Општински натпревар 2022

I година

Следните три задачи се бодуваат со 3 поени.

1АБ. Вредноста на алгебарскиот израз $\frac{a^3-b^3}{a+b-\frac{ab}{a+b}}-\frac{a^3+b^3}{a-b+\frac{ab}{a-b}}$ за $a=-3$ и $b=2$ е:

А) -5 Б) 0 В) 5 Г) 10 Д) $\frac{1}{4}$

Одговор. Б)

Решение. Ако го средиме дадениот алгебарски израз, ќе добиеме

$$\frac{a^3-b^3}{a+b-\frac{ab}{a+b}}+\frac{a^3+b^3}{a-b+\frac{ab}{a-b}}=\frac{(a^3-b^3)(a+b)}{(a+b)^2-ab}-\frac{(a^3+b^3)(a-b)}{(a-b)^2+ab}$$
$$=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)}{a^2+ab+b^2}-\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)}{a^2-ab+b^2}$$
$$=(a-b)(a+b)-(a+b)(a-b)=0$$

односно, неговата вредност секогаш е 0.

2АБ. Бројот a е составен од 66 единици и 44 тројки. Кој/и од следните искази е точен:

p: Бројот a е делив со 3.

q: Бројот a е делив со 6.

r: Бројот a е прост број.

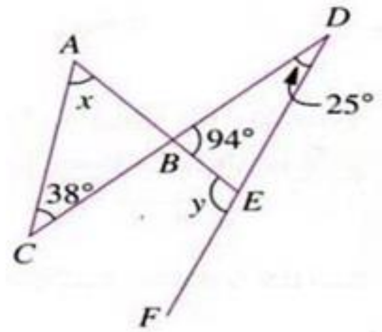
s: Бројот a не е делив со 2.

А) Само p, q, s. Б) Само s. В) Само p, r.

Г) Само p, s. Д) Ниеден од исказите

Одговор. Г)

Решение. Збирот на цифрите на бројот a е еднаков на 198 кој е делив со бројот 3. Од признакот за деливост со 3, следува дека и a е делив со 3, што значи дека p е точен исказ. Цифрите на бројот a се непарни броеви, што значи дека бројот a завршува на непарна цифра, односно тој е непарен број и не е делив со 2, па не е делив ни со 6. Значи q е неточен исказ, а s е точен исказ. Иказот r е неточен исказ, затоа што a е поголем од е и е делив со 3. Значи, точни се само p и s.



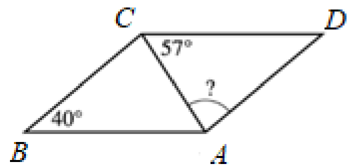
3А. Колку степени изнесува збирот на аглите означени со x и y на цртежот десно? (Внеси ја вредноста без единицата мерка.)

Одговор. 167

Решение. Аголот

$$y = \measuredangle FEA = 94^\circ + 25^\circ = 119^\circ,$$

како надворешен агол на $\triangle DEB$. Понатаму, $\measuredangle CBA = \measuredangle DBE = 94^\circ$ (накрсни агли), па од $\triangle ABC$ следува $x = 180^\circ - 38^\circ - 94^\circ = 48^\circ$. Конечно, $x + y = 119^\circ + 48^\circ = 167^\circ$.



3Б. Колку степени изнесува аголот означен со прашалник на цртежот десно, ако четириаголникот $ABCD$ е паралелограм? (Внеси ја вредноста без единицата мерка.)

Одговор. 83

Решение. Четириаголникот $ABCD$ е паралелограм, па затоа важи $\measuredangle ADC = \measuredangle ABC = 40^\circ$. Според тоа,

$$\measuredangle CAD = 180^\circ - \measuredangle ADC - \measuredangle DCA = 180^\circ - 40^\circ - 57^\circ = 83^\circ.$$

Следните четири задачи се бодуваат со 4 поени.

4АБ. Дадена е функцијата $f(x) = x + 1$. Колку е вредноста на изразот

$$f(0) + f(1) + f(2) + ... + f(2021)?$$

А) 2022 Б) 2043231 В) 2041210 Г) 4086462

Д) ниеден од понудените одговори

Одговор. Д)

Решение. Имаме:

$$f(0) + f(1) + f(2) + ... + f(2021) = 1 + 2 + 3 + ... + 2022 = \frac{2022 \cdot 2023}{2} = 2045253.$$

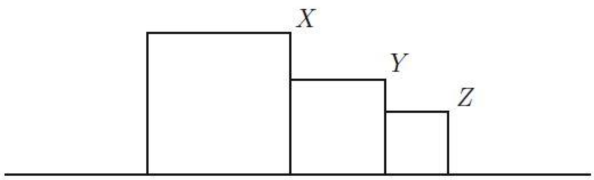
5АБ. На табла се напишани 10 трицифрени природни броеви. Кои било два од нив имаат различна последна цифра и кои било два од нив различна претпоследна цифра. Ако S е збирот на сите 10 броеви запишани на таблата, колку изнесува збирот на последните две цифри на бројот S?

А) 10 Б) 9 В) 14 Г) 5 Д) 0

Одговор. В)

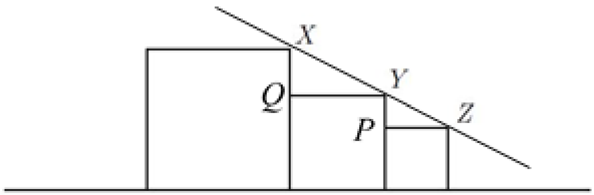
Решение. Вкупно има 10 цифри. Затоа што се дадени 10 броја и последната цифра на кој било два од нив е различна, добиваме дека секоја од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 се појавува на последната позиција само кај еден од броевите. Истиот заклучок важи и за претпоследните цифри. Бидејќи $0+1+2+...+9=45$, последната цифра на бројот S е 5, а претпоследната цифра е 9. Нивниот збир е еднаков на 14.

6АБ. Три квадрати со различна големина се поставени како на цртежот така што темињата X, Y и Z се колинеарни (лежат на иста права). Одреди ја должината на страната на најголемиот квадрат (во сантиметри), ако должините на страните на другите два квадрати се 6 cm и 4 cm. (Внеси ја вредноста без единицата мерка.)



Одговор. 9

Решение. Ако повлечеме права низ точките X, Y и Z ќе добиеме два правоаголни триаголници кои се слични т.е. $\triangle ZPY \sim \triangle YQX$. Од сличност имаме дека $\overline{ZP}:\overline{PY}=\overline{YQ}:\overline{QX}$. Ако со x ја означиме должината на страната на најголемиот квадрат, тогаш $4:(6-4)=6:(x-6)$, од каде $x=9\,cm$.



7АБ. Дадена е функцијата $f(x)=2px-1$, каде што p е прост број. Кој/и од следните изкази е точен:

q: Функцијата е растечка за секој прост број p.

r: $f(0)=p-1$

s: За $p=2$ точката со кординати (2022,8087) припаѓа на графикот на функцијата.

t: Исказите q, r, s се вистинит.

А) Само r, s, t. Б) Само s. В) Само q, s.

Г) Само s, t. Д) Ниту еден од исказите

Одговор. В)

Решение. Исказот q е точен исказ, затоа што коефициентот на правец на дадената права е позитивен цел број, за секој прост број p. Исказот r е неточен исказ, затоа што $f(0) = -1$, Исказот s е точен исказ, затоа што за $p = 2$, $f(2022) = 2 \cdot 2 \cdot 2022 - 1 = 8087$. Од тоа што r е неточен исказ, следува дека и t е неточен исказ. Значи, вистинити се само q и s.

Следните три задачи се бодуваат со 5 поени.

8А. За колку множества $X \subseteq \{1,2,3,4,5,6\}$ важи $X \cap \{3,4,5\} = \{4,5\}$.

А) 0 Б) 6 В) 7 Г) 8 Д) 16

Одговор. Г)

Решение. Множеството X е подмножество на $\{1,2,3,4,5,6\}$ и треба да ги содржи елементите 4 и 5, но не и елементот 3. Па, X може да е некое од следните множества:

$$\{4,5\},\{1,4,5\},\{2,4,5\},\{4,5,6\},\{1,2,4,5\},\{1,4,5,6\},\{2,4,5,6\},\{1,2,4,5,6\},$$

вкупно 8 различни множества.

8Б. Цената на една капа е цел број денари. Вкупната цена на седум капи е поголема од 930, а помала од 950 денари, а вкупната цена на единаесет капи е поголема од 1450, а помала од 1470 денари. Колку денари е цената на една капа?

А) 135 Б) 132 В) 133 Г) 134

Д) ниеден од понудените одговори

Одговор. В)

Решение. Нека x е цената на една капа. Тогаш, $930 < 7x < 950$ и $1450 < 11x < 1470$, од каде $133 \le x \le 135$ и $132 \le x \le 133$. Значи, цената на една капа е $x = 133$ денари.

9А. На прашањето кој од петте ученици (Ана, Билјана, Весна, Горан и Дарко) јаде грашок добиени се следните одговори:

1) „Ако Горан јаде грашок, тогаш и Дарко јаде грашок.“
2) „Барем едно од девојчињата јаде грашок.“
3) „Најмногу едно од момчињата јаде грашок.“
4) „Ана и Горан или двајцата јадат грашок или двајцата не јадат грашок.“
5) „Ако Дарко не јаде грашок, тогаш не јадат ни Билјана, ни Весна.“

Секој од дадените одговори е точен. Одреди кој од следните искази е точен:

А) „Горан јаде грашок.“
Б) „Билјана или Весна јадат грашок.“
В) „Ако Дарко јаде грашок, тогаш и Ана јаде грашок.“
Г) „Ана и Билјана јадат грашок.“
Д) „Билјана и Весна не јадат грашок.“

Одговор. Б)

Решение. Од 1) и 3) заклучуваме дека Горан не јаде грашок. Од 4) заклучуваме дека и Ана не јаде грашок. Од 5) и 2) заклучуваме дека Дарко јаде грашок. За Билјана и Весна знаеме само дека барем една од нив јаде грашок. Затоа, точен е исказот Б).

9Б. Во едно училиште од 840 ученици, 770 ученици биле присутни на часови. Четири петтини од отсутните ученици биле оправдано отсутни. Колкав дел од учениците во училиштето биле неоправдано отсутни?

А) $\frac{4}{5}$ Б) $\frac{1}{5}$ В) $\frac{1}{56}$ Г) $\frac{1}{15}$ Д) $\frac{1}{60}$

Одговор. Д)

Решение. Биле отсутни $840-770=70$ ученици, од кои $\frac{1}{5}\cdot 70=14$ биле неоправдано отсутни, а тоа е $\frac{14}{840}=\frac{1}{60}$ од вкупниот број на ученици.

