишан со различни цифри и за за кој се исполнети условите $a \cdot d \neq 0$, $a+d=b+e=c+f=9$ и количникот $\frac{\overline{abcdef}}{\overline{defabc}}$ е природен број.

Решение. Нека $A=\overline{abcdef}$ и $B=\overline{defabc}$. Бидејќи количникот е природен број важи $a \geq d$. Понатаму, од равенствата $a+d=b+e=c+f=9$ следува $\overline{abcdef}+\overline{defabc}=999999$, т.е. $A+B=999999$. Но, $\frac{\overline{abcdef}}{\overline{defabc}} \in \mathbb{N}$ па затоа постои $k \in \mathbb{N}$ таков што $A=kB$. Според тоа, $kB+B=999999$, односно $(k+1)B=999999$ и како $B=\overline{defabc} \geq 100000$, добиваме дека $k+1 \in \{1,3,7,9\}$. За $k+1=1, k+1=3$ и $k+1=9$, соодветно добиваме $B=999999$, $B=333333$ и $B=111111$, што противречи на тоа дека цифрите се различни. За $k+1=7$, добиваме $B=999999:7=142857$ $A=6 \cdot 142857=857142$

Забелешка. Во оригиналната формулација на задачата недостига дека цифрите на бараниот број се различни, услов кој е искористен во официјалното решение на задачата.

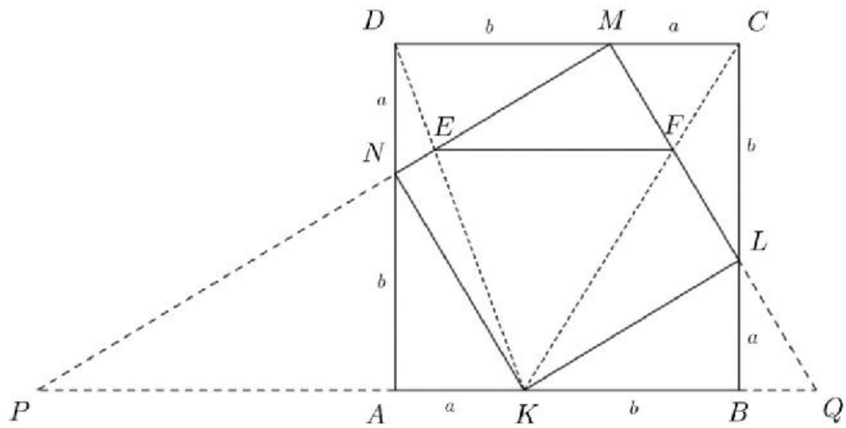
2. Нека $BACD$ е квадрат. Точките K, L, M и N лежат на страните AB, BC, CD и DA, соодветно и тие се темиња на квадрат. Правите DK и NM се сечат во точката E, а правите CK и LM се сечат во точката F. Докажи дека правите EF и AB се паралелни.

Решение. Нека P и Q се точките во кои правите NM и LM ја сечат правата AB. Триаголниците NAK, KLB, LCM и MDN се складни (правоаголни со еднакви хипотенузи и по еден остар агол со заемно нормални краци). Нека $\overline{AK}=\overline{BL}=\overline{CM}=\overline{DN}=a$ и $\overline{BK}=\overline{LC}=\overline{MD}=\overline{NA}=b$. Триаголниците PNK и QLK се правоаголни, па од Евклидовата теорема следува $\overline{PA} \cdot a=b^2$ и $\overline{QB} \cdot b=a^2$. Од сличноста на триаголниците PEK и MED следува

$$\frac{\overline{KE}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{PR}}{\overline{MD}}=\frac{\overline{PA}+\overline{AK}}{\overline{MD}}=\frac{\frac{b^2}{a}+a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}.$$

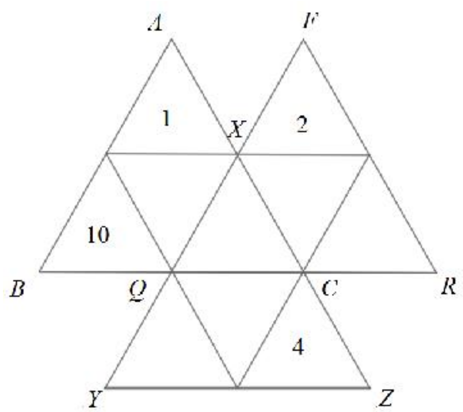
Од сличноста на триаголниците QFK и MFC следува

$$\frac{\overline{FK}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{QK}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{QB}+\overline{BK}}{\overline{MC}}=\frac{\frac{a^2}{b}+b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}.$$



Според тоа, $\frac{\overline{KE}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{FK}}{\overline{CF}}$. Според Талесовата теорема важи $EF \parallel DC$,т.е. $EF \parallel AB$,што и требаше да се докаже.

