

Случайные графы Эрдеша-Ренъи и задача изоморфизма графов

А.М. Райгородский, М. Тихомиров, А. Голованов

1 Блок 1

1.1 Случайный граф Эрдеша-Ренъи

Определение. Граф $G = (V, E)$ состоит из множества вершин V и множества ребер E , где под ребром мы понимаем неупорядоченную пару различных вершин. Легко видеть, что в графе может быть максимум $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ребер.

Определение. Зафиксируем $p \in (0, 1)$ и назовем вероятностью графа (в модели, или в вероятностном пространстве, Эрдеша-Ренъи) с n вершинами $\{1, 2, \dots, n\}$ и e рёбрами число $P(G) = P_p(G) := p^e(1-p)^{\frac{n(n-1)}{2}-e}$. Вероятностью семейства (или, что то же самое, свойства) графов с вершинами $1, 2, \dots, n$ называется сумма вероятностей входящих в него графов.

Если Ω — множество всех графов с n вершинами, то $P(\Omega) = 1$.

При вышеприведенном формальном определении это теорема. Вот ее доказательство:

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} \binom{\binom{n}{2}}{k} p^k (1-p)^{\binom{n}{2}-k} = (p + (1-p))^{\binom{n}{2}} = 1.$$

Определение. Случайной величиной называется функция, определённая на множестве графов с вершинами $1, 2, \dots, n$.

Например, количество рёбер графа — случайная величина.

Пусть случайная величина Y принимает k различных значений y_1, \dots, y_k . Тогда

Определение. математическим ожиданием (мат. ожиданием) случайной величины Y называется её «взвешенное среднее»

$$\mathbb{E}Y := \sum_{s=1}^k y_s P(Y^{-1}(y_s)),$$

где $Y^{-1}(y_s)$ — множество всех графов G , для которых $Y(G) = y_s$. Последнюю вероятность обозначают $P(Y = y_s)$.

Определение. Два случайных события A и B называются независимыми, если $P(A \cap B)$ (вероятность одновременного наступления A и B) $= P(A) \cdot P(B)$ (произведение вероятностей A и B). Случайные величины f и g независимы, если события $f = x$ и $g = y$ независимы для всех x и y . *Комментарий: это определение справедливо только для дискретных случайных величин, то есть принимающих не более чем счетное число значений.*

Задача 1. Пусть граф H состоит из n вершин и t ребер. Какова вероятность, что $G(n, p) = H$, т.е. при генерации случайного графа согласно определению выше получится в точности граф H ?

Задача 2. Какова вероятность, что в графе $G(n, p)$ будет ровно t ребер?

Задача 3. Какова вероятность, что в графе $G(n, p)$ не будет изолированных вершин (т.е. вершин, не соединенных ребром ни с какой другой вершиной)?

Пусть случайная величина f принимает численные значения, и вероятность того, что $f = x$ равна p_x . *Матожиданием* (также *матожиданием* или *средним значением*) f называется число $\sum_x x \cdot p_x$. Будем обозначать матожидание величины f как Ef .

Задача 4. Докажите формулы:

- a) $E[c \cdot f] = c \cdot Ef$, если c — константа;
- b) $E[f + g] = Ef + Eg$ (в том числе и для зависимых f и g !);
- c) если f и g независимы, то $E[f \cdot g] = Ef \cdot Eg$;

Задача 5. Найдите матожидание следующих величин:

- a) число ребер графа $G(n, p)$;
- b) степень вершины $G(n, p)$ (поскольку определение $G(n, p)$ симметрично, то выбор конкретной вершины неважен);
- c) количество треугольников в $G(n, p)$;
- d) количество гамильтоновых путей и циклов в $G(n, p)$ (гамильтонов путь/цикл — путь/цикл, проходящий через каждую вершину ровно один раз);
- e) клик (полных подграфов) на k вершинах.

Определение. *Дисперсией* Df случайной величины f называют величину $E[(f - Ef)^2]$.

Задача 6. Докажите формулы:

- a) $D[c \cdot f] = c^2 \cdot Df$, если c — константа;
- b) $Df = E[f^2] - (Ef)^2$;
- c) если f и g независимы, то $D[f + g] = Df + Dg$.

Задача 7. Найдите дисперсию степени вершины $G(n, p)$.

Задача 8. Найдите дисперсию числа треугольников $G(n, p)$ (будьте аккуратны с независимостью случайных величин!).

1.2 Алгоритмы на графах и их сложность

Пусть у нас есть описание некоторого графа и мы хотим проверить какое-то его свойство, например, связность. Воспользуемся следующим алгоритмом:

Обход в глубину (DFS, depth-first search).

процедура `dfs(вершина v)`:

```
usedv := 1
для каждой вершины  $u$  — соседа  $v$ :
    если usedu = 0, запустить dfs( $u$ )
```

функция `is_connected(граф G)`:

```
usedv = 0 для всех вершин  $v$ 
dfs(произвольная вершина  $G$ )
если usedv = 1 для всех вершин  $v \in G$ , вернуть ДА
иначе вернуть НЕТ
```

Описание алгоритма приведено в формате псевдокода. Для лучшего понимания того, как работает алгоритм, рекомендуется проэмулировать работу этого кода мысленно или на бумаге на некоторых несложных входных данных. Обратите внимание, что процедура `dfs` является рекурсивной, т.е. ее запуски могут вкладываться друг в друга, при этом завершение одного запуска возвращает работу программы в предыдущий.

Задача 9. Докажите, что данный алгоритм верно проверяет граф на связность.

Задача 10. Докажите, что данный алгоритм совершают $O(n+m)$ действий (т.е. не более $c(n+m)$ для некоторой константы c , не зависящей от входного графа) на графе с n вершинами и m ребрами.

Задача 11. Модифицируйте данный алгоритм для поиска количества компонент связности.

Определение. *Мостом* в графе G будем называть ребро, удаление которого приводит к увеличению количества компонент связности.

Задача 12. Постройте алгоритм, по описанию графа определяющий все его мосты, количества действий которого составляет:

- a) $O((n+m)^2)$;
- b) $O(n(n+m))$;
- c) (*) $O(n+m)$.

Рассмотрим другой метод для той же задачи:

Поиск в ширину (bfs, breadth-first search). Псевдокод:

процедура $bfs(\text{вершина } v)$:

```

queue = {v} // очередь вершин
usedv := 1
пока queue ≠ ∅:
    вершина w = начало queue
    удалить w из начала queue
    для каждой вершины u - соседа w:
        если usedu = 0:
            usedu = 1
            добавить u в конец queue

```

функция $is_connected(\text{граф } G)$:

```

usedv = 0 для всех вершин v // used имеет размер n
bfs(произвольная вершина G)
если usedv = 1 для всех вершин  $v \in G$ , вернуть ДА
иначе вернуть НЕТ

```

Задача 13. Докажите, что алгоритм корректен, и найдите асимптотику времени его работы.

Задача 14. Модифицируйте алгоритм для поиска длин кратчайших путей от выбранной вершины v до всех остальных.

Задача 15. Пусть для каждого ребра e графа G определена его *длина* — неотрицательное число $w(e)$. Постройте алгоритм, находящий длины кратчайших путей от выбранной вершины v до всех остальных со временем работы:

- a) $O(n^2 + m)$;
- b) (*) $O(n + m \log n)$.

1.3 Задача об изоморфизме графов

Определение. Графы $G = (V_G, E_G)$ и $H = (V_H, E_H)$ называются *изоморфными*, если существует биекция $\pi : V_G \rightarrow V_H$, такая что неупорядоченная пара вершин vu присутствует в E_G тогда и только тогда, когда пара $\pi(v)\pi(u)$ присутствует в E_H . π называется *изоморфизмом* графов G и H .

Задача 16. Нарисуйте все попарно неизоморфные графы с 3 и 4 вершинами.

Определение. Будем называть *инвариантом* функцию f , сопоставляющую каждому графу G некоторое значение $f(G)$, такую что $f(G) = f(H)$ для любой пары изоморфных графов G и H . Очевидно, что из $f(G) \neq f(H)$ следует, что G и H неизоморфны, однако обратное может быть неверно (т.е. $f(G) = f(H)$ может выполняться и для неизоморфных графов).

Определение. Определим *лексикографическое* или *алфавитное сравнение* двух последовательностей следующим образом:

- пустая последовательность меньше любой непустой последовательности;
- если первый элемент последовательности A меньше первого элемента последовательности B , то $A < B$;
- если первые элементы последовательностей A и B совпадают, отбросим их и вернем результат сравнения остатков.

Задача 17. Для каждой из следующих характеристик графа покажите, что она является инвариантом, а также предъявите пару неизоморфных графов, у которых данная характеристика совпадает:

- упорядоченный по возрастанию список степеней вершин графа;
- лексикографически упорядоченный список, содержащий упорядоченные списки степеней соседей для каждой вершины v ;
- лексикографически упорядоченный список, содержащий упорядоченные списки кратчайших расстояний от каждой вершины v до всех остальных вершин графа.

Задача 18.

- Предъявите граф $G = (V_G, E_G)$ с двумя или более вершинами, для которого существует ровно один изоморфизм с самим собой $\pi : V_G \rightarrow V_G$ — тождественное отображение (изоморфизм графа с самим собой также называют *автоморфизмом* графа).
- (*) Предъявите граф, удовлетворяющий предыдущему пункту, степени всех вершин которого одинаковы.

На данный момент неизвестно ни одного алгоритма, который проверял бы два данных графа на изоморфизм за время, полиномиальное от количества вершин и ребер данных графов. Наилучший результат принадлежит Ласло Бабаи, в 2015 году опубликовавшему (с исправлениями от 2017 года) алгоритм, имеющий время работы $O(e^{(\log n)^c})$ для некоторой константы $c > 1$. Однако, существуют быстрые алгоритмы для проверки изоморфизма графов в ряде частных случаев.

Задача 19. Предъявите алгоритм, проверяющий изоморфизм графов за время $O(n + m)$ в следующих случаях:

- степени вершин графов не превосходят 2;
- графы не содержат циклов;
- (*) каждый из графов содержит ровно один простой цикл.

Если предполагать, что входные графы для задачи изоморфизма сгенерированы случайно, можно пытаться пользоваться простыми алгоритмами для проверки их изоморфизма и оценивать вероятность того, что они могут сработать неправильно. Наша цель — проанализировать вероятность отказа следующего простого алгоритма:

функция `invariant(граф G):`

```
для каждой вершины v графа G:
    построить l_v - упорядоченный список степеней соседей v
    если среди l_v есть одинаковые списки, вернуть ОТКАЗ
    иначе вернуть лексикографически отсортированный набор l_v
```

функция `are_isomorphic(графы G, H):`

```
если invariant(G) или invariant(H) вернул ОТКАЗ, вернуть ОТКАЗ
иначе вернуть invariant(G) = invariant(H)
```

Задача 20. Опишите способ реализации данного алгоритма за время $O(n + m)$.

Задача 21. Рассмотрим пару вершин a и b . Докажите, что $l_a = l_b$ тогда и только тогда, когда после удаления a и b из графа набор степеней бывших соседей a совпадает с набором степеней бывших соседей b .

Задача 22. Докажите, что вероятность отказа не превосходит $n^2 \cdot P(l_a = l_b)$.

Таким образом, если мы покажем, что $P(l_a = l_b)$ мала, то мала будет и вероятность отказа. Из задачи 21 следует, что необходимо оценить вероятность такого события: при независимом выборе двух случайных наборов вершин N_a и N_b (каждая вершина выбирается из $\{1, \dots, n-2\}$ независимо с вероятностью p) наборы степеней вершин из N_a и N_b в случайном графе $G = G(n-2, p)$ совпадут

2 Блок 2

2.1 Комбинаторные величины и их асимптотика

Определения. Будем говорить, что:

- $f(n) = o(g(n))$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.
- $f(n) = O(g(n))$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$ (т.е. отношение ограничено сверху некоторым конечным числом).
- $f(n) = \omega(g(n))$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.
- $f(n) = \Omega(g(n))$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$.
- $f(n) = \Theta(g(n))$, если $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.
- $f(n) \sim g(n)$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

В некоторых из следующих задач надо будет «найти асимптотику» для некоторых функций. Это значит, что для каждой из предложенных функций $f(n)$ надо найти функцию в «явном» виде $g(n)$ (грубо говоря, в записи этой функции присутствуют только сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, а также функция в замкнутой форме, то есть, не содержит знаков “...”, “ Σ ”, “ Π ”), что $f(n) \sim g(n)$.

Задача 23. Докажите, что $\frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq 2^n$.

Задача 24. Найдите асимптотику для $\sqrt[n]{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$. Указание: к чему стремится величина $\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$ при $n \rightarrow \infty$?

Задача 25. Докажите, что $\frac{3^{3n}}{3n+1} \leq 2^{2n} \binom{3n}{n} \leq 3^{3n}$. Указание: найдите комбинаторную интерпретацию для чисел 3^{3n} и $2^{2n} \binom{3n}{n}$.

Задача 26. Найдите асимптотику для $\sqrt[n]{\binom{3n}{n}}$.

Задача 27. Пусть $0 < \alpha < 1$. Докажите, что $\binom{n}{\alpha n} = (\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1} + o(1))^n$.

Без доказательства приведем следующую важную формулу:

Формула Стирлинга. $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (здесь $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ — второй замечательный

предел).

Задача 28. Найдите асимптотику для $\binom{2n}{n}$.

Задача 29. Найдите асимптотику для $\binom{n^2}{n}$.

Задача 30. Найдите асимптотику для $(2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 1)$.

Задача 31. Докажите, что количество различных неизоморфных графов на n вершинах составляет $\Omega\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{e^{2(n-1)/2}}{n}\right)^n\right)$.

Определение. *Бернуллиева величина с параметром p* — величина, равная 1 с вероятностью p , и равная 0 с вероятностью $1 - p$.

Обозначим $b(k, n, p)$ вероятность того, что среди n независимых в совокупности Бернуллиевых величин с параметром p ровно k будут равны 1.

Задача 32. Найдите формулу для $b(k, n, p)$.

Задача 33. Найдите асимптотику величины $\max_k b(k, n, p)$ при условии $p = \omega(1/n)$. Указание: при каком k достигается максимум $b(k, n, p)$?

Задача 34. Пусть $p = \omega(1/n)$. Докажите, что вероятность совпадения степеней двух выбранных заранее вершин $G(n, p)$ составляет $O(1/\sqrt{pn})$.

Оценка Чернова. Если X — сумма n независимых Бернуллиевых величин с параметром p , то $\mathbb{P}(|X - pn| > pn\delta) \leq 2e^{-(\delta pn)^2/3pn} = 2e^{-\delta^2 pn/3}$. (Замечание: стоит обратить внимание на то, что $\mathbb{E}X = pn$.)

Задача 35. При условии $p = \omega(1/n)$ докажите, что $|b(k, n, p) - b(k - 1, n - 1, p)| = O(\sqrt{\ln n}/pn)$.

- a) Запишите $Y = b(k, n, p) - b(k - 1, n - 1, p)$ в виде $\delta b(k, n, p)$, где δ — некоторая величина.
- b) Оцените $|Y|$ непосредственно для маленьких значений $|\delta|$ и при помощи оценки Чернова для больших значений $|\delta|$. Найдите оптимальную границу между «маленькими» и «большими» значениями $|\delta|$.

Задача 36. При условии $p = \omega(1/n)$ докажите, что:

- a) $|b(k, n, p) - b(k, n - 1, p)| = O(\sqrt{\ln n}/pn)$.
- b) $|b(k - 1, n - 1, p) - b(k, n - 1, p)| = O(\sqrt{\ln n}/pn)$.

Задача 37. Пусть $p = \omega(\ln n/n)$, $|k - pn| = o(\sqrt{pn/\ln n})$. Докажите, что $b(k, n, p) = \Theta(1/\sqrt{pn})$.

2.2 Реберный мартингал и интервалы, содержащие степени случайного графа

Определение. Условной вероятностью события A относительно события B называется величина $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$. Условным матожиданием случайной величины f относительно события B называется величина $\mathbb{E}[f|B] = \sum_x x \cdot \mathbb{P}(A = x|B)$. Неформально, характеристики, условные относительно события B , являются усреднениями по исходам, принадлежащим событию B .

Пусть f и g — случайные величины. Тогда условным матожиданием f относительно g называется **случайная величина** $\mathbb{E}[f|g]$, принимающая значение x с вероятностью $\sum_{\mathbb{E}[f|g=z]=x} \mathbb{P}[g = z]$.

Другими словами, условное матожидание f относительно g — это величина h , которую можно «сгенерировать» так: сгенерировать z — значение g , после чего взять условное матожидание f относительно события $g = z$ и вернуть в качестве значения h .

Задача 38. Докажите, что если c — константа, то $\mathbb{E}[f|c] = \mathbb{E}f$.

Задача 39. Что такое $\mathbb{E}[f|f]$?

Задача 40. Докажите, что $\mathbb{E}[f + g|h] = \mathbb{E}[f|h] + \mathbb{E}[g|h]$. Указание: обратите внимание, что с обеих сторон от равенства стоят случайные величины, поэтому доказать нужно их равенство при каждом исходе.

Задача 41. Докажите, что $\mathbb{E}[\mathbb{E}[f|g]] = \mathbb{E}f$.

Ранее мы хотели оценить вероятность того, что $l_a = l_b$. **Напомним:** N_a и N_b – случайные наборы вершин графа $G = G(n-2, p)$. Если наборы степеней вершин N_a и N_b совпадают, то внутри любого интервала степеней количество представителей этих наборов совпадает.

Рассмотрим интервал $I = [D_0, D_0 + R - 1]$. Обозначим f количество вершин $G(n, p)$, степени которых попадают в интервал I .

Пронумеруем всевозможные ребра графа на n вершинах от 1 до $\binom{n}{2}$ в порядке $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{2, 3\}, \dots$. Пусть f – некоторая характеристика графа $G(n, p)$ (например, та, которая определена выше). Обозначим C_i случайную величину, равную 1, если ребро i присутствует в $G(n, p)$, и 0 в противном случае.

Определение. Реберным мартингалом, отвечающим f , будем называть последовательность случайных величин $f_0, \dots, f_{\binom{n}{2}}$, где $f_i = \mathbb{E}[f|C_1, \dots, C_i]$. Неформально, значение f_i пытается «угадать» значение f , имея лишь информацию о наличии или отсутствии первых i ребер графа.

На самом деле мартингалы можно определить в гораздо более общем случае.

Определение. Мартингал – это любая последовательность случайных величин f_0, \dots, f_m , такая что для каждого i выполнено:

$$f_{i-1} = \mathbb{E}[f_i|f_{i-1}, \dots, f_0].$$

Задача 42. Пусть Y_1, \dots, Y_m – независимые случайные величины, каждая из которых принимает значения $+1, -1$ с равными вероятностями. Положим $X_i = Y_1 + \dots + Y_i$. Докажите, что X_1, \dots, X_m образуют мартингал.

Задача 43. Докажите, что математические ожидания всех случайных величин в любом мартингале совпадают.

Задача 44. (*) Докажите, что реберный мартингал является мартингалом.

Неравенство Азумы. Пусть X_0, \dots, X_n – мартингал. Пусть также $|X_i - X_{i-1}|$ не превосходит c_i при любом исходе. Тогда

$$\mathbb{P}[X_n - X_0 \geq t] \leq e^{-t^2/2 \sum_{i=1}^n c_i^2}.$$

Рассмотрим ребро $i = \{a, b\}$, и пусть $a < b$. Также всюду далее f – количество вершин $G(n, p)$, степени которых попадают в интервал I .

Задача 45. Докажите, что $|f_i - f_{i-1}| \leq |\mathbb{E}[X_a|C_1, \dots, C_i] - \mathbb{E}[X_a|C_1, \dots, C_{i-1}]| + |\mathbb{E}[X_b|C_1, \dots, C_i] - \mathbb{E}[X_b|C_1, \dots, C_{i-1}]|$, где X_v – степень вершины v .

Задача 46. Пусть w и y – количество ребер, смежных b среди ребер с номерами меньше i и больше i соответственно. Докажите, что $B = |\mathbb{E}[X_b|C_1, \dots, C_i] - \mathbb{E}[X_b|C_1, \dots, C_{i-1}]| \leq b(D_0 - w - 1, y, p) - b(D_0 - w - 1 + R, y, p)$ независимо от исхода $G(n, p)$. Получите аналогичную оценку для $A = |\mathbb{E}[X_a|C_1, \dots, C_i] - \mathbb{E}[X_a|C_1, \dots, C_{i-1}]|$. Указание: воспользуйтесь представлением f_i и f_{i-1} в виде суммы Бернуlliевых случайных величин и выполните сокращение общих элементов этих сумм. Обратите внимание, что нужно рассмотреть случаи $C_i = 0$ и $C_i = 1$.

Задача 47. В обозначениях предыдущей задачи примените оценки из задач 33–36, чтобы доказать $A + B \leq c_i = C/\min(1, 1/\sqrt{p(n-b+1)})$ для некоторой абсолютной константы C . Указание: рассмотрите случаи $y+1 < 1/p$ и $y+1 \geq 1/p$.

Задача 48. Докажите, что $\sum c_i^2 = O(\frac{n}{p} \ln(pn))$.

Задача 49. Пусть $p = \omega(\ln^3 n/n)$, $|D_0 - pn| = o(\sqrt{pn/\ln n})$, $R = o(\sqrt{pn/\ln n})$, $R = \omega(\ln n \ln(pn))$. Докажите, что вероятность того, что $f \geq \sqrt{(n/p) \ln n \ln(pn)}$, составляет $1 - O(n^{-w})$ для любого положительного числа w . Указание: оцените $\mathbb{E}f$ снизу, после чего воспользуйтесь неравенством Азумы вместе с предыдущими задачами для оценки вероятности большого отклонения значения f от среднего.

Задача 50. Покажите, что при достаточно медленном стремлении $p = p(n) = o(1)$ к нулю можно выбрать x непересекающихся интервалов $[D_0, D_0 + R - 1]$, в каждый из которых с достаточно большой вероятностью попадет K степеней вершин. Оцените вероятность того, что в каждый из этих интервалов попадет одинаковое количество представителей N_a и N_b . Подберите такие значения x и K , чтобы вероятность совпадения N_a и N_b стремилась к нулю быстрее n^{-w} для любого $w > 0$.

Задача 51. ()** Приведите алгоритм проверки изоморфизма графов Эрдеша-Ренъи с полиномиальным временем работы и экспоненциально маленькой вероятностью отказа для нетривиального диапазона вероятности ребра p .

Задача 1. Все ребра, которые есть в H , должны быть и в графе $G = G(n, p)$, причем на тех же местах, а ребер, которых нет в графе H , не должно быть и в G . Вероятность того, что m ребер есть в графе G на нужных местах — p^m , а вероятность отсутствия $\frac{n(n-1)}{2} - m$ ребер на остальных местах есть $(1-p)^{\frac{n(n-1)}{2}-m}$. Так как события независимы, то вероятность того, что $G = H$, равна $p^m(1-p)^{\frac{n(n-1)}{2}-m}$.

Задача 2. Сперва выберем те ребара, которые будут присутствовать в $G = G(n, p)$ (всего $\binom{n}{2}$ способов). Вероятность того, что они все будут присутствовать есть p^m , а того, что остальные отсутствовать — $(1-p)^{\binom{n}{2}-m}$, значит общая вероятность равна $\binom{n}{2}p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}$.

Задача 3. Coming soon...

Задача 4.

- Пусть f принимает k различных значений f_1, \dots, f_k . Тогда $E[c \cdot f] = \sum_{s=1}^k c f_s P(f^{-1}(f_s)) = c \sum_{s=1}^k f_s P(f^{-1}(f_s)) = c \cdot Ef;$
- Пусть f и g на графах G_1, \dots, G_k принимают значения f_1, \dots, f_k и g_1, \dots, g_k соответственно. Тогда $E[f + g] = \sum_{s=1}^k (f_s + g_s) P(G_s) = \sum_{s=1}^k f_s P(G_s) + \sum_{s=1}^k g_s P(G_s) = Ef + Eg;$
- $E[f \cdot g] = \sum_{k,m} (f_k g_m) P(f = f_k, g = g_m) = \sum_k x_k P(f = f_k) \cdot \sum_m x_m P(g = g_m) = Ef \cdot Eg.$

Задача 5.

- Пусть число ребер — a (случайная величина). Можно заметить, что $a = a_1 + \dots + a_{\binom{n}{2}}$, где a_i — индикатор наличия i -го ребра (случайная величина). Тогда $E[a] = E[\sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} a_i] = \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} Ea_i = \binom{n}{2} \cdot p$;
- Аналогично пункту a), только $a = a_1 + \dots + a_{n-1}$. И значит $E[a] = (n-1) \cdot p$;
- Пусть число треугольников — a (случайная величина). Можно заметить, что $a = a_1 + \dots + a_{\binom{n}{3}}$, где a_i — индикатор наличия i -го треугольника (случайная величина). Тогда $E[a] = E[\sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} a_i] = \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} Ea_i = \binom{n}{3} \cdot p^3$;
- Так как количество путей есть $\frac{n!}{2}$. То математическое ожидания их кол-ва — $\frac{n!}{2} \cdot p^{n-1}$;
- Так как количество циклов есть $\frac{(n-1)!}{2}$. То математическое ожидания их кол-ва — $\frac{(n-1)!}{2} \cdot p^n$.

Задача 6.

- $D[c \cdot f] = E[(cf - Ef)^2] = E[(cf - c \cdot Ef)^2] = c^2 \cdot E[(f - Ef)^2] = c^2 \cdot Ef;$
- $Df = E[(f - Ef)^2] = E[f^2 - 2f \cdot Ef + (Ef)^2] = E[f^2] - 2(Ef)^2 + (Ef)^2 = E[f^2] - (Ef)^2;$
- $D[f + g] = E[(f + g)^2] - (Ef + Eg)^2 = E[f^2 + 2f \cdot g + g^2] - (Ef)^2 - 2Ef \cdot Eg - (Eg)^2 = Df + Dg.$

Задача 7. Пусть степень вершины — a (случайная величина). Можно представить a как сумму $a_1 + \dots + a_{n-1}$, где a_i — индикатор наличия i -го исходящего ребра. Тогда $Da = D[\sum_{i=1}^{n-1} a_i] = \sum_{i=1}^{n-1} Da_i = (n-1)(p - p^2)$.

Задача 8. Пусть число треугольников $G(n, p) — f$ (случайная величина). Представим f в виде суммы индикаторов наличия i -го треугольника: $f = f_1 + \dots + f_{\binom{n}{3}}$. Тогда $Df = E[f^2] - (Ef)^2$. Так

как мы знаем $Ef = \binom{n}{3} \cdot p^3$, найдем $E[f^2] = E[(\sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} f_i)^2] = E[\sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} f_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1, j=1, i \neq j}^{\binom{n}{3}} f_i f_j] = E[\sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} f_i^2] + 2 \cdot \sum_{i=1, j=1, i \neq j}^{\binom{n}{3}} f_i f_j]$. Осталось подсчитать $\sum_{i=1, j=1, i \neq j}^{\binom{n}{3}} f_i f_j$:

$$\sum_{i=1, j=1, i \neq j}^{\binom{n}{3}} f_i f_j = Ef + 2 \cdot \sum_{i=1, j=1, i \neq j}^{\binom{n}{3}} Ef [f_i f_j].$$

- Если так оказалось, что f_i и f_j независимы (им соответствуют реберно не пересекающиеся треугольники), то $E[f_i f_j] = E f_i \cdot E f_j = p^6$. Всего таких пар треугольников $\frac{1}{2} \cdot \binom{n}{3} \cdot (\binom{n-3}{3} + \binom{n-3}{2})$;
- Иначе треугольники событий f_i, f_j пересекаются по одному ребру, значит $E[f_i f_j] = p^5$. Их количество равно $\frac{1}{2} \cdot \binom{n}{5} \cdot \binom{n}{3}$

Значит $E f = \binom{n}{3} \cdot p^3 + \binom{n}{3} \cdot (\binom{n-3}{3} + \binom{n-3}{2}) \cdot p^6 + \binom{n}{5} \cdot \binom{n}{3} \cdot p^5 - (\binom{n}{3} \cdot p^3)^2$.

Задача 9. Dfs всегда найдет путь до вершины, если он существует.

Доказательство: Для произвольного графа G:

База. Пути из не более, чем 1 вершины алгоритм находит верно (путь от начальной вершины до нее же).

Предположение: Алгоритм посещает все вершины, находящиеся на расстоянии не более, чем $k-1$, от начальной.

Шаг: Рассмотрим любую вершину v , находящуюся на расстоянии k от начальной. Она, очевидно, соединена ребром с какой-то вершиной, находящейся на расстоянии $k-1$ от начальной — назовем ее w . Значит, мы перейдем в вершину v при просмотре вершины w .

Задача 10. Алгоритм просматривает каждое ребро один раз, и выполняет для каждой вершины константное число действий. Обозначая число вершин как n , а ребер — как m , получаем, что время работы — $O(n+m)$.

Задача 11. Достаточно пройтись по всем вершинам и запуститься от них, если $used_v = 0$, и увеличить ответ. Этот алгоритм корректен, так как при обходе посещается вся компонента.

Задача 12. Запустим обход в глубину из произвольной вершины графа; обозначим её через $root$. Заметим следующий факт:

Пусть мы находимся в обходе в глубину, просматривая сейчас все рёбра из вершины v . Тогда, если текущее ребро (v, to) таково, что из вершины to и из любого её потомка в дереве обхода в глубину нет обратного ребра в вершину v или какого-либо её предка, то это ребро является мостом. В противном случае оно мостом не является. Теперь осталось научиться проверять этот факт для каждой вершины эффективно. Для этого воспользуемся "временами входа в вершину вычисляемыми алгоритмом поиска в глубину".

Итак, пусть $tin[v]$ — это время захода поиска в глубину в вершину v . Теперь введём массив $fup[v]$, который и позволит нам отвечать на вышеописанные запросы. Время $fup[v]$ равно минимуму из времени захода в саму вершину $tin[v]$, времён захода в каждую вершину p , являющуюся концом некоторого обратного ребра (v, p) , а также из всех значений $fup[to]$ для каждой вершины to , являющейся непосредственным сыном v в дереве поиска:

$$fup[v] = \min \begin{cases} tin[v], \\ tin[p], \text{ для всех } (v, p) \text{ — обратное ребро,} \\ fup[to], \text{ для всех } (v, to) \text{ — ребро дерева, где } to \text{ не предок} \end{cases}$$

Тогда, из вершины v или её потомка есть обратное ребро в её предка тогда и только тогда, когда найдётся такой сын to , что $fup[to] \leq tin[v]$.

Таким образом, если для текущего ребра (v, to) (принадлежащего дереву поиска) выполняется $fup[to] > tin[v]$, то это ребро является мостом; в противном случае оно мостом не является.

Задача 13. Доказательство корректности проводится как и для DFS при помощи индукции. Докажем время работы данного алгоритма:

В очередь добавляются только непосещенные вершины, поэтому каждая вершина посещается не более одного раза. Операции внесения в очередь и удаления из нее требуют $O(1)$ времени, так что общее время работы с очередью составляет $O(|V|)$ операций. Для каждой вершины v рассматривается не более $\deg(v)$ ребер, инцидентных ей. Так как $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$, то время, используемое на работу с ребрами, составляет $O(|E|)$. Поэтому общее время работы алгоритма поиска в ширину —

$O(|V| + |E|)$.

Задача 14. Достаточно подсчитать вспомогательную величину $d[v]$ = кратчайшее расстояние до стартовой вершины. Положим $d[s] = 0$ (s — стартовая вершина). И если мы хотим добавить непосещенную вершину v в очередь, то положим $d[v] = d[u] + 1$, где вершина u — предок вершины v .

Задача 15. Пусть s — вершина от которой мы хотим посчитать расстояния. Заведём массив $d[]$, в котором для каждой вершины v будем хранить текущую длину $d[v]$ кратчайшего пути из s в v . Изначально $d[s] = 0$, а для всех остальных вершин эта длина равна бесконечности:

$$d[v] = \infty, v \neq s$$

Кроме того, для каждой вершины v будем хранить, помечена она ещё или нет, т.е. заведём булевский массив $u[]$. Изначально все вершины не помечены, т.е.:

$$u[v] = \text{false}$$

Сам алгоритм Дейкстры состоит из n итераций. На очередной итерации выбирается вершина v с наименьшей величиной $d[v]$ среди ещё не помеченных, т.е.:

$$d[v] = \min_{p: u[p]=\text{false}} d[p]$$

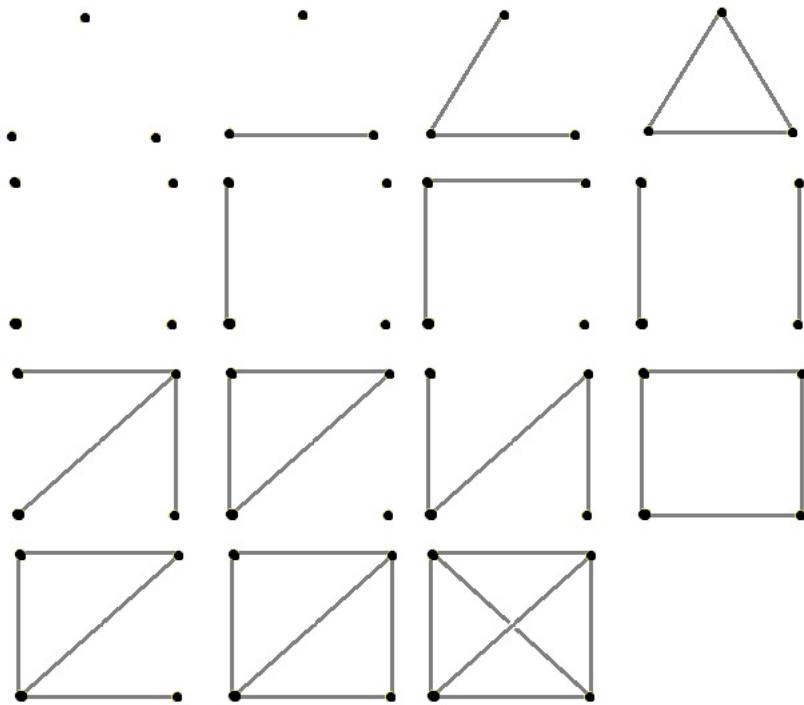
Выбранная таким образом вершина v отмечается помеченной. Далее, на текущей итерации, из вершины v производятся релаксации: просматриваются все ребра (v, to) , исходящие из вершины v , и для каждой такой вершины to алгоритм пытается улучшить значение $d[to]$. Пусть длина текущего ребра равна len , тогда в виде кода релаксация выглядит как:

$$d[to] = \min(d[to], d[v] + \text{len})$$

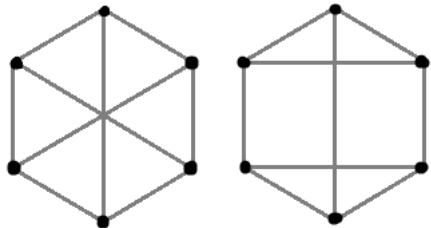
На этом текущая итерация заканчивается, алгоритм переходит к следующей итерации. При этом в конце концов, после n итераций, все вершины графа станут помеченными, и алгоритм свою работу завершает. Утверждается, что найденные значения $d[v]$ есть искомые длины кратчайших путей из s в v .

Время работы алгоритма зависит от двух операций: извлечение минимума и изменение значения $d[v]$. При простейшей реализации эти операции потребуют соответственно $O(n)$ и $O(1)$ времени. Учитывая, что первая операция всего выполняется $O(n)$ раз, а вторая — $O(m)$, получаем асимптотику простейшей реализации алгоритма Дейкстры: $O(n^2 + m)$. Если же использовать структуру куча, то время работы будет $O(n + n \log n + m \log n) = O(n + m \log n)$.

Задача 16.



Задача 17.



Задача 18.

Задача 19. Для начала научимся различать два дерева G и H . Найдем центры (вершина, которая имеет наименьшее максимальное расстояние до всех остальных) этих деревьев и сделаем их корнями. Если так оказалось, что центра два, то подвесим их за фиктивную (новую) вершину. Далее нам нужно сравнить два подвешенных дерева на изоморфизм (так, чтобы корень одного перешел в корень другого). Теперь научимся кодировать подвешенное дерево. Для этого будем нумеровать вершины. Сопоставим всем висячим вершинам число -0 . Далее мы будем кодировать вершины через упорядоченный список кодировок потомков. Если такой список уже закодирован, то пронумеруем вершину соответствующим числом, иначе сопоставим вершине и списку следующее число.

И, значит, для того, чтобы сравнить G и H достаточно сравнить кодировки их корней.

Если же в графе есть цикл, то мы можем закодировать все вершины на нем, если считать, что текущая вершина корень поддерева. далее просто быстро сравнить на равенство два пронумерованных цикла.

Для достижения необходимой асимптотики $O(n + m)$ нужно использовать структуру, которая за длину списка добавляет его и за длину проверяет его наличие, а также нужно уметь сравнивать две занумерованные окружности на равенство за количество чисел на них. Это предлагается сделать самостоятельно.

Erdös-Renyi random graphs and Graph Isomorphism problem

A. M. Raigorodsky, M. Tikhomirov, A. Golovanov

1 Block #1

1.1 Erdös-Renyi random graph

A *graph* $G = (V, E)$ consists of a set of *vertices* V together with a set of *edges* E , where each edge represents an unordered pair of vertices. One can easily see that any graph can contain no more than $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ edges.

Fix an arbitrary number $p \in (0, 1)$ and denote by a *probability* of a graph (in the Erdös-Renyi probability space) with n vertices $\{1, 2, \dots, n\}$ and e edges the value of the following expression

$$P(G) = P_p(G) := p^e(1-p)^{\frac{n(n-1)}{2}-e}.$$

A *probability of a family* (or of a property, which is the same) of graphs with vertices numbers $1, 2, \dots, n$ is a sum of probabilities of all graphs of this family.

If Ω stands for the set of all graphs with n vertices then $P(\Omega) = 1$.

According to the definition above, this is a theorem which is to be proved, and here is the proof:

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} \binom{\binom{n}{2}}{k} p^k (1-p)^{\binom{n}{2}-k} = (p + (1-p))^{\binom{n}{2}} = 1.$$

We say that a *random variable* is any function defined on the set of all graphs with vertices numbered $1, 2, \dots, n$.

For example, the number of edges in a graph is a random variable.

Let a random variable Y take k distinct values y_1, \dots, y_k . Define a *mathematical expectation* of Y as its “weighted average”

$$\mathbb{E}Y := \sum_{s=1}^k y_s P(Y^{-1}(y_s)),$$

where $Y^{-1}(y_s)$ stands for the set of all graphs G with $Y(G) = y_s$ hold. The last probability in the expression above is denoted by $P(Y = y_s)$.

We call two events A and B *independent* (of each other) if $P(A \cap B)$ (the probability that both A and B happen) $= P(A) \cdot P(B)$. We call that two *random variables* f and g are *independent* (of each other) if events $f = x$ and $g = y$ are independent for every pair of x and y . *NB: this definition is correct only for discrete random variables, that is, for random variables which take no more than countable number of values.*

Problem 1. Let a graph H consist of n vertices and m edges. What is the probability that $G(n, p) = H$, i.e. after generating a random graph according to the definition above the exact copy of H is obtained?

Problem 2. What is the probability of $G(n, p)$ having exactly m edges?

Problem 3. What is the probability of the event that $G(n, p)$ contains no isolated vertices (that is, vertices which are not connected with any other vertices by any edge)?

Let a random variable f take reals (maybe a countable number of them), and the probability of the event $f = x$ equals p_x . We say that the *mathematical expectation* of f is the value of the expression $\sum_x x \cdot p_x$. We denote the expectation of f by Ef .

Problem 4. Prove the following:

- a) $E[c \cdot f] = c \cdot Ef$ if c is constant;
- b) $E[f + g] = Ef + Eg$ (even if f and g are not independent!);
- c) if variables f and g are independent then $E[f \cdot g] = Ef \cdot Eg$;

Problem 5. Find the expectation of the following variables:

- a) the number of edges of $G(n, p)$;
- b) the degree of any vertex of $G(n, p)$ (since the definition of $G(n, p)$ is symmetric, one can choose any arbitrary vertex);
- c) the number of triangles of $G(n, p)$;
- d) the number of Hamilton paths and cycles of $G(n, p)$ (a Hamilton path/cycle is any path/cycle which visits each vertex exactly once);
- e) the number of cliques (that is, complete subgraphs) of k vertices.

A *variance* Df of a random variable f is $E[(f - Ef)^2]$.

Problem 6. Prove the following:

- a) $D[c \cdot f] = c^2 \cdot Df$ if c is constant;
- b) $Df = E[f^2] - (Ef)^2$;
- c) if f and g are independent then $D[f + g] = Df + Dg$.

Problem 7. Find the variance of the degree of any vertex of $G(n, p)$.

Problem 8. Find the variance of the number of triangles $G(n, p)$ (be careful with the dependence of random variables!).

1.2 Algorithms on graphs and their complexities

Assume that we have a description of any graph and we want to check if one of its properties (for example, connectivity) is hold. Consider the following algorithm:

Depth-first search (DFS).

```

procedure dfs(vertex v):
    usedv := 1
    for each vertex u - a neighbor of v:
        if usedu = 0 then call dfs(u)

function is_connected(graph G):
    usedv = 0 for all vertices v
    dfs(arbitrary vertex of G)
    if usedv = 1 holds for all v ∈ G, return YES
    otherwise return NO

```

The description above is represented by a pseudocode. For the better explanation of the algorithm we recommend you to run it in your mind or on paper for some small input. Please notice that the procedure `dfs` is recursive, that is, it can be called from itself, and once the last call is finished, the workflow returns to the previous call.

Problem 9. Prove that DFS checks connectivity correctly.

Problem 10. Prove that the algorithm performs $O(n + m)$ operations (no more than $c(n + m)$ for some constant c which doesn't depend on the input graph) for a graph with n vertices and m edges.

Problem 11. Modify this algorithm for obtaining the number of connected components of a graph.

Problem 12. An edge of a graph is called a *bridge* if its removal increases the number of connected components. Describe an algorithm of obtaining all bridges in a graph with the following number of actions performed:

- a) $O((n + m)^2)$;
- b) $O(n(n + m))$;
- c) (*) $O(n + m)$.

Consider another solution of the initial problem:

Breadth-first search (BFS). Pseudocode:

```

procedure bfs(vertex v):
    queue = {v} // a queue of vertices
    usedv := 1
    while queue ≠ ∅:
        vertex w = the first element of queue
        remove w from the beginning of queue
        for each vertex u which is a neighbor of w:
            if usedu = 0:
                usedu := 1
                add u to the end of queue

function is_connected(graph G):
    usedv := 0 for all vertices v // used is of size n
    bfs(arbitrary vertex of G)
    if usedv = 1 for all vertices v ∈ G then return YES
    otherwise return NO

```

Problem 13. Prove that the algorithm is correct and find its complexity.

Problem 14. Modify the algorithm for obtaining the lengths of the shortest paths from a fixed vertex v to each other.

Problem 15. Assume that each edge e of a graph G has its own *length* which is a nonnegative real and is denoted by $w(e)$. Build an algorithm of obtaining the lengths of all shortest paths from v to each other vertex with the following number of actions performed:

- a) $O(n^2 + m)$;
- b) (*) $O(n + m \log n)$.

1.3 Graph Isomorphism problem

Two graphs $G = (V_G, E_G)$ and $H = (V_H, E_H)$ are called *isomorphic* (to each other) once there is such bijection $\pi : V_G \rightarrow V_H$ between the sets of their vertices that every unordered pair of vertices vu occurs in E_G iff $\pi(v)\pi(u)$ occurs in E_H . Such bijection π is called an *isomorphism* of graphs G and H .

Problem 16. Draw all possible graphs (modulo isomorphism) with 3 or 4 vertices.

Define an *invariant* as any function f which for every graph G returns some value $f(G)$ in such a way that $f(G) = f(H)$ for any isomorphic graphs G and H . It's obvious that $f(G) \neq f(H)$ implies that G and H are not isomorphic, while the inverse doesn't have to hold (that is, $f(G) = f(H)$ can be true for non-isomorphic graphs).

Define a *lexicographic* or *alphabetical comparison* of two sequences as follows:

- the empty sequence is the least;
- if the first element of A is less than the first element of B then $A < B$;
- if the first elements of A and B coincide, ignore them and return the result of tails comparison.

Problem 17. For each of the following show that it's an invariant and provide an example of non-isomorphic pair of graphs where the function takes the same value:

- the list of degrees of graph's vertices in ascending order;
- the lexicographically sorted list of sorted lists of neighbors' degrees for each vertex;
- the lexicographically sorted list of sorted lists of shortest paths to all vertices for each vertex.

Problem 18.

- Provide an example of a graph $G = (V_G, E_G)$ with two or more vertices for which there is only one isomorphism $\pi : V_G \rightarrow V_G$ with itself (any isomorphism between two equal graphs is also called an *automorphism* of the graph).
- (*) Provide a *regular* graph with the property described above (a graph is called regular if each of its vertices has the same degree).

There is no known algorithm of checking if two graphs are isomorphic for a polynomial time over the number of their vertices and edges. The best result belongs to László Babai and was first published in 2015 (with some fixes in 2017, though); the algorithm works for $O(e^{(\log n)^c})$ for some constant $c > 1$. However, there are fast algorithms to the GI problem for a variety of cases.

Problem 19. Provide algorithms with $O(n + m)$ time complexity to the problem for the following cases:

- all degrees are no more than 2;
- graphs don't contain cycles;
- (*) each of the graphs contains exactly one simple cycle.

In assumption that graphs are generated randomly it makes sense to use some simple algorithms and estimate the probability of error. Our current goal is to analyze such probability for the following algorithm:

```

function invariant(граф G):
    for each vertex v of a graph G:
        build  $l_v$  - the sorted list of v's neighbors' degrees
        if there are equal lists among  $l_v$ , return DECLINE
        else return all  $l_v$ 's, sorted lexicographically

function are_isomorphic(графы G, H):
    if any of invariant(G) and invariant(H) returned DECLINE then return DECLINE
    otherwise return invariant(G) = invariant(H)

```

Problem 20. Describe how to implement the algorithm above for $O(n + m)$.

Problem 21. Consider a pair of vertices a and b . Prove that $l_a = l_b$ holds iff after a 's and b 's removal the list of a 's ex-neighbors' degrees and the list of b 's ex-neighbors' degrees are the same (modulo permutation).

Problem 22. Prove that the decline probability doesn't exceed $n^2 \cdot P(l_a = l_b)$.

Thus, once we show that $P(l_a = l_b)$ is small, the decline probability will be small as well. It follows from the 21-st problem that the following probability is to be estimated: generate $G = G(n - 2, p)$ and pick two sets N_a and N_b , including each vertex of G independently with probability p , then the set N_a of degrees coincides with N_b .

2 Block #2

2.1 Combinatorial values and their asymptotics

Definitions. We say that

- $f(n) = o(g(n))$, if $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.
- $f(n) = O(g(n))$, if $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$ (that is, the ratio is upper-bounded by some real number).
- $f(n) = \omega(g(n))$, if $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.
- $f(n) = \Omega(g(n))$, if $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$.
- $f(n) = \Theta(g(n))$, if $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.
- $f(n) \sim g(n)$, if $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

In some of following problems you'll be offered to "find an asymptotic" for several functions. That means that for each of the functions $f(n)$ you are asked to find any function $g(n)$ is its closed form (informally, there are only additions, subtractions, multiplications, divisions, powers which occur in the definition of this function, and it also doesn't contain skipped parts behind "...", " Σ ", " Π " etc.) such that $f(n) \sim g(n)$.

Problem 23. Prove that $\frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq 2^n$.

Problem 24. Fund an asymptotic for $\sqrt[n]{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$. Hint what does $\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$ tend to for $n \rightarrow \infty$?

Problem 25. Show that $\frac{3^{3n}}{3n+1} \leq 2^{2n} \binom{3n}{n} \leq 3^{3n}$. Hint: find a combinatorial meaning for 3^{3n} and $2^{2n} \binom{3n}{n}$.

Problem 26. Find an asymptotic for $\sqrt[n]{\binom{3n}{n}}$.

Problem 27. Let $0 < \alpha < 1$. Show that $\binom{n}{\alpha n} = (\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1} + o(1))^n$.

The following important formula is given without a proof:

Stirling's formula. $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (here $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ – the second great limit).

Problem 28. Find an asymptotic for $\binom{2n}{n}$.

Problem 29. Find an asymptotic for $\binom{n^2}{n}$.

Problem 30. Find an asymptotic for $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$.

Problem 31. Show that the number of non-isomorphic graphs with n vertices equals $\Omega\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e2^{(n-1)/2}}{n}\right)^n\right)$

Definition. A Bernoulli random variable with parameter p is a variable which equals 1 with probability p and 0 with the remaining probability $1-p$.

Denote by $b(k, n, p)$ the probability that among n independent Bernoulli random variables of p exactly k equal 1.

Problem 32. Find the formula for $b(k, n, p)$.

Problem 33. Find an asymptotic for $\max_k b(k, n, p)$ under the condition that $p = \omega(1/n)$. Hint: what is the optimal value of k ?

Problem 34. Let $p = \omega(1/n)$. Show that the probability that the degrees of two fixed vertices of $G(n, p)$ coincide is $O(1/\sqrt{pn})$.

Chernoff's bound. If X is the sum of n independent Bernoulli random variables of p then $\mathbb{P}(|X - pn| > pn\delta) \leq 2e^{-\delta^2 pn/3}$.

Problem 35. Under the condition that $p = \omega(1/n)$ show that $|b(k, n, p) - b(k - 1, n - 1, p)| = O(\sqrt{\ln n}/pn)$.

- a) Represent $Y = b(k, n, p) - b(k - 1, n - 1, p)$ as $\delta b(k, n, p)$ where δ is finite.
- b) Estimate $|Y|$ straightforwardly for small values of $|\delta|$ and using Chernoff's bound for a bigger values of $|\delta|$. Find an optimal value between "small" and "big" values of $|\delta|$.

Problem 36. Under the condition of $p = \omega(1/n)$ prove that:

- a) $|b(k, n, p) - b(k - 1, n - 1, p)| = O(\sqrt{\ln n}/pn)$.
- b) $|b(k - 1, n - 1, p) - b(k, n - 1, p)| = O(\sqrt{\ln n}/pn)$.

Problem 37. Let $p = \omega(\ln n/n)$, $|k - pn| = o(\sqrt{pn/\ln n})$. Show that $b(k, n, p) = \Theta(1/\sqrt{pn})$.

2.2 Edge martingale and intervals containing the degrees of a random graph

Call a *conditional probability of an event A with respect to the event B* the value of $P(A \cap B)/P(B)$. A *conditional expectation of f wrt the event B* is the value of $E[F|B] = \sum_x x \cdot P(A = x|B)$. Informally, characteristics which are conditional under B are just averages over the outcomes of B .

Let f and g be random variables. Then call a *conditional expectation of f wrt g* (and denote it by $E[f|g]$) the **random variable** which equals x with the probability of $\sum_{E[f|g=z]=x} P[g = z]$. In other words,

the conditional expectation of f wrt g is such variable h that can be generated in the following way: generate the value z of g then getting the expectation of f wrt the event $g = z$ and return as h 's outcome.

Problem 38. Prove that if c is constant then $E[f|c] = Ef$.

Problem 39. Find $E[f|f]$?

Problem 40. Show that $E[f + g|h] = E[f|h] + E[g|h]$. Hint: note that both left hand side and right hand side contain random variables, so they have to be proved to be equal to each other for each outcome.

Problem 41. Show that $E[E[f|g]] = Ef$.

Return to the event we aim to estimate (the end of the block #1). If degrees of N_a coincide with degrees of N_b then inside every interval the numbers of N_a 's and N_b 's representers coincide as well.

Consider an arbitrary interval $I = [D_0, D_0 + R - 1]$. Denote by f the number of vertices of $G(n, p)$ with degree from I .

Enumerate all possible edges of a graph with n vertices from 1 to $\binom{n}{2}$ in the following order: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{2, 3\}, \dots$. Let f be any characteristic of a graph $G(n, p)$ (for example, the above defined f). Denote by C_i the random variable being equal to 1 if the i -th edge occurs in $G(n, p)$ and 0 otherwise.

Call an *edge martingale* f the sequence of random variables $f_0, \dots, f_{\binom{n}{2}}$, where $f_i = E[f|C_1, \dots, C_i]$. Informally saying, the value of f_i tries to "guess" the value of f using the information of presences/absences of the first i edges.

Actually we can define martingales in common case.

Martingale is any sequence of random variables f_0, \dots, f_m such that $f_{i-1} = E[f|f_{i-1}, \dots, f_0]$ for each i .

Problem 42. Let Y_1, \dots, Y_m be independent random variables and each of them takes values $+1, -1$ with the equal probabilities. Let $X_i = Y_1 + \dots + Y_i$. Show that the sequence of X_1, \dots, X_m is a martingale.

Problem 43. Show that in any martingale expectations of all random variables are the same.

Problem 44. (*) Show that the edge martingale is a martingale.

Azuma's inequality. Let X_0, \dots, X_n be a martingale. Let $|X_i - X_{i-1}|$ be no more than c_i for each outcome. Then

$$\mathbb{P}[X_n - X_0 \geq t] \leq e^{-t^2/2 \sum_{i=1}^n c_i^2}.$$

Consider an edge $i = \{a, b\}$ (and $a < b$). So from now on let f be the number of vertices of $G(n, p)$ with degree from I .

Problem 45. Show that $|f_i - f_{i-1}| \leq |E[X_a|C_1, \dots, C_i] - E[X_a|C_1, \dots, C_{i-1}]| + |E[X_b|C_1, \dots, C_i] - E[X_b|C_1, \dots, C_{i-1}]|$, where X_v stands for the degree of vertex of v .

Problem 46. Let w and y be the numbers of edges incident to b among all edges with numbers above and below i , respectively. Prove that $B = |E[X_b|C_1, \dots, C_i] - E[X_b|C_1, \dots, C_{i-1}]| \leq b(D_0 - w - 1, y, p) - b(D_0 - w - 1 + R, y, p)$ independently on the outcome of $G(n, p)$. Obtain a similar estimate for $A = |E[X_a|C_1, \dots, C_i] - E[X_a|C_1, \dots, C_{i-1}]|$. Hint: represent f_i and f_{i-1} as the sum of Bernoulli random variables and eliminate the common additors. Notice that cases of $C_i = 0$ and $C_i = 1$ take place.

Problem 47. In the denotations of the previous problem apply the estimations from tasks 33–36 to prove that $A+B \leq c_i = C/\min(1, 1/\sqrt{p(n-b+1)})$ for some constant C . Hint: consider cases $y+1 < 1/p$ and $y+1 \geq 1/p$.

Problem 48. Show that $\sum c_i^2 = O(\frac{n}{p} \ln(pn))$.

Problem 49. Let $p = \omega(\ln^3 n/n)$, $|D_0 - pn| = o(\sqrt{pn/\ln n})$, $R = o(\sqrt{pn/\ln n})$, $R = \omega(\ln n \ln(pn))$. Prove that the probability that $f \geq \sqrt{(n/p) \ln n \ln(pn)}$ is $1 - O(n^{-w})$ for any arbitrary positive w . Hint: find a lower bound for Ef , then use Azuma's inequality together with the previous tasks to estimate the probability of a big deviation of f .

Problem 50. Show that if $p = p(n) = o(1)$ tends to zero sufficiently slowly then one can pick x non-intersecting intervals $[D_0, D_0 + R - 1]$, each including at least K degrees pretty likely. Estimate the probability that each of the intervals contains the same number of representatives of N_a and N_b . Find such values of x and K that the probability of the coincidence of N_a and N_b tends to zero faster than n^{-w} for every $w > 0$.

Problem 51. (**) Provide an algorithm to the GI problem for Erdős-Renyi graphs with the polynomial time complexity (over the number of vertices and edges) and an exponentially small decline probability for some non-trivial interval of p -s.

Точки Ферма, прямые Эйлера и кое-что еще

Н.Белухов, А.Заславский
О.Заславский, П.Кожевников, Д.Креков¹

На судьбу полагаясь доверчиво,
Абсолютно не сущую суть
Я ленивой рукою вычерчивал
Без претензий на что-нибудь.
A. Великий

Обозначения и вводные факты

Для данного неравностороннего треугольника ABC будем обозначать через M , H , O , I , I_a , I_b , I_c центр тяжести, ортоцентр, центр описанной окружности, центр вписанной окружности, центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC , CA , AB соответственно.

Точки O , M , H лежат на одной прямой, которая называется *прямой Эйлера*, причем M делит отрезок OH в отношении $1 : 2$.

Середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков AH , BH , CH лежат на одной окружности, которая называется *окружностью Эйлера* или *окружностью девяти точек*. Центром этой окружности является середина E отрезка OH .

Для любой точки X прямые, симметричные прямым AX , BX , CX относительно биссектрис углов A , B , C соответственно, пересекаются в одной точке X^* (или параллельны), которая называется *изогонально сопряженной* X . Точка $L = M^*$ называется *точкой Лемуана*.

Любой треугольник можно аффинным преобразованием перевести в правильный. При обратном преобразовании описанная и вписанная окружности правильного треугольника переходят в эллипсы, которые называются описанным и вписанным *эллипсами Штейнера*.

1 Точки Торричелли, Наполеона и Аполлония

Пусть ABT_c , BCT_a , CAT_b — правильные треугольники, построенные во внешнюю от $\triangle ABC$ сторону, N_a , N_b , N_c — центры этих треугольников. Аналогично, пусть ABT'_c , BCT'_a , CAT'_b — правильные треугольники, построенные во внутреннюю от $\triangle ABC$ сторону, N'_a , N'_b , N'_c — центры этих треугольников.

1.1. Докажите, что² прямые AT_a , BT_b , CT_c пересекаются в одной точке и прямые AT'_a , BT'_b , CT'_c пересекаются в одной точке.

¹Проект подготовлен Н.Белуховым и А.Заславским. Представлен на Конференции А.Заславским, О.Заславским, П.Кожевниковым и Д.Крековым.

²В дальнейшем в формулировках задач слова "Докажите, что" будут опускаться.

Полученные точки называются *точками Торричелли* или *точками Ферма* и обозначаются соответственно T_1 и T_2 .

1.2. Прямые AN_a , BN_b , CN_c пересекаются в одной точке и прямые AN'_a , BN'_b , CN'_c пересекаются в одной точке.

Полученные точки называются *точками Наполеона* и обозначаются соответственно N_1 и N_2 .

1.3.

- a) Треугольники $N_aN_bN_c$ и $N'_aN'_bN'_c$ — правильные.
- b) Центры этих треугольников совпадают с M .
- c) Разность их площадей равна площади $\triangle ABC$.

1.4. Пусть углы $\triangle ABC$ меньше 120° .

- a) Стороны $\triangle ABC$ видны из точки T_1 под равными углами.
- b) Сумма расстояний от вершин $\triangle ABC$ до точки T_1 меньше, чем до любой другой точки плоскости.

Для $\triangle ABC$ с углами, не превосходящими 120° , сумма расстояний от вершин до точки T_1 называется *расстоянием Ферма*.

1.5. Если $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ удовлетворяют условиям $\angle A + \angle A' = \angle B + \angle B' = \angle C + \angle C' = 120^\circ$, то отношения их расстояний Ферма к радиусам описанных окружностей совпадают.

1.6.

- a) Точки T_1 , N'_a , N'_b , N'_c лежат на одной окружности.
- b) Точки пересечения этой окружности с отрезками AT_a , BT_b , CT_c , отличные от T , делят эти отрезки в отношении $1 : 2$.
- c) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для точек T_2 , N_a , N_b , N_c .

1.7.

- a) $CT_1 \perp N_aN_b$.
- b) $CN_1 \perp T_aT_b$.
- c) Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для точек T_2 , N_2 .

1.8.

- a) Проекции точек T_1^* , T_2^* на стороны $\triangle ABC$ образуют правильные треугольники.
- b) $T_i^*A \cdot BC = T_i^*B \cdot CA = T_i^*C \cdot AB$, $i = 1, 2$.

Точки, обладающие указанными свойствами, называются *точками Аполлония*. Таким образом точки Торричелли и Аполлония изогонально сопряжены.

1.9. Пусть точка T_1 лежит внутри $\triangle ABC$. Тогда три бильярдных шара, выпущенных из нее одновременно с равными скоростями в направлениях, противоположных вершинам, после отражения от соответствующих сторон столкнутся в одной точке.

1.10. Прямая $T_1^*T_2^*$ проходит через O .

1.11. Прямые $T_1^*T_2^*$, T_1T_2 , N_1N_2 пересекаются в точке L .

1.12. Прямые T_1N_1 , T_2N_2 пересекаются в точке O .

1.13. Прямые T_1N_2 , T_2N_1 пересекаются в точке E .

1.14. Прямые $T_1T_2^*$, $T_2T_1^*$ пересекаются в точке M .

1.15. Середина M_T отрезка T_1T_2 лежит на окружности Эйлера.

2 Прямые Эйлера и эллипсы Штейнера³

2.1. Прямые Эйлера $\Delta ABT_1, \Delta BCT_1, \Delta CAT_1, \Delta ABT_2, \Delta BCT_2, \Delta CAT_2$ пересекаются в точке M .

Пусть M_A, M_B и M_C — середины BC, CA и AB соответственно, а l_A, l_B и l_C — прямые Эйлера $\Delta AT_1T_2, \Delta BT_1T_2$ и ΔCT_1T_2 .

2.2. Прямые l_A, l_B, l_C параллельны соответственно M_AM_T, M_BM_T, M_CM_T .

2.3. Прямые Эйлера всех десяти треугольников, вершины которых принадлежат множеству $\{A, B, C, T_1, T_2\}$, пересекаются в M .

2.4. Пусть T_3 — такая точка, что $\Delta T_1T_2T_3$ — правильный. Тогда прямые, проходящие через A, B, C и параллельные соответственно BT_3, CT_3, AT_3 , пересекаются в одной точке.

Пусть P — такая точка, что ΔT_1T_2P — правильный, ориентированный противоположно ΔABC . Пусть Q — такая точка, что ΔT_1T_2Q — правильный, ориентированный так же, как ΔABC .

2.5. Прямая l_A параллельна CP и BQ , прямая l_B параллельна AP и CQ , прямая l_C параллельна BP и AQ .

2.6. Найдите геометрическое место таких точек X , что прямые, проходящие через A, B, C и параллельные BX, CX, AX соответственно, пересекаются в одной точке.

2.7. Точки P и Q лежат на описанном эллипсе Штейнера.

2.8.

a) Прямые, проходящие через A, B, C и параллельные соответственно l_A, l_B, l_C , пересекаются в некоторой точке R .

b) R лежит на описанном эллипсе Штейнера.

2.9. У ΔABC и ΔPQR площади равны, а центры тяжести совпадают.

2.10. M_T лежит на вписанном эллипсе Штейнера.

2.11. Прямая T_1T_2 является нормалью к вписанному эллипсу Штейнера.

³Задачи 2.2–2.11 этого раздела и их решения взяты из неопубликованной работы Н.Белухова [2].

3 Гипербола Кипера

Пусть ABC' , BCA' , CAB' — подобные, одинаково ориентированные равнобедренные треугольники с основаниями AB , BC , CA .

3.1.

a) Прямые AA' , BB' , CC' пересекаются в одной точке.

b) Геометрическим местом точек пересечения является равносторонняя гипербола, проходящая через A , B , C , M , H . Она называется *гиперболой Кипера*.

Обозначим через $X(\varphi)$ точку гиперболы Кипера, соответствующую углу φ при основании равнобедренных треугольников. Причем угол φ будем считать положительным, если треугольники построены во внешнюю от $\triangle ABC$ сторону, и отрицательным в противном случае.

3.2. Точка $X^*(\varphi)$ лежит на прямой OL .

3.3.

a) Все прямые $X(\varphi)X(-\varphi)$ проходят через L .

b) Все прямые $X(\varphi)X(\pi/2 - \varphi)$ проходят через O .

c) Все прямые $X(\varphi)X(\pi/2 + \varphi)$ проходят через E .

3.4. Точки $X(\varphi_1)$, $X(\varphi_2)$, $X^*(\varphi_3)$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \equiv 0 \pmod{\pi}$.

3.5.

a) Перпендикуляры из точек A , B , C на прямые $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ соответственно пересекаются в одной точке.

b) Эта точка лежит на гиперболе Кипера.

4 Кубика Нейберга

4.1. Пусть $\triangle UVW$ — правильный, X — произвольная точка плоскости, X_u , X_v , X_w — точки, симметричные X относительно прямых VW , WU , UV соответственно.

a) Прямые UX_u , VX_v , WX_w пересекаются в одной точке.

b) Прямые Эйлера $\triangle XUV$, $\triangle XVW$ и $\triangle XWU$ пересекаются в одной точке.

4.2. Для точки X , не лежащей на описанной окружности $\triangle ABC$, утверждения предыдущей задачи выполняются тогда и только тогда, когда прямая XX^* параллельна прямой Эйлера.

Геометрическим местом таких точек X , что прямая XX^* параллельна прямой Эйлера, является кривая третьего порядка, которая называется *кубикой Нейберга*.

4.3. Кубика Нейберга проходит через A , B , C , O , H , I , I_a , I_b , I_c , T_1 , T_2 , T_1^* , T_2^* .

4.4.

a) Если кубика Нейберга содержит некоторую прямую, то она также содержит некоторую окружность.

b) Если $AC = BC$, то кубика Нейберга состоит из биссектрисы угла C и окружности с центром C и радиусом AB .

c) Если $\angle C = 60^\circ$, то кубика Нейберга состоит из внешней биссектрисы угла C и окружности, симметричной описанной окружности $\triangle ABC$ относительно прямой AB .

d) Если $\angle C = 120^\circ$, то кубика Нейберга состоит из внутренней биссектрисы угла C и окружности, симметричной описанной окружности $\triangle ABC$ относительно прямой AB .

e) Свойство из п.а) выполняется тогда и только тогда, когда прямая Эйлера параллельна одной из биссектрис треугольника (внутренней или внешней). В этом случае соответствующая биссектриса целиком принадлежит кубике Нейберга.

f) Свойства из пп. а) и е) выполняются только в случаях, перечисленных в пп. b), c), d).

4.5. Если точка D лежит на кубике Нейберга $\triangle ABC$, то A лежит на кубике Нейберга $\triangle BCD$ и аналогичные свойства выполнены для вершин B, C .

Список литературы

- [1] Акопян А.В., Заславский А.А. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.
- [2] N.Beluhov. Ten Concurrent Euler Lines. Unpublished, 2009. (Частично опубликовано как Ten Concurrent Euler Lines, <http://forumgeom.fau.edu/FG2009volume9/FG200924.pdf>.)
- [3] A.Zaslavsky. Geometry of Kiepert and Grinberg–Myakishev Hyperbolas. <http://www.jcgeometry.org/Articles/Volume1/JCG2012V1pp65-71.pdf>
- [4] D.Banerjee, S.Mukherjee. Neuberg Locus And Its Properties. <http://www.jcgeometry.org/Articles/Volume2/JCG2013V2pp26-38.pdf>

Точки Ферма, прямые Эйлера и кое-что еще

Н.Белухов, А.Заславский,
О.Заславский, П.Кожевников, Д.Креков¹
Решения

1 Точки Торричелли, Наполеона и Аполлония

1.1. **Первое решение.** Применяя теорему синусов к треугольникам AT_aB и AT_aC , получаем

$$\sin \angle BAT_a : \sin \angle ABT_a = BT_a : AT_a = CT_a : AT_a = \sin \angle CAT_a : \sin \angle ACT_a.$$

Следовательно, $\sin \angle BAT_a : \sin \angle CAT_a = \sin(\angle B + \pi/3) : \sin(\angle C + \pi/3)$. Аналогично получаем, что $\sin \angle ACT_c : \sin \angle BCT_c = \sin(\angle A + \pi/3) : \sin(\angle B + \pi/3)$ и $\sin \angle CBT_b : \sin \angle ABT_b = \sin(\angle C + \pi/3) : \sin(\angle A + \pi/3)$. Значит, по теореме Чевы AT_a , BT_b и CT_c пересекаются в одной точке. Второе утверждение доказывается аналогично.

Второе решение. Так как поворот на 60° вокруг точки A переводит $\triangle ABT_b$ в $\triangle AT_cC$, прямые BT_b и CT_c проходят через общую точку окружностей, описанных около $\triangle ABT_c$ и $\triangle CAT_b$. Используя аналогичное рассуждение для точек B и C , получаем, что прямые AT_a , BT_b , CT_c и описанные окружности $\triangle ABT_c$, $\triangle BCT_a$, $\triangle CAT_b$ проходят через одну точку (рис.1).

Аналогично доказывается вторая часть задачи.

1.2. Доказательство аналогично первому решению предыдущей задачи.

1.3. **Первое решение.**

а) Применяя теорему косинусов к треугольнику CN_aN_b , получаем

$$N_aN_b^2 = \frac{CA^2}{3} + \frac{CB^2}{3} - 2\frac{CA \cdot CB}{3} \cos(\angle C + \pi/3) = \frac{CA^2 + CB^2 + AB^2}{6} + \frac{2S_{ABC}}{\sqrt{3}}.$$

Очевидно, для других сторон получаем такие же выражения. Для второго треугольника доказательство аналогично.

б) Следует из легко проверяемых векторных равенств $A\vec{N}_b + B\vec{N}_c + C\vec{N}_a = \vec{0}$ и $A\vec{N}'_b + B\vec{N}'_c + C\vec{N}'_a = \vec{0}$.

с) Следует из полученных в п.а) выражений для сторон правильных треугольников $N_aN_bN_c$ и $N'_aN'_bN'_c$.

Второе решение.

а) Так как AT_1 — общая хорда окружностей AT_cBT_1 и AT_bCT_1 , она перпендикулярна линии центров N_bN_c этих окружностей. Аналогично $BT_b \perp N_cN_a$ и $CT_c \perp N_aN_b$. Значит $\triangle N_aN_bN_c$ — правильный, для $\triangle N'_aN'_bN'_c$ доказательство аналогично.

¹Проект подготовлен Н.Белуховым и А.Заславским. Представлен на Конференции А.Заславским, О.Заславским, П.Кожевниковым и Д.Крековым.