10А. Јован за подарок добил часовник на кој има три реда сијалички, во првиот ред четири, во вториот ред шест и во третиот ред две сијалички. Тој знае само дека првиот ред ги покажува часовите, а вториот ред мину-тите. Кога било 11 часот и 59 минути претпладне, тогаш во првиот ред све-теле првата, третата и четвртата сијаличка, во вториот ред светеле првата, втората, третата, петтата и шестата сијаличка, а во третиот ред светела првата сијаличка (слика 1). Од друга страна, кога било 4 часот и 4 минути попладне забележал дека светеле сијаличките кои претходно не светеле, а не светеле сијаличките кои претходно светеле (слика 2). Сијаличките светат ако се означени во црвена боја.

1) 2) 3) 4)

Одреди после колку време, од времето прикажано на слика 3), кога светат само првите сијалички во секој ред, по прв пат ќе светат само последните сијалички во секој ред како на слика 4).
А) 15 часа 7 мин.   Б) 4 часа 29 мин.   В) 1 час 1 мин.   Г) 7 часа 31 мин.   Д) 3 часа 7 мин.

Одговор. Б)

Решение. Часовниците го покажуваат времето (часови и минути) во бинарен броен систем, при што цифрата 1 е означена со светење на сијаличка, а цифрата 0 е означена со несветење на сијаличката. Во првиот ред се прикажани часовите, во вториот ред минутите, а во третиот ред претпладне (AM) или попладне (PM). На часовникот на слика 1) прикажано е времето $1011_2 = 11$ часот и $111011_2 = 59$ минути претпладне, а на часовникот на слика 2) прикажано е времето $100_2 = 4$ часот и $100_2 = 4$ минути попладне. На часовникот на слика 3) прикажано е времето $1000_2 = 8$ часот и $100000_2 = 32$ минути претпладне, а на часовникот на слика 4) прикажано е времето $1_2 = 1$ часот и $1_2 = 1$ минута попладне. Од 8:32 претпладне до 1:01 попладне има 4 часа и 29 минути.

10Б. Во една златарница имало 200 златни прачки. Од секоја прачка биле излиени 11 златници (сите со еднаква големина), при што останувала мала количина на злато, така што од остатоците на 10 прачки се излива точно една нова прачка. Колку најмногу златници може да се излијат од почетните 200 прачки на овој начин?

А) 2200   Б) 2420   В) 2442   Г) 2444   Д)2445

Одговор: Г)

Решение: Од почетните 200 златни прачки излиени се $200 \cdot 11 = 2200$ златници. Од остатоците направени се точно $200 : 10 = 20$ прачки. Од овие 20 прачки излиени се уште $20 \cdot 11 = 220$ златници. Од остатоците направени се точно $20 : 10 = 2$ прачки. Од овие 2 прачки излиени се уште $2 \cdot 11 = 22$ златници. Овој пат остатокот од прачките е $\frac{2}{10}$ од една прачка. Бидејќи еден златник е $\frac{1}{11}$ од прачка и $\frac{2}{11} < \frac{2}{10} < \frac{3}{11}$, од остатокот може да се излијат уште најмногу 2 златника. Значи, најмногу може да се излијат

$$2200 + 220 + 22 + 2 = 2444 \text{ златници.}$$

Следните три задачи се бодуваат со 5 поени.

11АБ. За еден број велиме дека е *триделив* ако има точно три делители. Колку изнесува збирот на најмалите три триделиви природни броеви?

Одговор: 38

Решение: Јасно е дека 1 не е триделив број. Исто така, простите броеви не се триделиви. Единствени делители на бројот 4 се 1, 2 и 4, што значи 4 е триделив број. Исто така, единствени делители на бројот 9 се 1, 3 и 9, а единствени делители на бројот 25 се броевите 1, 5 и 25. Лесно се проверува дека сите броеви од 1 до 25, освен броевите 4, 9 и 25, не се триделиви броеви. Според тоа, збирот на најмалите три триделиви природни броеви е $4+9+25=28$.

12АБ. Бочната плоштина на еден рамностран цилиндар (цилиндар кај кој дијаметарот на основата е еднаков на висината на цилиндарот) е $64\pi\, cm^2$. Нека плоштината на цилиндарот е $x\, cm^2$, а волуменот е $y\, cm^3$. Притоа, мерниот број на плоштината x е p% од мерниот број на волуменот y. Колку е p?

Одговор. 75

Решение. Нека d е дијаметарот на основата, а H е висината на цилиндарот. Тогаш, бочната плоштина е $M=dH\pi=64\pi\, cm^2$. Од $d=H$, добиваме $d=H=8\, cm$, а радиусот на основата е $r=4\, cm$. Тогаш, плоштината на цилиндарот е $P=2B+M=2r^2\pi+64\pi=32\pi+64\pi=96\pi\, cm^2$, значи $x=96$, а волуменот на цилиндарот е $V=BH=r^2H\pi=128\pi\, cm^3$, значи $y=128$. Од $\frac{x}{y}=\frac{96}{128}=0,75=75\%$, добиваме $x=75\%y$, значи $p=75$

13АБ. Броителот на дропката од облик $\frac{a}{b}$ е за 2 помал од нејзиниот именител. Ако броителот се намали за $\frac{1}{2}$, а именителот се зголеми за $\frac{1}{4}$, тогаш се добива дропката $\frac{10}{21}$. Колку е вредноста на изразот $a+b$?

Одговор. 8

Решение. Од условите на задачата го добиваме следниот систем равенки

$$\begin{cases} a=b-2 \\ \frac{a-\frac{1}{2}}{b+\frac{1}{4}}=\frac{10}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b-2 \\ \frac{2(2a-1)}{4b+1}=\frac{10}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b-2 \\ 21a-10b=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=5. \end{cases}$$

Според тоа, добиваме дека вредноста на изразот $a+b=8$.

Следните четири задачи се бодуваат со 6 поени.

14АБ. Одреди го најмалиот четирицифрен број делив со 7, кој при делење со 8, 9 и 10 дава остаток 2.

Одговор. 1442

Решение. Од $\mathrm{NZS}(8,9,10)=360$, ја бараме најмалата вредност на $k\in\mathbb{N}$, така што $360k+2$ е делив со 7 и $360k+2\geq 1000$. Од последното неравенство имаме дека $k\geq 3$. За $k=3$ го добиваме бројот $360\cdot 3+2=1082$, кој не е делив со 7. За $k=4$ го добиваме бараниот број $360\cdot 4+2=1442=7\cdot 260$, кој е делив со 7.

15АБ. Од 1000 железни блокови во форма на квадар, секој од нив со должина 15 *cm* и еднаква ширина и висина, со топење и повторно моделирање, изработен е еден голем железен блок во форма на квадар со должина 12 *dm*, ширина 1 *m* и висина 8 *dm*. Колку е збирот на должината, ширината и висината (во сантиметри) на еден од помалите железни блокови? (Внеси ја вредноста без единицата мерка.)

Одговор. 31

Решение. Волуменот на големиот блок е $V=960000\,cm^3$. Според тоа, волуменот на еден од помалите блокови е $V'=\frac{960000}{1000}=960\,cm^3$. Ако со a,b,c ги означиме должината, ширината и висината на еден од помалите блокови, тогаш од условите на задачата $a=15\,cm$ и $b=c$, па од $V'=abc=960\,cm^3$, следува дека $b=c=8\,cm$. Според тоа, бараниот збир е еднаков на $a+b+c=31\,cm$.

16АБ. Колку е апсолутната вредност на збирот на коефициентите на полиномот $P(x)=(x+2)(3x-7)-(x-6)(2x-7)(x-1)-15$ по неговото сведување во нормален вид?

Одговор. 27

Решение. *Прв начин.* Имаме:

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+2)(3x-7)-(x-6)(2x-7)(x-1)-15\\&=3x^2-7x+6x-14-(2x^3-2x^2-7x^2+7x-12x^2+12x+42x-42)-15\\&=-2x^3+24x^2-62x+13\end{aligned}$$

од каде следува дека апсолутната вредност од збирот на коефициентите на нормалниот вид на дадениот полином се $|-2+24-62+13|=27$.

Втор начин. Имаме

$$P(1)=(1+2)(3-7)-(1-6)(2-7)(1-1)-15=-27 \ ,$$

па бараната апсолутна вредност на збирот е $|-27|=27$.

17АБ. Дадени се три паралелни прави *r*, *s* и *t*, така што *s* е меѓу *r* и *t*. Трите прави се пресечени со правите *m* и *n*, при што пресечните точки на правата *m* со правите *r*, *s* и *t* се *A*, *B* и *C* соодветно, а пресечните точки на правата *n* со правите *r*, *s* и *t* се A_1, B_1 и C_1 соодветно. Притоа, $\overline{AB}=2x+3$, $\overline{BC}=\frac{2y-1}{2}$, $\overline{A_1B_1}=y$ и $\overline{B_1C_1}=\frac{x+2}{2}$. Ако $x+y=4$, колку е $\overline{AB}$.

Одговор. 5

Решение. Од пропорцијата $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}}$ имаме дека

$$(2x+3):\frac{2y-1}{2}=y:\frac{x+2}{2},$$

од каде

$$(2x+3)(x+2)=(2y-1)y.$$

Ако замениме $y=4-x$ добиваме

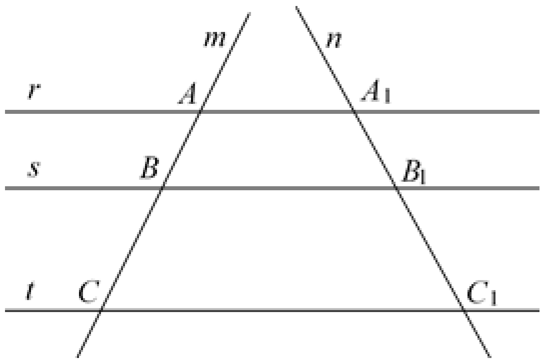
$$(2x+3)(x+2)=(7-2x)(4-x)$$

$$2x^2+7x+6=28-15x+2x^2$$

$$22x=22,$$

$$x=1.$$

Тогаш, $\overline{AB}=2x+3=2\cdot1+3=5$.



Следните три задачи се бодуваат со 7 поени.

18АБ. Производот на два двоцифрени броја е запишан само со сед-мици. Одреди го збирот на броевите.

