

Самоил Малчески
Скопје

НЕРАВЕНСТВО НА БЕРНУЛИ

Едно од најпознатите и често користените е неравенството кое во 1689 година го докажал швајцарскиот математичар Jacob Bernoulli, 1654-1705 и кое по него го добило името. Меѓутоа се смета дека ова неравенство му било познато и на Isaak Barrow, 1638-1677 (учителот на Isaac Newton). Исто така, Бернулиевото неравенство е тесно поврзано со неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

на позитивни реални броеви $a_1, a_2, \dots, a_n$, при што знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, за што посебно ќе стане збор во нашите разгледувања.

Во продолжение прво ќе го докажеме обопштеното неравенство на Бернули.

Теорема 1 (обопштено неравенство на Бернули). Ако $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ се ненулти реални броеви со ист знак, поголеми од -1 , тогаш

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n. \quad (1)$$

Знак за равенство важи ако и само ако $n = 1$.

Доказ. Неравенството (1) ќе го докажеме со математичка индукција по n .

За $n = 1$ имаме $1 + x_1 \geq 1 + x_1$, т.е. неравенството важи.

Нека претпоставиме дека за $n = k$ и произволни ненулти реални броеви $x_1, x_2, \dots, x_k$, со ист знак и поголеми од -1 важи

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k$$

Нека $n = k + 1$ и $x_i, i = 1, 2, \dots, k, k + 1$ се произволни реални броеви со ист знак, поголеми од -1 . Тогаш имаме

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)x_{k+1} \geq 0.$$

Од индуктивната претпоставка и последното неравенство добиваме:

$$\begin{aligned} (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) &\geq (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k)(1 + x_{k+1}) \\ &= 1 + x_1 + \dots + x_k + x_{k+1} + (x_1 + \dots + x_k)x_{k+1} \\ &\geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1}, \end{aligned}$$

т.е. неравенството (1) важи и за $n = k + 1$, па од принципот на математичка индукција добиваме дека тоа важи за секој $n \in \mathbb{N}$ и секои реални броеви $x_i > -1$, $i = 1, 2, \dots, n$ со ист знак.

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $n = 1$. ■

Пример 1. Докажи дека за секој природен број n поголем од 1 важи неравенството

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{8} \cdot \dots \cdot \frac{2^n + 1}{2^n} > 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Решение. Од неравенството (1) непосредно следува

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{8} \cdot \dots \cdot \frac{2^n + 1}{2^n} &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Пример 2. Нека x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ се ненегативни броеви такви што

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{1}{2}.$$

Докажи дека

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n) \geq \frac{1}{2}.$$

Решение. Од $0 \leq x_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ имаме $x_i > -1$, $i = 1, 2, \dots, n$, па од обопштеното неравенство на Бернули и неравенството $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{1}{2}$ следува

$$\begin{aligned} (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n) &\geq (1 + (-x_1))(1 + (-x_2)) \dots (1 + (-x_n)) \\ &= 1 + (-x_1 - x_2 - \dots - x_n) \\ &= 1 - (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ &\geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Пример 3. Нека $a_i \geq 1$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ се реални броеви. Докажи дека

$$\prod_{i=1}^n (1 + a_i) \geq \frac{2^n}{n+1} \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i\right).$$

Решение. Воведуваме замена $a_i = 1 + 2x_i, i = 1, 2, \dots, n$ со што даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\prod_{i=1}^n (2 + 2x_i) \geq \frac{2^n}{n+1} (1 + \sum_{i=1}^n (1 + 2x_i)),$$

$$2^n \prod_{i=1}^n (1 + x_i) \geq \frac{2^n}{n+1} (n+1 + 2 \sum_{i=1}^n x_i),$$

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i) \geq 1 + \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Според тоа, за да го докажеме даденото неравенство, доволно е да го докажеме последното неравенство. Но, за секој $n \geq 1$ важи $\frac{2}{n+1} \leq 1$, затоа од обопштено неравенство на Бернули следува

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i \geq 1 + \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n x_i,$$

што и требаше да се докаже. ■

Последица 1 (неравенство на Бернули). Ако $x > -1$, тогаш за секој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \quad (2)$$

Знак за равенство важи ако и само ако $n=1$ или $x=0$.

