EVOLVENTA (JAMTK) 4(1) (2021), 38 – 46

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Vizualizacija vertikalnog kretanja opruge u Geogebri

Edis Mekić

JU Mješovita srednja škola Banovići

Sažetak: U ovom radu opisano je prosto i prigušeno harmonijsko kretanje. U drugom dijelu rada opisan je detaljan postupak izrade vizualizacije ovog kretanja u programu GeoGebra.

1. Prosto harmonijsko kretanje

Prosto harmonijsko kretanje je kretanje prostog harmonijskog oscilatora bez guranja i prigušenja. Ovo kretanje karakteriše amplituda (koja je uvijek pozitivna), period (vrijeme jedne oscilacije), frekvencija (recipročna vrijednost perioda, to jest broj perioda po jedinici vremena) i faza koja određuje početnu tačku kretanja. Period i frekvencija su konstante, određene cjelokupnim sistemom, dok su amplituda i faza određene početnim uslovima (pozicija i početna brzina) sistema. Ubrzanje tijela je direktno proporcionalno pomaku tijela od početne tačke (tačka ekvilibrijuma).

Opšta jednačina koja opisuje ovo kretanje je

$$y(t) = A\sin(2\pi ft + \phi), \tag{1}$$

gdje je y *pomak*, A *amplituda oscilovanja*, f *frekvencija*, t *vrijeme* i ϕ *faza oscilovanja.* Ako nema pomaka u trenutku $t = 0$, faza je $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Primjer prostog harmonijskog kretanja je kretanje oruge na čijem kraju je pričvršćeno neko tijelo. Ako je opruga neistegnuta, nema uticaja niti jedne sile na masu, sistem je u ekvilibrijumu. Međutim, ako se masa izmakne iz ekvilibrijuma opruga će se istegnuti, a povratna sila će nastojati da je vrati u poziciju ekvilibrijuma. U slučaju opruge ta sila je elastična i data je *Hookovim* [1)] *zakonom* $F = -k \cdot y$, gdje je F *povratna sila,* y je *pomak,* a k je *konstanta opruge.*

Bilo koji sistem podvrgnut prostom harmonijskom kretanju karakterišu dvije ključne osobine:

1. Kada je sistem izmaknut iz ekvilibrijuma tada mora postojati povratna sila koja nastoji da ga vrati u poziciju ekvilibrijuma.
2. Povratna sila mora biti proporcionalna pomaku.

Opruga na čijem kraju je pričvršćena masa zadovoljava ove dvije osobine. Sve dok sistem ne izgubi energiju tijelo će neprekidno oscilovati, zbog toga je ovo kretanje periodično.

Ciljna skupina: Visoko obrazovanje i srednja škola
Ključne riječi: harmonijsko kretanje, diferencijalne jednačine
Kategorizacija: Stručni rad
Rad preuzet: januar 2021.

[1)] Robert Hooke (1635. - 1703.), britanski fizičar, matematičar i izumitelj.

2. Matematički model

Prosto harmonijsko kretanje definisano je diferencijalnom jednačinom

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky, \tag{2}$$

gdje je k pozitivna konstanta, m *masa tijela* i y *pomak* od početne pozicije. U slučaju opruge, k je *konstanta opruge.* Ako je k pozitivna konstanta, rješenje je sinusna funkcija, što jednostavno možemo provjeriti jer je drugi izvod od $\sin x$ jednak $-\sin x$, a ove funkcije zadovoljavaju jednačinu (2).

Koristeći *ugaonu frekvenciju* definisanu sa

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}\ ,$$

dobijamo da je pomak

$$y(t) = A\sin(\omega t + \phi). \tag{3}$$

Nakon diferenciranja po t dobijamo izraz za *brzinu*

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi). \tag{4}$$

Ako još jednom diferenciramo dobijamo izraz za *ubrzanje*

$$a(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi). \tag{5}$$

Iz (3) i (5) slijedi

$$a(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\omega^2 y\ ,$$

što je ekvivalnetno sa

$$a(t) = -(2\pi f)^2 y(t).$$

Iz (2) dobijamo $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$.