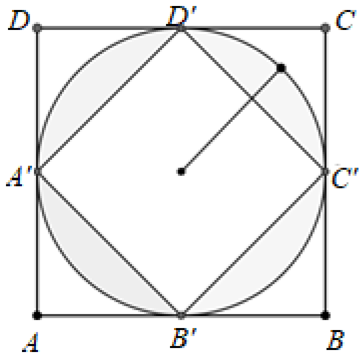
Одговор. 58

Решение. Производот на два двоцифрени броја најмалку може да биде $10\cdot10=100$, а најмногу може да биде $99\cdot99=9801$. Производот не може да е 7777, затоа што $7777=7\cdot11\cdot101$, и не може да се запише како производ на два двоцифрени броја (има трицифрен прост множител). Останува производот да е 777, па од $777 = 3\cdot 7\cdot 37 = 21\cdot 37$, имаме дека двоцифрените броеви се 21 и 37, а нивниот збир е $21+37=58$.

19АБ. Даден е квадрат *ABCD* со должина на страна $4\sqrt{2}$ и во него е впишан четириаголникот *A’B’C’D’* така што *A’, B’, C’, D’* се средините на страните *DA, AB, BC, CD*, соодветно. Плоштината на делот од впишаниот круг во квадратот *ABCD* што се наоѓа надвор од четириаголникот *A’B’C’D’* претстави ја во облик $x+y\pi$, каде $x, y\in\mathbb{Z}$. Колку е вредноста на изразот $|x+y|$?

Одговор. 8

Решение. Бараната плоштина ја означуваме со *P*, којашто согласно условите треба да ја претставиме во облик $x+y\pi$. Јасно е дека четириаголникот *A’B’C’D’* е квадрат. Го разгледуваме правоаголниот триаголник *B’AA’*. Затоа што *A’* и *B’* се средини на отсечките *DA* и *AB*, соодветно, добиваме дека $\overline{AB'}=\overline{AA'}=\frac{\overline{AB}}{2}=2\sqrt{2}$. Со примена на Питагорината теорема на правоаголниот триаголник *B’AA’*, добиваме $\overline{A'B'}^2=\overline{AB'}^2+\overline{AA'}^2$, односно $\overline{A'B'}=4$. Значи *A’B’C’D’* е квадрат со страна 4 и плоштина $P_{A'B'C'D'}=16$. Радиусот *r* на впишаниот круг е $r=\overline{AB'}=2\sqrt{2}$, па неговата плоштина е $P^*=\pi r^2=\pi(2\sqrt{2})^2=8\pi$. Бараната плоштина е



$$P=P^*-P_{A'B'C'D'}=8\pi-16=-16+8\pi.$$

Според тоа, $x=-16, y=8$, па

$$|x+y|=|-16+8|=8.$$

20А. Колку е вредноста на изразот a^3b+ab^3, ако $a^4+b^4=97$ и $a^2+b^2=13$, за $a,b\in\mathbb{N}$?

Одговор. 78

Решение. Со квадрирање на изразот $a^2+b^2=13$, добиваме дека $a^4+2a^2b^2+b^4=169$. Тогаш $2a^2b^2+=169-(a^4+b^4)=169-97=72$, односно $a^2b^2=36$, па $ab=6$. Според тоа, $a^3b+ab^3=ab(a^2+b^2)=6\cdot 13=78$.

20Б. Ако $a^2+b^2=34$ и $a+b=8$, тогаш одреди ја вредноста на изразот a^2b+ab^2.

Одговор. 120

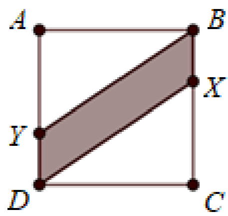
Решение. Од $a+b=8$, добиваме $a^2+2ab+b^2=64$. Тогаш,

$$2ab=64-(a^2+b^2)=64-34=30,$$

Односно $ab=15$. Според тоа, $a^2b+ab^2=ab(a+b)=15\cdot 8=120$.

II година

Следните три задачи се бодуваат со 3 поени.



1АВ. На дадениот цртеж, $DCBA$ е квадрат со страна 10. Ако $\overline{AY}=\overline{CX}=8$, пресметај ја плоштината на шрафираниот дел од цртежот.

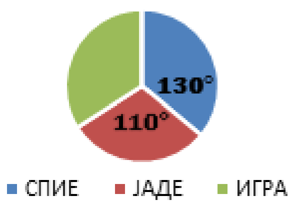
A) 20 **B)** 35 **C)** 45 **D)** 26 **E)** 30

Решение. Да забележиме дека шрафираниот дел претставува паралелограм со страна $\overline{DY}=\overline{BX}=2$ и висина кон таа страна $h=10$. Значи, плоштината на шрафираниот дел на цртежот е $P=2\cdot 10=20$.

2АВ. Ако $\frac{7}{8}$ од 720 е n, колку е 60% од n?

A) 60 **B)** 720 **C)** 96 **D)** 268 **E)** 378

Решение. Имаме $n=\frac{7}{8}\cdot 720=630$, па е $60\%n=\frac{60}{100}\cdot 630=378$.



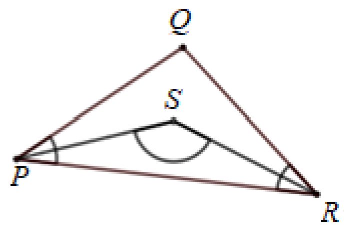
3АВ. Во дадениот дијаграм со зададена легенда, кругот покажува како едно мече поминува 24 часа. Колку часови има поминато мечето во играње?

A) 4 **B)** 8 **C)** 5 **D)** 1 **E)** 7

Решение. Кругот има 360°, тогаш ако со I го означиме делот од денот кој мечето го поминува во играње, следува $I=360^\circ-240^\circ=120^\circ=\frac{360^\circ}{3}$.

Значи, $\frac{1}{3}$ од целиот ден го поминува во играње, т.е. $\frac{1}{3}\cdot 24=8\,h$.

Следните четири задачи се бодуваат со 4 поени



4AB. Даден е триаголникот PQR за кој што важи $\measuredangle PQR = 120^\circ$, $\measuredangle QPS = \measuredangle RPS$ и $\measuredangle QRS = \measuredangle PRS$. Колку е $\measuredangle PSR$?

A) 130° **B)** 100° **C)** 80°

D) 150° **E)** 110°

Решение. Имаме:

$$\measuredangle PSR = 180^\circ - (\measuredangle RPS + \measuredangle PRS) = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(\measuredangle RPQ + \measuredangle PRQ)$$
$$= 180^\circ - \tfrac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle PQR) = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 150^\circ.$$

5AB. Ако $6x^2 + 11x - 10 = (ax+b)(cx+d)$, колку е $a^2+b^2+c^2+d^2$?

A) 34 **B)** 42 **C)** 44 **D)** 50 **E)** 64

Решение. Решенија на квадратната равенка $6x^2 + 11x - 10 = 0$ се $-\frac{5}{2}$ и $\frac{2}{3}$

Тогаш, $6x^2 + 11x - 10 = (2x+5)(3x-2)$ и затоа

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = 2^2+5^2+3^2+(-2)^2 = 42.$$

6AB. Алек и Бодан заедно имаат 105 години, Влатко и Алек 97години, а Бодан и Влатко заедно имаат 92 години. Колку години има Бодан?

A) 42 **B)** 46 **C)** 48 **D)** 50 **E)** 55

Решение. Ако годините на Алек се a, на Бодан се b и на Влатко се v, имаме

$$a+b=105, v+a=97, b+v=92.$$

Тогаш, $2a+2b+2v=294$ и оттука $a+b+v=147$. Добиваме

$$b = a+b+v-(a+v) = 147-97 = 50.$$

7AB. Колку е апсолутната вредност на збирот на третите степени на решенијата на равенката $x^2 - 2x + 5 = 0$?

A) 2 **B)** 5 **C)** 12 **D)** 22 **E)** 25

Решение. Имаме $x_1 + x_2 = 2$ и $x_1 x_2 = 5$. Тогаш,

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2) = 2^3 - 3\cdot 5\cdot 2 = -22.$$

Следните три задачи се бодуваат со 5 поени

8AB. Ако простите броеви x, y, z такви што $x<y<z$ се решенија на системот равенки

$$\begin{cases} x+y+z=68 \\ xy+yz+zx=1121 \end{cases}$$

која е вредноста на производот yz?

A) 893 **B)** 919 **C)** 957 **D) 989** **E)** 1003

Решение. Од условот $x+y+z=68$ следува дека $x=2$, па $y+z=66$ $y+z=66$. Од втората равенка следува

$2(y+z)+yz=1211$, т.е. $yz=1211-2(y+z)=1211-2\cdot66=989=23\cdot43$.

9AB. Најди го производот на вредностите на параметарот $k, k\neq0$, за кои квадратната равенка $kx^2+(5k+3)x+6k+5=0$ има единствено решение.

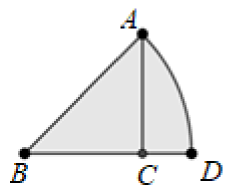
A) 2 **B)** 5 **C)** 12 **D) 9** **E)** 10

Решение. Дискриминантата на дадената квадратна равенка мора да е $D=0$. Следува

$$0=D=(5k+3)^2-4k(6k+5)=k^2+10k+9.$$

Од Виетовите формули применети на последната равенка следува $k_1k_2=9$.

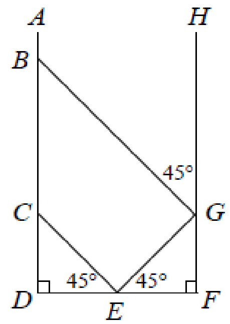
10AB. На дадениот цртеж BA и BD се радиуси на кружница со центар B. Плоштината на кружниот исечок ABD е 2π квадратни единици и претставува $\frac{1}{8}$ од плоштината на целиот круг. Најди ја плоштината на правоаголниот триаголник ABC (изразена во истите квадратни единици).



A) 4 **B)** 5 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 10

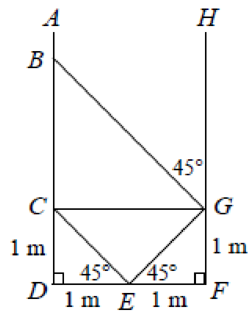
Решение. Плоштината на целиот круг е 8 пати по плоштината на кружниот исечок, т.е. $P_k=8\cdot2\pi=16\pi$. Оттука го наоѓаме радиусот на кругот $R^2=16$, т.е. $R=4$. Од друга страна, имаме $\measuredangle ABD=\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$. Добиваме правоаголен рамнокрак триаголник ABD со хипотенуза 4, па тогаш катетите имаат должина $a=2\sqrt{2}$. Затоа, неговата плоштина е $P=\frac{2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}}{2}=4$.

Следните три задачи се бодуваат со 5 поени



11A. Јана се наоѓа на позицијата C на дадената скица. Таа вклучува ласер насочен кон точката E на DF. Светлото од ласерот се рефлектира од точката E кон точката G на FH, а потоа од точката G кон точката B на AD (како на цртежот). Ако $\overline{DE}=\overline{EF}=1\text{m}$ која е должината на патот BD во метри?