Доказ. *Прв начин.* Непосредно следува од теорема 1, ако во (1) ставиме $x_i = x, i = 1, 2, \dots, n$.

Втор начин. Ако $1+nx \leq 0$, тогаш неравенството (2) учигледно е исполнето. Нека $1+nx > 0$. Земаме $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 1$ и $a_n = 1+nx$ и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува неравенството

$$1+x = \frac{n-1+(1+nx)}{n} = \frac{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n} = \sqrt[n]{1+nx},$$

кое е еквивалентно со неравенството (2). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $n=1$ или $x=0$. ■

Пример 4. Докажи дека за секој $x > 0$ и за секој $n \in \mathbb{N}$ важи неравенството $1 + \frac{x}{n} \geq \sqrt[n]{1+nx}$.

Решение. За $x > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ имаме $\frac{x}{n} > -1$. Од неравенството на Бернули добиваме

$$(1 + \frac{x}{n})^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x, \text{ т.е. } 1 + \frac{x}{n} \geq \sqrt[n]{1+x}. \blacksquare$$

Пример 5. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$1 + \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3+1}{3}} + \sqrt[4]{\frac{4+1}{4}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} < n+1.$$

Решение. Од неравенството на Бернули следува дека за секој $k = 2, 3, \dots, n$ важи

$$(1 + \frac{1}{k^2})^k \geq 1 + k \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{k+1}{k}, \text{ т.е. } \sqrt[k]{\frac{k+1}{k}} \leq 1 + \frac{1}{k^2}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3+1}{3}} + \sqrt[4]{\frac{4+1}{4}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} &\leq 1 + (1 + \frac{1}{2^2}) + (1 + \frac{1}{3^2}) + \dots + (1 + \frac{1}{n^2}) \\ &= n + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}) \\ &< n + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= n + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) \\ &= n + 1 - \frac{1}{n} < n+1, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. $\blacksquare$

Пример 6. Нека $m, n \in \mathbb{N}$ се такви што $m \geq 2$ и $n \geq 2$. Докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1.$$

Решение. Од условот $m \geq 2$ и $n \geq 2$, имаме $\sqrt[n]{m} = 1 + u$, $\sqrt[m]{n} = 1 + v$, за некои $u, v > 0$. Сега од неравенството на Бернули добиваме

$$m = (1+u)^n \geq 1 + nu, \quad n = (1+v)^m \geq 1 + mv,$$

па затоа

$$m + n \geq 1 + n(u+1), \quad m + n \geq 1 + m(v+1),$$

т.е.

$$1 + u \leq \frac{m+n-1}{n}, \quad 1 + v \leq \frac{m+n-1}{m}.$$

Конечно, од последните две неравенства добиваме

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} = \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} \geq \frac{m}{m+n-1} + \frac{n}{m+n-1} = \frac{m+n}{m+n-1} > 1. \blacksquare$$

Пример 7. Нека $n \geq 2$ и $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^n ix_i \leq \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^n x_i^i.$$

Решение. Од $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ следува $x_i - 1 \geq -1, i = 1, 2, \dots, n$. Сега, од неравенството на Бернули добиваме

$$x_i^i = [1 + (x_i - 1)]^i \geq 1 + i(x_i - 1) = ix_i - (i - 1), i = 1, 2, \dots, n.$$

Ако ги собереме последните неравенства го добиваме неравенството

$$\sum_{i=1}^n x_i^i \geq \sum_{i=1}^n ix_i - \sum_{i=1}^n (i - 1) = \sum_{i=1}^n ix_i - \sum_{i=1}^{n-1} i = \sum_{i=1}^n ix_i - \frac{n(n-1)}{2},$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

Пример 8. Нека a и b се позитивни реални броеви такви што $b < a$ и нека n е природен број поголем од 1. Докажи го неравенството

$$a^n - b^n > n(a - b)b^{n-1}.$$

Решение. Од условот на задачата следува $\frac{a}{b} - 1 > 0$. Сега, ако во неравенството (2) ставиме $x = \frac{a}{b} - 1$, добиваме

$$(1 + \frac{a}{b} - 1)^n > 1 + n(\frac{a}{b} - 1),$$

$$a^n - b^n > n(a - b)b^{n-1},$$

што и требаше да се докаже. ■

Пример 9. Докажи дека за секој природен број $n > 1$ важи неравенството

$$n! < (\frac{n+1}{2})^n.$$

Решение. За $n = 2$ имаме $2! < (\frac{2+1}{2})^2$, т.е. неравенството е точно. Нека претпоставиме дека неравенството важи за некој природен број $n > 1$. Тогаш за природениот број $n + 1$ имаме:

$$(n + 1)! = (n + 1) \cdot n! < (n + 1)(\frac{n+1}{2})^n = 2 \cdot (\frac{n+2}{2})^{n+1} \cdot \frac{1}{(\frac{n+1}{2})^{n+1}}.$$