Ukupna energija neprigušenog oscilatora jednaka je sumi kinetičke i potencijalne energije. *Kinetička energija* je data sa

$$E_k = \frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi),$$

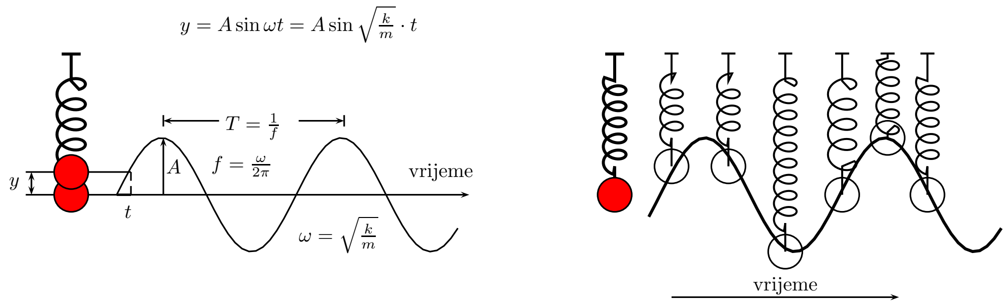
a *potencijalna energija* je

$$E_p = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi),$$

iz čega dobijamo da ukupna energija sistema ima konstantnu vrijednost

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2,$$

to jest vrijedi *zakon očuvanja energije.*



Slika 1: Prosto harmonijsko kretanje

Kretanje mase pričvršćene na kraju opruge potpuno je određeno sa konstantom opruge k i masom m. Iskoristimo li Hookov zakon i ako zanemarimo prigušenje i masu opruge, primjenom drugog Newtonovog zakona dobijamo jednačinu kretanja,

$$mg - ky = ma \iff mg - ky = m\frac{d^2y}{dt^2} \iff m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = mg. \tag{6}$$

Odgovarajuća homogena jednačina je data sa

$$my''(t) + ky(t) = 0.$$

Karakteristična jednačina gornje homogene jednačine se dobije traženjem rješenja u obliku $y(t) = e^{\lambda t}$ i ona glasi

$$m\lambda^2 + k = 0\ .$$

Rješenja karakteristične jednačine su $\lambda = \pm i\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, a to daje dva linearno nezavisna rješenja homogene jednačine,

$$y(t) = \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\quad \text{i}\quad y(t) = \sin\sqrt{\frac{k}{m}},$$

čime je određeno homogeno rješenje y_h polazne jednačine kretanja,

$$y_h(t) = C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t.$$

Zbog oblika funkcije na desnoj strani jednačine (6), partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p = A_1 t + A_2$, gdje su A_1 i A_2 nepoznate realne konstante koje određujemo metodom jednakoh koeficijenata. Kako je $y_p'' = 0$, stavljajući to u jednačinu (6), dobijamo da je $A_1 = 0$ i $A_2 = \dfrac{mg}{k}$. Dakle, partikularno rješenje jednačine kretanja (6) je

$$y_p = \frac{mg}{k}.$$

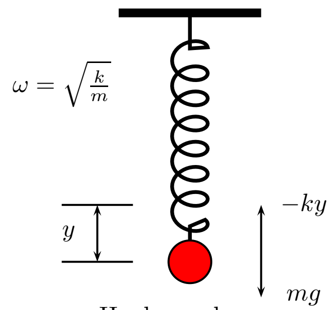
Generalno rješenje polazne jednačine je $y = y_h + y_p$ i glasi

$$y(t) = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + \frac{mg}{k}.$$

Ovo rješenje možemo zapisati u sljedećem obliku

$$y(t) = A\sin(\omega t - \phi) + B,$$

gdje je $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ i $B = \dfrac{mg}{k}$. Konstanta B predstavlja koliko se opruga istegne zbog težine tijela.



Hookov zakon
$F_{opruge} = -ky$

Vizualizacija ovog kretanja se može pogledati na linku `https://www.geogebra.org/m/h9kczy8j`.