Одговор. 3



Решение. Триаголниците CDE и EFG се рамнокраки триаголници со краци CD, DE и EF, FG, соодветно. Од $\overline{DE}=\overline{EF}=1\text{m}$ следува $\overline{CD}=\overline{FG}=1\text{m}$. Тогаш, $CDFG$ е правоаголник и оттука

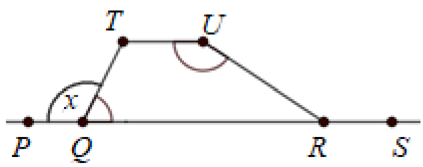
$\overline{CG}=\overline{DF}=2\,\text{m}$, $\measuredangle CGF=\measuredangle DCG=90°$,

$\measuredangle BGC=180°-90°-45°=45°$ и $\measuredangle BCG=90°$.

Ова значи дека и триаголникот BCG е рамнокрак правоаголен со катети $\overline{BC}=\overline{CG}=2\,\text{m}$.

Конечно, $\overline{BD}=\overline{BC}+\overline{CD}=2+1=3\text{m}$.

11B. На дадениот цртеж правите TU и PS се паралелни, а точките Q и R се такви што $\measuredangle PQT=x$, $\measuredangle RQT=x-50°$ и $\measuredangle TUR=x+25°$. Колку е аголот URS?



Одговор. 140°

Решение. Имаме $x+(x-50^\circ)=180^\circ \Leftrightarrow x=115^\circ$, па затоа

$$\measuredangle TUR=\measuredangle URS=115^\circ+25^\circ=140^\circ.$$

12A. Колку е збирот $|z|^2+\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z$, ако $z=(2+i)(3-i)+\frac{7-i}{i-1}$?

Одговор. 14

Решение. Имаме

$$z=(2+i)(3-i)+\frac{7-i}{i-1}=7+i+\frac{7-i}{i-1}\cdot\frac{-i-1}{-i-1}=7+i+\frac{-8-6i}{2}=3-2i,$$

па $|z|^2+\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z=9+4+3-2=14$.

12B. Ако за линеарната функција $f(x)=ax+b$ важат равенствата $f(-2)+f(4)=22$ и $f(-2)-f(4)=42$, определи колку е $a+b$.

Одговор. 11

Решение. Од системот наоѓаме $f(-2)=32, f(4)=-10$. Следува дека $-2a+b=32,\ 4a+b=-10$. Решение на последниот систем е $a=-7, b=18$ па $a+b=11$.

13AB. На колку нули завршува производот на првите 25 природни броеви?

Одговор. 6

Решение. Нека производот на првите 25 природни броеви е *p*. Во овој производ содржатели на 5 се 5, 10, 15, 20 и 25 и највисокиот степен на 5 што го дели *p* е 5^6. Бидејќи *p* се дели со 4 и 16, можеме да заклучиме дека *p* се дели со 2^6. Затоа 10^6 е делител на *p*, а 10^7 не е делител на *p*, па *p* завршува на шест нули.

Следните четири задачи се бодуваат со 6 поени

14A. Во една цвеќарница има 400 цвеќиња. Од нив 70% се рози. Откако се продале 8 рози и одреден број од другите цвеќиња, 85% од цвеќиња што останале во цвеќарницата биле рози. Колку цвеќиња, што не се рози, се продале?

Одговор. 72

Решение. Во цвеќарницата, на почетокот имало $0,7\cdot 400=280$ рози. Нека бројот на продадени цвеќиња, кои не се рози е *x*. Тогаш, според условите на задачата имаме $0,85(400-x-8)=280-8$. Оттука, $x=72$.

14B. На еден тест Марија освоила 60%, а Гордана 85% од можните поени. Ако Гордана има 10 поени повеќе од Марија, колку вкупно поени носел тестот?

Одговор. 40

Решение. *Прв начин*. Гордана освоила 25% повеќе поени од Марија, што значи дека таа освоила четвртина поени повеќе од вкупниот број поени кои ги носи тестот. Но, Гордана освоила 10 поени повеќе, па затоа тестот носи $4\cdot 10=40$ поени.

Нека вкупниот број на поени на тестот е *x*. Тогаш, $0,85x=10+0,6x$ и оттука $x=40$.

15А. Нека a и b се позитивни цели броеви такви што $a,b \leq 100000$ и за нив важи $\frac{a^3-b}{a^3+b}=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$. Колку такви подредени парови (a,b) има?

Одговор. 10

Решение. Множиме и добиваме $(a^3-b)(b^2+a^2)=(a^3+b)(b^2-a^2)$. По средување и кратење се добива $a^5=b^3$. Броевите се цели, позитивни за кои важи $a,b \leq 100000$ и уште добивме дека a мора да е 3-ти степен а b мора да е 5-ти степен. Затоа, $b \in \{1^5, 2^5, ..., 10^5\}$ и тогаш бараните парови се $(1^3, 1^5)$, $(2^3, 2^5)$, ..., $(10^3, 10^5)$. Значи, има 10 такви парови.

15В. Неколку броеви се наредени еден до друг. Почнувајќи од третиот број, секој нареден е еднаков на збирот на претходните два броја, зголемен за редниот број на местото каде што се наоѓа бројот (ако се работи за петтиот број, тој е еднаков на збирот на третиот и четвртиот и на бројот 5). Ако десеттиот број е 103, а дванаесеттиот 217, колку е четиринаесеттиот број?

Одговор. 563

Решение. Дадено е $a_{10}=103, a_{12}=217, a_{12}=a_{10}+a_{11}+12$, па затоа $a_{11}=a_{12}-a_{10}-12=217-103-12=102$. Тогаш,

$$a_{13}=a_{12}+a_{11}+13=102+217+13=332,$$
$$a_{14}=a_{13}+a_{12}+14=217+332+14=563.$$

16АВ. Квадратната равенка $x^2-(10+m)x+10m+1=0$, каде што m е цел број, има две целобројни решенија p и q, и притоа p е прост број. Пресметај ја вредноста на параметарот m.

Одговор. 12

Решение. Имаме $p+q=10+m$ и $pq=10m+1$. Тогаш, ако $m=p+q-10$ го замениме во втората равенка добиваме $pq=10p+10q-100+1$, односно $(p-10)(q-10)=1$. Бидејќи p и q се цели броеви, добиваме $p-10=q-10=1$ или $p-10=q-10=-1$. Значи, $p=q=11$ или $p=q=9$. Според условите на задачата, p е прост број и затоа второто решение отпаѓа. Имаме $p=q=11$ и тогаш $m=12$.

17АВ. Најди ги сите реални броеви x и y такви што $x^2+y^2+\frac{1}{2}\le x(2y+1)$. Решението внеси го во облик $2xy$.

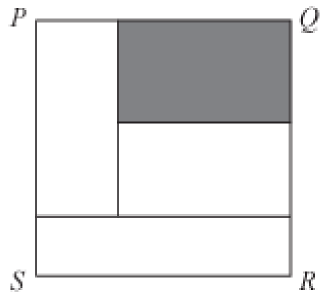
Одговор. 1

Решение. Имаме

$$2x^2+4y^2-4xy-2x+1\le 0,$$
$$(x-2y)^2+(x-1)^2\le 0,$$
$$x=1,\ y=\tfrac{1}{2},$$
$$2xy=1.$$

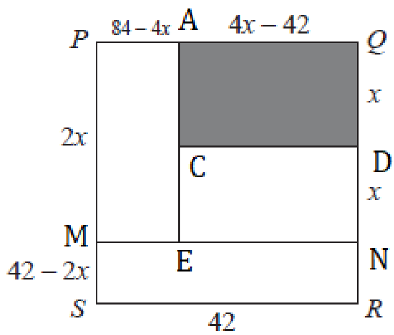
Следните три задачи се бодуваат со 7 поени

18А. На дадениот цртеж, квадратот $SRQP$ има страна со должина 42 и е поделен на четири помали правоаголници. Ако овие четири правоаголници имаат еднакви периметри, пресметај ја плоштината на шрафираниот дел од цртежот.

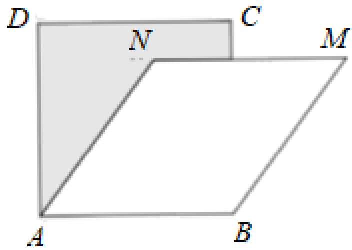


Одговор. 540

Решение. Нека страната QD на правоаголникот $CDQA$ е x. Бидејќи $\overline{AQ}=\overline{CD}=\overline{EN}$ и $L_{ACDQ}=L_{CEND}$, следува дека $\overline{DN}=x$ и страната $\overline{PM}$ на правоаголникот $PMEA$ е $2x$. Значи, $\overline{MS}=42-2x$, па правоаголникот $MSRN$ има периметар $168-4x$. Бидејќи сите правоаголници имаат ист периметар, добиваме дека $\overline{PA}=\frac{168-4x-4x}{2}=84-4x$. Тогаш, $\overline{AQ}=4x-42$ и периметарот на правоаголникот $ACDQ$ е $10x-84$. Ако ги изедначиме периметрите на правоаголниците $MSRN$ и $ACDQ$, добиваме $168-4x=10x-84$, $14x=252$ и оттука $x=18$. Конечно, плоштината на шрафираниот дел на цртежот, односно плоштината на правоаголникот $ACDQ$ е $18\cdot 30=540$.

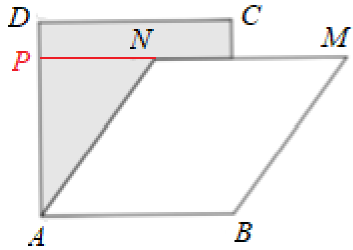


18B. На цртежот $ABCD$ е квадрат со плоштина $289\,cm^2$, а четириаголникот $ABMN$ е ромб со плоштина $255\,cm^2$. Колку изнесува плоштината во cm^2 на сивиот дел?



Одговор. 94

Решение. Страната на квадратот и ромбот е $17\,cm$. Тогаш висината на ромбот е $15\,cm$. Од темето N повлекуваме нормала кон AD која што ја сече AD во точка P. Тогаш триаголникот ANP е правоаголен со хипотенуза $17\,cm$ и една катета (еднаква на висината на ромбот) $15\,cm$. Тогаш другата катета е $8\,cm$.