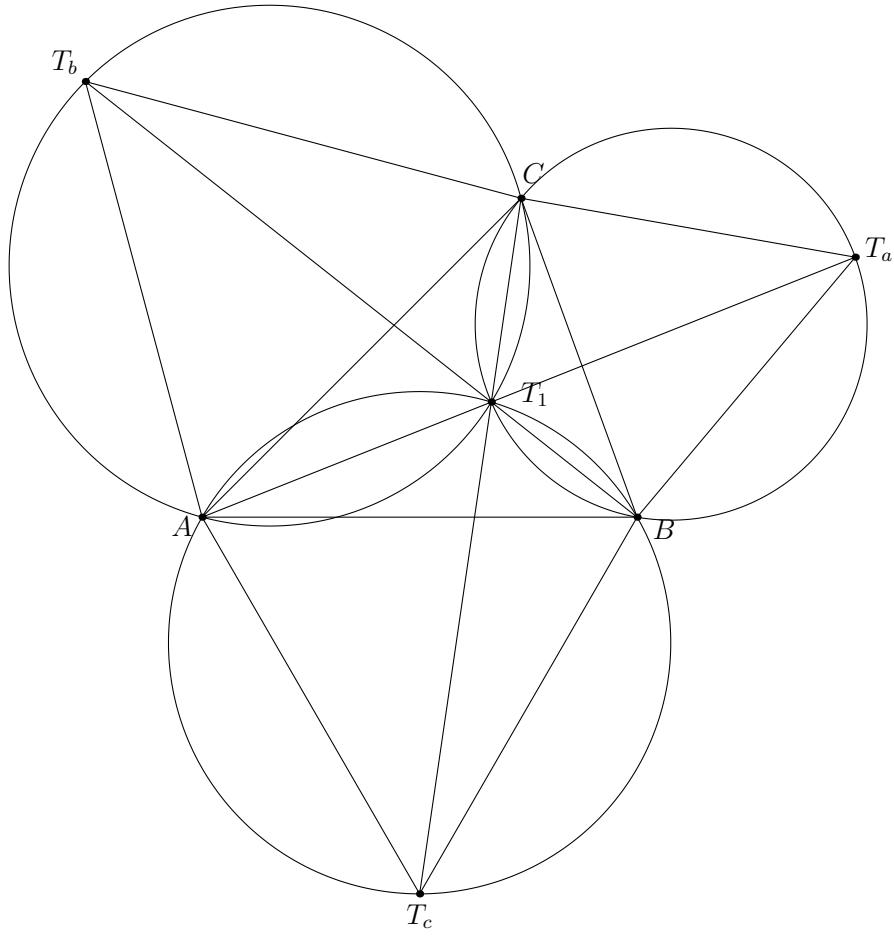


Рис. 1

c) Заметим, что $\triangle AN_bN_c \simeq \triangle T_1N_bN_c$, $\triangle BN_cN_a \simeq \triangle T_1N_cN_a$ и $\triangle CN_aN_b \simeq \triangle T_1N_aN_b$. Следовательно,

$$S_{N_aN_bN_c} = \frac{1}{2}(S_{ABC} + S_{ABN_c} + S_{BCN_a} + S_{CAN_b}).$$

Аналогично

$$S_{N'_aN'_bN'_c} = \frac{1}{2}(-S_{ABC} + S_{ABN'_c} + S_{BCN'_a} + S_{CAN'_b}).$$

1.4.

a) Следует из второго решения задачи 1.1.

b) Пусть X — произвольная точка плоскости, а поворот на 60° вокруг A , переводящий $\triangle ABT_b$ в $\triangle AT_cC$, переводит T_1 и X в T' и Y соответственно. Тогда (рис.2)

$$AX + BX + CX = CX + XY + YT_c \geq CT_c = CT_1 + T_1T' + T'T_c = AT_1 + BT_1 + CT_1.$$

Равенство достигается только при $X \equiv T_1$.

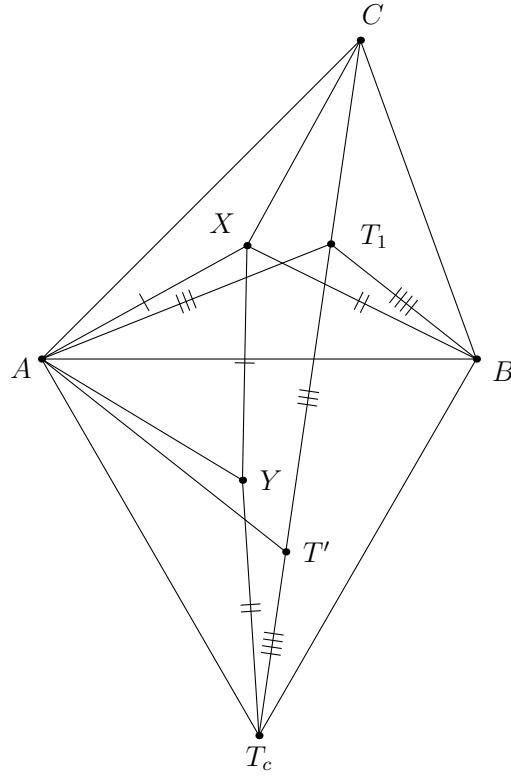


Рис. 2

(Неравенство $XA + XB \geq XT_c$ можно также получить из теоремы Птолемея для четырехугольника ABT_cX .)

1.5. Пусть AT_1 , BT_1 и CT_1 повторно пересекают описанную около $\triangle ABC$ окружность k в точках A'' , B'' и C'' соответственно. Тогда $\triangle A''B''C''$ подобен $\triangle A'B'C'$ и остается доказать, что расстояния Ферма для $\triangle ABC$ и $\triangle A''B''C''$ равны.

Первое решение. Пусть $\triangle B''C''T_a''$ — правильный и построенный во внешнюю сторону от $\triangle A''B''C''$. Из решения предыдущей задачи следует, что расстояния Ферма равны AT_a и $A''T_a''$ (рис.3).

Пусть BT_a , CT_a , $B''T_a''$ и $C''T_a''$ повторно пересекают k в точках B_1 , C_1 , B_1'' и C_1'' . Счетом углов получаем, что $BC_1'' \parallel CB_1'' \parallel B''C_1 \parallel C''B_1$. Следовательно, чертеж симметричен относительно серединного перпендикуляра $s_{AA''}$ к отрезку AA'' . Значит, отрезки AT_a и $A''T_a''$ симметричны относительно $s_{AA''}$, а их длины равны.

Второе решение. Пусть окружность k' , проходящая через T_1 и концентричная с k , повторно пересекает прямые AA'' , BB'' и CC'' в точках K_a , K_b и K_c соответственно. Рассмотрим случай, когда точки A , T_1 , K_a , A'' ; B , T_1 , K_b , B'' и C , K_c , T_1 , C'' лежат на соответствующих прямых именно в таком порядке, остальные случаи разбираются аналогично.

В силу симметрии $AT_1 = K_aA''$, $BT_1 = K_bB''$ и $CK_c = T_1C''$. Осталось доказать, что $T_1K_a + T_1K_b = T_1K_c$, но это следует из теоремы Птолемея для четырехугольника $T_1K_aK_bK_c$.

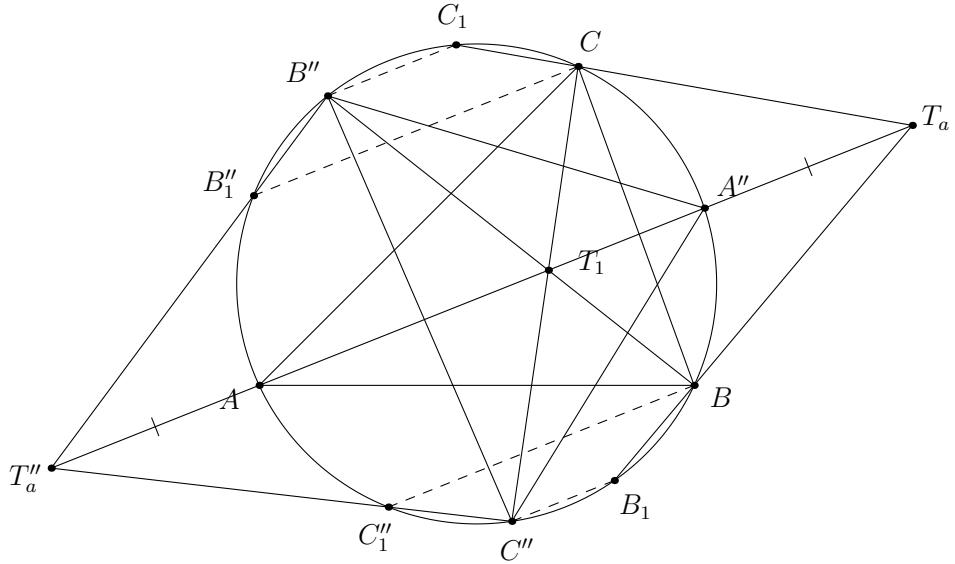


Рис. 3

1.6.

a) Очевидно, N'_c лежит на описанной окружности k_c треугольника ABT_c , причем $N'_c T_c$ — диаметр этой окружности. Так как T_1 тоже лежит на k_c , то $\angle N'_c T_1 C = \pi/2$. С другой стороны, $M_C M : M_C C = M_C N_c : M_C T_c = 1 : 3$, т.е. $N_c M \parallel CT_c$. Следовательно, $N_c M$ — серединный перпендикуляр к $N'_c T_1$ и $MN'_c = MT_1$ (рис.4).

b) Так как центром окружности $N'_a N'_b N'_c$ является точка M и $\angle N'_c T_1 C = \pi/2$, вторая точка пересечения окружности $N'_a N'_b N'_c$ с прямой CT_c симметрична N'_c относительно M (рис.4). Поскольку прямая CM делит отрезок $N'_c T_c$ в отношении 1 : 3, утверждение задачи следует из теоремы Менелая.

1.7.

a) См. второе решение задачи 1.3а).

b) Применив теорему косинусов к треугольникам $AT_b N_c$ и $BT_a N_c$, получаем, $N_c T_a^2 - N_c T_b^2 = CT_a^2 - CT_b^2$, что, очевидно, равносильно утверждению задачи.

1.8.

a) Точки, симметричные T_1^* относительно AB , BC , CA , образуют треугольник, для которого прямые $T_1 A$, $T_1 B$, $T_1 C$ являются серединными перпендикулярами к сторонам. Следовательно, углы этого треугольника равны 60° (рис.5).

b) Пусть X , Y — проекции T_1^* на AC , BC соответственно. Тогда четырехугольник CXT_1^*Y вписан в окружность с диаметром CT_1^* , т.е. $XY = CT_1^* \cdot \sin \angle C$ и искомое утверждение следует из предыдущего пункта.

1.9. Прямые AT_1 , BT_1 , CT_1 проходят через точки, симметричные T_1^* относительно BC , CA , AB соответственно. Поэтому после отражения от сторон все три шара попадут в точку T_1^* , причем за одинаковое время (рис.5). (Следствие из этой задачи предлагалось на 28 Турнире городов, весна, 10-11.7. Прямые, симметричные AT_1 , BT_1 , CT_1 относительно противоположных сторон треугольника, пересекаются в одной точке.)

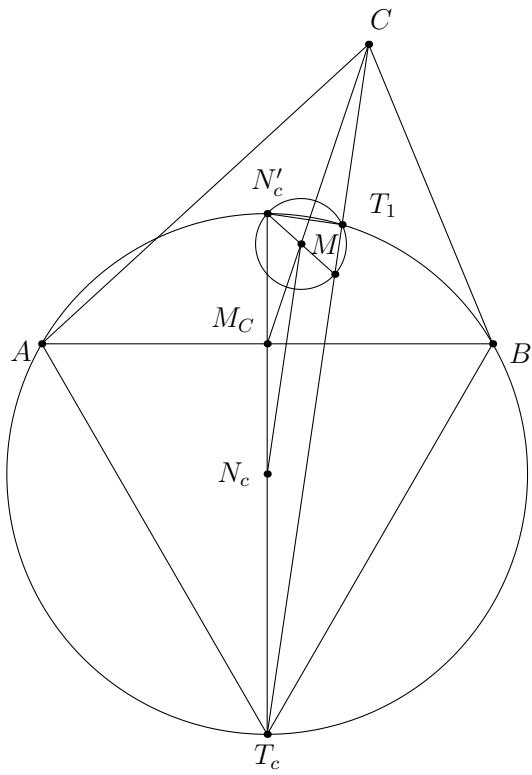


Рис. 4

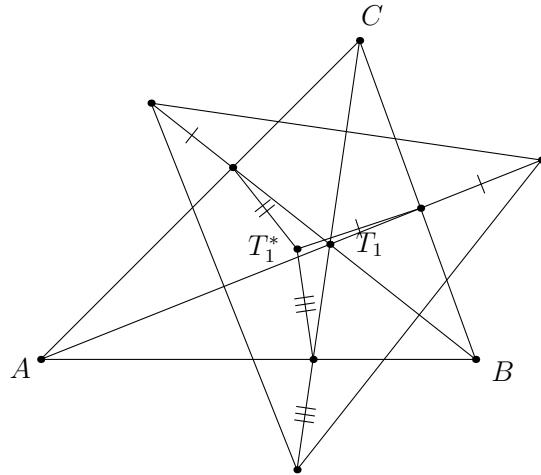


Рис. 5

1.10. Геометрическим местом точек X , удовлетворяющих условию $AX : BX = AC : BC$, является окружность Ω_a , перпендикулярная описанной окружности треугольника ABC . Так как точки T_1^* , T_2^* являются общими точками этой и двух аналогичных окружностей Ω_b , Ω_c , они инверсны относительно описанной окружности треугольника.

1.11. Точки T_1^* , T_2^* лежат на окружностях Ω_a , Ω_b , Ω_c , центрами которых являются точки S_a , S_b , S_c пересечения сторон треугольника с касательными

к его описанной окружности в противоположных вершинах. Прямая $S_aS_bS_c$ является полярой точки L относительно описанной окружности, следовательно, она перпендикулярна прямой OL . Но проходящая через O прямая $T_1^*T_2^*$ также перпендикулярна линии центров. Два других утверждения задачи являются частными случаями задачи 3.3.

- 1.12. Частный случай задачи 3.3.
- 1.13. Частный случай задачи 3.3.
- 1.14. Частный случай теоремы о трех парах изогональных точек (см. [1]).
- 1.15. Следует из задач 3.1, 3.2.

2 Прямые Эйлера и эллипсы Штейнера

Во всех решениях этого раздела мы рассматриваем случай, когда T_1 лежит внутри $\triangle ABC$, а четырехугольник $ABCT_2$ — выпуклый. Другие случаи разбираются аналогично.

2.1. Покажем, что прямая Эйлера $\triangle BCT_1$ проходит через M . Для остальных треугольников доказательство аналогично.

Пусть M_a — центр тяжести $\triangle BCT_1$. Так как N_a — центр описанной окружности $\triangle BCT_1$, прямая Эйлера этого треугольника совпадает с M_aN_a (рис.6).

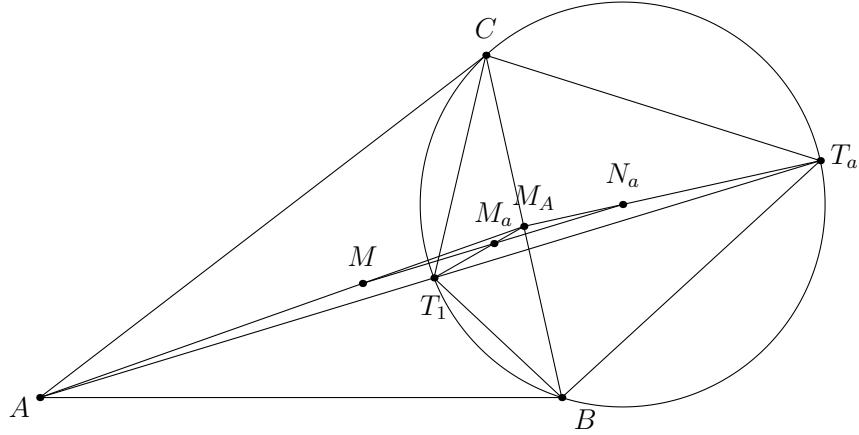


Рис. 6

Так как точки A , T_1 и T_a лежат на одной прямой, а M , M_a и N_a делят отрезки M_AA , M_AT_1 и M_AT_a соответственно в отношении $1 : 2$, эти точки также лежат на одной прямой.

2.2. Пусть M_a и O_a — центр тяжести и центр описанной окружности соответственно $\triangle AT_1T_2$. Поскольку N_bN_c — серединный перпендикуляр к отрезку AT_1 , а $N'_bN'_c$ — серединный перпендикуляр к AT_2 , прямые N_bN_c и $N'_bN'_c$ пересекаются в точке O_a (рис.7).

Обозначим через x острый угол между прямыми MO_a и $N'_bN'_c$.

Так как M — общий центр $\triangle N_aN_bN_c$ и $\triangle N'_aN'_bN'_c$, то $\angle MN_cN_b = \angle MN'_bN'_c = 30^\circ$. Значит, четырехугольник $MO_aN_cN'_b$ — вписанный и

$$\angle N_bN_cN'_b = \angle O_aN_cN'_b = 180^\circ - \angle N'_bMO_a = \angle MO_aN'_b + \angle O_aN'_bM = x + 30^\circ.$$

Заметим, что $\triangle AN_bT_b$, $\triangle AN_cB$ и $\triangle AN'_bC$ — подобны и одинаково ориентированы. Поэтому A — центр подобия, переводящего $\triangle N_bN_cN'_b$ в $\triangle T_bBC$. Следовательно,

$$\angle T_1BC = \angle T_bBC = \angle N_bN_cN'_b = x + 30^\circ.$$

Пусть точка T' симметрична T_1 относительно M_A . Тогда $\angle BT'C = \angle BT_1C = 120^\circ$. Поэтому четырехугольник $BT'CT_2$ вписанный и

$$\angle BT_2T' = \angle BCT' = \angle T_1BC = x + 30^\circ.$$

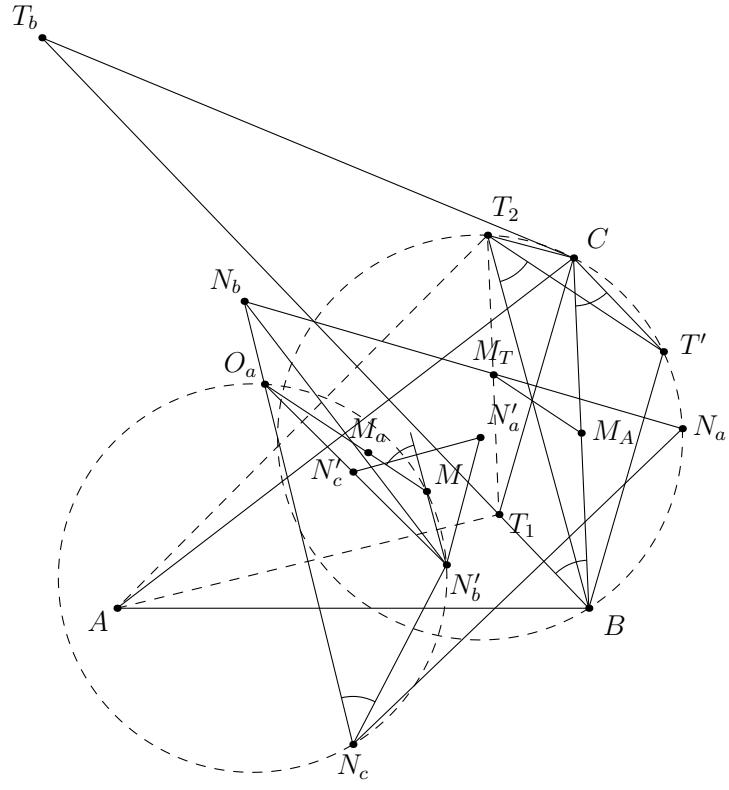


Рис. 7

Так как прямые BT_2 и $N'_a N'_c$ перпендикулярны, угол между прямыми BT_2 и $N'_b N'_c$ равен 30° . Отсюда, с учетом равенства $\angle BT_2 T' = x + 30^\circ$ получаем, что $MO_a \parallel T'T_2$.

Так как M_A и M_T — середины $T_1 T'$ и $T_1 T_2$ соответственно, то $M_A M_T \parallel T'T_2$.

Так как M и M_a делят отрезки AM_A и AM_T соответственно в отношении $2 : 1$, то $MM_a \parallel M_A M_T$.

Таким образом, $MO_a \parallel T'T_2 \parallel M_A M_T \parallel MM_a$. Следовательно, M , M_a и O_a лежат на одной прямой, M лежит на l_A и $l_A \parallel M_A M_T$.

2.3. Первое решение. Следует из задачи 2.1 и решения задачи 2.2.

Второе решение. Применив утверждение задачи 4.4d) к $\triangle ABT_1$ и точке T_2 , получим, что l_A , l_B и прямая Эйлера $\triangle ABT_2$ пересекаются в одной точке. Аналогично l_A , l_B и прямая Эйлера $\triangle ABT_1$ пересекаются в одной точке. Отсюда по задаче 2.1 получаем, что l_A и l_B пересекаются в точке M .

2.4. В зависимости от ориентации $\triangle T_1 T_2 T_3$ существуют две точки T_3 , удовлетворяющие условию: $T_3 \equiv P$ или $T_3 \equiv Q$. Обычно в геометрических задачах ориентация несущественна. Однако, в данной задаче доказательства для двух положений точки T_3 принципиально различны.

Случай 1. $T_3 \equiv P$.

Пусть точка A' изогонально сопряжена A относительно $\triangle T_1 T_2 P$, а A'' симметрична A' относительно $T_1 T_2$ (рис.8).

Тогда $\angle A'' T_1 T_2 = \angle T_2 T_1 A' = 180^\circ - \angle P T_1 A$ = (так как $\angle A T_1 C = 120^\circ$ и

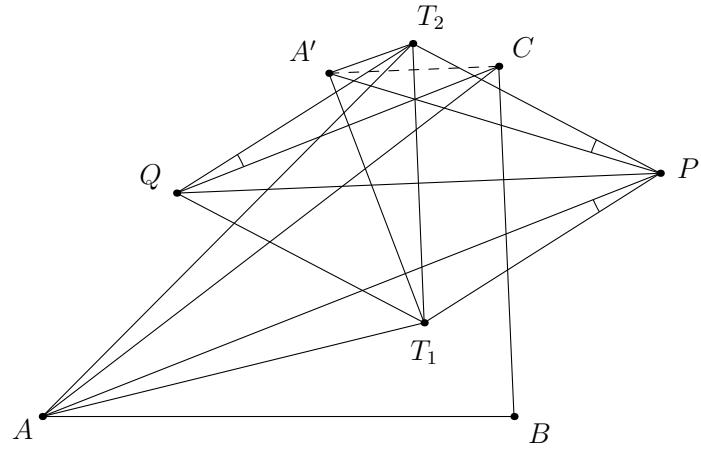


Рис. 8

$$\angle PT_1T_2 = 60^\circ = \angle CT_1T_2.$$

Следовательно T_1 , A'' и C лежат на одной прямой. Аналогично T_2 , A'' и C лежат на одной прямой. Значит, $A'' \equiv C$.

Композиция симметрий относительно внутренней биссектрисы $\angle T_1PT_2$ и прямой T_1T_2 переводит прямую AP в CQ , значит, $AP \parallel CQ$. Аналогично $BP \parallel AQ$ и $CP \parallel BQ$.

Таким образом, если $T_3 \equiv P$, то три прямые пересекаются в точке Q .

Случай 2. $T_3 \equiv Q$.

Пусть прямые AP и BQ пересекаются в точке X , а $\triangle RYB$ и $\triangle ZCP$ являются образами $\triangle AQX$ при соответствующих параллельных переносах (рис.9).

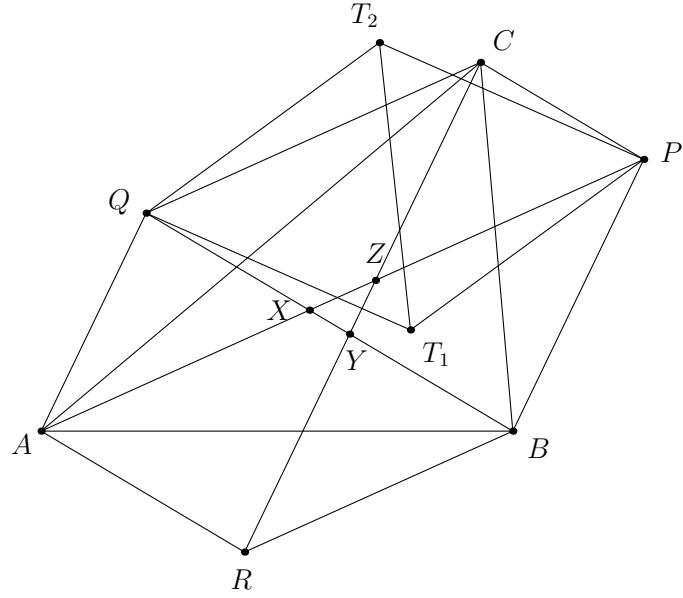


Рис. 9

Тогда точки C , Y , Z и R лежат на одной прямой, $AR \parallel BQ \parallel CP$, $AP \parallel BR \parallel CQ$ и $AQ \parallel BP \parallel CR$.

Следовательно, если $T_3 \equiv Q$, то три прямых пересекаются в точке R .

2.5. Первое решение. По задаче 2.2 прямые l_A и M_AM_T параллельны. По задаче 2.4 прямые CP и BQ параллельны. Так как M_T — середина PQ , получаем, что M_AM_T средняя линия полосы между CP и BQ , т.е. эти три прямые параллельны .

Второе решение. По задаче 4.1б) P лежит на кубике Нейберга ΔAT_1T_2 . Так как P и C изогонально сопряжены, то по задаче 4.2 $l_A \parallel CP$.

2.6. Пусть X — такая точка, что прямые, проходящие через A, B, C и параллельные соответственно BX, CX, AX , пересекаются в некоторой точке Y .

Рассмотрим аффинное преобразование α , переводящее ΔABC в правильный $\Delta A'B'C'$. Пусть $\alpha(X) = X'$ и $\alpha(Y) = Y'$. Тогда прямые, проходящие через A', B', C' и параллельные соответственно $B'X', C'X', A'X'$ пересекаются в Y' .

Рассмотрим поворот ρ , переводящий A' в B' , B' в C' и C' в A' .

Пусть $\rho(Y') = Z'$. Тогда каждый из углов $\angle X'A'Z'$, $\angle X'B'Z'$ и $\angle X'C'Z'$ равен либо 60° , либо 120° . Следовательно, точки X', Z', A', B' и C' лежат на одной окружности.

Таким образом, X' лежит на окружности, описанной около $\Delta A'B'C'$. Соответственно, X лежит на описанном эллипсе Штейнера ΔABC .

2.7. Следует из задач 2.4 и 2.6.

2.8. Следует из задачи 2.5 и случая 2 задачи 2.4.

2.9–2.11. Определим аффинное преобразование α и $\Delta A'B'C'$ аналогично решению задачи 2.6. Пусть $\alpha(\Delta PQR) = \Delta P'Q'R'$.

Аналогично решению задачи 2.6 получаем, что $\Delta A'B'C'$ и $\Delta P'Q'R'$ — равные правильные треугольники с общим центром. Значит, их площади равны, а центры тяжести совпадают. Сделав обратное преобразование, получим, что оба этих свойства сохраняются для ΔABC и ΔPQR .

Так как середина $P'Q'$ лежит на окружности e' , вписанной в $\Delta A'B'C'$ и $\Delta P'Q'R'$, середина PQ лежит на общем вписанном эллипсе Штейнера e ΔABC и ΔPQR .

Так как $P'Q'$ касается e' и касание сохраняется при аффинном преобразовании, то PQ касается e в точке M_T . Поскольку прямая T_1T_2 — перпендикуляр к PQ в точке M_T , она является нормалью к e .

3 Гипербола Кипера

3.1.

- a) Аналогично задачам 1.1 и 1.2.
- b) Воспользуемся следующим, легко проверяемым утверждением (подробнее см. [1], [3]).

Лемма. Пусть даны две точки A, B и отображение f , которое переводит каждую прямую l , проходящую через A , в прямую $f(l)$, проходящую через B , сохраняя двойные отношения четверок прямых. Тогда геометрическим местом точек пересечения l и $f(l)$ является коника, проходящая через A и B (если $f(AB) = AB$, коника распадается на AB и еще одну прямую).

Легко видеть, что отображение, переводящее прямую AA' в BB' , удовлетворяет условию леммы. Следовательно, геометрическим местом точек пересечения этих прямых будет проходящая через A и B коника. Если треугольники $AB'C$ и $CA'B$ с углами при основании, равными $\angle C$, построены во внутреннюю сторону, то прямые AA' и BB' совпадают с AC и BC соответственно, поэтому точка C также лежит на этой конике. Кроме того, коника, очевидно, проходит через точки M и H и, следовательно, является равносторонней гиперболой.

Примечание. Поскольку коника однозначно определяется пятью точками, геометрическим местом точек пересечения прямых AA' и CC' будет та же гипербола. Отсюда можно получить еще одно доказательство п.а).

3.2. При изогональном сопряжении описанная около треугольника коника переходит в прямую. Поскольку гипербола Кипера проходит через M и H , сопряженная прямая совпадает с прямой OL .

Заметим, что инверсные относительно описанной окружности точки T_1^* , T_2^* при изогональном сопряжении переходят в противоположные точки гиперболы. Следовательно, точка M_T является центром гиперболы Кипера и, значит, лежит на окружности Эйлера. Отсюда и из задачи 2.9 получаем, что точка R лежит на описанной окружности ΔABC .

Обозначим через $A'(\varphi)$, $B'(\varphi)$, $C'(\varphi)$ вершины равнобедренных треугольников с углом при основании φ так, что прямые $AA'(\varphi)$, $BB'(\varphi)$ и $CC'(\varphi)$ пересекаются в точке $X(\varphi)$.

3.3. Первое решение.

а) Если проецировать гиперболу Кипера из точки A на серединный перпендикуляр к BC , то точки $X(\varphi)$ и $X(-\varphi)$ перейдут в точки $A'(\varphi)$ и $A'(-\varphi)$, симметричные относительно BC . Поэтому отображение гиперболы на себя, переводящее $X(\varphi)$ в $X(-\varphi)$, сохраняет двойные отношения.

Также сохраняет двойные отношения отображение, переводящее точку X во вторую точку пересечения гиперболы с прямой XL . Поэтому для доказательства утверждения достаточно найти три значения φ , при которых эти отображения совпадают.

При $\varphi = \angle A$ точка $X(-\varphi)$ совпадает с A , а $X(\varphi)$ лежит на симедиане из A . Аналогично получаем совпадение отображений при $\varphi = \angle B$ и $\varphi = \angle C$.

Два других пункта доказываются аналогично.

Второе решение. а), б) Следует из задачи 3.4. с) Аналогично первому решению задачи 3.4. Воспользуемся тем, что AE проходит через $A'(90^\circ - \angle A)$ и аналогичными утверждениями для BE и CE .

Частными случаями этой задачи при $\varphi = \pi/3$ и $\varphi = \pi/6$ являются утверждения задач 1.11–1.13.

3.4. Первое решение. (Н. Белухов) Используем следующую лемму.

Лемма. Пусть $\varphi_1 + \varphi_2 = \angle A$. Тогда прямые $AA'(\varphi_1)$ и $AA'(\varphi_2)$ симметричны относительно биссектрисы угла A .

Доказательство. Пусть L_A и L'_A — середины соответственно дуги BC , не содержащей A , и дуги BAC окружности k , описанной вокруг ΔABC (рис.10). Тогда BL_A и BL'_A биссектрисы $\angle A'(\varphi_1)BA'(\varphi_2)$ в $\triangle BA'(\varphi_1)A'(\varphi_2)$. Следовательно, окружность k , описанная вокруг $\triangle BL_AL'_A$ является окружностью Аполло-

ния, соответствующей вершине B , для $\triangle BA'(φ_1)A'(φ_2)$. Поэтому AL_A и AL'_A — биссектрисы $\angle A'(φ_1)AA'(φ_2)$.

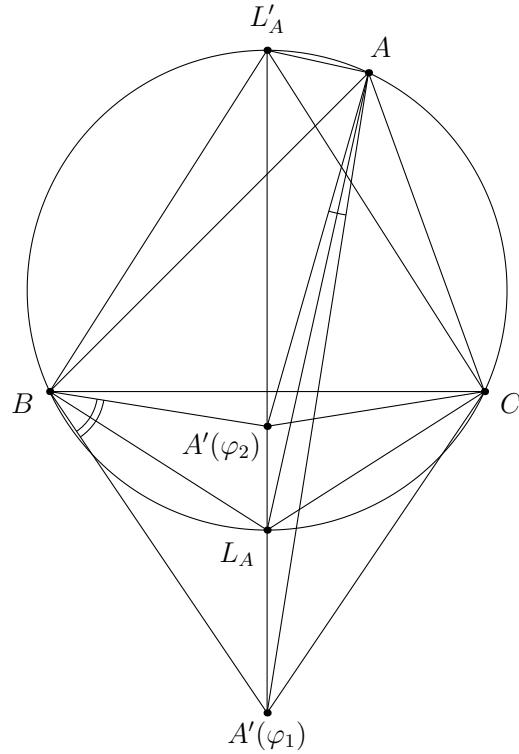


Рис. 10

Пусть теперь $X(φ_1)X(φ_2)$ пересекает AB в точке Y .

Необходимым и достаточным условием того, что точка $X^*(φ_3)$ лежит на прямой $X(φ_1)X(φ_2)$ будет совпадение точек пересечения $AX^*(φ_3)$ и $BX^*(φ_3)$ с $X(φ_1)X(φ_2)$. Это равносильно тому, что двойное отношение прямых AY , $AX(φ_1)$, $AX(φ_2)$ и $AX^*(φ_3)$ равно двойному отношению BY , $BX(φ_1)$, $BX(φ_2)$ и $BX^*(φ_3)$.

Прямые AY , $AX(φ_1)$, $AX(φ_2)$ и $AX^*(φ_3)$ пересекают серединный перпендикуляр к AC в точках $A'(-∠A)$, $A'(φ_1)$, $A'(φ_2)$ и (по лемме) $A'(\angle B - φ_3) \equiv A'(\angle B + φ_1 + φ_2)$. Следовательно, углы между этими прямыми равны $∠A + φ_1$, $φ_2 - φ_1$ и $∠B + φ_1$.

Аналогично получаем, что прямые BY , $BX(φ_1)$, $BX(φ_2)$ и $BX^*(φ_3)$ образуют между собой те же углы, но в противоположном порядке.

Второе решение. Обозначим сумму $φ_1 + φ_2$ через $2φ_0$.

Рассуждая также, как в предыдущей задаче, получаем, что четырехугольник $X(φ_1)X(φ_0)X(φ_2)X(π/2 + φ_0)$ — гармонический, т.е прямая $X(φ_1)X(φ_2)$ проходит через полюс прямой $X(φ_0)X(π/2 + φ_0)$.

Но последняя прямая при любом $φ_0$ проходит через точку E . Следовательно все прямые $X(φ_1)X(φ_2)$ проходят через некоторую точку X поляры E , которая по предыдущей задаче совпадает с прямой OL .

Поскольку гипербола Кипера является изогональным образом прямой OL , полученная выше точка X будет точкой, изогонально сопряженной некоторой точке $X(\varphi_3)$ гиперболы. Чтобы установить связь между φ_3 и φ_1, φ_2 , воспользуемся теоремой о двух парах изогонально сопряженных точек.

Пусть $X(\varphi_1), X(\varphi_2)$ — две точки гиперболы Кипера, $X^*(\varphi_1), X^*(\varphi_2)$ — изогонально сопряженные им точки прямой OL . По теореме о двух парах изогонально сопряженных точек прямые $X(\varphi_1)X^*(\varphi_2)$ и $X^*(\varphi_1)X(\varphi_2)$ пересекаются на гиперболе Кипера.

Параметр, соответствующий этой точке равен с одной стороны $f(\varphi_1) - \varphi_2$, а с другой — $f(\varphi_2) - \varphi_1$, где f — некоторая, пока неизвестная функция. Отсюда получаем $f(\varphi_1) + \varphi_1 = f(\varphi_2) + \varphi_2 = \text{const}$, и подставив, например, $\varphi_2 = 0$, получаем $f(\varphi) = -\varphi$, что равносильно утверждению задачи.

3.5.

а) Поскольку перпендикуляры из вершин треугольника $A'B'C'$ на стороны треугольника ABC пересекаются в точке O , перпендикуляры из вершин треугольника $A'B'C'$ на стороны треугольника $A''B''C''$ также пересекаются в одной точке.

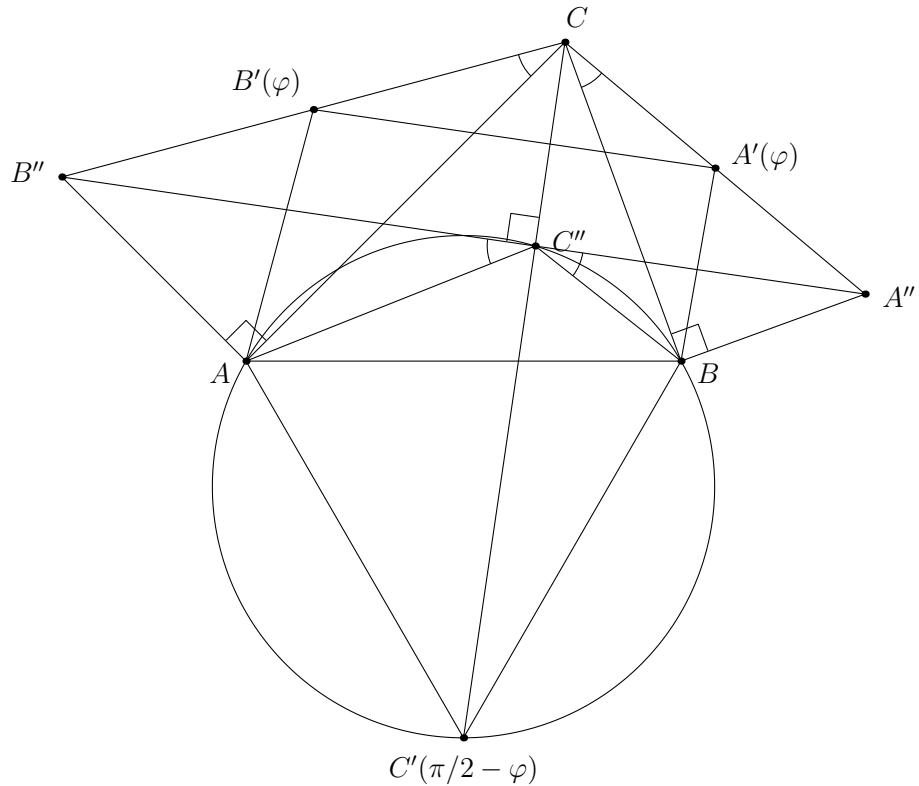


Рис. 11

б) Воспользуемся следующей леммой.

Лемма. Прямые $A'(\varphi)B'(\varphi)$ и $CC'(\pi/2 - \varphi)$ перпендикулярны.

Действительно, из леммы следует, что центром ортологичности треугольников ABC и $A'B'C'$ является точка $X(\pi/2 - \varphi)$.

Доказательство 1. Пусть точки A'' и B'' симметричны C относительно $A'(\varphi)$ и $B'(\varphi)$ соответственно. Тогда $\angle CAB'' = \angle CBA'' = \pi/2$ и $A''B'' \parallel A'(\varphi)B'(\varphi)$ (рис.11).

Обозначим через C'' проекцию C на прямую $A''B''$. Так как четырехугольник $CC''BA''$ вписан в окружность с диаметром CA'' , то $\angle BC''A'' = \angle BCA'' = \varphi$. Аналогично $\angle AC''B'' = \varphi$.

Таким образом, четырехугольник $AC'(\pi/2 - \varphi)BC''$ вписанный. Следовательно, $\angle AC''C'(\pi/2 - \varphi) = \angle ABC'(\pi/2 - \varphi) = \pi/2 - \varphi$ и точки $C, C'', C'(\pi/2 - \varphi)$ лежат на одной прямой, что и требуется.

Доказательство 2. Пусть точка A'' симметрична A относительно $CB'(\varphi)$. Тогда $\triangle CA'(\varphi)B$ и $\triangle CB'(\varphi)A''$ подобны и одинаково ориентированы. Значит, $\triangle CA'(\varphi)B'(\varphi)$ и $\triangle CBA''$ также подобны и одинаково ориентированы, т.е угол между прямыми $A'(\varphi)B'(\varphi)$ и BA'' равен φ . (рис.12)

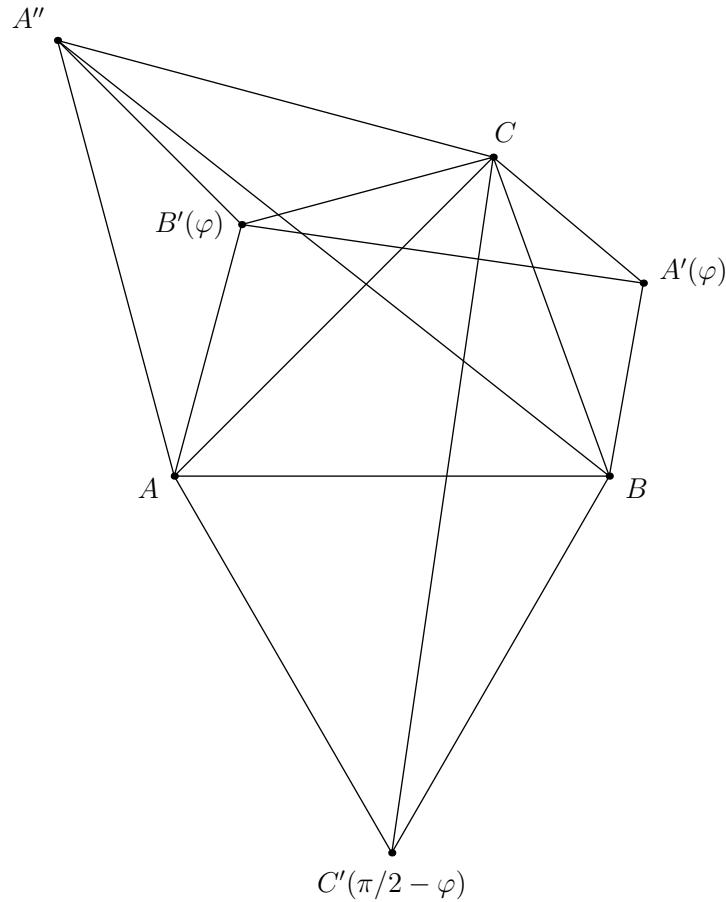


Рис. 12

Аналогично $\triangle AC'(\pi/2 - \varphi)B$ и $\triangle ACA''$ подобны и одинаково ориентированы. Следовательно, $\triangle ACC'(\pi/2 - \varphi)$ и $\triangle AA''B$ подобны и одинаково ориентированы, а угол между прямыми $CC'(\pi/2 - \varphi)$ и $A''B$ равен $\pi/2 - \varphi$.

4 Кубика Нейберга

4.1.

а) Все три прямые проходят через одну из точек Наполеона треугольника $X_u X_v X_w$.

б) (Из [2]) **Первое решение.** Два треугольника, образованных центрами тяжести и центрами описанных окружностей $\triangle XUV$, $\triangle XVW$ и $\triangle XWU$ ортологичны, причем оба центр ортологичности совпадают с центром $\triangle UVW$. Следовательно, эти треугольники перспективны.

Второе решение. Указание. Все три прямые проходят через одну из точек Наполеона треугольника, образованного центрами окружностей, описанных около $\triangle XUV$, $\triangle XVW$ и $\triangle XWU$.

4.2. См. [4].

4.3. (Из [2]) Приведем элементарное доказательство того, что прямые Эйлера $\triangle ABX$, $\triangle BCX$ и $\triangle CAZ$ пересекаются в одной точке, если $X \equiv I, I_a, I_b, I_c, T_1^*$, или T_2^* . Воспользуемся следующим утверждением.

Лемма. Пусть точка X не лежит на окружности k , описанной около $\triangle ABC$, а прямые AX , BX и CX повторно пересекают k в точках A' , B' и C' соответственно. Тогда прямые Эйлера $\triangle ABX$, $\triangle BCX$ и $\triangle CAZ$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда прямые Эйлера $\triangle A'B'X$, $\triangle B'C'X$ и $\triangle C'A'X$ пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть O_a — центр окружности, описанной около $\triangle BCX$, аналогично определим O_b , O_c , O'_a , O'_b и O'_c .

Предположим, что прямые Эйлера $\triangle A'B'X$, $\triangle B'C'X$ и $\triangle C'A'X$ пересекаются в точке Y' . Пусть точка Y'' изогонально сопряжена Y' относительно $\triangle O'_a O'_b O'_c$, а Y — такая точка, что четырехугольники $O_a O_b O_c Y$ и $O'_a O'_b O'_c Y''$ подобны. Тогда прямые Эйлера $\triangle ABX$, $\triangle BCX$ и $\triangle CAZ$ пересекаются в точке Y .

Вернемся к задаче.

Если X совпадает с I , I_a , I_b или I_c , то X — ортоцентр соответствующего $\triangle A'B'C'$ и утверждение задачи следует из леммы.

Если X совпадает с T_1^* или T_2^* , то $\triangle A'B'C'$ — правильный и утверждение следует из леммы и задачи 4.1b).

4.4.

а) Так как кубика Нейберга переходит в себя при изогональном сопряжении, она содержит точки (мнимые) пересечения бесконечной прямой с описанной окружностью треугольника. Любая коника, проходящая через эти точки, является окружностью.

б) Кубика Нейберга, очевидно, содержит биссектрису угла C . Кроме того, она содержит A , B и точки, симметричные им относительно противоположных сторон.

с) По задаче 4.1b) кубика Нейберга проходит через точки T_a , T_b и T_c' . Поскольку она проходит также через C , получаем, что внешняя биссектриса $\angle C$ пересекает кубику в четырех различных точках и, значит, целиком содержится в ней. Поскольку A , B , O и H лежат на окружности, симметричной описанной

окружности треугольника относительно прямой AB , эта окружность также целиком содержится в кубике.

d) Доказательство аналогично предыдущему пункту.

e) Предположим, что кубика Нейберга распадается на прямую l и окружность s . Поскольку s не может совпадать с описанной окружностью ΔABC , можно без ограничения общности предположить, что l содержит C . Так как кубика Нейберга изогонально сопряжена самой себе, прямая l' , изогонально сопряженная l , также целиком содержится в кубике. Значит $l \equiv l'$. По задаче 4.2, l параллельна прямой Эйлера.

f) (Из [2]) Воспользуемся утверждением п.е). Пусть L_C — середина дуги ACB окружности k , описанной около ΔABC . Предположим, что $AC \neq BC$ и прямая Эйлера параллельна CL_C . Тогда $CL_C O H$ — параллелограмм, следовательно CH равно радиусу описанной окружности ΔABC и $\angle C = 60^\circ$.

4.5. См. [4].

Список литературы

- [1] Акопян А.В., Заславский А.А. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.
- [2] N.Beluhov. Ten Concurrent Euler Lines. Unpublished, 2009. (A section of this paper was published as Ten Concurrent Euler Lines, <http://forumgeom.fau.edu/FG2009volume9/FG200924.pdf>.)
- [3] A.Zaslavsky. Geometry of Kiepert and Grinberg–Myakishev Hyperbolas. <http://www.jcgeometry.org/Articles/Volume1/JCG2012V1pp65-71.pdf>
- [4] D.Banerjee, S.Mukherjee. Neuberg Locus And Its Properties. <http://www.jcgeometry.org/Articles/Volume2/JCG2013V2pp26-38.pdf>

Fermat Points and Euler Lines

N. Beluhov, A. Zaslavsky,
P. Kozhevnikov, D. Krekov, O. Zaslavsky¹

Preliminaries

Given a nonequilateral $\triangle ABC$, we write M , H , O , I , I_a , I_b , and I_c for its medicenter, orthocenter, circumcenter, incenter, and excenters opposite A , B , and C .

The points O , M , and H lie on a line known as the *Euler line*. The point M divides the segment OH in ratio $1 : 2$.

The midpoints of the sides of $\triangle ABC$, the feet of its altitudes, and the midpoints of the segments AH , BH , and CH lie on a circle known as the *Euler circle* (or the *nine-point circle*). Its center is the midpoint E of the segment OH .

Let X be an arbitrary point in the plane of $\triangle ABC$. Then the reflections of the lines AX , BX , and CX in the bisectors of $\angle A$, $\angle B$, and $\angle C$ meet at a point X^* (or are parallel, in which case X^* is a point at infinity) known as the *isogonal conjugate* of X . The point $L = M^*$ is known as *Lemoine's point*.

For every triangle there exists an affine transformation mapping it onto an equilateral triangle. The inverse transformation maps the circumcircle and the incircle of that equilateral triangle onto two ellipses known as the circumscribed and inscribed *Steiner ellipses*.

1 The Fermat, Napoleon, and Apollonius points

Let $\triangle ABT_c$, $\triangle BCT_a$, and $\triangle CAT_b$ be equilateral triangles constructed externally on the sides of $\triangle ABC$ and let N_a , N_b , and N_c be their centers. Analogously, let $\triangle ABT'_c$, $\triangle BCT'_a$, and $\triangle CAT'_b$ be equilateral triangles constructed internally on the sides of $\triangle ABC$ and let N'_a , N'_b , and N'_c be their centers.

1.1. Show that² the lines AT_a , BT_b , and CT_c are concurrent, and that so are the lines AT'_a , BT'_b , and CT'_c .

The concurrency points thus obtained are known as the two *Fermat points* (or as the two *Torricelli points*). We denote them by T_1 and T_2 .

1.2. The lines AN_a , BN_b , and CN_c are concurrent, as are the lines AN'_a , BN'_b , and CN'_c .

The concurrency points thus obtained are known as the two *Napoleon points*. We denote them by N_1 and N_2 .

1.3.

a) Both of $\triangle N_a N_b N_c$ and $\triangle N'_a N'_b N'_c$ are equilateral.

¹Problems and solutions by N. Beluhov and A. Zaslavsky. Conference presentation by A. Zaslavsky, P. Kozhevnikov, D. Krekov, and O. Zaslavsky.

²In all problems of the form “Show that so-and-so holds” to follow, the words “Show that” are omitted.

b) The centers of both of those triangles coincide with M .

c) The difference of the areas of those triangles equals the area of $\triangle ABC$.

1.4. Let all angles of $\triangle ABC$ be less than 120° .

a) The point T_1 sees all sides of $\triangle ABC$ at equal angles.

b) The sum of the distances from T_1 to the vertices of $\triangle ABC$ does not exceed the analogous sum for any other point in the plane.

When all angles of $\triangle ABC$ are less than 120° , the sum of the distances from T_1 to its vertices is known as the *Fermat length*.

1.5. Let $\triangle ABC$ and $\triangle A'B'C'$ satisfy $\angle A + \angle A' = \angle B + \angle B' = \angle C + \angle C' = 120^\circ$. Then the ratio of the Fermat length to the circumradius is the same in both triangles.

1.6.

a) The points T_1, N'_a, N'_b , and N'_c lie on a circle.

b) The second intersection points of that circle with the segments AT_a, BT_b , and CT_c divide those segments in ratio $1 : 2$.

c) Formulate and prove analogous statements for the points T_2, N_a, N_b , and N_c .

1.7.

a) $CT_1 \perp N_a N_b$.

b) $CN_1 \perp T_a T_b$.

c) Formulate and prove analogous statements for the points T_2 and N_2 .

1.8.

a) The projections of T_1^* and T_2^* onto the sides of $\triangle ABC$ are the vertices of two equilateral triangles.

b) $T_i^* A \cdot BC = T_i^* B \cdot CA = T_i^* C \cdot AB$ for $i = 1$ and 2 .

The two points possessing properties a) and b) are known as the *Apollonius points*. Thus the points of Fermat and Apollonius are isogonal conjugates.

1.9. Let T_1 lie inside $\triangle ABC$. Then three billiard balls starting from T_1 simultaneously and traveling with equal speed in directions opposite the three vertices meet again after reflecting in the three sides.

1.10. O lies on $T_1^* T_2^*$.

1.11. The lines $T_1^* T_2^*$, $T_1 T_2$, and $N_1 N_2$ meet at L .

1.12. The lines $T_1 N_1$ and $T_2 N_2$ meet at O .

1.13. The lines $T_1 N_2$ and $T_2 N_1$ meet at E .

1.14. The lines $T_1 T_2^*$ and $T_2 T_1^*$ meet at M .

1.15. The midpoint M_T of $T_1 T_2$ lies on the Euler circle.

2 Euler lines and Steiner ellipses³

2.1. The Euler lines of $\triangle ABT_1$, $\triangle BCT_1$, $\triangle CAT_1$, $\triangle ABT_2$, $\triangle BCT_2$, and $\triangle CAT_2$ meet at M .

Let M_A , M_B , and M_C be the midpoints of BC , CA , and AB and let l_A , l_B , and l_C be the Euler lines of $\triangle AT_1 T_2$, $\triangle BT_1 T_2$, and $\triangle CT_1 T_2$.

³Problems 2.2–2.11 in this section and their solutions from N. Beluhov's unpublished manuscript [2].

2.2. The line l_A is parallel to M_AM_T , the line l_B is parallel to M_BM_T , and the line l_C is parallel to M_CM_T .

2.3. The Euler lines of all ten triangles with vertices in the set $\{A, B, C, T_1, T_2\}$ meet at M .

2.4. Let T_3 be such a point that $\triangle T_1T_2T_3$ is equilateral. Then the line through A parallel to BT_3 , the line through B parallel to CT_3 , and the line through C parallel to AT_3 are concurrent.

Let P be such a point that $\triangle T_1T_2P$ is equilateral and oriented oppositely to $\triangle ABC$. Let Q be such a point that $\triangle T_1T_2Q$ is equilateral and oriented identically to $\triangle ABC$.

2.5. The line l_A is parallel to CP and BQ , the line l_B is parallel to AP and CQ , and the line l_C is parallel to BP and AQ .

2.6. Find the locus of points X such that the line through A parallel to BX , the line through B parallel to CX , and the line through C parallel to AX are concurrent.

2.7. The points P and Q lie on the circumscribed Steiner ellipse.

2.8.

a) The line through A parallel to l_A , the line through B parallel to l_B , and the line through C parallel to l_C meet at a point R .

b) R lies on the circumscribed Steiner ellipse.

2.9. $\triangle ABC$ and $\triangle PQR$ have equal area and a common medicenter.

2.10. M_T lies on the inscribed Steiner ellipse.

2.11. The line T_1T_2 is a normal to the inscribed Steiner ellipse.

3 The Kiepert hyperbola

Let $\triangle ABC'$, $\triangle BCA'$, and $\triangle CAB'$ be similar, identically oriented isosceles triangles of bases AB , BC , and CA .

3.1.

a) The lines AA' , BB' , and CC' are concurrent.

b) The locus of the intersection of AA' , BB' , and CC' is a rectangular hyperbola containing A , B , C , M , and H .

This hyperbola is known as the *Kiepert hyperbola*.

Let $X(\varphi)$ be the point on the Kiepert hyperbola corresponding to angle φ at the bases of the three isosceles triangles. We consider φ to be positive when all isosceles triangles are constructed externally to $\triangle ABC$, and negative when they are constructed internally.

3.2. The point $X^*(\varphi)$ lies on OL .

3.3.

a) All lines $X(\varphi)X(-\varphi)$ meet at L .

b) All lines $X(\varphi)X(\pi/2 - \varphi)$ meet at O .

c) All lines $X(\varphi)X(\pi/2 + \varphi)$ meet at E .

3.4. The points $X(\varphi_1)$, $X(\varphi_2)$, and $X^*(\varphi_3)$ are collinear if and only if $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \equiv 0 \pmod{\pi}$.

3.5.

a) The perpendiculars from A , B , and C onto the lines $B'C'$, $C'A'$, and $A'B'$ are concurrent.

b) Their point of concurrence lies on the Kiepert hyperbola.

4 The Neuberg cubic

4.1. Let $\triangle UVW$ be equilateral, let X be an arbitrary point in the plane, and let X_u , X_v , and X_w be the reflections of X in the lines VW , WU , and UV .

a) The lines UX_u , VX_v , and WX_w are concurrent.

b) The Euler lines of $\triangle XUV$, $\triangle XVW$, and $\triangle XWU$ are concurrent.

4.2. Let X be any point in the plane not on the circumcircle of $\triangle ABC$. Then X possesses properties a) and b) above if and only if XX^* is parallel to the Euler line.

The locus of the points X such that XX^* is parallel to the Euler line is a cubic known as the *Neuberg cubic*.

4.3. The Neuberg cubic contains A , B , C , O , H , I , I_a , I_b , I_c , T_1 , T_2 , T_1^* , and T_2^* .

4.4.

a) If the Neuberg cubic contains a straight line, then it also contains a circle.

b) If $AC = BC$, then the Neuberg cubic consists of the internal bisector of $\angle C$ and the circle of center C and radius AB .

c) If $\angle C = 60^\circ$, then the Neuberg cubic consists of the external bisector of $\angle C$ and the reflection of the circumcircle of $\triangle ABC$ in the line AB .

d) If $\angle C = 120^\circ$, then the Neuberg cubic consists of the internal bisector of $\angle C$ and the reflection of the circumcircle of $\triangle ABC$ in the line AB .

e) Part a) holds if and only if an angle bisector (internal or external) is parallel to the Euler line. In that case, that angle bisector is the straight-line part of the Neuberg cubic.

f) Parts a) and e) hold only in the cases listed in parts b), c), and d).

4.5. If D lies on the Neuberg cubic for $\triangle ABC$, then A lies on the Neuberg cubic for $\triangle BCD$, and analogously for B and C .

References

- [1] Akopyan A. V., Zaslavsky A. A. Geometricheskie Svoistva Krivih Vtorogo Poryadka. MCCME, 2011.
- [2] N. Beluhov. Ten Concurrent Euler Lines. Unpublished, 2009. (A section of this paper was published as Ten Concurrent Euler Lines, <http://forumgeom.fau.edu/FG2009volume9/FG200924.pdf>.)
- [3] A. Zaslavsky. Geometry of Kiepert and Grinberg–Myakishev Hyperbolas. <http://www.jcgeometry.org/Articles/Volume1/JCG2012V1pp65-71.pdf>.
- [4] D. Banerjee, S. Mukherjee. Neuberg Locus And Its Properties. <http://www.jcgeometry.org/Articles/Volume2/JCG2013V2pp26-38.pdf>.

Fermat Points and Euler Lines

N. Beluhov, A. Zaslavsky,
P. Kozhevnikov, D. Krekov, O. Zaslavsky¹
Solutions

1 The Fermat, Napoleon, and Apollonius points

1.1. *Solution 1.* By the sine theorem for $\triangle AT_aB$ and $\triangle AT_aC$,

$$\sin \angle BAT_a : \sin \angle ABT_a = BT_a : AT_a = CT_a : AT_a = \sin \angle CAT_a : \sin \angle ACT_a.$$

Therefore, $\sin \angle BAT_a : \sin \angle CAT_a = \sin(\angle B + \pi/3) : \sin(\angle C + \pi/3)$.

Analogously, $\sin \angle ACT_c : \sin \angle BCT_c = \sin(\angle A + \pi/3) : \sin(\angle B + \pi/3)$ and $\sin \angle CBT_b : \sin \angle ABT_b = \sin(\angle C + \pi/3) : \sin(\angle A + \pi/3)$.

By the sine Ceva theorem, the statement of the problem follows.

The second part of the problem is resolved analogously.

Solution 2. Since a 60° rotation about A maps $\triangle ABT_b$ onto $\triangle AT_cC$, the lines BT_b and CT_c and the circumcircles of $\triangle ABT_c$ and $\triangle CAT_b$ meet at a point. By reasoning analogously about B and C , we obtain that AT_a , BT_b , CT_c , and the circumcircles of $\triangle ABT_c$, $\triangle BCT_a$, and $\triangle CAT_b$ all meet at a point. (Figure 1)

The second part of the problem is resolved analogously.

1.2. The solution is analogous to the first solution of the previous problem.

1.3. *Solution 1.*

a) By the cosine theorem for $\triangle CN_aN_b$, we obtain

$$N_aN_b^2 = \frac{CA^2}{3} + \frac{CB^2}{3} - 2\frac{CA \cdot CB}{3} \cos(\angle C + \pi/3) = \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{6} + \frac{2S_{ABC}}{\sqrt{3}}.$$

Since the right-hand side is symmetric, we obtain identical expressions for the two remaining sides of $\triangle N_aN_bN_c$.

The proof for $\triangle N'_aN'_bN'_c$ is analogous.

b) By the easily verified identities $A\vec{N}_b + B\vec{N}_c + C\vec{N}_a = \vec{0}$ and $A\vec{N}'_b + B\vec{N}'_c + C\vec{N}'_a = \vec{0}$.

c) By the expressions for the sides of $\triangle N_aN_bN_c$ and $\triangle N'_aN'_bN'_c$ obtained in a).

Solution 2.

a) Since AT_1 is a common chord of the circumcircles of AT_cBT_1 and AT_bCT_1 , it is perpendicular to the line N_bN_c connecting the centers of those circles. Analogously, $BT_b \perp N_cN_a$ and $CT_c \perp N_aN_b$. Thus $\triangle N_aN_bN_c$ is equilateral, and $\triangle N'_aN'_bN'_c$ is handled analogously.

c) We have that $\triangle AN_bN_c \simeq \triangle T_1N_bN_c$, $\triangle BN_cN_a \simeq \triangle T_1N_cN_a$, and $\triangle CN_aN_b \simeq \triangle T_1N_aN_b$. Therefore,

$$S_{N_aN_bN_c} = \frac{1}{2}(S_{ABC} + S_{ABN_c} + S_{BCN_a} + S_{CAN_b}).$$

¹Problems and solutions by N. Beluhov and A. Zaslavsky. Conference presentation by A. Zaslavsky, P. Kozhevnikov, D. Krekov, and O. Zaslavsky.

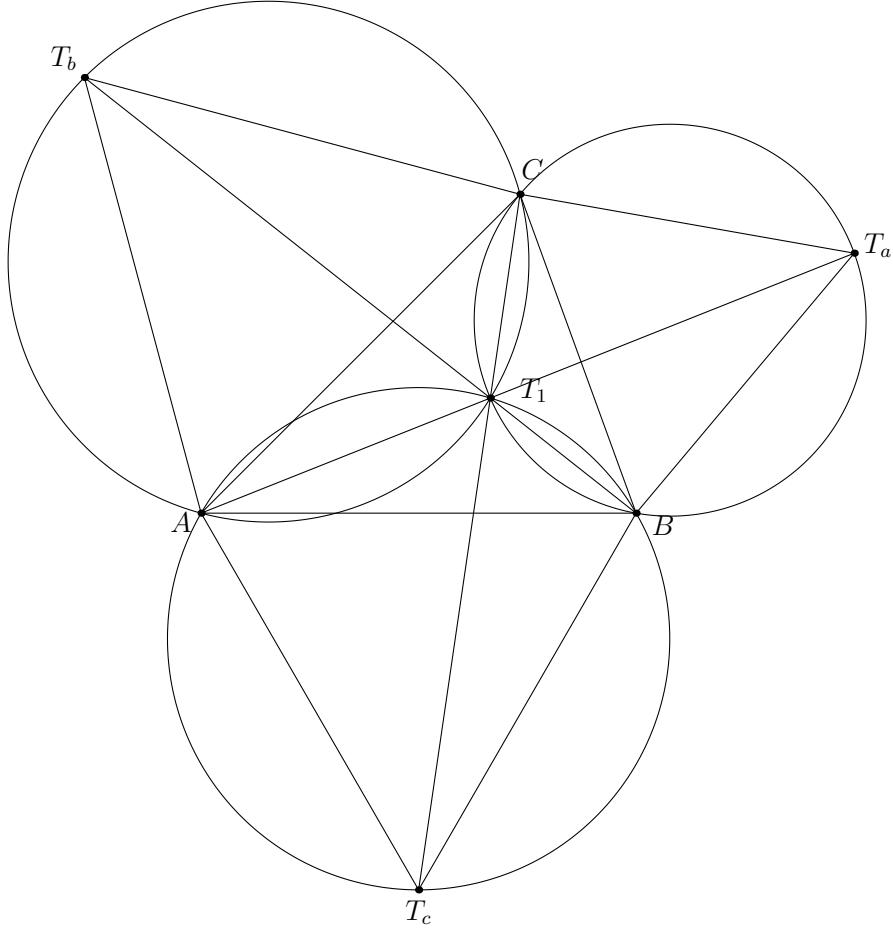


Figure 1

Analogously,

$$S_{N'_a N'_b N'_c} = \frac{1}{2}(-S_{ABC} + S_{ABN'_c} + S_{BCN'_a} + S_{CAN'_b}).$$

The claim follows.

1.4.

a) By the second solution of Problem 1.1.

b) Let X be any point in the plane. Let the 60° rotation about A mapping $\triangle ABT_b$ onto $\triangle AT_cC$ also map T_1 and X onto T' and Y . Then (Figure 2)

$$AX + BX + CX = CX + XY + YT_c \geq CT_c = CT_1 + T_1 T' + T' T_c = AT_1 + BT_1 + CT_1.$$

Equality is attained if and only if $X \equiv T_1$.

(That $XA + XB \geq XT_c$ also follows by Ptolemy's theorem for the quadrilateral ABT_cX .)

1.5. Let AT_1 , BT_1 , and CT_1 meet the circumcircle k of $\triangle ABC$ for the second time at A'' , B'' , and C'' . Then $\triangle A''B''C''$ is similar to $\triangle A'B'C'$ and we are left to show that the Fermat lengths of $\triangle ABC$ and $\triangle A''B''C''$ are equal.

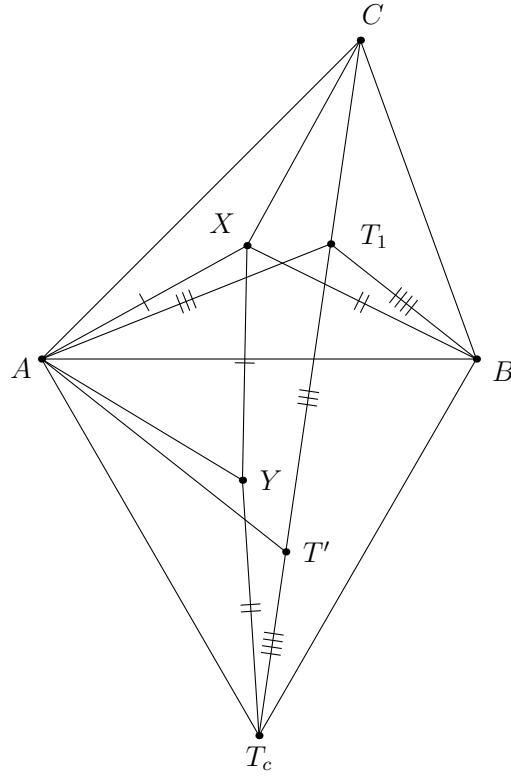


Figure 2

Solution 1. Let $\triangle B''C''T_a''$ be equilateral and external to $\triangle A''B''C''$. By the solution of the previous problem, the Fermat lengths of the two triangles equal AT_a and $A''T_a''$. (Figure 3)

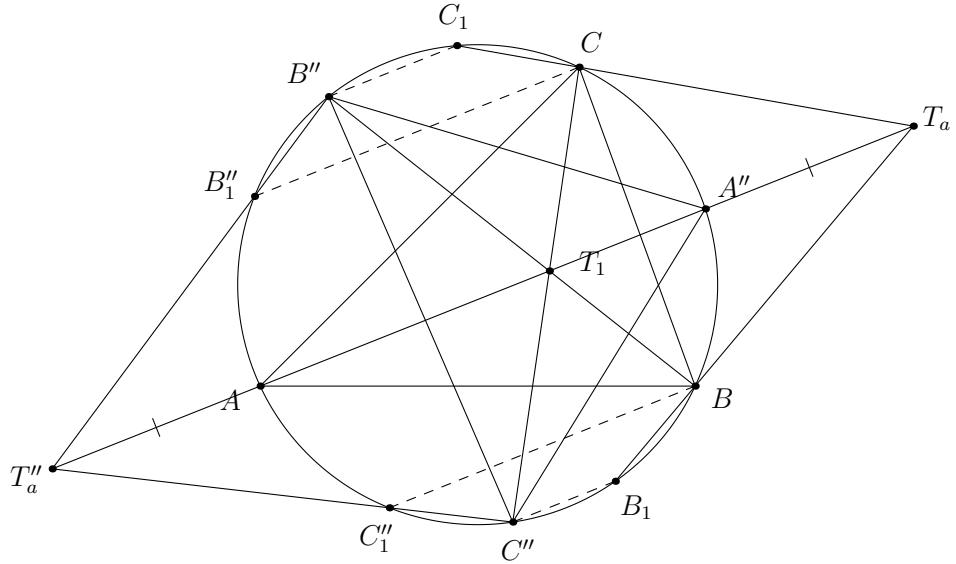


Figure 3

Let BT_a , CT_a , $B''T_a''$, and $C''T_a''$ meet k for the second time at B_1 , C_1 , B_1'' , and C_1'' .

C_1'' . By an angle chase, $BC_1'' \parallel CB_1'' \parallel B''C_1 \parallel C''B_1$. Therefore, the figure is symmetric with respect to the perpendicular bisector $s_{AA''}$ of AA'' . It follows that the segments AT_a and $A''T_a''$ are reflections of each other in $s_{AA''}$ and that their lengths are equal, as needed.

Solution 2. Let k' be the circle through T_1 concentric with k , and let k' meet the lines AA'' , BB'' , and CC'' for the second time at K_a , K_b , and K_c . We consider the configuration when the points A, T_1, K_a, A'' ; B, T_1, K_b, B'' ; and C, K_c, T_1, C'' lie in this order on the corresponding lines, and all other configurations are analogous.

By symmetry, $AT_1 = K_aA''$, $BT_1 = K_bB''$, and $CK_c = T_1C''$. We are left to prove that $T_1K_a + T_1K_b = T_1K_c$, and this holds by Ptolemy's theorem for $T_1K_aK_bK_c$.

1.6.

a) The point N'_c lies on the circumcircle k_c of $\triangle ABT_c$, with N'_cT_c being a diameter of k_c . Since T_1 also lies on k_c , $\angle N'_cT_1C = \pi/2$. On the other hand, $M_C M : M_C C = M_C N_c : M_C T_c = 1 : 3$, so $N_c M \parallel CT_c$. Therefore, $N_c M$ is the perpendicular bisector of $N'_c T_1$ and $MN'_c = MT_1$. (Figure 4)

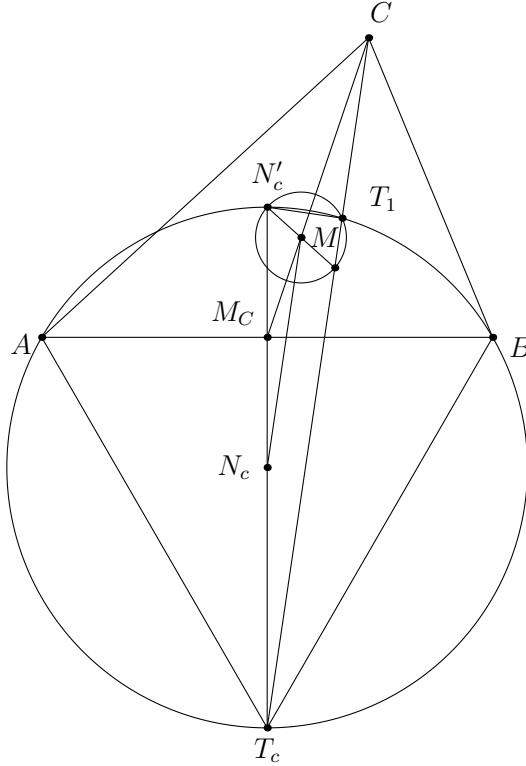


Figure 4

b) Since M is the circumcenter of $\triangle N'_aN'_bN'_c$ and $\angle N'_cT_1C = \pi/2$, the second intersection point of the circumcircle of $\triangle N'_aN'_bN'_c$ and the line CT_c is the reflection of N'_c in M . (Figure 4) Since the line CM divides the segment N'_cT_c in ratio $1 : 3$, the claim follows by Menelaus' theorem.