3. Prigušeno harmonijsko kretanje

Trenje ili prigušenje znatno usporava kretanje. U mnogim oscilatornim sistemima sila trenja F_t je proporcionalna brzini v, to jest $F_t = -cv$, gdje je c koeficijent prigušenja izražen u $\dfrac{Ns}{m}$.

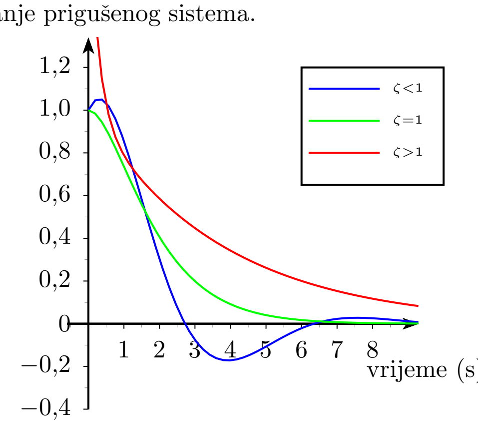
Općenito, prigušeno harmonijsko kretanje zadovoljava jednačinu

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_0\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0, \tag{7}$$

gdje je ω_0 neprigušena *ugaona frekvencija* oscilatora i ζ nezavisna konstanta sistema koju nazivamo *omjer prigušenja.* (Za masu pričvršćenu za oprugu imamo konstantu opruge k i konstantu prigušenja c, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ i $\zeta = \dfrac{c}{2m\omega_0}$.)

Vrijednost omjera prigušenja ζ znatno utiče na ponašanje prigušenog sistema.

1. Kada je $\zeta > 1$, opruga eksponencijonalno opada ka poziciji mirovanja, bez oscilovanja. Veće vrijednosti omjera prigušenja ζ utiču na sporije kretanje opruge. Rješenje jednačine (7) za $\zeta = 2$ i $\omega_0 = 1$ je $y_H(t) = e^{-2t}\left(c_1 e^{t\sqrt{3}} + c_2 e^{-t\sqrt{3}}\right)$.
2. Kada je $\zeta = 1$, opruga se vraća u poziciju mirovanja veoma brzo. Rješenje jednačine (7) za $\zeta = 1$ i $\omega_0 = 1$ je $y_H(t) = e^{-t}(c_1 + c_2 t)$.
3. Kada je $\zeta < 1$, opruga osciluje (sa malo drugačijom frekvencijom nego u neprigušenom slučaju) i amplitudom koja postepeno opada ka nuli. Rješenje jednačine (7) za $\zeta = \frac{1}{2}$ i $\omega_0 = 1$ je $y_H(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(c_1\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + c_2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right)$. Frekvencija oscilovanja u slučaju ($\zeta < 1$) je $\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$.



Vizualizacija ovog kretanja se može pogledati na linku `https://www.geogebra.org/m/sgrnkkaz`.

4. Izrada vizualizacije u GeoGebri

Prosto harmonijsko kretanje (opruga bez prigušenja)

1. Isključiti koordinatnu mrežu, a osi x omogućiti prikazivanje samo pozitivnog dijela, uz jediničnu duž π. Omogućiti prikazivanje y ose od -60 do 65.
2. Primjenom alata **Klizač** definisati klizač A u intervalu $[0, 20]$, sa korakom 1 i klizač ω_1 u intervalu $[1, 10]$ sa korakom 1. Promijeniti naslov klizaču ω_1 u Ugaona brzina (za m=0) i omogućiti prikazivanje samo naslova.
3. Primjenom alata **Klizač** definisati klizač γ u intervalu $[0, 360°]$ sa korakom 0.01, te mu promijeniti naslov u t i omogućiti prikazivanje samo naslova. Dobijenom klizaču isključiti vidljivost.
4. Primjenom alata **Klizač** definisati klizač m u intervalu $[0, 5]$ sa korakom 1, koji će nam predstvaljati masu. Dobijenom klizaču isključiti vidljivost.
5. Primjenom alata **Tekst polje** definisati teskt polje koje ćemo povezati sa klizačem m. Tekst polju promijeniti naslov u Masa, te postaviti stil dužina tekst polja 2.
6. Primjenom alata **Klizač** definisati klizač k u intervalu $[1, 5]$ sa korakom 1, koji će nam predstvaljati koeficijent opruge. Dobijenom klizaču isključiti vidljivost.
7. Primjenom alata **Tekst polje** definisati teskt polje koje ćemo povezati sa klizačem k. Tekst polju promijeniti naslov u Koeficijent opruge, te postaviti stil dužina tekst polja 2.
8. U traci za unos konstruisati duž d, naredbom