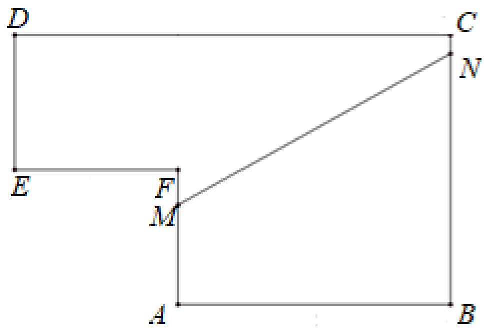


Плоштината на сивиот дел е еднаква со збирот на плоштината на правоаголниот триаголник со страни $8\,cm$, $15\,cm$ и $17\,cm$ и на плоштината на правоаголникот со страни $17\,cm$ и $2\,cm$, па затоа таа е $\frac{8\cdot 15}{2}+2\cdot 17=94\,cm^2$.

19A. На цртежот е дадена фигурата $ABCDEF$ чија што плоштина е 130. За должините на страните е познато дека

$$\overline{AF}=\overline{DE},\ \overline{EF}=6,\ \overline{AB}=10\,.$$

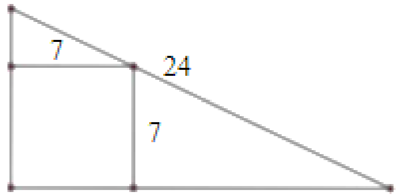
Ако отсечката MN ја дели фигурата на две фигури со еднакви плоштини, колкава е плоштината на фигурата $MNCF$?



Одговор. 10

Решение. Нека $\overline{AF}=\overline{DE}=x,\ \overline{FM}=y,\ \overline{CN}=z$. За плоштината на фигурата $ABCDEF$ имаме $x\cdot(6+10)+x\cdot 10=130$ и оттука $x=5$. Тогаш плоштината на трапезот $BNMA$ е $\frac{5-y+10-z}{2}\cdot 10=\frac{130}{2}$, оттука $y+z=2$. Бидејќи фигурата $MNCF$ е трапез со основи y и z и висина 10 плоштината е $\frac{y+z}{2}\cdot 10=10$.

20А. Во правоаголен триаголник со хипотенуза со должина 24, впишан е квадрат со страна 7, како на цртежот. Колку е плоштината на правоаголниот триаголник?



Одговор. 112

Решение. Нека катетите на правоаголниот триаголник се a и b. Тогаш, добиваме два помали правоаголни триаголници со катети $a-7$ и 7 и 7 и $b-7$, кои се слични па важи $\frac{a-7}{7}=\frac{7}{b-7}$. Оттука следува дека $a+b=\frac{ab}{7}$. Од $a^2+b^2=24^2$ следува $(a+b)^2-2ab=24^2$. Во последното равенство заменуваме $a+b=\frac{ab}{7}$ и добиваме $(ab)^2-2\cdot 7^2ab-7^2 24^2=0$. Решенија на оваа равенка се $7^2\pm\sqrt{7^4+7^2 24^2}=7^2\pm 7\sqrt{7^2+24^2}=7^2\pm 7\cdot 25$. Отука следува дека $ab=224$ (второто решение отпаѓа поради негативноста), па плоштината на дадениот правоаголен триаголник е 112 .

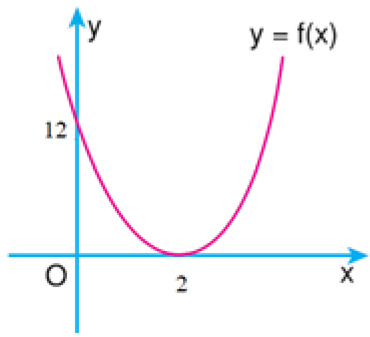
III година

Следните три задачи се бодуваат со 3 поени

1АВ. За параболата $y=f(x)$ дадена на цртежот, најди го $f(10)$.

А 24 **Б** 192 **В** 240

Г 2 **Д** друга вредност



Решение. Последователно добиваме

$f(x)=c(x-2)^2$

$f(0)=c(0-2)^2=12$,

$4c=12$,

$c=3$,

$f(10)=3(10-2)^2=3\cdot 64=192$

2АВ. Во една кутија има 1000 топки од кои 5% се сини, а останатите се црвени. По отстранување на одреден број црвени топки од кутијата, бројот на сини топки е 10% од преостанатите топки во кутијата. Колку црвени топки останале во кутијата?

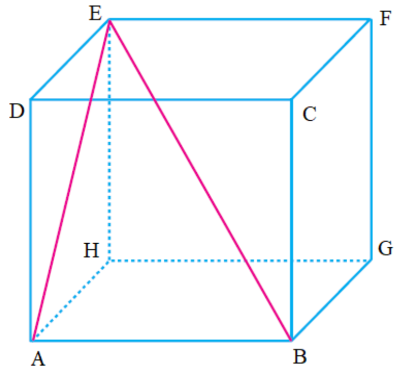
А 900 **Б** 850 **В** 5000 **Г** 450 **Д** друга вредност

Решение. Според условите на задачата на кутијата има 50 сини и 950 црвени топки. Од тоа што 50 е 10% на 500 топки, треба да се отстранат 500 црвени топки, при што остануваат само 450 црвени топки.

3АВ. Дадена е коцката $ABCDEFGH$. Колку е $\sin\measuredangle ABE$?

А $\frac{1}{2}$ **Б** $\sqrt{2}$ **В** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **Г** $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Д друга вредност



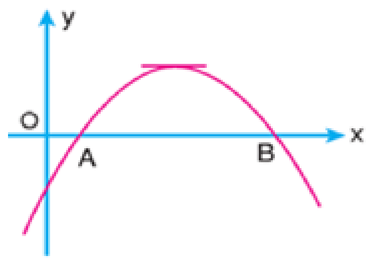
Решение. Имаме

$\overline{AB}=x$, $\overline{AE}=x\sqrt{2}$, $\overline{BE}=x\sqrt{3}$

$\sin(\measuredangle ABE)=\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Следните четири задачи се бодуваат со 4 поени

4АВ. Дадена е параболата $y=-x^2+6x+3m-9$ (види цртеж), за чии точки A и B важи $5\cdot\overline{OA}=\overline{OB}$. Одреди ја вредноста на параметарот m.



А $\frac{2}{3}$ **Б** $\frac{3}{4}$ **В** $\frac{4}{3}$ **Г** $\frac{5}{2}$ **Д** $\frac{2}{5}$

Решение. Имаме $A(a,0)$ и $B(5a,0)$, па затоа

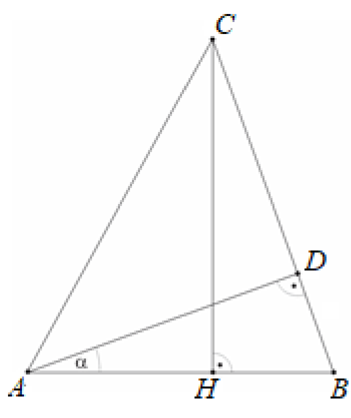
$-a^2+6a+3m-9=-25a^2+30a+3m-9$

$24a^2-24a=0$, т.е. $a=1$

Сега, $-1^2+6\cdot1+3m-9=0$, од каде следува $m=\frac{4}{3}$.

5АВ. Даден е триаголникот ABC и за него, според ознаките на цртежот, е познато дека $\overline{BH}=10$ и $\overline{BC}=16$. Ако $\measuredangle DAB=\alpha$, колку е $\operatorname{ctg}\alpha$?

А $\frac{\sqrt{39}}{5}$ **Б** 1 **В** $\frac{3}{4}$ **Г** $\frac{\sqrt{41}}{5}$ **Д** $\frac{\sqrt{3}}{2}$



Решение. Од Питагоровата теорема следува

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{16^2-10^2}=2\sqrt{39}$.

Понатаму, $\measuredangle DAB = \measuredangle BCH = \alpha$, како агли со нормални краци, па затоа $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\overline{CH}}{\overline{BH}} = \frac{2\sqrt{39}}{10} = \frac{\sqrt{39}}{5}$.

6АВ. Кој од дадените броеви не може да е вредност на квадратната функција $f(x) = x^2 - 2x + 5$?

А 0 **Б** 4 **В** 10 **Г** 10^{10} **Д** ниту еден

Решение. Имаме $f(x) = (x-1)^2 + 4$, што значи дека множеството вредности на функцијата е $[4, \infty)$, па тоа е бројот 0.

7АВ. Последната цифра на бројот $4 + 5^2 + 4^3 + 5^4 + ... + 4^{2021} + 5^{2022}$ е:

А 0 **Б** 4 **В** 5 **Г** 9 **Д** 2

Решение. Бројот $4^{2k-1}, k \in \mathbb{N}$ секогаш завршува со 4, од каде следува дека $4 + 4^3 + 4^5 ... + 4^{2021}$ е збир од 1011 броја кои завршуваат со 4 и затоа и тој број завршува со 4.

Бројот $5^k, k \in \mathbb{N}$ секогаш завршува со 5. Тогаш $5^2 + 5^4 + 5^6 ... + 5^{2022}$ е збир од 1011 броја кои завршуваат со 5 и затоа и тој број завршува со 5.

Конечно, дадениот збир завршува на цифрата 9.

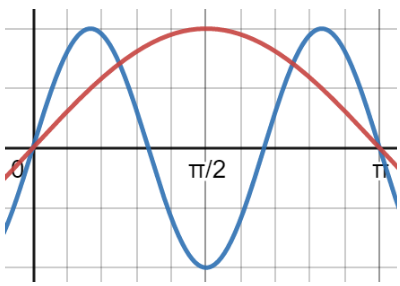
Следните три задачи се бодуваат со 5 поени

8АВ. За кое од следниве множества важи неравенството $\sin x \le \sin 3x$?

А $[0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]$ **Б** $[0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{61\pi}{100}, \pi]$ **В** $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

Г $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{79\pi}{100}, \pi]$ **Д** $[0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{95\pi}{100}, \pi]$

Решение. На интервалот $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ важи $\sin 3x \le \sin x$, па како интервалите под А, Б, В и Г имаат непразен пресек со интервалот $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ даденото неравенство не важи на овие интервали. Сега, од графикот на овие функции на интервалот $[0, \pi]$ следува дека неравенството е исполнето на множеството $[0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{95\pi}{100}, \pi]$.



9АВ. Ако $5^{10x}=4900$ и $2^{\sqrt{y}}=25$, пресметај ја вредноста на изразот $5^{5(x-1)}\cdot 4^{\sqrt{y}}$.

А 0 **Б** 14 **В** 5 **Г** 10 **Д** 20

Решение. Од $5^{10x}=4900 \Rightarrow (5^{5x})^2=70^2 \Rightarrow 5^{5x}=70$ следува

$$5^{5(x-1)}\cdot 4^{\sqrt{y}}=5^{5x}\cdot 5^{-5}\cdot(2^{\sqrt{y}})^2=70\cdot 5^{-5}\cdot 25^2=14.$$

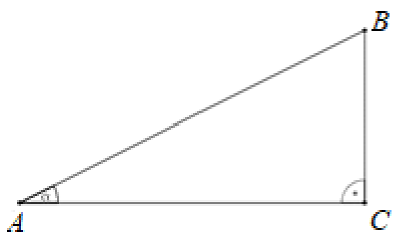
10АВ. Избрани се два броја a и b од множеството $\{1,2,3,...,26\}$, така што производот ab е еднаков на збирот од останатите броеви од множеството. Колку изнесува $|a-b|$?