1.7.

a) See the second solution to problem 1.3 a).

b) By the cosine theorem for $\triangle AT_bN_c$ and $\triangle BT_aN_c$, we have that $N_cT_a^2 - N_cT_b^2 = CT_a^2 - CT_b^2$ and the claim follows.

1.8.

a) The reflections of T_1^* in the sides of $\triangle ABC$ form a triangle δ such that the lines T_1A , T_1B , and T_1C are the perpendicular bisectors of its sides. (Figure 5) Therefore, all of δ 's angles equal 60° .

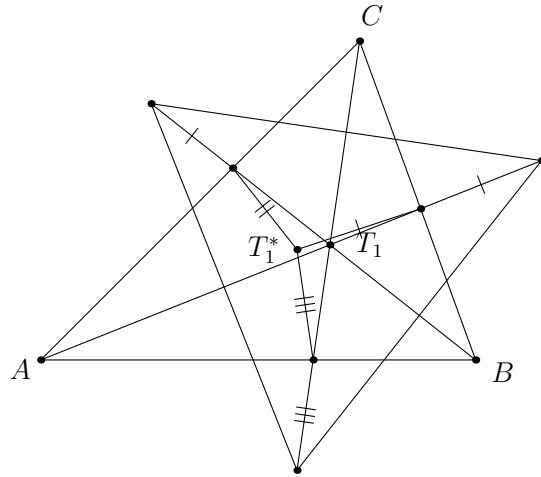


Figure 5

b) Let X and Y be the projections of T_1^* onto AC and BC . Then the quadrilateral CXT_1^*Y is inscribed in a circle on diameter CT_1^* . Therefore, $XY = CT_1^* \cdot \sin \angle C$ and the claim follows by a).

1.9. The lines AT_1 , BT_1 , and CT_1 contain the reflections of T_1^* in the sides of $\triangle ABC$. (Figure 5) Therefore, all three billiard balls eventually arrive at T_1^* , and at the same moment. (A corollary of this problem was on the 28th Tournament of Towns, Spring, 10-11.7: The reflections of AT_1 , BT_1 , and CT_1 in the opposite sides of $\triangle ABC$ are concurrent.)

1.10. The locus of the points X such that $AX : BX = AC : BC$ is a circle Ω_c perpendicular to the circumcircle k of $\triangle ABC$. Since T_1^* and T_2^* are the intersection points of Ω_a , Ω_b , and Ω_c , they are mutually inverse with respect to k .

1.11. The centers S_a , S_b , and S_c of Ω_a , Ω_b , and Ω_c are the intersections of the sides of $\triangle ABC$ with the tangents to k at the opposite vertices. Since the line $S_aS_bS_c$ is the polar of L with respect to k , it is perpendicular to OL . Since the line $T_1^*T_2^*$ contains O and is perpendicular to $S_aS_bS_c$, it coincides with OL .

The two remaining parts of the problem are special cases of Problem 3.3.

1.12. A special case of Problem 3.3.

1.13. A special case of Problem 3.3.

1.14. A special case of the three pairs of isogonal conjugates theorem (see [1]).

1.15. By Problems 3.1 and 3.2.

2 Euler lines and Steiner ellipses

In all solutions for this section, we only consider the configuration when T_1 lies inside $\triangle ABC$ and the quadrilateral $ABCT_2$ is convex. All other configurations are handled analogously.

2.1. We show that the Euler line of $\triangle BCT_1$ passes through M . All other lines in the problem are handled analogously.

Let M_a be the medicenter of $\triangle BCT_1$. Since N_a is the circumcenter of $\triangle BCT_1$, the Euler line of $\triangle BCT_1$ is M_aN_a . (Figure 6)

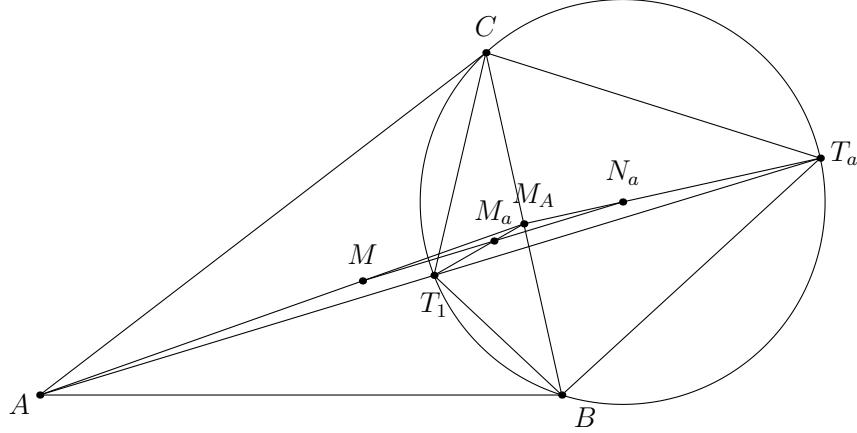


Figure 6

Since the points A , T_1 , and T_a are collinear and the points M , M_a , and N_a divide the segments M_AA , M_AT_1 , and M_AT_a in the same ratio $1 : 2$, they are collinear as well.

2.2. Let M_a and O_a be the medicenter and circumcenter of $\triangle AT_1T_2$. Since N_bN_c is the perpendicular bisector of AT_1 and $N'_bN'_c$ is the perpendicular bisector of AT_2 , the lines N_bN_c and $N'_bN'_c$ meet at O_a . (Figure 7)

Let x be the acute angle between the lines MO_a and $N'_bN'_c$.

Since M is the common center of $\triangle N_aN_bN_c$ and $\triangle N'_aN'_bN'_c$, $\angle MN_cN_b = \angle MN'_bN'_c = 30^\circ$. Consequently, the quadrilateral $MO_aN_cN'_b$ is cyclic and

$$\angle N_bN_cN'_b = \angle O_aN_cN'_b = 180^\circ - \angle N'_bMO_a = \angle MO_aN'_b + \angle O_aN'_bM = x + 30^\circ.$$

Notice that $\triangle AN_bT_b$, $\triangle AN_cB$, and $\triangle AN'_bC$ are similar and identically oriented. It follows that similitude of center A maps $\triangle N_bN_cN'_b$ onto $\triangle T_bBC$. Thus

$$\angle T_1BC = \angle T_bBC = \angle N_bN_cN'_b = x + 30^\circ.$$

Let T' be the reflection of T_1 in M_A . Then $\angle BT'C = \angle BT_1C = 120^\circ$. Consequently, the quadrilateral $BT'CT_2$ is cyclic and

$$\angle BT_2T' = \angle BCT' = \angle T_1BC = x + 30^\circ.$$

Since the lines BT_2 and $N'_aN'_c$ are perpendicular, the lines BT_2 and $N'_bN'_c$ make a 30° angle. Thus from $\angle BT_2T' = x + 30^\circ$ it follows that $MO_a \parallel T'T_2$.

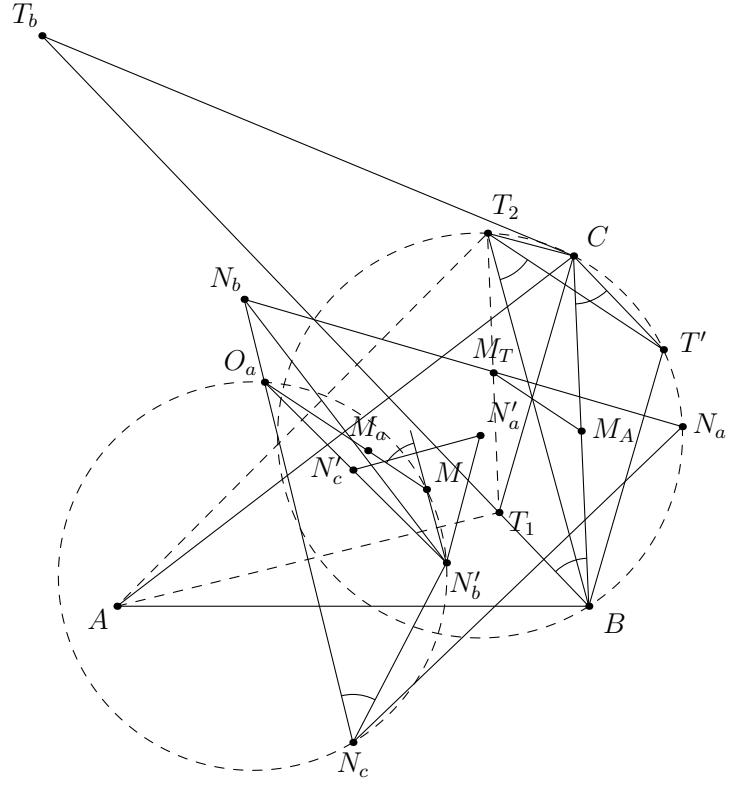


Figure 7

Since M_A and M_T are midpoints of T_1T' and T_1T_2 , $M_AM_T \parallel T'T_2$.

Since M and M_a divide the segments AM_A and AM_T in the same ratio $2 : 1$, $MM_a \parallel M_AM_T$.

Consequently, $MO_a \parallel T'T_2 \parallel M_AM_T \parallel MM_a$. It follows that the points M , M_a , and O_a are collinear, M lies on l_A , and $l_A \parallel M_AM_T$.

2.3. Solution 1. By Problem 2.1 and the solution to Problem 2.2.

Solution 2. By Problem 4.4 d) applied to $\triangle ABT_1$ and the point T_2 , l_A , l_B , and the Euler line of $\triangle ABT_2$ are concurrent. Analogously, l_A , l_B , and the Euler line of $\triangle ABT_1$ are concurrent. By Problem 2.1, it follows that l_A and l_B meet at M .

2.4. There exist two distinct points T_3 satisfying the conditions of the problem, corresponding to the two possible orientations of $\triangle T_1T_2T_3$, namely $T_3 \equiv P$ and $T_3 \equiv Q$. Ordinarily, orientation does not matter much in geometry problems. However, in this problem the two cases for T_3 need to be handled very differently.

Case 1. $T_3 \equiv P$.

Let A' be the isogonal conjugate of A in $\triangle T_1T_2P$ and let A'' be the reflection of A' in the line T_1T_2 . (Figure 8)

Then $\angle A''T_1T_2 = \angle T_2T_1A' = 180^\circ - \angle PT_1A =$ (since $\angle AT_1C = 120^\circ$ and $\angle PT_1T_2 = 60^\circ$) $= \angle CT_1T_2$.

It follows that the points T_1 , A'' , and C are collinear. Analogously, the points T_2 , A'' , and C are collinear. Thus $A'' \equiv C$.

Reflection in the internal bisector of $\angle T_1PT_2$ followed by reflection in T_1T_2 maps

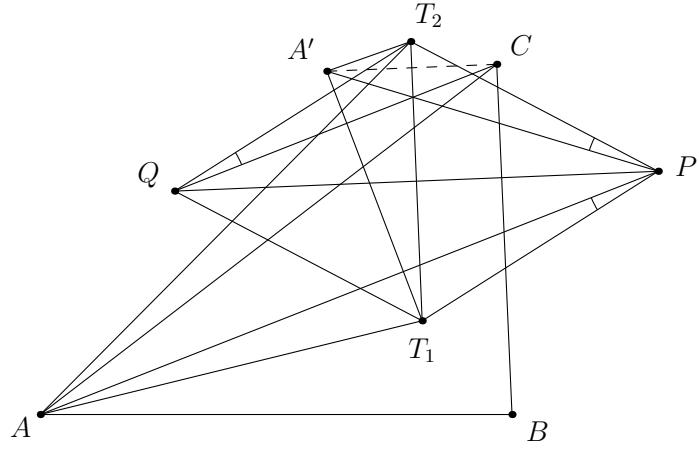


Figure 8

the line AP onto the line CQ , so $AP \parallel CQ$. Analogously, $BP \parallel AQ$ and $CP \parallel BQ$.

Therefore, when $T_3 \equiv P$, the three lines in the problem meet at Q .

Case 2. $T_3 \equiv Q$.

Let X be the intersection point of AP and BQ , and let $\triangle RYB$ and $\triangle ZCP$ be translation copies of $\triangle AQX$. (Figure 9)

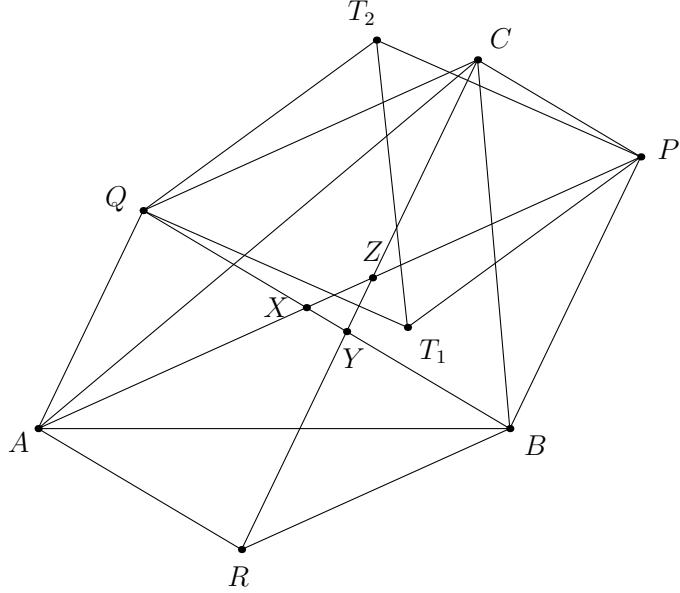


Figure 9

Then the points C, Y, Z , and R are collinear, $AR \parallel BQ \parallel CP$, $AP \parallel BR \parallel CQ$, and $AQ \parallel BP \parallel CR$.

Therefore, when $T_3 \equiv Q$, the three lines in the problem meet at R .

2.5. Solution 1. By Problem 2.2, l_A is parallel to M_AM_T . By Problem 2.4, CP and BQ are parallel. Since M_T is the midpoint of PQ , this means that M_AM_T is the midline of the two parallel lines CP and BQ , and is thus parallel to both of them.

Solution 2. By Problem 4.1 b), P lies on the Neuberg cubic for $\triangle AT_1T_2$. Since the isogonal conjugate of P with respect to that triangle is C , by Problem 4.2 l_A is parallel to CP .

2.6. Let X be such that the line through A parallel to BX , the line through B parallel to CX , and the line through C parallel to AX are concurrent at Y .

Let α be an affine transformation mapping $\triangle ABC$ to an equilateral $\triangle A'B'C'$. Let $\alpha(X) = X'$ and $\alpha(Y) = Y'$. Then the line through A' parallel to $B'X'$, the line through B' parallel to $C'X'$, and the line through C' parallel to $A'X'$ are concurrent at Y' .

Consider a rotation ρ concentric with $\triangle A'B'C'$ such that ρ maps A' onto B' , B' onto C' , and C' onto A' .

Let $\rho(Y') = Z'$. Then each of $\angle X'A'Z'$, $\angle X'B'Z'$, and $\angle X'C'Z'$ equals either 60° or 120° . Consequently, the points X' , Z' , A' , B' , and C' are concyclic.

It follows that X' lies on the circumcircle of $\triangle A'B'C'$. Therefore, X lies on the circumscribed Steiner ellipse of $\triangle ABC$.

2.7. By Problems 2.4 and 2.6.

2.8. By Problem 2.5 and Case 2 of the solution to Problem 2.4.

2.9–2.11. Define the affine transformation α and $\triangle A'B'C'$ as in the solution to Problem 2.6. Let $\alpha(\triangle PQR) = \triangle P'Q'R'$.

As in the solution to Problem 2.6, $\triangle A'B'C'$ and $\triangle P'Q'R'$ are concentric and equal equilateral triangles. Thus they have the same area and a common medicenter. Since both of those properties are preserved by affine transformations, so do $\triangle ABC$ and $\triangle PQR$.

Since the midpoint of $P'Q'$ lies on the common incircle e' of $\triangle A'B'C'$ and $\triangle P'Q'R'$, the midpoint of PQ lies on the common inscribed Steiner ellipse e of $\triangle ABC$ and $\triangle PQR$.

Since $P'Q'$ is tangent to e' at its midpoint and tangency is preserved by affine transformations, PQ is tangent to e at M_T . Since T_1T_2 is perpendicular to PQ at M_T , it is a normal to e .

3 The Kiepert hyperbola

3.1.

- a) Similarly to Problems 1.1 and 1.2.
- b) We are going to need the following easily verified claim (see [1] and [3] for details).

Lemma. Let A and B be two points in the plane, and let f be a transformation mapping every line through A onto a line $f(l)$ through B in such a way that cross-ratios are preserved. Then the locus of the intersection points of l and $f(l)$ as l varies is a conic through A and B . (When $f(AB) = AB$, that conic degenerates into the union of the line AB and one more straight line.)

The transformation f defined by $f(AA') = BB'$ satisfies the conditions of the Lemma. Therefore, the required locus is a conic through A and B .

When $\triangle AB'C$ and $\triangle BA'C$ are constructed internally and their base angles equal $\angle C$, the lines AA' and BB' coincide with AC and BC , and we obtain that C also lies on this conic.

Since the required locus also contains M and H (corresponding to setting the base angles of the three isosceles triangles to 0° and to letting them tend to 90°), it is a rectangular hyperbola.

Note. Since five points uniquely determine a conic, the locus of the intersection of AA' and CC' is the same hyperbola. This gives us a second proof of part a).

3.2. Isogonal conjugation with respect to a triangle maps a circumscribed conic onto a straight line. Since the Kiepert hyperbola contains M and H , its isogonal conjugate is the line OL .

Since the points T_1^* and T_2^* are mutually inverse with respect to the circumcircle, isogonal conjugation maps them onto opposite points on the Kiepert hyperbola. Therefore, M_T is the center of the Kiepert hyperbola and thus lies on the Euler circle. By Problem 2.9, we obtain also that the point R lies on the circumcircle of $\triangle ABC$.

Let $A'(\varphi)$, $B'(\varphi)$, and $C'(\varphi)$ be the third vertices of the isosceles triangles corresponding to base angle φ , so that $AA'(\varphi)$, $BB'(\varphi)$, and $CC'(\varphi)$ meet at $X(\varphi)$.

3.3. Solution 1.

a) When the Kiepert hyperbola is projected from A onto the perpendicular bisector of BC , the points $X(\varphi)$ and $X(-\varphi)$ are mapped onto the points $A'(\varphi)$ and $A'(-\varphi)$ symmetric with respect to BC . Therefore, the transformation from the Kiepert hyperbola onto itself mapping $X(\varphi)$ onto $X(-\varphi)$ preserves cross-ratios.

The transformation mapping X onto the second intersection point of the Kiepert hyperbola with the line XL also preserves cross-ratios. Therefore, to establish the claim it suffices to find three values of φ such that the two transformations coincide.

When $\varphi = \angle A$, $X(-\varphi)$ coincides with A and $X(\varphi)$ lies on the symmedian through A . Analogously, the two transformations coincide when $\varphi = \angle B$ and $\varphi = \angle C$.

b), c) Similarly to part a).

Solution 2. a), b) By Problem 3.4. c) Similarly to the first solution of Problem 3.4. Use the fact that AE contains $A'(90^\circ - \angle A)$ and analogously for BE and CE .

The special cases $\varphi = \pi/3$ and $\varphi = \pi/6$ of this problem yield Problems 1.11–1.13.

3.4. *Solution 1.* (N. Beluhov) We use the following lemma.

Lemma. Let $\varphi_1 + \varphi_2 = \angle A$. Then the lines $AA'(\varphi_1)$ and $AA'(\varphi_2)$ are symmetric with respect to the bisectors of $\angle A$.

Proof. Let L_A and L'_A be the midpoints of the arcs BC not containing A and BAC of the circumcircle k of $\triangle ABC$. (Figure 10) Then BL_A and BL'_A are the bisectors of $\angle A'(\varphi_1)BA'(\varphi_2)$ in $\triangle BA'(\varphi_1)A'(\varphi_2)$. It follows that the circumcircle k of $\triangle BL_AL'_A$ is the Apollonius circle for B in $\triangle BA'(\varphi_1)A'(\varphi_2)$. Therefore, AL_A and AL'_A are the bisectors of $\angle A'(\varphi_1)AA'(\varphi_2)$.

Let the line $X(\varphi_1)X(\varphi_2)$ meet AB at Y .

For $X^*(\varphi_3)$ to lie on $X(\varphi_1)X(\varphi_2)$, it is necessary and sufficient that $AX^*(\varphi_3)$ and $BX^*(\varphi_3)$ meet the line $X(\varphi_1)X(\varphi_2)$ at the same point. This holds if and only if the cross-ratio of the four lines AY , $AX(\varphi_1)$, $AX(\varphi_2)$, and $AX^*(\varphi_3)$ equals the cross-ratio of the four lines BY , $BX(\varphi_1)$, $BX(\varphi_2)$, and $BX^*(\varphi_3)$.

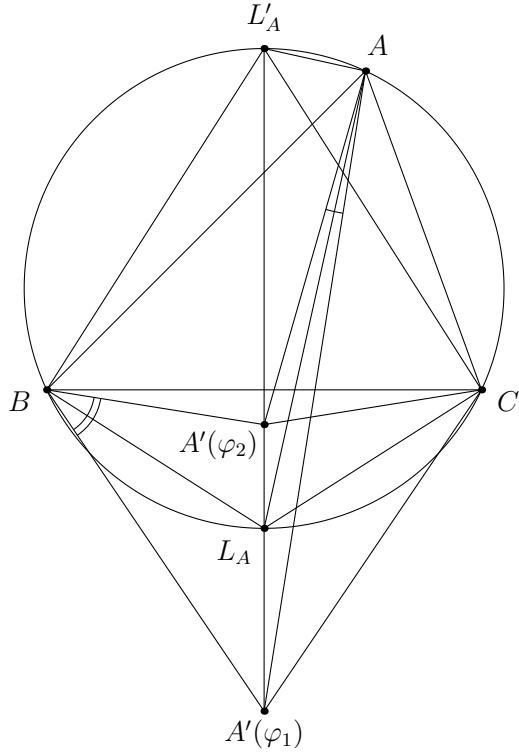


Figure 10

The lines AY , $AX(\varphi_1)$, $AX(\varphi_2)$, and $AX^*(\varphi_3)$ meet the perpendicular bisector of AC at $A'(-\angle A)$, $A'(\varphi_1)$, $A'(\varphi_2)$, and, by the Lemma, $A'(\angle B - \varphi_3) \equiv A'(\angle B + \varphi_1 + \varphi_2)$. It follows that the angles between successive lines equal $\angle A + \varphi_1$, $\varphi_2 - \varphi_1$, and $\angle B + \varphi_1$.

Analogously, the angles between successive lines in the sequence BY , $BX(\varphi_1)$, $BX(\varphi_2)$, and $BX^*(\varphi_3)$ are the same, only ordered in reverse.

Solution 2. Let $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\varphi_0$. Reasoning as in the previous problem, we obtain that the quadrilateral $X(\varphi_1)X(\varphi_0)X(\varphi_2)X(\pi/2 + \varphi_0)$ is harmonic, i.e., the line $X(\varphi_1)X(\varphi_2)$ contains the pole of the line $X(\varphi_0)X(\pi/2 + \varphi_0)$.

However, for all φ_0 the line $X(\varphi_0)X(\pi/2 + \varphi_0)$ contains E . It follows that when φ_1 and φ_2 vary so that $\varphi_1 + \varphi_2$ remains equal to $2\varphi_0$, all lines $X(\varphi_1)X(\varphi_2)$ meet at a point X on the polar of E , which by the previous problem coincides with the line OL .

Since the Kiepert hyperbola and the line OL are isogonal conjugates, X is the isogonal conjugate of some point $X(\varphi_3)$ on the Kiepert hyperbola. To work out the relation between φ_1 and φ_2 on the one hand, and φ_3 on the other hand, we are going to use the two pairs of isogonal conjugates theorem.

Let $X(\varphi_1)$ and $X(\varphi_2)$ be two points on the Kiepert hyperbola and let $X^*(\varphi_1)$ and $X^*(\varphi_2)$ be their isogonal conjugates on the line OL . By the two pairs of isogonal conjugates theorem, the lines $X(\varphi_1)X^*(\varphi_2)$ and $X^*(\varphi_1)X(\varphi_2)$ meet in a point on the Kiepert hyperbola.

The value of φ corresponding to that point equals, on the one hand, $f(\varphi_1) - \varphi_2$, and, on the other hand, $f(\varphi_2) - \varphi_1$, where f is some (as of yet unknown) function.

It follows that $f(\varphi_1) + \varphi_1 = f(\varphi_2) + \varphi_2 = \text{const}$. Substituting, say, $\varphi_2 = 0$, we obtain $f(\varphi) = -\varphi$, completing the solution.

3.5.

a) Since the perpendiculars from the vertices of $\triangle A'B'C'$ onto the sides of $\triangle ABC$ are concurrent (being the perpendicular bisectors of the sides of $\triangle ABC$), the perpendiculars from the vertices of $\triangle ABC$ onto the sides of $\triangle A'B'C'$ are concurrent as well.

b) We use the following lemma.

Lemma. The lines $A'(\varphi)B'(\varphi)$ and $CC'(\pi/2 - \varphi)$ are perpendicular.

Indeed, it follows from the Lemma that the orthologic center of $\triangle ABC$ and $\triangle A'B'C'$ is the point $X(\pi/2 - \varphi)$.

Proof 1. Let A'' and B'' be the reflections of C in $A'(\varphi)$ and $B'(\varphi)$. Then $\angle CAB'' = \angle CBA'' = \pi/2$ and $A''B'' \parallel A'(\varphi)B'(\varphi)$. (Figure 11)

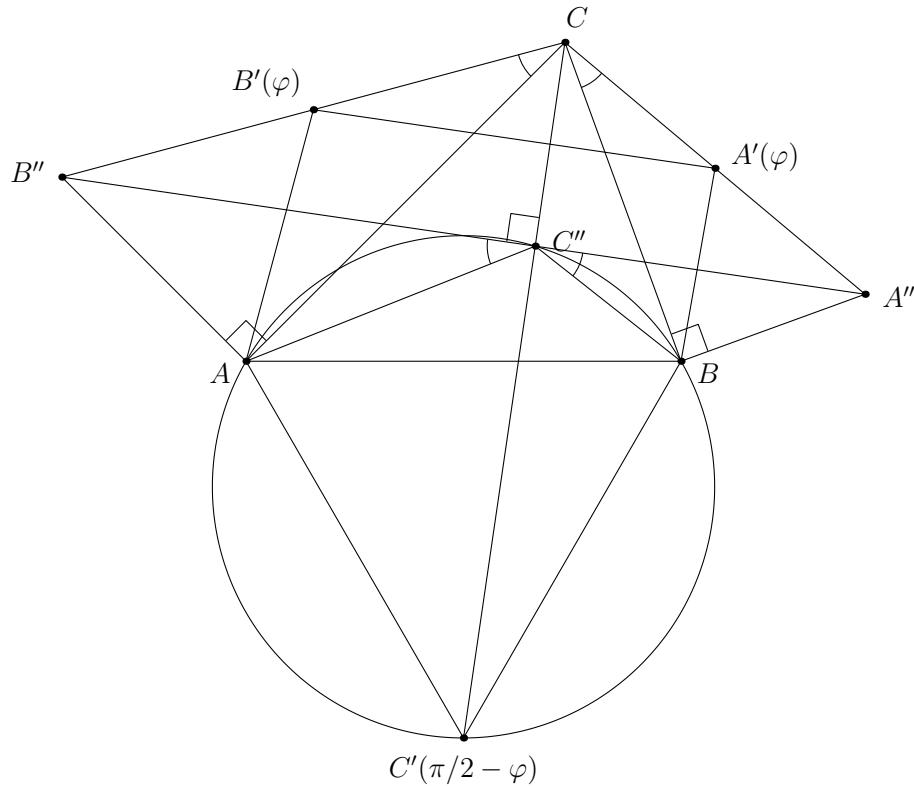


Figure 11

Let C'' be the projection of C onto the line $A''B''$. Since the quadrilateral $CC''BA''$ is inscribed in a circle of diameter CA'' , we obtain that $\angle BC''A'' = \angle BCA'' = \varphi$. Analogously, $\angle AC''B'' = \varphi$.

It follows that the quadrilateral $AC'(\pi/2 - \varphi)BC''$ is cyclic. Thus $\angle AC''C'(\pi/2 - \varphi) = \angle ABC'(\pi/2 - \varphi) = \pi/2 - \varphi$ and C , C'' , and $C'(\pi/2 - \varphi)$ are collinear, as needed.

Proof 2. Let A'' be the reflection of A in the line $CB'(\varphi)$. Then $\triangle CA'(\varphi)B$ and $\triangle CB'(\varphi)A''$ are similar and identically oriented. Therefore, so are $\triangle CA'(\varphi)B'(\varphi)$ and $\triangle CBA''$ and the lines $A'(\varphi)B'(\varphi)$ and BA'' make an angle of φ . (Figure 12)

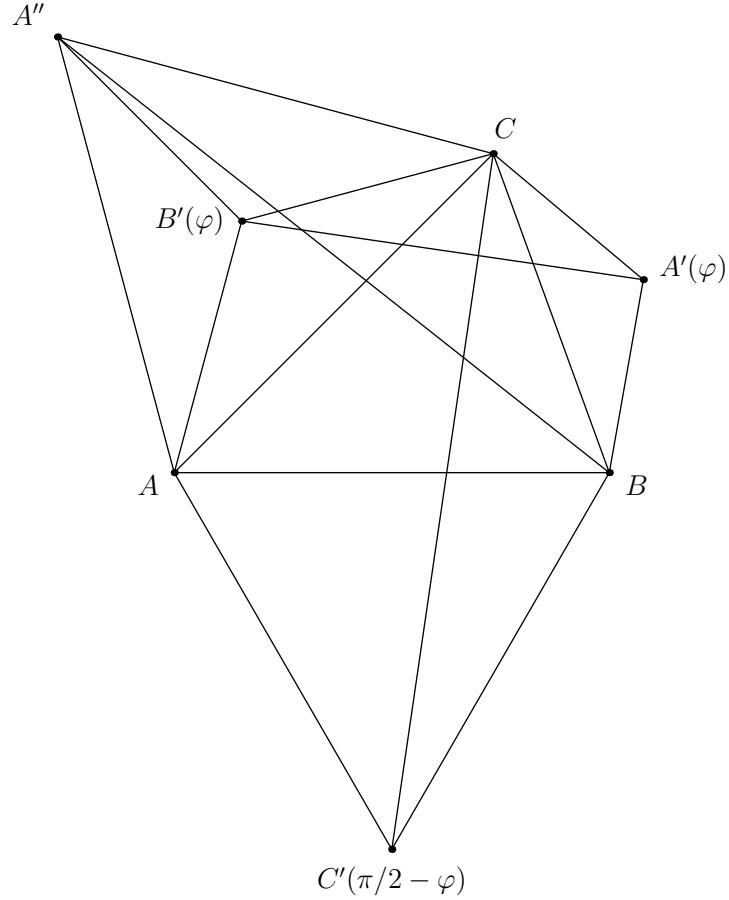


Figure 12

Analogously, $\triangle AC'(\pi/2 - \varphi)B$ and $\triangle ACA''$ are similar and identically oriented. Therefore, so are $\triangle ACC'(\pi/2 - \varphi)$ and $\triangle AA''B$ and the lines $CC'(\pi/2 - \varphi)$ and $A''B$ make an angle of $\pi/2 - \varphi$.

4 The Neuberg cubic

4.1.

a) All three lines meet at one of the two Napoleon points of $\triangle X_uX_vX_w$.

b) (From [2]) *Solution 1.* The two triangles formed by the medicenters and circumcenters of $\triangle XUV$, $\triangle XVW$, and $\triangle XWU$ are orthologic, and both orthologic centers coincide with the center of $\triangle UVW$. However, two orthologic triangles with coinciding orthologic centers are always perspective.

Solution 2. Hint. All three lines meet at one of the two Napoleon points of the triangle formed by the circumcenters of $\triangle XUV$, $\triangle XVW$, and $\triangle XWU$.

4.2. See [4].

4.3. (From [2]) We give an elementary proof that the Euler lines of $\triangle ABX$, $\triangle BCX$, and $\triangle CAX$ are concurrent when $X \equiv I, I_a, I_b, I_c, T_1^*$, and T_2^* . We use the following lemma.

Lemma. Let X be a point not on the circumcircle k of $\triangle ABC$, and let AX , BX , and CX meet k for the second time at A' , B' , and C' . Then the Euler lines of $\triangle ABX$, $\triangle BCX$, and $\triangle CAX$ are concurrent if and only if the Euler lines of $\triangle A'B'X$, $\triangle B'C'X$, and $\triangle C'A'X$ are concurrent.

Proof. Let O_a be the circumcenter of $\triangle BCX$, and define O_b , O_c , O'_a , O'_b , and O'_c analogously.

Suppose that the Euler lines of $\triangle A'B'X$, $\triangle B'C'X$, and $\triangle C'A'X$ are concurrent at Y' . Let Y'' be the isogonal conjugate of Y' in $\triangle O'_aO'_bO'_c$ and let Y be such that the quadrilaterals $O_aO_bO_cY$ and $O'_aO'_bO'_cY''$ are similar. Then the Euler lines of $\triangle ABX$, $\triangle BCX$, and $\triangle CAX$ are concurrent at Y .

When X coincides with I , I_a , I_b , or I_c , X is the orthocenter of $\triangle A'B'C'$ and the claim follows by the Lemma.

When X coincides with T_1^* or T_2^* , $\triangle A'B'C'$ is equilateral and the claim follows by the Lemma and Problem 4.1 b).

4.4.

a) Since the Neuberg cubic is its own isogonal conjugate, it contains the (imaginary) intersection points of the line at infinity and the circumcircle. Every conic through this pair of points is a circle.

b) The Neuberg cubic contains the internal bisector of $\angle C$. Furthermore, it contains A , B and their reflections in the opposite sides.

c) By Problem 4.1 b), the Neuberg cubic contains T_a , T_b , and T'_c . Since it also contains C , it meets the external bisector of $\angle C$ at four distinct points and therefore contains it. Since A , B , O , and H all lie on the reflection of the circumcircle in the line AB , the circle part of the Neuberg cubic coincides with this circle.

d) Similarly to part c).

e) Suppose that the Neuberg cubic consists of a straight line l and a circle s . Since s cannot contain all vertices of $\triangle ABC$, without loss of generality l contains C . Since the Neuberg cubic is its own isogonal conjugate, the isogonal conjugate l' of l also belongs to the Neuberg cubic. Thus $l \equiv l'$. By Problem 4.2, l is then parallel to the Euler line.

f) (From [2]) We are going to use e). Let L_C be the midpoint of the arc ACB of the circumcircle k of $\triangle ABC$. Suppose that $AC \neq BC$ and the Euler line is parallel to CL_C . Then CL_COH is a parallelogram, so CH equals the circumradius of $\triangle ABC$ and $\angle C = 60^\circ$.

4.5. See [4].

References

- [1] Akopyan A. V., Zaslavsky A. A. Geometricheskie Svoistva Krivih Vtorogo Poryadka. MCCME, 2011.
- [2] N. Beluhov. Ten Concurrent Euler Lines. Unpublished, 2009. (A section of this paper was published as Ten Concurrent Euler Lines, <http://forumgeom.fau.edu/FG2009volume9/FG200924.pdf>.)

- [3] A. Zaslavsky. Geometry of Kiepert and Grinberg–Myakishev Hyperbolas. <http://www.jcgeometry.org/Articles/Volume1/JCG2012V1pp65-71.pdf>.
- [4] D. Banerjee, S. Mukherjee. Neuberg Locus And Its Properties. <http://www.jcgeometry.org/Articles/Volume2/JCG2013V2pp26-38.pdf>.

Игра «Избегание линий» – 1

Задачу представляют Бурсиан О., Кохась Д., Кохась К.

1 Предварительные задачи

Мы будем рассматривать игры, в которых два игрока — Петя и Вася (они же Алиса и Боб, они же Первый и Второй, ну, или попросту P1 и P2) — по-очереди совершают ходы. В наших играх они будут что-нибудь красить, причем каждый игрок будет использовать свой «личный» цвет: для определенности пусть Петя все красит в пурпурный цвет (а лучше, не в пурпурный, а в первый), а Вася пусть красит, ээ..., в васильковый (а лучше, второй)! Во всех играх Петя ходит первым. «А Вася?» — спросите вы. А Вася ходит вторым!

Обычно за один ход разрешается покрасить один еще неокрашенный объект (если в условии явно не указано противоположное). Чего они хотят добиться своими раскрашиваниями, указано в условиях задач, но стоит иметь в виду, что, вообще говоря, им, быть может, и не удастся добиться желаемого, тогда игра окончится ничьей. Поэтому на вопрос «Кто выигрывает?» вполне возможен ответ «Никто!».

1.1. Петя и Вася по-очереди красят вершины додекаэдра. Игрок, после хода которого две вершины какого-то ребра окажутся окрашенными в один цвет, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

1.2. Петя и Вася по-очереди красят вершины какого-то многогранника. Игрок, после хода которого все вершины какой-то грани окажутся окрашенными в один цвет, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

1.3. На окружности поставлено 99 точек. Петя и Вася по-очереди красят эти точки. Игрок, после хода которого две соседние точки окажутся окрашенными одинаково, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

1.4. На окружности стоят n точек. Петя и Вася по-очереди, каждый — своим фломастером, проводят хорды, в том числе, можно соединять соседние точки. За один ход можно провести сразу несколько хорд. Игрок, после хода которого образуется треугольник с вершинами на исходной окружности, все стороны которого окрашены одинаково, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре? Достаточно выяснить вопрос для достаточно больших значений n .

2 Доски с пересекающимися линиями

Пусть на плоскости или еще где-нибудь отмечено произвольное конечное множество точек — будем называть эти точки узлами — и проведено несколько линий: каждая линия проходит через несколько узлов. Линию можно представлять себе, как «кривую произвольной формы», проходящую через узлы. Пусть для любых двух линий множества узлов, принадлежащих этим линиям, не совпадают. Фактически линии просто задают подмножества в множестве узлов. Будем говорить, что две линии пересекаются, если они имеют хотя бы один общий узел. Геометрические подробности расположения линий, в том числе, их пересечения не в узлах, нам несущественны. Позже мы будем использовать конфигурацию из узлов и линии как игровую доску и введем дополнительное требования, которому должна удовлетворять доска. А пока несколько предварительных утверждений.

2.1. На доске n узлов. Все линии попарно пересекаются.

а) Докажите, что количество линий не больше 2^{n-1} .

б) Пусть количество линий равно 2^{n-1} . Докажите, что если к линии добавить узел, то снова получится линия.

2.2. На доске n узлов. Все линии попарно пересекаются. Докажите, что можно добавить несколько линий так, чтобы их количество стало равно 2^{n-1} и чтобы по-прежнему все линии пересекались.

2.3. На доске n узлов и несколько линий. Пусть наименьшая линия содержит k узлов. Докажите, что если любые $k+1$ линий имеют хотя бы один общий узел, то и все линии вообще тоже пересекаются в каком-то узле.

2.4. Дан кубик $3 \times 3 \times 3$. Пусть его единичные кубики будут узлами доски, можно считать, что это тройки целых чисел (x_1, x_2, x_3) , $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 2$. Пусть все линии на доске содержат ровно по 3 узла, а именно, будем считать, что линия, проходящая через узлы (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) , проходит также через узел $(-x_1 - y_1, -x_2 - y_2, -x_3 - y_3)$ (вычисления по модулю 3). Кто выиграет на этой доске?

Игра «Избегание линий» – 2

Задачу представляют Бурсиан О., Кохась Д., Кохась К.

3 Общий вариант игры «Избегание линий»

Пусть дана игровая доска с узлами и линиями, как в предыдущем разделе. Петя и Вася поочереди красят узлы. Игрок, после хода которого все узлы какой-то линии окажутся окрашенными одинаково, проигрывает. Если этого не произошло к тому времени, когда все узлы на доске оказались покрашенными, объявляется ничья.

Напомним, что перестановка — это взаимно однозначное отображение конечного множества на себя. Мы будем рассматривать перестановки множества узлов доски. Будем говорить, что перестановка узлов доски сохраняет линии, если для любой линии образ набора узлов, из которых состоит эта линия, — тоже линия. Мы будем рассматривать только доски, обладающие свойством транзитивности: для любых двух узлов u и v существует перестановка σ узлов доски, сохраняющая линии, такая что $\sigma(u) = v$.

Пример. Игра Сим. На окружности стоят n точек. Петя и Вася, по-очереди проводят хорды, каждый — своим фломастером, в том числе, можно соединять соседние точки. В отличие от задачи 1.4, за один ход можно провести одну хорду. Игрок, после хода которого образуется треугольник с вершинами на исходной окружности, все стороны которого окрашены одинаково, проигрывает.

Чтобы превратить Сим в транзитивную игру с избеганием линий, обозначим исходные точки A_1, A_2, \dots, A_n и рассмотрим доску, на которой заданы узлы N_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$ (узел N_{ij} соответствует хорде A_iA_j). Пусть для каждого трехэлементного множества $\{i, j, k\}$ (считаем, что $i < j < k$) задана линия, проходящая через три узла N_{ij}, N_{ik}, N_{jk} . Получилась транзитивная доска. Игра на этой доске эквивалентна игре Сим. Проведение хорды — это закрашивание узла, а треугольник — это линия!

Может показаться, что игра «Избегание линий» на транзитивной доске неблагоприятна для первого игрока: в силу транзитивности все точки на доске «одинаковы», чем раньше начнешь красить, тем раньше соберешь линию. На доске с нечетным числом узлов первый игрок (если дело дойдет до самого конца) закрасит больше точек, чем второй, к тому же на последнем ходу у второго игрока будет выбор, а у первого — нет.

Основной вопрос. При каких n существует транзитивная доска с n узлами, на которой Петя выигрывает?

3.1. Пусть все линии на доске состоят лишь из двух узлов. Докажите, что Петя не выигрывает.
3.2. Рассмотрим «жадный» вариант игры. В нем на своем ходу игрок может покрасить не один узел, а любое непустое множество узлов по своему выбору. Докажите, что ни на какой доске Петя не может выиграть жадную игру.

3.3. Существует ли доска из 6 узлов, на которой Петя выигрывает?

3.4. Пусть n — нечетное составное число. Докажите, что существует доска с n узлами, на которой Петя выигрывает.

3.5. Для $n = 12k + 6$ существует доска, на которой все линии содержат по 3 узла и Петя выигрывает.

3.6. Докажите, что для любого числа r существуют сколь угодно крупные n , для которых можно построить доску с n узлами и линиями, содержащими ровно по r узлов, на которой Петя выигрывает.

3.7. а) Докажите, что для $n = 2b$, где b — нечетно, существует доска, на которой Петя выигрывает.

б) Докажите, что для $n = 2^a b$, где b — нечетно, $a > 1$, существует доска, на которой Петя выигрывает. Вы можете разбирать отдельные частные случаи этого вопроса.

3.8. Докажите, что Петя не сможет выиграть ни на какой доске, содержащей ровно 2^n узлов.

3.9. Открытый вопрос. Для каких простых чисел n существует доска с n узлами, на которой Петя выигрывает?

Например, что вы можете сказать о небольших значениях n : $n = 3, 5, 7, 11, 13$?

Игра «Избегание линий» – 3

Задачу представляют Бурсиан О., Кохась Д., Кохась К.

4 Специальные доски

Все доски, рассматриваемые в этой серии задач, предполагаются транзитивными.

Обозначим через A множество таких n , для которых существует транзитивная доска с n узлами, на которой любые две линии пересекаются и количество линий равно 2^{n-1} . Вопрос о том, какие натуральные числа принадлежат множеству A , а какие нет, до конца не выяснен.

Перестановка τ точек множества X называется произведением перестановок ρ и σ , если $\tau(k) = \rho(\sigma(k))$ при всех $k \in X$, т. е. если τ — это композиция отображений ρ и σ . Умножение перестановок, вообще говоря, некоммутативно. Набор перестановок G называют группой, если он замкнут относительно операции произведения перестановок. В этом случае G обязательно содержит тождественную перестановку e , а также для каждого $\sigma \in G$ в наборе G содержится перестановка, обратная к σ , т. е. такая перестановка $\bar{\sigma}$, что $\bar{\sigma}\sigma = \sigma\bar{\sigma} = e$.

Назовем перестановку флипом, если она разбивает все точки множества на пары и меняет местами точки в каждой паре. Назовем перестановку флопом, если длина каждого ее цикла равна степени 2. Пусть B — множество тех n , для которых можно построить группу перестановок множества $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, которая действует на множестве $[n]$ транзитивно и не содержит флопов.

4.1. а) Пусть для данной доски существует флип, сохраняющий линии. Докажите, что Петя не сможет выиграть на такой доске.

б) В магазине игрушек продается доска, на которой n узлов, где n четное, все линии попарно пересекаются и их количество равно 2^{n-1} . Докажите, что существует доска, на которой n узлов, выигрышная для первого.

4.2. Пусть транзитивная группа G перестановок множества $[2k]$ содержит перестановку τ , которая отображает некоторое k -элементное множество X на его дополнение $[2k] \setminus X$. Докажите, что группа G содержит флоп.

4.3. На доске n узлов. Все линии попарно пересекаются. При этом никакой флоп не является перестановкой, сохраняющей линии. Докажите, что можно добавить несколько линий так, чтобы их количество стало равно 2^{n-1} , доска осталась транзитивной, а флопы по-прежнему не сохраняли бы линии.

4.4. Пусть $n = 2^a \cdot b$, где $b > 1$ нечетно. Докажите, что существует доска с n узлами, на которой нет флипов.

4.5. Докажите, что $A = B$.

4.6. Докажите, что множество A замкнуто относительно умножения: если $k, n \in A$, то $kn \in A$.

4.7. Докажите, что если $b > 1$ — нечетное число, то $2b \in A$.

4.8. Докажите, что если $b > 3$ — нечетное число, то $4b \in A$.

5 Некоторые факты из теории групп

Мы приводим несколько теорем из теории групп, они требуются в решении задачи 3.8 Относительно элементарная постановка вопроса и его сведение с помощью задачи 4.1 к факту Любая транзитивная группа перестановок множества из 2^n элементов содержит флип оставляет шанс на то, что существует решение, не требующее всей этой техники.

5.1. Теорема Лагранжа.

a) Пусть G — конечная группа, H — ее подгруппа. Тогда $|G| : |H|$.

b) Пусть $x \in G$, обозначим через k наименьшее натуральное число, для которого $x^k = e$.

Это число называется порядком элемента x . Тогда $|G| : k$.

5.2. Пусть G — конечная группа. Тогда для любого элемента $h \in G$ число элементов в его классе сопряженных элементов, т. е. в множестве $G_h = \{aha^{-1}, a \in G\}$ является делителем числа $|G|$. Более точно: пусть $N_h = \{x \in G : hx = xh\}$. Тогда множество N_h представляет собой группу и $|G_h| \cdot |N_h| = |G|$.

5.3. Пусть G — конечная группа перестановок множества M . Для каждого $x \in M$, $g \in G$ обозначим через gx образ точки x под действием перестановки g . Множество $\mathcal{O}_x = \{gx, g \in G\}$ называется орбитой элемента x , а множество $S_x = \{g \in G : gx = x\}$ — стабилизатором точки x . Тогда для любой точки $x \in M$ $|\mathcal{O}_x| \cdot |S_x| = |G|$.

5.4. Пусть G — конечная группа. Множество $C = \{c \in G : \forall g \in G \quad gc = cg\}$ называется центром группы G . Оно непусто, поскольку всегда $e \in C$. Тогда если $|G| = p^n$, где p — простое число, то $C \neq \{e\}$.

5.5. Теорема Силова. Пусть G — группа из n элементов, p^a — максимальная степень простого числа, на которую делится n . Тогда группа G содержит подгруппу H , состоящую из p^a элементов.

Решения

1 Предварительные задачи

1.1. Ответ: выигрывает Вася. Он может пользоваться центрально-симметричной стратегией и тогда не проиграет. При этом игра не может окончиться ничьей, поскольку если вершины пятиугольной грани додекаэдра покрашены в два цвета, обязательно найдутся две соседние вершины, окрашенные одинаково.

1.2. Ответ: возможно два исхода: выигрывает Петя, либо ничья.

Первый вариант возможен, например, на октаэдре, второй — на тетраэдре. Ни на каком многограннике Вася не может выиграть, потому что если у Васи есть выигрышная стратегия, то Петя может ее украсть.

1.3. Ответ: выигрывает Вася. Своим первым ходом он отметит точку через один от Петиной и дальше будет пользоваться симметричной стратегией.

Другая возможная стратегия для Васи — каждым ходом красить точку, соседнюю по часовой стрелке с точкой, которую только что закрасил Петя.

1.4. Ответ: при $n \geq 6$ выигрывает Вася. Это следствие 5 из [2]. По задаче 3.2 Петя не может выиграть. При $n \geq 6$ игра не может закончиться ничьей, так как рамсеевское число $R(3, 3) = 6$.

2 Доски с пересекающимися линиями

2.1. а) Множество и его дополнение не могут одновременно оказаться линиями. Кстати, если количество линий равно 2^{n-1} , для любой пары взаимно дополнительных множеств одно является линией, а другое нет.

б) Если F — линия, $F \subset G$, то $F \cap (X \setminus G) = \emptyset$. Следовательно, $X \setminus G$ — не линия. Тогда по решению п. а) G — линия.

2.2. Это [1, лемма 2.2]. Пусть X — множество узлов доски, \mathcal{L} — множество линий. по условию любые две линии пересекаются. Множество линий, которое мы хотим построить, должно удовлетворять утверждению 2.1 б), возьмем на заметку все множества узлов, которые содержат линию: положим

$$\mathcal{L}_1 = \{B \subset X : A \subset B \text{ для некоторой линии } A \in \mathcal{L}\}.$$

В частности, $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_1$. Если найдется множество B , которое пересекается с каждой линией, но ни одну линию не содержит (это значит, что его дополнение \bar{B} тоже пересекается с каждой линией и ни одну из них не содержит), то одно из множеств B, \bar{B} тоже стоит назначить линией. Выберем то из них, в котором больше узлов (в случае равенства числа узлов — выберем любое). Пусть \mathcal{L}_2 — совокупность множеств, выбранных таким образом.

Проверим, что $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ — семейство попарно пересекающихся линий, в котором ровно 2^{n-1} элементов. То, что любые две линии в нем пересекаются, ясно по построению. Пусть Y — произвольное подмножество X , \bar{Y} — его дополнение. Если Y содержит какую-то линию, то $Y \in \mathcal{L}_1$; если Y не пересекается какой-нибудь линией, то $\bar{Y} \in \mathcal{L}_1$; если же и то, и другое не выполнено, то Y или \bar{Y} лежит в \mathcal{L}_2 .

2.3. Это утверждение Ph. Zumstein. Если $L = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ — минимальная линия, и ни одна из ее точек не является общей точкой пересечения всех множеств, то для каждого i , $1 \leq i \leq k$ существует линия L_i , для которой $x_i \notin L_i$. Но тогда пересечение $L \cap L_1 \cap \dots \cap L_k$ пусто.

2.4. Ответ: выигрывает Петя.

Сделаем несколько замечаний об устройстве игровой доски. Прежде всего, любые два различных кубика действительно определяют линию, состоящую из трех кубиков (в том смысле, что третий кубик, найденный по рецепту из условия задачи, не совпадает с исходными двумя). Далее, правило, описывающее линии, весьма симметрично: если по кубикам A и B конструкция из условия задачи задает кубик C , то по кубикам A и C эта же конструкция дает кубик B , а по кубикам B и C эта конструкция дает кубик A . Также нетрудно проверить, что через каждый кубик проходит 13 различных линий.

Заметим, что все кубики на этой доске, кроме кубика $(0, 0, 0)$, можно разбить на пары с помощью отображения: $x \mapsto -x$. Пусть Петя первым ходом закрасит кубик $(0, 0, 0)$, после чего каждым ходом он будет закрашивать кубик, парный к предыдущему ходу соперника. Пользуясь этой стратегией, Петя не проиграет.

Осталось доказать, что позиция, которая получится в конце игры, не может быть ничейной. Допустим, что ничейная позиция все-таки получилась. В финальной позиции 14 кубиков закрашено Петей. Имеется $C_{14}^2 = 7 \cdot 13$ всевозможных пар Петиных кубиков, и каждая пара A, B задает линию, содержащую некоторый третий кубик C . Поскольку позиция ничейная, этот кубик закрашен Васей. Перебирая все $7 \cdot 13$ пар, мы обнаружим $7 \cdot 13$ кубиков, закрашенных Васей. Но Вася закрасил всего 13 кубиков, значит, какой-то из этих кубиков мы «обнаружили» не менее 7 раз. Таким образом, мы обнаружили 7 линий (A_1, B_1, C) , (A_2, B_2, C) , \dots , (A_7, B_7, C) , проходящих через Васин кубик C . У этих линий кубики A_i, B_i закрашены Петей, и никакие два кубика среди этих 14 кубиков не могут совпадать. Значит, эти линии содержат все 14 кубиков, закрашенных Петей, а остальные 6 линий, проходящие через точку C , целиком состоят из Васиних кубиков. Противоречие.

3 Общий вариант игры с линиями

3.1. Это теорема 3 из [2]. Вася может украдь стратегию. Действительно, пусть Петя имеет выигрышную стратегию S_x , согласно которой первым ходом следует покрасить узел x . Пусть $\{x, y\}$ — какая-нибудь линия. В силу транзитивности существует выигрышная (для первого игрока) стратегия S_y , начинающаяся с хода в узел y . Тогда Вася может игнорировать тот факт что узел x закрашен и играть как бы за первого по стратегии S_y . Эта стратегия никогда не потребует от него, чтобы он походил в узел x , так как это проигрышный ход, поэтому Вася всегда будет иметь возможность ходить по стратегии.

3.2. Это теорема 4 из [2]. Вася может украдь стратегию. Пусть существует стратегия первого игрока, которая рекомендует первым ходом закрасить множество узлов S . Докажем, что у Васи имеется способ не проиграть, каким бы ни был первый ход Пети.

Пусть первым ходом Петя закрасил множество U . Если U — это всё поле, то игра уже закончилась и Вася не проиграл. В противном случае на доске имеется неокрашенный узел x . В силу транзитивности существует выигрышная стратегия первого игрока, начинающаяся с закрашивания множества узлов S' , содержащего x . Пусть тогда Вася закрасит узел x и остальные неокрашенные узлы из S' , если такие имеются, после чего будет далее играть в соответствии с этой выигрышной стратегией. Наличие Петиных узлов в S' может только облегчить выигрыш, в то время как узлы, закрашенные Петей за пределами S' , можно мысленно причислить к его второму ходу.

3.3. Ответ: да. Пример из [2]. Расположим 6 узлов в виде двух рядов по три узла, линии — это трехточечные множества одного из двух видов: либо это множество содержит по одному узлу из каждой пары, причем в верхнем ряду четное число узлов, либо содержит две точки из одной пары и одну точку из следующей по циклу пары. То, что эта доска транзитивная и первый выигрывает, проверяется непосредственно.

3.4. Это теорема 6 из [2]. Пусть $n = pq$. Будем считать, что на доске нарисовано q непересекающихся кругов, в каждом круге находится p узлов. Положим $p' = (p+1)/2$, $q' = (q+1)/2$. Рассмотрим семейство W , содержащее все множества из $p'q'$ узлов, каждое из которых содержит по p' узлов из каких-то q' кругов. В качестве множества линий L возьмем все множества из $p'q'$ узлов, не входящие в W . Транзитивность такой доски тривиальна, если мы ограничим себя перестановками, которые переставляют круги целиком, а также точки в них.

Так как каждая пара множеств из W пересекается, для доказательства того, что Первый выигрывает, достаточно проверить, что за первые $p'q'$ своих ходов он сможет построить множество из W (тогда Второй следующим ходом построит линию). Назовем круг активным, если Первый закрасил в нем не менее одного узла, но менее, чем p' . Назовем круг заполненным, если Первый закрасил в нем p' узлов. Стратегия Первого состоит в том, что он применяет первое из следующих правил, которое удается применить.

- 1) Если Второй только что ходил в активный круг, то Первый ходит туда же.
- 2) Если меньше q' кругов являются активными или заполненными, Первый ходит в пустой круг.
- 3) Первый ходит в любой активный круг.

Правило 1 означает, что после хода Первый закрасил в этом активном круге больше узлов, чем Второй. Правило 2 означает, что после хода Первого более половины непустых кругов активны или полны. В результате после $p'q'$ ходов Первый закрасит ровно по p' узлов в точности в q' кругах.

3.5. Это теорема 24 из [2]. Нужно взять $2k+1$ копий доски из решения задачи 3.3 (а линиями будем считать множества из трех узлов в каждой из копий, которые ранее там считались линиями). Транзитивность очевидна. Один экземпляр Петя оставит для содержательной игры (в ней он выигрывает по задаче 3.3), а остальные разобьет на пары и будет совершать в них симметричные ходы (и тут он не проиграет).

3.6. Это следствие 25 из [2]. Достаточно модифицировать пример из задачи 3.5. Пусть $k > 2r$ и при этом настолько крупное, насколько нам хочется. Возьмем $n = 2k + 1$ экземпляров доски из решения задачи 3.3. Пусть L — множество линий длины 3 на этой доске. Зададим линии длины r : пусть

$$L' = \{\ell' \in [n]^{(r)} : \ell' \supset \ell \text{ для некоторого } \ell \in L\}$$

Петина стратегия та же, что в задаче 3.5: на первой доске Петя поддерживает игру из задачи 3.3, на остальных парах досок Петя ходит симметрично. В какой-то момент Вася построит линию ℓ длины 3 из множества L (а Петя к этому моменту еще не построил такой линии). Если к этому времени сделано r пар ходов, то Вася проиграл: линия ℓ плюс остальные его ходы определяют линию из множества L' . Если же r ходов еще не сделано, то Петя начинает просто тянуть время, делая каждый свой ход на новую доску.

3.7. а) Это предложение 10 из [2]. Пусть $n = 2b$, $b' = (b-1)/2$. Будем считать, что доска — это клетчатый цилиндр $b \times 2$, для которого фиксировано направление обхода и клетки которого — это узлы. Будем обозначать клетки парами (x, ϵ) , где x — остаток по модулю b , $\epsilon = 0$ или 1.

Множество из b клеток будем называть выигрышным, если оно

— или содержит по одной клетке в каждом столбце и при этом нечетное число клеток в верхней строке

— или содержит ровно один «полный» столбец (в котором обе клетки принадлежат множеству) и при этом «пустой» столбец (не содержащий клеток множества) отстоит от полного не далее чем на b' клеток в направлении обхода.

Обозначим через W семейство всех выигрышных множеств. Очевидно, выигрышное множество содержит половину всех клеток доски и дополнение выигрышного множества не

является выигрышным, так что в семействе W любые два множества пересекаются. Дополнение любого выигрышного множества будем считать линией. Полученная доска транзитивна, поскольку повороты цилиндра, а также одновременные перестановки узлов в двух столбцах сохраняют линии.

Проверим, что первый выигрывает на такой доске. Если A — это множество клеток, содержащее не более одной клетки в каждом столбце, обозначим через \bar{A} множество, содержащее вторые клетки из тех столбцов, где имеются клетки A . Позиции в игре будем обозначать как пары (A, B) , где A — множество клеток, закрашенных к данному моменту первым игроком, а B — множество клеток, закрашенных вторым.

Заметим, что в позициях вида $(A \cup (x, \epsilon), \bar{A} \cup (z, \delta))$, где $1 \leq z - x \leq b'$, у первого игрока есть простой форсированный выигрыш: он должен закрасить клетку $(x, 1 - \epsilon)$ и после этого играть так, чтобы закрасить по одной клетке в каждом столбце, за исключением столбца z . Благодаря условию на x и z , в конце игры первый закрасит выигрышное множество второго вида (а второй игрок закрасит линию).

Опишем теперь стратегию первого игрока. Она состоит в том, что если нет простого форсированного выигрыша, то первый должен оставлять после своего хода позицию вида $(A \cup (x, \epsilon), \bar{A})$ для какого-нибудь множества A , содержащего не более одной клетки в каждом столбце и еще одной клетки (x, ϵ) . Допустим, что в второй игрок закрашивает в ответ клетку (z, δ) . Возможны следующие случаи.

1) Если $1 \leq z - x \leq b'$, то первый выиграет далее с помощью форсированного выигрыша.

2) Если $(z, \delta) \neq (x, 1 - \epsilon)$, то первый ответит на это закрашиванием клетки $(z, 1 - \delta)$, чем обеспечит после своего хода требуемый вид позиции.

3) Если $(z, \delta) = (x, 1 - \epsilon)$, то после хода второго получилась позиция (B, \bar{B}) , в которой все столбцы либо полные (обе клетки раскрашены), либо пустые. Выберем самый первый пустой столбец x' и если $x' < b'$, то пусть первый игрок закрасит клетку $(x', 0)$ (и кстати это означает, что самый первый ход первого был $(0, 0)$).

Если же $x' \geq b'$, то первый должен проявить некоторую аккуратность, поскольку дело попахивает построением выигрышного множества первого типа, а для этого требуется контролировать четность. Когда этот случай произошел впервые, все столбцы с номерами от 0 до b' уже закрашены, а столбец b' пуст, так как первый игрок в него не ходил, а второй игрок не мог туда ходить, поскольку тогда бы он предоставил первому форсированный выигрыш. Начиная с этого момента, первый по-прежнему будет закрашивать одну клетку (в самом первом) пустом столбце, а второй, если он не хочет, чтобы первый форсированно выиграл, должен будет закрасить вторую клетку в том же столбце. На последнем ходу первый должен выбрать ту незакрашенную клетку, которая обеспечивает нужную четность.

b) Это теорема 13 из [2]. Строится пример доски. Ужасно.

3.8. Это теорема 9 из [2]. Мы приводим ее доказательство в качестве решения «на вырост».

По утверждению задачи 4.1 а) достаточно проверить, что на доске, состоящей из 2^n узлов, всегда есть флип. Это общий факт о группах, транзитивно действующих на множествах. Кстати, по утверждению задачи 4.4 для любого числа узлов, не являющегося степенью двойки, существует транзитивная доска без флипов.

Так как у каждого узла орбитой является вся доска, то по утверждению 5.3 заключаем, что $|G| : 2^n$ и для любого узла x и его стабилизатора S_x выполнено равенство

$$\frac{|G|}{|S_x|} = 2^n. \quad (1)$$

Тогда по утверждению 5.5 заключаем, что в группе G можно найти подгруппу H_2 , состоящую из 2^k элементов, где $k \geq n$ — наибольший показатель степени 2, на которую делится $|G|$. Группа H_2 действует перестановками узлов на той же доске. Опять по утверждению 5.3 в группе H_2 для любого узла x , его стабилизатора T_x в группе H_2 и его орбиты \mathcal{O}_x

относительно группы H_2 выполнено аналогичное равенство

$$\frac{2^k}{|T_x|} = |\mathcal{O}_x|. \quad (2)$$

Но очевидно T_x – подгруппа в S_x , следовательно, $|S_x| : |T_x|$. Тогда мы получаем, что двойка входит в одинаковой степени в числители в формулах (1) и (2), а в знаменателе формулы (2) она входит в степени не большей, чем в знаменатель формулы (1). Следовательно, правая часть формулы (2) делится на 2^n . Но орбита \mathcal{O}_x не может содержать больше 2^n точек. Значит, $|\mathcal{O}_x| = 2^n$. Таким образом, группа H_2 действует перестановками узлов доски транзитивно.

По утверждению 5.4 в группе H_2 содержится непостоянная перестановка σ , коммутирующая со всеми остальными. По теореме Лагранжа $|H_2|$ делится на порядок перестановки σ , пусть этот порядок равен 2^d . Тогда $\tilde{\sigma} = \sigma^{d/2}$ – перестановка второго порядка, тоже лежащая в центре группы H_2 . Значит, она представляет собой произведение нескольких независимых транспозиций. Проверим, что перестановка $\tilde{\sigma}$ не может иметь неподвижных точек. Действительно, пусть перестановка $\tilde{\sigma}$ меняет местами узлы x и y и при этом оставляет на месте узел z . В силу транзитивности группы H_2 содержит перестановку τ , отображающую z в x . Тогда $x = \tau\tilde{\sigma}(z) \neq \tilde{\sigma}\tau(z) = y$, т.е. перестановки $\tilde{\sigma}$ и τ не коммутируют! Противоречие.

Таким образом, $\tilde{\sigma}$ и есть искомый флип.

3.9. Дискуссия на стр. 24 в [2]. При $n = 3, 5, 7$ такой доски не существует. При $n = 11, 13$ существует (найдена на компьютере).

4 Специальные доски

4.1. а) Это лемма 8 из [2]. С помощью флипа мы можем определить симметричную стратегию.

б) Это предложение 7 из [2]. Купим доску в магазине и модернизируем ее: оставим на ней только линии из $n/2$ узлов. Антилиния – это дополнение линии. Очевидно и обратное верно: дополнение антилинии – это линия. Пусть Петя играет в игру «Построй антилинию». Он может выиграть в эту игру, украв, если надо, стратегию. Выигрыш в этой игре одновременно является и выигрышем в игре с избеганием линий.

4.2. Все циклы перестановки τ имеют четную длину, пусть их длины равны $2^{a_1}b_1, 2^{a_2}b_2, \dots, 2^{a_\ell}b_\ell$, где все числа b_i нечетны. Положим $b = b_1b_2 \dots b_\ell$. Тогда τ^b – флоп.

4.3. Это предложение 2.3 [1]. Как это ни странно, текст, написанный ниже, является решением задачи, в том числе, и для нечетных n , хотя его содержательность в этом случае в каждый момент кажется крайне сомнительной.

Пусть G – группа перестановок, сохраняющих линии. По результату предыдущей задачи, если бы какое-нибудь множество можно было «переставить» с его дополнением с помощью перестановки $\tau \in G$, то некоторая степень перестановки τ оказалась бы флопом, что запрещено. Таким образом, орбиты группы G в семействе множеств размера $n/2$ распадаются на «взаимодополняющие» пары: если $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ – орбита множества F_1 , то $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_k\}$ – орбита множества \bar{F}_1 .

Воспользуемся тогда конструкцией задачи 2.2. Очевидно, что группа G отображает линии из множества \mathcal{L}_1 в линии из этого же множества. Что же касается линий из множества \mathcal{L}_2 , сам тест на принадлежность этому множеству (множества B и \bar{B} должны пересекаться с каждой линией из \mathcal{L}) инвариантен по отношению к действию группы G (т. е. при $\tau \in G$ множества τB и $\tau \bar{B}$ тоже будут пересекаться с каждой линией). А замечание о взаимодополняющих парах орбит, позволяет G -инвариантным способом выбрать, какое из множеств B или \bar{B} следует отнести к \mathcal{L}_2 .

4.4. Это часть теоремы 3.2 [1]. Достаточно построить группу перестановок, транзитивно действующую на множестве узлов и не содержащую флипов. Пусть узлы расположены в виде прямоугольника $2^a \times b$. Обозначим через s_i , $i = 1, \dots, b$, циклический сдвиг узлов на i -й горизонтали, а через t — перестановку, которая циклически переставляет все горизонтали (в каждом вертикальном ряду узлы переставляются одним и тем же способом). Тогда множество перестановок вида

$$s_1^{k_1} s_2^{k_2} \dots s_b^{k_b} t^k, \quad \text{где } k_1 + k_2 + \dots + k_b : 2^a \quad (*)$$

является группой (т. е. просто замкнуто относительно композиций). Поскольку b нечетно, флип в такой группе должен иметь вид $s_1^{k_1} s_2^{k_2} \dots s_b^{k_b} t^k$, где $k = 0$, а показатели k_i могут быть равны лишь 0 и 2^{a-1} . В силу нечетности b хотя бы один из показателей k_i должен быть нулевым.

4.5. Проверим импликацию $(k \in B) \Rightarrow (k \in A)$. Если G — группа перестановок множества $[n]$, не содержащая флопа, возьмем в качестве начального пустое множество линий. По утверждению задачи 4.3 его можно дополнить до пересекающегося семейства из 2^{n-1} линий.

Для доказательства импликации $(k \in A) \Rightarrow (k \in B)$ заметим, что группа перестановок, действующая на транзитивной доске с 2^{n-1} линиями, не может поменять местами никакое множество с его дополнением. Тогда, как мы заметили в решении задачи 4.3, эта группа перестановок не содержит флопов.

4.6. Лучше проверять это свойство для множества B . Если группа G_1 действует на доске X_1 с k узлами и не содержит флопов, а группа G_2 действует на доске X_2 с n узлами и тоже не содержит флопов, то группа $G_1 \times G_2$ действует на доске $X_1 \times X_2$ с kn узлами и, очевидно, тоже не содержит флопов.

4.7. В решении задачи 4.4 построена транзитивная группа перестановок на доске с $2^a b$ узлами, не содержащая флипа. При $a = 1$ эта группа не может содержать флопа. Действительно, элемент вида (*) не может оказаться флопом, поскольку при $k \neq 0$ его порядок делится на b , а при $k = 0$ это элемент второго порядка, т.е. тогда это флип, что невозможно.

4.8. Нужно слегка обобщить конструкцию решения 4.4. См. подробности в [1], доказательство теоремы 2.4.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Cameron P.J., Frankl P., Kantor W.M. Intersecting families of finite sets and fixed-point-free 2-elements // Europ. J. Combinatorics. Vol. 10. 1989. P. 149–160.
- [2] Johnson J.R., Leader I., Walters M. Transitive avoidance games. <http://arxiv.org/pdf/math/1607.0294v1.pdf>

“Line avoidance” game – 1

Bursian O., Kokhas D., Kokhas K.

1 Preliminary problems

We consider games where two players Alice and Bob (aka First and Second, or simply, P1 and P2) move alternatively. In our games they color some objects (uncolored yet) with their own colors. For convenience, let Alice use an amber (or first) color and Bob use blue (or second) color. In all games Alice makes the first move. “And what about Bob?” you could ask. And Bob makes the second move.

Usually a move consists of coloring of one uncolored object (if the problem statement does not define another rule). What do they want to achieve by their colorings is formulated in the problem statement. But keep in mind that, generally speaking, it may happen that they will not reach their aims in coloring during the game. In this case a draw is declared. So a question “Who wins?” can be answered “Nobody!”.