   d=Duž((-9, 63), (-7, 63)).

   Dobijenoj duži isklučiti oznaku i debljinu linije postaviti na 11.
9. U traci za unos konstruisati tačku A_1, naredbom

   $\mathbf{A_1}$**=(-8, 63)**.

   Dobijenoj tački isključiti oznaku i veličinu tačke postaviti na 5.
10. U traci za unos definisati ugaonu brzinu $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, naredbom

    $$\omega = \mathbf{sqrt(k/m)}.$$
11. U traci za unos konstruisati funkciju

    $$\mathbf{f(x) = Ako(m \geq 1, Asin(\omega x) - m9.81/k, Asin(\omega_1 x) - m9.81/k)}.$$

    Isključiti vidljivost grafika ove funkcije.
12. U traci za unos konstruisati funkciju naredbom

    $$\mathbf{p(x) = Funkcija(f(x), 0, \gamma)}.$$

    Odabrati crvenu boju grafika.
13. U traci za unos definisati broj

    $$\mathbf{m_1 = 10k},$$

    koji predstavlja broj navoja opruge.
14. U traci za unos napravimo vizualizaciju opruge sljedećom naredbom

    $$l_1 = \mathbf{Niz}(\mathbf{Duž}((-8 + (-1)^n 0.5, 63 + ((f(\gamma) - 63)n)/m_1), (-8 + (-1)^{(n+1)} 0.5, 63 + ((f(\gamma) - 63)(n+1))/m)), n, 1, m - 2).$$

    U dijelu napredne postavke omogućiti prikazivanje dobijenih duži samo ako je $k \leq 2 \wedge m \neq 0$, debljina linije 9.

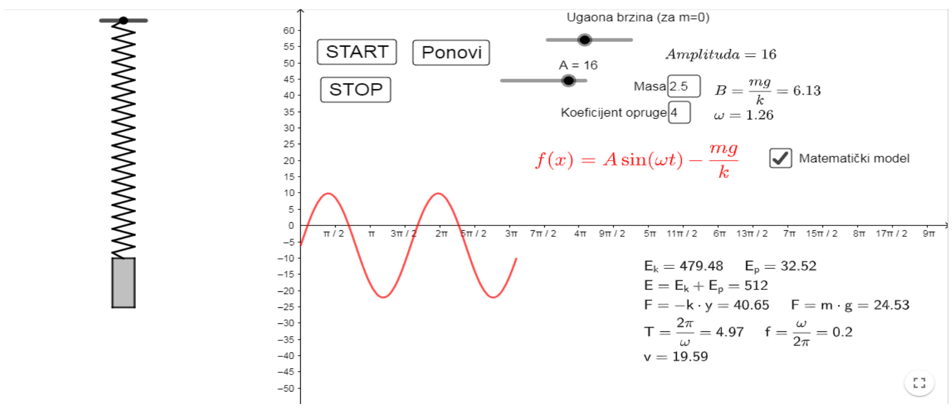
    $$l_2 = \mathbf{Niz}(\mathbf{Duž}((-8 + (-1)^n 0.5, 63 + ((f(\gamma) - 63)n)/m_1), (-8 + (-1)^{(n+1)} 0.5, 63 + ((f(\gamma) - 63)(n+1))/m)), n, 1, m - 2).$$

    U dijelu napredne postavke omogućiti prikazivanje dobijenih duži samo ako je $m \neq 0$.