А. 15 Б. 11 В. 9 Г. 6 Д. 1

Решение. Имаме $1+2+\cdots+26=\frac{26\cdot 27}{2}=351$. Од условот на задачата следува $351-a-b=ab$ односно $351=ab+a+b$. Со прегрупирање добиваме $351=a(b+1)+b+1-1$ односно $352=(a+1)(b+1)$. Бидејќи $352=2^5\cdot 11$, еден од $a+1$ и $b+1$ треба да е делив со 11. Нека, боо $a+1=11$. Тогаш $b+1=32$, т.е. $b=31$ што не е можно поради условот. Тогаш $a+1=22$, $b+1=16$, односно $a=21, b=15$. Заклучуваме дека $|a-b|=6$.

Следните три задачи се бодуваат со 5 поени

11АБ. Најди го периметарот на правоаголниот триаголник ABC (цртеж десно), ако се знае дека $\overline{AC}=2$ и $\mathrm{tg}\alpha=\frac{3}{4}$.



Одговор. 6

Решение. Бидејќи $\tan\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ добиваме $\overline{BC}=\frac{3}{2}$. Од Питагоровата теорема добиваме $\overline{AB}=\frac{5}{2}$. Конечно, периметарот на триаголникот е 6.

12А. Ако $\frac{\sin^2 5°+\sin^2 10°+...+\sin^2 85°}{\mathrm{tg}10°\cdot\mathrm{tg}20°\cdot...\cdot\mathrm{tg}80°}=a$, најди ја вредноста на $2a$.

Одговор. 17

Решение. Заради $\sin^2 5°+\sin^2 85°=1,\ldots,\sin^2 40°+\sin^2 50°=1$ и уште

$$\operatorname{tg}10^\circ \cdot \operatorname{tg}80^\circ = 1, \ldots, \operatorname{tg}40^\circ \cdot \operatorname{tg}50^\circ = 1$$

добиваме

$$\frac{\sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \ldots + \sin^2 85^\circ}{\operatorname{tg}10^\circ \cdot \operatorname{tg}20^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}80^\circ} = \frac{8 + \sin^2 45^\circ}{1} = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

$$2a = 2 \cdot \frac{17}{2} = 17.$$

12B. Ако најголемата вредност на променливата $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ за која важи равенството $6 \cdot 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} - 8 = 2^{2 \cdot \operatorname{ctg}^2 x + 2}$ е m, најди ја вредноста на $\frac{\pi}{m}$.

Одговор. 2

Решение. Имаме

$$6 \cdot 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} - 8 = 2^{2 \cdot ctg^2 x + 2} \Leftrightarrow 6 \cdot 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} - 8 = 2^{\frac{2}{\sin^2 x}}.$$

Ставаме смена $a = 2^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ и дадената равенка добива облик $a^2 - 6a + 8 = 0$ од каде за решенијата добиваме $a = 2, a = 4$. Ако се вратиме на смената и земеме предвид дека $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ добиваме $\sin x = 1, \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Јасно, $m = \frac{\pi}{2}$ и затоа $\frac{\pi}{m} = 2$

13AB. Познато е дека важи равенството $2 - \cos^2 \alpha = 3 \sin \alpha \cos \alpha$. Да се најде вредноста $2 \operatorname{tg} \alpha$, ако се знае дека $\sin \alpha \neq \cos \alpha, \cos \alpha \neq 0$.

Одговор. 1

Решение. Од $2 - \cos^2 \alpha = 3 \sin \alpha \cos \alpha$ следува

$$2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 3 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Ако последната равенка ја поделиме со $\cos^2 \alpha$ и ставаме $\operatorname{tg} \alpha = x$, тогаш се добива квадратна равенка $2x^2 - 3x + 1 = 0$ чии решенија се $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{1}{2}$. Бидејќи $\sin \alpha \neq \cos \alpha$ следува $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, односно $2 \operatorname{tg} \alpha = 1$.

Следните четири задачи се бодуваат со 6 поени

14A.16B. Нека $f(x) = -x^2 + bx + c$ е квадратна функција со теме во точката (3,2).

Ако x_1 и x_2 се нулите на функцијата, пресметај ја вредноста на изразот $(x_1 - x_2)^2$

Одговор. 8

Решение. Бидејќи теме на $f(x)$ е точката (3,2) следува

$$f(x) = -(x-3)^2 + 2 = -x^2 + 6x - 7.$$

Од Виетовите формули се добива $x_1 + x_2 = 6$ и $x_1 x_2 = 7.$ Тогаш

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 36 - 28 = 8.$$

14B. Познато е дека секој жител на Логичната Земја е или тапчо или сезнајко. Тапчовците даваат секогаш неточни, а сезнајковците секогаш точни искази. Еден случаен минувач го наслушнал следниов разговор помеѓу Ане, Боро и Ване, жители на Логичната Земја:

Ане: „Боро и Ване се и двајцата тапчовци!“

Боро: „Тоа е точно.“

Колкумина од Ане, Боро и Ване се тапчовци?

Одговор. 2

Решение. *Случај* 1. Изјавата на Ане е точна. Тоа значи дека и Боро и Ване секогаш даваат лажни изјави. Но тогаш потврдата на Боро е лажна и изјавата на Ане не може да биде точна. Овој случај не е можен.

Случај 2. Изјавата на Ане не е точна т.е. Ане е тапчо. Тогаш барем еден од Боро или Ване е сезнајко и секогаш дава точни изјави. Но тоа не може да биде Боро бидејќи тој ја потврдува неточната изјава на Ане. Останува дека Ване мора да е сезнајко.

15A. Да се најде $\frac{24x}{\pi}$ ако за $0 < x < \frac{\pi}{2}$ важи

$$4\log_{16}(\cos 2x) + 2\log_4(\sin x) + \log_2(\cos x) + 3 = 0.$$

Одговор. 1

Решение. Равенството $4\log_{16}(\cos 2x) + 2\log_4(\sin x) + \log_2(\cos x) + 3 = 0$ е еквивалентно со $\log_2(\cos 2x \sin x \cos x) = -3$ односно $\cos 2x \sin x \cos x = \frac{1}{8}$ од каде се добива $\sin 4x = \frac{1}{2}$. Бидејќи $0 < x < \frac{\pi}{2}$ следува $4x = \frac{\pi}{6}$ односно $\frac{24x}{\pi} = 1.$

15B. Да се определи вредноста на изразот $5\sin\theta - 3\cos\theta$ ако се знае дека $3\sin\theta + 5\cos\theta = 5$ каде $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Одговор. 3

Решение. Од $3\sin\theta + 5\cos\theta = 5$ добиваме

$$9\sin^2\theta + 30\sin\theta\cos\theta + 25\cos^2\theta = 25$$

односно $\cos\theta = \frac{8}{15}\sin\theta.$ Ако ова го замениме во $3\sin\theta + 5\cos\theta = 5$ се добива $\sin\theta = \frac{15}{17}, \cos\theta = \frac{8}{17}$ и $5\sin\theta - 3\cos\theta = 3.$

16A. Најди го збирот на сите позитивни решенија на равенката

$$(x^2 + 5x + 5)^{x^2 - 10x + 21} = 1.$$

Одговор. 10

Решение. Задачата се сведува на задача од облик $f(x)^{g(x)} = 1$, од каде што следуваат следните можни случаи:

1) $f(x) = 1$ или 2) $g(x) = 0$ и $f(x) \neq 0$ или 3) $f(x) = -1$ и $g(x) -$ парен.

Од 1) $f(x) = 1$ имаме $x^2 + 5x + 5 = 1 \Leftrightarrow x = -1,\ x = -4.$

Од 2) $g(x) = 0$ и $f(x) \neq 0$ имаме

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \text{ и } x^2 + 5x + 5 \neq 0 \Leftrightarrow x = 7,\ x = 3 \text{ и уште } x \neq \tfrac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Од 3) $f(x) = -1$ и $g(x) -$ парен имаме $x^2 + 5x + 5 = -1$ и $g(x) -$ парен, следува $x = -2,\ x = -3$ уште $g(-2) = 45,\ g(-3) = 60$, значи решението $x = -2$ не се зема како решение бидејќи не е исполнето $g(x) -$ парен.

Конечно сите решенија на равенката се $x = -1, x = -4, x = 7, x = 3, x = -3$ од каде што за збирот на позитивните решенија добиваме $7 + 3 = 10.$

17A.19B. Ако A е збирот на решенијата на равенката

$$\sin x - \cos x - |\sin x + \cos x| = 1$$

кои се наоѓаат на интервалот $[0, 2\pi],$ пресметај $\frac{16}{\pi}A$.

Одговор. 24

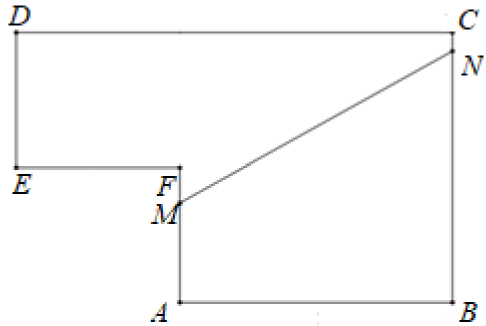
Решение. Ако $\sin x + \cos x < 0$, тогаш $\sin x - \cos x + \sin x + \cos x = 1$ и $x \in (\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$. Следува $\sin x = \frac{1}{2}$, па е $x = \frac{5\pi}{6}$. Ако $\sin x + \cos x > 0$, тогаш

$\sin x - \cos x - \sin x - \cos x = 1$ и $x \in (0, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$. Следува $\cos x = -\frac{1}{2}$ па е $x = \frac{2\pi}{3}$. Конечно, $\frac{16}{\pi} A = (\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}) \cdot \frac{16}{\pi} = 24$

17B. На цртежот е дадена фигурата *ABCDEF* чија што плоштина е 130. За должините на страните е познато дека

$$\overline{AF} = \overline{DE}, \overline{EF} = 6, \overline{AB} = 10.$$

Ако отсечката MN ја дели фигурата на две фигури со еднакви плоштини, колкава е плоштината на фигурата *MNCF*?