1.1. Alice and Bob alternatively color the vertices of a dodecahedron. A player who colors two vertices of the same edge for the first time loses. Who wins if both players are playing with an optimal strategy?

1.2. Alice and Bob alternatively color vertices of some polyhedron. A player who colors all the vertices of some face for the first time wins. Who wins if both players are playing with an optimal strategy?

1.3. 99 points are marked on the circle. Alice and Bob alternatively color these points. A player who colors two neighbour points for the first time loses. Who wins if both players are playing with an optimal strategy?

1.4. There are n points marked on the circle. Alice and Bob, alternatively, draw chords by their own markers (connecting of neighbour points is allowed too). In a move they can draw several chords. A player who colors all sides of a triangle with vertices on the initial circle, loses. Who wins if both players are playing with an optimal strategy? You may investigate the question for sufficiently large n only.

2 Boards with intersecting lines

Let a finite number of points are marked on the plane (or elsewhere). We call these points nodes. Let several lines are passes through the nodes. You may think that a line is a «curve of an arbitrary shape» that passes through nodes. Let for any two lines the sets of nodes belonging to the lines do not coincide. In fact, the lines are just the subsets of the set of nodes. We say that two lines intersect, if they pass through at least one common node. Geometrical arrangement of lines, including their intersections not in the nodes are inessential. Later we will use the configuration of lines and nodes as a board for a game and put some additional requirements for boards.

2.1. A board consists of n nodes. All the lines are pairwise intersecting.

a) Prove that the number of lines does not exceed 2^{n-1} .

b) Let the number of lines be equal to 2^{n-1} . Prove that if we add a node to any line we will obtain a line again.

2.2. A board consists of n nodes. All the lines are pairwise intersecting. Prove that it is possible to add several lines so that the number of lines is equal to 2^{n-1} and the whole set of lines is pairwise intersecting.

2.3. A board consists of n nodes and several lines. Let the minimal line contains k nodes. Prove that if any $k+1$ lines have a common node then all the lines have a common node.

2.4. Consider a cube $3 \times 3 \times 3$. Let its unit cubes be nodes of the board. We may consider them as a triples (x_1, x_2, x_3) , $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 2$. Let all the lines of the board contain exactly 3 nodes: a line containing nodes (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) contains also node $(-x_1 - y_1, -x_2 - y_2, -x_3 - y_3)$ (calculations modulo 3). Who wins on this board?

“Line avoidance” game – 2

Bursian O., Kokhas D., Kokhas K.

3 *The general case of “Line avoidance” game*

Consider a game board with nodes and lines as in the previous section. Alice and Bob alternatively color nodes. A player who colors all the nodes of some line for the first time, loses. If this situation does not happen until all the nodes on the board have been colored a draw is declared.

Remind that a permutation is a one-to-one mapping from a finite set onto itself. We will consider permutations of the set of the board nodes. We say that a permutation of the board nodes preserves lines if the image of the set of nodes of any line is a line, too. We will consider transitive boards only that means that for any two nodes u and v there exists a permutation σ of the board nodes preserving lines such that $\sigma(u) = v$.

E x a m p l e. Sim (pencil game). n points are drawn on the circle. Two players take turns drawing chords by their own markers (it is allowed to connect neighbour points too). In contrast to the problem 1.4, drawing of one chord in a move is allowed only. A player who colors all sides of a triangle with the vertices belonging to the initial circle, loses.

In order to interpret Sim as a transitive game we denote the initial points by A_1, A_2, \dots, A_n and consider a board with nodes N_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$ (the node N_{ij} corresponds to the chord A_iA_j). For each set of three elements $\{i, j, k\}$ (where $i < j < k$) define a line that consists of three nodes N_{ij}, N_{ik}, N_{jk} . We obtain a transitive board. The game on this board is equivalent to Sim. A chord drawing turns to a node coloring and a triangle turns to a line!

At first glance it looks as the first player has a disadvantage in “Line avoidance” game on a transitive board. Since all the points on the board are “the same” due to transitivity, the earlier coloring starts the earlier line constructing happens. Also the first player colors more points than the second one on the board with odd number of points (if the game continues till the end), besides that the second player has a choice in the last move and the first player does not.

T h e m a i n q u e s t i o n. For which n does a transitive board with n nodes exist such that Alice wins?

- 3.1.** Let all the lines on the board consist of two nodes only. Prove that Alice does not win.
- 3.2.** Consider a “greedy” game in which a player in a move can color any non empty set of nodes by his choice. Prove that there does not exist a board for which Alice can win greedy game.
- 3.3.** Does a board with 6 nodes exist for which Alice wins?
- 3.4.** Let n be an odd composite number. Prove that there exists a board with n nodes such that Alice wins on it.
- 3.5.** Prove that for $n = 12k + 6$ there exists a board such that all its lines contain exactly 3 nodes and Alice wins.
- 3.6.** Prove that for any number r there exist an arbitrary large number n and a board with n nodes such that each line contains exactly r nodes and Alice wins on this board.
- 3.7.** a) Prove that for $n = 2b$ where b is odd, there exists a board such that Alice wins on it.
b) Prove that for $n = 2^a b$ where b is odd, $a > 1$, there exists a board such that Alice wins. You may suggest solutions for partial cases of this question.
- 3.8.** Prove that Alice can not win on any board that contains exactly 2^n nodes.
- 3.9.** Open question. For which prime numbers n there exists a board with n nodes for which Alice wins?

For example, what can you say about small prime numbers: $n = 3, 5, 7, 11, 13$?

“Line avoidance” game – 3

Bursian O., Kokhas D., Kokhas K.

4 Special boards

We assume that all the boards under consideration are transitive.

Denote by A a set of numbers n for which a transitive board with n nodes exists such that any its two lines are intersecting and the number of lines equals 2^{n-1} . What integers n belong to the set A is an open question.

Remind that a permutation is a one-to-one mapping of the set $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ onto itself. A permutation τ is called a product of permutations ρ and σ if $\tau(k) = \rho(\sigma(k))$ for all $k \in [n]$ i.e. if τ is a composition of the mappings ρ and σ . Multiplication of permutations is non commutative in the general case. A set G of permutations is called a group if it closed under taking the operation of permutation product. In this case G necessarily contains the identical permutation e and for any $\sigma \in G$ the set G contains permutation $\bar{\sigma}$, which is inverse to σ , i.e. $\bar{\sigma}\sigma = \sigma\bar{\sigma} = e$.

We say that a permutation is a flip if it partitions the points of the set $[n]$ onto pairs and maps each point to the point of its pair. We call a permutation a flop if the length of any of its cycles equals a power of 2. Let B be a set of numbers n for which there exists a group of permutations of the set $[n]$ that does not contain a flop and such that this group acts transitively on the set $[n]$.

4.1. a) If a flip preserving lines exists for the given board then Alice can not win on that board.

b) In the toys shop they sale a board with n nodes where n is even, all the lines are pairwise intersecting and their number is 2^{n-1} . Prove that there exists a board with n nodes such that Alice wins on it.

4.2. Let a transitive group G of permutations of the set $[2k]$ contain a permutation τ that maps some k -element set X to its complement $[2k] \setminus X$. Prove that group G contains a flop.

4.3. Let a board contain n nodes and all the lines be pairwise intersecting. Let there is no a flop that preserves lines on this board. Prove that we can add several lines so that the number of lines is 2^{n-1} , the board remains to be transitive and there is no a flop preserving lines.

4.4. Let $n = 2^a \cdot b$ where $b > 1$ is odd. Prove that there exists a board with n nodes such that any flip does not preserve the lines.

4.5. Prove that $A = B$.

4.6. Prove that the set A is closed under multiplication i.e. $k, n \in A$ implies that $kn \in A$.

4.7. Prove that if $b > 1$ is an odd number then $2b \in A$.

4.8. Prove that if $b > 3$ is an odd number then $4b \in A$.

Solutions

1 Preliminary problems

1.1. Answer: the first player wins.

If all the vertices of dodecahedron are colored in two colors then each face of the dodecahedron contains 2 neighbor vertices colored in the same color. So a draw is impossible in this game. The first player does not lose when uses central symmetry strategy.

1.2. Answer: two possible results of the game are either a draw or the first player wins

For a tetrahedron the result is a draw. For octahedron it is easy to see that the first player wins. For any polyhedron the second player can not win because the first player can steal his winning strategy.

1.3. Answer: the second player wins.

Enumerate points along the circle. Let the first player color point 1 at his first move. Then the second player colors point 98 in his first move and after that uses symmetrical (with respect to a symmetry $k \leftrightarrow 99 - k$) strategy.

1.4. Answer: the second player wins for $n \geq 6$.

The first player can not win due to problem 3.2. A draw is impossible for $n \geq 6$ because Ramsey number $R(3, 3) = 6$.

2 Boards with intersecting lines

2.1. a) A set and its complement can not both be lines. And just in case, if the number of lines is 2^{n-1} , then in any pair of the complementary sets exactly one is a line.

b) Let X be a set of the board nodes, G be an arbitrary subset of X . If F is a line, $F \subset G$, then $F \cap (X \setminus G) = \emptyset$. Therefore $X \setminus G$ is not a line. Then G is a line by p. a).

2.2. [1, lemma 2.2]. Let X be a set of the board nodes and \mathcal{L} be a set of the lines. We know that any two lines intersect. The set of lines that we want to construct should satisfy 2.1 b). Consider all the sets of nodes that contain line, let

$$\mathcal{L}_1 = \{B \subset X : A \subset B \text{ for some line } A \in \mathcal{L}\}.$$

Particularly, $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_1$. If there exists a set B that intersects any line and in the same moment does not contain any line (it means that its complement \bar{B} intersects any line and does not contain any line, too) then it's worth to assign one of the sets B, \bar{B} to be a “new” line. Choose one of the two sets that contains more nodes (in the case of equality of the numbers of nodes we can choose any of them). Let \mathcal{L}_2 be a family of sets that we choose by the described way.

Check that $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ is a family of pairwise intersecting lines that contains exactly 2^{n-1} elements. It's clear by the construction that any two lines in this family are intersecting.

Let Y be an arbitrary subset of X and \bar{Y} be its complement. If Y contains a line then $Y \in \mathcal{L}_1$; else if Y does not intersect any line then $\bar{Y} \in \mathcal{L}_1$; in all other cases Y or \bar{Y} is contained in \mathcal{L}_2 .

2.3. It's the proposition of Ph. Zumstein. If $L = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ is a minimal line and no one of its points is a common point of the intersection of all sets then for any i , $1 \leq i \leq k$, there exists a line L_i for which $x_i \notin L_i$. But then the intersection $L \cap L_1 \cap \dots \cap L_k$ is empty.

2.4. Answer: Alice wins.

We make some notes about construction of the game board. First of all any two distinct cubes indeed define a line consisting of 3 cubes (in the sense that the third cube found by the receipt of problem statement does not coincide with the two initial ones). Further, the rule describing lines is very symmetrical: if construction from the problem statement gives the cube C by the

cubes A and B then the same construction gives the cube B by the cubes A and C and the cube A by the cubes B and C . It is not hard to check also that each cube belongs to 13 different lines.

Note that all cubes on this board except the cube $(0, 0, 0)$ can be partitioned into pairs by the mapping $x \mapsto -x$. Let Alice color the cube $(0, 0, 0)$ at her first move. After that let she color at each move the cube corresponding to the cube colored by her opponent at the previous move. Alice can not lose using this strategy.

It remains to prove that the final position of the game can not be a draw. Assume that we have a draw in the end of the game (no matter what strategy the players used). 14 cubes in this position are colored by Alice. Each of $\binom{14}{2} = 7 \cdot 13$ pairs of these cubes defines a line that contains a third cube C . Since we have a draw here this cube is colored by Bob. So for each $7 \cdot 13$ pairs we detect a cube colored by Bob. But Bob has colored 13 cubes totally, therefore we detect one of his cubes at least 7 times. Thus, we find 7 lines (A_1, B_1, C) , (A_2, B_2, C) , \dots , (A_7, B_7, C) , that contain Bob's cube C . All the 14 cubes A_i, B_i here are colored by Alice and no two of them coincide. Hence these lines contain all Alice's cubes and then other 6 lines that pass through C consist of Bob's cubes. A contradiction.

3 *The general case of “Line avoidance” game*

3.1. [2, theorem 3]. If a winning strategy for the first player exists, it can start by coloring of an arbitrary node. Denote by S_z the strategy that starts from the coloring of node z .

Let Alice use a winning strategy S_x . We will prove that Bob can steal Alice's strategy. Let $\{x, y\}$ be an arbitrary line that contains node x . Then Bob can ignore the fact that the node x has been already colored and plays as the first player according to the strategy S_y . Since Alice has colored node x she will never color it again. As to Bob his strategy S_y never requires to color node x because he loses in that case. Therefore Bob can always move according to the strategy S_y . So he will not lose.

3.2. [2, theorem 4]. Let a winning strategy for Alice exist, assume that the first move of Alice according to this strategy is a coloring of a set of nodes S .

We will prove that for each Alice's first move Bob has an answer that allows him do not lose. Let Alice color a set U at the first move. If U is the whole board then the game is already finished and Bob has not lost. In the opposite case there exists node x in the board that has not been colored yet. The game is transitive, so there exists a winning strategy F for the first player that begins from coloring of a set S' containing x . Let Bob color node x and those nodes of S' that are not colored yet. Let he play after that according to the strategy F .

There are 2 obstacles in this way.

1) In fact some nodes in S' were possibly colored by Alice. It is not a disadvantage for Bob, and does not prevent him to use strategy F due to avoidance nature of the game.

2) Several nodes outside the set S' (namely, the nodes in $U \setminus S'$) have been colored by Alice before Bob's first move. Then consider Alice's second move, let her color set V . Now Bob can think that the game begins from coloring of S' by him at the first move and continues with coloring of $U \setminus S'$ and V by Alice at the second move.

3.3. Answer: yes. Example from [2]. Arrange 6 nodes in 2 rows, 3 nodes in a row, let lines be the sets containing 3 points of one of two kinds: either this set contains exactly one of two nodes from each column and even number of nodes in the upper row or it contains two points from one column and one point from the next column in cyclic order. It is now verified directly that this board is transitive and the first player wins.

3.4. [2, theorem 6]. Let $n = pq$. We assume that q non intersecting circles are drawn on the board, each circle contains p nodes. Let $p' = (p+1)/2$, $q' = (q+1)/2$. Choose an arbitrary q' circles and choose p' nodes in each of these circles. Consider a family of all sets W consisting of $p'q'$ nodes that can be obtained by this way for all choices. Let lines be sets of $p'q'$ nodes that do

not belong to W . Transitivity of this board is provided by permutations that permute all nodes in each circle only or permute the whole circles only and by compositions of these permutations.

It is clear that any two sets of W are intersecting. So if we want to prove that Alice wins it is sufficient to check that she can construct a set from W after her $p'q'$ moves (then Bob on his next move will construct a line). We call a circle active if Alice has colored in it at least one node but less than p' nodes. We call a circle full if Alice has colored p' nodes in it. The winning strategy for Alice is to apply the first rule from the list below that could be applied.

- 1) If the last move of Bob was in active circle then Alice chooses any node in this active circle.
- 2) If less than q' circles are active or full then Alice chooses any node in empty circle.
- 3) Alice chooses any node in any active circle.

The first rule guarantees that Alice always has colored more nodes than Bob in any active circle. The second rule guarantees that more than one half of non empty circles are active or full after Alice's move.

According to this strategy after $p'q'$ Alice will color exactly p' nodes in exactly q' circles.

3.5. [2, theorem 24]. Let a board consist of $2k + 1$ copies of the 6-node board from solution 3.3 (and lines are sets of 3 nodes, belonging to the same copy and forming a line in it in a sense of solution 3.3). The transitivity of this board is clear.

Now let Alice play on the first board as in the solution 3.3. All other boards she splits onto pairs and plays symmetrically on them.

3.6. [2, corollary 25]. We modify the example of the solution 3.5. Let $k > 2r$ and k be as big as we will need. Consider the 6-node board from solution 3.3, let L be the set of lines on this board as in solution 3.3, each line contains 3 nodes. Consider a big board consisting of $n = 2k + 1$ copies of 6-node board. Define a set of lines in it (each lines contains r nodes) as

$$L' = \{\ell' \text{ is a set of } r \text{ nodes} : \ell' \supset \ell \text{ for some } \ell \in L\}$$

Alise's strategy looks like that in the problem 3.5: Alice plays the game from the problem 3.3 on the first board, and plays symmetrically on others. Then at some moment of time Bob constructs a 3-node line $\ell \in L$ (and Alice has constructed no lines from L yet). If r pairs of moves have been made till this moment, Bob loses because line ℓ plus all other his moves form a line from the set L' . If less than r pairs of moves have been made, then Alice begins just to wait making each move on a new board.

3.7. a) [2, proposition 10]. Let $n = 2b$, $b' = (b - 1)/2$. We may think that the board is a square cylinder $b \times 2$, for which we fix the (cyclic) direction of its long side and the nodes are the cells of the cylinder. Denote nodes by pairs (x, ϵ) , where x is a residue modulo b , $\epsilon = 0$ or 1.

We call a set of b cells winning if

- either it contains one cell in each column and the total number of cells in the upper row is odd;
- or it contains the unique “full” column (i.e. both cells of this column belong to the set) and the “empty” column (without cells of the set) is situated at most b' cells later in the chosen direction.

Denote by W the set of all winning sets. It is clear that a winning set contains one half of all cells of the board and that the complement of the winning set is not a winning set. Therefore any 2 sets in W intersect. We call a set a line if it is the complement of a winning set. The obtained board is transitive because the rotations of the cylinder along the long side and along the short side preserve lines.

Check that Alice wins on this board. For a set A that contains at most one cell in each column denote by \bar{A} a set that contains the second cells of those columns which contain cell of A . In each moment denote positions of a game by pair (A, B) where A is the set that has been colored by Alice and B is the set that has been colored by Bob.

Observe that for positions of the form $(A \cup (x, \epsilon), \bar{A} \cup (z, \delta))$, where $1 \leq z - x \leq b'$, Alice has a simple forced victory: she just should color cell $(x, 1 - \epsilon)$ and then continue a game by coloring

one cell in each column except column z . Due to the restrictions on x and z Alice will color a winning set of the second type at the end of the game (and hence Bob will color a line).

Now describe the strategy of Alice. If there are no simple forced victory, Alice should leave to Bob after her move a position of the form $(A \cup (x, \epsilon), \bar{A})$, where set A contains at most one cell in each column, and (x, ϵ) is an arbitrary additional cell. Look at this strategy in details. Assume that Bob colors cell (z, δ) in his next move. Then the following cases are possible.

1) $1 \leq z - x \leq b'$. Then Alice has a forced victory.

2) $(z, \delta) \neq (x, 1 - \epsilon)$. Then Alice colors cell $(z, 1 - \delta)$ and obtains a position in agreement with her strategy.

3) $(z, \delta) = (x, 1 - \epsilon)$. Here we have after Bob's move a position of the form (B, \bar{B}) , in which all columns are either full (both cells are colored) or empty. Then choose the first empty column x' . If $x' < b'$ then Alice colors cell $(x', 0)$ and obtains a position in agreement with the strategy. (We believe also that this case corresponds to the initial position of the game and the first move of Alice was $(0, 0)$.)

If $x' \geq b'$, then Alice should play carefully in order to construct a winning set of the first type, for this she should trace the parity. In the very first occurrence of this case all the columns from 0 to b' have been already colored and the column b' is empty because Alice has not made a move in this column yet and if Bob has colored a cell there then he provides the forced victory for Alice. Starting from that moment Alice colors one cell in the first empty column as before. Bob should color the second cell in the same column because otherwise he presents Alice the forced victory. On the last move Alice should choose the cell that provides desired parity.

b) See [2, theorem 13]. The construction is too big. Looking forward to find shorter one.

3.8. [2, theorem 9]. Non elementary proof uses serious group theory technique.

3.9. [2]. For $n = 3, 5, 7$ this board does not exist. For $n = 11, 13$ examples are found by computer.

4 Special boards

4.1. a) [2, lemma 8]. Flip allows to define symmetric strategy.

b) [2, proposition 7]. Buy the board in the shop and remove all its lines except those that have $n/2$ nodes. Let antiline be the complement of a line. Then the complement of each antiline is a line. Let Alice play a game “Construct an antiline”. She can win this game by stealing a strategy if necessary. Victory in this game is a victory in Line avoidance game also.

4.2. All the cycles of the permutation τ have even length, let their lengths equal $2^{a_1}b_1, 2^{a_2}b_2, \dots, 2^{a_\ell}b_\ell$ where all the numbers b_i are odd. Let $b = b_1b_2\dots b_\ell$. Then τ^b is a flop.

4.3. [1, proposition 2.3]. Not paying attention to how weird it seems, the text below is the problem solution suitable for odd n also, nevertheless its sense in this case seems so doubtful at each moment of time.

Let G be a permutation group preserving lines. By the result of the previous problem, we know that if a permutation $\tau \in G$ permutes some set with its complement then some power of the permutation τ is a flop but it's prohibited. Thus the orbits of the group G on the family of sets of size $n/2$ are split into “mutually complement” pairs: if $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ is an orbit of the set F_1 then $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_k\}$ is an orbit of the set \bar{F}_1 .

Then we can use the construction of the problem 2.2. It's evident that the group G maps the lines of the set \mathcal{L}_1 onto lines of the same set. As to lines from the set \mathcal{L}_2 the test checking whether a set belongs to \mathcal{L}_2 (the sets B and \bar{B} have to intersect with each line of \mathcal{L}) is invariant with respect to the action of the group G (i.e. for $\tau \in G$ the sets τB and $\tau \bar{B}$ intersect with any line too). So the remark above about complement pairs of orbits allows to choose which of the sets B, \bar{B} should be included in \mathcal{L}_2 by G -invariant way.

4.4. [1, theorem 3.2]. It is sufficient to construct a group of permutations that acts transitively on the set of nodes and does not contain flops. Let nodes be a lattice points of the rectangle $2^a \times b$. Denote by s_i , $i = 1, \dots, b$, a cyclic shift of the nodes on the i -th horizontal, and by t a permutation that cyclically permutes all the horizontals (in each vertical row the nodes are permuted by the same way). Then the set of permutations of the form

$$s_1^{k_1} s_2^{k_2} \dots s_b^{k_b} t^k, \quad \text{where } k_1 + k_2 + \dots + k_b \leq 2^a \quad (*)$$

is a group (this set is closed under compositions). Since b is odd a flip in that group must be of the form $s_1^{k_1} s_2^{k_2} \dots s_b^{k_b} t^k$ where $k = 0$ and the exponents k_i could be equal to 0 or 2^{a-1} only. Since b is odd at least one of exponents k_i has to be equal to zero.

4.5. Verify the implication $(k \in B) \Rightarrow (k \in A)$. If G is a group of permutations of the set $[n]$ that does not contain a flop take an empty set of lines as beginning set. Then by the assertion of the problem 4.3 it can be enlarged to intersecting family of 2^{n-1} lines.

To prove implication $(k \in A) \Rightarrow (k \in B)$ note that the group of permutations acting on the transitive board with 2^{n-1} lines can not exchange any set with its complement. Then this group does not contain flops as we see in the solution of problem 4.3.

4.6. We will better check this property for the set B . If a group G_1 acts on a board X_1 with k nodes and does not contain flops and a group G_2 acts on a board X_2 with n nodes and does not contain flops also then the group $G_1 \times G_2$ acts on the board $X_1 \times X_2$ with kn nodes and, trivially, does not contain flops.

4.7. In the solution 4.4 we construct a transitive permutation group on the board with $2^a b$ nodes, that does not contain a flip. For $a = 1$ this group can not contain a flop. Indeed, an element of the form $(*)$ can not be a flop because for $k \neq 0$ its order is divisible by b , and for $k = 0$ this is an element of the second order, but a flop of the second order is a flip that is impossible.

4.8. The construction of the solution 4.4 can be generalized. See details in [1, theorem 2.4].

References

- [1] Cameron P.J., Frankl P., Kantor W.M. Intersecting families of finite sets and fixed-point-free 2-elements // Europ. J. Combinatorics. Vol. 10. 1989. P. 149–160.
- [2] Johnson J.R., Leader I., Walters M. Transitive avoidance games.
<http://arxiv.org/pdf/math/1607.0294v1.pdf>

Intersecting Families of Finite Sets and Fixed-point-Free 2-Elements

P. J. CAMERON, P. FRANKL AND W. M. KANTOR

We study the maximum cardinality of a pairwise-intersecting family of subsets of an n -set, or the size of the smallest set in such a family, under either of the assumptions that it is regular (as a hypergraph) or that it admits a transitive permutation group. Not surprisingly, results under the second assumption are stronger. We also give some results for 4-wise intersecting families under the same assumptions.

1. INTRODUCTION AND STATEMENT OF RESULTS

There is a large collection of results in extremal set theory, concerning families \mathcal{F} of subsets of an n -element set X : typically, these are bounds on the cardinality of \mathcal{F} , and characterisations of families attaining the bounds, subject to assumptions about cardinalities of intersections, closure conditions, or exclusion of solutions of various relations such as $F_1 \subseteq F_2$.

In many cases, it is interesting to ask for similar results under a global hypothesis on \mathcal{F} . We consider two such hypotheses. We say that \mathcal{F} is *regular* if the number of members of \mathcal{F} containing an element x is a constant (called the *degree* of \mathcal{F}); and \mathcal{F} is *transitive* if it is invariant under a transitive group of permutations of X . Obviously, transitivity implies regularity, but not conversely.

Our main concern is with *intersecting families* (containing no two disjoint sets). It is trivial that the cardinality of an intersecting family is at most 2^{n-1} . This bound is realised, for any n , by the (non-regular) family consisting of all sets containing a fixed $x \in X$. However, there are many other families attaining the bound. (We give a general construction in section 2.) If n is odd, the family of sets of cardinality greater than $\frac{1}{2}n$ is intersecting and has cardinality 2^{n-1} , and is transitive (it admits the symmetric group S_n). However, for n even, there may be a regular family but no transitive one of size 2^{n-1} (this holds for $n = 12$), or there may be no regular family of this size (this holds for $n = 4$). We investigate the set

$$A = \{n \in \mathbb{N}: \text{there is a transitive intersecting family } \mathcal{F} \text{ of subsets of an } n\text{-set, with } |\mathcal{F}| = 2^{n-1}\}.$$

It was shown by Isbell [10] that

$$A = \{n \in \mathbb{N}: \text{there is a transitive permutation group of degree } n \text{ containing no fixed-point-free 2-element}\}.$$

The main results on this set are summarised in Theorems 1 and 2.

THEOREM 1. (i) $2^a \notin A$ for all $a \geq 1$.
(ii) $3 \cdot 2^a \notin A$ for all $a \geq 2$.

THEOREM 2. (i) A is multiplicatively closed.
(ii) A contains all odd numbers.
(iii) If b is odd and $b > 1$, then $2b \in A$.
(iv) if b is odd and $b > 3$, then $4b \in A$.
(v) A has density 1.

The pioneering work on this question was done by Isbell in the 1960s. He conjectured [10] the existence of a function m such that, if b is odd and $a \geq m(b)$, then $2^a \cdot b \notin A$. He claimed to have proved this statement in [11], but the proof is incorrect, and the question is still open. In this direction, Theorem 1(i) is straightforward, and (ii) is established in [4]. However, the obvious conjecture, that $2^a \cdot b \notin A$ if b is odd and $2^a > b$, is false: Peter Neumann (personal communication) showed that $56 \in A$, and his construction easily extends to give two infinite families of examples. We give a variety of constructions in section 4.

We also give lower bounds for the size of a set in such a family.

THEOREM 3. *Let \mathcal{F} be an intersecting family of size 2^{n-1} and $F \in \mathcal{F}$.*

- (i) *If \mathcal{F} is transitive, then $|F| \geq n^{1/2}$.*
- (ii) *If \mathcal{F} is regular, then $|F| \geq \frac{1}{2} \log_2(\pi n/2)$.*

The first inequality is essentially best possible; but we have no examples remotely near the second.

We also investigate the function $f(n)$ defined by

$$2^{n-1} - f(n) = \max \{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \text{ is a transitive intersecting family of subsets of an } n\text{-set}\}.$$

(Another interpretation of $f(n)$ will be given later.) Clearly $f(n) = 0$ iff $n \in A$; we evaluate $f(n)$ in some other cases:

THEOREM 4. (i) $f(2^a) = \sum_{i=0}^{a-1} 2^{2^i}$ for $a \geq 1$.
(ii) $f(12) = 48$.

We also consider t -wise intersecting families with $t > 2$, that is, families in which any t sets have non-empty intersection. The family of all sets containing x is t -wise intersecting for all t and has cardinality 2^{n-1} . But with our global assumptions, 4-wise intersecting families are smaller:

THEOREM 5. (i) *If \mathcal{F} is 4-wise intersecting and transitive, then $|\mathcal{F}| \leq 2^n \cdot \exp(-(n \ln 2/2)^{1/3})$.*
(ii) *If \mathcal{F} is 4-wise intersecting and regular and closed under taking supersets, then $|\mathcal{F}| \leq 2^n \cdot n^{-0.347}$.*

PROBLEM. Is it true that a 3-wise intersecting transitive (or regular) family \mathcal{F} must have $|\mathcal{F}| = o(2^n)$?

The method of proof of Theorem 5 gives a result which is of independent interest.

THEOREM 6. *Let G be a transitive permutation group on an n -set X , and T a t -subset of X . let*

$$\mathcal{F} = \{F : F \subseteq X, F \cap g(T) \neq \emptyset \text{ for all } g \in G\}.$$

Then $|\mathcal{F}| \leq (2^t - 1)^{n/t}$.

Equality holds, for example, if T is a block of imprimitivity for G .

REMARK. By analogy with the alternative characterisation of the set A given before Theorem 1, we could define, for any prime p , the set

$$A_p = \{n \in \mathbb{N} : \text{there is a transitive permutation group of degree } n \text{ containing no fixed-point-free } p\text{-element}\}$$

and conjecture the existence of a function m_p such that, if $n = p^a \cdot b$ with $p \nmid b$ and $a \geq m_p(b)$, then $n \notin A_p$. It is trivial that if $n = p^a \cdot b$ with $a \geq 1$ and $b < p$, then $n \notin A_p$; but we have no further results on this problem. The question is partly motivated by a theorem of [6] according to which any transitive permutation group of degree $n > 1$ contains a fixed-point-free p -element for *some* prime p .

We always use \log to denote logarithms to base 2, and \ln for natural logarithms.

We are grateful to Roy Meshulam and Peter Neumann for helpful discussions.

2. TRANSITIVE INTERSECTING FAMILIES

For the remainder of the paper, X denotes a set of cardinality n , and \mathcal{F} a family of subsets of X .

LEMMA 2.1. Let \mathcal{F} be an intersecting family. Then $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$; equality holds if and only if \mathcal{F} contains one of each complementary pair of subsets of X . If $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$, then \mathcal{F} is closed under taking supersets.

PROOF. All but the last sentence follows from the observation that \mathcal{F} contains at most one of each complementary pair of subsets. If $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$, $F \in \mathcal{F}$, and $G \supseteq F$, then $F \cap (X \setminus G) = \emptyset$, so $X \setminus G \notin \mathcal{F}$, and $G \in \mathcal{F}$.

A set B is called a *blocking set* for the family \mathcal{F} if it meets every member of \mathcal{F} and contains none; that is, $F \cap B \neq \emptyset$ and $F \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$ for all $F \in \mathcal{F}$. Obviously, the complement of a blocking set is a blocking set.

LEMMA 2.2. Let \mathcal{F} be an intersecting family. Let

$$\mathcal{F}_1 = \{G \subseteq X : F \subseteq G \text{ for some } F \in \mathcal{F}\},$$

and let \mathcal{F}_2 consist of one of each complementary pair of blocking sets of \mathcal{F} , chosen according to the rule that if $|B| \neq |X \setminus B|$ then the larger set is chosen. Then $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ is an interesting family of cardinality 2^{n-1} containing \mathcal{F} .

PROOF. It is clear that $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ is intersecting. Let Y be any subset of X . If Y contains a member of \mathcal{F} , then $Y \in \mathcal{F}_1$; if Y is disjoint from a member of \mathcal{F} , then $X \setminus Y \in \mathcal{F}_1$; and if neither holds, then Y is an \mathcal{F} -blocking set, so either Y or $X \setminus Y$ is in \mathcal{F}_2 .

PROPOSITION 2.3. Let \mathcal{F} be an intersecting family, and G a subgroup of $\text{Aut}(\mathcal{F})$ which contains no fixed-point-free 2-element. Then there is an intersecting family $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ with $|\mathcal{F}'| = 2^{n-1}$ and $G \leq \text{Aut}(\mathcal{F}')$.

PROOF. A permutation of X interchanges some complementary pair of subsets iff all its cycles have even length, that is, iff some odd power of it is a fixed-point-free 2-element (interchanging the same pair of sets). So, if G contains no fixed-point-free 2-element, then the orbits of G on $\frac{1}{2}n$ -sets fall into ‘dual’ pairs, the dual of an orbit consisting of all complements of sets in that orbit. Thus the choices in Lemma 2.2 can be made in a G -invariant way.

REMARK. If n is odd, there are no fixed-point-free 2-elements; so any intersecting family can be enlarged to one of size 2^{n-1} without destroying any automorphisms.

From this result, we obtain Isbell’s characterisation of the set A :

COROLLARY 2.4 $n \in A$ iff there is a transitive permutation group of degree n containing no fixed-point-free 2-element.

PROOF. The reverse implication is immediate from Proposition 2.3, taking $\mathcal{F} = \emptyset$. For the forward implication, the first sentence of the proof of the proposition shows that, if \mathcal{F} is intersecting and $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$, then $\text{Aut}(\mathcal{F})$ contains no fixed-point-free 2-elements.

Let $m_r(n)$ and $m_i(n)$ be the maximum sizes of regular (resp. transitive) intersecting families of sets; and, for n even, let $m'_r(n)$ and $m'_i(n)$ be the maximum sizes of regular (resp. transitive) intersecting families of $\frac{1}{2}n$ -sets. For $0 \leq k \leq n$, and any family \mathcal{F} , let \mathcal{F}_k denote the family

$$\{F \subseteq X : F \in \mathcal{F}, |F| = k\}.$$

LEMMA 2.5 (i) if \mathcal{F} is transitive, then \mathcal{F}_k is transitive for all k .
(ii) If \mathcal{F}_k is regular for all k , then \mathcal{F} is regular.

The proof is obvious. The converse of (i) is clearly false, since we may take transitive families \mathcal{F}_k and \mathcal{F}_l for which $\text{Aut}(\mathcal{F}_k \cup \mathcal{F}_l) = \text{Aut}(\mathcal{F}_k) \cap \text{Aut}(\mathcal{F}_l)$ is intransitive. It is true, however, that if $\text{Aut}(\mathcal{F}_k)$ is transitive and $\text{Aut}(\mathcal{F}_l) = S_n$ for all $l \neq k$, then $\text{Aut}(\mathcal{F})$ is transitive.

The converse of (ii) is false, even if \mathcal{F} is intersecting and $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$, as the following example shows.

EXAMPLE 2.6. Let X be a large finite set whose cardinality is coprime to 10. Choose a random partition of X into 10 parts, labelled with the 2-subsets of $\{1, \dots, 5\}$, say X_{12}, \dots, X_{45} . Let A_i be the union of the four parts whose labels contain i ; then $A_i \cap A_j = X_{ij}$ for $i \neq j$. Let P be a cyclic group of permutations of X (any transitive group of polynomially bounded size would do), and set

$$\mathcal{A} = \{\pi(A_i) : \pi \in P, 1 \leq i \leq 5\}.$$

It can be shown that, with probability exponentially close to 1, \mathcal{A} is an intersecting antichain and $|A_i| < \frac{1}{2}n$ for all i .

Now let \mathcal{A}' be obtained as in Proposition 2.3; that is, \mathcal{A}' consists of all sets containing a member of \mathcal{A} together with all blocking sets of size greater than n . Finally, set

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}' \setminus \{A_1, \dots, A_5\} \cup \{X \setminus A_1, \dots, X \setminus A_5\}.$$

Then \mathcal{F} is intersecting and $|\mathcal{F}| = |\mathcal{A}'| = 2^{n-1}$. Also, \mathcal{A}' is transitive, hence regular; and, since each point lies in two of the five sets A_i , the passage from \mathcal{A}' to \mathcal{F} increases the degree by one. Moreover, since $5 \nmid n$, not all A_i have the same size, so \mathcal{F}_k is not regular for some k .

PROPOSITION 2.7 (i) $2^{n-1} - m_r(n) = \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{1}{2}n} - m'_r(n)$.
(ii) $2^{n-1} - m_i(n) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{1}{2}n} - m'_i(n)$.

PROOF. The inequality \leq is obtained in each case by taking a transitive or regular intersecting family of n -sets of maximum size and adjoining all sets of size greater than $\frac{1}{2}n$ (using Lemma 2.4(11) and the remark following it). The reverse inequality is obtained by taking a transitive intersecting family \mathcal{F} of maximum size and considering $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}n}$.

We do not know whether equality necessarily holds in (ii). However, it is known for which n the right-hand side is zero, in view of the following result of Brace and Daykin [2]:

THEOREM 2.8 $m'_r(n) = \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{1}{2}n}$ iff n is not a power of 2.

It follows that $m_r(n) = 2^{n-1}$ if n is not a power of 2.

PROBLEM 2.9. For $n = 2^a$, $a \geq 1$, is there a regular intersecting family of cardinality 2^{n-1} ?

If \mathcal{F} were such a family, then $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}n}$ would not be regular; this easily implies that \mathcal{F} would contain sets of cardinality less than $\frac{1}{2}n$. It can be shown that no such family exists for $n = 2, 4, 8$.

3. ON NUMBERS NOT IN A

Let G be a permutation group on X , where $|X| = n$. We say that a subset Y of X is *flipped* by G if some element of G interchanges Y with its complement. (Such a permutation must have all its cycles of even length; and, if Y is flipped by G , then some fixed-point-free 2-element flips it.)

Let $f(n)$ be the minimum, over all transitive permutation groups G of degree n , of the number of sets flipped by G . Clearly we can take the minimum over all *minimal transitive* groups G , those such that every proper subgroup of G is intransitive.

LEMMA 3.1. (i) $m'_t(n) = \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{1}{2}n} - \frac{1}{2}f(n)$.
(ii) $m_t(n) = 2^{n-1} - \frac{1}{2}f(n)$.

PROOF. (i) The $\frac{1}{2}n$ -sets not flipped by a group G fall into dual pairs of orbits, as in Proposition 2.3. A maximal G -invariant intersecting family of $\frac{1}{2}n$ -sets consists of the union of one of each dual pair of orbits.

(ii) Clear from (i) and Proposition 2.7(i).

Hence $f(n) = 0$ iff $n \in A$.

The first family of numbers not in A are the powers of 2, about which the next result gives complete information.

THEOREM 3.2 (i) For $n > 1$, n is a power of 2 iff every transitive permutation group of degree n contains a fixed-point-free involution.
(ii) If $n = 2^a$ ($a \geq 1$), then $n \notin A$ and $f(n) = \sum_{i=0}^{a-1} 2^{2^i}$; moreover, the configuration of $f(n)$ sets of size $\frac{1}{2}n$ is unique.

PROOF. Let G be a transitive group of degree 2^a ($a \geq 1$). A Sylow 2-subgroup of G is transitive; without loss of generality, we may assume that G is a 2-group.

Let z be an involution in the centre of G . Then z is fixed-point-free and flips $2^{2^{a-1}}$ sets, namely, all those containing one point from each cycle of z . Now let B be the set of cycles of z , and H the group induced on B by G . Then H is a transitive 2-group of degree 2^{a-1} . By induction, H flips at least $\sum_{i=0}^{a-2} 2^{2^i}$ sets. Each of these yields a set (the union of the corresponding cycles of z) flipped by G ; and none of these coincides with a set already described, since none of the earlier sets is a union of cycles of z . Thus

$$f(n) \geq \sum_{i=0}^{a-1} 2^{2^i}.$$

The cyclic group of order n realises the value $\sum_{i=0}^{a-1} 2^{2^i}$, since for $j = 0, \dots, a-1$, the elements of order 2^{j+1} are fixed-point-free and all flip the same $2^{2^{a-j-1}}$ sets, all of which are fixed by elements of smaller order.

The uniqueness of the minimal configuration also follows from the above inductive proof: the configuration on $2n$ points is found from that on n points by replacing each point

x by two points x_1, x_2 , and then adjoining each set which contains exactly one point from each pair.

Finally, we prove the converse of (i). Suppose that $n = 2^a \cdot b$, with b odd and $b > 1$. Let $X = \{x_{ij} : 1 \leq i \leq 2^a, 1 \leq j \leq b\}$. For $1 \leq j \leq b$, let s_j be the permutation $(x_{1j} x_{2j} \cdots x_{2aj})$, and let t be the permutation

$$\prod_{i=1}^{2^a} (x_{i1} x_{i2} \cdots x_{ib}).$$

Let

$$N = \{s_1^{k_1} \cdots s_b^{k_b} : k_1 + \cdots + k_b \equiv 0 \pmod{2^a}\},$$

and let C be the group generated by t . The product $G = NC$ is transitive of degree n . Any involution z in this group lies in N and has the form $s_1^{e_1} \cdots s_b^{e_b}$, where $e_j = 0$ or 2^{a-i} for $j = 1, \dots, b$; since b is odd, $e_j = 0$ for some j , and z fixes the point x_{1j} .

- REMARK 3.3.** (i) Note that $m'_i(2) = m'_i(4) = 0$; these are the only even numbers n for which $m'_i(n) = 0$.
(ii) The extremal configuration of $m'_i(2^a)$ intersecting sets is not unique, because of the choices of orbits involved.
(ii) One remaining problem is that of determining the minimal transitive 2-groups, other than cyclic groups, which flip exactly $f(n)$ sets. (Both the Klein group of order 4 and the quaternion group of order 8 have this property.)

By Theorem 1, we have $3 \cdot 2^a \notin A$ for $a \geq 2$. For the first of these values, we can compute the value of f (Theorem 4(ii)).

PROOF OF THEOREM 4(ii). It is straightforward to show that the group defined in the last part of the proof of Theorem 3.2 flips exactly 48 sets. We must establish that any minimal transitive group of degree 12 flips at least 48 sets.

Lemma 3.4. (i) The only minimal transitive groups of degree 6 are the cyclic and dihedral groups (acting regularly) and the alternating group A_4 (acting on the cosets of a subgroup of order 2).

(ii) Any minimal transitive group of degree 12 is a $\{2, 3\}$ -group.

PROOF. We give the argument for (ii); (i) is similar but easier. First, using Sims' list of primitive groups [14] and the subgroup structure of these groups, we see that a minimal transitive group of degree 12 is necessarily imprimitive. If it has a block of imprimitivity of size 3 or 4, it is contained in S_3 wr S_4 or S_4 w S_3 , and so is necessarily a $\{2, 3\}$ group. If it has a block of size 2, then either the group \bar{G} induced on the set of blocks is minimal transitive of degree 6 (in which case the result follows from (i)), or else a proper transitive subgroup of \bar{G} acts with two orbits of length 6 (each of which is also a block for G).

So we may assume that G has two blocks of size 6, and that the group induced by a block on its setwise stabiliser is one of $\mathrm{PSL}(2, 5)$, $\mathrm{PGL}(2, 5)$, A_6 or S_6 . Let H be the subgroup fixing the two blocks. Then H has a unique minimal characteristic subgroup, which is normal in G ; by minimality, we may assume that H is $\mathrm{PSL}(2, 5)$, $\mathrm{PSL}(2, 5) \times \mathrm{PSL}(2, 5)$, A_6 , or $A_6 \times A_6$ if $H = S \times S$, then $G = S$ wr C_2 , and G contains a proper transitive subgroup $S_0 \times C_2$, where S_0 is a diagonal subgroup of $S \times S$. If H is simple, $g \in G \setminus H$, and K is a transitive subgroup of H normalised by g , then $K\langle g \rangle$ is a transitive subgroup of G . The proof is finished by showing that any coset of $\mathrm{Inn}(H)$ in $\mathrm{Aut}(H)$ contains an automorphism which normalises a transitive subgroup K of H . (K can be chosen to be a Sylow 2- or 3-normaliser of H .)

We return now to the proof that $f(12) = 48$. Let G be a transitive group of degree 12. We may assume that G contains no fixed-point-free involution, since such an involution flips 64 sets. Also, we may assume that G is minimal transitive. From this it follows, both that G is a {2, 3}-group (Lemma 3.4(ii)), and that any odd permutation in G must be fixed-point-free (for otherwise the even permutations in G would form a proper transitive subgroup). By Burnside's theorem, G is solvable, and so a minimal normal subgroup N of G is elementary abelian, and has orbits of length 2, 3 or 4. We treat these cases in turn.

N-orbits of length 2. We can identify N with a binary linear code of length 6, in which all words have even weight and no word has weight 6, and which has a transitive automorphism group. Up to isomorphism, the only such code is spanned by (1 1 1 1 0 0) and (1 1 0 0 1 1). So $N \simeq V_4$. Moreover, G/N is a minimal transitive group of degree 6, necessarily regular or isomorphic to A_4 , by Lemma 3.4(i). If G/N is regular, then a Sylow 2-subgroup P of G has order 8, and all its involutions lie in N (since elements outside N are fixed-point-free); so P is abelian, and $P \leq C_G(N)$. If $G/N \simeq S_3$, then G is generated by its Sylow 2-subgroups, and $N \leq Z(G)$; if $G/N \simeq C_6$, then G has a normal Sylow 2-subgroup $P \simeq C_4 \times C_2$ admitting no automorphism of order 3, so we have $P \leq Z(G)$. This is impossible, since $Z(G)$ is semiregular.

So we have $G/N \simeq A_4$. Then G has a normal Sylow 2-subgroup P of order 16 with an automorphism of order 3 acting non-trivially on both N and P/N . This implies that P is abelian, whence regular on each of its orbits of length 4. Thus there are only three distinct stabilisers in P , containing between them 10 elements. The remaining 6 elements of P fall into 3 inverse pairs of elements of order 4, each a product of two 2-cycles and two 4-cycles and so flipping 16 sets; and there is no overlap, since a set flipped by such an element contains two N -orbits lying in distinct P -orbits and the inverse pair is determined by these P -orbits. So G flips 48 sets.

N-orbits of length 3. Now N is an elementary abelian 3-group; and, if K is the kernel of the action of G on the set of N -orbits, then $|G/K| = 4$.

If $|N| = 3$, then any 2-element normalises N , so N and a Sylow 2-subgroup generate a regular subgroup, containing a fixed-point-free involution. So we may assume that $|N| \geq 9$. From the fact that each coset of K in G except K itself contains a fixed-point-free 2-element, we see that, for each pair of N -orbits, there is a set flipped by G containing two points from each of these orbits and one point from each of the other two. No such set can be fixed by an element of N , so there are at least $6 \cdot 9 = 54$ sets flipped by G .

N-orbits of length 4. Since N acts regularly on each orbit, the number of fixed points of any element of N is a multiple of 4. Since the average number of fixed points is the number of orbits, namely 3, some element of N is a fixed-point-free involution.

REMARK 3.5. The proof of Theorem 1(ii) given by [4] is a straightforward induction starting with the case $n = 12$. Can similar methods yield lower bounds for $f(2^a \cdot 3)$ for $a \geq 3$?

4. NUMBERS IN A

In this section, we prove Theorem 2, and give a variety of constructions exhibiting further members of \mathcal{A} .

PROOF OF THEOREM 2. (i) If G_i is a transitive permutation group on X_i containing no fixed-point-free 2-element for $i = 1, 2$, then $G_1 \times G_2$ acting on $X_1 \times X_2$ has the same property.

(ii) A set of odd size admits no fixed-point-free 2-element.

(iii) The group constructed in Theorem 3.2, with degree $n = 2^a \cdot b$, with $b > 1$ odd, contains no fixed-point-free involution; but, if $a = 1$, it contains no 2-element of order greater than 2.

(v) It follows from (i)–(iii) that, if B is the set of natural numbers having at least as many odd as even prime factors (counted with multiplicities), then $B \subseteq A$; it suffices to show that B has density 1. Take $\varepsilon > 0$ arbitrary. Choose k so large that $2^k > 1/\varepsilon$. Let $\mathbb{N} \setminus B = C_1 \cup C_2$, where

$$C_1 = \{n \in \mathbb{N} \setminus B : 2^{k+1} | b\}, \quad C_2 = \mathbb{N} \setminus B \setminus C_1.$$

Then C_1 has density at most $1/2^{k+1} < \varepsilon/2$. Also, every number in C_2 has at most $2k$ prime factors; it suffices to show that the set D_m of numbers with exactly m prime factors has density 0. This is true because

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ n \in D_m}} 1/n \leq \left(\sum_{\substack{p \leq X \\ p \in D_1}} 1/p \right)^m \sim (\ln \ln x)^m,$$

while $\sum_{n \leq x} 1/n \sim \ln x$.

(iv) First, we re-cast slightly the group used in (iii). Let H be the additive group of all binary b -tuples of even weight, and C the cyclic group of order b of co-ordinate permutations. Then C acts on H , and we take G to be the semi-direct product. Since b is odd, any element of H has an entry 0, and so some conjugate of it lies in the subgroup H_1 of H defined by the equation $x_1 = 0$. Thus, representing G on the $2b$ cosets of H_1 , every 2-element (that is, every element of H) has a fixed point.

To establish (iv), we use the same group, but replace H_1 by the subgroup H_2 defined by the equations $x_2 = 0, x_1 = x_3$. Every element h of H has an odd number of zeros, hence a run of consecutive zeros of odd length (regarding it as cyclically ordered). Thus h has either three consecutive zeros, or a run $\dots 101 \dots$; in either case, some cyclic shift is in H_2 . Now, if $b > 3$, the equations $x_1 + \dots + x_b = 0, x_2 = 0, x_1 = x_3$ are independent; so $|H:H_2| = 4, |G:H_2| = 4b$, establishing the result.

This construction suggests an obvious generalisation. By (i), it is reasonable to concentrate on the case when $b = p$ is an odd prime. Define a function $w(p)$ as follows. Let C be the cyclic group of order p , and V the unique (up to similarity) non-trivial irreducible C -module over GF(2). The dimension of V is the order of 2 mod p , say d , and V can be realised as the additive group of GF(2^d), with C the unique subgroup of order p in the multiplicative group. Now let $w(p)$ be the maximum codimension of a subspace W of V with the property that the images of W under C cover V .

PROPOSITION 4.1. $2^a \cdot p \in A$ for all $a \leq w(p)$.

PROOF. Let W be as in the definition, with codimension $w(p)$. Let U be a subspace containing W and having codimension a . Now let G be the semi-direct product of V by C , acting on the cosets of U .

PROPOSITION 4.2. Let p be a prime greater than 3, and let d be the order of 2 mod p . Then

$$\max(2, \lfloor 2 \log p \rfloor - d) \leq w(p) \leq \lfloor \log p \rfloor$$

The upper bound is attained if $p = (2^d - 1)/(2^e - 1)$ for some e dividing d , and so, in particular, if p is a Fermat or Mersenne prime.

PROOF. The lower bound 2 is established by the same argument as Theorem 2(iv); for the other lower bound see (3). The upper bound is trivial: $|V| = 2^d, |W| = 2^{d-w(p)}$, and p images of W cover V .

Suppose that e divides d . Then we can regard V as a $\text{GF}(2^e)$ -space of dimension d/e . If $p = (2^d - 1)/(2^e - 1)$, then C permutes transitively the one-dimensional $\text{GF}(2^e)$ -spaces, so the images of one of these (say W) cover V ; and the $\text{GF}(2)$ -codimension of W is $d - e$.

This result yields a number of primes p for which $w(p) > 2$ (although as yet, with present knowledge, only finitely many): in addition to Fermat and Mersenne primes greater than 7, there are others given by the last assertion (for example, $w(73) = 6$), or by the lower bound involving d (for example, $w(178\,481) \geq 11$). We have established by computation the values $w(11) = w(13) = 2$, $w(23) = w(43) = 3$, $w(89) = 6$. It is an open problem to establish that $w(p) > 2$ for infinitely many p ; but perhaps it is even the case that $w(p) \rightarrow \infty$ as $p \rightarrow \infty$.

The upper bound in Proposition 4.2 means that we can never construct a member of A whose 2-part exceeds its odd part by this method. Moreover, the multiplicative closure of A does not lift this limitation either. To do better with these methods, we need to ensure that the number of conjugates of the subgroup U of V exceeds the index of V in G . For this, we need to use a non-abelian group V . This argument is due to Peter Neumann. The next result extends his observation that $56 \in A$.

PROPOSITION 4.3. (i) *If n is even, then $2^a(2^n - 1) \in A$ for all $a \leq 3n/2 - 2$.*
(ii) *If n is odd, then $2^a(2^n - 1) \in A$ for all $a \leq 2n - 2$.*

PROOF. (i) Let $q = 2^{\frac{1}{2}n}$. Let G be the stabiliser of a point in the group $\text{PGU}(3, q)$ (in its usual 2-transitive permutation representation). Then G has a normal subgroup V of order q^3 , and G/V is cyclic of order $q^2 - 1$. Moreover, the following are proved by straightforward calculation: (a) The centre of V is elementary abelian of order q , and $V/Z(V)$ is elementary abelian of order q^2 ; (b) $|C_G(v)| = q^2$ for all $v \in V \setminus Z(V)$; (c) G/V acts transitively on $Z(V)$ and on $V/Z(V)$ by conjugation.

It follows that V is the union of three G -conjugacy classes, namely $\{1\}$, $Z(V) \setminus \{1\}$, and $V \setminus Z(V)$. So, if H is a subgroup of G containing an element of $V \setminus Z(V)$ (all such elements have order 4, and their squares lie in $Z(V)$), then G , acting on the cosets of H , has no fixed-point-free 2-element. Moreover, $|G:H| = (2^n - 1)2^{3n/2-f}$, where $|H| = 2^f$; here f can be any number in the range $2 \leq f \leq 3n/2$.

(ii) If n is odd, let $q = 2^n$, and let G be the stabiliser of a point in $Sz(q)$. Then $|G| = q^2(q - 1)$. If H contains an element of order 4 then, again, H meets every conjugacy class in $V = O_2(G)$, and the conclusion follows as in (i).

REMARK 4.4. Many more constructions can be devised. For example, if G is a group with elementary abelian Sylow 2-subgroups and only one conjugacy class of involutions (such as $\text{PSL}(2, 2^n)$, or the Ree group ${}^2G_2(3^{2n+1})$), and H any subgroup of G of even order, then $|G:H| \in A$. But for every number which we have been able to show to lie in A , we can in fact demonstrate this using Theorem 2 and Propositions 4.1–4.3.

5. ON 4-WISE INTERSECTING TRANSITIVE FAMILIES

In this section, we prove Theorem 5(i) and Theorem 6. The proofs depend on a result from [5] which we now state.

Let $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ be a random vector-variable. For $A \subseteq X = \{1, \dots, n\}$, let \bar{x}_A denote the restriction of \bar{x} to the co-ordinates in A , that is, $\bar{x}_A = (x_a : a \in A)$. For example, $\bar{x}_{\{i\}}$ is simply the random variable x_i . Let $H_A = H(\bar{x}_A)$ be the binary entropy of \bar{x}_A .

PROPOSITION 5.1 [5]. *Suppose that A_1, \dots, A_s are subsets of X such that each element of X lies in at least d of them. Then we have*

$$dH(\bar{x}) \leq \sum_{i=1}^s H(\bar{x}_{A_i}).$$

We identify a subset F of X with its characteristic function $\bar{x}(F)$, a zero-one vector of length n . Given a family \mathcal{F} of subsets of X , we use the uniform distribution on \mathcal{F} ; that is,

$$p(\bar{x} = \bar{x}(F)) = 1/|\mathcal{F}| \text{ for } F.$$

Thus we have $H(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m - (1/m) \log(1/m) = \log m$, where $m = |\mathcal{F}|$.

PROOF OF THEOREM 6. Let G be a transitive permutation group on X , T a t -subset of X , and

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X : F \cap g(T) \neq \emptyset \text{ for all } g \in G\},$$

and consider the random variable \bar{x} defined above. For every $g \in G$, $\bar{x}_{g(T)}$ takes at most $2^t - 1$ values, since $(0, \dots, 0)$ is excluded. Thus we have

$$H(\bar{x}_{g(T)}) \leq \log(2^t - 1).$$

On the other hand, the transitivity of G implies that every element of X lies in exactly $|G|t/n$ sets $g(T)$. Thus, by Proposition 5.1,

$$|G|t/n \log |\mathcal{F}| \leq |G| \log(2^t - 1)$$

or, equivalently,

$$|\mathcal{F}| \leq (2^t - 1)^{n/t}.$$

In [7] it was shown that a transitive 4-wise intersecting family \mathcal{F} satisfies $|\mathcal{F}| \leq 2^n/n^{1/2}$. Theorem 5(i), which we now prove, improves this bound considerably.

We need the following easy consequence of a theorem of Katona [13].

PROPOSITION 5.2. *Let r be a positive integer, and \mathcal{F} a family of sets satisfying $|F \cap F'| \geq r$ for all $F, F' \in \mathcal{F}$. Then*

$$|\mathcal{F}| \leq 2^n e^{-r^2/2n}.$$

PROOF OF THEOREM 5(i). Let \mathcal{F} be transitive and 4-wise intersecting, and $G = \text{Aut}(\mathcal{F})$. Choose $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ so that $|F_1 \cap F_2|$ is minimal. Set $T = F_1 \cap F_2$ and $t = |T|$. Since \mathcal{F} is 4-wise intersecting, the family

$$\mathcal{F}(g(T)) = \{F \cap g(T) : F \in \mathcal{F}\}$$

is intersecting, and so has cardinality at most 2^{t-1} (by Lemma 2.1). Thus

$$H(\bar{x}_{g(T)}) \leq \log 2^{t-1} = t - 1.$$

By Proposition 5.1,

$$|G|t/n \log |\mathcal{F}| \leq |G|(t - 1),$$

so $|\mathcal{F}| \leq 2^n/2^{n/t}$.

Thus the result is true if $t \leq (2n^2 \ln 2)^{1/3}$. However, if $t > (2n^2 \ln 2)^{1/3}$, the conclusion is immediate from Katona's result (Proposition 5.2).

6. REGULAR FILTERS

A family \mathcal{F} is called a *filter* if $F \in \mathcal{F}$ and $G \supseteq F$ imply $G \in \mathcal{F}$. (This is not standard; we do not require \mathcal{F} to be closed under intersection.)

For $x \in X$, the *degree* $d(x)$ of x in \mathcal{F} is the number of members of \mathcal{F} containing x . We require a simple lemma.

LEMMA 6.1. Suppose that \mathcal{F} is a filter on X and $A \subseteq X$ is such that $F \cap A \neq \emptyset$ for all $F \in \mathcal{F}$. Then the average degree of points of A in \mathcal{F} is at least $\frac{1}{2}|\mathcal{F}|(1 + 1/(2^a - 1))$, where $a = |A|$.

PROOF. By [12] or more easily by Hall's theorem, the incidence matrix of b -sets and $(a - b)$ -sets of an a -set A (with incidence = inclusion) is non-singular. The existence of a non-zero term in the expansion of the determinant shows that, if $b < \frac{1}{2}a$, there is a *matching* $B \mapsto B^*$ from b -sets to $(a - b)$ -sets so that $B \subseteq B^*$. Defining

$$f(B) = |\{F \in \mathcal{F} : F \cap A = B\}|,$$

the fact that \mathcal{F} is a filter shows that $f(B) \leq f(B^*)$ for all sets B with $|B| < \frac{1}{2}a$.

The average degree of points in A is α , say, where

$$\begin{aligned} a\alpha &= \sum_{X \in A} d_{\mathcal{F}}(x) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} |B|f(B), \\ &\sum_{\substack{\emptyset \neq B \subseteq A \\ |B| < \frac{1}{2}a}} (|B|f(B) + (a - |B|)f(B^*)) + \frac{1}{2}a \sum_{B \subseteq A} f(B) + af(A) \geq \frac{1}{2}a \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} f(B) + \frac{1}{2}af(A) \\ &= \frac{1}{2}a|\mathcal{F}| + \frac{1}{2}af(A). \end{aligned}$$

Again, since \mathcal{F} is a filter and $F \cap A \neq \emptyset$, $f(A) \geq |\mathcal{F}|/(2^a - 1)$, from which the result follows.

REMARK. The result can be adjusted if the condition

$$F \in \mathcal{F} \Rightarrow |F \cap A| \geq t$$

holds, for fixed t .

PROOF OF THEOREM 5(ii). Let \mathcal{F} be a 4-wise intersecting regular filter. Choose $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{F}$ so that $A = F_1 \cap F_2 \cap F_3$ has minimal cardinality, say a . By [8], we have $|\mathcal{F}| \leq 2^n(\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1))^a$. Hence we are finished if $a > \frac{1}{2}\log n - \log \log n$; so suppose that

$$a \leq \frac{1}{2}\log n - \log \log n.$$

If d is the degree of \mathcal{F} , the lemma yields

$$d/|\mathcal{F}| \geq \frac{1}{2}(1 + 1/(2^a - 1)).$$

Then for the uniform random variable \bar{x} of the last section, we have

$$H(x_i) \leq H(\frac{1}{2}(1 + 1/(2^a - 1))),$$

and Proposition 5.1 (with $s = n$, $A_i = \{i\}$) yields

$$\log |\mathcal{F}| \leq nH(\frac{1}{2}(1 + 1/(2^a - 1))),$$

or

$$|\mathcal{F}| \leq 2^n \cdot 2^{nH(\frac{1}{2}(1 + 1/(2^a - 1)))} < 2^n \cdot e^{-n/2^{2a+1}} < 2^n/n.$$

PROOF OF THEOREM 3. The first part is straightforward. By [1], if G is transitive on X , and $Y \subseteq X$ with $|Y| < |X|^{1/2}$, then $Y \cap g(Y) = \emptyset$ for some $g \in G$, and Y cannot be contained in any G -invariant intersecting family.

To see that the result is close to best possible, take a projective plane with a transitive automorphism group G (for example, a Desarguesian plane), and enlarge it to an intersecting family of size 2^{n-1} admitting G , using the remark following Proposition 2.3.

For the second part, suppose that \mathcal{F} is a regular intersecting family of cardinality 2^{n-1} . Then \mathcal{F} is a filter, by Lemma 2.1. Let F be a member of \mathcal{F} of cardinality a . By Lemma 6.1, the degree of any point is at least $\frac{1}{2} \cdot 2^{n-1}(1 + 1/(2^a - 1))$.

On the other hand, the sum of the degrees of all points is equal to the sum of the sizes of all sets in \mathcal{F} . This does not exceed the sum of the sizes of the 2^{n-1} largest subsets of X , which is easily seen to be

$$\frac{1}{2}n(2^{n-1} + \binom{n}{\lfloor \frac{1}{2}(n-1) \rfloor}).$$

Thus

$$\begin{aligned} 2^{n-1}(1 + 1/(2^n - 1)) &\leq 2^{n-1} + \binom{n}{\lfloor \frac{1}{2}(n-1) \rfloor}, \\ 2^n - 1 &\geq 2^{n-1} \binom{n}{\lfloor \frac{1}{2}(n-1) \rfloor}, \end{aligned}$$

from which the result follows.

REFERENCES

1. B. J. Birch, R. G. Burns, S. O. Macdonald and P. M. Neumann. On the orbit-sizes of permutation groups containing elements separating finite subsets, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **14** (1976), 7–10.
2. A. Brace and D. E. Daykin, Sperner-type theorems for finite sets, in: *Combinatorics*, D. R. Woodall and D. J. A. Welsh, eds, 18–37, Inst. Maths Applics., Southend-on-Sea, 1972.
3. P. J. Cameron, Four lectures on projective geometry, in: *Finite geometries*, C. A. Baker and L. M. Batten, eds, 27–63, Marcel Dekker, New York, 1985.
4. P. J. Cameron, L. G. Kovacs, M. F. Newman and C. E. Praeger, Fixed-point-free permutations in transitive permutation groups of prime power order, *Q. J. Math., Oxford* (2), **36** (1985), 273–278.
5. F. R. K. Chung, P. Frankl, R. L. Graham and J. B. Shearer, Some intersection theorems for ordered sets and graphs, *J. Combin. Theory, Ser. A*, **43** (1986), 23–37.
6. B. Fein, W. M. Kantor and M. Schacher, Relative Brauer groups II, *J. Reine Angew. Math.*, **328** (1981), 39–57.
7. P. Frankl, Regularity conditions and intersecting hypergraphs, *Proc. Am. Math. Soc.*, **82** (1981), 309–311.
8. P. Frankl, An intersection theorem for finite sets, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **15** (1976), 73–79.
9. J. R. Isbell, Homogeneous games, I, *Math. Student*, **25** (1957), 123–128.
10. J. R. Isbell, Homogeneous games, II, *Proc. Am. Math. Soc.*, **11** (1960), 159–161.
11. J. R. Isbell, Homogeneous games, III, in: *Advances in game theory*, M. Dresher, L. S. Shapley and A. W. Tucker, eds 255–265, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1984.
12. W. M. Kantor, On incidence matrices of finite projective and affine space, *Math. Z.*, **124** (1972), 315–318.
13. Gy. Katona, An intersection theorem for systems of finite sets, *Acta Math. Hungar.*, **15** (1964), 329–337.
14. C. C. Sims, Computational methods in the study of permutation groups, in: *Computational problems in abstract algebra*, J. Leech ed., 169–183, Pergamon, Oxford, 1970.

Received 5 March 1987 and in revised form 25 July 1988

P. J. CAMERON
School of Mathematical Sciences,
Queen Mary College, London E1 4NS, U.K.

P. FRANKL
C.N.R.S., Université Paris VII,
75005 Paris, France
and
W. M. KANTOR
Department of Mathematics,
University of Oregon, Eugene, Oregon 97403, U.S.A.

Transitive Avoidance Games

J. Robert Johnson^{*†} Imre Leader^{‡§} Mark Walters^{*¶}

July 12, 2016

Abstract

Positional games are a well-studied class of combinatorial game. In their usual form, two players take turns to play moves in a set ('the board'), and certain subsets are designated as 'winning': the first person to occupy such a set wins the game. For these games, it is well known that (with correct play) the game cannot be a second-player win.

In the avoidance (or misère) form, the first person to occupy such a set *loses* the game. Here it would be natural to expect that the game cannot be a first-player win, at least if the game is transitive, meaning that all points of the board look the same. Our main result is that, contrary to this expectation, there are transitive games that are first-player wins, for all board sizes which are not prime or a power of 2.

Further, we show that such games can have additional properties such as stronger transitivity conditions, fast winning times, and 'small' winning sets.

1 Introduction

Many natural combinatorial games may be viewed as 'achievement games' as follows. We have a finite set (the *board*) and some of its subsets are designated as special and called *lines*. Two players take it in turn to claim a (previously unclaimed) point of the board; the first player to complete a line

^{*}School of Mathematical Sciences, Queen Mary, University of London, London E1 4NS, England

[†]r.johnson@qmul.ac.uk

[‡]Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics, Centre for Mathematical Sciences, Wilberforce Road, Cambridge CB3 0WB, England.

[§]I.Leader@dpmms.cam.ac.uk

[¶]m.walters@qmul.ac.uk

is declared the winner. If all points have been claimed but neither player has completed a line then the game is considered a draw.

In this paper we consider the avoidance (or misère) variant – the game is played exactly as above except the first player to complete a line *loses*. Simmons [13] described the first example of such a game that we are aware of (the game of Sim), and Harary [7] introduced the more general mathematical framework. Since then such games have been considered by many authors – see, e.g., Beck [3, 2] and Slany [14]. For more general misère games see, e.g., Conway [4], and Albert and Nowakowski [1]. There has also been a substantial amount of work on Avoider/Enforcer games, which are the ‘Maker/Breaker’ analogue for avoidance games – see, e.g., Lu [12], Beck [3], and Hefetz, Krivelevich and Szabó [9].

For achievement games, a simple strategy stealing argument shows that the game is either a draw or a first player win (with perfect play). However, for avoidance games the situation is not clear. Indeed Beck [2] states “The general open problem is to find the avoidance version of the strategy stealing argument.”

At first glance it looks as though the first player has a disadvantage since he has ‘more’ points than the second player. Of course in general this is not true: indeed take any game that is a second player win and add a single point not in any line. The first player picks this new point on his first turn and thus reduces the new game to the old game with Player II (the second player) playing first.

However, this is a rather trivial example: we have artificially given Player I an advantage by giving him a special ‘safe’ point he can pick. Thus, it is natural to insist that the game is transitive: that is, that the automorphism group of the game acts transitively on the board’s points. (The automorphism group is the group of all permutations of the board X that preserve the family \mathcal{L} of lines.) Informally, ‘all points look the same.’

One might guess that a transitive avoidance game must be a second player win: what advantage can there be to going first when all points are the same? Indeed, this intuition is correct when all the lines have size 2. In general, however, it turns out that there may be advantages to playing first.

A priori, there are two reasons why it seems to be harder to find a game that is a Player I win when n (the board size) is odd: first, Player I has an extra move and, secondly, Player II has the final choice of move (as Player I’s last move is forced). However, whilst we shall give examples of first player wins for both n even and n odd, it turns out that the simplest examples of such a game occur in the case n odd (see Section 3).

Having found examples of Player I wins we turn to the central question

we address in this paper: namely for which n does there exist a transitive avoidance game that is a Player I win. Our main result shows that, for most n , such games do exist.

Theorem 1. *Suppose that n is neither a power of 2 nor a prime. Then there is a transitive avoidance game on n points that is a Player I win.*

The case when n is divisible by a large power of 2 is much harder than the case when n is odd, or n is equal to $2 \pmod{4}$. It relies on a careful study of subsets of \mathbb{Z}_{2^m} (the integers modulo 2^m) under rotation. This may be of independent interest.

There are two cases not covered by Theorem 1: powers of 2, and primes. For powers of 2 we have the following result.

Theorem 2. *Suppose that n is a power of 2. Then no transitive avoidance game on n points is a Player I win.*

It turns out that this is a fairly simple consequence of a well known group theoretic result.

For the remaining case of n prime there are examples for which there are Player I wins (e.g., 11 and 13), but we do not know what happens for any prime larger than 13.

In many of our constructions Player II does not lose until his last move. It is easy to modify these examples so that Player I can force Player II to lose before time $(1 - \varepsilon)n$. However, we also give examples of games where Player II loses in time $o(n)$. Interestingly these even include examples where the losing lines are all of bounded size (size 3 in fact).

We also consider avoidance games where on each turn each player is allowed to pick more than one point (this is usually called the *plus* version of the game; see Slany [14]). One might think that picking more than one point would never help a player, but it turns out that in any transitive plus game Player II can use this extra freedom to guarantee that he does not lose. A related phenomenon was proved by Hefetz, Krivelevich, Stojaković and Szabó [8] for a biased version of the Avoider/Enforcer game where moving to the plus version of the game simplified the behaviour substantially.

Our argument applies to some previously studied games. For example, it gives a simple strategy stealing proof of the previously unknown fact that the plus version of the Ramsey Avoidance Game (see Section 2) is never a Player I win.