3. На дијаграмот се прикажани три триаголници ABC, PQR и XYZ, така што секој од нив е разделен на четири помали триаголници. Во помалите триаголници запиши ги броевите од 1 до 10, така што збирот на броевите запишани во секој од триаголниците ABC, PQR и XYZ ќе биде еднаков. Броевите 1, 2, 4 и 10 се веќе запишани. На колку начини може да се пополни дијаграмот?



Решение. Броевите кои недостасуваат во шесте мали триаголници да ги означиме со a,b,c,d,e и f (види цртеж) и тие се броевите 3, 5, 6, 7, 8 и 9. Според тоа,

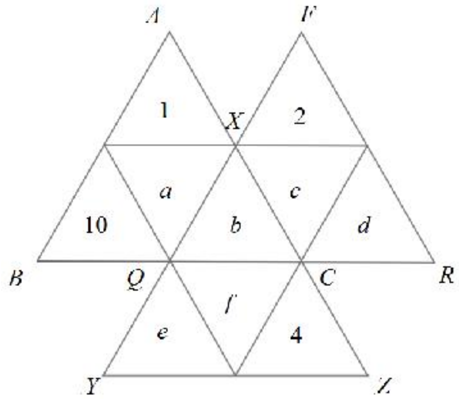
$$a+b+c+d+e+f=3+5+6+7+8+9,$$

т.е.

$$a+b+c+d+e+f=38\,. \qquad (1)$$

Нека збирот на броевите запишани во секој од триаголниците ABC, PQR и XYZ го означиме со x. При ознаки како на цртежот десно добиваме

$$x=11+a+b,$$
$$x=2+b+c+d, \qquad (2)$$
$$x=4+b+e+f.$$



Ако ги собереме горните равенства и го искористиме (1), добиваме

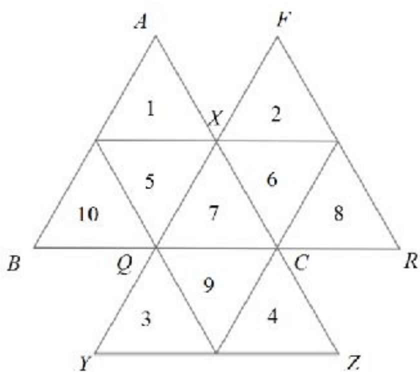
$$3x=17+2b+(a+b+c+d+e+f),$$
$$3x=17+2b+38,$$
$$3x=55+2b, \qquad (3)$$

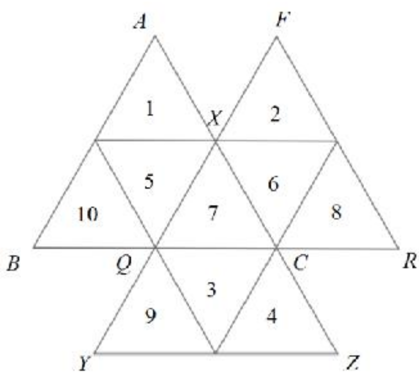
каде $b\in\{3,5,6,7,8,9\}$. Од последното равенство следува $3\,|\,55+2b$ и како $b\in\{3,5,6,7,8,9\}$, со непосредна проверка се добива дека тоа е можно само за $b=7$. Тогаш од (3) добиваме дека $x=23$. Со замена во (2) добиваме

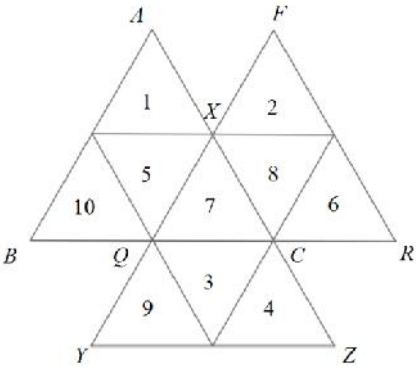
$$a=5,$$
$$c+d=14,\ ,$$
$$e+f=12,$$

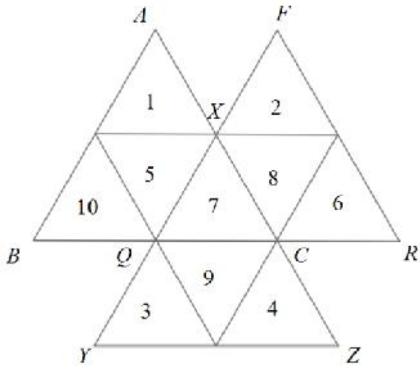
при што $\{c,d,e,f\}=\{3,6,8,9\}$. Оттука е јасно дека $\{c,d\}=\{6,8\}$ и $\{e,f\}=\{3,9\}$.