Одговор. 10

Решение. Нека $\overline{AF} = \overline{DE} = x, \overline{FM} = y, \overline{CN} = z$. За плоштината на фигурата *ABCDEF* имаме $x \cdot (6+10) + x \cdot 10 = 130$ и оттука $x = 5$. Тогаш плоштината на трапезот *BNMA* е $\frac{5-y+10-z}{2} \cdot 10 = \frac{130}{2}$, оттука $y + z = 2$. Бидејќи фигурата *MNCF* е трапез со основи y и z и висина 10 плоштината е $\frac{y+z}{2} \cdot 10 = 10$.

Следните три задачи се бодуваат со 7 поени

18A. Нека x, y и z се позитивни реални броеви. Најди ја најмалата вредност за изразот $(\frac{x}{y} + 2)(\frac{y}{z} + 2)(\frac{z}{x} + 2)$.

Одговор. 27

Решение. Од неравенство меѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$(\frac{x}{y} + 2)(\frac{y}{z} + 2)(\frac{z}{x} + 2) = \frac{x+y+y}{y} \cdot \frac{y+z+z}{z} \cdot \frac{z+x+x}{x}$$
$$\geq \frac{3\sqrt[3]{xy^2} \cdot 3\sqrt[3]{yz^2} \cdot 3\sqrt[3]{zx^2}}{xyz} = \frac{27\sqrt[3]{x^3y^3z^3}}{xyz} = 27.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z$.

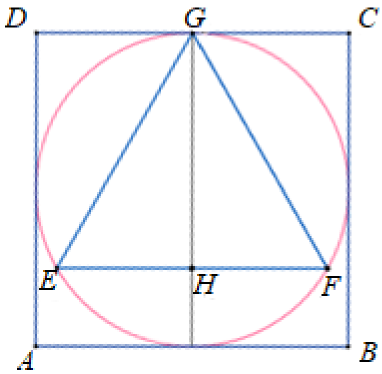
18B. Најди ги сите реални броеви x и y такви што $x^2+y^2+\frac{1}{2}\le x(2y+1)$. Решението внеси го во облик $2xy$.

Одговор. 1

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}&2x^2+4y^2-4xy-2x+1\le 0,\\&(x-2y)^2+(x-1)^2\le 0,\\&x=1,\ y=\tfrac{1}{2},\\&2xy=1.\end{aligned}$$

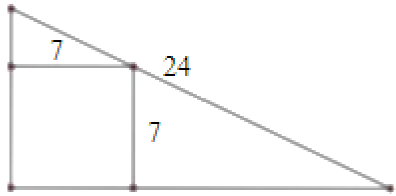
19A. Во еден квадрат е впишана кружница, а во неа е впишан рамностран триаголник (цртеж). Ако P_1 е плоштината на квадратот и P_2 е плоштината на триаголникот, најди ја вредноста на $\frac{P_1}{P_2}\cdot 3\sqrt{3}$.



Одговор. 16

Решение. Нека $\overline{AB}=a \Leftrightarrow P_1=a^2$, од друга страна $a=2R$ каде R е радиус на опишаната кружница околу триаголникот. Сега $R=\frac{2}{3}h$, па затоа $h=\frac{3}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{3}{4}a$. Имаме $HF^2=R^2-(\frac{R}{2})^2=\frac{3}{4}R^2 \Leftrightarrow HF=\frac{\sqrt{3}}{2}R=\frac{\sqrt{3}}{4}a \Leftrightarrow EF=2HF=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, оттука за плоштинта имаме $P_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a=\frac{3\sqrt{3}}{16}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{16}P_2$. Конечно $\frac{P_1}{P_2}\cdot 3\sqrt{3}=16$

20A. Во правоаголен триаголник со хипотенуза со должина 24, впишан е квадрат со страна 7, како на цртежот. Колку е плоштината на правоаголниот триаголник?



Одговор. 112

Решение. Нека катетите на правоаголниот триаголник се a и b. Тогаш, добиваме два помали правоаголни триаголници со катети $a-7$ и 7 и 7 и

$b-7$, кои се слични па важи $\frac{a-7}{7}=\frac{7}{b-7}$. Оттука следува дека $a+b=\frac{ab}{7}$. Од $a^2+b^2=24^2$ следува $(a+b)^2-2ab=24^2$. Во последното равенство заменуваме $a+b=\frac{ab}{7}$ и добиваме $(ab)^2-2\cdot 7^2ab-7^2 24^2=0$. Решенија на оваа равенка се $7^2\pm\sqrt{7^4+7^2 24^2}=7^2\pm 7\sqrt{7^2+24^2}=7^2\pm 7\cdot 25$. Отука следува дека $ab=224$ (второто решение отпаѓа поради негативноста), па плоштината на дадениот правоаголен триаголник е 112 .

20В. Со 32 *m* жица сакате да заградите три страни на правоаголна површина (четвртата страна е ѕид). Која е најголемата можна површина која може да се загради? (Резултатот внеси го без мерна единица)

Одговор. 128

Решение. Ако страните на тој правоаголник се *x* и *y*, тогаш $x+2y=3$, т.е. $x=32-2y$. Функцијата на плоштината на правоаголникот е

$$f(x)=xy=y(32-2y)=-2(y-8)^2+128$$

која достигнува максимум во точката $y=8$ и вредноста на функцијата во таа точка е 128. Значи најголемата можна површина да се обиколи е 128 m^2.

IV година

Следните три задачи се бодуваат со 3 поени.

1АВ. Ако збирот на k последователни природни броеви е 45, која е најголемата можна вредност на k?

А. 3 Б. 5 В. 7 Г. 9 Д. 11

2А. Низата на Фибоначи започнува со броевите 1,1,2,3,5,8,13,... (после дадените први двачлена 1 и 1, секој нареден член е збир од претходните два). Ако 36-от член на низата е 14 930 352 и 38-от член е 39 088 169, колку изнесува 40-от член на низата?

А. 63 245 997 Б. 63 245 986 В. 102 334 153
Г. 102 334 154 Д. 102 334 155

3АВ. За природен број *n*, со $P(n)$ го означуваме производот на цифрите на бројот *n*, додека со $S(n)$ збирот на цифрите на бројот *n*. За колку двоцифрени броеви важи $P(n)+S(n)=n$.

А. 3 Б. 8 В. 9 Г. 13 Д. 23

Следните четири задачи се бодуваат со 4 поени

4АВ. Колку пермутации (a,b,c,d) на множеството {1, 2, 3, 4} го имаат својството: изразот $ab+bc+cd+da$ не е делив со 3?

А. 6 Б. 8 В. 12 Г. 14 Д. 16

5АВ. Даме си игра на три ескалатори во еден мол. Едниот од ескалаторите се движи надолу, другиот нагоре, а третиот е расипан; ескалаторите во сѐ останато се идентични. Ескалаторите кои одат нагоре и надолу се движат со иста брзина. Претпоставуваме дека Даме трча со константна брзина. По ескалаторот кој оди нагоре Даме се качува за 6 секунди, а по оној што оди надолу се качува за 30 секунди. За колку секунди ќе се качи по ескалаторот што не работи?

А. 10 Б. 12 В. 14 Г. 16 Д. 18

6АВ. Во една населба, точно една петтина од вкупниот број жители се темнокоси жени, а истиот број се светлокоси мажи. Ако точно четири седмини од жените се светлокоси и притоа се знае дека жените во оваа населба се или со светла или со темна коса, кој од понудените одговори е можниот вкупен број на жители во населбата?

А. 700 Б. 800 В. 900 Г. 1000 Д. 1100

7АВ. Познато е дека секој жител на Логичната Земја е или тапчо или сезнајко. Тапчовците даваат секогаш неточни, а сезнајковците секогаш точни искази. Еден случаен минувач го наслушнал следниов разговор помеѓу Ане, Боро и Ване, жители на Логичната Земја:

Ане: „Боро и Ване се и двајцата тапчовци!“

Боро: „Тоа е точно.“

Колкумина од Ане, Боро и Ване се тапчовци?

А. 0 Б. 1 В. 2 Г. 3 Д. не може да се каже

Следните три задачи се бодуваат со 5 поени.

8АВ. Познато е дека постои само еден четирицифрен број n за кој $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{n}}}$ е природен број. Колку е збирот на цифрите на бројот n?

А. 17 Б. 18 В. 19 Г. 20 Д. 21

9АВ. Нека x, y и z се природни броеви такви што:

$$x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{26}{21}.$$

Колку е xyz?

А. 20 Б. 24 В. 28 Г. 32 Д. 36

10АВ. Избрани се два броја a и b од множеството $\{1, 2, 3, ..., 26\}$, така што производот ab е еднаков на збирот од останатите броеви од множеството. Колку е $|a-b|$?

А. 15 Б. 11 В. 9 Г. 6 Д. 1

Во следните задачи внесете го одговорот без единица мерка.

Следните 3 задачи се бодуваат со 5 поени.

11АВ. Аритметичката средина на деветте броја $\{9,99,999,...,999999999\}$ е 9-цифрен број M чии цифри се различни. Која цифра не се јавува во декадниот запис на бројот M ?

Одговор. 0

Решение. Од условите на задачата добиваме

$$M=\frac{9+99+999+\ldots+999999999}{9}=\frac{9(1+11+111+\ldots+111111111)}{9}=123456789.$$

Бројот M не ја содржи цифрата 0.

12АВ. Равенката $z^4+z^3+2z^2+2z+4=0$ има комплексен корен чии реален и имагинарен дел се еднакви. Најди го бројот кој е за 5 поголем од реалниот дел на тој корен.

Одговор. 4

Решение. Нека $z=t+it=t(1+i)$ е бараниот корен. Важи

$$z^2=2it^2, z^3=(-2+2i)t^3 \text{ и } z^4=-4t^4.$$

Од условите на задачата добиваме

$$z^4+z^3+2z^2+2z+4=-4t^4+(-2+2i)t^3+4it^2+2(1+i)t+4=0.$$

Последната равенка е еквивалентна со равенката

$$(-4t^4-2t^3+2t+4)+i(2t^3+4t^2+2t)=0$$

од каде следува дека $4t^4+2t^3-2t-4=0$ и $2t^3+4t^2+2t=0$. Последните две равенки важат кога $t=-1$. Значи, бараниот број е $-1+5=4$.

13АВ. Колку точни кубови на природни броеви се делители на бројот $3!\cdot 5!\cdot 7!$?

Одговор. 6

Решение. Имаме

$$3!\cdot 5!\cdot 7! = (3\cdot 2\cdot 1)\cdot(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)\cdot(7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1) = 2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7.$$

Бараните полни кубови се во облик $2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d$ каде a,b,c и d се ненегативни цели броеви. Имаме три можности за a, односно $a\in\{0,3,6\}$. Аналогно, постојат две можности за b, односно $b\in\{0,3\}$. Останува една можност за c и d, односно $c=0$ и $d=0$. Оттука постојат точно $3\cdot 2\cdot 1\cdot 1=6$ полни кубови кои го делат бројот $3!\cdot 5!\cdot 7!$.