Понатаму, од неравенството на Бернули следува

$$(\frac{n+2}{n+1})^{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} > 1 + (n + 1) \cdot \frac{1}{n+1} = 2.$$

Сега, од последните две неравенства добиваме

$$(n + 1)! < 2 \cdot (\frac{n+2}{2})^{n+1} \cdot \frac{1}{2} = (\frac{n+2}{2})^{n+1},$$

што значи дека даденото неравенство важи и за $n + 1$.

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека неравенството важи за секој природен број n . ■

Претходно докажавме дека неравенството на (2) следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. Во продолжение со помош на неравенството (2) ќе го докажеме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина на произволни позитивни реални броеви.

Последица 2 (неравенство меѓу аритметичката и геометриската средина). За аритметичката и геометриската средина на произволни позитивни реални броеви $a_1, a_2, \dots, a_n$ важи

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad (3)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Доказ. Нека $A_i = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_i}{i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. За секој $i = 2, 3, \dots, n$ важи

$$\frac{A_i - A_{i-1}}{A_{i-1}} = \frac{A_i}{A_{i-1}} - 1 > -1,$$

па затоа од неравенството (2) следува дека за секој $i = 2, 3, \dots, n$ важи

$$\left(\frac{A_i}{A_{i-1}}\right)^i = \left(1 + \frac{A_i - A_{i-1}}{A_{i-1}}\right)^i \geq 1 + i \frac{A_i - A_{i-1}}{A_{i-1}} = i \frac{A_i}{A_{i-1}} - (i-1),$$

од што добиваме

$$A_i^i \geq A_{i-1}^i \left(i \frac{A_i}{A_{i-1}} - (i-1)\right) = A_{i-1}^{i-1} (i A_i - (i-1) A_{i-1}) = a_i A_{i-1}^{i-1}.$$

Конечно, од претходно неравенство следува неравенството

$$A_n^n \geq a_n A_{n-1}^{n-1} \geq a_n a_{n-1} A_{n-2}^{n-2} \geq \dots \geq a_n a_{n-1} \dots a_2 A_1^1 = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1,$$

кое е еквивалентно со неравенството (3). ■

Во теорема 1, т.е. во нејзината последица го докажавме наједноставниот облик на неравенството на Бернули. Во следната последица ќе презентираме поопшт облик на споменатото неравенство, во кој степеновиот показател е рационален број поголем или еднаков на 1.

Последица 3 (неравенство на Бернули). Ако $x > -1$ и $r \in \mathbb{Q}$, $r \geq 1$, тогаш

$$(1+x)^r \geq 1+rx.$$

Доказ. Нека $r = \frac{p}{q}$, $p \geq q$ и $\text{NZD}(p, q) = 1$. Ставаме

$$a_1 = a_2 = \dots = a_q = 1 + rx \text{ и } a_{q+1} = a_{q+2} = \dots = a_p = 1.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува:

$$\begin{aligned} 1 + x &= \frac{px + p}{p} = \frac{q + qrx + p - q}{p} \\ &= \frac{q(1 + rx) + (p - q)}{p} \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_q + a_{q+1} + \dots + a_p}{p} \\ &\geq (a_1 a_2 \dots a_q a_{q+1} \dots a_p)^{1/p} \\ &= ((1 + rx)^q)^{1/p} = (1 + rx)^{1/r}, \end{aligned}$$

т.е. $(1 + x)^r \geq 1 + rx$. ■

Во последица 3 презентиравме обопштување на неравенството на Бернули, во кое степеновиот показател е рационален број поголем или еднаков на 1. Во следната теорема ќе докажеме дека неравенството на Бернули важи и кога степеновиот показател е произволен реален број поголем или еднаков на 1. Притоа, за разлика од претходните разгледувања во кои користевме математичка индукција и елементарни знаења за неравенства, при доказот на овој облик на неравенството на Бернули ќе ја користиме теоремата на Коши.