Според тоа, постојат четири различни начини на кои може да се пополни дадениот дијаграм.

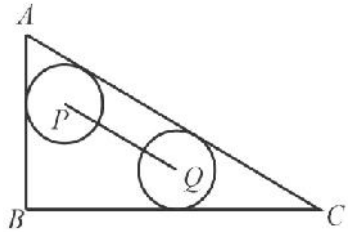




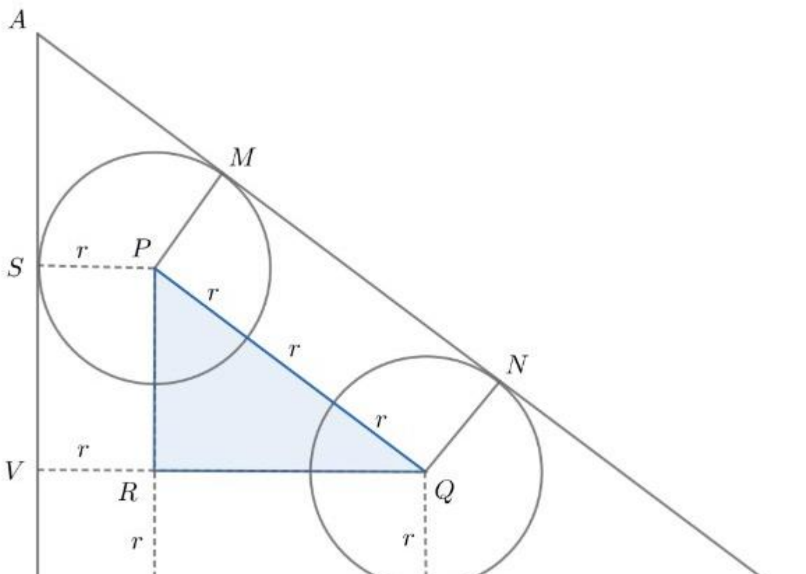




4. Две кружници со радиус r и центри P и Q се впишани во правоаголен триаголник ABC како на цртежот десно, при што $\overline{AB}=6\,cm$ и $\overline{BC}=8\,cm$. Отсечката PQ со пресечните точки со кружниците е поделена на три еднакви делови. Определи го радисуот r.



Решение. Нека S, M, N и U се допирните точки на кружниците со триаголникот ABC, види цртеж. Имаме $\overline{PQ}=3r$. Од Питагоровата теорема следува:



$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\,cm,$$

па затоа $\overline{AM} + 3r + \overline{NC} = 10$. Нека T е подножјето на нормалата повлечена од P на BC, а V е подножјето на нормалата повлечена од Q на AB и нека R е пресечната точка на PT и QV. Од сличноста на триаголниците ABC и PRQ следува $\overline{AB} : \overline{PR} = \overline{AC} : \overline{PQ}$, од каде добиваме $\overline{PR} = \frac{9r}{5}$ и $\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{RQ} : \overline{PQ}$, од каде добиваме $\overline{RQ} = \frac{12r}{5}$. Понатаму, бидејќи $\overline{SV} = \overline{PR}$, добиваме

$$\overline{AS} = 6 - (r + \overline{SV}) = 6 - (r + \tfrac{9r}{5}) = 6 - \tfrac{14r}{5}.$$

Слично, од $\overline{TU} = \overline{RQ}$ имаме

$$\overline{CU} = 8 - (r + \overline{TU}) = 8 - (r + \tfrac{12r}{5}) = 8 - \tfrac{17r}{5}.$$

Сега, ако се земе предвид дека $\overline{AM} = \overline{AS}$ и $\overline{NC} = \overline{CU}$, со замена во $\overline{AM} + 3r + \overline{NC} = 10$, добиваме $6 - \frac{14r}{5} + 3r + 8 - \frac{17r}{5} = 10$, т.е. $r = \frac{5}{4}\,cm$.