15. Zatim dobijene duži spojimo sa tačkom A_1 naredbom
$$l_4 = \mathbf{Niz}(\mathbf{Duž}(A, (-8 + (-1)^n 0.5, 63 + ((f(\gamma) - 63)n)/m)), n, 1, 1).$$
U dijelu napredne postavke omogućiti prikazivanje dobijenih duži samo ako je $m \neq 0$. I
$$l_5 = \mathbf{Niz}(\mathbf{Duž}(A, (-8 + (-1)^n 0.5, 63 + ((f(\gamma) - 63)n)/m)), n, 1, 1).$$
U dijelu napredne postavke omogućiti prikazivanje dobijenih duži samo ako je $k \leq 2 \wedge m \neq 0$, debljina linije 9.
16. Definisati tačku
$$\mathbf{B} = (-\mathbf{8}, \mathbf{f}(\gamma)),$$
crvene boje. Isključiti vidljivost dobijene tačke.
17. U traci za unos konstruišimo pravougaonik koji će vizualizirati masu pričvršćenu na oprugu, naredbom
$$\mathbf{Mnogougao}((-8.5, f(\gamma) + 0.1), (-7.5, f(\gamma) + 0.1), (-7.5, f(\gamma) - 6m), (-8.5, f(\gamma) - 6m)).$$
Dobijenom pravougaoniku isključiti oznake stranica, boja crna i neprovidnost boje postaviti na 25.
18. Naredbom
$$l_3 = \mathbf{Niz}(\mathbf{Duž}(B, (-8 + (-1)^n 0.5, 63 + ((f(\gamma) - 63)n)/m_1)), n, m_1 - 1, m_1 - 1),$$
spojimo dobijeni pravougaonik sa oprugom. U dijelu napredne postavke omogućiti prikazivanje dobijenih duži samo ako je $m \neq 0$.
Naredbom
$$l_6 = \mathbf{Niz}(\mathbf{Duž}(B, (-8 + (-1)^n 0.5, 63 + ((f(\gamma) - 63)n)/m_1)), n, m_1 - 1, m_1 - 1),$$
spojimo dobijeni pravougaonik sa oprugom. U dijelu napredne postavke omogućiti prikazivanje dobijenih duži samo ako je $k \leq 2 \wedge m \neq 0$, debljina linije 9.
19. U traci za unos napravimo vizualizaciju opruge ako je masa $m = 0$, sljedećom naredbom
$$l_7 = \mathbf{Niz}(\mathbf{Duž}((-8 + (-1)^n 0.5, 63 + ((f(\gamma) - 63)n)/50), (-8 + (-1)^(n + 1)0.5, 63 + ((f(\gamma) - 63)(n + 1))/50)), n, 1, 50 - 2).$$
U dijelu napredne postavke omogućiti prikazivanje dobijenih duži samo ako je $m = 0$.
20. Zatim dobijene duži spojimo sa tačkom A_1 naredbom
$$l_8 = \mathbf{Niz}(\mathbf{Duž}(A_1, (-8 + (-1)^n 0.5, 63 + ((f(\gamma) - 63)n)/50)), n, 1, 1).$$
U dijelu napredne postavke omogućiti prikazivanje dobijenih duži samo ako je $m = 0$.
21. Naredbom
$$l_9 = \mathbf{Niz}(\mathbf{Duž}(B, (-8 + (-1)^n 0.5, 63 + ((f(\gamma) - 63)n)/50)), n, 50 - 1, 50 - 1),$$
spojimo dobijeni pravougaonik sa oprugom. U dijelu napredne postavke omogućiti prikazivanje dobijenih duži samo ako je $m = 0$.
22. Primjenom alata **Tekst** kreirati tekst 1 $f(x) = A\sin(\omega x) - \frac{mg}{k}$, boja teksta crvena.
23. Primjenom alata **Tekst** kreirati tekst 2 $Amplituda = A$.
24. Primjenom alata **Tekst** kreirati tekst 3 i tekst 4 u kojima se prikazuju vrijednosti svih elemenata prostog harmonijskog kretanja, koji se prikazuju ako je $m > 0$. Primjenom alata **Okvir za izbor** ”Matematički model” omogućiti prikazivanje teksta 3 i teksta 4.
25. Primjenom alata **Tekst** kreirati tekst 5 u kojima se prikazuju vrijednosti svih elemenata prostog harmonijskog kretanja, za $m = 0$. Primjenom alata **Okvir za izbor** ”Matematički model” omogućiti prikazivanje teksta 5.