Теорема 2 (неравенство на Бернули). Ако $x > -1$ и $\alpha \in [1, +\infty)$, тогаш

$$(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x, \quad (4)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\alpha = 1$ или $x = 0$.

Доказ. Јасно, за $\alpha = 1$ имаме $1 + x \geq 1 + x$, т.е. неравенството важи. Нека $\alpha > 1$. На интервалот $[0, x]$, $x > 0$ да ги разгледаме функциите

$$f(u) = (1 + u)^\alpha \text{ и } g(u) = \alpha u.$$

Тие се непрекинати на $[0, x]$, диференцијабилни на $(0, x)$ и $g'(u) = \alpha \neq 0$, за секој $u \in (0, x)$. Од теоремата на Коши следува дека постои $c \in (0, x)$ таков да

$$\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

т.е.

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x - 0} = \frac{\alpha(1+c)^{\alpha-1}}{\alpha} = (1+c)^{\alpha-1} \geq 1,$$

што значи дека точно е неравенството (4).

Ако $-1 < x < 0$, тогаш функциите

$$f(u) = (1+u)^\alpha \text{ и } g(u) = \alpha u$$

ги разгледуваме на интервалот $[x, 0]$. ■

Пример 10. Докажи дека за позитивни реални броеви $x_1, x_2, \dots, x_n$ помали од 1, важи неравенството

$$(1+x_1)^{\frac{1}{x_2}} (1+x_2)^{\frac{1}{x_3}} \dots (1+x_{n-1})^{\frac{1}{x_n}} (1+x_n)^{\frac{1}{x_1}} \geq 2^n$$

Решение. Од неравенството на Бернули и неравенството меѓу арит-метичката и геометриската средина последователно добиваме

$$\begin{aligned} (1+x_1)^{\frac{1}{x_2}} (1+x_2)^{\frac{1}{x_3}} \dots (1+x_{n-1})^{\frac{1}{x_n}} (1+x_n)^{\frac{1}{x_1}} &\geq \left(1+\frac{x_1}{x_2}\right) \left(1+\frac{x_2}{x_3}\right) \dots \left(1+\frac{x_{n-1}}{x_n}\right) \left(1+\frac{x_n}{x_1}\right) \\ &\geq 2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \cdot 2\sqrt{\frac{x_2}{x_3}} \cdot \dots \cdot 2\sqrt{\frac{x_{n-1}}{x_n}} \cdot 2\sqrt{\frac{x_n}{x_1}} \\ &= 2^n, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Пример 11. Ако $x > -1$ и $\alpha \in (0, 1)$, тогаш $1 + \alpha x \geq (1+x)^\alpha$. Докажи!

Решение. Од $\alpha \in (0, 1)$ следува $\frac{1}{\alpha} > 1$ и како $\alpha x > -\alpha > -1$, од теорема 2 следува

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \geq 1 + \frac{1}{\alpha} \alpha x = 1+x, \text{ т.е. } 1+\alpha x \geq (1+x)^\alpha. \blacksquare$$

Пример 12. Ако n е природен број поголем од 1 и $\alpha \in (-1, 0)$, тогаш важат неравенствата

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq n^\alpha \leq \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Докажи!

Решение. Имаме $1+\alpha \in (0, 1)$, $\frac{1}{n} > -1$ и $-\frac{1}{n} > -1$, па затоа од пример 11 следуваат неравенствата

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} \leq 1 + \frac{\alpha+1}{n} \text{ и } \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} \leq 1 - \frac{\alpha+1}{n}.$$

Ако овие неравенства ги помножиме со $n^{\alpha+1}$ добиваме

$$(n+1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1} + (\alpha+1)n^\alpha \text{ и } (n-1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1} - (\alpha+1)n^\alpha,$$

т.е.