In Section 2 we give two situations where strategy stealing arguments do work: when there is a line of size 2, and for the plus version of the games.

Then in Section 3 we give a simple construction of Player I wins for all composite odd n .

Section 4 is the heart of the paper. In it we show that there are Player I wins for all even sizes, except powers of 2.

In Section 5 we discuss some natural variants of the game such as lines with bounded size, games which are ‘more’ transitive, and games where Player I can win quickly. We show that our constructions so far (or simple modifications of them) are able to provide first player wins in these cases too.

Then, in Section 6 we give a natural game which satisfies all of these stronger properties simultaneously – it is a fast Player I win, the lines have bounded size, and it is more transitive (more precisely it is edge/line transitive – see the section for the formal definition).

We conclude with a discussion of some open problems.

We will use the following notation for games throughout the paper. We will denote the board by X , the board size $|X|$ by n , and the set of losing lines by \mathcal{L} . We abbreviate Player I and Player II to PI and PII respectively.

2 Games for which strategy stealing works

2.1 A line of size 2

If the family of losing lines \mathcal{L} has any set of size 2 then there is a strategy stealing argument. Note that this includes the case when all lines have size 2: i.e., where \mathcal{L} corresponds to the edge set of some vertex transitive graph.

Theorem 3. *A transitive avoidance game with any line of size 2 is not a PI win.*

Proof. Suppose (for contradiction) that the game is a PI win.

Suppose that PI’s first move is x . Since the game is transitive, every point is in a line of size 2 so we can choose y such that $\{x, y\} \in \mathcal{L}$.

Using the transitivity of the game again we see that there is a winning strategy, Φ say, for PI with first move y .

PII now plays strategy Φ ignoring the fact that PI has already claimed x . This could only go wrong if Φ tells PII to play x . However, since $\{x, y\}$ is a line, and thus PII would lose anyway if he played x , this cannot happen. \square

Note that we made crucial use of the existence of a line of size 2 in the ‘PII would lose anyway’ statement at the end of the proof.

We remark that a similar argument shows that in any transitive avoidance game any strategy of PI that promises never to play a particular point is not winning. Thus, winning strategies for PI must be global; i.e., they must examine the entire board.

2.2 The plus version

As described in the introduction, the plus variant of an avoidance game is the same as the avoidance game except that, on each move, a player may choose to pick as many points as he likes rather than just one; in other words, on each move, each player chooses a (non-empty) set of points.

Theorem 4. *The plus version of a transitive avoidance game is not a PI win.*

Proof. Since the players can pick an arbitrary number of points we cannot tell which player's move it is just by looking at the current position, and we will make use of this fact in our proof. Thus, we introduce some notation for the position. A position is a pair of disjoint sets (S, T) where S denotes the set of all points picked so far by the player whose turn it is, and T the set of all points picked by the other player. From this position we will name the player whose move it is the *current* player.

Let G be the automorphism group of the game.

Suppose for the sake of a contradiction that PI has a winning strategy and let S be PI's first (set) move in this strategy. After this move the position is (\emptyset, S) . Since PI is playing a winning strategy we know that position (S, T) is a current player win for any non-empty set T . Thus, for any $g \in G$ and any non-empty set T disjoint from $g(S)$, the position $(g(S), T)$ is also a current player win.

To obtain a contradiction we now show that the game is not in fact is a PI win. Suppose that PI plays some set U . If U is the whole board then the game is over and PII had definitely not lost. Thus, we may assume that PI does not pick all the points.

We have to give a strategy for PII. Pick $x \notin U$ and $g \in G$ which maps some $s \in S$ to x . Let $S' = g(S)$. PII plays $S' \setminus U$, which contains x so is non-empty.

Now, suppose that PI plays W . Then, it is PII's turn and the position is $(S' \setminus U, U \cup W)$. Since $S' \setminus U \subset S'$ and

$$(S' \setminus U) \cup (U \cup W) = S' \cup U \cup W = S' \cup ((U \setminus S') \cup W),$$

we see that $(S' \setminus U, U \cup W)$ is no worse for the current player than $(S', (U \setminus S') \cup W)$. As noted above, this latter position is a current player win so $(S' \setminus U, U \cup W)$ is also a current player win; i.e., PII wins as claimed. \square

Some plus version avoidance games have been studied previously: in particular, the Ramsey Avoidance Game $RAG(N, s)$ (see, e.g., [14, 2]). This game is played with board the edge set $E = E(K_N)$ and lines are the $\binom{s}{2}$ -subsets of E corresponding to K_s subgraphs for some fixed s .

Corollary 5. *The plus version of Ramsey Avoidance Game $RAG(N, s)$ is not a PI win. In particular, if $N \geq R(s, s)$ (where $R(s, s)$ denotes the Ramsey number) then it is a PII win.*

Proof. The game is obviously transitive so Theorem 4 implies that it is not a PI win. In the case $N \geq R(s, s)$ the game cannot be a draw – when the board is full (at least) one player must have a K_s – and so must be a PII win. \square

3 First player wins for odd board sizes

In this section we show that there are first player wins for all odd composite board sizes. This is in contrast to the special cases discussed in the previous section.

Theorem 6. *Suppose that $n = pq$ is odd. Then there is a transitive avoidance game on $[n]$ that is a PI win.*

Proof. First we define the game. View the board, $[n]$, as q sets A_1, A_2, \dots, A_q of p points. Let $p' = (p+1)/2$ and $q' = (q+1)/2$. We call each A_i a *bucket*.

Let \mathcal{W} be all subsets of $[n]$ of size $p'q'$ consisting of p' from each of q' buckets. Define the lines $\mathcal{L} = [n]^{(p'q')} \setminus \mathcal{W}$.

We claim that the avoidance game on (n, \mathcal{L}) is transitive and a PI win. The transitivity is trivial since we can permute the bins, and permute the points in any bin. Thus we just need to prove that it is a PI win.

Since, every pair of sets in \mathcal{W} meet, we see that if PI can form a set in \mathcal{W} with his first $p'q'$ points then PII's first $p'q'$ points must form a set not in \mathcal{W} , i.e., these points must form a line in \mathcal{L} . Thus, it suffices to show that PI can guarantee to form a set in \mathcal{W} with his first $p'q'$ points.

We call a bucket *active* if PI has played at least one point in it but not yet p' points in it. We say it is *full* if he has played p' points in it. PI's strategy is to play according to first of the following rules that applies.

1. If PII has just played in an active bucket then PI plays in the same bucket.
2. If less than q' buckets are either full or active then PI plays in an empty bucket.
3. PI plays in any active bucket.

Rule 1 implies that, after his turn, PI always has strictly more points than PII in any active bucket. Rule 2 implies that, after PI's turn, strictly more than half the non-empty buckets are active or full. Thus after $p'q'$ moves PI has exactly p' points in exactly q' buckets. \square

4 First player wins for even board sizes

4.1 Isbell Families

We saw in the introduction that one advantage for the first player is that he goes first and can pick a ‘special’ point, but obviously this is not possible for a transitive game. A second possible advantage for the first player occurs if the board has an even number of points: the second player has no choice on his last turn, whereas the first player does always have a choice. We use this ‘forced move’ to construct examples of games with even size boards that are first player wins.

It turns out that our avoidance game is closely related to an existing game idea, namely that of a *fair game*, from a very different context (see Isbell [10] and [11]). To avoid confusion with other notions of fair game we will call the families involved *Isbell families*.

Definition. An Isbell family on a set $[n]$ is a family \mathcal{F} of subsets of $[n]$ such that \mathcal{F} is an up-set containing exactly one of X and $[n] \setminus X$ for each set X , and having a transitive automorphism group.

We remark that an Isbell family must be *intersecting*, that is any two sets in the family meet.

Proposition 7. Suppose that n is even and that there exists an Isbell family on $[n]$. Then there is a transitive avoidance game with board $[n]$ that is a first player win.

Proof. Let \mathcal{F} be the sets in the Isbell family. We define the lines $\mathcal{L} = \mathcal{F} \cap [n]^{\lfloor n/2 \rfloor}$. We show that this avoidance game is a PI win. Obviously, this game is transitive.

Consider the achievement game on board $[n]$ with winning lines $\mathcal{W} = [n]^{(n/2)} \setminus \mathcal{L}$. By the definition of an Isbell family every $n/2$ sized set is either in \mathcal{W} or its complement is in \mathcal{W} . Hence, a draw is impossible in this achievement game. Thus, by the standard strategy stealing result, this achievement game must be a PI win.

PI follows exactly the same strategy in the avoidance game. At the end his $n/2$ points form a set in \mathcal{W} so not in \mathcal{L} (so he has not lost) and PII's $n/2$ points are the complement of PI's set, so must form a set in \mathcal{L} and PII has lost. \square

It is not known for exactly which n Isbell families exist but most cases are known. In particular, Isbell [10] showed that they do exist for $n = 2b$ with $b > 1$ odd; and Cameron, Frankl and Kantor [5] showed they do exist for $n = 4b$ with $b > 3$ and odd. Thus, for all these cases we have transitive avoidance games which are first player wins. However, Cameron, Frankl and Kantor [5] also showed that Isbell families do not exist for $n = 2^a$, or for $n = 3 \times 2^a$ for $a \geq 2$, so we cannot use them to prove all the remaining cases of Theorem 1.

For concreteness let us describe the Isbell family, and thus the PI win avoidance game, on 6 points. We think of the six points as being arranged in a grid of two rows and three columns. The Isbell family \mathcal{F} is the up-set generated by the family of all 3-sets that either contain one point from each pair and an even number of points in the top row, or contain both points in one pair and one point in the next pair cyclicly. It is easy to check that this family is transitive and that every set is either in \mathcal{F} or its complement is in \mathcal{F} . Thus, \mathcal{F} is indeed an Isbell family, and the avoidance game with lines $[6]^{(3)} \cap \mathcal{F}$ (i.e., the lines are exactly the generating sets described above) is a PI win. Indeed, this is easy to verify by hand.

In contrast, there do not exist first player wins when n is a power of 2. In order to prove this we start with a simple lemma.

Lemma 8. *Let (n, \mathcal{L}) be a transitive avoidance game and suppose that its automorphism group contains a fixed-point-free involution. Then the game is not a PI win.*

Proof. Let G be the game's automorphism group and let $g \in G$ be a fixed-point-free involution. Then g partitions the board into pairs. PII's strategy is to play the point paired with PI's previous move; i.e., if PI plays x , then PII plays $g(x)$.

Suppose that, after PII's move, PII has played all the points in T . Then PI must have played all the points in $g(T)$. Thus, if PII's move was losing – that is, if T contains a losing set – then PI must have already lost. \square

The following theorem is an immediate consequence.

Theorem 9. *A transitive avoidance game on a set of size 2^a for some a is not a PI win.*

Proof. Let G be the automorphism group of the game. Then G acts transitively on the board X which has size 2^a . By a standard result (see e.g., [5]) from group theory, it follows that g has a fixed-point-free involution. Thus, by Lemma 8 the game is not a PI win. \square

We would like to extend Proposition 7 to show that there is a transitive avoidance game that is a PI win for all even sizes except powers of 2. In the proof of Proposition 7 we relied on the existence of Isbell families. These were useful because they gave a transitive intersecting family consisting of half of the $\frac{n}{2}$ -subsets. Since there do not exist Isbell families for sizes 3×2^a , we cannot use the same technique. Indeed, since the union of any such intersecting family and the family of all subsets of size strictly greater than $n/2$ is an Isbell family, such intersecting families only exist when Isbell families exist.

Instead, we look for a smaller intersecting family \mathcal{F} for which PI can win the achievement game. Since \mathcal{F} is not a maximal intersecting family it is possible that neither player forms a set from \mathcal{F} (i.e., a draw is possible in the achievement game), so we cannot use a strategy stealing argument to show that PI has a winning strategy for the achievement game. Thus, we need to define a winning strategy explicitly.

4.2 Special case: $n = 2b$ with b odd

As our proof in the general case is rather involved, we start by illustrating it in the simple case of $n = 2b$ with b odd; this case is covered by Isbell's results on the existence of Isbell Families, but we will give an example with a much smaller intersecting family for all $n \geq 10$. (For $n = 6$ the family is exactly the Isbell family on six points described earlier.) We remark that we give a proof that generalises to the full case, rather than the simplest proof for this special case.

Proposition 10. *For any odd $b \geq 3$ there is a transitive avoidance game of size $2b$.*

Proof. Let $n = 2b$ and $b' = (b - 1)/2$. We think of $[n]$ as $\mathbb{Z}_b \times \mathbb{Z}_2$: i.e., as b pairs. We start by defining some *winning* sets \mathcal{W} . They are all of size b , and are

1. all sets which contain exactly one point from each pair and an odd number of which have a 1 in the \mathbb{Z}_2 -coordinate,
2. all sets with both elements of exactly one pair, that have the (unique) pair with neither element at most b' later cyclicly.

Obviously the complement of any set in this family is not in the family and thus we see that this family is intersecting. We define the board of our avoidance game to be $[n]$ and the lines \mathcal{L} to be the complements of the sets in \mathcal{W} . We claim that this avoidance game is transitive and a PI win.

To see that the game is transitive, it is enough to observe that its automorphism group contains the following elements

- cycle the b pairs,
- in two pairs swap the elements (i.e., swap $(x, 0)$ and $(x, 1)$, and swap $(y, 0)$ and $(y, 1)$ for some x and y).

Thus, to complete the proof, we just need to show that the game is a PI win. Indeed, if we can show that PI can guarantee to make a set in \mathcal{W} , then we know that PII will finish with a set in \mathcal{L} , and so will lose.

We will denote positions in the game as ordered pairs (A, B) of subsets of the board where this means PI has played the points in A and PII has played the points in B . For a set A containing at most one of each pair, we write \bar{A} for the ‘opposite’ points: that is the points in the other half of each pair that meets A .

First, define a position to be a *direct win* if it is of the form $(A \cup \{(x, y)\}, \bar{A} \cup \{(z, w)\})$ for some A and $1 \leq z - x \leq b'$, and observe that PI has a simple winning strategy from any such position. Indeed, he plays $(x, y + 1)$ and for the rest of the game makes sure he gets one of every other pair set except he never plays the point $(z, w + 1)$ opposite to (z, w) . This means that after PI’s last turn he has one of every pair, except he has both of the x^{th} pair and neither of the z^{th} pair. The constraint on z means that this is a winning set under Condition 2 above.

Our strategy for PI is as follows. Unless the position is a direct win, he will ensure that the position after his turn is of the form $(A \cup \{(x, y)\}, \bar{A})$ for some set A and point (x, y) .

Now from the position $(A \cup \{(x, y)\}, \bar{A})$ suppose that PII plays a point (z, w) . We split into several cases.

1. If $1 \leq z - x \leq b'$ then the position is a direct win and he wins by following the simple strategy given above.

2. If (z, w) is any point other than $(x, y + 1)$ (i.e., unless PII plays the opposite point to (x, y)) then PI plays the point $(z, w+1)$ (i.e., opposite where PII played). Obviously this is possible and keeps the position being of the form above, so PI follows the same strategy from the new position.
3. The last case is if PII plays the point $(x, y + 1)$, i.e., the opposite point to (x, y) . Thus, before PI plays, the position is (B, \bar{B}) where $B = A \cup \{(x, y)\}$: i.e., every pair is either full or empty. Let x' be the first empty pair. If $x' < b'$ then PI just plays $(x', 0)$ making the position of the required form and continues as above.

(Note this case implies that PI plays $(0, 0)$ on his first go.)

There is one remaining case: $x' \geq b'$. We deal with this below.

To have reached this position all pairs $[0, b')$ must already be filled. There may be some points in pairs in the interval (b', b) but the b^{th} pair must be empty as PI did not play in it, and if PII had played in it then he would have lost under Case 1 above (as for the whole game so far the ‘extra point’ in the position was in a pair in the interval $[0, b')$).

For the remainder of the game PI is going to play in a certain fashion filling up the empty pairs $[b', b)$ in turn, except if the position is a direct win, in which case PI follows that strategy. Since, when PI plays in the empty pair x all pairs $[0, x)$ have already been filled, unless PII plays the other point in pair x then the position will be a direct win and PI wins. Thus, we may assume that PII plays the other point in pair x .

Hence, PI gets to pick one point from each of the remaining empty pairs, and PII has to pick the other from each of them. In particular, when PI picks his point from the last empty pair he can choose the correct element to ensure the correct parity under Condition 1. Thus, PI finishes with a set in \mathcal{W} as required. \square

4.3 General even case

Having seen this special case, we extend these ideas to all board sizes of the form $n = 2^a b$ with b odd and greater than 1 (i.e., all even board sizes except powers of 2). As above, we view this as b copies of 2^a ; we call each copy of 2^a a *bin*. In the previous example there were very few possibilities for what happened in one copy of 2^a (i.e. in a pair) but in the general case there will be a lot more. This makes the proof substantially more difficult.

We need some definitions. Let $m = 2^a$ and let $m' = m/4$.

Definition. For $x \in [m]$ we define the opposite point to x to be the point $x + m/2$, and we call the pair $\{x, x + m/2\}$ an opposite pair. We say a set $A \subset [m]$ is a cyclic pair set if it contains exactly one of each opposite pair. We say it is a partial cyclic pair set if it contains at most one of each opposite pair and is not empty. In a partial pair set we call any point where neither it nor its opposite point are in the set a free point.

The proof relies on a careful examination of the lexicographic order on a set and its rotations and, in particular, its ‘maximum’ rotate defined as follows.

Definition. The lexicographic order on subsets of $[m]$ is defined as follows: $A \leq B$ if the first point in the symmetric difference $A \Delta B$ is in A .

For any $r > 1$, an r -maximal point of a cyclic pair set A is a point x where the intersection of A with the interval $\{x, x + 1, x + 2, \dots, x + r - 1\}$ is maximal in lexicographic order over all the sets formed by intersecting A with an interval of length r of $[m]$. We say x is maximal if it is an m -maximal point. We define r -minimal and minimal similarly.

Lemma 11. Any partial cyclic pair set in $[m]$ has a unique maximal point.

Proof. Since the set contains exactly one of some opposite pair the set is not fixed by cycling by $m/2$, the order of the stabiliser is not divisible by 2. Since the set has size $m = 2^a$ this means the stabiliser has order 1; in particular, no two cyclic shifts of A are the same so there must be a unique maximal point. \square

In the case when $a = 1$ discussed above, i.e., for board sizes $2b$, it was important that when PI came to decide what happened in the final empty pair he already knew what would happen in all the remaining pairs. In that case that was trivial: they were already completely filled. In the general case, when PI decides what happens in the final empty bin the remaining bins are non-empty but this does not mean they are full. However, the following key lemma shows that PI has some control over what happens in these later bins.

Lemma 12. Suppose that m and m' are as above, and that A is a partial pair set in \mathbb{Z}_m . Then there exist values s, t and z_1, z_2 such that

- if all free points in $[z_1, z_1 + m')$ are placed in A then regardless of which of the remaining free points are placed in A the maximum lies in $[t - s, t]$

- if all free points in $[z_2, z_2 + m')$ are placed in A then regardless of which of the remaining free points are placed in A the maximum lies in $[t, t + 2m' - s)$.

We postpone the proof of this technical lemma to later. First, we show that we can deduce the existence of transitive avoidance games of all even sizes (except powers of 2) that are PI wins from it. The deduction is similar to the proof of Proposition 10.

Theorem 13. *Suppose that $n = 2^a b$ for some odd $b > 1$. Then there is a transitive avoidance game on n points which is a Player 1 win.*

Proof. Let $m = 2^a$, $m' = m/4$ and $b' = (b - 1)/2$. First, we define the winning sets \mathcal{W} . These will all have size $n/2$ and the lines in our avoidance game will be the family of their complements. We view n as being $\mathbb{Z}_b \times Z_m$. For any point (x, y) we define its opposite point to be the opposite point in the same bin: i.e., $(x, y + 2m')$.

The winning sets \mathcal{W} are all the sets

1. that contain exactly one of each opposite pair and the sum over all bins of the maximal points mod m lies in the interval $[0, m/2)$.
2. that contain both of exactly one opposite pair, say the pair $\{y, y+2m'\}$ in bin j , and the unique empty opposite pair is either
 - (a) in one of the bins between $j + 1$ and $j + b'$,
 - (b) in bin j and of the form $\{z, z+2m'\}$ for some $y+1 \leq z \leq y+m'-1$ (i.e., the empty pair is between 1 and $m' - 1$ after the full pair in the same bin)

This is an intersecting family; indeed, since all the sets have size $n/2$, we just need to check that the complement of any set in the family is not in the family. In the first case, this follows since the maximal point of the complement of a set containing exactly one of each pair is the maximal point of the set plus $m/2$, so the sum of the maximal points changes by $bm/2 \equiv m/2$ modulo m . In the second case it is trivial.

Also this family is transitive: indeed, the automorphism group contains the elements

- cycle the b bins
- rotate each bin i by an amount r_i with $\sum_i r_i = 0$.

As in Proposition 10 we will denote a position in the game by an ordered pair (A, B) of subsets of the board, where A denotes the points played by PI, and B the points played by PII. For any set A containing at most one of each opposite pair we write \bar{A} for the set of points opposite to A .

Also as in Proposition 10, some positions have simple direct wins. There are two types. A position of the form $(A \cup \{(x, y)\}, \bar{A} \cup \{(z, w)\})$ is a *direct win of type-1* if $1 \leq z - x \leq b'$. It is a *direct win of type-2* if $z = x$ and $0 < w - y < m'$ or $2n' < w - y < 3m'$. Let us see that both of these are indeed winning positions for PI.

If the position is a direct win of type-1 then PI plays $(x, y + 2m')$ and for the rest of the game makes sure he gets one of every other pair set except he never plays the point $(z, w + 2m')$ opposite to (z, w) . This means that after PI's last turn he has one of every pair except he has both of a pair in the x^{th} bin and neither of a pair in the z^{th} bin. The constraint on z means that this is a winning set under Condition 2a above.

If the position is a direct win of type-2 then PI plays $x, y + 2m'$ and again makes sure he gets one of each opposite pair apart from he never plays $(z, w + 2m')$. This means that Maker finishes with a set that is winning under Condition 2b above.

PI's strategy is as follows. Unless the position is a direct win (of either type), he will make sure that the position after his turn is of the form $(A \cup \{(x, y)\}, \bar{A})$. Now suppose that, from this position, PII plays any point (z, w) . We split into several cases

1. If $1 \leq z - x \leq b'$ then the position is a direct win of type-1 and PI wins.
2. If $z = x$ and $0 < w - y < m'$ or $2n' < w - y < 3m'$ then the position is a direct win of type-2 and PI wins.
3. If (z, w) is any point other than $(x, y + 2m')$ (i.e., unless PII plays the opposite point to (x, y)) then PI plays the point $(z, w + 2m')$ (i.e., opposite where PII played). Obviously, this is possible and it keeps the position being of the form above, so PI follows the same strategy from the new position.
4. If PII plays $(x, y + 2m')$, the point opposite to (x, y) . Then, before PI plays, the position is (B, \bar{B}) where $B = A \cup \{(x, y)\}$. Let (x', y') be the empty point where x' is smallest and y' is smallest amongst the empty points for that value of x' . If $x' < b'$ then PI just plays (x', y') making the position of the required form, and continues as above.

(Note this case implies that PI plays $(0, 0)$ on his first go.)

There is one remaining case: $x' \geq b'$. We deal with this below.

There is one remaining case. To have reached this position all points in bins $[0, b')$ must already be filled. There may be some points in bins (b', b) but the bin b' must be empty as PI did not play in it and if PII had played in it then he would have lost under Case 1 above (as for the whole game so far the ‘extra point’ in the position was in bin $[0, b')$).

For the remainder of the game PI is going to play in a certain fashion filling up the bins $[b', b)$ in turn, except if a direct win of either type occurs, in which case PI follows the appropriate winning strategy as described above. Since, when PI plays in a bin x all pairs $[0, x)$ have already been filled, unless PII also plays in the bin x the position will be a direct win and PI wins. Thus, we may assume that PII plays in the same bin as PI for the rest of the game.

Observe that, when PI first plays in any of the bins $[b', b)$, he can pick a point u and guarantee to play all the empty points in $[u, u + m')$. Indeed, he starts by playing the first empty point after u . Then he follows his normal ‘pick the opposite point’ strategy (i.e., Case 3 of the strategy above) but whenever he gets a free choice (i.e., Case 4) he picks the next free point in $[u, u + m')$. By doing this PI does get all the free points in $[u, u + m')$ since, if PII ever takes any of the points in $[u, u + m')$ or $[u + 2m', u + 3m')$, then PI wins directly under Case 2 above.

Let r be the final empty bin. PI plays arbitrarily in the bins $[b', r)$, just ensuring that he gets one of each pair. (For example he could guarantee to play all the points in $[0, m')$ as described above.)

Now PI is about to play in bin r . We define a key quantity which PI will try and control for the rest of the game; this quantity will be defined for all positions where, for some $j > r$, bins $[0, j)$ are full but bin j is not. In such a position, the maximal points u_i for bins $[0, j)$ have all been determined and, moreover, all the remaining bins are non-empty. Thus, for $j \leq i < b$, there exist s_i, t_i as given by Lemma 12. We will think of the number

$$G(j) = \sum_{i < j} u_i + \sum_{i \geq j} t_i$$

as being the current ‘guess’ at the sum of the maximum points. PI’s strategy is to ensure that, for all $j > r$, this stays in the region $[0, 2m')$ as the bins fill up. We show that PI can achieve this by induction.

First, we show that he can play in bin r to ensure that $G(r+1) \in [0, 2m')$. This is trivial: PI picks a point u and, as above, guarantees to pick all the

points in $[u, u + m']$. It is easy to see that, however PII plays, the maximum lies in $[u - m', u]$. Thus, regardless of the game so far, by choosing u correctly, PI can ensure that $G(r + 1) \in [0, 2m']$.

Now suppose that $j > r$ and that $x = G(j)$. Inductively, we know that $x \in [0, 2m']$, so one of $[x - s_j, x]$ and $[x, x + 2m' - s_j]$ is a subset of $[0, 2m']$. Therefore, by the above observation, PI can play all the free points in $[z_1, z_1 + m']$ or $[z_2, z_2 + m']$ respectively, where z_1, z_2 are as in Lemma 12. Then, however PII plays, $u_j \in [t_j - s_j, t_j]$ or $u_j \in [t_j, t_j + 2m' - s_j]$ and

$$G(j + 1) = G(j) + u_j - t_j \in [0, 2m'].$$

Thus, $G(j + 1) \in [0, 2m']$ and the induction is complete.

When the process finishes the ‘guess’ $G(b)$ equals the actual sum of the maximum points and so this sum is in $[0, 2m']$ and PI wins. \square

4.4 Proof of Lemma 12

In this section fix $m = 2^a$ and let $m' = m/4$. We start with some notation.

Suppose that A is a partial cyclic pair set in \mathbb{Z}_m . Then $A|_{[x, x+r]}$ denotes the restriction of A to the interval $[x, x + r)$, rotated to be a subset of $[0, r)$.

We write $A + \mathbb{1}|_{[x, x+r]}$ for the union of A and the set of all free points in $[x, x + r)$. Note that this is not just $A \cup [x, x + r)$ as there may be points of $[x, x + r)$ that are opposite to points in A and these are not added; in particular, $A + \mathbb{1}|_{[x, x+r]}$ is a partial cyclic pair set.

Finally we write A_{\max} for the set A with all the free points added. Note that A_{\max} is not a pair set (unless A was already a full pair set).

Next we need some simple lemmas about maximal points. We start with a trivial observation that we use repeatedly.

Lemma 14. *Suppose that A is a full pair set and that x is r -maximal. Then $x + 2m'$ is r -minimal.*

Proof. Immediate from the definition of a cyclic pair set. \square

Lemma 15. *Let A be any subset of $[m]$. Then any r -maximal point is r' -maximal for all $r' \leq r$.*

Proof. This is trivial from properties of the lexicographic order. \square

Lemma 16. *Let A be any subset of $[m]$ and suppose that x is an r -maximal point and $x + r$ is an r' -maximal point. Then x is an $(r + r')$ -maximal point.*

Proof. This is trivial from properties of the lexicographic order. \square

Corollary 17. *Suppose that A is a partial cyclic pair set and x is a maximal point. Then the point $x - r$ is not an r -maximal point.*

Proof. By the previous lemma $x - r$ would be an $(r + m)$ -maximal point so an m -maximal point (i.e., a maximal point) contradicting the uniqueness of the maximum point (Lemma 11). \square

The same holds for A_{\max} even though it is not a cyclic pair set.

Corollary 18. *Suppose that A is a partial cyclic pair set and x is a maximal point of A_{\max} . Then the point $x - r$ is not an r -maximal point of A_{\max} .*

Proof. Again, by Lemma 16, $x - r$ would be an $(r + m)$ -maximal point of A_{\max} so an m -maximal point of A_{\max} . However, by a similar argument to Lemma 11, A_{\max} has a unique maximal point (the proof of that lemma just uses the fact that the set has exactly one point of some pair). \square

Lemma 19. *Suppose that A is a (full) pair set, that 0 is maximal, that x is r -minimal for some x and r , and that y is any x -maximal point. Then $y + x$ is r -minimal.*

Proof. Since 0 and y are both x -maximal we have that $A|_{[0,x)} = A|_{[y,y+x)}$ and, since 0 is maximal, we have $A|_{[0,x+r)} \geq A|_{[y,y+x+r)}$. Combining these we get $A|_{[x,x+r)} \geq A|_{[y+x,y+x+r)}$. But since x is r -minimal, we have $A|_{[x,x+r)} \leq A|_{[y+x,y+x+r)}$ and hence $A|_{[x,x+r)} = A|_{[y+x,y+x+r)}$. Thus, $y + x$ is r -minimal. \square

Lemma 20. *Suppose that A is a (full) pair set and that 0 is maximal. Then, for all $r < 2m'$, no point in $[0, r]$ is r -minimal. In particular, this holds for $r = m'$.*

Proof. Suppose that $x \in [0, r]$ is r -minimal. Since $r \geq x$ Lemma 19 implies that, for any y that is x -maximal, $y + x$ is x -minimal, and this is the form we shall use.

Now x is r -minimal, so $x + 2m'$ is r -maximal and thus, since $x \leq r$, also x -maximal. By Lemma 19, $2x + 2m'$ is x -minimal, and hence $2x$ is x -maximal. By Lemma 19 again, we have that $3x$ is x -minimal, so $3x + 2m'$ is x -maximal. Repeating we see that $4x + 2m'$ is x -minimal so $4x$ is x -maximal etc. In particular kx is x -maximal for even k and x -minimal for odd k . Thus the pair set A is periodic with period $2x \leq 2r < m$. Since a cyclic pair set cannot be periodic this is a contradiction. \square

Lemma 21. Suppose that A is (full) pair set. Suppose that x is an m' -maximal point. Then the maximal point lies in $(x - 2m', x]$.

Proof. Let y be the maximal point.

First, suppose that $y \in [x + 1, x + m']$. Then, by Corollary 17, x is not m' -maximal, which is a contradiction.

Now suppose that $y \in [x + m', x + 2m']$. Then $x + 2m'$ is m' -minimal but, since $x + 2m' \in [y, y + m']$, this contradicts Lemma 20. \square

Corollary 22. Suppose that A is a full pair set and that 0 is m' -maximal. Then the actual maximal point is the first point in the set $(2m', 4m']$ that is m' -maximal.

Proof. Let x be the first point in $(2m', 4m']$ that is m' -maximal. By Lemma 21 applied to 0 , we know that the actual maximum is in $(2m', 4m']$ and, by applying it to x , that the actual maximum is not in $(x - 2m', x]$. Combining these we see that the actual maximum must be in $(2m', x]$. Since the actual maximum must be m' -maximal this implies that x is the actual maximum. \square

Lemma 23. Suppose that A is a partial pair set and that x is m' -maximal in A_{\max} and that y is such that there are no free points in the interval $[x, y)$. Let $A' = A + \mathbb{1}|_{[y, y+m']} + \mathbb{1}|_{[y-m', y)}$ and let x' be the maximum point of A' .

Then

- (a) $x' \in (x - 2m', x]$,
- (b) x' is m' -maximal in A_{\max} ,
- (c) if $x' \notin (y - m', x]$ then A has no free points in the interval $[x', y - m']$,
- (d) for any (full) pair set B extending $A + \mathbb{1}|_{[y, y+m']}$, the maximum point of B lies in the interval $[x', x]$.

Proof. First observe that, since there are no free points in $[x, y)$ we have $A'|_{[x, x+m']} = A_{\max}|_{[x, x+m']}$. This observation, together with x' being m' -maximal in A' , shows that

$$A_{\max}|_{[x', x'+m']} \geq A'|_{[x', x'+m']} \geq A'|_{[x, x+m']} = A_{\max}|_{[x, x+m']}.$$

Since x is m' -maximal in A_{\max} this shows that x' is also m' -maximal in A_{\max} and that each of the inequalities must actually be an equality.

This shows that x is m' -maximal in A' , so by Corollary 22, $x' \in (x - 2m', x]$ which is part (a). It also shows that x' is m' -maximal in A_{\max} which is part (b).

Moreover, it shows that $A_{\max}|_{[x',x'+m']} = A'|_{[x',x'+m']}$ so, in particular, if $x' \notin (y - m', x]$ then, since any free points in the interval $[x', y - m')$ would be present in A_{\max} but absent in A' there cannot be any such free points.

To prove part (d) observe that, since there are no free points in $[x, y)$, $B|_{[x,y]} = A'|_{[x,y]}$, and by definition $B|_{[y,y+m']} = A'|_{[y,y+m']}$. Thus,

$$B|_{[x,y+m']} = A'|_{[x,y+m']}. \quad (*)$$

In particular $B|_{[x,x+m']} = A'|_{[x,x+m']} = A_{\max}|_{[x,x+m']}$, so x is m' -maximal in B . Let z be the maximum point of B . By Corollary 22, we see that $z \in (x - 2m', x]$.

Also, since both A' and B are full pair sets, $(*)$ shows that $B|_{[x-2m',y-m']} = A'|_{[x-2m',y-m']}$. By definition $A'|_{[y-m',y]} \geq B|_{[y-m',y]}$ (i.e. restricted to this interval, A' contains B). Combining these, we see that $A'|_{[x-2m',y]} \geq B|_{[x-2m',y]}$. In particular, any m' -maximal point of B in $[x - 2m', x]$ is also m' -maximal in A' . Thus by Corollary 22 we see that $x' \leq z$. \square

We are now in a position to prove Lemma 12.

Proof of Lemma 12.

We may assume that 0 is the maximum point of A_{\max} . Write A^k for the set $A + \mathbb{1}|_{[km',(k+1)m']}$ (so $A^4 = A^0$ etc – we use whichever expression is convenient). Similarly, write $A^{k,k+1}$ for the set $A + \mathbb{1}|_{[km',(k+1)m')} + \mathbb{1}|_{[(k+1)m',(k+2)m']}$ and note that $A^{k,k+1}$ is a cyclic pair set.

Let x_k be the maximum point of $A^{k,k+1}$. Observe that $A^{4,5}|_{[0,2m']} = A_{\max}|_{[0,2m']}$ so 0 is maximal in $A^{4,5}$; i.e., $x_4 = 0$.

By Lemma 23(b) applied with $x = y = 0$, the maximum point x_3 of $A^{3,4}$ is m' -maximal in A_{\max} . By Corollary 18 either $x_3 = x_4$ or $x_3 < 3m'$. If $x_3 = x_4$ then, by Lemma 23(d), we see that the maximum point of any set B extending A^0 is 0, and the claimed result is trivially true with $z_1 = z_2 = 0$.

Thus, we may assume $x_3 < 3m'$. Then Lemma 23(c) shows that there are no free points in $[x_3, 3m']$. Now we can apply Lemma 23(b) again but this time with $x = x_3$ and $y = 3m'$. This shows that x_2 is m' -maximal in A_{\max} .

If $x_2 > 2m'$ then, by Lemma 23(d), any set extending A^3 has maximum point in $[x_2, x_3]$ and any set extending A^4 has maximum point in $[x_3, 0]$ (recall $x_4 = 0$). Thus, in this case we are done with $t = x_3$ and $s = x_3 - x_2$.

Thus we may assume $x_2 \leq 2m'$ and thus, by Lemma 23(c), that there are no free points in $[x_2, 2m']$. We apply Lemma 23(b) again, this time with $x = x_2$ and $y = 2m'$. This shows that x_1 is m' -maximal in A_{\max} .

If $x_3 - x_1 < 2m'$ then, as above, we are done: any set extending A^2 has maximum point in $[x_1, x_2]$ and any set extending A^3 has maximum point in $[x_2, x_3]$.

Thus we may assume $x_3 - x_1 \geq 2m'$ and, in particular, that $x_1 \leq m'$. Hence, Lemma 23(c) implies that A has no free points in $[x_1, m']$.

To summarise, we have that, for each k , x_k is m' -maximal in A_{\max} , $x_k \leq km'$, and A does not have any free points in the interval $[x_k, km']$.

If, for any k we have $x_{k+2} - x_k < 2m'$ then as above we are done: any set extending A^{k+1} has maximum point in $[x_k, x_{k+1}]$ and any set extending A^{k+2} has maximum point in $[x_{k+1}, x_{k+2}]$.

Hence the only remaining case is that both $x_2 = 2m'$ (i.e $x_2 = x_0 + 2m'$) and $x_3 = x_1 + 2m'$. Then both 0 and $2m'$ are m' -maximal in A_{\max} and, in particular, $A|_{[0,m']} = A|_{[2m',3m']}$. This means that there can be no fixed point (i.e., non-free point) in these intervals as such a point would be fixed differently in the two sets. Hence all points in these intervals are free.

But, if this is the case, then 0 is the maximal point in any set B extending A^0 . Indeed, since 0 is maximal in A_{\max} we must have that the preceding element (element ‘-1’) is fixed not in A . Thus, in the interval $[2m', 4m']$, the set B consists of m' zeros, $m' - 1$ points we don’t know about followed by another zero. Thus it is trivial to see that, whatever B is, no point in $[2m', 4m']$ is m' -maximal (it would have to have m' ones following it) and the result follows. \square

5 Some Simple Observations

Before proceeding further we collect some simple observations. Note that, although some of the proofs are a little long to write out, all the results in this section are essentially trivial consequences of our work so far.

5.1 Bounded size lines

In Theorem 3 we showed that all transitive games with a line of size 2 are a PII win. However, this is best possible since our first example of an even sized PI win was a game on 6 points with all lines of size 3. It is easy to extend this to find arbitrarily large examples of PI win games with all lines of size 3.

Theorem 24. *For all $n = 12k + 6$ there is a transitive avoidance game on n points, with all lines of size 3, that is a first player win.*

Proof. Let \mathcal{H}_0 be the transitive avoidance game on 6 points that is a PI win given by Proposition 10 and let Φ be a winning strategy for \mathcal{H}_0 . Let \mathcal{H} be the disjoint union of $2k + 1$ copies of \mathcal{H}_0 which we write as $[2k + 1] \times \mathcal{H}_0$.

Obviously \mathcal{H} has $12k + 6$ points, all lines have size 3, and it is transitive. Thus we just need to show that this game is a PI win.

Let f be an involution from $[2k + 1] \rightarrow [2k + 1]$ fixing 1 and having no other fixed point. PI starts by playing according to the winning strategy in the first copy of \mathcal{H}_0 . For all subsequent moves he plays as follows. Suppose that PII has just played a point $(x, y) \in [2k + 1] \times \mathcal{H}_0$. If $x \neq 1$ then PI plays $(f(x), y)$; if $x = 1$ then PI plays according to Φ in the first copy of \mathcal{H}_0 . It is easy to see that PI can follow this strategy (i.e., he never has to play a point that has already been played), and that this strategy is a PI win. \square

One might wonder whether size 3 is special in the above theorem, but it is easy to show that there are arbitrarily large games that are PI wins and have all lines of any fixed size greater than 2.

Corollary 25. *For any $r \geq 3$ and n_0 there is a transitive game on $n > n_0$ points with lines all of size r that is a first player win.*

Proof. Take the game \mathcal{H} with lines \mathcal{L} given by Theorem 24 with $k = \max(n_0, 2r)$. Define the new game \mathcal{H}' to have the same board and to have lines

$$\mathcal{L}' = \{L' \in [n]^{(r)} : L' \supset L \text{ for some } L \in \mathcal{L}\}.$$

Let PI play as above. Then at some point PII forms a set $L \in \mathcal{L}$. If PII has played at least r points then he has formed a set $L' \in \mathcal{L}'$ (any superset of a set L which has size r is in \mathcal{L}'). If PII has not played this many points then PI just has to continue playing until PII has played r points without forming a set in \mathcal{L}' himself. This is trivial: on each turn PI plays in a copy of \mathcal{H}_0 that has not been played in previously (where \mathcal{H}_0 is as in the construction for \mathcal{H}). This is possible as $k \geq 2r$. \square

5.2 Fast Player I wins

In the examples of PI wins we have given so far PII can avoid losing for a long time: indeed, in the even case he need not lose until the last turn of the game, and in the odd case he can play for at least time $n/4$ (in the construction in Theorem 6 for board size pq all lines have size $p'q' \geq pq/4$).

However, an iterated variant of the odd size ‘majority of majorities’ construction in Theorem 6 shows that there are games where PII must lose in time $o(n)$.

Theorem 26. *For any $\varepsilon > 0$ there is a game \mathcal{H} on n points such that PII must lose before time εn .*

The proof of this Theorem, whilst simple, is a little tedious to write out. Since we prove a substantially stronger result in the next section we omit the proof.

5.3 Transitivity

So far we have required that the game be transitive on the points. However, many natural games are more transitive than this. For example the Ramsey Avoidance Game is also line transitive (recall that edges in that game correspond to our points, and complete graphs there are our lines). In fact, the Ramsey Avoidance Game is point/line transitive in that any line, and any point in that line can be mapped, by an element of the automorphism group, to any other line and point in that line.

All our PI winning games so far are not transitive on the lines so it is natural to ask whether this extra transitivity is enough to rule out the possibility of a PI win. We answer this in the next section.

We remark that our ‘majority of majorities’ game may appear transitive on the lines, and it is true that it is transitive on the set \mathcal{W} of ‘allowed subsets’. However, it is *not* transitive on the set \mathcal{L} of lines.

6 The Torus Game

In this section we introduce a very natural game that simultaneously satisfies all of the properties we discussed in the previous section: PI can force a win in time $o(n)$, all lines have size 3, and it is point/line transitive (indeed it is even more: it is also possible to map any point and line not containing it to any other point and line not containing it).

Definition. *The torus game $\mathcal{T}_q(d)$ is the game on board \mathbb{Z}_q^d , with lines \mathcal{L} defined to be all subsets of the form $\{x, x + y, x + 2y, \dots, x + (q - 1)y\}$ for $x, y \in \mathbb{Z}_q^d$ and $y \neq 0$.*

We show that the game $\mathcal{T}_3(d)$ is an avoidance game satisfying all the conditions mentioned at the start of this section. Obviously, all lines have size 3, and it is transitive (translation by any element of \mathbb{Z}_3^d is in its automorphism group). The other stronger transitive properties mentioned above are also simple to verify.

Theorem 27. *The game $\mathcal{T}_3(d)$ is not a PII win.*

Proof. The map $g : \mathbb{Z}_3^d \rightarrow \mathbb{Z}_3^d$ defined by $g(x) = -x$ is an involution of the board X with a single fixed point 0. PI plays 0 on his first go. Then on each subsequent turn he plays $g(y)$ where y is the point PII just played.

Observe that this is a valid strategy: PI never plays a point that has already been played.

Now suppose that at some point PI forms a set $L \in \mathcal{L}$. This set cannot contain 0 since all lines containing 0 are of the form $\{-y, 0, y\}$, and if PI has played y then PII has played $-y$. Thus, if PI has all the points of L then PII has already played all points of $-L$ which is also a line in \mathcal{L} . Thus PII has already lost. \square

Corollary 28. *For all sufficiently large d the game $\mathcal{T}_3(d)$ is a PI win. Moreover, if t_d is the longest PII can avoid losing then $t_d/3^d \rightarrow 0$ as $d \rightarrow \infty$.*

Proof. View the torus \mathbb{Z}_3^d as a Hales-Jewett cube $[3]^d$. Observe that any combinatorial line in the Hales-Jewett cube is a line in the game sense (i.e. is in \mathcal{L}). Now for any d greater than the Hales-Jewett number $HJ(q, 2)$ (i.e., the smallest d such that any two colouring of the cube $[3]^d$ contains a monochromatic combinatorial line) the game cannot be a draw, and thus must be a PI win.

To prove the bound on the time observe that, by the density version of the Hales-Jewett Theorem [6] (or, indeed, standard cap-set results), there exists a sequence ε_d tending to zero such that any set of size $\varepsilon_d 3^d$ in $[3]^d$ contains a combinatorial line. Thus, by time $\varepsilon_d 3^d$ one player must have lost, so PII must have lost. Hence $t_d/3^d < \varepsilon_d$ so $t_d/3^d \rightarrow 0$ as claimed. \square

We conclude with an example showing that there are also even-sized boards where PI can win quickly. Moreover, in this example all lines have size 3.

Theorem 29. *There are games \mathcal{H}_d with board size $n_d = 6 \cdot 3^d$ which are PI wins and, moreover, PII loses game \mathcal{H}_d in time $o(n_d)$.*

Proof. The construction is an extension of the above. Let \mathcal{H}_1 be the game on six points that is a PI win given by Proposition 10. We define \mathcal{H}_d to be $\mathcal{T}_3(d) \times \mathcal{H}_1$ where the lines in this product are a line in one of the component directions and constant in the other. More precisely, the board is the set $\mathbb{Z}_q^d \times \mathcal{H}_1$ and the lines are the set

$$\left(\bigcup_{\substack{x \in \mathcal{T}_3(d) \\ L \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}} \{x\} \times L \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{L \in \mathcal{L}(\mathcal{T}_3(d)) \\ y \in \mathcal{H}_1}} L \times \{y\} \right).$$

We have to show that PI wins this game and that the game ends quickly.

First, we give a winning PI strategy. Let Φ denote the winning strategy for PI in \mathcal{H}_1 . As usual we view the board of $\mathcal{T}_3(d)$ as $\{-1, 0, 1\}^d$. PI starts by playing in the $(0, 0, \dots, 0)$ copy of \mathcal{H}_1 and plays according to Φ . We call this copy of \mathcal{H}_1 the zero copy.

Now for all subsequent moves PI does the following. If PII just played in the zero copy the PI also plays in the zero copy and follows the strategy Φ . If PII played in any other copy (x_1, x_2, \dots, x_d) of \mathcal{H}_1 then PI plays the same point in the antipodal copy $(-x_1, -x_2, \dots, -x_d)$ of \mathcal{H}_1 .

Observe that PI cannot lose by forming any triple not including a point in the zero copy of \mathcal{H}_1 as PII would have formed the antipodal set and would have already lost. Furthermore PI cannot lose by forming a triple not wholly contained in the zero copy as PII would have the antipodal point. Finally, PI does not form a losing triple in \mathcal{H}_1 as he is following the winning strategy Φ there.

To show that the game ends quickly consider the points in $\mathcal{T}_3(d) \times \{y\}$ for some $y \in \mathcal{H}_1$. If a player has more than $\varepsilon \|\mathcal{T}^d\|$ points in this set then, by the density Hales-Jewett theorem, provided d is sufficiently large, he must have a combinatorial line which is a losing set in our game. Thus, if PII has not lost he has played a total of at most $6\varepsilon |\mathcal{T}^d| = \varepsilon |\mathcal{H}_d|$ points. \square

7 Open Problems

Our first open question concerns the case when n is prime.

Question 1. *For which primes n does there exist a transitive avoidance game on n points that is a first player win?*

We know almost nothing in this case. When $n = 3, 5$ or 7 there is no transitive avoidance game that is a PI win. Indeed, 3 is trivial; 5 follows immediately from Theorem 3. The case $|V| = 7$ is slightly trickier but, by Theorem 3, we only need to consider the case where all lines have size three and, since 7 is prime, we may assume that the cyclic group C_7 acts on the board. This reduces the problem to a manageable number of cases.

However, for 11 and 13 there are transitive avoidance games that are first player wins. These were found by computer search. The games we find are of the following form: there is a transitive intersecting family \mathcal{W} of $\frac{n-1}{2}$ -sets that PI can guarantee to make one of in his first $\frac{n-1}{2}$ moves. Thus setting \mathcal{L} to be all other $\frac{n-1}{2}$ -subsets we get the required game.

For $n = 11$, \mathcal{W} is the set of all affine copies of the set $\{0, 1, 2, 4, 5\}$. For $n = 13$, \mathcal{W} is the set of all affine copies of any of the sets $\{0, 1, 2, 4, 5, 6\}$,

$\{0, 1, 2, 4, 5, 7\}$ or $\{0, 1, 3, 4, 5, 7\}$. However, we do not have a ‘nice’ strategy for either game.

We remark that we searched for games transitive under the affine group as this reduced the number of orbits to a level manageable by computer search. There are other PI wins which are less symmetric, and there are some which are not of this ‘maker’ form.

We do not know the anything about the answer to this question for any primes greater than 13. Indeed, we do not even know if there are infinitely many such primes. Moreover, the number of possible transitive games for 17 is extremely large (even if we restrict to affinely transitive games) which makes a computer search, even for the next open case, impractical.

Theorem 24 and Corollary 25 answer the question of for which n and r there exist transitive avoidance games on n points with lines all of size r that are PI wins, for infinitely many values of n and r . However, the full characterisation remains open.

Question 2. *For which n and r does there exist a transitive avoidance game on n points with all lines of size r that is a PI win.*

In particular we do not know the full characterisation even for $r = 3$.

A family of games of particular interest is the class of *sim-like* games, which is defined as follows. These games have board the edge set of the complete graph K_n . The lines are sets of edges that are isomorphic to some forbidden graph (or family of graphs). For example, the Ramsey Avoidance Game $RAG(n, k)$ is of this form: the board is the edge set of K_n and the lines are the subgraphs isomorphic to K_k . (They have been called *sim-like* as the first non-trivial Ramsey Avoidance Game, $RAG(6, 3)$, is commonly called Sim.)

We do not know if there are any sim-like games that are PI wins.

Question 3. *Does there exist a sim-like game that is a PI win?*

One particular property of sim-like game is that they have a large automorphism group. Indeed, the automorphism group of a sim-like game played on K_n trivially contains S_n . We do not know whether this itself is enough to force a PII win. More generally it would be interesting to characterise for which automorphism groups there exist PI wins.

Question 4. *For which groups G does there exist a transitive avoidance game with automorphism group G that is a PI win?*

Finally, there is a natural definition of an infinite avoidance game. In this case the board has infinite size (with all lines finite) and a player loses if he forms a line. If the play continues forever with neither player losing then the game is deemed a draw.

Question 5. *Is there an infinite transitive avoidance game that is a PI win?*

We have no intuition as to the correct answer to this question; indeed, we do not even know the answer when all losing lines have size three. We remark that any such game must have ‘many’ losing lines, to avoid PII having an easy draw – for example, by picking a faraway point that does not complete a losing line.

References

- [1] M. H. Albert and R. J. Nowakowski, editors. *Games of no chance 3*, volume 56 of *Mathematical Sciences Research Institute Publications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. Papers from the Combinatorial Game Theory Workshop held in Banff, AB, June 2005.
- [2] J. Beck. Ramsey games. *Discrete Math.*, 249(1-3):3–30, 2002. Combinatorics, graph theory and computing (Louisville, KY, 1999).
- [3] J. Beck. *Combinatorial games*, volume 114 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [4] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy. *Winning ways for your mathematical plays*. A K Peters, Ltd., Natick, MA, second edition, 2001.
- [5] P. J. Cameron, P. Frankl, and W. M. Kantor. Intersecting families of finite sets and fixed-point-free 2-elements. *European J. Combin.*, 10(2):149–160, 1989.
- [6] H. Furstenberg and Y. Katznelson. A density version of the Hales-Jewett theorem. *J. Anal. Math.*, 57:64–119, 1991.
- [7] F. Harary. Achievement and avoidance games for graphs. In *Graph theory (Cambridge, 1981)*, volume 13 of *Ann. Discrete Math.*, pages 111–119. North-Holland, Amsterdam-New York, 1982.
- [8] D. Hefetz, M. Krivelevich, M. Stojaković, and T. Szabó. Avoider-Enforcer: the rules of the game. *J. Combin. Theory Ser. A*, 117(2):152–163, 2010.

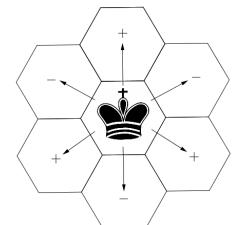
- [9] D. Hefetz, M. Krivelevich, and T. Szabó. Avoider-enforcer games. *J. Combin. Theory Ser. A*, 114(5):840–853, 2007.
- [10] J. R. Isbell. Homogeneous games. *Math. Student*, 25:123–128, 1957.
- [11] J. R. Isbell. Homogeneous games. II. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11:159–161, 1960.
- [12] X. Lu. A matching game. *Discrete Math.*, 94(3):199–207, 1991.
- [13] G. Simmons. The game of SIM. *J. Rec. Math.*, 2(2):66, 1969.
- [14] W. Slany. Graph ramsey games. *Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC)*, (47), 1999.

Игра в кварки

А. Балакин, Ю. Петрова, М. Скопенков

1. Плоскость разбита на клетки в виде правильных шестиугольников. За ход король перемещается на любую соседнюю клетку, см. рисунок. Ходы вверх, вправо-вниз и влево-вниз назовем *положительными*, остальные — *отрицательными*. Король сделал несколько ходов и вернулся на исходную клетку. Чему может быть равна разность между числом положительных и отрицательных ходов?

Эта незатейливая математическая задача имеет фундаментальное физическое следствие: *заряд любой свободной частицы кратен заряду электрона*. Хотите увидеть, как школьная математика помогает понять физику частиц? Читайте дальше! Знаний физики не потребуется, мы дадим всю необходимую информацию. Начнем с неформального введения; математические определения появятся после задачи 9.



Элементарные частицы и места их обитания¹

Вещество состоит из атомов, атомы — из ядра и электронов, ядра — из протонов и нейтронов.

Все это *частицы* вещества. Частицы бывают *элементарные* и *составные*, т.е., состоящие из других частиц. Так, протон состоит из двух *u*-кварков и одного *d*-кварка, а сами кварки уже элементарны; см. рисунок. Для наших целей неважно, что такое кварки; можно представлять себе просто клейкие шарики, которые слипаются, образуя другие частицы.



-протон-

Если в эксперименте частица отделена от всех остальных (т.е. движется независимо от них), то она называется *свободной*. Так, обычно нейтрон содержится в ядре, но может стать свободным в ходе ядерной реакции. Эта подборка задач о *пленении* кварков (основные задачи — 11, 27, 33.b):

Кварки не бывают свободными.

Это значит нечто парадоксальное: кварки существуют, но их в принципе невозможно наблюдать в эксперименте. Мы обсудим как причины, так и следствия этого (пока не доказанного) утверждения².

Каждая частица имеет *заряд*. Так, заряд электрона равен -1 (таков выбор единиц измерения), заряд *u*-кварка равен $+2/3$. Заряд составной частицы равен сумме зарядов составляющих. Так, заряд протона равен $+1$.

Каждая частица имеет *античастицу* с противоположным зарядом. Так, заряд *u*-антикварка равен $-2/3$.

Список всего нескольких из известных кварков и свободных составных частиц приведен в таблице.

частица				античастица			
название	обозначение	состав	заряд	название	обозначение	состав	заряд
Элементарные частицы: кварки (слева) и антикварки (справа)							
<i>u</i> -кварк	<i>u</i>	-	$+2/3$	<i>u</i> -антикварк	\bar{u}	-	$-2/3$
<i>d</i> -кварк	<i>d</i>	-	$-1/3$	<i>d</i> -антикварк	\bar{d}	-	$+1/3$

Составные частицы из кварка и антикварка

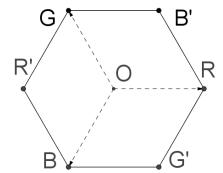
пион	π^+	$u\bar{d}$	+1	пион	π^-	$\bar{u}d$	-1
Составные частицы из 3 кварков (слева) или 3 антикварков (справа)							
протон	<i>p</i>	<i>uud</i>	+1	антипротон	\bar{p}	$\bar{u}\bar{u}\bar{d}$?
нейтрон	<i>n</i>	?	0	антинейтрон	\bar{n}	?	?

2. Заполните клетки таблицы, в которых стоят знаки вопроса.

¹Это только изложение общепринятой теории и *не* претендует на истину в последней инстанции.

²Доказательство одного очень близкого утверждения составляет одну из Проблем Тысячелетия, сущность которой мы тоже постараемся объяснить.

Каждая частица еще имеет *цвет* (со светом он никак не связан). Это уже не число, а вектор на плоскости. В дальнейшем будем считать, что $RB'GR'BG'$ — правильный шестиугольник с центром в начале координат O . Кварк может иметь один из цветов \overrightarrow{OR} , \overrightarrow{OG} , \overrightarrow{OB} (“красный”, “зеленый”, “синий”). Т.е. на самом деле, существует 3 разных u -кварка и 3 разных d -кварка.



Цвет античастицы противоположен цвету частицы. Так, античастица красного u -кварка имеет цвет $\overrightarrow{OR'}$ (“бирюзовый”). Цвет составной частицы — это векторная сумма цветов составляющих. Например, протон, состоящий из красного u -кварка, зеленого u -кварка и синего d -кварка, имеет нулевой цвет. Настоящая причина пленения кварков — это *пленение цвета*:

Частицы ненулевого цвета не бывают свободными.

Для разминки обсудим простейшие следствия пленения цвета.

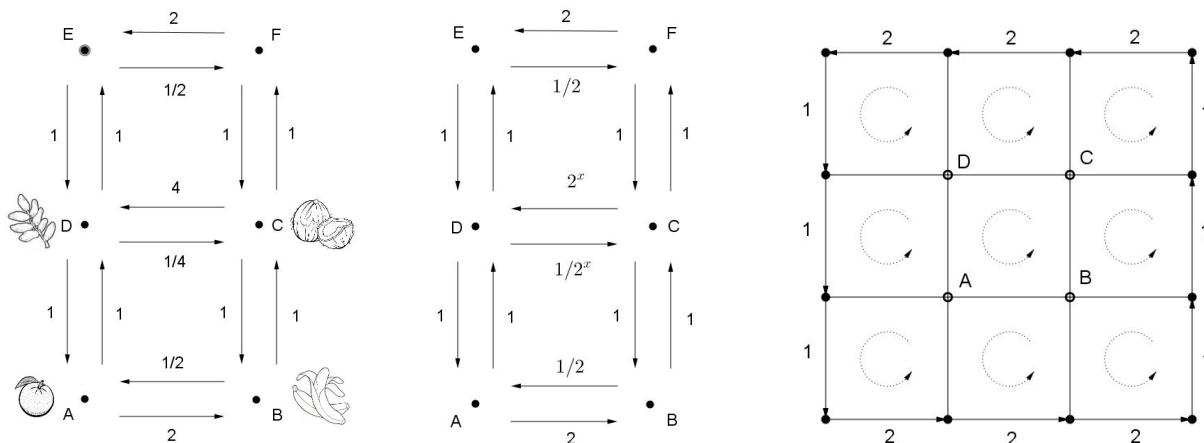
3. а) Для каких q и p с условием $p+q \leq 3$ есть частица нулевого цвета из q кварков и p антикварков³?

б) Докажите, что каждая частица нулевого цвета, состоящая из кварков и антикварков, указанных в таблице выше, обязательно имеет целочисленный заряд.

Начнем наш путь к пониманию причин пленения цвета. Нам потребуется теория, описывающая взаимодействие кварков. Все известные взаимодействия, кроме гравитации, описываются *калибровочной теорией*. Это касается не только кварков, но и каждого дневных явлений, вроде примагничивания проводников с током. Как мы сейчас увидим, идея калибровочной теории очень проста.

Игрушечная модель калибровочной теории

Несколько городов соединены дорогами в форме решетки $M \times N$; см. рисунок. В каждом городе свои товары (в неограниченном количестве). Например, в городе A — апельсины, в городе B — бананы. Для пары соседних городов A и B фиксирован курс обмена $U(AB) > 0$, например, 2 банана за апельсин. Курс симметричен, т.е. $U(BA) = U(AB)^{-1}$: за 2 банана получаем назад свой апельсин.



Хитрый горожанин может проехать вокруг квадрата $ABCD$ размера 1×1 , меняясь по пути, в результате чего его начальный запас товаров умножится на $U(AB)U(BC)U(CD)U(DA)$. Так, на рисунке слева он получит 8-кратную прибыль. Обозначим $U(ABCD) := U(AB)U(BC)U(CD)U(DA)$.

Как мы увидим, удобнее рассматривать *логарифмы* этих множителей. Все, что понадобится знать о логарифмах, это следующее определение. Если $y = 2^x$ для действительных x и y , то x называется *логарифмом* числа y и обозначается $x = \log_2 y$. Так, $\log_2 2 = 1$, $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, $\log_2 1 = 0$, $\log_2 \frac{1}{2} = -1$.

В частности, путешествие вокруг квадрата $ABCD$ в том или ином направлении даст прибыль, если $\log_2 U(ABCD) \neq 0$. *Общий доход от спекуляций* измеряется суммой $S[U]$ величин $\log_2^2 U(ABCD)$ по всем квадратам $ABCD$ размера 1×1 (обходятся они против часовой). Так, на рисунке слева

$$S[U] = \log_2^2 U(ABCD) + \log_2^2 U(DCFE) = (\log_2 8)^2 + (\log_2 \frac{1}{2})^2 = 10.$$

Вы — король и можете устанавливать курсы обмена везде, кроме границы решетки. Вы устанавливаете их, чтобы минимизировать величину $S[U]$. Полученные курсы назовем *оптимальными*.

4. Наведите порядок в королевстве на рисунке слева, т.е. подберите значение x , для которого минимален общий доход от спекуляций на рисунке в центре.

³Кварков может быть и больше: частицы из 4 кварков и антикварков были открыты в 2014, из 5 — в 2015.

Оптимальные курсы обмена можно найти приближенно на компьютере, перебирая с маленьким шагом все возможные курсы из некоторого интервала и сравнивая соответствующие значения $S[U]$.

5. Сделайте это для королевств на рисунках в центре и справа. А есть ли более быстрый алгоритм?

Заметим, что замена переменных $x(AB) := \log_2 U(AB)$ сильно упрощает выражение для дохода:

$$S[x] := \sum_{\substack{\text{все квадраты } ABCD \\ \text{размера } 1 \times 1}} (x(AB) + x(BC) + x(CD) + x(DA))^2.$$

Для квадрата $ABCD$ размера 1×1 обозначим $x(ABCD) := x(AB) + x(BC) + x(CD) + x(DA)$. Так, на рисунке слева $x(ABCD) = 3$. Обозначим через W множитель, на который умножится запас товаров при путешествии по границе всей решетки против часовой стрелки. Так, на рисунке слева $W = 4$.

6. Предположим, что фиксированные курсы обмена на границе такие, как на рисунке, т.е.

$$U(AB) = \begin{cases} 2, & \text{если дорога } AB \text{ принадлежит северной или южной границе решетки} \\ & \text{и направлена против часовой стрелки вдоль границы;} \\ 1, & \text{если дорога } AB \text{ принадлежит восточной или западной границе решетки.} \end{cases}$$

Наведите порядок в королевстве для следующих размеров решетки, т.е. заполните таблицу⁴:

Решетка	1×2	1×3	$1 \times N$	2×2
Величина W	4			
Минимальное значение $S[U]$				
Оптимальные курсы для всех дорог				
Величины $x(AB)$ для всех дорог AB				
Величины $x(ABCD)$ для квадратов				

7. а) Для каких значений курса обмена на границе решетки $M \times N$ можно достичь равенства $S[U] = 0$?

б)* Пусть $S[U] = 0$. Может ли горожанин получить прибыль, двигаясь по замкнутому пути?

с) Для каких значений M и N оптимальные курсы однозначно определяются курсами на границе?

д) Как связаны M , N , W и минимальный доход от спекуляций?

е) Какая из решеток — 8×8 или 7×9 — дает меньший доход от спекуляций при одинаковом W ?

8. Пусть теперь разрешено менять курсы обмена на границе. Какое минимальное значение величины

$$\frac{1}{2}S[U] - j \log_2 W$$

можно получить для данного вещественного числа j на решетке $M \times N$?

Физическая интерпретация

Наша игрушечная модель позволяет описать магнитное взаимодействие проводников с током.

Пусть дано вещественное число j . Граница решетки — это рамка с током силы j . Ток в рамке создает магнитное поле. Величина $x(ABCD)$ для квадрата $ABCD$ размера 1×1 — это *магнитный поток* через квадрат, сумма $\frac{1}{2}S[x]$ — это *энергия магнитного поля*, а $\frac{1}{2}S[x] - j \log_2 W$ — *общая энергия* системы. Всякая система стремится минимизировать энергию. Поэтому величины $x(AB)$ выбираются так, чтобы минимизировать величину $\frac{1}{2}S[x] - j \log_2 W$. (Осторожно: это грубая модель!)

Если расположение проводников не фиксировано, то проводники стремятся сдвинуться так, чтобы общая энергия уменьшилась. Это означает притяжение или отталкивание проводников. При этом движение проводников понимается как изменение количества клеток в решетке, а не размера самих клеток.

9. а) Стремится ли рамка с током уменьшить или увеличить свою площадь?

б) Притягиваются или отталкиваются два проводника с противоположно направленными токами?

с)* А если направления токов совпадают?

Указание. Замкните проводники вдалеке, чтобы получилась рамка (для б)) или 2 рамки (для с)).

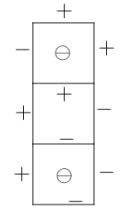
⁴Команда с максимальным числом заполненных клеток к промежуточному финишу получит такое же число апельсинов.

Взаимодействие夸克ов описывается *квантовой калибровочной теорией*. Ее главное отличие в том, что курсы обмена становятся *случайными* и не обязательно положительными. Для простоты будем считать, что курсы обмена принимают всего два значения: $+1$ и -1 , а коротко: “ $+$ ” и “ $-$ ”. Обход по границе квадрата меняет запас товаров, если на его границе нечетное число знаков “ $-$ ”.

Пришло время для точных математических формулировок. Сначала мы сформулируем нашу новую модель, затем пару задач, и только после этого постепенно дадим все необходимые определения.

Игрушечная модель квантовой калибровочной теории

Рассмотрим клетчатую полосу $1 \times N$; см. рисунок. Каждой из сторон квадратов 1×1 случайным образом сопоставим знак “ $+$ ” или “ $-$ ” (так, что все расстановки знаков имеют одинаковую вероятность; определение *вероятности* см. перед задачей 12). Для расстановки U обозначим через $S'[U]$ количество квадратов 1×1 , на сторонах которых нечетное число знаков “ $-$ ”. Например, на рисунке $S'[U] = 2$. Математическое ожидание случайной величины $S'[U]$ назовем *энергией* $E(N)$ электромагнитного взаимодействия кварка и антикварка на расстоянии N . (Определения *случайной величины* и *математического ожидания* см. перед и после задачи 17.) *Замечание.* Последний термин — неделимый; слова ‘кварк’, ‘антикварк’, ‘электромагнитное взаимодействие’ не имеют формального смысла по-отдельности. Осторожно: модель крайне грубая!



10. Найдите энергию $E(N)$ для полосок размера: 1×1 ; 1×2 ; 1×3 ; $1 \times N$;

- a) приближенно с помощью компьютерной симуляции; b) точно.

11. (Пленение кварков в 1-мерном пространстве.) Существует ли такое число E_0 , что $E(N) \leq E_0$ для каждого N ? (То же неформально: конечное или бесконечное количество энергии требуется, чтобы развести кварк и антикварк очень далеко друг от друга?)

Классическая вероятность⁵

Знакомство с теорией вероятностей полезно начинать на «физическом» уровне строгости, как в книгах [Shen], [KZhP]. Здесь же мы сразу даём «математические» определения. Однако мы приводим многие задачи на «практическом» языке и показываем на примерах, как их формализовать. Формализацию остальных задач оставляем читателю. Такая формализация является первым шагом решения, от которого может зависеть ответ.

Рассмотрим эксперимент, имеющий t равновозможных исходов, например бросание игральной кости, вытаскивание карты из колоды и т. д. Если интересующее нас событие (например, выпадение шестёрки, вытаскивание туза и т. д.) происходит в a из этих исходов, то *вероятность* события считают равной $p = a/t$.

Это пояснение полезно для начинающего, но не является математическим определением. Вот математическое определение.

Вероятностью подмножества A конечного множества M называется число

$$P(A) = P_M(A) := |A|/|M|.$$

Далее, если не оговорено противное, множество M фиксировано и пропускается из обозначений. Тогда вероятность определена для всех его подмножеств. Их часто называют *событиями*.

12. Из колоды в 52 карты вытаскивается одна карта. Найдите вероятность того, что она окажется
 (a) чёрной масти; (b) тузом; (c) картинкой;
 (d) дамой пик; (e) королём или бубной.

Например, в задаче 12 (c) множество M («всех возможных исходов») совпадает с множеством карт в колоде, а множество A («исходов, в которых происходит рассматриваемое событие») — с множеством картинок. Так эта и многие другие вероятностные задачи могут быть строго сформулированы на комбинаторном языке.

13. Монета бросается 3 раза. Найдите вероятность выпадения
 (a) трёх орлов; (b) двух орлов и решки.

⁵Данный раздел с небольшими изменениями заимствован из книги [EMZ].

Для решения некоторых из вышеприведённых задач полезны следующие.

- 14.** (а) *Правило сложения.* Пусть $A \cap B = \emptyset$. Выразите $P(A \cup B)$ через $P(A)$ и $P(B)$.
 (б) Выразите вероятность $P(A \cup B)$ через $P(A)$, $P(B)$ и $P(A \cap B)$.
 (с) *Правило умножения.* Выразите вероятность $P_{M \times N}(A \times B)$ через $P_M(A)$ и $P_N(B)$.
- 15.** а) Сторонам квадрата случайно сопоставлены знаки “+” и “−”. Какова вероятность, что общее количество знаков “−” нечетно?
 б) Какова вероятность, что для полоски 1×2 выполнено $S'[U] = 0$? А $S'[U] = 1$? А $S'[U] = 2$?
 Следующая задача подводит к понятиям *случайной величины* и *математического ожидания*.
- 16.** а) Вам предлагается такая игра. Вы платите 2 конфеты, затем бросается игральная кость, и вы получаете столько конфет, сколько очков выпадает. Выгодна ли вам эта игра?
 б) Правила те же, только в случае выпадения 1 очка вы платите 100 конфет. (У вас достаточно конфет, чтобы заплатить.) Выгодна ли вам эта игра?
 в) Банк предлагает вам стабильный доход совершенно бесплатно. Вы кладете в банк 8 конфет, после чего бросается игральная кость. Если выпадает 2, 3 или 4 очка, то вы получаете назад свой вклад плюс еще 1 конфету вдобавок. Если выпадает 5 или 6 очков (“рост рынка”), то вы получите даже плюс 2 конфеты вдобавок⁶. Выгодна ли вам эта игра?