26. Primjenom alata **Dugme** kreirati dugme sa naslovom START, zatim u dijelu GeoGebra Script upisati **StartAnimacije**(γ, **true**).
27. Primjenom alata **Dugme** kreirati dugme sa naslovom STOP, zatim u dijelu GeoGebra Script upisati **StartAnimacije**(γ, **false**).
28. Primjenom alata **Dugme** kreirati dugme sa naslovom Ponovi, zatim u dijelu GeoGebra Script upisati **PostaviVrijednost**(γ, **0**).

`https://www.geogebra.org/m/h9kczy8j`



Slika 2: Prosto harmonijsko kretanje (opruga bez prigušenja)

Prigušeno harmonijsko kretanje (opruga sa prigušenjem)

1. Isključiti koordinatnu mrežu, a osi x omogućiti prikazivanje samo pozitivnog dijela, x osu postaviti do 24, a y osu od -4 do 8.5
2. Primjenom alata **Klizač** definisati klizač m u intervalu $[0,5]$ sa korakom 1, koji će nam predstvaljati masu pričvršćenu za orpugu.
3. Primjenom alata **Klizač** definisati klizač k u intervalu $[1,5]$ sa korakom 1, koji će nam predstvaljati koeficijent orpuge.
4. Primjenom alata **Klizač** definisati klizač c u intervalu $[0,5]$ sa korakom 1, koji će nam predstvaljati konstantu prigušenja. Promijeniti naslov klizaču u konstanta prigušenja.
5. Primjenom alata **Klizač** definisati klizač m_1 u intervalu $[2,50]$ sa korakom 1, koji će nam predstvaljati broj "navoja" opruge. Naslov klizača promijeniti u "broj navoja," omogućiti prikazivanje naslov i vrijednost.
6. Primjenom alata **Klizač** definisati klizač t u intervalu $[0,12]$ sa korakom 0.01. Isključiti vidljivost klizaču.
7. U traci za unos konstruisati duž h, naredbom

$$h = \mathbf{Du\check{z}}((-4.5,8),(-3.5,8)).$$

   Debljina linije 11, ukloniti oznaku duži.
8. U traci za unos konstruisati tačku A, naredbom

$$\mathbf{A} = (\mathbf{-4},\mathbf{8}).$$

   Veličinu tačke postaviti na 6 i ukloniti oznaku tačke.

9. U traci za unos definisati brojeve $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, naredbom

$$\mathbf{sqrt}(k/m)$$

i $\zeta = \dfrac{c}{2m\omega_0}$, naredbom

$$\zeta = \mathbf{2}/(\mathbf{2m}\omega_\mathbf{0}).$$

10. Otvoriti CAS prikaz i riješiti diferencijalnu jednačinu naredbom

$$q := \mathbf{Rije\check{s}iDifJnu}(y'' + 2\zeta\omega_0 y' + \omega_0^2 y = 0, (0,7), (0,0)).$$

Isključiti vidljivost dobijenom grafiku.