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq n^{\alpha} \text{ и } n^{\alpha} \leq \frac{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \blacksquare$$

Пример 13. Докажи дека за $m, n \in \mathbb{N}$, $1 < m < n$ и $\alpha \in (-1, 0)$ важат не-
равенствата

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-m^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq m^{\alpha} + (m+1)^{\alpha} + \dots + n^{\alpha} \leq \frac{n^{\alpha+1}-(m-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Решение. Ако во пример 12 ги запишеме неравенствата за $m, m+1, \dots, n$ и истите ги собереме ги добиваме бараните неравенства. $\blacksquare$

Пример 14. Нека $a < 0$. Докажи дека $2^a + 2^{\frac{1}{a}} \leq 1$.

Решение. Да ставиме $b = -a$. Тогаш $b > 0$ и заради симетрија на бараното равенство можеме да сметаме дека $b > 1$.

Нека $b \geq 2$. Тогаш бидејќи $-2^a > -1$ од неравенството на Бернули и неравенството $2^b \geq 2b$ следува

$$(1 - 2^a)^b \geq 1 - 2^a b = 1 - \frac{b}{2^b} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

т.е.

$$1 - 2^a \geq 2^{-\frac{1}{b}} = 2^{\frac{1}{a}}.$$

Случајот кога $1 < b < 2$ се разгледува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. $\blacksquare$

На крајот, користејќи го неравенството на Бернули ќе докажеме дека низата $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$ е конвергентна. Имаме,

$$\begin{aligned} \frac{e_{n+1}}{e_n} &= \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{(\frac{n+2}{n+1})^{n+1}}{(\frac{n+1}{n})^n} \\ &= \frac{(n+2)^{n+1} n^n}{(n+1)^{2n+1}} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} \right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &> \left(1 + (n+1) \left(-\frac{1}{(n+1)^2} \right) \right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1, \end{aligned}$$

па затоа $e_{n+1} > e_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$, т.е. низата $\{e_n\}$ монотонно расте.

Понатаму, за низата $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ имаме

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+2}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}} \\ &= \frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} \\ &> \left(1 + (n+2) \cdot \frac{1}{n(n+2)}\right) \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = 1, \end{aligned}$$

па затоа $b_n > b_{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$, т.е. низата $\{b_n\}$ монотонно опаѓа. Затоа за секој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$e_n = (1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = b_n < b_1 = 4,$$

што значи дека низата $\{e_n\}$ е ограничена од горе.

Конечно, низата $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$ монотонно расте и е ограничена од горе, па затоа таа е конвергентна, т.е. постои

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Како што можеме да видиме, погоре користејќи го наједноставниот облик на неравенството на Бернули, го воведовме бројот e , т.е. ја воведовме една од најважните математички константи. Притоа, горната постапка ни овозможува да добиеме по желба добри апроксимации за бројот e . Така, на пример, ако земеме $n=100$ добиваме дека

$$(1 + \frac{1}{100})^{100} < e < (1 + \frac{1}{100})^{101}, \text{ т.е. } 2,70481383 < e < 2,73186197.$$

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

- Докажи дека за $a > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ важи $a^n + \frac{n}{a} \geq n+1$.
- Докажи дека за секој природен број $n > 1$ важи:
 - $(n+1)^{n-1}(n-1)^{n+1} < n^{2n} < (n-1)^{n-1}(n+1)^{n+1}$,
 - $n^{2n-1} < (n+1)^n(n-1)^{n-1}$,
 - $n^{3n+1} > (n+1)^{n+1}(n-1)^n$.

3. $3^n + 4^n + 5^n + \dots + (n+2)^n \leq (n+3)^n$.

4. Нека $k \in \mathbb{N}$. Докажи дека низата $\{a_n\}$ определена со

$$a_n = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

е ограничена.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publisher, Dodrecht, 1993
2. J. E. Pečarić, *Nejednakosti*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 1996
3. Р. Малчески, А. Малчески, Д. Велинов, С. Малчески, С. Костадинова, *Математички талент С7 (збирка задачи за IV година, прв дел)*, Армаганка, Скопје, 2019
4. Р. Малчески, *Елементарни алгебарски и аналитички неравенства* (второ издание), Армаганка, Скопје, 2019
5. Р. Малчески, *Математичка анализа 1* (второ издание), Армаганка, 2019

Статијата прв пат е објавена како

Samoil Malcheski - BERNOULLI'S INEQUALITY, Volume 33, Number 3, 2025, (48-57), Arhimed, Sofia