Числовая функция X , заданная на M , называется *случайной величиной*. Множество пар (x_i, p_i) , $i = 1, 2, \dots$, где $\{x_1, x_2, \dots\}$ — множество возможных значений случайной величины X , а $p_i = P(\{m \in M : X(m) = x_i\})$, $i = 1, 2, \dots$, — соответствующие им вероятности, называется *распределением* случайной величины X . Событие $\{m \in M : X(m) = x_i\}$ в дальнейшем сокращённо обозначается $X = x_i$.

- 17.** Найдите распределение случайной величины $S'[U]$ для полоски 1×2 .

Математическим ожиданием или *средним значением* случайной величины X называется сумма

$$E(X) := \sum x_i p_i = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \dots$$

- 18.** Найдите математическое ожидание случайной величины $S'[U]$ для полоски 1×2 .

Договоримся вместо знака “+” писать $+1$, а вместо знака “−” писать -1 . Пусть случайная величина X_k равна произведению чисел на сторонах k -го сверху квадрата 1×1 в полоске $1 \times N$, а W' — произведению всех чисел на границе полоски. (Аналогично определяется W' для решетки $M \times N$.)

- 19.** Выразите $S'[U]$ и W' через X_1 и X_2 для полоски 1×2 . Найдите $E(X_1)$, $E(X_2)$ и $E(W')$.

- 20.** а) Докажите, что математическое ожидание случайной величины X на M равно $\sum_{m \in M} X(m)/|M|$.

б) Докажите, что если $E(X) \leq x$, то существует $m \in M : X(m) \leq x$.

в) Случайная величина X при всех $m \in M$ принимает одно и то же значение μ . Найдите $E(X)$.

г) Пусть a, b — вещественные числа, а X, Y — случайные величины. Всегда ли верно равенство $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$?

д) А равенство $E(XY) = E(X)E(Y)$?

Перейдем теперь к более точной модели взаимодействия夸克 (далее мы работаем уже с ней).

Солидная модель квантовой калибровочной теории

Зафиксируем число $c > 1$, называемое *константой взаимодействия*. Каждой дороге решетки $M \times N$ случайным образом сопоставим знак “+” или “−” так, что вероятность расстановки U равна

$$P[U] := \frac{c^{-S'[U]}}{\sum_{\text{все расстановки } V} c^{-S'[V]}}.$$

Энергией электромагнитного взаимодействия кварка и антикварка на расстоянии N назовем число

$$E_{M,c}(N) := -\frac{1}{M} \log_2 E(W').$$

Наша цель — найти ее. (Здесь $E(W')$ — это математическое ожидание случайной величины W' , определенной перед задачей 19. Мы не знаем простого объяснения такой формулы для энергии.)

⁶А если выпадет 1 очко, то это “кризис”, и вы теряете весь свой вклад. Кризис есть кризис.

Статистическая вероятность

В этой модели используется такое более общее определение вероятности. Пусть задано множество M и каждому $m \in M$ поставлено в соответствие неотрицательное число $P(m)$, причём сумма всех этих чисел равна 1. Тогда *вероятностью* события A называется сумма чисел $P(m)$ по всем $m \in A$.

21. а) Для решетки 1×1 найдите вероятность каждой расстановки знаков, величины $E(W')$ и $E_{1,2}(1)$.
б) То же, если разрешаются только расстановки, где на всех дорогах, кроме верхней, стоит “+”.
22. Как изменится вероятность расстановки, если поменять знаки на всех дорогах из одного города?

Следующее определение обобщает ситуацию правила умножения 14 (с). Пусть сначала вероятности $P(m)$ всех элементов m множества M одинаковы. Подмножества (т. е. события) A и $B \neq \emptyset$ множества M *независимы*, если доля (т. е. вероятность) множества $A \cap B$ в B равна доле (т. е. вероятности) множества A в M . Приведём симметричную переформулировку, которая работает и для $B = \emptyset$, и для более общего определения вероятности, когда не все числа $P(m)$ равны. Подмножества A и B конечного множества M называются *независимыми*, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Основной пример независимых подмножеств — в множестве всех клеток шахматной доски подмножество клеток в первых трёх её строках и подмножество клеток в последних четырёх её столбцах.

23. Независимы ли следующие подмножества, если вероятности элементов множества M одинаковы?
(а) Подмножества $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ и $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\} = M$.
(б) Подмножества $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = M$.

Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если события $X = x_i$ и $Y = y_j$ независимы при любых x_i, y_j , т. е.

$$P(\{m \in M : X(m) = x_i \text{ и } Y(m) = y_j\}) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

24. Независимы ли случайные величины X_1 и X_2 на полоске 1×2 (см. определение перед задачей 19)?

25. Докажите, что если случайные величины X и Y независимы, то математическое ожидание их произведения равно произведению их математических ожиданий: $E(XY) = E(X)E(Y)$.

26. (Закон площади Вильсона) Пусть $c = 2$, M и N произвольны. Найдите $E(W')$ и энергию $E_{M,2}(N)$. При каких M_1, N_1, M_2, N_2 решётка $M_1 \times N_1$ дает меньшее значение $E(W')$, чем решётка $M_2 \times N_2$?

27. (Пленение夸арков в 2-мерном пространстве.) Конечное или бесконечное количество энергии требуется, чтобы развести夸арк и анти夸арк очень далеко друг от друга в 2-мерном пространстве?

28. Исследуйте 3-мерную решётку $N \times N \times N$ и 4-мерную решётку $N \times N \times N \times N$ с помощью компьютерной симуляции для различных $c \in [2; 3]$. Для них $S'[U]$ по-прежнему определяется как число квадратов 1×1 с нечетным числом знаков “-”, а W' — как произведение знаков по границе одной из 2-мерных граней. Конечное или бесконечное количество энергии требуется, чтобы развести夸арк и анти夸арк очень далеко друг от друга в 3- и 4-мерном пространстве?

29. Докажите следующие утверждения. а) Отношение энергий $E_{M,c}(N)/E(N)$ не зависит N .
б) При $c \rightarrow \infty$ энергия $E_{M,c}(N)$ стремится к минимальному значению величины $S'[U]$, т. е. к 0.

Геометрический взгляд на калибровочную теорию*

Посмотрим на нашу модель с новой стороны (этот текст неформален и далее не используется).

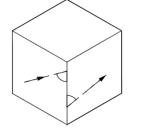
Заряды частиц бывают положительные и отрицательные. Какой из них считать положительным — условность: это просто выбор направления на числовой оси.

А что если выбор “направления оси” в каждой точке пространства делать независимо? Скажем, в каждом городе решётки $M \times N$ выбирать направление по-своему. Тогда для каждой дороги нужно указать, как меняется направление оси при переходе от города к соседнему. Можно представить себе ситуацию, когда при обходе квадрата 1×1 направление оси заменяется на противоположное (как направление перпендикуляра к ленте Мебиуса при ее обходе). Геометрический взгляд на калибровочную теорию состоит в том, что такие “дефектные” квадраты — это и есть магнитное поле, и они несут энергию. Поэтому в моделях мы считали энергию через количество “дефектных” квадратов.

Конечно, буквально эту конструкцию понимать нельзя: при обходе по замкнутому контуру знак заряда, конечно, не изменится. “Направление оси” — это нечто другое, чем знак заряда.

30. (Теорема Гаусса–Бонне) Рассмотрим а) куб; б) правильный тетраэдр; в)* выпуклый многогранник. Два вектора, лежащих в соседних гранях, назовем *параллельными*, если они образуют равные “вертикальные” углы с общей стороной этих граней (т.е. становятся параллельными и одинаково направленными, если “развернуть” две грани вокруг общей стороны, см. рисунок). Пусть f_1, f_2, \dots, f_k , f_1 — все грани вокруг вершины v в естественном порядке. Начнем с произвольного вектора $\vec{e}_1 \subset f_1$ и возьмем вектор $\vec{e}_2 \subset f_2$ параллельный \vec{e}_1 , потом вектор $\vec{e}_3 \subset f_3$ параллельный \vec{e}_2, \dots , наконец, вектор $\vec{e}_{k+1} \subset f_1$ параллельный \vec{e}_k . Обозначим через ϕ_v ориентированный угол между \vec{e}_{k+1} и \vec{e}_1 . Найдите сумму углов ϕ_v по всем вершинам v .

Цвет кварка — уже не число, а вектор, для которого возможны три направления. Поэтому в теории сильного (т.е. цветового) взаимодействия на дорогах ставятся *перестановки* трех цветов.



Перестановки

Перестановка множества — запись элементов этого множества в некотором порядке. Если говорить более строго, *перестановкой* множества называется взаимно однозначное отображение этого множества на себя (т.е. биекция). Перестановка множества $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, переводящая a_k в $f(a_k)$, записывается в виде

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_n) \end{pmatrix};$$

обычно $a_k = k$ для всех $k = 1, \dots, n$. Композицией перестановок f и g называется перестановка $f \circ g$, определённая формулой $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.

31. Найдите композиции (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

32. Для любых ли двух перестановок x и y выполнено $x \circ y = y \circ x$?

Игрушечная модель неабелевой калибровочной теории

Зафиксируем число $c > 1$. Обозначим через S_3 множество всех перестановок множества $\{1, 2, 3\}$. *Неподвижная точка* перестановки f — это такое $x \in \{1, 2, 3\}$, что $f(x) = x$. След $\text{Tr}(f)$ перестановки f — это число ее неподвижных точек минус 1. Например, $\text{Tr}(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}) = 0$.

Каждой дороге AB решетки $M \times N$ случайным образом сопоставим перестановку $U(AB) \in S_3$ так, что $U(AB) \circ U(BA)$ — тождественная перестановка, и вероятность расстановки U равна

$$P[U] := \frac{c^{-S''[U]}}{\sum_{\substack{\text{все расстановки } V \\ \text{вершины обозначены против часовой стрелки}}} c^{-S''[V]},$$

где

$$S''[U] := \sum_{\substack{\text{все квадраты } ABCD \text{ размера } 1 \times 1 \\ (\text{вершины обозначены против часовой стрелки})}} (2 - \text{Tr}(U(AB) \circ U(BC) \circ U(CD) \circ U(DA))).$$

(Т.е. чем меньше элементов остаются неподвижными при обходе квадрата, тем больший вклад в $S''[U]$ он дает.) Обозначим через W'' след произведения перестановок на всех граничных дорогах, если обходить границу против часовой стрелки, начиная с левого нижнего угла. Величина $-\frac{1}{M} \log_2 E(W'')$ называется *энергией сильного взаимодействия кварка и антикварка на расстоянии N* .

33. * а) Придумайте понятие *математического ожидания* случайной перестановки из S_3 , обладающее как можно большим числом свойств математического ожидания случайной величины.

Подсказка. Нам не хватает операции *сложения* перестановок. Она появится сама собой, если вспомнить, что 1, 2, 3 — это цвета кварков, цвета — векторы, а перестановка — отображение.

б) Найдите математическое ожидание случайной величины W'' при $c = 2$. Докажите, что найдутся такие числа $a, b, B \in \mathbb{R}$, что $ba^{MN} \leq E(W'') \leq Ba^{MN}$ для всех M, N .

34. (“Сущность” Проблемы Тысячелетия) То же неравенство для 4-мерной решетки $N \times N \times N \times N$ и прямоугольника $M \times N$ на одной из ее 2-мерных граней.

Дополнительные задачи

Эти сложные задачи выдаются тем, кто решил большинство из предложенных выше задач.

35. Решите аналог задачи 33.b, если определение следа перестановки заменить на следующее:

$$\text{Tr}'(x) = \begin{cases} +3, & \text{если } x \text{ — тождественная, т.е. } x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \\ 0, & \text{если } x \text{ — цикл длины 3, т.е. } x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \\ -1, & \text{если } x \text{ — транспозиция, т.е. } x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

а в формуле для $S''[U]$ выражение $2 - \text{Tr}(\dots)$ заменить на $3 - \text{Tr}'(\dots)$.

36. (Разложение сильной связи) Рассмотрим солидную модель на 3-мерной решетке $N \times N \times N$ из задачи 28. Найдите асимптотику выражения $E(W')$ при $c \rightarrow \infty$, т.е. такую функцию $f_N(c)$, что $\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{E(W')}{f_N(c)} = 1$ для каждого N .

Вместо эпилога (Подводные камни)

Мы надеемся, что некоторые из наших читателей заинтересовались элементарными частицами и хотят узнать о них побольше. В качестве эпилога мы дадим несколько предупреждений таким читателям.

В научно-популярной литературе теория элементарных частиц обычно слишком упрощена. Эта подборка задач не исключение. Рассмотренные нами игрушечные модели довольно грубые, и относиться к ним стоит с некоторой долей критики. Их единственное преимущество — простота; если принимать их слишком серьезно, то они могут привести к развитию неправильной физической интуиции. Только “Солидная модель квантовой калибровочной теории” признана и действительно рассматривается в физической литературе. А для настоящего понимания теории элементарных частиц необходимо хорошее знание как физики, так и математики.

Задача, которую мы назвали “сущностью проблемы тысячелетия”, ни в коем случае *не* равносильна проблеме тысячелетия в теории Янга–Миллса. И даже *не* является частным случаем последней. Это скорее наиболее содержательная — по очень субъективному мнению авторов — часть проблемы, освобожденная от технических деталей. Хотя мы и пришли к ней, обсуждая пленение夸克ов, по сути она ближе к другому явлению: *близкодействию ядерных сил*.

Также хотим заметить, что на сегодняшний день нет почти никаких математических результатов по калибровочной теории на решетках; обычно имеется только численное моделирование. Наконец, есть “*теории Новой Физики*”, которые разрабатываются без каких-либо объективных критериев: такие теории не имеют ни экспериментального, ни математического подтверждения (а некоторые имеют экспериментальные опровержения).

Указания, решения, ответы

1. Ответ: любому целому числу, кратному 3.

Указание. Расставим остатки 0, 1 и 2 при делении на три в клетки как показано на рисунке. Заметим, что положительный ход из любой клетки прибавляет 1 к остатку, на котором стоит король, а отрицательный — вычитает 1.

2. Ответ:

протон	p	uud	+1	антипротон	\bar{p}	$\bar{u}\bar{u}\bar{d}$	-1
нейтрон	n	udd	0	антинейтрон	\bar{n}	$\bar{u}\bar{d}\bar{d}$	0

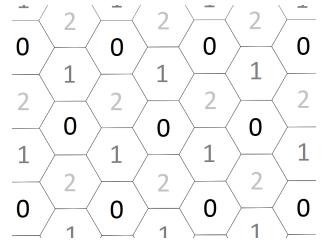
3а. Ответ: $(q, p) = (1, 1), (3, 0)$ или $(0, 3)$.

Эта задача решается небольшим перебором, приведём пример рассуждения для одного случая. Почему q и p не могут равняться соответственно 2 и 0: если два вектора в сумме дают 0, то они противоположны, а два кварка не могут иметь противоположные цвета.

3б. Указание. Пусть $p \leq q$. Заметим, что сумма зарядов произвольных кварка и антикварка — целое число. Значит, можно рассматривать только сумму зарядов $q - p$ кварков. Также заметим, что сумма зарядов любой тройки кварков — целое число. Из задачи 1 следует, что для частицы с нулевым цветом $q - p$ кратно 3, то есть $q - p$ кварков можно разбить на тройки.

4. Ответ: $x = 0$. Указание:

$$S[U] = \log_2^2(2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2^x} \cdot 1) + \log_2^2(2^x \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1) = (1 - x)^2 + (1 + x)^2 = 2 + 2x^2.$$



Минимум достигается при $x = 0$.

6. Ответ:

В таблице ниже в третьей и четвертой строках в первых трех столбцах перечислены величины для всех неграничных дорог, отсчет которых идет сверху вниз. При этом считается, что все эти дороги направлены слева направо. В этих же строках в последнем столбце считается, что все неграничные дороги направлены из центра к границам, а x обозначает произвольное действительное число (то есть для каждого x есть свое решение). Если для всех дорог (или квадратов) значение величины одно и то же, то в соответствующую клетку ставится только одно число.

Решетка	1×2	1×3	$1 \times N$	2×2
Величина W	4	4	4	16
Минимум $S[U]$	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{N}$	4
Оптимальные курсы	1	$2^{-1/3}, 2^{1/3}$	$2^{-1+\frac{2}{N}}, 2^{-1+\frac{4}{N}}, \dots, 2^{-1+\frac{2N-2}{N}}$	2^x
Величины $x(AB)$	0	$-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$-1 + \frac{2}{N}, -1 + \frac{4}{N}, \dots, -1 + \frac{2N-2}{N}$	x
Величины $x(ABCD)$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{N}$	1

Указание. В решении этой задачи, как и некоторых последующих, очень полезно *неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим*, которое формулируется следующим образом:

для любых действительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n верно неравенство:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n \geq 0$.

Для решетки $1 \times N$ за x_1, x_2, \dots, x_n стоит принять величины $x(ABCD)$ для всех квадратов $ABCD$ (занумерованных сверху вниз).

Для решетки 2×2 обозначим курсы обмена в направлении из центра к границе за $2^x, 2^y, 2^z$ и 2^t против часовой стрелки. Тогда

$$\begin{aligned} S[U] &= (x+1-y)^2 + (-z+y+1)^2 + (1-t+z)^2 + (1-x+t)^2 = \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4 - 2xy - 2yz - 2zt - 2tx = \\ &= (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-t)^2 + (t-x)^2 + 4 \geq 4. \end{aligned}$$

Замечание. Есть и другие решения, некоторые из которых опираются на *существование оптимальных курсов*. В таком случае последнее нужно доказывать, а это довольно сложно, см. [SSU, Принцип достижения наименьшего значения на стр. 30].

7а. (Е. Павлов) Ответ: $S[U] = 0$ может достигаться тогда и только тогда, когда $W = 1$.

В самом деле, $S[U] = 0$ тогда и только тогда, когда для каждого 1×1 квадрата $ABCD$ выполняется $U(ABCD) = 1$. Рассмотрим произведение

$$\prod = \prod_{\substack{\text{все } 1 \times 1 \\ \text{квадраты } ABCD}} U(ABCD).$$

В этом произведении каждая неграничная дорога появляется дважды, один раз как $U(AB)$ и один раз как $U(BA)$, которые уничтожают друг друга. Границные дороги появляются один раз с ориентацией против часовой стрелки. Это означает, что $\prod = W$. Так как каждый член в \prod это просто 1, из этого следует, что $W = \prod = 1$ это необходимое условие.

Теперь предположим, что $W = 1$. Покажем, что существуют курсы $U(AB)$, такие что $S[U] = 0$. Обозначим через $a_0, a_1, \dots, a_{2M+2N-1}$ вершины на границе, начиная с нижней левой вершины. Далее введем функцию $P(A)$ на вершинах решетки следующим образом:

$$P(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ не на границе или нижняя левая вершина.} \\ \prod_{k=0}^{n-1} U(a_k a_{k+1}), & \text{если } A \text{ это вершина } a_n \text{ на границе.} \end{cases}$$

Наконец, установим $U(AB)$ на неграничных дорогах по формуле $U(AB) = \frac{P(B)}{P(A)}$. Для каждого квадрата $ABCD$, мы имеем

$$\log_2(U(AB)U(BC)U(CD)U(DA)) = \log_2\left(\frac{P(B)}{P(A)}\frac{P(C)}{P(B)}\frac{P(D)}{P(C)}\frac{P(A)}{P(D)}\right) = \log_2(1) = 0.$$

Это означает, что $S[U] = 0$, ч.т.д.

7b*. Достаточно построить функцию $P(A)$ на множестве городов, такую что $U(AB) = \frac{P(B)}{P(A)}$ для каждой дороги AB . Для каждого города A возьмем за $P(A)$ произведение всех курсов обмена для Г-образного пути, начинающегося в нижнем левом городе и заканчивающегося в A . Тогда условие $U(ABCD) = 1$ для каждого 1×1 квадрата $ABCD$ дает условие $U(AB) = \frac{P(B)}{P(A)}$.

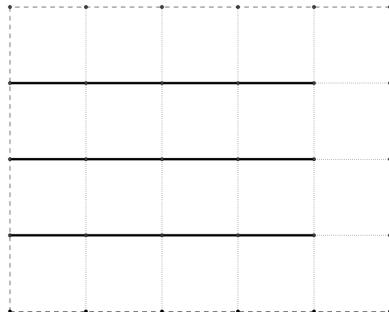
7c. Для $M, N > 1$ курсы не определены однозначно. Для внутреннего города мы можем изменить единицы измерения, например, обменивать дюжину яблок вместо одного. Такая *калибровочная трансформация* умножает курсы обмена для всех дорог, начинающихся в городе, в то же время сохраняя $S[U]$.

7d. Ответ: $2^{\sqrt{M \cdot N \cdot S_{min}}} = W$, где S_{min} - минимальное значение $S[U]$.

Указание. По неравенству между средним квадратическим и средним арифметическим:

$$\begin{aligned} S[U] &= \sum_{\text{все квадраты } ABCD \text{ размера } 1 \times 1} x(ABCD)^2 \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{MN} \left(\sum_{\text{все квадраты } ABCD \text{ размера } 1 \times 1} x(ABCD) \right)^2 = \frac{\log_2^2 W}{MN} \end{aligned}$$

Осталось доказать, что всегда можно установить такие курсы обмена внутри королевства, чтобы равенство достигалось, то есть чтобы значения $x(ABCD)$ были равны $\frac{\log_2 W}{MN}$ для всех квадратов 1×1 . Для прямоугольника $1 \times N$ можно последовательно определять курсы на еще не определенных сторонах квадратов, обходя их сверху вниз. Эти курсы определяются однозначно, а для последнего квадрата величина $x(ABCD)$ будет равна $\frac{\log_2 W}{MN}$, потому что сумма этих величин для всех квадратов фиксирована. Для прямоугольника $M \times N$ предлагается установить на дорогах, нарисованных жирными линиями (см. рис.), единичный курс обмена, а затем доопределить курсы на остальных дорогах.



7e. Ответ: 8×8 .

Это следует из формулы в задаче 7d.

8. Ответ: $-MNj^2/2$.

Указание. Обозначим $w = \log_2 W$. Для фиксированного w , минимум $S[U]$ равняется $\frac{w^2}{MN}$ по Задаче 7.d. Остается найти минимум квадратного многочлена $\frac{w^2}{2MN} - jw$.

9а. Ответ: рамка стремится увеличить свою площадь.

Первый шаг в решении этой задачи (и многих других) — *математическая формализация*. Пункт а) формализуется так: *Рассмотрим минимальное значение $\frac{1}{2}S[x] - j \log_2 W$ на решетке $M \times N$ как функцию от MN при фиксированном j . Возрастает или убывает эта функция?* После формализации решение следует из Задачи 8.е.

На этом факте основана работа любого электрического двигателя или генератора.

9б. Ответ: проводники с противоположно направленными токами отталкиваются.

Математическая формализация: *рассмотрим минимальное значение $\frac{1}{2}S[x] - j \log_2 W$ на решетке $M \times N$ как функцию от N при фиксированных M и j . Возрастает или убывает эта функция?*

9с*. Ответ: проводники с одинаково направленными токами притягиваются.

Математическая формализация: *рассмотрим минимальное значение $\frac{1}{2}S[x] - j \log_2 W$ на решетке $M \times (L - N)$ как функцию от N при фиксированных L, M и j . Возрастает или убывает эта функция?*

10б. Ответ: $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{N}{2}$.

Возьмем произвольный квадрат полосы $1 \times N$ и рассмотрим случайную величину, равную 0, если на его сторонах четное количество знаков “-”, и 1, если нечетное. Путем недлинного перебора легко убедиться, что значения 0 и 1 равновероятны, то есть математическое ожидание этой величины равно $\frac{1}{2}$. Заметим, что величина $S'[U]$ равна сумме рассматриваемых величин по всем квадратам 1×1 , и, так как математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий, выполняется равенство $E(N) = \frac{N}{2}$.

11. Ответ: нет.

Указание. В этой модели энергия $E(N) = \frac{N}{2}$ стремится к бесконечности при стремлении N к бесконечности.

12. Ответы: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{13}$; в) $\frac{3}{13}$; г) $\frac{1}{52}$; д) $\frac{15}{52}$.

13. Ответы: а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{3}{8}$.

14а. Ответ: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Пусть A и B - подмножества множества M . Так как A и B не пересекаются, $|A \cup B| = |A| + |B|$. Тогда по определению вероятность

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|M|} = \frac{|A| + |B|}{|M|} = \frac{|A|}{|M|} + \frac{|B|}{|M|} = P(A) + P(B).$$

14б. Ответ: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

14с. Ответ: $P_{M \times N}(A \times B) = P_M(A)P_N(B)$.

15. Ответы: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

Приведем пример рассуждения для пункта б). Разобьем все расстановки знаков на пары следующим образом: две расстановки состоят в паре тогда и только тогда, когда они отличаются *только* знаком на верхней стороне. Заметим, что замена знака на верхней стороне меняет четность количества знаков “-” на сторонах верхнего квадрата. Значит, таких расстановок, что $S'[U] = 1$, ровно столько, сколько расстановок, дающих $S'[U] = 0$ и $S'[U] = 2$, вместе взятых. То есть половина от общего числа расстановок. Аналогично объединим в пары расстановки, дающие $S'[U] = 0$ и $S'[U] = 2$, отличающиеся только знаком на центральной стороне, и поймем, что расстановок, дающих $S'[U] = 0$, столько же, сколько и дающих $S'[U] = 2$.

16. Ответы: а) да; б) нет; в) нет.

17. Ответы: $\{(0, 1/4), (1, 1/2), (2, 1/4)\}$. На самом деле, это задача 15.

18. Ответ: 1.

19. Ответ: $S'[U] = (2 - X_1 - X_2)/2$, $W' = X_1X_2$, $E(X_1) = E(X_2) = E(W') = 0$.

20. Ответы: с) μ ; д) да; е) нет.

Контрпример к е): $E(X_1^2) = E(1) = 1 \neq 1/4 = E(X_1)E(X_1)$.

21. а) Ответ: Вероятность расстановки с четным количеством знаков “-” равна $\frac{c}{8(c+1)}$, с нечетным — $\frac{1}{8(c+1)}$; $E(W') = \frac{c-1}{c+1}$, $E_{1,2}(1) = \log_2 3$.

б) Ответ: Вероятность расстановки без знаков “-” равна $\frac{c}{c+1}$, с одним знаком “-” — $\frac{1}{c+1}$; $E(W')$ и $E_{1,2}(1)$ такие же, как и в пункте а).

22. Ответ: вероятность не изменится.

23. Ответы: а) да; б) нет.

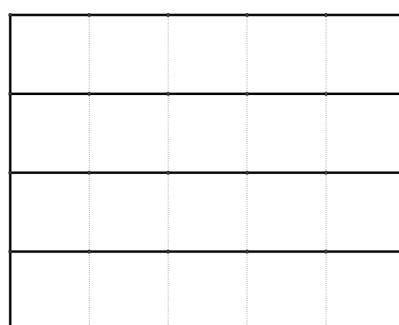
24. Ответ: да.

Указание. Следующее упрощение солидной модели очень удобно для этой и многих других задач. Изменение знаков всех дорог, исходящих из определенного города, называется *калибровочным преобразованием*. По Задаче 22 это действие не меняет вероятность расстановки. Оно не меняет ни случайные величины X_k , ни W' . Для произвольной расстановки, с помощью последовательности калибровочных трансформаций можно сделать все знаки на жирных отрезках на рисунке плюсами. Следовательно, можно полагать, что только такие расстановки, что все жирные отрезки имеют знак “+”, разрешены в модели. Далее, знаки всех остальных отрезков однозначно определены величинами X_k на всех квадратах. Следовательно, наша модель эквивалентна следующему процессу *Бернули*:

Пусть вероятность набора чисел $X_1, \dots, X_{MN} \in \{+1, -1\}$ равна

$$P(X_1, \dots, X_{MN}) = \frac{c^{(MN-X_1-\dots-X_{MN})/2}}{\sum_{\text{все возможные наборы } (Y_1, \dots, Y_{MN})} c^{(MN-Y_1-\dots-Y_{MN})/2}}.$$

Тогда энергия $E_{M,c}(N) = -\frac{1}{M} \log_2 E(X_1 \dots \dots X_{MN})$.



26. Ответ: $E(W) = \frac{1}{3^{MN}}$, $E_{M,2}(N) = N \log_2 3$.

Указание. Используйте упрощенную модель из решения Задачи 24. Покажите, что X_1, \dots, X_{MN} независимы, следовательно $E(X_1 \cdots \cdots X_{MN}) = E(X_1) \cdots \cdots E(X_{MN})$. (Не забудьте определить независимость для более чем 2 случайных величин.) Покажите, что каждое $E(X_k)$ не зависит от размера решетки, следовательно $E(X_k) = 1/3$ по Задаче 21.

27. Ответ: бесконечное. Это следует из Задачи 26.

28. Для 4-мерной решетки, при $c = 1 + \sqrt{2}$ должен быть виден сильный фазовый переход [C, (16.37) и карт. 9.1].

30. а)–с) Ответ: 4π . Указание: вычислите сумму углов граней двумя способами.

32. Ответ: нет.

33. а) Каждой перестановке $f: \{\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OB}\} \rightarrow \{\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OB}\}$ сопоставлена 2×2 матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где действительные числа a, b, c, d даны из равенств

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{OR}) &= a \overrightarrow{OR} + c \overrightarrow{OG}; \\ f(\overrightarrow{OG}) &= b \overrightarrow{OR} + d \overrightarrow{OG}. \end{aligned}$$

Тогда *математическое ожидание* случайной перестановки определено буквально той же формулой, что и математическое ожидание случайной величины, но сложение и умножение понимаются как операции над матрицами. Обратите внимание, что такое ожидание есть 2×2 матрица, а не перестановка.

б) Ответ: $E(W'') = 2 \left(\frac{7}{16}\right)^{MN}$. Указание. Рассуждайте аналогично решению Задачи 26. Для начала вычислите $E(U(ABCD)) = \begin{pmatrix} 7/16 & 0 \\ 0 & 7/16 \end{pmatrix}$. Затем покажите, что случайные перестановки $U(ABCD)$ независимы для различных 1×1 квадратов $ABCD$, следовательно, $E(X_1 \circ \cdots \circ X_{MN}) = E(X_1) \cdots E(X_{MN}) = \begin{pmatrix} (7/16)^{MN} & 0 \\ 0 & (7/16)^{MN} \end{pmatrix}$. Наконец, определите след 2×2 матрицы как $\text{Tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := a+d$ и покажите, что $E(\text{Tr}(W'')) = \text{Tr}(E(W''))$.

35. Ответ: $E(W'') = \left(\frac{17}{23}\right)^{MN} + 2 \cdot \left(\frac{14}{23}\right)^{MN}$. Указание. Рассуждайте аналогично решению задачи 33.b.

36. Предответ: $E(W') \simeq \text{const}/c^{N^2}$.

Благодарности

Авторы благодарны А. Штерну и А. Смирнову за помощь в проверке работ школьников и С. Галкину, А. Канелю, А. Семенову, А. Скопенкову за ценные замечания.

Список литературы

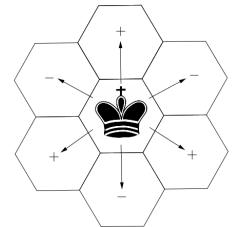
- [KZhP] Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В. Введение в теорию вероятностей. (Библиотечка «Квант»; вып. 135). М.: МЦНМО, 2015.
- [SSU] Скопенков М., Смыkalов В., Устинов А., Случайные блуждания и электрические цепи // Математические просвещение, 3-я серия, выпуск 16. М.: МЦНМО, 2012. С. 25-47.
Исправлено в: А. Юрьев, Случайные блуждания возвращаются // Математические просвещение, 3-я серия, выпуск 20. М.: МЦНМО, 2016. С. 243-246.
- [Shen] Шень А. Вероятность: примеры и задачи. М.: МЦНМО, 2008.
- [EMZ] Элементы математики в задачах: от кружков и олимпиад — к профессии. / Под общ. ред.: М. Б. Скопенков, А. Б. Скопенков, А. А. Заславский. М.: МЦНМО, 2017 (в печати).
- [C] M. Creutz, Quarks, Gluons and Lattices, Cambridge Univ. Press, 1983 - Science - 169 pp.
- [R] H. Rothe, Lattice Gauge Theories: An Introduction, World Scientific, 2005 - 350 p.

Quarks game

A. Balakin, Yu. Petrova, M. Skopenkov

1. The plane is divided into cells in the form of regular hexagons. A King can move to any neighbor cell, see the picture. Moves up, right-down and left-down will be called *positive* and the rest — *negative*. The King made several moves and returned to the original cell. What are possible values for the difference between the number of positive and negative moves?

This simple mathematical problem has fundamental physical consequence: *the charge of any free particle is a multiple of the electron charge*. Want to see how school mathematics helps to understand particle physics? Read on! Knowledge of physics is not required, we are going to give all the necessary information. Let us start with an informal introduction; mathematical definitions appear after Problem 9.



Elementary particles and where they live¹

Substance consists of atoms, atoms consist of nuclei and electrons, nuclei consist of protons and neutrons.

All that are *particles* of substance. Particles can be either *elementary* or *composed*, i.e., consisting of other particles. E.g., a proton is composed from two up-quarks and one down-quark, while the quarks are elementary; see the figure. For our purposes it is not important *what* are quarks; just imagine sticky balls glued together to form other particles.



If a particle is separated from any other particles (i.e., moves independently on them) in -proton-an experiment, then the particle is called *free*. E.g., normally a neutron is contained in a nucleus, but it can be made free in nuclear reactions. This collection of problems is about *confinement of quarks* (main problems are 11, 27, 33.b):

Quarks cannot be free.

What this actually means is absolutely paradoxical: quarks exist but cannot be observed in an experiment in principle. We are going to discuss both reasons and consequences of this (so far unproved) assertion².

Each particle has a *charge*. E.g., an electron has charge -1 (this is how the measurement units are chosen), and an up-quark has charge $+2/3$. The charge of a composed particle equals to the sum of charges of the contents. E.g., a proton has charge $+1$.

Each particle has an *antiparticle* having opposite charge. E.g., an up-antiquark has charge $-2/3$.

The list of just a few known quarks and free composed particles is given in the table.

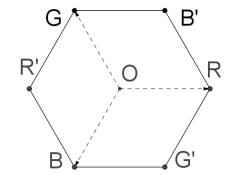
Particle				Antiparticle			
Name	Notation	Content	Charge	Name	Notation	Content	Charge
Elementary particles: quarks (to the left) and antiquarks (to the right)							
up-quark	u	-	$+2/3$	up-antiquark	\bar{u}	-	$-2/3$
down-quark	d	-	$-1/3$	down-antiquark	\bar{d}	-	$+1/3$
Composite particles from a quark and an antiquark							
pion	π^+	$u\bar{d}$	$+1$	pion	π^-	$\bar{u}d$	-1
Composite particles from 3 quarks (to the left) or 3 antiquarks (to the right)							
proton	p	uud	$+1$	antiproton	\bar{p}	$\bar{u}\bar{u}\bar{d}$?
neutron	n	?	0	antineutron	\bar{n}	?	?

2. Complete the entries with a questionmark in the table.

¹This is only an exposition of a commonly accepted theory and does *not* pretend to be the final truth about particles.

²Actually the proof of a related assertion is one of the Millennium problems, the essence of which we shall also explain.

Each particle has also a *color* (it has nothing to do with light). It is not a number, but a vector in the plane. Hereafter we assume that $RB'GR'BG'$ is a regular hexagon with the center at the origin O . A quark can have one of the colors \overrightarrow{OR} , \overrightarrow{OG} , \overrightarrow{OB} ("red", "green", "blue"). Thus there actually 3 distinct up-quarks and 3 down-quarks.



The color of an antiparticle is opposite to the color of a particle. E.g., the antiparticle of a red up-quark has color $\overrightarrow{OR'}$ ("cyan"). The color of a composed particle is the vector sum of colors of the components. E.g., a proton consisting of a red up-quark, a green up-quark, and a blue down-quark, has vanishing color. Actually the reason for confinement of quarks is *confinement of color*:

Particles with nonvanishing color cannot be free.

As a warm-up, let us discuss basic consequences of confinement of color.

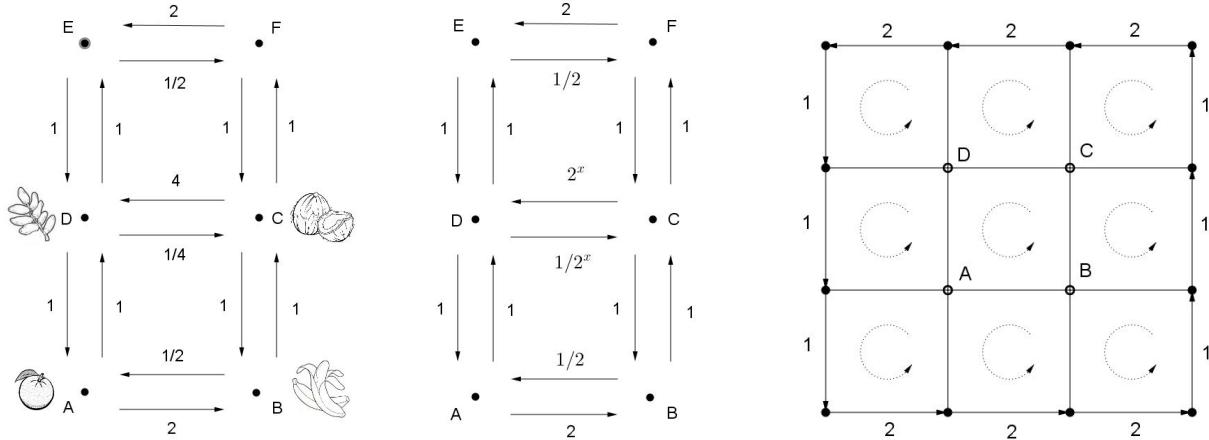
3. a) For which q and p satisfying $p + q \leq 3$, there is a particle with vanishing color consisting of q quarks and p antiquarks³?

b) Prove that each particle with vanishing color consisting of quarks and antiquarks from the above table has integer charge.

Now start the way to understanding the reasons of confinement of color. We shall need a theory describing interaction of quarks. All known interactions except gravitation are described by *gauge theory*. This concerns not only interaction of quarks but also everyday-observed effects like magnetic interaction of conductors with currents. As we shall see now, the *idea* of gauge theory is very simple.

Toy model of gauge theory

Several cities are connected by roads in the shape of an $M \times N$ grid; see the figure. Each city has its own type of goods (in unlimited quantity). E.g., city A has apples and city B has bananas. For two neighboring cities A and B an exchange rate $U(AB) > 0$ is fixed, e.g., 2 bananas for an apple. The rate is symmetric, i.e., $U(BA) = U(AB)^{-1}$: one gets back an apple for 2 bananas.



A cunning citizen can travel and exchange along a 1×1 square $ABCD$ to multiply his initial amount of goods by a factor of $U(AB)U(BC)U(CD)U(DA)$. E.g., in the figure to the left the factor is $2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = 8$. Denote $U(ABCD) := U(AB)U(BC)U(CD)U(DA)$.

We shall see that the *logarithms* of these factors are more convenient quantities. All we need to know about logarithms is the following definition. If $y = 2^x$ for some real numbers x and y , then x is called the *logarithm* of y and is denoted by $x = \log_2 y$. E.g., $\log_2 2 = 1$, $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, $\log_2 1 = 0$, $\log_2 \frac{1}{2} = -1$.

In particular, a trip along the square $ABCD$ gives profit in one of the directions, if $\log_2 U(ABCD) \neq 0$. The *total speculation profit* is measured by the sum $S[U]$ of the values $\log_2^2 U(ABCD)$ over all 1×1 squares $ABCD$ (say, bypassed counterclockwise). E.g., in the figure to the left

$$S[U] = \log_2^2 U(ABCD) + \log_2^2 U(DCFE) = (\log_2 8)^2 + (\log_2 \frac{1}{2})^2 = 10.$$

You are the king, who can set exchange rates except those on the boundary of the grid. You set them to minimize the quantity $S[U]$. The resulting rates are called *optimal*.

4. Clean up the kingdom in the left figure, i.e., find the number x for which the total speculation profit in the middle figure is minimal.

³There can be more quarks: particles from 4 quarks or antiquarks were discovered in 2014, from 5 — in 2015.

Optimal exchange rates can be found approximately on the computer, scrolling with a small step all possible rates from a certain interval and comparing the corresponding values of $S[U]$.

5. Do it for the kingdoms in the figures in the middle and to the right. Is there any faster algorithm?

Notice that the change of variables $x(AB) := \log_2 U(AB)$ simplifies the expression for the profit a lot:

$$S[x] := \sum_{\substack{\text{all } 1 \times 1 \text{ squares } ABCD \\ \text{bypassed counterclockwise}}} (x(AB) + x(BC) + x(CD) + x(DA))^2.$$

For each 1×1 square $ABCD$ denote $x(ABCD) := x(AB) + x(BC) + x(CD) + x(DA)$. E.g., in the figure to the left, $x(ABCD) = 3$. Denote by W the factor multiplying the initial amount of goods for a counterclockwise travel around the whole boundary. E.g., in the figure to the left, $W = 4$.

6. Assume that the fixed rates at the boundary are as in the figure, i.e.,

$$U(AB) = \begin{cases} 2, & \text{if } AB \text{ is on the southern or northern border of the grid} \\ & \text{and is directed counterclockwise along the boundary;} \\ 1, & \text{if } AB \text{ is on the eastern or western border of the grid.} \end{cases}$$

Clean up the kingdom for the following particular grid sizes, i.e., complete the table⁴:

Grid	1×2	1×3	$1 \times N$	2×2
The value W	4			
The minimal value for $S[U]$				
Optimal rates $U(AB)$ for all roads AB				
Values $x(AB)$ for all roads AB				
Values $x(ABCD)$ for all 1×1 squares				

7. a) For which values of the boundary rates in an $M \times N$ grid one can achieve $S[U] = 0$?

b)* Assume that $S[U] = 0$. Can the citizen get a profit by moving along a closed path?

c) For which values of M and N the optimal rates are uniquely determined by the boundary rates?

d) How M , N , W and the minimal speculation profit are related?

e) Which of the grids — 8×8 or 7×9 — has smaller speculation profit, if W is the same?

8. Now we are allowed to change boundary rates. What is the minimal possible value of the expression

$$\frac{1}{2}S[U] - j \log_2 W$$

that we can obtain for a fixed real number j on the $M \times N$ grid?

Physical interpretation

Our toy model allows to describe roughly magnetic interaction of conductors with currents.

Let j be a real number. The grid boundary is a frame with a current strength j . Current in the frame creates a magnetic field. The value $x(ABCD)$ at a 1×1 square $ABCD$ represents the *magnetic flux* through the square, the sum $S[x]$ represents the *magnetic field energy*, and $\frac{1}{2}S[U] - j \log_2 W$ represents the energy of the whole system. Each system tries to minimize its energy. Thus the values $x(AB)$ are set to minimize the expression $\frac{1}{2}S[U] - j \log_2 W$. Beware: the model is very rough!

If the positions of the conductors are not fixed, i.e., the grid size is not fixed, then the system tries to move the conductors to decrease the energy. This means attraction or repulsion of conductors. Movement of conductors is understood as change of the number of cells, but not the sizes of the cells themselves.

9. a) Does a frame with current tend to reduce or increase its area?

b) Do parallel conductors with opposite currents magnetically attract or repulse?

c)* And if the current directions are the same?

Hint. Close the conductors far away to obtain a frame (for b)) or two frames (for c)).

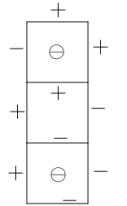
⁴The team with the maximal number of completed entries at the semifinal will receive the same number of apples.

The quark interaction is described by *quantum* gauge theory. The main difference is that the exchange rates are *random* and not necessarily positive. For simplicity let us assume that the exchange rates take only two values $+1$ and -1 , shortly: “ $+$ ” and “ $-$ ”. Bypassing the boundary of the square changes the amount of goods, if there is an odd number of signs “ $-$ ” on its boundary.

Now it is time for precise mathematical definitions and theorems. First we state the modified model, then a pair of problems, and only after that introduce all the required definitions little by little.

Toy model for quantum gauge theory

To each road AB of the $1 \times N$ grid in the figure, randomly assign a sign “ $+$ ” or “ $-$ ” (so that all possible assignments of signs have equal probability; see the definition of *probability* before Problem 12). For each assignment U let us denote by $S'[U]$ the number of squares 1×1 having an odd number of signs “ $-$ ” on the sides. E.g., $S'[U] = 2$ in the figure. The expectation of the random variable $S'[U]$ is called the *energy* $E(N)$ of *electromagnetic interaction between a quark and an antiquark at distance N* . (See the definitions of a *random variable* and its *expectation* before and after Problem 17.)



Remark. The latter term is unsplittable; the words ‘quark’, ‘antiquark’, ‘electromagnetic interaction’ have no separate formal meaning. Beware: the model is very rough!

- 10.** Find the energy $E(N)$ for the grids: 1×1 ; 1×2 ; 1×3 ; $1 \times N$;
a) approximately using a computer simulation; b) exactly.

- 11.** (Quarks confinement in 1-dimensional space.) Does there exist a number E_0 such that $E(N) \leq E_0$ for all N ? (The same informally: is the amount of energy required to move a quark and an antiquark far away from each other finite or infinite?)

Classical probability⁵

It is useful to start learning probability theory on the “physical” level of rigor as in books [Shen], [KZhP]. Here we give “mathematical” definitions from the beginning. However many problems are stated using “practical” language and we show how to formalize some of them. The formalization of the remaining problems is left to the reader. Such formalization is the first step of the solution, on which the answer can depend.

Consider an experiment that has m equally probable outcomes, such as rolling a dice, drawing a card out of a deck, etc. If the event in question (for example, the fall of the six, drawing an Ace, etc.) occurs in a outcomes, then the *probability* of the event is said to be $p = a/m$.

This explanation is useful for beginners, but it is not a mathematically rigorous definition. Here is the mathematical definition.

The *probability* of a subset A of a finite set M is the following number

$$P(A) = P_M(A) := |A|/|M|.$$

Hereafter, unless otherwise stated, the set M is fixed and omitted from the notation. Then the probability is defined for all its subsets. They are often called *events*.

- 12.** From the deck of 52 cards one card is drawn. Find the probability that it is
(a) of black suit; (b) an Ace; (c) with a picture;
(d) Queen of spades; (e) a King or a diamond.

E.g. in the problem 12(c) the set M (“the set of all possible events”) coincides with the set of all cards in the deck, the set A (“the set of events that we consider”) is the set of all cards with pictures. This is the way to formalize this problem (and many other probabilistic problems).

- 13.** A coin is tossed 3 times. Find the probability of getting
(a) three Heads; (b) two Heads and one Tail.

⁵This section is taken from [EMZ] with small changes.

To solve some of the above-stated problems, the following rules are useful.

- 14.** (a) *Addition rule.* Let $A \cap B = \emptyset$. Express $P(A \cup B)$ in terms of $P(A)$ and $P(B)$.
 (b) Express the probability $P(A \cup B)$ in terms of $P(A)$, $P(B)$ and $P(A \cap B)$.
 (c) *Multiplication Rule.* Express the probability $P_{M \times N}(A \times B)$ in terms of $P_M(A)$ and $P_N(B)$.
- 15.** a) Signs “+” and “−” are randomly assigned to the 4 sides of a square. Find the probability that the number of signs “−” is odd.
 b) What is the probability that for the 1×2 grid we have $S'[U] = 0$? $S'[U] = 1$? $S'[U] = 2$?
 The following problem leads to the notions of a *random variable* and the *expectation*.
- 16.** a) I suggest you the following game. You pay 2 candies, then a die is rolled, and you get as many candies as there occur points on the die. Is the game profitable for you?
 b) Now the rules are the same except that you pay 100 candies, when 1 point occurs. (You have enough candies to pay.) Is the game profitable for you?
 c) A bank promises you a reliable profit absolutely for free. You put your 8 candies into the bank, then a die is rolled. If 2, 3, or 4 points occur, then you get back your contribution of 8 candies plus 1 candy in addition. If 5 or 6 points occur (“market growth”), then you get even plus 2 candies in addition to your contribution. But if 1 point occurs (“crisis”), then you lose the whole your contribution (“We are sorry but we cannot do anything for you — that’s crisis.”) Is the game profitable for you?
- A real-valued function X defined on the set M is called a *random variable*. The set of pairs (x_i, p_i) , $i = 1, 2, \dots$, where $\{x_1, x_2, \dots\}$ is the set of all possible values of the random variable X , and $p_i = P(\{m \in M : X(m) = x_i\})$, $i = 1, 2, \dots$, are the corresponding probabilities, is called the *distribution* of the random variable X . Further, we denote by $X = x_i$ the event $\{m \in M : X(m) = x_i\}$.
- 17.** Find the distribution of the random variable $S'[U]$ for the grid 1×2 .

The *mathematical expectation* (or *mean-value*) of the random variable X is the sum

$$E(X) := \sum x_i p_i = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \dots$$

- 18.** Find the expectation of the random variable $S'[U]$ for the grid 1×2 .

Write +1 instead of “+” and −1 instead of “−”. Let the random variable X_k be the product of all numbers on the sides of the k -th square from the top in the $1 \times N$ grid and the random variable W' be the product of all numbers on the boundary of the grid. (Similarly we define W' for the $M \times N$ grid.)

- 19.** Express $S'[U]$ and W' in terms of X_1 and X_2 for the grid 1×2 . Find $E(X_1)$, $E(X_2)$ and $E(W')$.
- 20.** (a) Prove that the expectation of the random variable X defined on M is equal to $\sum_{m \in M} X(m)/|M|$.
 (b) Prove that if $E(X) \leq x$, then there exists $m \in M : X(m) \leq x$.
 (c) A random variable X takes the same value μ for all $m \in M$. Find $E(X)$.
 (d) Let a, b be real numbers and X, Y be random variables. Is the following equality always true $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$?
 (e) And what about $E(XY) = E(X)E(Y)$?

Now let us proceed to a more accurate model of quark interaction (further we work in this model).

Solid model for quantum gauge theory

Fix a number $c > 1$ called the *interaction constant*. To each road AB of the $M \times N$ grid, randomly assign a sign “+” or “−” so that an assignment U has the probability

$$P[U] = \frac{c^{-S'[U]}}{\sum_{\text{all the assignments } V} c^{-S'[V]}}.$$

The *energy of the electromagnetic interaction between a quark and an antiquark at distance N* is

$$E_{M,c}(N) = -\frac{1}{M} \log_2 E(W').$$

Our aim is to find it. (Here $E(W')$ is the expectation of the random variable W' , defined before the problem 18. We do not know any easy explanation of the formula.)

Statistical probability

The following more general definition of the probability is used in this model. Consider a set M and for each $m \in M$ assign a non-negative number $P(m)$, so that the sum of all such numbers is equal to 1. Then the *probability* of the event A is the sum of all $P(m)$ over all $m \in A$.

- 21.** a) Find the probability of each assignment of signs for the 1×1 grid. Compute $E(W')$ and $E_{1,2}(1)$.
b) The same, if one considers only the assignments such that all roads except the top one have sign “+”.
- 22.** How the probability of an assignment changes, if the signs of all roads coming from a city are changed?

The following definition generalizes the multiplication rule from 14 (c). First, assume that the probabilities $P(m)$ are the same for all elements $m \in M$. Two subsets (or events) A and $B \neq \emptyset$ of the finite set M are called *independent*, if the probability of the set $A \cap B$ in B is equal to the probability of the set A in M . Let us give a symmetric reformulation, which works for $B = \emptyset$ and for more general definitions of the probability, when not all probabilities $P(m)$ are equal. The subsets A and B of the finite set M are called *independent*, if

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

The main example of the independent subsets is the following. In the set of all cells of the chessboard the subset of cells in first three rows and the subset of cells in last four columns are independent.

- 23.** Are the following subsets independent, if all elements of M have equal probabilities?
(a) The subsets $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ and $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\} = M$.
(b) The subsets $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ and $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = M$.

Random variables X and Y are called *independent*, if the events $X = x_i$ and $Y = y_j$ are independent for any x_i, y_j , i. e.

$$P(\{m \in M : X(m) = x_i \text{ and } Y(m) = y_j\}) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

- 24.** Are the random variables X_1 and X_2 independent in the 1×2 grid (see the definition before Pr. 19)?
- 25.** Prove that if the random variables X and Y are independent, then the mathematical expectation of their product is the product of their mathematical expectations: $E(XY) = E(X)E(Y)$.
- 26.** (Wilson's area law) Let $c = 2$, M and N are arbitrary. Compute $E(W')$ and the energy $E_{M,2}(N)$. For which M_1, N_1, M_2, N_2 the $M_1 \times N_1$ grid has smaller $E(W')$ than the $M_2 \times N_2$ grid?
- 27.** (Quarks confinement in 2-dimensional space.) Is the amount of energy required to move a quark and an antiquark far away from each other finite or infinite in 2-dimentional space?
- 28.** Investigate 3-dimensional grid $N \times N \times N$ and 4-dimensional grid $N \times N \times N \times N$ experimentally by a numeric simulation for various $c \in [2; 3]$. For them, $S'[U]$ is still defined as the number of 1×1 squares with an odd number of signs “-”, and W' is defined as the product of signs along the boundary of one of the 2-dimensional faces. Is the amount of energy required to move a quark and an antiquark far away from each other in 3- and 4-dimentional space finite or infinite?
- 29.** Prove that: a) the ratio of the energies $E_{M,c}(N)/E(N)$ does not depend on N
b) for $c \rightarrow \infty$ the energy $E_{M,c}(N)$ tends to the minimal possible value of $S'[U]$, i.e., to 0.

Geometrical view on gauge theory

Let us look at our model from the new side (this text is informal and is not used further.)

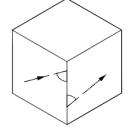
The charges of the particles can be positive or negative. It is a convention which one to consider positive: is just a choice of direction on the real axis.

And what happens if the choice of the “axis direction” at each point of the space is done independently? For example, in each city of the $M \times N$ grid, choose the direction in its own way. Then for each road you need to specify how the direction of the axis changes as you move from the city to its neighbor. One can imagine a situation, when bypassing a 1×1 square, the direction of the axis is changed to the opposite one (as the direction of the perpendicular to the Möbius strip when it is bypassed.) Geometrical view on gauge theory is that such “defective” squares *are* the magnetic field, and they carry energy. Therefore we computed energy through the number of “defective” squares in our models.

Of course, this construction can not be understood literally: when bypassing, a charge sign, of course, is not changed. The “axis direction” is something different from the charge sign.

30. (Gauss–Bonnet theorem) Consider: a) a cube; b) a regular tetrahedron; c)* a convex polytope. Two vectors lying in adjacent faces are called *parallel*, if they form equal “vertical” angles with the common side of the faces (i.e., they become parallel and looking in the same direction, if one “unfolds” the two faces around the common side; see the figure). Let f_1, f_2, \dots, f_k be all faces around a vertex v in the natural order. Start with an arbitrary vector $\vec{e}_1 \subset f_1$ and take a vector $\vec{e}_2 \subset f_2$ parallel to \vec{e}_1 , then a vector $\vec{e}_3 \subset f_3$ parallel to \vec{e}_2, \dots , and, finally, a vector $\vec{e}_{k+1} \subset f_1$ parallel to \vec{e}_k . Denote by ϕ_v the oriented angle between \vec{e}_{k+1} and \vec{e}_1 . Find the sum of the angles ϕ_v over all vertices v .

Quark color is not a number, but a vector for which three directions are possible. This is why *permutations* of three colors are put on the roads in the theory of strong (i.e., color) interaction.



Permutations

A *permutation* of a set is an arrangement of the elements of the set in some order. More strictly, a *permutation* of the set is a one-to-one correspondence of this set onto itself (i.e. a bijection). The permutation of the set $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, that to an element a_k assigns the element $f(a_k)$, is written as follows

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_n) \end{pmatrix};$$

usually $a_k = k$ for all $k = 1, \dots, n$. The *composition* of permutations f and g is the permutation $f \circ g$ defined by the formula $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.

31. Find the compositions: (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

32. Is it true that $x \circ y = y \circ x$ for any pair of permutations x and y ?

Toy model for non-Abelian gauge theory

Fix a number $c > 1$. Denote by S_3 a set of all permutations of the set $\{1, 2, 3\}$. A *fixed point* of the permutation f is such $x \in \{1, 2, 3\}$ that $f(x) = x$. The *trace* $\text{Tr}(f)$ of a permutation f is the number of its fixed points minus 1. For example, $\text{Tr}(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}) = 0$.

To each road AB of the $M \times N$ grid randomly assign a permutation $U(AB) \in S_3$ so that $U(AB) \circ U(BA)$ is the identical permutation, and the probability of an assignment U is equal to

$$P[U] := \frac{c^{-S''[U]}}{\sum_{\substack{\text{all the assignments } V}} c^{-S''[V]}},$$

where

$$S''[U] := \sum_{\substack{\text{all } 1 \times 1 \text{ squares } ABCD \\ \text{bypassed counterclockwise}}} (2 - \text{Tr}(U(AB) \circ U(BC) \circ U(CD) \circ U(DA))).$$

(I.e. the fewer elements remain fixed when bypassing the square, the greater contribution it makes to $S''[U]$.) Let W'' be the trace of the product of all permutations on the boundary sides bypassed counterclockwise and starting from the lower-left corner. The value $-\frac{1}{M} \log_2 E(W'')$ is called the *energy of strong interaction of a quark and an antiquark at distance N* .

33. * a) Invent the notion of an *expectation* of a random permutation from S_3 having as many properties of the expectation of a random variable as possible.

Hint. We lack the operation of *adding* permutations. It appears by itself, if we recall that 1, 2, 3 are quark colors, colors are vectors, and permutation is a mapping.

b) Compute the expectation of W'' for $c = 2$. Prove that there are $a, b, B \in \mathbb{R}$ such that for all M, N we have $ba^{MN} \leq E(W'') \leq Ba^{MN}$.

34. (The “essence” of the Millennium problem) Prove the same inequality for the 4-dimensional $N \times N \times N \times N$ grid and a rectangle $M \times N$ on one of its 2-dimensional faces.

Additional problems

These hard problems are given to those who have solved most of the problems above.

35. Solve the analogue of Problem 33.b, if the definition of permutation trace is changed as follows:

$$\text{Tr}'(x) = \begin{cases} +3, & \text{if } x \text{ is identical, i.e. } x = (\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}); \\ 0, & \text{if } x \text{ is a cycle of length 3, i.e. } x = (\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}) \text{ or } x = (\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}); \\ -1, & \text{if } x \text{ is a transposition, i.e. } x = (\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}), x = (\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}), \text{ or } x = (\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}), \end{cases}$$

and the expression $2 - \text{Tr}(\dots)$ is replaced by $3 - \text{Tr}'(\dots)$ in the formula for $S''[U]$.

36. (Strong coupling expansion) Consider the solid model on a 3-dimensional grid $N \times N \times N$; see Problem 28. Find an asymptotic form for $E(W')$ as $c \rightarrow \infty$, i.e., a function $f_N(c)$ such that $\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{E(W')}{f_N(c)} = 1$ for fixed N .

Underwater riffs

We hope that at least some of our readers have become interested in elementary particles and want to learn more about them. As an epilogue, let us give a few warnings to such readers.

In popular science, theory of elementary particles is usually oversimplified. This sequence of problems is not an exception. The toy models introduced here are very rough and should be considered with a grain of salt. Simplicity is their only advantage; if taken too seriously, the models could even give a wrong physical intuition. Only the model called “solid model for quantum gauge theory” is a respectful one truly considered in physical literature. Real understanding of particles theory requires excellent knowledge of both physics and mathematics.

The problem called “the essence of the Millennium Problem” is *not* equivalent to the Millennium Problem in Yang–Mills theory at all. It is *not* even a particular case. It is rather the most essential — in our very subjective opinion — part of the problem freed from technical details. Although we came to the problem during the discussion of quarks confinement, it is closer to another phenomenon: *short range of nuclear forces*.

We should also remark that nowadays there are almost no mathematical results in lattice gauge theory; what we have is usually just a numeric simulation. Finally, there are “*theories of New Physics*” which are developed without any objective truth criterion: such theories are supported by neither experimental nor mathematical proofs (and some of them have experimental disproofs).

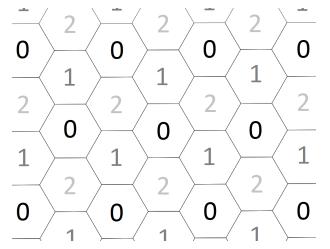
Hints, solutions, answers

1. Answer: any integer multiple of 3.

Hint. Let us write the remainders 0, 1 and 2 (when dividing by three) into cells as in the figure below. Note that a positive move from any cell adds 1 to the remainder on which the king stands, and a negative move subtracts 1.

2. Answer:

proton	p	uud	$+1$	antiproton	\bar{p}	$\bar{u}\bar{u}\bar{d}$	-1
neutron	n	udd	0	antineutron	\bar{n}	$\bar{u}\bar{d}\bar{d}$	0



3. a) Answer: $(q, p) = (1, 1), (3, 0)$ or $(0, 3)$.

Hint. This problem is solved by a brute-force exhaustion, let us give an example of reasoning for one case. Why q and p can not be equal to 2 and 0 respectively: if the sum of two vectors is 0, then they are opposite, but two quarks can not have opposite colors.

b) Let $p \leq q$. Note that the sum of the charges of an arbitrary quark and an antiquark is an integer. Hence, we can consider only the sum of the charges of $q - p$ quarks. Also note that the sum of the charges of any three quarks is an integer. It follows from Problem 1 that for a particle with zero color $q - p$ is a multiple of 3, that is, $q - p$ quarks can be divided into triples.

4. Answer: $x = 0$. *Hint:*

$$S[U] = \log_2(2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2^x} \cdot 1) + \log_2(2^x \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1) = (1 - x)^2 + (1 + x)^2 = 2 + 2x^2.$$

The minimum is reached at $x = 0$.

6. Answer. In the table below, in the third and fourth lines in the first three columns there are values for all non-boundary roads (from top down). It is assumed that all these roads are directed from left to right. In the same lines in the last column it is considered that all non-boundary roads are directed from the center to the borders, and by x we denote an arbitrary real number (that is, there is a solution for each x). If for all roads (or squares) the value is the same, then only one number is placed in the corresponding cell.

Grid	1×2	1×3	$1 \times N$	2×2
The value W	4	4	4	16
Minimal $S[U]$	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{N}$	4
Optimal rates	1	$2^{-1/3}, 2^{1/3}$	$2^{-1+\frac{2}{N}}, 2^{-1+\frac{4}{N}}, \dots, 2^{-1+\frac{2N-2}{N}}$	2^x
Values $x(AB)$	0	$-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$-1 + \frac{2}{N}, -1 + \frac{4}{N}, \dots, -1 + \frac{2N-2}{N}$	x
Values $x(ABCD)$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{N}$	1

Hint. In the solution of this problem, as well as some subsequent ones, it is very useful *the inequality of arithmetic and quadratic means (AM-QM inequality)*, which is formulated as follows:

for all real numbers x_1, x_2, \dots, x_n the inequality holds:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

and equality is achieved if and only if $x_1 = x_2 = \dots = x_n \geq 0$.

For the $1 \times N$ grid one should take the values of x_1, x_2, \dots, x_n equal to $x(ABCD)$ for all squares $ABCD$ (enumerated from top down).

For the 2×2 grid denote by $2^x, 2^y, 2^z$ and 2^t the exchange rates for non-boundary roads directed from the center to the boundary and going counterclockwise. Then

$$\begin{aligned} S[U] &= (x+1-y)^2 + (-z+y+1)^2 + (1-t+z)^2 + (1-x+t)^2 = \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 4 - 2xy - 2yz - 2zt - 2tx = \\ &= (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-t)^2 + (t-x)^2 + 4 \geq 4. \end{aligned}$$

Remark. There are other solutions, some of them rely on the *existence* of optimal rates. In this case, the latter must be proved, and this is rather difficult, see [SSU, The principle of achieving the smallest value on p.30].

7a. (E. Pavlov) Answer: $S[U] = 0$ can be achieved if and only if $W = 1$.

Indeed, $S[U] = 0$ if and only if for each 1×1 square $ABCD$ we have $U(ABCD) = 1$. Consider the product

$$\prod = \prod_{\substack{\text{all } 1 \times 1 \\ \text{squares } ABCD}} U(ABCD).$$

In this product each non-boundary road appears twice, once as $U(AB)$ and once as $U(BA)$, cancelling each other. The boundary roads appear once with a counterclockwise orientation. This means that $\prod = W$. Since every term in \prod is just 1 it follows that $W = \prod = 1$ is a necessary condition.

Now assume that $W = 1$. Let us show that there exist rates $U(AB)$ such that $S[U] = 0$. First, we denote by $a_0, a_1, \dots, a_{2M+2N-1}$ the vertices on the boundary, starting from the bottom left vertex. Next, we introduce the function $P(A)$ on the vertices of the grid by:

$$P(A) = \begin{cases} 1, & \text{if } A \text{ is not on the boundary or the bottom left vertex.} \\ \prod_{k=0}^{n-1} U(a_k a_{k-1}), & \text{if } A \text{ is the vertex } a_n \text{ on the boundary.} \end{cases}$$

Finally, we extend $U(AB)$ to the non-boundary roads by the formula $U(AB) = \frac{P(B)}{P(A)}$. For each square $ABCD$, we have

$$\log_2^2(U(AB)U(BC)U(CD)U(DA)) = \log_2^2\left(\frac{P(B)}{P(A)}\frac{P(C)}{P(B)}\frac{P(D)}{P(C)}\frac{P(A)}{P(D)}\right) = \log_2^2(1) = 0.$$

This means that $S[U] = 0$, q.e.d.

7b*. It suffices to construct a function $P(A)$ on the set of cities such that $U(AB) = \frac{P(B)}{P(A)}$ for each road AB . For a city A , set $P(A)$ to be the product of the rates for the Γ -shaped route starting from the bottom-left city and ending at A . Then the condition $U(ABCD) = 1$ for each 1×1 square $ABCD$ implies the condition $U(AB) = \frac{P(B)}{P(A)}$.

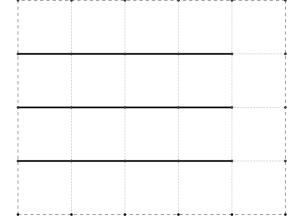
7c. For $M, N > 1$ the rates are not unique. For an interior city, one can change the units of measurements, e.g., exchange dozens of apples instead of single ones. Such *gauge transformation* multiplies the rates for all the roads starting from the city by the same value but preserves $S[U]$.

7d. Answer: $2\sqrt{M \cdot N \cdot S_{min}} = W$, where S_{min} is the minimal value of $S[U]$.

Hint. By AM-QM inequality we have:

$$S[U] = \sum_{\substack{\text{all } 1 \times 1 \\ \text{squares } ABCD}} x(ABCD)^2 \geq \frac{1}{MN} \left(\sum_{\substack{\text{all } 1 \times 1 \\ \text{squares } ABCD}} x(ABCD) \right)^2 = \frac{\log_2 W}{MN}$$

It remains to prove that it is always possible to establish such exchange rates in the kingdom so that equality is achieved, that is, the values of $x(ABCD)$ are equal to $\frac{\log_2 W}{MN}$ for all 1×1 squares. For a rectangle $1 \times N$ one can successively determine the rates on the undefined roads, bypassing them from the top down. These rates are uniquely determined, and for the last square $x(ABCD)$ is equal to $\frac{\log_2 W}{MN}$, because the sum of these quantities is fixed for all squares. For the rectangle $M \times N$, one can establish an exchange rate equal to 1 on the roads drawn in bold lines (see the figure). And then establish the rates on the remaining roads as written above.



7e. Answer: 8×8 . This follows from the formula in the problem 7d.

8. Answer: $-MNj^2/2$.

Hint. Denote $w = \log_2 W$. For fixed w , the minimum of $S[U]$ equals $\frac{w^2}{MN}$ by Problem 7.d. It remains to find the minimum of the quadratic polynomial $\frac{w^2}{2MN} - jw$.

9a. Answer: it tends to increase the area.

The first step in solving this problem (and many others) is *mathematical formalization*. Problem a) is formalized as follows: *Consider the minimal value of $\frac{1}{2}S[x] - j \log_2 W$ on the $M \times N$ grid as a function of MN with fixed j . Is this function increasing or decreasing?* After such formalization, the solution follows from Problem 8.

The work of any electric motor and generator is based on this fact.

9b. Answer: opposite currents repulse.

Mathematical formalization: *consider the minimal value of $\frac{1}{2}S[x] - j \log_2 W$ on the $M \times N$ grid as a function of N with fixed M and j . Is this function increasing or decreasing?*

9c*. Answer: currents with the same directions attract.

Mathematical formalization: *consider the minimal value of $\frac{1}{2}S[x] - j \log_2 W$ on the $M \times (L-N)$ grid as a function of N with fixed L, M , and j . Is this function increasing or decreasing?*

10b. Answer: $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{N}{2}$.

Take an arbitrary square of the $1 \times N$ grid and consider a random variable equal to 0 if there is an even number of signs “-” on its sides, and 1, if odd. By a not very long brute-force search it is easy to check that 0 and 1 are equally probable, hence, the mathematical expectation of this variable is $\frac{1}{2}$. Note that the value $S'[U]$ is equal to the sum of such random variables over all 1×1 squares. Since mathematical expectation of sum is equal to sum of mathematical expectations, we obtain $E(N) = \frac{N}{2}$.

11. Answer: no.

Hint. In this model the energy $E(N) = \frac{N}{2}$ tends to infinity as $N \rightarrow \infty$.

12. Answers: a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{13}$; c) $\frac{3}{13}$; d) $\frac{1}{52}$; e) $\frac{15}{52}$.

13. Answers: a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{3}{8}$.

14a. Answer: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Let A and B be subsets of the set M . Since A and B do not intersect, $|A \cup B| = |A| + |B|$. Hence, by definition of probability we get

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|M|} = \frac{|A| + |B|}{|M|} = \frac{|A|}{|M|} + \frac{|B|}{|M|} = P(A) + P(B).$$

14b. Answer: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

14c. Answer: $P_{M \times N}(A \times B) = P_M(A)P_N(B)$.

15. Answers: a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

We give an example of the reasoning for b). We divide into pairs all the arrangements of signs in the following way: two arrangements are in the pair if and only if they differ *only* by the sign on the upper side. Note that replacing the sign on the upper side changes the parity of the number of “-” signs on the sides of the upper square. Hence, the number of arrangements with $S'[U] = 1$ equals to the number of all arrangements with values $S'[U] = 0$ and $S'[U] = 2$ taken together. That is a half of the total number of arrangements. Similarly, we divide

into pairs all the arrangements that give $S'[U] = 0$ and $S'[U] = 2$, and differ only in the sign on the central side. The same as above argument gives us that the number of assignments with $S'[U] = 0$ equals to the number of assignments with $S'[U] = 2$.