11. U traci za unos konstruisati funkciju naredbom

$$p(x) = \mathbf{Funkcija}(q(x), 0, t).$$

12. U traci za unos napravimo vizualizaciju opruge sljedećom naredbom

$$l_1 = \mathbf{Niz}(\mathbf{Du\check{z}}((-4 + (-1)^n 0.3, 8 + ((p(t) - 8)n)/m_1), (-4 + (-1)^{n+1} 0.3, 8 + ((p(t) - 8)(n+1))m_1)), n, 1, m_1 - 2).$$

13. Zatim dobijene duži spojimo sa tačkom A naredbom

$$l_2 = \mathbf{Niz}(\mathbf{Du\check{z}}(A, (-4 + (-1)^n 0.3, 8 + ((p(t) - 8)n)/m_1)), n, 1, 1).$$

14. U traci za unos kreiramo tačku

$$\mathbf{B} = (-\mathbf{4}, \mathbf{p}(\mathbf{t})).$$

Isključiti vidljivost dobijene tačke.

15. Naredbom

$$l_3 = \mathbf{Niz}(\mathbf{Du\check{z}}(B, (-4 + (-1)^n 0.3, 8 + ((p(t) - 8)n)/m_1)), n, m_1 - 1, m_1 - 1),$$

spojimo tačku B sa oprugom.

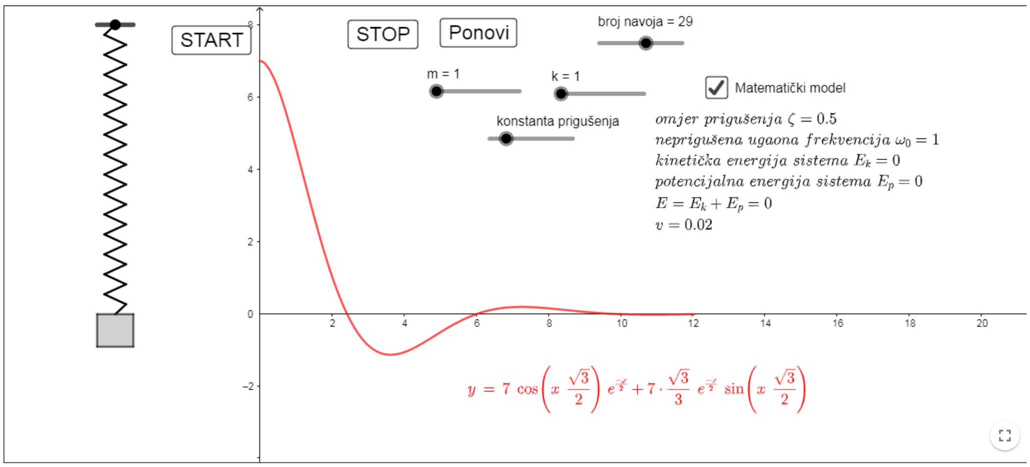
16. U traci za unos naredbom

$$\mathbf{Mnogougao}((-4.5, p(t) - 0.9m), (-3.5, p(t) - 0.9m), (-3.5, p(t)), (-4.5, p(t))),$$

konstruisati pravougaonik koji predstavlja masu pričvršćenu za oprugu.

17. Primjenom alata **Tekst** kreirati tekst 1, koji prikazuje krivu koja opisuje kretanje, crvene boje.
18. Primjenom alata **Tekst** kreirati tekst 2, u kojem se prikazuju svi elementi prigušenog kretanja. Primjenom alata **Okvir za izbor** Matematički model omogućiti prikazivanje i uklanjanje teksta 2.
19. Primjenom alata **Dugme** kreirati dugme sa naslovom START, zatim u dijelu GeoGebra Script upisati **StartAnimacije(t, true).**
20. Primjenom alata **Dugme** kreirati dugme sa naslovom STOP, zatim u dijelu GeoGebra Script upisati **StartAnimacije(t, false).**
21. Primjenom alata **Dugme** kreirati dugme sa naslovom Ponovi, zatim u dijelu GeoGebra Script upisati **PostaviVrijednost(t,0).**

`https://www.geogebra.org/m/sgrnkkaz`



Slika 3: Prigušeno harmonijsko kretanje (opruga sa prigušenjem)

Literatura

[1] $https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_oscillator$

[2] Ž. Topolac: *Fizika,* IRO "Građevinska knjiga" Beograd, 1989.

[3] E. Mihal, I. Ljubojević: *Oscilacije i periodično kretanje,* 2013.