Следните 4 задачи се бодуваат со 6 поени.

14АВ. На кошаркарски турнир учествувале 8 екипи и притоа секоја екипа одиграла точно по еден натпревар со секоја од останатите екипи. За победа екипите добиваат по 2 поена, за пораз 0 поени (на турнирот немало нерешен натпревар). Екипите освоиле 14, 12, 8, 8, 6, 4, 2, 2 поени, редоследно. Колку натпревари последните четири екипи на табелата имат изгубено од првите четири екипи?

Одговор. 15

Решение. Последните четири екипи на табелата меѓусебно имат изиграно $\binom{4}{2}=6$ натпревари и во нив освоиле $6\cdot 2=12$ поени. Бидејќи овие екипи имат освоено вкупно $6+4+2+2=14$ поени, следува дека последните четири екипи против првите четири екипи освоиле $14-12=2$ поени, односно, последните четири екипи победиле во точно еден натпревар против првите четири екипи. Бидејќи последните четири екипи против првите четири екипи имат изиграно $4\cdot 4=16$ натпревари следува дека бројот на порази е $16-1=15$.

15АВ. За секој ненегативен цел број n дефинираме број $A_n=2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2}$. Најдете го најголемиот заеднички делител на броевите $A_0, A_1, \dots, A_{2022}$.

Одговор. 7

Решение. Лесно се проверува дека $A_0=1+9+25=35$ и A_1 не е делив со 5. Затоа најголемиот заеднички делител на броевите $A_0, A_1, \dots, A_{2022}$ е 7 или 1. Бидејќи остатокот при делење на $2^3, 3^6, 5^6$ со 7 е 1, следува дека остатокот при делење на $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$ со 7 е ист со остатокот на бројот $1+3^2 = 5^2 = 35$ при делење со 7, а тој е 0. Значи сите броеви $A_0, A_1, ..., A_{2022}$ се деливи со 7. Според тоа $НЗД(A_0, A_1, ..., A_{2022}) = 7$.

16А. Нека $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низата на Фибоначи дефинирана на следниот начин: $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ за $n \geq 1$. Ако x е реален број за кој важи $x^2 = x+1$, пресметај ја вредноста на изразот $x^{2022} - xF_{2022} - F_{2021}$.

Одговор. 0

Решение. Со помош на математичка индукција по n ќе докажеме дека $x^n = xF_n + F_{n-1}$ за $n \geq 2$.

За $n = 2$ добиваме $x^2 = F_2 x + F_1 = x+1$. Нека претпоставиме за $n > 2$ важи $x^{n-1} = F_{n-1}x + F_{n-2}$. Оттука следува

$$\begin{aligned} x^n &= x \cdot x^{n-1} = x \cdot (F_{n-1}x + F_{n-2}) = x^2 F_{n-1} + xF_{n-2} \\ &= (x+1)F_{n-1} + xF_{n-2} = x(F_{n-1} + F_{n-2}) + F_{n-1} = xF_n + F_{n-1}. \end{aligned}$$

16В. Во секое теме на една коцка запишан е различен број од множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Збирот на броевите кои се наоѓаат во темињата на ѕидовите на коцката е константен (ист за секој ѕид) и не е делив со бројот кој не е запишан во темињата на коцката. Определи го бројот кој не е запишан во ниту едно теме на коцката.

Одговор. 7

Решение. Нека s е број од множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ кој не е запишан во ниту едно теме од коцката. Секој број запишан во дадено теме припаѓа на три ѕида од коцката. Ако z е збирот на броевите кои се запишани во темињата на секој ѕид од коцката, добиваме

$$6z = 3(1+2+3+4+5+6+7+8+9) - 3s\ .$$

Оттука $2z = 45 - s$, па затоа s е непарен број. Бидејќи бројот z не е делив со s, добиваме дека 45 не е делив со s. Бидејќи единствен број од множеството $\{1,3,5,7,9\}$ со кој не е делив бројот 45 е 7, следува дека 7 е бројот кој не е запишан во ниту едно теме на коцката.

17A. Пресметај ја вредноста на изразот $\sum_{k=1}^{2022}\binom{2022}{k}^2-\binom{4044}{2022}+2022$.

Одговор. 2021

Решение. За секој реален број x важи $(1+x)^{2n}=(1+x)^n\cdot(1+x)^n$. Биномниот коефициент пред x^n во развојот на $(1+x)^{2n}$ е еднаков на $\binom{2n}{n}$ Од друга страна, биномниот коефициенет пред x^i во развојот на биномот $(1+x)^n$ е еднаков на $\binom{n}{i}$ додека биномниот коефициент пред x^{n-i} во развојот на биномот $(1+x)^n$ е еднаков на $\binom{n}{n-i}=\binom{n}{i}$ Оттука следува дека биномниот коефициент пред x^n во развојот на $(1+x)^n(1+x)^n$ е еднаков на

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+....+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+...+\binom{n}{n}^2.$$

Оттука следува дека важи $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$ На крај лесно заклучуваме дека

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}=-\binom{n}{0}^2=-1\,.$$

17B. Нека x,y се позитивни реални броеви за кои важи

$$x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000\,.$$

Пресметај ја вредноста $x+y$.

Одговор. 10

Решение. Воведуваме смени $x+y=a,\ xy=b$. Добиваме дека

$$\begin{aligned}x^3+y^3+(x+y)^3+30xy&=(x+y)(x^2-xy+y^2)+(x+y)^3+30xy\\&=(x+y)((x+y)^2-3xy)+(x+y)^3+30xy=a(a^2-3b)+a^3+30b\\&=a^3-3ab+a^3+30b=2a^3-3ab+30b\end{aligned}$$

Од тука ја добиваме равенката $2a^3-3ab+30b=2000=2\cdot10^3$ која е еквивалентна со $3b(10-a)=2(10-a)(100+10a+a^2)$.

Ако $10-a\neq0$ следува дека важи $200+20a+2a^2=3b$ што не е можно, бидејќи $a^2=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2\geq4xy=4b$. Останува дека $10-a=0$ т.е. $x+y=10$.

Следните 3 задачи се бодуваат со 7 поени.

18A. Нека a,b и c се ненегативни реални броеви, при што најмалку два од броевите се ненулти и за броевите важи $a+b+c=ab+bc+ca$. Определи ја најмалата вредност на реалниот број k така што

$$(a+b+c)(\tfrac{1}{a+b}+\tfrac{1}{b+c}+\tfrac{1}{c+a}-k)\leq k.$$

Одговор. 1

Решение. Од $a+b+c=ab+bc+ca$, следува

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)+a+b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$=\frac{(a+b+c)^2+a+b+c}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc}=\frac{(a+b+c)(a+b+c+1)}{(a+b+c)^2-abc}.$$

Според тоа

$$(a+b+c)(\tfrac{1}{a+b}+\tfrac{1}{b+c}+\tfrac{1}{c+a}-k)=(a+b+c)(\frac{(a+b+c)(a+b+c+1)}{(a+b+c)^2-abc}-k)\leq k,$$

од каде добиваме

$$\frac{(a+b+c)^2(a+b+c+1)}{(a+b+c)^2-abc}-k(a+b+c)\leq k,$$

односно

$$\frac{(a+b+c)^2(a+b+c+1)}{(a+b+c)^2-abc}\leq k(a+b+c+1),$$

што е еквивалентно со $\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2-abc}\leq k$. Бидејќи $\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2-abc}\geq 1$, и притоа важи равенство кога $abc=0$, следува дека $k=1$ е најголемата можна вредност за k.

18B. Нека x,y и z се позитивни реални броеви. Најди ја најмалата вредност за изразот $(\frac{x}{y}+2)(\frac{y}{z}+2)(\frac{z}{x}+2)$.

Одговор. 27

Решение. Од неравенство меѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$(\tfrac{x}{y}+2)(\tfrac{y}{z}+2)(\tfrac{z}{x}+2)=\frac{x+y+y}{y}\cdot\frac{y+z+z}{z}\cdot\frac{z+x+x}{x}$$
$$\geq\frac{3\sqrt[3]{xy^2}\cdot 3\sqrt[3]{yz^2}\cdot 3\sqrt[3]{zx^2}}{xyz}=\frac{27\sqrt[3]{x^3y^3z^3}}{xyz}=27.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z$.

19АВ. При ротација со центар во точката M и агол α (во насока спротивна на насоката на стрелките на часовникот) точката $A(1,2)$ се пресликува во точката $A_1(6,5)$ додека точката $B(1,4)$ се пресликува во точката $B_1(4,5)$. Пресметај го збирот на координатите на точката M .

Одговор. 8

Решение. Јасно е дека $\overline{MA} = \overline{MA_1}$, односно точката M се наоѓа на симетралата на отсечката $\overline{AA_1}$. Значи, $(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-6)^2 + (y-5)^2$, од каде добиваме $5x + 3y = 28$. На сличен начин ја определуваме равенката на симетралата на страната на BB_1, и добиваме $3x + y = 12$. Го решаваме добиениот систем и наоѓаме $M(2,6)$. Бараниот збир е 8.

20АВ. Нека p е цел број. Познато е дека корените на равенката

$$x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0$$

се три последователни членови на аритметичка прогресија. Пресметај го збирот на корените на равенката.

Одговор. 6

Решение. Нека x_1, x_2 и x_3 се решенија на дадената равенка. Од Виетовите формули добиваме

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2p$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -p$$
$$x_1x_2x_3 = -10$$

Бидејќи x_1, x_2, x_3 се три последователни членови на аритметичка прогресија, земаме

$$x_1 = x - d, x_2 = x, x_3 = x + d.$$

Заменувајќи во горните равенки го добиваме системот

$$3x = -2p$$
$$(x-d)x + x(x+d) + (x+d)(x-d) = -p$$
$$(x-d)x(x+d) = -10$$

Од првата равенка добиваме $x = -\frac{2p}{3}$, додека од третата равенка добиваме $x^2 - d^2 = -\frac{10}{x} = \frac{15}{p}$. Од втората равенка добиваме

$$(x-d)x+x(x+d)+\frac{15}{p}=-p$$
$$2x^2+\frac{15}{p}+p=0$$
$$2\cdot\frac{4p^2}{9}+\frac{15}{p}+p=0$$
$$8p^3+9p^2+9\cdot 15=0.$$

Од последната равенка следува дека целиот број p е негативен и $9\,|\,p^3$. Притоа 9 не е делител на p, бидејќи тогаш треба и слободниот член да е делив со 9^3, што не е случај. Сега е јасно дека $p=-3$. Оттука, користејќи ја првата Виетова формула, заклучуваме дека $x_1+x_2+x_3=6$.