16. *Answers:* a) yes; b) no; c) no.

17. *Answers:* $\{(0, 1/4), (1, 1/2), (2, 1/4)\}$. This is actually Problem 15.

18. *Answer:* 1.

19. *Answer:* $S'[U] = (2 - X_1 - X_2)/2$, $W' = X_1 X_2$, $E(X_1) = E(X_2) = E(W') = 0$.

20. *Answers:* c) μ ; d) yes; e) no.

Counterexample to e): $E(X_1^2) = E(1) = 1 \neq 1/4 = E(X_1)E(X_1)$.

21. a) *Answer:* The probability of an assignment with an even number of signs “-” is $\frac{c}{8(c+1)}$, with an odd — $\frac{1}{8(c+1)}$; $E(W') = \frac{c-1}{c+1}$, $E_{1,2}(1) = \log_2 3$.

b) *Answer:* The probability of the assignment without signs “-” is $\frac{c}{c+1}$, with a sign “-” — $\frac{1}{c+1}$; $E(W')$ and $E_{1,2}(1)$ are the same as in a).

22. *Answer:* the probability does not change.

23. *Answers:* a) yes; b) no.

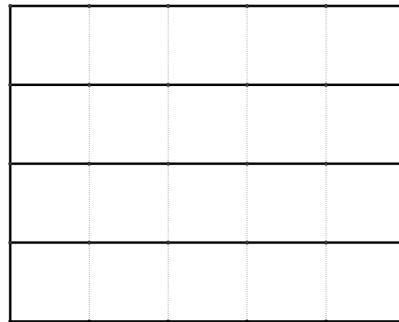
24. *Answer:* yes.

Hint. The following simplification of the solid model is very useful for this and many other problems. Changing the signs of all the roads coming from one particular city is called a *gauge transformation*. By Problem 22 this does not change the probability of an assignment. It changes neither the random variables X_k nor W' . For an arbitrary assignment, by a sequence of gauge transformations one can turn all the signs at the solid segments in the figure into pluses. Thus one may assume that only the assignments such that all the solid segments have signs “+” are allowed in the model. Next, the signs of all the other segments are uniquely determined by the values of X_k at all the squares. Thus our model is equivalent to the following *Bernoulli process*:

Let the probability of a collection of numbers $X_1, \dots, X_{MN} \in \{+1, -1\}$ be

$$P(X_1, \dots, X_{MN}) = \sum_{\text{all possible collections } (Y_1, \dots, Y_{MN})} c^{(MN - X_1 - \dots - X_{MN})/2}.$$

Then the energy $E_{M,c}(N) = -\frac{1}{M} \log_2 E(X_1 \dots X_{MN})$.



26. *Answer:* $E(W) = \frac{1}{3^{MN}}$, $E_{M,2}(N) = N \log_2 3$.

Hint. Use the simplified model from the solution of Problem 24. Show that X_1, \dots, X_{MN} are independent, hence $E(X_1 \dots X_{MN}) = E(X_1) \dots E(X_{MN})$. (Do not forget to define *independence* for more than 2 random variables.) Show that each $E(X_k)$ does not depend on the size of the grid, hence $E(X_k) = 1/3$ by Problem 21.

27. *Answer:* infinite. This follows from Problem 26.

28. For the 4D-grid, a strong phase transition at $c = 1 + \sqrt{2}$ should be visible [1, (16.37) and Figure 9.1].

30. a)-c) *Answer:* 4π . *Hint:* compute the sum of the angles of all the faces in two ways.

32. *Answer:* no.

33. a) To each permutation $f: \{\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OB}\} \rightarrow \{\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OB}\}$ assign the 2×2 matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, where the real numbers a, b, c, d are given by the equations

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{OR}) &= a \overrightarrow{OR} + c \overrightarrow{OG}; \\ f(\overrightarrow{OG}) &= b \overrightarrow{OR} + d \overrightarrow{OG}. \end{aligned}$$

Then the *expectation* of a random permutation is defined literally by the same formula as the expectation of a random variable, but addition and multiplication are understood as operations over matrices. Beware that such expectation is a 2×2 matrix rather than a permutation.

b) *Answer:* $E(W'') = 2 \left(\frac{7}{16}\right)^{MN}$. *Hint.* Argue analogously to the solution of Problem 26. First compute $E(U(ABCD)) = \begin{pmatrix} 7/16 & 0 \\ 0 & 7/16 \end{pmatrix}$. Then show that random permutations $U(ABCD)$ are independent for distinct 1×1 squares $ABCD$, hence $E(X_1 \circ \dots \circ X_{MN}) = E(X_1) \dots E(X_{MN}) = \begin{pmatrix} (7/16)^{MN} & 0 \\ 0 & (7/16)^{MN} \end{pmatrix}$. Finally, define the *trace* of a 2×2 matrix by $\text{Tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := a + d$ and show that $E(\text{Tr}(W'')) = \text{Tr}(E(W''))$.

35. *Answer:* $E(W'') = \left(\frac{17}{23}\right)^{MN} + 2 \cdot \left(\frac{14}{23}\right)^{MN}$. *Hint.* Argue analogously to the solution of Problem 33.b.

36. *Semi-answer:* $E(W') \simeq \text{const}/c^{N^2}$.

Acknowledgements

The authors are grateful to A. Stern and A. Smirnov for help with checking the works of the students, and to S. Galkin, A. Kanel, A. Semenov, A. Skopenkov for useful remarks.

References

- [1] M. Creutz, Quarks, Gluons and Lattices, Cambridge Univ. Press, 1983 - Science - 169 pp.
- [2] H. Rothe, Lattice Gauge Theories: An Introduction, World Scientific, 2005 - 350 p.
- [EMZ] Elements of mathematics in problems. Through circles and olympiads to profession. Ed. by A. Skopenkov, M. Skopenkov, and A. Zaslavskiy. Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2017, in print (in Russian)
- [KZhP] Kolmogorov A.N., Zhurbenko I.G., Prohorov A.V. Introduction to the Theory of Probability. (Bibliotekha "Kvant"; issue 135). M.: MCCME, 2015.
- [Shen] Shen A. Probability: examples and problems. M.: MCCME, 2008.
- [SSU] M. Skopenkov, V. Smykalov, A. Ustinov, Random walks and electric networks, Mat. Prosv. 3rd ser. 16 (2012), 25-47 (in Russian). Minor correction in: A. Yuryev, Random walks return, Mat. Prosv. 3rd ser. 20 (2016), 243-246.

Серии парных теннисных матчей и упаковки продуктов

Ю. В. Таранников, И. И. Богданов, К. Г. Куюмжиян,
М. С. Лобанов, А. С. Москалев, А. В. Саускан, С. И. Токарев.

ЧАСТЬ I УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧИ ДО ПРОМЕЖУТОЧНОГО ФИНИША.

Задача о серии парных теннисных матчей и ее вариации

Задача 1 В теннисном клубе n теннисистов хотят провести серию парных (двою на двою) матчей так, чтобы каждый из теннисистов имел своим противником каждого из остальных ровно в одном матче. На партнеров по паре никаких ограничений нет. При каких n возможна такая серия матчей?

Задача 1 допускает также формулировку на теоретико-множественном языке. Пусть A — множество теннисистов. Матчем назовем неупорядоченную совокупность $\{\{a_1, a_2\}\{a_3, a_4\}\}$ двух неупорядоченных непересекающихся пар элементов множества A . Здесь элементы a_1, a_2, a_3, a_4 принадлежат A и попарно различны. Расписанием назовем множество матчей. Тогда задача 1 изучает расписания, в которых для любых двух различных элементов a и b из A существует в точности один матч, в котором элементы a и b встречаются в разных парах.

Задача 2 В теннисном клубе n теннисистов хотят провести серию парных (двою на двою) матчей так, чтобы каждый из теннисистов имел своим противником каждого из остальных не более чем в одном матче. На партнеров по паре никаких ограничений нет. Какое наибольшее число матчей можно провести?

Задача 2 изучает расписания, в которых для любых двух различных элементов a и b из A существует не более одного матча, в котором элементы a и b встречаются в разных парах.

Для выписывания расписания серии матчей можно использовать алгебраическую запись:

$$(a_1 + a_2)(a_3 + a_4).$$

Это означает, что пара теннисистов a_1 и a_2 играет против пары теннисистов a_3 и a_4 .

Дадим определение циклического расписания. Пронумеруем игроков числами от 0 до $n - 1$. Расписание будем называть «циклическим», если для любого целого i вместе с каждым матчем $\{\{a, b\}\{c, d\}\}$ в расписании будет присутствовать также матч $\{\{a_i, b_i\}\{c_i, d_i\}\}$, где $a_i = a + i \pmod{n}$. Числа b_i, c_i, d_i определяются аналогично.

Для удобства формулировок в последующих задачах этого раздела назовем совершенными все расписания, о которых идет речь в задаче 1 (т. е. в которых для любых двух различных элементов a и b из A существует в точности один матч, в котором элементы a и b встречаются в разных парах, или, говоря о теннисистах, все расписания, в которых каждый из теннисистов имел своим

противником каждого из остальных ровно в одном матче). Назовем *совершенным* каждое такое число n , для которого существует хотя бы одно совершенное расписание.

Задача 3 Придумать «циклическое» совершенное расписание для любого совершенного n .

Задача 4* Наложим дополнительное условие: у каждого из теннисистов каждый партнер по паре должен повторяться не более одного раза (т. е. на теоретико-множественном языке любые два элемента находятся вместе в одной паре не более чем в одном матче). Придумайте совершенные расписания с этим дополнительным условием для как можно большего числа различных n (решение задачи для произвольного n является открытой проблемой).

Задача 5 Пусть число n — совершенное. В теннисном клубе n теннисистов хотят провести серию парных (двою на двою) матчей. Спрашивается, можно ли составить совершенное расписание так, чтобы партнеров по паре у каждого было больше, чем $\frac{n}{4}$.

Задача 6 Наложим такое условие: у каждого из теннисистов каждый партнер по паре должен повторяться ровно один раз, а каждый соперник — ровно два раза. Придумайте расписание с этим условием для $n = 5, 8, 9$.

Задача 7 (открытая проблема)** При каких n существует расписание с условием из задачи 6?

Назовем t -матчем неупорядоченную совокупность $\{\{a_1, \dots, a_m\} \{b_1, \dots, b_m\}\}$ двух неупорядоченных подмножеств (или *команд*) множества A , где все элементы $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$ принадлежат A и попарно различны. Тогда 2-матч является просто матчем. Назовем t -расписанием множество t -матчей. Тогда 2-расписание является просто расписанием. Назовем *совершенным* t -расписание, в котором для любых двух различных элементов a и b из A существует в точности один t -матч, в котором элементы a и b встречаются в разных командах.

Задача 8 Докажите, что если совершенное t -расписание для n теннисистов существует, то $n - 1$ делится на t^2 .

Задача 9 При каких n существует совершенное t -расписание для n теннисистов, если t четно?

Задача 10 Существует ли совершенное 3-расписание для 10 теннисистов?

Задача 11 (открытая проблема)** При каких n существует совершенное t -расписание для n теннисистов, если t нечетно?

Задача 12 Внесем (только в рамках этой задачи) следующие изменения в определения. В матче разрешили элементу сопротивляться одновременно в обеих парах (т. е. разрешили теннисисту одновременно играть за обе пары по обе стороны сетки). От совершенного расписания будем требовать, чтобы для любых двух не обязательно различных элементов a и b из A существовал в точности один матч, в котором элементы a и b встречаются в разных парах (т. е. дополнительно потребуем, чтобы каждый теннисист сыграл сам против себя). Найдите все n , при которых возможно такое совершенное расписание.

Упаковки продуктов

Загадка 13 Чем интересно выражение

$$\begin{aligned}
 & (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_5 + x_6) + (x_1 + x_2)(x_4 + x_6)(x_8 + x_9) + (x_1 + x_2)(x_7 + x_9)(x_8 + x_{10}) + \\
 & + (x_1 + x_3)(x_2 + x_5)(x_7 + x_8) + (x_1 + x_4)(x_5 + x_7)(x_6 + x_9) + (x_1 + x_5)(x_2 + x_3)(x_9 + x_{10}) + \\
 & + (x_1 + x_6)(x_3 + x_{10})(x_4 + x_8) + (x_1 + x_7)(x_2 + x_{10})(x_5 + x_6) + (x_1 + x_{10})(x_2 + x_7)(x_3 + x_4) + \\
 & + (x_2 + x_8)(x_3 + x_7)(x_4 + x_9) + (x_2 + x_9)(x_5 + x_{10})(x_6 + x_8) + (x_3 + x_5)(x_4 + x_9)(x_7 + x_{10}) + \\
 & + (x_3 + x_5)(x_6 + x_8)(x_7 + x_{10}) + (x_3 + x_8)(x_4 + x_6)(x_5 + x_9) + (x_4 + x_7)(x_6 + x_{10})(x_8 + x_9)?
 \end{aligned}$$

Мономом будем называть произведение переменных. Во всех последующих задачах рассматриваются только мономы без повторяющихся переменных. Два монома, отличающиеся лишь порядком переменных, считаются одинаковыми.

Задачу о серии парных теннисных матчей можно переформулировать в терминах алгебраических выражений, а именно произведений сумм пар переменных. Сопоставим каждому из n теннисистов одну из переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Выражение $(x_i + x_j)(x_k + x_l)$ будет сопоставлено матчу, в котором пара теннисистов, соответствующих переменным x_i и x_j встречается с парой теннисистов, соответствующими переменным x_k и x_l . Такие выражения будем называть $(n, 2)$ -продуктами (2 — потому что в матче участвуют две команды, в дальнейшем этот параметр будет обобщен). Требование, чтобы никакие два теннисиста не встретились в качестве соперников более одного раза означает, что после раскрытия по правилу дистрибутивности скобок в $(n, 2)$ -produkтах, соответствующих всем матчам, никакой моном длины 2 не встречается более одного раза. Требование, чтобы любые два теннисиста встретились в качестве соперников в точности один раз означает, что после раскрытия скобок в $(n, 2)$ -produkтах, соответствующих всем матчам, каждый моном длины 2 (состоящий из разных переменных, порядок которых в мономе не важен) встречается в точности один раз.

Теперь дадим более общее определение, сделав количество скобок в продукте равным произвольному фиксированному числу k .

Пусть $n, k \in \mathbf{Z}$, $0 \leq 2k \leq n$. Будем называть (n, k) -продуктом (или просто *продуктом*) следующее выражение со скобками, являющееся произведением двучленов:

$$P = \prod_{i=1}^k (x_{i,1} + x_{i,2}),$$

где $x_{i,1}, x_{i,2}, i = 1, \dots, k$, — неповторяющиеся переменные из множества $\{x_1, \dots, x_n\}$. Фигурирующие в записи продукта знаки произведения и сложения считаем обычными алгебраическими операциями.¹

Разложением (n, k) -продукта P назовем совокупность 2^k мономов длины k , получающихся после раскрытия скобок в продукте P по правилу дистрибутивности. Считаем, что разложением $(n, 0)$ -продукта является моном длины 0. Будем говорить, что сумма продуктов $\sum_{i=1}^s P_i$ является *упаковкой*,

¹Формально говоря, если в (n, k) -продукте раскрыть скобки по распределительному закону, то получится многочлен от переменных x_1, \dots, x_n .

²На теоретико-множественном языке определение (n, k) -продукта можно сформулировать так. Пусть A — множество из n элементов. Тогда (n, k) -продукт — это неупорядоченная совокупность k неупорядоченных непересекающихся пар элементов множества A .

если разложения никаких двух продуктов P_i и P_j , $i \neq j$, не содержат общих мономов. Число s продуктов в сумме назовем *длиной* упаковки продуктов.

Введем величины $A_{n,k}$.

Через $A_{n,k}$ обозначим максимально возможное значение длины упаковки (n,k) -продуктов. Будем называть упаковку (n,k) -продуктов *совершенной*, если каждый моном длины k встречается в разложении в точности одного продукта.

Задача 14 Докажите, что $A_{n,0} = 1$.

Задача 15 Докажите, что $A_{n,1} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Задача 16 Докажите, что $A_{n,2} = \binom{\frac{n}{2}}{2}$ при четном n .

Задача 17 Докажите, что $A_{n,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 1$.

Задача 18 Докажите, что $A_{n,\frac{n}{2}-1} = \frac{n}{2}$ при четном n .

Задача 19 Докажите, что $A_{n,k} \leq \binom{n}{2k}$.

Задача 20 (проверка на внимательность) Докажите, что $A_{10,3} = 15$.

Задача 21 Докажите, что $A_{n,k} \leq \binom{n}{2k}$.

Задача 22 Докажите, что при $0 < k < \frac{n}{2}$ выполнено $A_{n,k} \leq \frac{\binom{n}{2k}}{\max\{2k, n-2k\}+1}$.

Задача 23 Докажите, что $A_{n,k} \geq \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{k}$.

Задача 24 Докажите, что $A_{n,k} \geq A_{n-2,k} + A_{n-2,k-1}$ при $2 \leq 2k \leq n-2$.

Задача 25 Докажите, что

$$A_{n_1+n_2,k} \geq \sum_{i=0}^k A_{n_1,i} \cdot A_{n_2,k-i}.$$

Задача 26 Докажите, что если существует совершенная упаковка (n,k) -продуктов, то существует и совершенная упаковка $(n-1,k-1)$ -продуктов.

Задача 27 Пусть существует совершенная упаковка $(n_1,3)$ -продуктов и существует совершенная упаковка $(n_2,3)$ -продуктов. Докажите, что тогда существует совершенная упаковка $(n_1+n_2-2,3)$ -продуктов.

Задача 28 Найдите все n , для которых существует совершенная упаковка $(n,3)$ -продуктов.

Задача 29 Пусть существует совершенная упаковка (n_1,k) -продуктов и существует совершенная упаковка (n_2,k) -продуктов. Докажите, что тогда существует совершенная упаковка (n_1+n_2-k+1,k) -продуктов.

Задача 30 Докажите, что имеет место рекуррентное соотношение

$$A_{n_1+n_2-k+1,k} \geq \sum_{i=0}^k A_{n_1-k+i,i} \cdot A_{n_2-i,k-i}.$$

Задача 31 (открытая проблема)** Найдите хотя бы одну пару чисел k и n , $4 \leq k \leq \frac{n}{2}$, для которой существует совершенная упаковка (n, k) -продуктов.

Изучение свойств характеристического многочлена

Задача 32 Пусть все коэффициенты a_k неотрицательны. Докажите, что наибольший корень многочлена $x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ является также наибольшим по модулю из всех (комплексных) его корней.

Замечание 1 Незнакомые с комплексными числами могут пропустить задачу 32.

Задача 33 Пусть все коэффициенты C_k многочлена $x^n - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_k x^k$ неотрицательны. Доказать, что при увеличении любого из коэффициентов C_k значение наибольшего корня многочлена увеличивается.

Задача 34 Докажите, что наибольший корень многочлена $x^n - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} x^k$ строго меньше 2.

Задача 35 Пусть A — алфавит племени Умба-Юмба, состоящий из конечного числа букв. Некоторые из букв алфавита A считаются неприличными. Некоторые (упорядоченные) последовательности букв из A считаются фразами, при этом если к любой фразе справа дописать любую (возможно, ту же самую) фразу, то снова получится фраза. Не допускаются фразы, состоящие только из неприличных букв. Длиной фразы называется число букв в ней. Обозначим через $a_{n,k}$ число фраз длины n , содержащих в точности k неприличных букв. Обозначим через $P_n(x)$ многочлен $x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} x^k$. Доказать, что наибольший корень многочлена $P_n(x)$ не превосходит наибольшего корня многочлена $P_{2n}(x)$.

Загадка 36 Укажите неравенство на величины $A_{n,k}$, сформулированное в задачах части I, непосредственно связанное с задачей 35.

Задача 37 Показать, что утверждение задачи 35 останется в силе, если в качестве величин $a_{n,k}$ взять $A_{n,k}$. При $n < 2k$ полагаем $A_{n,k} = 0$.

Задача 38 Укажите такое $c > 0$, что наибольший корень многочлена $x^n - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} x^k$ при любом n строго меньше $2 - c$.

Задача 39 (открытая проблема)** Найдите верхний предел наибольшего корня многочлена $x^n - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} x^k$ при $n \rightarrow \infty$.

ЧАСТЬ II

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧИ ПОСЛЕ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ФИНИША.

Упаковки «больших» продуктов

Пусть $m, t \in \mathbf{Z}$, $0 \leq t \leq m$. Будем называть *большим* (m, t) -*продуктом* произведение, в которое в качестве множителя входят выражения трех типов:

- а) x_i ;
- б) $(x_i + x_j)$,
- в) $(x_i + 1)$;

при этом каждая из переменных x_1, \dots, x_m встречается в выражении в точности один раз; суммарное число множителей типов а) и б) равно в точности t .

Разложением большого (m, t) -продукта P назовем совокупность мономов, получающихся после раскрытия скобок в продукте P , порядок следования переменных в мономе не имеет значения.

Будем говорить, что сумма больших продуктов $\sum_{i=1}^s P_i$ является *упаковкой*, если разложения никаких двух продуктов P_i и P_j , $i \neq j$, не содержат общих мономов. Число s продуктов в сумме назовем *длиной* упаковки больших продуктов. Упаковку длины s больших (m, t) -продуктов будем называть *s-длинной*.

Если один или несколько параметров упаковки больших (m, t) -продуктов нам или совсем не важны, либо определяются в зависимости от процедуры построения, то мы будем заменять эти параметры на прочерки. Например, если мы задаем только параметр t , то будем говорить об упаковке больших $(-, t)$ -продуктов.

Пусть $m, r, t \in \mathbf{Z}$, $0 \leq r \leq t \leq m$. Большой (m, t) -продукт будем называть *большим* (m, t, r) -*продуктом*, (обратите внимание, появляется новый параметр r), если число множителей типа б) не превосходит r .

Особый интерес для приложений представляют *s-длинные* упаковки больших (m, t, r) -продуктов, когда $s = 2^r$. Если для некоторой *s-длинной* упаковки больших (m, t, r) -продуктов выполнено $s > 2^r$, то можно просто удалить «лишние» большие продукты.

Упаковку больших (m, t, r) -продуктов будем называть *жесткой*, если все переменные намертво разбиты на пары, т. е. в каждом большом продукте упаковки в выражениях типа б) каждая переменная может участвовать только вместе со своей «партнершей», а если некоторая переменная участвует в некотором большом продукте в выражении типа а), то и ее «партнерша» тоже участвует в этом большом продукте в выражении типа а).

На языке теннисистов свойство жесткости можно сформулировать так: теннисисты, как и в обычных теннисных турнирах, жестко разбиты на пары, и партнеров по паре менять нельзя.

Задача 40 Придумайте 2-длинную упаковку больших $(3, 2, 1)$ -продуктов.

Задача 41 Придумайте 8-длинную жесткую упаковку больших $(8, 5, 3)$ -продуктов.

Задача 42 Придумайте 16-длинную жесткую упаковку больших $(12, 6, 4)$ -продуктов.

Задача 43 Докажите, что если существуют s_1 -длинная упаковка больших (m_1, t_1, r_1) -продуктов и s_2 -длинная упаковка больших (m_2, t_2, r_2) -продуктов, то существует $s_1 s_2$ -длинная упаковка больших $(m_1 + m_2, t_1 + t_2, r_1 + r_2)$ -продуктов.

Задача 44 Покажите, как из упаковки (n, k) -продуктов получить упаковку больших $(n, n - k)$ -продуктов той же длины.

Задача построения 2^r -длинной упаковки больших (m, t, r) -продуктов с как можно меньшей величиной отношения $\frac{t}{t+r}$ важна для проблемы построения корреляционно-иммунных булевых функций с максимально возможной нелинейностью. Взаимосвязь рассматриваемой задачи и указанной проблемы слишком сложна, чтобы обсуждать ее здесь. В рамках настоящего проекта булевые функции в дальнейшем не упоминаются и знания даже их определений для решения задач не требуется.

Задача 45 Доказать, что при $r > 0$ для любой 2^r -длинной упаковки больших (m, t) -продуктов выполнено $\frac{t}{t+r} > 1/2$.

Открытая проблема: можно ли 2^r -длинными упаковками больших (m, t, r) -продуктов (выбирая параметры m , t и r по своему усмотрению) величину $\frac{t}{t+r}$ сколь угодно близко приблизить к $1/2$?

Заметим, что задача 43 не дает продвижений в проблеме построения 2^r -длинной упаковки больших (m, t, r) -продуктов с как можно меньшей величиной отношения $\frac{t}{t+r}$, так как $\frac{t_1+t_2}{t_1+t_2+r_1+r_2} \geq \min\left(\frac{t_1}{t_1+r_1}, \frac{t_2}{t_2+r_2}\right)$.

Задача б/н. Придумайте конструкцию, позволяющую строить упаковки больших $(-, t)$ -продуктов.

Главная цель: сделать величину $\frac{t}{t+r}$ настолько близкой к $1/2$, насколько это получится.

Как вариант действий: придумать рекурсивную конструкцию, исходя из упаковок (n, k) -продуктов и некоторых начальных упаковок больших (n, u) -продуктов.

Обозначим через $S_{m,t}$ максимально возможную длину упаковки больших (m, t) -продуктов.

Задача 46 Доказите, что при $t \geq n$ величины $S_{m,t}$ удовлетворяют рекуррентному неравенству

$$S_{m,t} \geq \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} S_{m-n, t-n+k}.$$

Если нам нужно построить упаковку больших $(-, t, r)$ -продуктов и при этом важен параметр r , то можно несколько раз воспользоваться задачей 46, а после этого удалить все большие продукты, в которых число множителей типа б) превышает r .

Задача 47 Пусть n — натуральное число. Пусть последовательность $\{u_\ell\}$ состоит из положительных чисел и удовлетворяет соотношению

$$u_{\ell+n} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} u_{\ell+k}$$

при всех натуральных ℓ . Обозначим через X_{\max} наибольший корень многочлена $P(x) = x^n - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} x^k$. Доказите, что существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что $C_1 X_{\max}^\ell \leq u_\ell \leq C_2 X_{\max}^\ell$ при всех достаточно больших ℓ .

Задача 48 Доказите, что для любого $\varepsilon > 0$ можно, пользуясь задачей 46 при $n = 2$, построить такую 2^r -длинную упаковку больших $(-, t)$ -продуктов, что $\frac{t}{t+r} < \frac{1}{1+\log_2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} + \varepsilon = 0.5902\dots + \varepsilon$.

Указание. Примите во внимание то, что наибольший корень многочлена $x^n - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k}x^k$ при $n = 2$ равен $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Задача 49 Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ можно построить такую 2^r -длинную упаковку больших $(-, t, r)$ -продуктов, что $\frac{t}{t+r} < \frac{1}{1+\log_2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} + \varepsilon = 0.5902\dots + \varepsilon$.

Задача 50* Докажите, что для любой 2^r -длинной жесткой упаковки больших $(-, t)$ -продуктов имеет место неравенство $\frac{t}{t+r} > \frac{1}{1+\log_2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} = 0.5902\dots$

Задача 51* Постройте 2^r -длинную упаковку больших $(-, t)$ -продуктов, для которой $\frac{t}{t+r} < \frac{1}{1+\log_2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} = 0.5902\dots$

Задача 52* Постройте 2^r -длинную упаковку больших $(-, t, r)$ -продуктов, для которой $\frac{t}{t+r} < \frac{1}{1+\log_2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} = 0.5902\dots$

РЕШЕНИЯ И КОММЕНТАРИИ

ЧАСТЬ I

ЗАДАЧИ ДО ПРОМЕЖУТОЧНОГО ФИНИША.

Задача о серии парных теннисных матчей и ее вариации

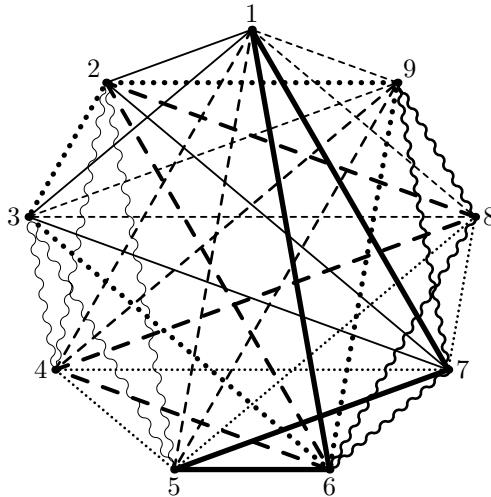
Задача 1 предлагалась на заключительном этапе всероссийской олимпиады школьников 1993 года [3]. Автор задачи — С. Токарев.

Задача 1. Пусть описываемая в задаче серия матчей проведена. Тогда все противники одного теннисиста разбиваются на пары, игравшие против него в одном матче, поэтому n нечетно. Все $\frac{n(n-1)}{2}$ пар теннисистов разбиваются на четверки пар противников в одном матче. Следовательно, число этих пар $\frac{n(n-1)}{2}$ кратно четырем, откуда $n - 1 = 8l$.

Докажем, что при любом натуральном l описанная в условии задачи серия матчей для $n = 8l + 1$ возможна.

Для $l = 1$ нумеруем теннисистов числами от 1 до 9 и предъявляем расписание в явном виде:

1 и 7 против 2 и 3; 1 и 9 против 4 и 5; 1 и 5 против 6 и 7; 1 и 3 против 8 и 9; 2 и 3 против 4 и 5; 2 и 4 против 6 и 8; 7 и 8 против 6 и 9; 5 и 7 против 4 и 8; 3 и 9 против 2 и 6.



Рассмотрим теперь произвольное n , сравнимое с 1 по модулю 8. Выделим одного особого теннисиста, а остальных разобьем на восьмерки. Объединяя особого теннисиста с каждой из восьмерок, организуем расписание матчей девяток, как указано выше. Таким образом, особый теннисист уже встретился в качестве соперника с любым другим; любые два теннисиста из одной восьмерки также встретились между собой в качестве соперников. Осталось добиться, чтобы любые два теннисиста из разных восьмерок встретились в качестве соперников. Для этого внутри восьмерок жестко разбиваем теннисистов на пары, и для любых двух разных восьмерок проводим матч каждой пары из одной восьмерки против каждой пары из другой восьмерки. Таким образом, требуемое расписание матчей составлено.

Ответ. При $n \equiv 1 \pmod{8}$.

Задача 2. Пусть сначала n четно. Тогда у каждого теннисиста число потенциальных соперников

равно $n - 1$ и нечетно. В каждом матче, в котором теннисист участвует, у него два соперника. Поэтому каждый теннисист может сыграть не более чем в $\frac{n-2}{2}$ матчах. Отсюда, суммируя по всем теннисистам и деля на 4 (поскольку в матче участвуют четыре теннисиста), получаем, что общее число матчей не превосходит $\frac{n(n-2)}{8}$. В то же время такое число матчей провести можно: жестко разобьем теннисистов на пары и пусть каждая пара сыграет с каждой.

Таким образом, при четном n максимальное число матчей равно $\frac{n(n-2)}{8}$.

Пусть теперь n нечетно. Рассуждениями, аналогичными вышеизложенным, получаем, что число матчей не превосходит $\frac{n(n-1)}{8}$; для того, чтобы эта оценка достигалась, необходимо, чтобы $n \equiv 1 \pmod{8}$, при этом любые два теннисиста встречаются в качестве противников в точности один раз. В задаче 1 показано, что при $n \equiv 1 \pmod{8}$ такое расписание составить можно. Таким образом, при $n \equiv 1 \pmod{8}$ максимальное число матчей равно $\frac{n(n-1)}{8}$.

Рассмотрим теперь остальные случаи нечетного n . Построим конструкции для этих случаев. Выделяем одного особого теннисиста, а остальных делим на восьмерки и одну неполную группу, в которой 2, 4 или 6 теннисистов. Объединяя особого теннисиста с каждой из восьмерок, организуем расписание матчей девяток, как указано выше. Внутри восьмерок и неполной группы жестко разбиваем теннисистов на пары, и для любых двух разных восьмерок (или неполной группы) проводим матч каждой пары из одной восьмерки против каждой пары из другой восьмерки (или неполной группы). Таким образом, любые два теннисиста уже встретились между собой в качестве соперников, за исключением следующего случая: оба эти теннисиста из неполной группы, объединенной с особым теннисистом. Назовем это объединение остаточной группой, в нее входит m теннисистов, $m = 3, 5, 7$, где $m \equiv n \pmod{8}$. Проведем дополнительные матчи с участием только теннисистов из остаточной группы.

Ясно, что нельзя добиться, чтобы каждый теннисист в этом случае встретился с каждым другим в качестве соперника. Определим, какое минимальное число пар теннисистов может не встретиться друг с другом в качестве соперника. Поскольку n нечетно, каждый теннисист может не встретиться в качестве соперника с четным числом разных теннисистов, поэтому общее число пар теннисистов, которые не встретятся друг с другом в качестве соперников, не может равняться в точности 1 или 2.

Рассмотрим теперь оставшиеся серии n по отдельности.

Пусть $m \equiv n \equiv 3 \pmod{8}$. В остаточной группе три пары не встретившихся между собой в качестве соперников теннисистов, а меньше и быть не может, как мы показали выше. Максимальное число матчей равно $\frac{\frac{n(n-1)}{2} - 3}{4} = \frac{(n-3)(n+2)}{8}$.

Пусть $m \equiv n \equiv 5 \pmod{8}$. В остаточной группе проведем матч 1 и 2 против 3 и 4.

После этого в остаточной группе остается шесть пар не встретившихся между собой в качестве соперников теннисистов. Если бы прошел еще один матч, то осталось бы только две пары не встретившихся между собой в качестве соперников теннисистов, чего быть не может, как мы показали выше. Максимальное число матчей равно $\frac{\frac{n(n-1)}{2} - 6}{4} = \frac{(n-4)(n+3)}{8}$.

Пусть $m \equiv n \equiv 7 \pmod{8}$. В остаточной группе проведем матчи 1 и 2 против 3 и 4; 2 и 4 против 6 и 7; 1 и 3 против 5 и 6; 1 и 5 против 2 и 7.

После этого в остаточной группе остается пять пар не встретившихся между собой в качестве соперников теннисистов. Если бы прошел еще один матч, то осталась бы только одна пара не встретившихся между собой в качестве соперников теннисистов, чего быть не может, как мы показали выше. Максимальное число матчей равно $\frac{\frac{n(n-1)}{2} - 5}{4} = \frac{(n-2)(n+1)}{8} - 1$.

Ответ.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{n(n-2)}{8} & \text{если } n \text{ четно,} \\ \frac{n(n-1)}{8} & \text{если } n \equiv 1 \pmod{8}, \\ \frac{(n+2)(n-3)}{8} & \text{если } n \equiv 3 \pmod{8}, \\ \frac{(n+3)(n-4)}{8} & \text{если } n \equiv 5 \pmod{8}, \\ \frac{(n+1)(n-2)}{8} - 1 & \text{если } n \equiv 7 \pmod{8}. \end{array} \right.$$

Задача 3. Мы уже знаем из решения задачи 1, что хотя бы одно совершенное расписание существует лишь при $n \equiv 1 \pmod{8}$. Пусть $n = 8l + 1$. Пронумеруем теннисистов числами от 0 до $8l$ и включим в расписание матчи 0 и 1 против $4i + 2$ и $4i + 4$, $i = 0, 1, \dots, l - 1$, а также все их циклические сдвиги. Тогда разности между номерами теннисистов в выписанных матчах принимают по разу все значения между 1 и $4l$, а с учетом циклических сдвигов матчей любые два теннисиста окажутся соперниками ровно в одном матче.

Задача 4. Расположим игроков по кругу и занумеруем их последовательно вычетами по модулю $n = 8l + 1$. В случае $l = 1$ возьмем матч $\{\{0,1\}\{2,4\}\}$ и все его циклические сдвиги. В дальнейших примерах, когда мы включаем в расписание матч, мы добавляем в него и все его циклические сдвиги.

$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$	$l = 6$	$l = 7$
$\{\{0,1\}\{2,8\}\}$	$\{\{0,1\}\{2,12\}\}$	$\{\{0,1\}\{2,18\}\}$	$\{\{0,1\}\{2,20\}\}$	$\{\{0,1\}\{2,26\}\}$	$\{\{0,1\}\{2,27\}\}$
$\{\{0,2\}\{5,13\}\}$	$\{\{0,2\}\{5,10\}\}$	$\{\{0,2\}\{5,14\}\}$	$\{\{0,2\}\{5,17\}\}$	$\{\{0,2\}\{5,22\}\}$	$\{\{0,2\}\{5,36\}\}$
	$\{\{0,3\}\{7,19\}\}$	$\{\{0,3\}\{7,25\}\}$	$\{\{0,3\}\{7,32\}\}$	$\{\{0,3\}\{7,21\}\}$	$\{\{0,3\}\{7,17\}\}$
		$\{\{0,4\}\{10,24\}\}$	$\{\{0,4\}\{10,18\}\}$	$\{\{0,4\}\{10,37\}\}$	$\{\{0,4\}\{10,28\}\}$
			$\{\{0,5\}\{13,30\}\}$	$\{\{0,5\}\{13,35\}\}$	$\{\{0,5\}\{13,25\}\}$
				$\{\{0,6\}\{15,38\}\}$	$\{\{0,6\}\{15,41\}\}$
					$\{\{0,7\}\{18,45\}\}$

Расстояние между парой игроков a и b определим как минимальное расстояние между этими игроками по окружности (расстояние между соседними равно единице). Рассматривая расстояния между парами противников, заметим что они по разу принимают значения от 1 и $4l$. Значит любая пара противников встречается в расписании ровно один раз. Рассматривая расстояния между парами союзников, заметим, что они все различны. Значит у каждого теннисиста партнер по паре повторяется не более одного раза.

Замечание 2 В ходе конференции в задаче 4 В. Ретинским и Д. Захаровым была найдена конструкция, позволяющая строить много примеров для новых значений параметра n . Представляется, что эта конструкция дает бесконечную серию значений параметра, но доказательства этого пока нет.

Задача 5. Занумеруем всех игроков вычетами по модулю $n = 8l + 1$. Рассмотрим циклическое расписание, порожденное следующими матчами:

$$\begin{aligned} & \{\{0, 1\}\{l + 1, 3l + 1\}\} \\ & \{\{0, 3\}\{l + 2, 3l + 2\}\} \\ & \{\{0, 5\}\{l + 3, 3l + 3\}\} \\ & \vdots \\ & \{\{0, 2l - 5\}\{2l - 2, 4l - 2\}\} \\ & \{\{0, 2l - 3\}\{2l - 1, 4l - 1\}\} \\ & \{\{0, 2l - 1\}\{2l, 4l\}\} \end{aligned}$$

Рассматривая расстояния между парами противников, заметим что они по разу принимают значения от 1 и $4l$. Значит любая пара противников встречается в расписании ровно один раз. Выпишем расстояния между парами союзников: $\{1, 3, 5, \dots, 2l - 5, 2l - 3, 2l - 1, 2l\}$. Число этих расстояний $l + 1$, а значит число различных союзников равно $2l + 2$, что больше, чем $\frac{n}{4}$.

Задача 6. Пусть $n = 5$. Возьмем расписание шахматного турнира, тур — номер матча, только соперники в туре теперь партнеры против другой пары.

Пусть $n = 8$. Занумеровав семерых теннисистов элементами кольца вычетов по модулю 7, а восьмого обозначив буквой A , для $k = 0, 1, \dots, 6$ проведем матч $\{k, k+1\}$ против $\{k+3, A\}$ и матч $\{k+2, k+5\}$ против $\{k+4, k+6\}$.

Пусть $n = 9$. Сопоставим теннисистам элементы матрицы 3×3 и пусть для каждой (i, j) , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, происходит следующее. 1) Теннисист ij отдыхает. 2) пара из строки, содержащей ij , играет против пары из столбца, содержащего ij . 3) Удалим из матрицы 3×3 строку i и столбец j . Получится матрица 2×2 . Для этой матрицы 2×2 пара теннисистов, соответствующих одной диагонали, играет против пары теннисистов, соответствующих другой диагонали. Например: $i = 2$, $j = 3$. Тогда теннисист 23 отдыхает, проводятся матчи $\{21, 22\}$ против $\{13, 33\}$ и матчи $\{31, 12\}$ против $\{11, 32\}$.

Замечание 3 В ходе конференции в задаче 7 В. Ретинским и Д. Захаровым была найдена конструкция, позволяющая строить расписание для бесконечной серии значений параметра n .

Задача 8. Пусть сначала m нечетно, тогда $n - 1$ должно делиться на m^2 . Общее число пар $n(n-1)/2$ должно делиться на число пар m^2 , встречающихся в матче, т. е. $m^2 | n(n-1)/2$. С другой стороны, произвольный игрок в каждом матче играет с кратным m числом людей, т. е. $m | n - 1$. Отсюда $m^2 | n - 1$.

Пусть теперь m четно, тогда $n - 1$ должно делиться на $2m^2$. Повторяем те же рассуждения, что и для нечетного m , но теперь из $m^2 | n(n-1)/2$ и $m | n - 1$ следует $2m^2 | n - 1$.

Тем самым мы доказали утверждение задачи 8, а для четного m получили даже более сильный результат, который мы используем в дальнейшем при решении задачи 9.

Задача 9. В решении задачи 8 мы уже получили, что если m четно, то $n - 1$ делится на $2m^2$.

В любом случае, вне зависимости от четности m , если $n - 1$ делится на $2m^2$, то искомое расписание существует. Покажем это.

Сначала предъявим циклическое расписание для $n = 2m^2 + 1$. Это циклические сдвиги матча $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ против $\{m, 2m, 3m, \dots, m^2\}$. Между любыми двумя игроками расстояние по кругу не больше m^2 , т. е. равно $am - b$ при $1 \leq a \leq m$ и $0 \leq b \leq m - 1$. Тогда при некотором циклическом сдвиге нашего матча они будут образами игроков b и ma , т. е. сыграют.

Осталось показать, что из существования совершенного m -расписания для n_1 и n_2 следует существование его для $n_1 + n_2 - 1$ игроков. Напомним, что $m | n_1 - 1$ и $m | n_2 - 1$. Осуществим оба расписания на двух множествах игроков с одним общим. После этого останется осуществить все игры между игроком из первых $n_1 - 1$ и игроком из последних $n_2 - 1$. Это можно сделать, разбив множество из первых $n_1 - 1$ игроков и множество из последних $n_2 - 1$ игроков на группы по m игроков, и проведя матчи каждой группы из первого множества против каждой группы из второго множества.

Замечание 4 Из приведенного решения задачи 9 помимо утверждения этой задачи следует, что если при некотором нечетном m требуемое возможно при некотором четном n (таком, что $n - 1$ делится на m^2), то и при больших четных n (с тем же условием) требуемое возможно.

Задача 10. Если совершенное 3-расписание есть, то в нем $\binom{10}{2}/3^2 = 5$ матчей, и каждый игрок участвует в трех из них. Рассмотрим игрока 1 и три матча, в которых он участвовал, назовем плохими. Максимум с 6 другими игроками он присутствовал в одной тройке во время матча. Значит,

есть хотя бы три игрока 2, 3, 4, не побывавшие в одной тройке с 1. Каждый из них участвовал ровно в одном плохом матче (в противоположной тройке, нежели 1), т. е. каждый из них участвовал в обоих неплохих матчах. Кроме того, все попарные встречи игроков 2, 3, 4 происходили в неплохих матчах. Но в каждом из них было четное число таких встреч, а всего их должно быть 3. Противоречие.

Задача 12. Пусть описываемая в задаче серия матчей проведена. Тогда все противники одного теннисиста разбиваются на пары, за исключением двоих, которые будут в паре с этим теннисистом, когда он играет против самого себя, поэтому n нечетно. Все возможные пары противников разбиваются на четверки пар, игравших в одном матче. Следовательно, число этих пар $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ кратно четырем, откуда $n + 1 = 8l$.

Для $l = 1$ нумеруем теннисистов числами от 0 до 6. Включим в расписание матч 0 и 1 против 1 и 3. В этом матче разности между номерами теннисистов принимают по разу значения 0, 1, 2, 3. Поэтому если мы включим в расписание также все циклические сдвиги этого матча, то любые два теннисиста (включая совпадающих) окажутся соперниками ровно в одном матче.

Для произвольного l пронумеруем теннисистов числами от 0 до $8l - 2$ и включим в расписание матчи 0 и 1 против $4i+1$ и $4i+3$, $i = 0, 1, \dots, l-1$, а также все их циклические сдвиги. Тогда разности между номерами теннисистов в выписанных матчах принимают по разу все значения между 0 и $4l - 1$, а с учетом циклических сдвигов матчей любые два теннисиста (включая совпадающих) окажутся соперниками ровно в одном матче.

Ответ. При $n \equiv 7 \pmod{8}$.

Упаковки продуктов

Загадка 13. Если раскрыть скобки по распределительному закону, то получится $15 \cdot 2^3 = 120$ мономов длины 3, при этом все эти мономы будут попарно различными. В то же время всего существует в точности $\binom{10}{3} = 120$ различных мономов длины 3 от 10 переменных. Поэтому при раскрытии скобок в загадке 13 каждый возможный моном длины 3 от 10 переменных возникнет в точности один раз. Поэтому загадка 13 дает пример совершенной упаковки $(10, 3)$ -продуктов.

Задача 14. Моном длины 0 существует только один, и получить его можно из единственного продукта, содержащего нуль скобок.

Задача 15. Существует в точности n мономов длины 1 от n переменных. Каждый $(n, 1)$ -продукт при разложении дает 2 монома, отсюда следует верхняя оценка $A_{n,1} \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. В то же время мы получим упаковку длины $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, если возьмем в каждый $(n, 1)$ -продукт разные переменные.

Задача 16. При четном n для каждой переменной x_i есть $n - 1$ отличная от нее переменная. Пусть есть упаковка $(n, 2)$ -продуктов. Рассмотрим совокупность всех таких $(n, 2)$ -продуктов этой упаковки, в одной из скобок которых содержится переменная x_i . Тогда в другой скобке этих продуктов должны содержаться попарно разные переменные, иначе какой-то моном длины 2 при разложении возникнет больше одного раза. Поэтому каждая из n переменных содержит не более чем в $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \frac{n}{2} - 1$ продуктах. В каждый $(n, 2)$ -продукт входит 4 переменные, поэтому

$$A_{n,2} \leq \frac{1}{4} n \left(\frac{n}{2} - 1 \right) = \binom{\frac{n}{2}}{2}.$$

В то же время можно составить упаковку из такого числа продуктов. Жестко объединим n переменных в $\frac{n}{2}$ пар и из любых двух различных пар составим продукт. Получится упаковка из в точности $\binom{\frac{n}{2}}{2}$ продуктов.

Замечание 5 Фактически задача 16 эквивалентна случаю четного n в задаче 2.

Задача 17. Пусть $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Пусть есть два (n, k) -продукта. Сопоставим каждой переменной вершину графа. Для каждой скобки каждого из двух продуктов соединим ребром вершины, соответствующие переменным из этой скобки. Тогда полученный граф разобьется на циклы четной длины и (при нечетном n) цепочку с нечетным числом вершин. Выделим в каждом цикле вершины через одну (любым из двух способов). В цепочке тоже выделим вершины через одну, беря только неконцевые вершины. Тогда множество выделенных вершин задает моном, который, как легко видеть, получается при разложении каждого из двух продуктов. Поэтому больше одного продукта в упаковку взять нельзя.

Задача 18. Пусть $k = \frac{n}{2} - 1$. Тогда в каждый (n, k) -продукт не входят в точности две из имеющихся n переменных. Мы утверждаем, что для любых двух продуктов упаковки множества не входящих в них переменных не пересекаются. Если это не так, то мы рассуждениями из решения задачи 17 получаем моном, получающийся при разложении обоих продуктов. Отсюда $A_{n, \frac{n}{2}-1} \leq \frac{n}{2}$. В то же время можно составить упаковку из такого числа продуктов. Жестко объединим n переменных в $\frac{n}{2}$ пар и составим все возможные продукты, содержащие все сформированные пары переменных, кроме одной. Легко видеть, что любой моном из разложения одного такого продукта не содержится в разложении никакого другого. Поэтому получится упаковка из в точности $\frac{n}{2}$ продуктов.

Задача 19. Всего различных мономов длины k от n переменных в точности $\binom{n}{k}$, разложение каждого (n, k) -продукта дает 2^k таких мономов. Отсюда $A_{n,k} \leq \frac{\binom{n}{k}}{2^k}$.

Задача 20. Верхняя оценка следует из задачи 19. Пример упаковки длины 15 приведен в загадке 13.

Задача 21. Если множества переменных входящих в два (n, k) -продукта совпадают, то мы рассуждениями из решения задачи 17 получаем моном, получающийся при разложении обоих продуктов. Отсюда $A_{n,k} \leq \binom{n}{2k}$.

Задача 22. Возьмем упаковку (n, k) -продуктов максимальной длины, т. е. длины $A_{n,k}$. Ко множеству переменных каждого из продуктов упаковки добавим не принадлежащую ему переменную всеми возможными способами (которых в точности $n - 2k$). Все получившиеся таким способом множества из $2k + 1$ переменных должны быть попарно различными в силу задачи 17. Отсюда $A_{n,k}(n - 2k) \leq \binom{n}{2k+1}$ или

$$A_{n,k} \leq \frac{\binom{n}{2k+1}}{n - 2k} = \frac{n!}{(2k+1)!(n-2k-1)!(n-2k)} = \frac{\binom{n}{2k}}{2k+1}.$$

Теперь из множества переменных каждого из продуктов максимальной упаковки удалим принадлежащую ему переменную всеми возможными способами (которых в точности $2k$). Все получившиеся таким способом множества из $2k - 1$ переменных должны быть попарно различными в силу той же задачи 17. Отсюда $A_{n,k} \cdot 2k \leq \binom{n}{2k-1}$ или

$$A_{n,k} \leq \frac{\binom{n}{2k-1}}{2k} = \frac{n!}{(2k-1)!(n-2k+1)! \cdot 2k} = \frac{\binom{n}{2k}}{n-2k+1}.$$

Задача 23. Жестко объединим переменные в $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ пар и возьмем в продукт произвольные сочетания по k из них. Легко видеть, что любой моном из разложения одного такого продукта не содержится в разложении никакого другого. Поэтому получится упаковка из в точности $\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{k}$ продуктов.

Задача 24. Выделим отдельно пару переменных x_{n-1} и x_n . Образуем следующую совокупность продуктов. Включим в нее все продукты, входящие в упаковку $(n-2, k)$ -продуктов максимальной длины, а также все продукты, входящие в упаковку $(n-2, k-1)$ -продуктов максимальной длины, с дописанной к ним скобкой $(x_{n-1} + x_n)$. Легко видеть, что любой моном из разложения одного продукта из образованной совокупности не содержится в разложении никакого другого. Отсюда вытекает требуемое рекуррентное неравенство.

Задача 25. Разобьем исходный набор переменных на два, состоящих из n_1 и n_2 различных переменных. Составим следующую упаковку продуктов: для каждого i , $0 \leq i \leq k$, перемножим упаковки, соответствующие числам $A_{n_1,i}$ и $A_{n_2,k-i}$, а потом сложим результаты. Отсюда и из того, что длина упаковки, полученной из произведения упаковок, равна произведению длин этих упаковок получаем требуемое неравенство.

Задача 26. Получить совершенную упаковку $(n-1, k-1)$ -продуктов из совершенной упаковки (n, k) -продуктов можно следующим способом. Возьмем какую-то переменную, скажем, x_n . Найдем все продукты в упаковке, содержащие переменную x_n . Откинем в них скобку с этой переменной. Получим $(n-1, k-1)$ -продукты. Несложно увидеть, что их сумма будет искомой упаковкой.

Задача 27. См. решение задачи 29.

Задача 28. Покажем, что остаток n по модулю 8 может быть равен только 2. Допустим, что для $n = 8k+i$ существует совершенная упаковка $(8k+i, 3)$ -продуктов. Тогда в силу задачи 26 существует совершенная упаковка $(8k+i-1, 2)$ -продуктов. По задаче 1 совершенная упаковка $(m, 2)$ -продуктов может существовать только при $m = 8l+1$. Отсюда следует, что n может быть равно только $n = 8k+2$. В то же время, применяя задачу 29 к совершенной упаковке $(10, 3)$ -продуктов, получим, что для всех чисел вида $n = 8k+2$ существует совершенная упаковка.

Ответ. При $n = 8k+2$, где k — натуральное число.

Задача 29. По задаче 26, для всех $i = 0, 1, \dots, k$ существуют совершенная упаковка $(n_1 - i, k - i)$ -продуктов и совершенная упаковка $(n_2 - i, k - i)$ -продуктов. Пусть X, Y, Z — непересекающиеся множества переменных, причем $|X| = n_1 - k, |Y| = n_2 - k, Z = \{z_0, z_1, \dots, z_k\}$.

Образуем следующее объединение упаковок продуктов. При каждом $i = 0, 1, \dots, k$ возьмем совершенную упаковку $(n_1 - k + i, i)$ -продуктов на множестве переменных $X \cup \{z_0, \dots, z_{i-1}\}$ (назовем ее M_i) и совершенную упаковку $(n_2 - i, k - i)$ -продуктов на множестве переменных $Y \cup \{z_{i+1}, \dots, z_k\}$ (назовем ее N_i). Произведения произвольного продукта из M_i и произвольного продукта из N_i дадут, очевидно, упаковку $(n_1 + n_2 - k + 1, k)$ -продуктов на множестве переменных $X \cup Y \cup Z$, которую мы обозначим через U_i . Мы утверждаем, что объединение U всех этих упаковок является совершенной упаковкой $(n_1 + n_2 - k + 1, k)$ -продуктов. Формально,

$$\bigsqcup_{i=0}^k U_i, \quad U_i = P \left(X \sqcup \left\{ \bigsqcup_{j=0}^{i-1} z_j \right\}, i \right) \times P \left(Y \sqcup \left\{ \bigsqcup_{j=i+1}^k z_j \right\}, k - i \right), \quad (1)$$

где $P(\cdot, \cdot)$ — соответствующие совершенные упаковки.

Покажем сначала, что любой моном m степени k встречается при раскрытии скобок не более одного раза. Пусть он встретился в разложениях некоторых продуктов из U_i и U_j при $i < j$. Так как m встречается в U_i , в m есть ровно i переменных из $X \cup \{z_0, \dots, z_{i-1}\}$ и нет переменной z_i . Так как m встречается в U_j , в m есть ровно $k - j$ переменных из $Y \cup \{z_{j+1}, \dots, z_k\}$ и нет переменной z_j . Остальные $k - i - (k - j) = j - i$ переменных в m могут быть только среди z_{i+1}, \dots, z_{j-1} ; но этих переменных всего лишь $j - i - 1$, и каждая встречается в m не более раза. Противоречие.

Осталось показать, что каждый моном m степени k встретится в разложениях продуктов из U . Очевидно, что в m есть хотя бы 0 переменных из X и не более k переменных из $X \cup Z$. Значит, существует наибольшее $i < k + 1$ такое, что в m есть хотя бы i переменных из $X \cup \{z_0, \dots, z_{i-1}\}$. Условие максимальности означает, что в m есть не более i переменных из $X \cup \{z_0, \dots, z_i\}$. Значит, в m есть ровно i переменных из $X \cup \{z_0, \dots, z_{i-1}\}$, нет переменной z_i — и, следовательно, есть ровно $k - i$ переменных из $Y \cup \{z_{i+1}, \dots, z_k\}$. Это означает, что m получается при раскрытии некоторого продукта из U_i .

Задача 30. Решение использует ту же самую конструкцию, что и решение задачи 29, достаточно ограничиться соображениями, что каждый моном появляется не более чем из одной из упаковок U_i . Естественно, в силу того, что соответствующие упаковки не обязательно являются совершенными, после раскрытия скобок может не появиться некоторых мономов длины k .

Изучение свойств характеристического многочлена

Задача 32. Если c — произвольный комплексный корень многочлена, то

$$|c|^n = |c^n| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k c^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_k |c|^k.$$

Это значит, что значение многочлена в точке $x = |c|$ неположительно. Поскольку для достаточно больших x его значения положительны, существует корень на луче $[|c|, +\infty)$, что и требовалось доказать.

Задача 33. Пусть P — исходный многочлен, \tilde{P} — многочлен с увеличенным коэффициентом C_k , а α — наибольший корень P . Тогда $\tilde{P}(\alpha) < 0$. Так как старший коэффициент P положительный, то существует β такое, что $\tilde{P}(\beta) > 0$. Следовательно у многочлена \tilde{P} есть корень, больший α .

Задача 34. При $x \geq 2$ верно следующее неравенство:

$$x^n \geq (1+x/2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x/2)^k > \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} (x/2)^k \geq \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} x^k,$$

где последнее неравенство следует из утверждения задачи 19.

Следовательно $x^n - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} x^k > 0$ при любом $x \geq 2$.

Задача 35. Ясно, что $P_n(0) \leq 0$, поэтому наибольший действительный корень многочлена $P_n(x)$ — неотрицательный. Обозначим, $P_n^+(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} x^k$. Все $a_{n,k}$ неотрицательны, поэтому многочлен $P_n^+(x)$ не имеет положительных корней. Отсюда наибольший действительный корень многочлена $P_n'(x) = P_n(x)P_n^+(x)$ такой же, как и у многочлена $P_n(x)$.

Имеем $P_n'(x) = P_n(x)P_n^+(x) = x^{2n} - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} x^k\right)^2 = x^{2n} - \sum_{k=0}^{2n-1} u_{2n,k} x^k$, где $u_{2n,k} = \sum_{i=0}^k a_{n,i} a_{n,k-i}$.

В то же время из условия, что если к любой фразе справа дописать любую фразу, то снова получится фраза, имеем $a_{2n,k} \geq \sum_{i=0}^k a_{n,i} a_{n,k-i}$. Следовательно, $a_{2n,k} \geq u_{2n,k}$ для любого k .

Пусть x_0 — наибольший (действительный) корень многочлена $P_n(x)$. Мы уже получили, что x_0 также является наибольшим (действительным) корнем многочлена $P_n'(x)$, т. е. $P_n'(x_0) = 0$. Поскольку $a_{2n,k} \geq u_{2n,k} \geq 0$, из задачи 33 следует, что наибольший корень $P_{2n}(x)$ не меньше x_0 .

Загадка 36. Ответ. Неравенство из задачи 25.

Задача 37. Пусть $x_0^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} x_0^k$, тогда верно

$$x_0^{2n} = \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} x_0^k \right)^2 \leq \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^k A_{n,i} \cdot A_{n,k-i} \right) x_0^k \leq \sum_{k=0}^n A_{2n,k} x_0^k,$$

где последнее неравенство следует из утверждения задачи 25.

Следовательно, справедливо неравенство $x^{2n} - \sum_{k=0}^n A_{2n,k} x^k \leq 0$ при $x = x_0$. В то же время, так как коэффициент при старшей степени больше нуля, то при достаточно больших x многочлен принимает положительные значения, а, значит, он имеет корень на луче $[x_0, \infty)$.

Задача 38. Нам потребуется следующее неравенство.

Лемма 1 *Справедливо неравенство*

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}}.$$

Доказательство. Раскладывая $n^n = (k + (n-k))^n$ по биному Ньютона и выделяя в нем k -й член, получаем

$$n^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{k} k^i (n-k)^{n-i} \geq \binom{n}{k} k^k (n-k)^{n-k},$$

что и требовалось доказать. \square

С помощью леммы 1 можно привести результаты задач 19 и 21 к более удобной форме (несколько ослабив их). Именно, обозначив $\lambda = k/n$, из задачи 19 получаем

$$A_{n,k} \leq \frac{\binom{n}{k}}{2^k} \leq \frac{n^n}{(\lambda n)^{\lambda n} ((1-\lambda)n)^{(1-\lambda)n} \cdot 2^{\lambda n}} = \left((2\lambda)^{-\lambda} (1-\lambda)^{-(1-\lambda)} \right)^n,$$

а из задачи 21, аналогичным образом,

$$A_{n,k} \leq \binom{n}{2k} \leq \left((2\lambda)^{-2\lambda} (1-2\lambda)^{-(1-2\lambda)} \right)^n.$$

Обозначим через $P_n(x)$ наш многочлен, а через α (или α_n) — его наибольший корень. Пусть ℓ — номер наибольшего слагаемого в сумме $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n,k} \alpha^k$. Тогда из оценок выше имеем

$$\alpha^n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n,k} \alpha^k \leq n A_{n,\ell} \alpha^\ell \leq n \alpha^\ell \cdot \left(\min \left\{ (2\lambda)^{-\lambda} (1-\lambda)^{-(1-\lambda)}, (2\lambda)^{-2\lambda} (1-2\lambda)^{-(1-2\lambda)} \right\} \right)^n,$$

где $\lambda = \ell/n$. Отсюда, извлекая корень степени $n - \ell = (1 - \lambda)n$, получаем

$$\alpha \leq \sqrt[n-\ell]{n} \cdot \left(\min \left\{ (2\lambda)^{-\lambda} (1-\lambda)^{-(1-\lambda)}, (2\lambda)^{-2\lambda} (1-2\lambda)^{-(1-2\lambda)} \right\} \right)^{1/(1-\lambda)} =: \sqrt[n-\ell]{n} \cdot f(\lambda).$$

Заметим сразу, что $\sqrt[n-\ell]{n} \leq \sqrt[n]{n^2}$, поскольку $\ell \leq n/2$.

Мы покажем, что максимальное значение f_0 функции f при $\lambda \in (0, 1/2]$ меньше 2, и что его и можно принять за требуемую величину $2 - c$. Начнем с последнего утверждения. По задаче 37 у каждого многочлена $P_s(x)$ при $s = n2^q$ есть корень, не меньший α ; значит, по доказанному выше $\alpha \leq \sqrt[q]{s^2} \cdot f_0$. Если устремить показатель q к бесконечности, то $\sqrt[q]{s^2} \rightarrow 1$; значит, $\alpha \leq f_0$.

Осталось показать, что $f_0 < 2$. Заметим, что $f(\lambda) = \min\{g(\lambda), h(\lambda)\}$, где

$$g(\lambda) = \left((2\lambda)^{-\lambda} (1-\lambda)^{-(1-\lambda)} \right)^{1/(1-\lambda)} \quad \text{и} \quad h(\lambda) = \left((2\lambda)^{-2\lambda} (1-2\lambda)^{-(1-2\lambda)} \right)^{1/(1-\lambda)}.$$

Исследуем каждую из этих функций по отдельности.

Производная логарифма функции $g(x)$ равна

$$(\ln g(\lambda))' = \left(-\frac{\lambda}{1-\lambda} \ln 2\lambda - \ln(1-\lambda) \right)' = -\left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \right)' \cdot \ln 2\lambda = -\frac{\ln 2\lambda}{1-\lambda} - \frac{\lambda \ln 2\lambda}{(1-\lambda)^2} > 0;$$

значит, g монотонно возрастает на нашем интервале. При этом $g(1/2) = 2$. Итак, для любого $\lambda_0 < 1/2$ имеем $g(\lambda_0) < 2$.

С другой стороны, при $\lambda \rightarrow 1/2 - 0$ имеем $h(\lambda) \rightarrow (1 \cdot 1)^2 = 1$, поскольку $x^x \rightarrow 1$ при $x \rightarrow +0$. Значит, существует такое $\lambda_0 < 1/2$, что $h(\lambda) < 3/2$ при всех $\lambda \in [\lambda_0, 1/2]$.

Итак, при всех $\lambda \in (0, 1/2]$ имеем $f(\lambda) \leq \max\{g(\lambda_0), 3/2\} < 2$, то есть и $f_0 < 2$.

Замечание 6 Можно показать, что функция h убывает в достаточно большой левой полуокрестности точки $1/2$. В этой полуокрестности есть точка λ_0 , в которой $g(\lambda_0) = h(\lambda_0)$; это значит, что $f_0 = g(\lambda_0) = h(\lambda_0)$. Компьютерные вычисления показывают, что $\lambda_0 = 0,435954877\dots$ и $f_0 = 1,971043304\dots$

ЧАСТЬ II

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧИ ПОСЛЕ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ФИНИША.

Упаковки «больших» продуктов

Задача 40. Например,

$$\begin{aligned} & \{x_1 x_2(x_3 + 1), \\ & (x_1 + x_2)x_3\}. \end{aligned}$$

Задача 41. Например,

$$\begin{aligned} & \{(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + x_4)x_5x_6x_7x_8, \\ & x_1x_2(x_3 + 1)(x_4 + 1)(x_5 + x_6)x_7x_8, \\ & x_1x_2x_3x_4(x_5 + 1)(x_6 + 1)(x_7 + x_8), \\ & (x_1 + x_2)x_3x_4x_5x_6(x_7 + 1)(x_8 + 1), \\ & x_1x_2(x_3 + x_4)(x_5 + x_6)(x_7 + x_8), \\ & (x_1 + x_2)x_3x_4(x_5 + x_6)(x_7 + x_8), \\ & (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)x_5x_6(x_7 + x_8), \\ & (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_5 + x_6)x_7x_8\}. \end{aligned}$$

Задача 42. Например,

$$\begin{aligned} & \{x_1x_2x_3x_4x_5x_6(x_7 + 1)(x_8 + 1)(x_9 + 1)(x_{10} + 1)(x_{11} + 1)(x_{12} + 1), \\ & (x_1 + x_2)x_3x_4(x_5 + 1)(x_6 + 1)(x_7 + x_8)x_9x_{10}(x_{11} + 1)(x_{12} + 1), \\ & (x_1 + x_2)x_3x_4(x_5 + 1)(x_6 + 1)(x_7 + 1)(x_8 + 1)(x_9 + x_{10})x_{11}x_{12}, \\ & (x_1 + x_2)x_3x_4(x_5 + 1)(x_6 + 1)x_7x_8(x_9 + 1)(x_{10} + 1)(x_{11} + x_{12}), \\ & (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + x_4)x_5x_6(x_7 + x_8)x_9x_{10}(x_{11} + 1)(x_{12} + 1), \\ & (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + x_4)x_5x_6(x_7 + 1)(x_8 + 1)(x_9 + x_{10})x_{11}x_{12}, \\ & (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + x_4)x_5x_6x_7x_8(x_9 + 1)(x_{10} + 1)(x_{11} + x_{12}), \\ & x_1x_2(x_3 + 1)(x_4 + 1)(x_5 + x_6)(x_7 + x_8)x_9x_{10}(x_{11} + 1)(x_{12} + 1), \\ & x_1x_2(x_3 + 1)(x_4 + 1)(x_5 + x_6)(x_7 + 1)(x_8 + 1)(x_9 + x_{10})x_{11}x_{12}, \\ & x_1x_2(x_3 + 1)(x_4 + 1)(x_5 + x_6)x_7x_8(x_9 + 1)(x_{10} + 1)(x_{11} + x_{12}), \\ & x_1x_2(x_3 + 1)(x_4 + 1)(x_5 + x_6)(x_7 + x_8)(x_9 + x_{10})(x_{11} + x_{12}), \\ & (x_1 + x_2)x_3x_4(x_5 + 1)(x_6 + 1)(x_7 + x_8)(x_9 + x_{10})(x_{11} + x_{12}), \\ & (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + x_4)x_5x_6(x_7 + x_8)(x_9 + x_{10})(x_{11} + x_{12}), \\ & (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_5 + x_6)x_7x_8(x_9 + 1)(x_{10} + 1)(x_{11} + x_{12}), \\ & (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_5 + x_6)(x_7 + x_8)x_9x_{10}(x_{11} + 1)(x_{12} + 1), \\ & (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_5 + x_6)(x_7 + 1)(x_8 + 1)(x_9 + x_{10})x_{11}x_{12}\}. \end{aligned}$$

Задача 43. Пусть существуют s_1 -длинная упаковка больших (m_1, t_1, r_1) -продуктов и s_2 -длинная упаковка больших (m_2, t_2, r_2) -продуктов. Занумеруем переменные, которые входят в большие продукты этих упаковок, так, чтобы множество переменных первой упаковки не пересекалось со множеством переменных второй упаковки. После этого устроим «прямое произведение» упаковок, т. е. каждый продукт первой упаковки умножим на каждый продукт второй упаковки. Несложно проверить, что получится упаковка с требуемыми параметрами, т. е. s_1s_2 -длинная упаковка больших $(m_1 + m_2, t_1 + t_2, r_1 + r_2)$ -продуктов.

Задача 44. Пусть есть P — упаковка (n, k) -продуктов. К каждому продукту упаковки P допишем в качестве множителей типа а) недостающие переменные, которых для каждого продукта в точности $n - 2k$. Суммарное число множителей в каждом продукте станет равным $k + (n - 2k) = n - k$, все они типов а) или б). Поэтому мы получили совокупность P' больших $(n, n - k)$ -продуктов в том же количестве, что и в упаковке P .

Покажем, что совокупность P' является упаковкой. Рассмотрим два произвольных разных больших продукта p_1 и p_2 из P' . Сопоставим множителям, входящим в эти большие продукты, вершины двудольного графа G : множителям большого продукта p_1 — вершины левой доли G , множителям большого продукта p_2 — вершины правой доли G . Две вершины графа G соединим ребром, если соответствующие вершинам множители содержат общую переменную. Тогда вершины G , соответствующие множителям типа а) имеют степень 1, а вершины, соответствующие множителям типа б), имеют степень 2.

Докажем, что разложения больших продуктов p_1 не содержат общих мономов. Предположим противное: такой моном есть. Это равносильно тому, что в графе G существует совершенное паросочетание (мощности $n - k$). Удалим из G все ребра этого паросочетания. После этой процедуры степени всех вершин уменьшатся на 1 и, таким образом, из каждой вершины, соответствующей множителю типа б), будет выходить ровно по одному ребру, из других вершин ребер выходить не будет. Несложно понять, что множество оставшихся ребер будет задавать общий моном двух исходных продуктов из P , чего быть не может, потому что P — упаковка. Полученное противоречие доказывает, что и P' является упаковкой.

Задача 45. Любой большой продукт из упаковки содержит t переменных. Поэтому для него сумма числа множителей типа а), удвоенного числа множителей типа б) и числа множителей типа в) равна t . По определению для любого продукта из упаковки сумма числа множителей типа а) и числа множителей типа б) равна t . Вычитая из первого равенства второе, получаем, что для любого продукта из упаковки сумма числа множителей типа б) и числа множителей типа в) равна $t - t$. Заметим, что множители типов б) и в) содержат по два слагаемых, в отличие от множителей типа а), поэтому число мономов в декомпозиции любого большого продукта упаковки равно в точности 2^{m-t} , а суммарное число мономов в декомпозициях всех больших продуктов упаковки равно в точности 2^{m-t+r} . Всего мономов от t переменных в точности 2^m . Поэтому, если декомпозиции всех больших продуктов упаковки содержат не все возможные мономы от t переменных, то $2^{m-t+r} < 2^m$, отсюда $t > r$, что и требовалось доказать. Если декомпозиции всех больших продуктов упаковки содержат в совокупности все возможные мономы от t переменных, то они содержат и моном 1, который мог появиться только если в каком-то большом продукте упаковки все множители относятся к типу в). Но тогда все возможные мономы появляются при декомпозиции одного этого большого продукта. Отсюда длина упаковки равна $s = 1 = 2^0$, что невозможно по условию задачи.

Задача 46. Пусть $\mathcal{B}_{m-n,i}$ — произвольные $S_{m-n,i}$ -длинные упаковки больших $(m-n, i)$ -продуктов, $i = t - n, \dots, t - \lceil \frac{n}{2} \rceil$, заданные на множестве переменных x_1, \dots, x_{m-n} , а $\mathcal{P}_{n,k}$ — упаковки (n, k) -продуктов мощности соответственно $A_{n,k}$, $k = 0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, заданные на множестве переменных x_{m-n+1}, \dots, x_n . Для каждого $k = 0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, следя решению задачи 44, превратим упаковку $\mathcal{P}_{n,k}$ в упаковку $\mathcal{P}'_{n,n-k}$ той же мощности $A_{n,k}$ больших $(n, n - k)$ -продуктов, после чего устроим «прямое произведение» упаковки $\mathcal{B}_{m-n,t-n+k}$ на упаковку $\mathcal{P}'_{n,n-k}$, т. е. каждый продукт первой упаковки умножим на каждый продукт второй упаковки. После этого объединим полученные для всех $k = 0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ большие (m, t) -продукты в одну совокупность. Эта совокупность является упаковкой, потому что разложения полученных для разных k больших продуктов содержат разное количество переменных из множества $\{x_{m-n+1}, \dots, x_n\}$ и поэтому не могут содержать общие мономы, а при одном k в разложениях больших продуктов все мономы разные, потому что исходные $\mathcal{B}_{m-n,i}$ и $\mathcal{P}'_{n,n-k}$ являлись упаковками.

Задача 47. Заметим, что последовательность $w_\ell = X_{\max}^\ell$ удовлетворяет тому же рекуррентному

уравнению

$$w_{\ell+n} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} w_{\ell+k}$$

(на самом деле, это верно для любого корня многочлена $P(x)$ вместо X_{\max}).

Поскольку числа u_1, u_2, \dots, u_n положительны, существуют такие положительные константы C_1 и C_2 , что неравенства $C_1 w_\ell \leq u_\ell \leq C_2 w_\ell$ выполнены при всех $\ell = 1, 2, \dots, n$. Покажем теперь индукцией по ℓ , что эти неравенства выполнены и при всех натуральных ℓ . База при $\ell \leq n$ уже проверена. Для шага индукции при $\ell \geq n+1$ достаточно заметить, что

$$u_\ell = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} u_{\ell-n+k} \geq \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} C_1 w_{\ell-n+k} = C_1 w_\ell;$$

неравенство $u_\ell \leq C_2 w_\ell$ проверяется аналогично.

Замечание 7 То же рассуждение работает, если известно лишь, что в последовательности $\{u_\ell\}$ есть n положительных членов подряд.

Задача 48. Устроим рекурсивную конструкцию на основе неравенства из задачи 46 при $n = 2$. Начнём с некоторых натуральных m_0, t_0 и некоторых непустых семейств $s(m_0, t_0 + i)$ -длинных упаковок \mathcal{B}_{m_0, t_0+i} , $i = 0, 1$. Мы последовательно построим упаковки B_{m_0+2d, t_0+d+i} , $i = 0, 1$, следующим образом. На d -м шаге упаковка B_{m_0+2d, t_0+d+1} получается из (уже построенных) упаковок $B_{m_0+2(d-1), t_0+(d-1)+i}$, $i = 0, 1$, при помощи конструкции из решения задачи 46. Упаковка же B_{m_0+2d, t_0+d} получается из $B_{m_0+2(d-1), t_0+d}$ дописыванием множителей типа б) для двух добавленных переменных. Длины полученных упаковок удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$s(-, t) = \sum_{k=0}^1 A_{2,k} \cdot s(-, t-2+k) = s(-, t-2) + s(-, t-1)$$

с характеристическим многочленом

$$x^2 - \sum_{k=0}^1 A_{2,k} x^k = x^2 - x - 1. \quad (2)$$

В силу задачи 47 поведение величины $s(m, t)$ для некоторых m (зависящих от r) и некоторой положительной константы C удовлетворяет соотношению

$$s(m, t) \geq CX_{\max}^t,$$

где $X_{\max} = 1.6180\dots$ — наибольший корень многочлена (2). Отсюда $\log_2 s(m, t) \geq t \log_2 X_{\max} - \log_2 C$. Отбрасывая «лишние» продукты до ближайшей снизу степени двойки и полагая $r = \lfloor \log_2 s(m, t) \rfloor$, получаем при $t \rightarrow \infty$ последовательность 2^r -длинных упаковок больших $(-, t)$ -продуктов, для которых $\frac{t}{t+r} \rightarrow \frac{1}{1+\log_2(X_{\max})} = 0.5902\dots$

Задача 49. Пусть \mathcal{B}_t — упаковка больших $(-, t)$ -продуктов, построенная в решении задачи 48. Было доказано, что число больших продуктов в \mathcal{B}_t не меньше чем $C\varphi^t$, где $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.6180\dots$ Достаточно доказать, что в упаковке \mathcal{B}_t не более $C'c^t$ больших продуктов (при некоторой $c < \varphi$), у которых число множителей типа б) больше чем r . Обозначим через $\rho(t, r)$ количество больших продуктов с больше чем r множителями в упаковке \mathcal{B}_t . Тогда из конструкции легко видеть, что имеет место рекуррентное соотношение $\rho(t, r) = \rho(t-2, r) + \rho(t-1, r-1)$.

Определим следующие константы: $d = \log_2 \varphi$, $A = \frac{3-d}{2}$, $\alpha = \frac{\ln \frac{3-d}{1-d}}{2 \ln A}$, $\beta = 1 - \alpha$.

Докажем оценку

$$\rho(t, r) \leq \gamma A^{\alpha t + \beta r} \quad (3)$$

для некоторого положительного γ и всех $0 \leq r \leq t$. Доказательство индукцией по t . Выберем γ так, чтобы при $t = t_0, t_0 + 1$ оценка (3) была верна — это база индукции.

Шаг индукции. Пусть оценка (3) верна для $t' < t$. Тогда

$$\rho(t, r) = \rho(t-2, r) + \rho(t-1, r-1) \leq \gamma A^{\alpha t + \beta r} (A^{-2\alpha} + A^{-1}).$$

Покажем, что $A^{-2\alpha} + A^{-1} = 1$. Действительно: $A^{-1} = \frac{2}{3-d}$, $A^{-2\alpha} = A^{-\frac{\ln(\frac{3-d}{1-d})}{\ln A}} = e^{-\ln \frac{3-d}{1-d}} = \frac{1-d}{3-d}$. Таким образом, $A^{-2\alpha} + A^{-1} = 1$. Отсюда следует, что $\rho(t, r) \leq \gamma A^{\alpha t + \beta r}$. Индуктивный переход доказан.

Возьмем $r = \lfloor \alpha t \rfloor$. Тогда $\rho(t, r) \leq \gamma A^{\alpha t + \beta \alpha t}$. При этом $A^{\alpha + \beta \alpha} = 1.5032\dots < \varphi = 1.6180\dots$

Таким образом, отношение числа «плохих» больших продуктов к числу всех больших продуктов в упаковке B_t действительно стремится к нулю.

Задача 50. Рассмотрим произвольную 2^r -длинную жесткую упаковку больших (m, t) -продуктов. Поскольку упаковка является жесткой, число переменных t должно быть четным; обозначим $p = m/2$. Можно считать, что переменные разбиты на пары $(x_1, x_2), (x_3, x_4), \dots, (x_{m-1}, x_m)$.

Каждому возможному большому (m, t) -продукту сопоставим строку из p символов a , b и v , в которой i -й символ указывает, каков тип множителей продукта, содержащих переменные x_{2i-1} и x_{2i} . Обозначим множество строк, соответствующих продуктам нашей упаковки, через W .

Рассмотрим любой большой (m, t) -продукт P и соответствующую ему строку w . Пусть w' — строка, получаемая из w заменой любой буквы v на одну из букв a или b , а P' — соответствующий ей большой продукт. Тогда в разложении P' появятся только те мономы, которые были в разложении P . Значит, последовательностью таких замен из разных строк множества W нельзя получить одинаковые строки (иначе разложения двух соответствующих больших продуктов содержали бы общие мономы)³.

Пусть теперь W' — множество всех слов из букв a и b , полученных из слов множества W заменами каждой буквы v либо на a , либо на b . Тогда каждое слово в W' получено лишь из одного слова множества W .

Присвоим слову из x букв a , y букв b и z букв v вес φ^{y+2z} , где $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — положительный корень уравнения $\varphi^2 = \varphi + 1$. Тогда для любого слова P после замены в нём буквы v на букву a или b получаются два слова, сумма весов которых равна весу P .

Любое слово w в W содержит d букв a , $t-2d$ букв b и $p-t+d$ букв v (при некотором $d \leq t/2$); значит, его вес равен $\varphi^{(t-2d)+2(p-t+d)} = \varphi^{2p-t}$. Согласно аргументу выше, этому же равен суммарный вес всех слов в W' , полученных из w . С другой стороны, сумма весов всех слов в W' не превосходит суммы весов всех слов из букв a и b длины p , то есть

$$\sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \varphi^{p-i} = (1 + \varphi)^p = \varphi^{2p}.$$

Поскольку $|W| = 2^r$, а каждое слово в W' получено лишь из одного слова из W , получаем, что

$$2^r \cdot \varphi^{2p-t} \leq \varphi^{2p},$$

³На самом деле, сформулированное условие является *критерием* того, что продукты, соответствующие строкам множества W , образуют упаковку. Читатель приглашается самостоятельно доказать это утверждение.

то есть $2^r \leq \varphi^t$, или $r \leq t \log_2 \varphi$. Отсюда следует неравенство $\frac{t}{t+r} \geq \frac{1}{1+\log_2 \varphi}$. Наконец, неравенство является строгим, хотя бы потому, что число $\log_2 \varphi$ иррационально (иначе число φ^ℓ при некотором натуральном ℓ было бы степенью двойки, то есть было бы целым).

Задача 51. Устроим рекурсивную конструкцию на основе неравенства из задачи 46 при $n = 10$. Начнём с некоторых натуральных m_0, t_0 и некоторых непустых семейств $s(m_0, t_0 + i)$ -длинных упаковок $\mathcal{B}_{m_0, t_0 + i}$, $i = 0, \dots, 9$. Мы последовательно построим упаковки $B_{m_0 + 10d, t_0 + 5d + i}$, $i = 0, \dots, 9$, следующим образом. На d -м шаге упаковки $B_{m_0 + 10d, t_0 + 5d + i}$ при $i = 5, \dots, 9$ получаются из (уже построенных) упаковок $B_{m_0 + 10(d-1), t_0 + 5(d-1) + j}$, $j = 0, \dots, 9$, при помощи конструкции из решения задачи 46. Упаковки же $B_{m_0 + 10d, t_0 + d + i}$ при $i = 0, \dots, 4$ получаются из $B_{m_0 + 10(d-1), t_0 + d + i}$ дописыванием множителей типа в) для пяти добавленных переменных. Длины полученных упаковок удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} s(-, t) &= \sum_{k=0}^5 A_{10,k} \cdot s(-, t - 10 + k) = s(-, t - 10) + 5s(-, t - 9) + \\ &+ 10s(-, t - 8) + 15s(-, t - 7) + 5s(-, t - 6) + s(-, t - 5) \end{aligned}$$

с характеристическим многочленом

$$x^{10} - \sum_{k=0}^5 A_{10,k} x^k = x^{10} - x^5 - 5x^4 - 15x^3 - 10x^2 - 5x - 1. \quad (4)$$

В силу задачи 47 поведение величины $s(m, t)$ для некоторого m и некоторой положительной константы C удовлетворяет соотношению

$$s(m, t) \geq CX_{\max}^t,$$

где $X_{\max} = 1.6556\dots$ — наибольший корень многочлена (4). Отсюда $\log_2 s(m, t) \geq t \log_2 X_{\max} - \log_2 C$. Отбрасывая «лишние» продукты до ближайшей снизу степени двойки и полагая $r = \lfloor \log_2 s(m, t) \rfloor$, получаем при $t \rightarrow \infty$ последовательность 2^r -длинных упаковок больших $(-, t)$ -продуктов, для которых $\frac{t}{t+r} \rightarrow \frac{1}{1+\log_2(X_{\max})} = 0.5789\dots$

Задача 52. Обозначим через $l_j(t)$ число больших продуктов упаковки $\mathcal{B}_{m,t}$, строящейся в решении задачи 51, которые содержат в точности j множителей типа б).

Пусть $\varepsilon > 0$. Покажем, что для упаковки $\mathcal{B}_{m,t}$ при $j \geq (2/3 + \varepsilon)t(1 + o(1))$, начиная с некоторого t выполнено

$$\frac{l_{j-2}(t+2)}{l_j(t)} > 15. \quad (5)$$

Для произвольного большого продукта α упаковки $\mathcal{B}_{m,t}$ обозначим через $n_i(\alpha)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, число кусков переменных длины 10 в продукте α (не считая префиксного куска, с которого начинает действовать конструкция, и кусков, состоящих только из множителей типа в)), содержащих в точности i множителей типа б). Пусть $j_0(\alpha)$ — число множителей типа б) в префиксе α (с которого начала действовать конструкция), а $t_0(\alpha)$ — суммарное число множителей типов а) и б) в префиксе α . Для соотношения числа $j(\alpha)$ числа множителей типа б) к суммарному числу $t(\alpha)$ множителей типов а) и б) в строке α имеем

$$\frac{j(\alpha)}{t(\alpha)} = \frac{5n_5(\alpha) + 4n_4(\alpha) + 3n_3(\alpha) + 2n_2(\alpha) + n_1(\alpha) + j_0(\alpha)}{5n_5(\alpha) + 6n_4(\alpha) + 7n_3(\alpha) + 8n_2(\alpha) + 9n_1(\alpha) + 10n_0(\alpha) + t_0(\alpha)}. \quad (6)$$

Нас интересуют только такие большие продукты α из упаковки $\mathcal{B}_{m,t}$, для которых, начиная с некоторого t , выполнено $\frac{j(\alpha)}{t(\alpha)} > \frac{2}{3} + \varepsilon'$, $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Поэтому, исходя из (6), можно считать, что

$\min_{\alpha \in \mathcal{B}_{m,t}} n_5(\alpha) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ и, начиная с некоторого t , для любого большого продукта α из упаковки $\mathcal{B}_{m,t}$ выполнено $n_5(\alpha) > n_3(\alpha) + 1$.

Обозначим через $S(t, j, n_5)$ множество больших продуктов из упаковки $\mathcal{B}_{m,t}$, содержащих в точности j множителей типа б) и в точности n_5 кусков длины 10, состоящих из 5 множителей типа б). Для заданных j и достаточно большого t для всех значений n_5 , для которых множество $S(t, j, n_5)$ непусто, заменим в каждом большом продукте α из $S(t, j, n_5)$ один из кусков длины 10 с 5 множителями типа б) на допустимый кусок длины 10 с 3 множителями типа б). Это можно сделать $15n_5$ способами. Мы получим большой продукт из упаковки $\mathcal{B}_{m,t+2}$, содержащий в точности $j - 2$ множителей типа б), который мог быть получен таким способом из $n_3(\alpha) + 1 < n_5$ больших продуктов из $S(t, j, n_5)$. Возможно, при этом придется поменять местами куски, составленные только из множителей типа в), с соседними кусками, но эта процедура в соответствии с конструкцией построения определяется однозначно, т. е. по виду набора однозначно определяется, в каких именно его кусках будут только множители типа в). Таким образом, множеству $S(t, j, n_5)$ сопоставлено множество больших продуктов $S(t+2, j-2, n_5-1)$, превосходящее его по мощности более чем в 15 раз. Пробегая все значения n_5 , доказываем, что, действительно, для упаковки $\mathcal{B}_{m,t}$ при $j \geq (2/3 + \varepsilon)t(1 + o(1))$, начиная с некоторого t выполнено неравенство (5).

Докажем теперь, что в упаковке $\mathcal{B}_{m,t}$ число больших продуктов с числом множителей типа б), не меньшим $k_0 = \lfloor 0.70t \rfloor$, асимптотически мало по сравнению с числом всех больших продуктов.

Для этого оценим отношение числа указанных больших продуктов к числу всех больших продуктов в упаковке. Выберем d , зависящее от t , так, чтобы $d \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, но $\frac{|0.70t| - 2d}{t + 2d} > 2/3 + \varepsilon$. Используя неравенство (5), имеем

$$\frac{\sum_{j=k_0}^t l_j(t)}{s(t)} < \frac{\sum_{j=k_0-2d}^{t-2d} l_j(t+2d)}{15^d s(t)} < \frac{s(t+2d)}{15^d s(t)}.$$

С учётом задачи 47, для бесконечно многих t выполнено неравенство $\frac{s(t+2d)}{s(t)} \leq 2X_{\max}^{2d}$; при этих t имеем

$$\frac{\sum_{j=k_0}^t l_j(t)}{s(t)} < 2 \left(\frac{X_{\max}^2}{15} \right)^d \rightarrow 0, \quad d \rightarrow \infty.$$

Таким образом, мы показали, что число больших продуктов с числом множителей типа б), асимптотически превосходящим $t \log_2 X_{\max} = 0.7274\dots$, действительно часто бывает мало по сравнению с $s(t)$. (На самом деле, можно показать, что оно будет мало всегда, начиная с некоторого t .) Следовательно, удаляя из упаковки $\mathcal{B}_{m,t}$, построенной в решении задачи 51, все большие продукты с числом множителей типа б), превосходящим указанную границу, мы все равно получим последовательность 2^r -длинных упаковок больших (m, t, r) -продуктов, для которой $\frac{t}{t+r} \rightarrow \frac{1}{1+\log_2(X_{\max})} = 0.5789\dots$

Список литературы

- [1] Tarannikov Y. V. Generalized proper matrices and constructing of m -resilient Boolean functions with maximal nonlinearity for expanded range of parameters. — Siberian Electronic Mathematical Reports, 2014. — V. 11, pp. 229–245 (<http://semr.math.nsc.ru/v11/p229-245.pdf>).
- [2] Sauskan A. V., Tarannikov Yu. V. On packings of (n,k) -products. — Siberian Electronic Mathematical Reports, 2016. — V. 13, pp. 888–896 (<http://semr.math.nsc.ru/v13/p888-896.pdf>).

- [3] Агаханов Н. Х., Богданов И. И., Кожевников П. А., Подлипский О. К., Терешин Д. А. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006: Окружной и финальный этапы. Под ред. Н. Х. Агаханова. — М.: МЦНМО, 2007, Задача 447, с. 58, 276–277. (<http://www.math.ru/lib/files/pdf/olimp/Vseross.pdf>)
- [4] Таранников Ю. В. Несократимые разложения однородных произведений двучленов для построения m -устойчивых функций с максимально возможной нелинейностью // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XII международной конференции (Казань, 16-20 июня 2014 г.). — Казань: Отечество, 2014. — pp. 271–272. (<http://agora.guru.ru/ptk2014/files/ptk2014.pdf>)
- [5] Таранников Ю. В. О возможности построения m -устойчивых функций с оптимальной нелинейностью в рамках одного метода // Материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 20–25 июня 2016 г.), М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2016. — pp. 394–397. (<https://istina.msu.ru/media/icollections/collectioneditorship/218/904/26389465/sbornik.pdf>)

Series of tennis doubles matches and packings of products

Yu. Tarannikov, I. Bogdanov, K. Kuyumzhiyan,
M. Lobanov, A. Moskalev, A. Sauskan, S. Tokarev.

PART I

THE PROBLEMS TO SOLVE BEFORE THE INTERMEDIATE FINAL.

Series of tennis doubles matches problem and its variations

Problem 1 In a tennis club n tennis players want to organize a series of doubles matches (a doubles match is a match in which a team of two players play against a team of the other two players) in a way that each player plays against each of the other in one match exactly. There are no restrictions on the ways of forming teams each time. For what values of n is the series possible?

Problem 1 can be formulated in set-theoretical language. Let A be a set of tennis players. We will define *match* as an irregular set $\{\{a_1, a_2\}\{a_3, a_4\}\}$ two irregular disjoint pairs of elements of the set A . Here the elements a_1, a_2, a_3, a_4 belong to A and are pairwise different. We will call a set of matches *timetable*. Then problem 1 explores the timetables in which for any two different elements a and b from A there is exactly one match in which the elements a and b are in different pairs.

Problem 2 In a tennis club n tennis players want to organize a series of doubles matches in a way that each player doesn't play against each player in more than one match. There are no restrictions on the ways of forming teams each time. What is the largest number of matches that can be organized?

Problem 2 explores the timetables in which for any two different elements a and b from A there is no more than one match in which the elements a and b are in different pairs.

For making a timetable of the series of matches an algebraic notation can be used:

$$(a_1 + a_2)(a_3 + a_4).$$

This means that a pair of players a_1 and a_2 plays against a pair of players a_3 and a_4 .

Let's define a *cyclic* timetable. Let's number the players with numbers from 0 to $n - 1$. The timetable is called a "cyclic" one, if for any integer i with any match $\{\{a, b\}\{c, d\}\}$ in the timetable there is also a match $\{\{a_i, b_i\}\{c_i, d_i\}\}$, $a_i = a + i \pmod{n}$. The numbers b_i, c_i, d_i are defined similarly.

For the convenience of formulating of the next problems we will call all the timetables that were described in problem 1 *perfect* timetables (which means that in perfect timetables for any different elements a and b from A there is exactly one match in which the elements a and b are in different pairs, or, if we talk about tennis players, all the timetables in which each player plays against each of the other in exactly one match). Let's call perfect any number n for which there is at least one perfect timetable.

Problem 3 Construct a "cyclic" perfect timetable for any perfect n .

Problem 4* Let's impose an additional condition: each tennis player can not play with each of the other tennis players in one team in more than one match (which in set-theoretical language means that any two elements are in the same pair in no more than one match). Construct perfect timetables with this additional condition for as many integer n as possible (for arbitrary n this problem is open).

Problem 5 Suppose number n is perfect. In a tennis club n tennis players want to organize a series of doubles matches. The question is can one make a perfect timetable so that each player has a number of partners larger than $\frac{n}{4}$.

Problem 6 Let's impose a condition: each player has the same partner exactly once and the same rival exactly twice. Make a timetable that meets this condition for $n = 5, 8, 9$.

Problem 7 (an open problem) For what n is there a timetable described in problem 6?

Let's call an m -match an unordered set $\{\{a_1, \dots, a_m\}, \{b_1, \dots, b_m\}\}$ of two unordered subsets (or *teams*) of a set A , where all elements $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$ belong to A and are pairwise different. Then 2-match is just a match. Let's call m -timetable a set of m -matches. Then 2-timetable is just a timetable. Let's call *perfect* an m -timetable in which for any two different elements a and b from A there is exactly one m -match in which elements a and b are in different teams.

Problem 8 Prove that if there exists a perfect m -timetable for n tennis players then $n - 1$ is divided by m^2 .

Problem 9 For what values of n is there a perfect m -timetable for n tennis players if m is even?

Problem 10 Is there a perfect 3-timetable for 10 tennis players?

Problem 11()** For what values of n there exists a perfect m -timetable for n tennis players if m is odd?

Problem 12 Let's make (exclusively for this problem) the following modifications in the definitions. In a match let's allow an element to be simultaneously in both pairs (which means that a player is allowed to play simultaneously for both pairs astride the net). A perfect timetable in this particular case must meet the condition: for any two not necessarily different elements a and b from A there is exactly one match in which elements a and b are in different pairs (this means that in addition we demand that each player also plays against himself). Find all n for which there is such perfect timetable.

Packings of products

Puzzle 13 What makes the mathematical expression interesting

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_5 + x_6) + (x_1 + x_2)(x_4 + x_6)(x_8 + x_9) + (x_1 + x_2)(x_7 + x_9)(x_8 + x_{10}) + \\ & +(x_1 + x_3)(x_2 + x_5)(x_7 + x_8) + (x_1 + x_4)(x_5 + x_7)(x_6 + x_9) + (x_1 + x_5)(x_2 + x_3)(x_9 + x_{10}) + \\ & +(x_1 + x_6)(x_3 + x_{10})(x_4 + x_8) + (x_1 + x_7)(x_2 + x_{10})(x_5 + x_6) + (x_1 + x_{10})(x_2 + x_7)(x_3 + x_4) + \\ & +(x_2 + x_8)(x_3 + x_7)(x_4 + x_9) + (x_2 + x_9)(x_5 + x_{10})(x_6 + x_8) + (x_3 + x_5)(x_4 + x_9)(x_7 + x_{10}) + \\ & +(x_3 + x_5)(x_6 + x_8)(x_7 + x_{10}) + (x_3 + x_8)(x_4 + x_6)(x_5 + x_9) + (x_4 + x_7)(x_6 + x_{10})(x_8 + x_9)? \end{aligned}$$

Let's call a product of variables a *monomial*. In all following problems we consider only monomials without repeating variables. Two monomials that are only different in the order of variables are considered the same.

The series of tennis doubles matches problem can be reformulated in terms of algebraic expressions, notably in products of sums of pairs of variables. Let's put in correspondence to each of n tennis players

one of variables x_1, x_2, \dots, x_n . The expression $(x_i + x_j)(x_k + x_l)$ will be put in correspondence to the tennis match in which a pair of players corresponding to the variables x_i and x_j play against a pair of players corresponding to the variables x_k and x_l . Let's call such expressions $(n, 2)$ -products (2 — because there are two teams in a tennis match, this parameter will be generalized in what follows). The requirement that no two players play against each other more than once means the following: after expanding (according to the distribution rule) brackets in $(n, 2)$ -products that correspond to all matches, no monomial of length 2 appears more than once. The requirement that any two tennis players play against each other exactly once means that after expanding brackets in $(n, 2)$ -products, corresponding to all matches, each monomial of length 2 (that consists of different variables, of which the order in a monomial is not important) appears exactly once.

Now let's give a more general definition by making the quantity of brackets in product equal to an arbitrary fixed number k .

Let $n, k \in \mathbf{Z}$, $0 \leq 2k \leq n$. We will call the following expression with brackets, that is a product of the binomials, (n, k) -product (or simply *product*) :

$$P = \prod_{i=1}^k (x_{i,1} + x_{i,2}),$$

where $x_{i,1}, x_{i,2}$, $i = 1, \dots, k$ are the nonrecurring variables from the set $\{x_1, \dots, x_n\}$. The product and summation signs (that appear in the note of product) correspond to regular algebraic operations.¹²

The *decomposition* (n, k) -product P is the set of 2^k monomials of length k , appearing after expanding brackets in product P according to the rule of distribution. It is assumed that decomposition of $(n, 0)$ -product is the monomial of length 0. The sum of products $\sum_{i=1}^s P_i$ is called a *packing*, if the decompositions of any two products P_i and P_j , $i \neq j$, do not contain common monomials. We will call number s of products in sum the *length* of packing of products.

Let's define values $A_{n,k}$.

$A_{n,k}$ is the maximum value of the length of the packing of (n, k) -products. We will call a packing of (n, k) -products *perfect* if each monomial of length k appears in the decomposition of exactly one product.

Problem 14 Prove that $A_{n,0} = 1$.

Problem 15 Prove that $A_{n,1} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Problem 16 Prove that $A_{n,2} = \binom{\frac{n}{2}}{2}$ for even n .

Problem 17 Prove that $A_{n,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 1$.

Problem 18 Prove that $A_{n,\frac{n}{2}-1} = \frac{n}{2}$ for even n .

Problem 19 Prove that $A_{n,k} \leq \frac{\binom{n}{k}}{2^k}$.

¹1. Formally, when expanding the brackets in (n, k) -product according to the distribution rule the result will be the polynomial in variables x_1, \dots, x_n .

²2. In set-theoretical language the definition of (n, k) -product can be formulated as following. Let A be the set of n elements. Then (n, k) -product is an unordered set of k unordered disjoint pairs of elements of the set A .

Problem 20 (attention test) Prove that $A_{10,3} = 15$.

Problem 21 Prove that $A_{n,k} \leq \binom{n}{2k}$.

Problem 22 Prove that for $0 < k < \frac{n}{2}$ the next bound holds: $A_{n,k} \leq \frac{\binom{n}{2k}}{\max\{2k, n-2k\}+1}$.

Problem 23 Prove that $A_{n,k} \geq \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{k}$.

Problem 24 Prove that $A_{n,k} \geq A_{n-2,k} + A_{n-2,k-1}$ for $2 \leq 2k \leq n-2$.

Problem 25 Prove that

$$A_{n_1+n_2,k} \geq \sum_{i=0}^k A_{n_1,i} \cdot A_{n_2,k-i}.$$

Problem 26 Prove that if there exists a perfect packing of (n,k) -products, then there exists a perfect packing of $(n-1, k-1)$ -products.

Problem 27 Suppose there exists a perfect packing of $(n_1, 3)$ -products and there exists a perfect packing of $(n_2, 3)$ -products. Prove that in this case there exists a perfect packing of $(n_1 + n_2 - 2, 3)$ -products.

Problem 28 Find all n , for which there exists a perfect packing of $(n, 3)$ -products.

Problem 29 Suppose there exists a perfect packing of (n_1, k) -products and there exists a perfect packing of (n_2, k) -products. Prove that in this case there exists a perfect packing of $(n_1 + n_2 - k + 1, k)$ -products.

Problem 30 Prove that the following recurrent relation is true

$$A_{n_1+n_2-k+1,k} \geq \sum_{i=0}^k A_{n_1-k+i,i} \cdot A_{n_2-i,k-i}.$$

Problem 31 (an open problem)** Find at least one pair of numbers k and n , $4 \leq k \leq \frac{n}{2}$, for which there is a perfect packing of (n, k) -products.

The exploration of properties of the characteristic polynomial

Problem 32 Let all the coefficients a_k be nonnegative. Prove that the value of the largest root of the polynomial $x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ is also the largest by absolute value among all its (complex) roots.

Remark 1 Those who are unfamiliar with complex numbers can skip problem 32.

Problem 33 Let all the coefficients C_k of the polynomial $x^n - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_k x^k$ be nonnegative. Prove that when any coefficient C_k increases, the value of the largest root of the polynomial increases.

Problem 34 Prove that the largest root of the polynomial $x^n - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} x^k$ is strictly less than 2.

Problem 35 Let A be the alphabet of a tribe Umba-Jumba, that consists of a finite number of letters. Some of the letters of the alphabet A are considered inappropriate. Some (ordered) sequences of letters from A are considered phrases. If one writes any phrase to the right of any phrase, the result is also a phrase (even if the written to the right phrase was the same). There are no phrases that consist of only inappropriate letters (they are not allowed). The length of the phrase is the number of letters in it. Let's use $a_{n,k}$ to denote the number of phrases of length n , that consists exactly k inappropriate letters. $P_n(x)$ will denote a polynomial $x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k}x^k$. Prove that the largest root of the polynomial $P_n(x)$ doesn't exceed the largest root of the polynomial $P_{2n}(x)$.

Puzzle 36 What inequality for values $A_{n,k}$, formulated in the problems of part I, is directly related to problem 35?

Problem 37 Prove that the assertion of problem 35 remains true, if we take $A_{n,k}$ for values $a_{n,k}$. For $n < 2k$ we assume $A_{n,k} = 0$.

Problem 38 Indicate such $c > 0$, that the largest root of the polynomial $x^n - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k}x^k$ for any n is strictly less than $2 - c$.

Problem 39 (an open problem)** Find the upper limit of the largest root of the polynomial $x^n - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k}x^k$ for $n \rightarrow \infty$.

PART II

FORMULATIONS OF PROBLEMS

THE PROBLEMS TO SOLVE AFTER THE INTERMEDIATE FINAL.

Packings of big products

Let $m, t \in \mathbf{Z}$, $0 \leq t \leq m$. We define a *big* (m, t) -*product* as the product in which the factors are of the following three types:

- a) x_i ;
- b) $(x_i + x_j)$,
- c) $(x_i + 1)$;

each of the variables x_1, \dots, x_m should appear in the expression exactly once; the total number of factors of types a) and b) should equal t .

The *decomposition* of a big (m, t) -product P is a set of monomials appearing after expanding the brackets in the product P (the order of variables in the monomial does not matter). We say that a sum of big products $\sum_{i=1}^s P_i$ is a *packing*, if the decompositions of any two products P_i and P_j , $i \neq j$, contain no common monomials. The *length* of the packing is the number s of products in the sum. We say that a packing is *s-long* if its length equals s .

If one or several parameters of a packing of big (m, t) -products are either unimportant to us or are determined in the construction procedure, then we will replace these parameters with dashes. For example, if we set up only the parameter t , then we will talk about a packing of big $(-, t)$ -products.

Let $m, r, t \in \mathbf{Z}$, $0 \leq r \leq t \leq m$. We say that a big (m, t) -product is a *big* (m, t, r) -*product* (a new parameter appears!) if the number of factors of type b) does not exceed r .

When $s = 2^r$, the s -long packings of big (m, t, r) -products are especially important for applications. If for some s -long packing of big (m, t, r) -products the inequality $s > 2^r$ holds, then we can simply delete “superfluous” big products.

We say that a packing of big (m, r, t) -products is *rigid* if the variables are rigidly combined into pairs (x_i, x_j) so that in every big products of the packing either the variables x_i and x_j form one factor of type b), or both are factors of type a), or both lie in factors of type c).

In “tennis players” language, the property of rigidness can be formulated as follows: the tennis players, as it happens in usual tennis tournaments, are rigidly divided into pairs and one cannot change his or her partner.

Problem 40 Construct a 2-long packing of big $(3, 2, 1)$ -products.

Problem 41 Construct a 2-long rigid packing of big $(8, 5, 3)$ -products.

Problem 42 Construct a 16-long rigid packing of big $(12, 6, 4)$ -products.

Problem 43 Prove that if there exist an s_1 -long packing of big (m_1, t_1, r_1) -products and an s_2 -long packings of big (m_2, t_2, r_2) -products, then there exists an $s_1 s_2$ -long packing of big $(m_1 + m_2, t_1 + t_2, r_1 + r_2)$ -products.

Problem 44 Find a way to transform a packing of (n, k) -products into a packing of big $(n, n-k)$ -products of the same length.

The problem of constructing appropriate packings of big (m, t, r) -products with the least possible value of the ratio $\frac{t}{t+r}$ is important to the problem of construction of correlation-immune Boolean functions with the maximum possible nonlinearity. The interrelation of these two problems is too complicated to be discussed here. In the present project Boolean functions are not mentioned in the following and knowledge of their definitions is not needed.

Problem 45 Prove that if $r > 0$ then for any 2^r -long packing of big (m, t) -products we have $\frac{t}{t+r} > 1/2$.

An open problem: Is it possible to construct a 2^r -long packing of big (m, t, r) -products (with any choice of parameters m , t , and r) in order to achieve the value $\frac{t}{t+r}$ arbitrarily close to $1/2$?

Note that the Problem 43 provides no advantage in the task of constructing 2^r -long packings of big (m, t, r) -products minimizing the value of $\frac{t}{t+r}$. Indeed, $\frac{t_1+t_2}{t_1+t_2+r_1+r_2} \geq \min\left(\frac{t_1}{t_1+r_1}, \frac{t_2}{t_2+r_2}\right)$.

Problem without number. Find a construction of packings of big $(-, t)$ -products.

The main aim is: to make the value $\frac{t}{t+r}$ as close to $1/2$ as possible.

One possible approach: to find a recursive construction dealing with packings of (n, k) -products and some initial packings of big (n, u) -products.

Denote by $S_{m,t}$ the maximal possible length of the packing of big (m, t) -products.

Problem 46 Prove that for $m \geq t \geq n$ the values $S_{m,t}$ satisfy the following recurrent inequality

$$S_{m,t} \geq \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} S_{m-n, t-n+k}.$$

If one needs to construct a packing of big $(-, r, t)$ -products and the parameter r is important, then one can still use problem 46, and after that delete all the big products in which the number of multipliers of type b) exceeds r .

Problem 47 Let n be a positive integer. Let the sequence $\{u_\ell\}$ consists of positive numbers and satisfies the condition

$$u_{\ell+n} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} u_{\ell+k}$$

for all positive integers ℓ . Denote by X_{\max} the largest root of the polynomial $P(x) = x^n - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} x^k$.

Prove that there exist positive constants C_1 and C_2 such that $C_1 X_{\max}^\ell \leq u_\ell \leq C_2 X_{\max}^\ell$ for all sufficiently big ℓ .

Problem 48 Prove that for any $\varepsilon > 0$ one can implement problem 46 (for $n = 2$) in order to construct a 2^r -long packing of big $(-, t)$ -products such that $\frac{t}{t+r} < \frac{1}{1+\log_2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} + \varepsilon = 0.5902\dots + \varepsilon$.

Hint. Notice that for $n = 2$ the largest root of the polynomial $x^n - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} x^k$ equals $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Problem 49 Prove that for any $\varepsilon > 0$ one can construct a 2^r -long packing of big $(-, t, r)$ -products such that $\frac{t}{t+r} < \frac{1}{1+\log_2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} + \varepsilon = 0.5902\dots + \varepsilon$.

Problem 50* Prove that for any 2^r -long rigid packing of big $(-, t)$ -products we have $\frac{t}{t+r} > \frac{1}{1+\log_2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} = 0.5902\dots$

Problem 51* Construct a 2^r -long packing of big $(-, t)$ -products such that $\frac{t}{t+r} < \frac{1}{1+\log_2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} = 0.5902\dots$

Problem 52* Construct a 2^r -long packing of big $(-, t, r)$ -products such that $\frac{t}{t+r} < \frac{1}{1+\log_2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} = 0.5902\dots$

SOLUTIONS AND COMMENTS

PART I

THE PROBLEMS TO SOLVE BEFORE THE INTERMEDIATE FINAL.

The problem on a series of tennis doubles matches and its variations

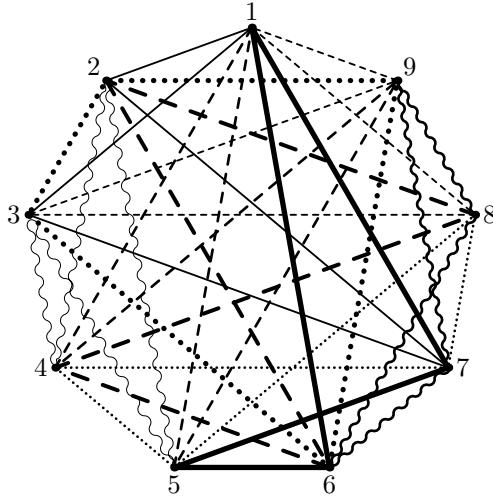
Problem 1 was used at the Final round of the All-Russian mathematical olympiad in 1993. The author of the problem is S. Tokarev.

Problem 1. Suppose that the described series of matches was organized. Then all the opponents of one tennis player can be divided into pairs, thus n is odd. All $\frac{n(n-1)}{8}$ possible pairs of opponents can be divided into groups of four which played in one match. Hence, the number of these pairs is a multiple of 4, which gives us $n - 1 = 8l$.

Let's prove that for any natural l the series of matches described in the problem is possible for $n = 8l + 1$.

For $l = 1$ let's give to tennis players umbers from 1 to 9 and we explicitly produce the timetable:

1 and 7 against 2 and 3; 1 and 9 against 4 and 5; 1 and 5 against 6 and 7; 1 and 3 against 8 and 9; 2 and 3 against 4 and 5; 2 and 4 against 6 and 8; 7 and 8 against 6 and 9; 5 and 7 against 4 and 8; 3 and 9 against 2 and 6.



Let's consider now the arbitrary $n \equiv 1 \pmod{8}$. Let's single out one special tennis player and divide all the rest players into groups of eight. Combining the special tennis player with each of these groups of eight, we organize a timetable of matches in the groups of nine as shown above. Thus, the special tennis player has already played against every other player; any two players from one group of eight have also played against each other. What is left is to make happen that any two players from different groups of eight play against each other. For this purpose we rigidly subdivide players within each group of eight into pairs. For any two different groups of eight we will organize a match of every pair from one group against every pair from the other group. The required timetable of matches is constructed.

Answer. $n \equiv 1 \pmod{8}$.

Problem 2. Assume first that n is even. Then each tennis player has $n - 1$ potential opponents, this

number being odd. In each match a player plays, he has two opponents. That's why each player can play no more than in $\frac{n-2}{2}$ matches. Summing over all players and dividing by 4 (since there are 4 players in a match), we get that the total number of matches is no more than $\frac{n(n-2)}{8}$. This number of matches can indeed be organized: let's divide rigidly the players into pairs and let each pair play with each of the others.

Thus, for an even n the maximum number of matches is $\frac{n(n-2)}{8}$.

Assume now that n is odd. By a similar reasoning, we get that the number of matches is no more than $\frac{n(n-1)}{8}$. This bound can be met only when $n \equiv 1 \pmod{8}$ and any two players play against each other exactly once. As we saw in problem 1, such a timetable can be constructed for $n \equiv 1 \pmod{8}$. Thus, for such values of n the maximum number of matches is $\frac{n(n-1)}{8}$.

Now we deal with the remaining cases of odd n . First, we construct the schedules for these values of n . Let's single out one special tennis player and divide the rest into groups of eight and one incomplete group containing 2, 4, or 6 tennis players. Combining a special tennis player with each of these groups of eight, we organize a timetable of matches in the groups of nine, as shown in problem 1. Within the groups of eight and the incomplete group, we divide rigidly the players into pairs, and we organize a match between any two pairs from different groups. . Thus, any two players play against each other, unless they both lie in the incomplete group augmented by the special player. What is left is to organize some matches between the players from the incomplete group augmented by the special player; we call this group a *remaining group*. It contains m players, where $m = 3, 5$, or 7 , and $m \equiv n \pmod{8}$.

Clearly, it is impossible to make each player of this group play against each of the others. Let's determine the minimum number of pairs of players which will not play. Since n is odd, each player will not play against an even number of other players; therefore, the total number of pairs of players which will not play cannot equal exactly 1 or 2.

Now we consider the possible values of m separately.

Let $m \equiv n \equiv 3 \pmod{8}$. In the remaining group, there are three pairs who didn't play against each other, and we cannot have fewer, as was shown above. So the maximum number of matches equals $\frac{\frac{n(n-1)}{2}-3}{4} = \frac{(n-3)(n+2)}{8}$.

Let $m \equiv n \pmod{8} \equiv 5 \pmod{8}$. In the remaining group we organize a match of 1 and 2 against 3 and 4. After this, in the remaining group there are 6 pairs of players who didn't play against each other. If there were one more match, then there would be only two such pairs, which is impossible. Thus the maximum number of matches equals $\frac{\frac{n(n-1)}{2}-6}{4} = \frac{(n-4)(n+3)}{8}$.

Let $m \equiv n \pmod{8} \equiv 7 \pmod{8}$. In the remaining group we organize the following matches; 2 and 4 against 6 and 7; 1 and 3 against 5 and 6; 1 and 5 against 2 and 7. After that, the remaining group contains five pairs who didn't play against each other. If there were one more match, than there would be only one such pair, which is impossible. Thus the maximum number of matches equals $\frac{\frac{n(n-1)}{2}-5}{4} = \frac{(n-2)(n+1)}{8} - 1$.

Answer.

$$\begin{cases} \frac{n(n-2)}{8} & \text{if } n \text{ even,} \\ \frac{n(n-1)}{8} & \text{if } n \equiv 1 \pmod{8}, \\ \frac{(n+2)(n-3)}{8} & \text{if } n \equiv 3 \pmod{8}, \\ \frac{(n+3)(n-4)}{8} & \text{if } n \equiv 5 \pmod{8}, \\ \frac{(n+1)(n-2)}{8} - 1 & \text{if } n \equiv 7 \pmod{8}. \end{cases}$$

Problem 3. We know from problem 1 that a perfect timetable exists only for $n \equiv 1 \pmod{8}$. Let $n = 8l + 1$. Number the players from 0 to $8l$ and include into the timetable the matches 0 and 1 against $4i + 2$ and $4i + 4$ for all $i = 0, 1, \dots, l - 1$, along with their cyclic shifts. Then the differences between the opponents' numbers in the matches possess all the values between 1 and $4l$ (each value is possessed

once). Taking into account the cyclic shifts, we conclude that any two players are opponents in exactly one match.

Problem 4. Arrange the players in a circle and number them consecutively by the residue classes modulo $n = 8l + 1$. In case $l = 1$ let's take a match $\{\{0,1\}\{2,4\}\}$ and all its cyclic shifts. In the following examples, when we include a match in the timetable we also include all its cyclic shifts.

$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$	$l = 6$	$l = 7$
$\{\{0,1\}\{2,8\}\}$	$\{\{0,1\}\{2,12\}\}$	$\{\{0,1\}\{2,18\}\}$	$\{\{0,1\}\{2,20\}\}$	$\{\{0,1\}\{2,26\}\}$	$\{\{0,1\}\{2,27\}\}$
$\{\{0,2\}\{5,13\}\}$	$\{\{0,2\}\{5,10\}\}$	$\{\{0,2\}\{5,14\}\}$	$\{\{0,2\}\{5,17\}\}$	$\{\{0,2\}\{5,22\}\}$	$\{\{0,2\}\{5,36\}\}$
	$\{\{0,3\}\{7,19\}\}$	$\{\{0,3\}\{7,25\}\}$	$\{\{0,3\}\{7,32\}\}$	$\{\{0,3\}\{7,21\}\}$	$\{\{0,3\}\{7,17\}\}$
		$\{\{0,4\}\{10,24\}\}$	$\{\{0,4\}\{10,18\}\}$	$\{\{0,4\}\{10,37\}\}$	$\{\{0,4\}\{10,28\}\}$
			$\{\{0,5\}\{13,30\}\}$	$\{\{0,5\}\{13,35\}\}$	$\{\{0,5\}\{13,25\}\}$
				$\{\{0,6\}\{15,38\}\}$	$\{\{0,6\}\{15,41\}\}$
					$\{\{0,7\}\{18,45\}\}$

We define the *distance* between a pair of players a and b as the minimal distance between them along the circle; thus, the distance between the neighboring players is 1. Notice that the distances between pairs of opponents in the table above take on each value from 1 and $4l$ exactly once. This means that any pair of opponents appears in a timetable exactly once. On the other hand, the distances between the pairs of partners (i.e. a pair of team-mates) are all different. This means that each tennis player has the same partner no more than once.

Remark 2 During the conference in problem 4 V. Retinsky and D. Zakharov invented a construction that allows to generate many examples for new values of parameter n . It seems that this construction provides examples for infinitely many values of n but up to now we are aware of no proof for this fact.

Problem 5. Number all the players by the residue classes modulo $n = 8l + 1$. Take the cyclic schedule generated by the following matches.

$$\begin{aligned} & \{\{0, 1\}\{l+1, 3l+1\}\} \\ & \{\{0, 3\}\{l+2, 3l+2\}\} \\ & \{\{0, 5\}\{l+3, 3l+3\}\} \\ & \vdots \\ & \{\{0, 2l-5\}\{2l-2, 4l-2\}\} \\ & \{\{0, 2l-3\}\{2l-1, 4l-1\}\} \\ & \{\{0, 2l-1\}\{2l, 4l\}\} \end{aligned}$$

Again, the distances between pairs of opponents in the table above take on each value from 1 and $4l$ exactly once. The distances between the pairs of team-mates take on the values from the set $\{1, 3, 5, \dots, 2l-5, 2l-3, 2l-1, 2l\}$. The number of these distances is $l+1$, and this means that the number of different team-mates of one player equals $2l+2$, which is larger than $\frac{n}{4}$.

Problem 6. Let $n = 5$. Consider a timetable of a chess tournament. Now, each tour consists of two pairs, and we say that in our schedule these pairs play against each other.

Let $n = 8$. Number the seven players by the residues modulo 7 and denote the eighth player by A . For $k = 0, 1, \dots, 6$, arrange a match $\{k, k+1\}$ against $\{k+3, A\}$ and a match $\{k+2, k+5\}$ against $\{k+4, k+6\}$.

Let $n = 9$. To each player we put into correspondence an entry of a 3×3 matrix. For each entry (i, j) , $i, j = 1, 2, 3$, we perform the following. 1) Let the player ij relax. 2) Let the pair from the row containing ij play against the pair from the column containing ij . 3) Remove the row and column containing ij ;

in the remaining 2×2 matrix, let the pair of players in one diagonal play against the pair in the other diagonal. For example, if $i = 2, j = 3$, then the player 23 is relaxing, and we arrange the matches $\{21, 22\}$ against $\{13, 33\}$ and $\{31, 12\}$ against $\{11, 32\}$.

Remark 3 During the conference in problem 7 V. Retinsky and D. Zakharov invented a construction that allows to generate the schedules for infinitely many values of n .

Problem 8. Assume first that m is odd. Then $n - 1$ should be divisible by m^2 . Indeed, the total number of pairs $n(n-1)/2$ should be divisible by the number of pairs m^2 that appear in a match, i.e. $m^2 | n(n-1)/2$. On the other hand, any player in each match plays with a number of people divisible by m , i.e. $m | n - 1$. Hence, $m^2 | n - 1$.

If m is even, then $n - 1$ has to be a multiple of $2m^2$. Indeed, the same reasoning shows that $m^2 | n(n-1)/2$ and $m | n - 1$, but in our case these relations yield $2m^2 | n - 1$.

So, we have solved the problem and, moreover, we have got a stronger statement for even m which we will use in the solution of problem 9.

Problem 9. In the solution of problem 8 we saw that $n - 1$ is divisible by $2m^2$ if m is even.

Now we show that a required schedule exists for all n divisible by $2m^2$, even regardless of the parity of m . Firstly, we present a cyclic timetable for $n = 2m^2 + 1$. It consists of the cyclic shifts of match $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$ against $\{m, 2m, 3m, \dots, m^2\}$. The distance between any two players is at most m^2 , i.e. it equals $am - b$ for some $1 \leq a \leq m$ and $0 \leq b \leq m - 1$. Then, under a certain cyclic shift of our match, our players are the images of the players b and ma , i.e. they will play.

Now it suffices to show that the existence of perfect m -schedules for n_1 players and for n_2 players implies the existence of such schedule for $n_1 + n_2 - 1$ players. Recall that $m | n_1 - 1$ and $m | n_2 - 1$. Implement both schedules on two sets of players with one common player. After that, it remains to make all the games between a player from the first $n_1 - 1$ ones and a player from the last $n_2 - 1$ ones. It is now easy: divide the set of $n_1 - 1$ players, as well as the set of $n_2 - 1$ players, into groups by m , and perform a match between each group from the first set against each group from the second set.

Remark 4 The solution of problem 9 shows also the following fact. Assume that m is odd. If for some even n (such that $n - 1$ is divisible by m^2) a required schedule exists, then such schedule also exists for all larger even n (satisfying the same condition).

Problem 10. If a perfect 3-timetable exists, then it contains $\binom{10}{2}/3^2 = 5$ matches and each player participates in three of them. Consider the player 1; call three matches in which he participates *bad*. In the three bad matches, this player had at most 6 teammates. This means that there are three players 2, 3, 4 which were not his teammates. Each of them participated in exactly one bad match (in the opposite group to 1), i.e. each of them participated in both non-bad matches. Moreover, all the pairwise meetings between the players 2, 3, 4 were in non-bad matches. But in each of them there was an even number of such meetings, while their total number should be 3. A contradiction.

Problem 12. Suppose the series of matches described in the problem was organized. Then all the opponents of one player can be divided into pairs, except two of them, who will be in a pair with this player when he plays against himself. Therefore, n is odd. All the possible pairs of opponents are divided into groups of four pairs who played in one match. Hence, the number of these pairs $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ is a multiple of four, which gives us $n + 1 = 8l$.

For $l = 1$ we number the from 0 to 6. Let's include in the timetable the match 0 and 1 against 1 and 3. In this match the differences between opponents' numbers possess the values 0, 1, 2, 3 (each value is possessed once). So, if we also include in the timetable all the cyclic shifts of this match, than any two players (including those who coincide), are opponents in exactly one match.

For arbitrary l we number the players from 0 to $8l - 2$ and include in the timetable the matches 0 and 1 against $4i + 1$ and $4i + 3$, $i = 0, 1, \dots, l - 1$, along with their cyclic shifts. Then the differences

between the opponents' numbers in the matches possess all the values between 0 and $4l - 1$ (each value is possessed once). Therefore, any two players (including those who coincide) are opponents in exactly one match.

Answer. $n \equiv 7 \pmod{8}$.

Packing of products

Puzzle 13. Expanding the brackets, we get $15 \cdot 2^3 = 120$ monomials of length 3, and all the monomials will be pairwise different. At the same time, there are exactly $\binom{10}{3} = 120$ possible monomials of length 3 in 10 variables. Therefore, after expanding the brackets in puzzle 13 each possible monomial of length 3 in 10 variables appears exactly once. Hence puzzle 13 gives us an example of a perfect packing of $(10, 3)$ -products.

Problem 14. There exists exactly one monomial of length 0 and we can get it from the only product that contains zero brackets.

Problem 15. There exist exactly n monomials of length 1 in n variables. Each $(n, 1)$ -product contains two such monomials, so $A_{n,1} \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. This bound is achieved if we take $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sums of different variables.

Problem 16. Since n is even, for each variable x_i there is $n - 1$ variable different from it. Consider any packing of $(n, 2)$ -products. Consider the set of all $(n, 2)$ -products in this packing which contain x_i in one of the brackets. Consider the variables contained in the other bracket of such products; all these variables should be pairwise distinct, otherwise we will get the same monomial twice. That's why each of n variables is contained in no more than $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \frac{n}{2} - 1$ products. Each $(n, 2)$ -product contains 4 variables, that's why

$$A_{n,2} \leq \frac{1}{4}n \left(\frac{n}{2} - 1 \right) = \binom{\frac{n}{2}}{2}.$$

At the same time it is possible to make a packing with this number of products. Let's combine rigidly n variables into $\frac{n}{2}$ pairs and take a product of any two different pairs. We will get a packing made out of exactly $\binom{\frac{n}{2}}{2}$ products.

Remark 5 In fact, problem 16 is equivalent to the case of even n in problem 2.

Problem 17. Let $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Consider any two (n, k) -products. Let's match each variable with a vertex of a graph. For each bracket of each of two products let's join the corresponding vertices by an edge. The obtained graph is partitioned into cycles of even length and (for odd n) one chain with an odd number of vertices. Let's choose every second vertex in each cycle. In the chain (if it exists), we also choose every second vertex (so that the border vertices are not chosen). Then the set of the chosen vertices gives a monomial appearing in the decompositions of both products. Thus, a packing cannot contain more than one product.

Problem 18. Let $k = \frac{n}{2} - 1$. Then each (n, k) -product doesn't contain exactly two from the given n variables. We assert that for any two products of the packing the sets of variables that are not contained in these products are disjoint. Indeed, otherwise we would have two products on the $2k + 1$ variables, which by problem 17 cannot appear in a packing. Hence, $A_{n,\frac{n}{2}-1} \leq \frac{n}{2}$.

On the other hand, there exists a packing with $k + 1$ products. Let's partition rigidly n variables into $\frac{n}{2}$ pairs and make all the possible products, that contain the sums of all pairs except one. It is easy to see that any monomial from the decomposition of one such product is not in the decomposition of any other. Hence, we get a packing made out of exactly $\frac{n}{2}$ products.

Problem 19. In total, there are exactly $\binom{n}{k}$ different monomials of length k of n variables, the decomposition of each (n, k) -product gives 2^k such monomials. Hence, $A_{n,k} \leq \frac{\binom{n}{k}}{2^k}$.

Problem 20. The upper bound follows from problem 19. The example of packing of length 15 is demonstrated in puzzle 13.

Problem 21. If the sets of variables in two (n, k) -products coincide, then by problem 17 their decompositions contain a common monomial. Hence, $A_{n,k} \leq \binom{n}{2k}$.

Problem 22. Consider a packing of (n, k) -products of the maximal length. i. e. of length $A_{n,k}$. Take any product, consider the set of variables in it, and add to this set an arbitrary variable from the remaining

ones (this can be performed in $n - 2k$ ways for every product). By problem 17, all the sets of $2k + 1$ variables obtained in this manner are distinct. Hence, $A_{n,k}(n - 2k) \leq \binom{n}{2k+1}$, or

$$A_{n,k} \leq \frac{\binom{n}{2k+1}}{n - 2k} = \frac{n!}{(2k+1)!(n-2k-1)!(n-2k)} = \frac{\binom{n}{2k}}{2k+1}.$$

Now, take any product, consider the set of variables in it, and remove one of them (this can be made in $2k$ ways for every product). By the same problem, all such sets are also distinct. Hence $A_{n,k} \cdot 2k \leq \binom{n}{2k-1}$, or

$$A_{n,k} \leq \frac{\binom{n}{2k-1}}{2k} = \frac{n!}{(2k-1)!(n-2k+1)! \cdot 2k} = \frac{\binom{n}{2k}}{n-2k+1}.$$

Problem 23. Let's combine rigidly the variables into $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ pairs and let's take into a product the arbitrary combinations of k of them. It is easy to see that no two such products have a common monomial in their decompositions. Hence, we get a packing made out of exactly $\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{k}$ products.

Problem 24. Single out a pair of variables x_{n-1} and x_n . Now we construct the following set of products. Include in it all the products from a packing of $(n-2, k)$ -products of maximum length. Also, take a packing of $(n-2, k-1)$ -products of maximal length, add a new bracket $(x_{n-1} + x_n)$ to each of them, and add all obtained products to our new packing. One can easily see that the decompositions of the obtained products do not share any monomial. Hence, the required recurrent inequality follows.

Problem 25. Divide the initial set into two subsets of n_1 and n_2 different variables, respectively. Now we construct the following packing of products: for each i , $0 \leq i \leq k$, we multiply the packings corresponding to numbers $A_{n_1,i}$ $A_{n_2,k-i}$ and then sum up all obtained packings. Clearly, we obtain a new packing. Since the length of the packing obtained by multiplying two packings equals to their lengths' product, we get the required inequality.

Problem 26. One can get the perfect packing of $(n-1, k-1)$ -products from a perfect packing of (n, k) -products in the following way. Take any variable, say, x_n . Find all the products in the packing that contain x_n , and remove from each of them the bracket containing x_n . We get a set of $(n-1, k-1)$ -products. It is not hard to see that their sum is the required packing.

Problem 27. See the solution to problem 29.

Problem 28. We will show that n should be congruent to 2 modulo 8. Assume that there exists a perfect packing of $(8k+i, 3)$ -products. Then, by problem 26, there exists a perfect packing of $(8k+i-1, 2)$ -products, which is known to exist only for $8l+1$ variables. Thus, $n = 8k+2$. On the other hand, by applying problem 27 to the perfect packing of $(10, 3)$ -products, we get that for all the numbers of the form $n = 8k+2$ there exists a perfect packing.

Answer: $n = 8k+2$ for all positive integers k .

Problem 29. Due to problem 26, for every $i = 0, 1, \dots, k$ there exist perfect packings of $(n_1 - i, k - i)$ - and of $(n_2 - i, k - i)$ -products. Let X, Y, Z be pairwise disjoint sets of variables such that $|X| = n_1 - k$, $|Y| = n_2 - k$, $Z = \{z_0, z_1, \dots, z_k\}$.

Construct the following collection of packings. For every $i = 0, 1, \dots, k$ we take a perfect packing M_i of $(n_1 - k + i, i)$ -products on the set of variables $X \cup \{z_0, \dots, z_{i-1}\}$, along with a perfect packing N_i of $(n_2 - i, k - i)$ -products on the set of variables $Y \cup \{z_{i+1}, \dots, z_k\}$. Multiply each products in M_i by each product in N_i ; clearly, the obtained expressions form a packing of $(n_1 + n_2 - k + 1, k)$ -products on the set of variables $X \cup Y \cup Z$; denote this packing by U_i . We claim that the union U of all these packings is

a perfect packing of $(n_1 + n_2 - k + 1, k)$ -products. Formally,,

$$\bigsqcup_{i=0}^k U_i, \quad U_i = P\left(X \sqcup \left\{ \bigsqcup_{j=0}^{i-1} z_j \right\}, i\right) \times P\left(Y \sqcup \left\{ \bigsqcup_{j=i+1}^k z_j \right\}, k-i\right), \quad (1)$$

where $P(\dots)$ are corresponding perfect packings.

We start with showing that every monomial m of degree k appears in the decompositions of all products in U at most once. Arguing indirectly, assume that m appears in decompositions of two products lying in U_i and U_j , $i < j$. Since m appears in U_i , the monomial contains exactly i variables from $X \cup \{z_0, \dots, z_{i-1}\}$ and does not contain z_i . Since m appears in U_j , the monomial contains exactly $k-j$ variables from $Y \cup \{z_{j+1}, \dots, z_k\}$ and does not contain z_j . The remaining $k-i-(k-j)=j-i$ variables appearing in m should be among the variables z_{i+1}, \dots, z_{j-1} ; but each of these variables may appear only once, and there are $j-i-1$ of them. A contradiction.

It remains to prove that every monomial m of degree k indeed appears in the decompositions of products in U . Clearly, m contains at least 0 variables from X , but at most k variables from $X \cup Z$. Therefore, there exists a maximal $i < k+1$ such that m contains at least i variables from $X \cup \{z_0, \dots, z_{i-1}\}$. The maximality condition tells us that m contains at most i variables from $X \cup \{z_0, \dots, z_i\}$. Therefore, m contains *exactly* i variables from $X \cup \{z_0, \dots, z_{i-1}\}$, and m does not contain z_i — hence, m also contains exactly $k-i$ variables from $Y \cup \{z_{i+1}, \dots, z_k\}$. This means that m appears in a decomposition of some product in U_i .

Problem 30. The solution uses the same construction as in the solution of problem 29; it suffices to use only the arguments showing the disjointness of all the decompositions of the products. Surely, since the initial packings are not necessary perfect, after the expanding of brackets some monomials of length k may be absent.

The exploration of properties of the characteristic polynomial

Problem 32. Let c be an arbitrary (complex) root of the polynomial; then

$$|c|^n = |c^n| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k c^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_k |c|^k.$$

This means that the value of the polynomial at point $x = |c|$ is non-positive. Since the leading coefficient of the polynomial is positive, the polynomial takes on positive values at large enough points. Thus there is a root on ray $[|c|, +\infty)$, which was to be proved.

Problem 33. Let P be the initial polynomial, \tilde{P} be the polynomial with increased coefficient C_k , and α be the largest root of P . Then $\tilde{P}(\alpha) < 0$. Since the leading coefficient of P is positive, there exists β such that $\tilde{P}(\beta) > 0$. Hence, the polynomial \tilde{P} has the root larger than α .

Problem 34. For every $x \geq 2$, we have

$$x^n \geq (1+x/2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x/2)^k > \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} (x/2)^k \geq \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} x^k,$$

where the last inequality follows from problem 19.

Hence, $x^n - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} x^k > 0$ for any $x \geq 2$.

Problem 35. It is clear that $P_n(0) \leq 0$, therefore the largest real root of the polynomial $P_n(x)$ is nonnegative. Denote $P_n^+(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k}x^k$. All $a_{n,k}$ are nonnegative, therefore the polynomial $P_n^+(x)$ has no positive roots. Hence, the largest real root of the polynomial $P'_n(x) = P_n(x)P_n^+(x)$ is the same as that of the polynomial $P_n(x)$.

We have $P'_n(x) = P_n(x)P_n^+(x) = x^{2n} - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k}x^k\right)^2 = x^{2n} - \sum_{k=0}^{2n-1} u_{2n,k}x^k$, where $u_{2n,k} = \sum_{i=0}^k a_{n,i}a_{n,k-i}$. By the problem condition, the concatenation of two phrases is also a phrase, so $a_{2n,k} \geq \sum_{i=0}^k a_{n,i}a_{n,k-i}$. Hence, $a_{2n,k} \geq u_{2n,k}$ for any k .

Let x_0 be the largest (real) root of the polynomial $P_n(x)$; then x_0 is also the largest (real) root of the polynomial $P'_n(x)$, i.e. $P'(x_0) = 0$. Since $a_{2n,k} \geq u_{2n,k} \geq 0$, by problem 33 the largest positive root of $P_{2n}(x)$ is at least x_0 .

Puzzle 36. Answer. The inequality from problem 25.

Problem 37. Assume that $x_0^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k}x_0^k$. Then

$$x_0^{2n} = \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k}x_0^k \right)^2 \leq \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^k A_{n,i} \cdot A_{n,k-i} \right) x_0^k \leq \sum_{k=0}^n A_{2n,k}x_0^k,$$

where the last inequality follows from problem 25.

Hence, the inequality $x^{2n} - \sum_{k=0}^n A_{2n,k}x^k \leq 0$ also holds for $x = x_0$. Since the coefficient of the highest power is positive, for large enough x the polynomial takes on positive values, hence it has a root on a ray $[x_0, \infty)$.

Problem 38. We will use the following inequality.

Lemma 1 *The following inequality holds:*

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}.$$

Proof. Expand $n^n = (k + (n-k))^n$ and single out the k -term to obtain

$$n^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{k} k^i (n-k)^{n-i} \geq \binom{n}{k} k^k (n-k)^{n-k},$$

as required. \square

Now we implement Lemma 1 to bring the results of problems 19 and 21 to a more handy form (by weakening them a little). Denote $\lambda = k/n$. Problem 19 yields

$$A_{n,k} \leq \frac{\binom{n}{k}}{2^k} \leq \frac{n^n}{(\lambda n)^{\lambda n} ((1-\lambda)n)^{(1-\lambda)n} \cdot 2^{\lambda n}} = \left((2\lambda)^{-\lambda} (1-\lambda)^{-(1-\lambda)} \right)^n.$$

Analogously, problem 21 implies

$$A_{n,k} \leq \binom{n}{2k} \leq \left((2\lambda)^{-2\lambda} (1-2\lambda)^{-(1-2\lambda)} \right)^n.$$

Let $P_n(x)$ be our polynomial, and let α (or α_n) be its largest root. Let ℓ be the index of the largest term in a sum $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n,k} \alpha^k$. Then the bounds above show that

$$\alpha^n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n,k} \alpha^k \leq n A_{n,\ell} \alpha^\ell \leq n \alpha^\ell \cdot \left(\min \left\{ (2\lambda)^{-\lambda} (1-\lambda)^{-(1-\lambda)}, (2\lambda)^{-2\lambda} (1-2\lambda)^{-(1-2\lambda)} \right\} \right)^n,$$

where $\lambda = \ell/n$. Hence, extracting the root of the degree $n - \ell = (1 - \lambda)n$, we get

$$\alpha \leq \sqrt[n-\ell]{n} \cdot \left(\min \left\{ (2\lambda)^{-\lambda} (1-\lambda)^{-(1-\lambda)}, (2\lambda)^{-2\lambda} (1-2\lambda)^{-(1-2\lambda)} \right\} \right)^{1/(1-\lambda)} =: \sqrt[n-\ell]{n} \cdot f(\lambda).$$

Notice here that $\sqrt[n-\ell]{n} \leq \sqrt[n]{n^2}$, since $\ell \leq n/2$.

We will show that the maximum value f_0 of function f for $\lambda \in (0, 1/2]$ is smaller than 2, and that it can be regarded as the required value $2 - c$. We start with the latter assertion. According to problem 37, each polynomial $P_s(x)$ with $s = n2^q$ has a root not smaller than α ; hence the obtained bounds show $\alpha \leq \sqrt[q]{s^2} \cdot f_0$. As the parameter q tends to infinity, we have $\sqrt[q]{s^2} \rightarrow 1$; hence, $\alpha \leq f_0$.

It remains to prove that $f_0 < 2$. Notice that $f(\lambda) = \min\{g(\lambda), h(\lambda)\}$, where

$$g(\lambda) = \left((2\lambda)^{-\lambda} (1-\lambda)^{-(1-\lambda)} \right)^{1/(1-\lambda)} \quad \text{and} \quad h(\lambda) = \left((2\lambda)^{-2\lambda} (1-2\lambda)^{-(1-2\lambda)} \right)^{1/(1-\lambda)}.$$

We investigate each of these functions separately.

The derivative of logarithm of function $g(x)$ equals

$$(\ln g(\lambda))' = \left(-\frac{\lambda}{1-\lambda} \ln 2\lambda - \ln(1-\lambda) \right)' = -\left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \right)' \cdot \ln 2\lambda = -\frac{\ln 2\lambda}{1-\lambda} - \frac{\lambda \ln 2\lambda}{(1-\lambda)^2} > 0;$$

hence, g is monotonically increasing on our interval. Moreover, $g(1/2) = 2$. So, for any $\lambda_0 < 1/2$ we have $g(\lambda_0) < 2$.

On the other hand, as $\lambda \rightarrow 1/2 - 0$ we have $h(\lambda) \rightarrow (1 \cdot 1)^2 = 1$, since $x^x \rightarrow 1$ as $x \rightarrow +0$. Hence, there exists $\lambda_0 < 1/2$ such that $h(\lambda) < 3/2$ for any $\lambda \in [\lambda_0, 1/2]$.

So, for any $\lambda \in (0, 1/2]$ we have $f(\lambda) \leq \max\{g(\lambda_0), 3/2\} < 2$, i. e. we also have $f_0 < 2$.

Remark 6 It can be shown that the function h is decreasing in a large enough left semi-neighborhood of the point $1/2$. In this semi-neighborhood there is a point λ_0 such that $g(\lambda_0) = h(\lambda_0)$; this means that $f_0 = g(\lambda_0) = h(\lambda_0)$. Computer calculations show that $\lambda_0 = 0,435954877\dots$ $f_0 = 1,971043304\dots$

SOLUTIONS AND COMMENTS

PART II

THE PROBLEMS TO SOLVE AFTER THE INTERMEDIATE FINAL.

Packings of big products

Problem 40. For example,

$$\{x_1x_2(x_3 + 1), \\ (x_1 + x_2)x_3\}.$$

Problem 41. For example,

$$\{(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + x_4)x_5x_6x_7x_8, \\ x_1x_2(x_3 + 1)(x_4 + 1)(x_5 + x_6)x_7x_8, \\ x_1x_2x_3x_4(x_5 + 1)(x_6 + 1)(x_7 + x_8), \\ (x_1 + x_2)x_3x_4x_5x_6(x_7 + 1)(x_8 + 1), \\ x_1x_2(x_3 + x_4)(x_5 + x_6)(x_7 + x_8), \\ (x_1 + x_2)x_3x_4(x_5 + x_6)(x_7 + x_8), \\ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)x_5x_6(x_7 + x_8), \\ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_5 + x_6)x_7x_8\}.$$

Problem 42. For example,

$$\{x_1x_2x_3x_4x_5x_6(x_7 + 1)(x_8 + 1)(x_9 + 1)(x_{10} + 1)(x_{11} + 1)(x_{12} + 1), \\ (x_1 + x_2)x_3x_4(x_5 + 1)(x_6 + 1)(x_7 + x_8)x_9x_{10}(x_{11} + 1)(x_{12} + 1), \\ (x_1 + x_2)x_3x_4(x_5 + 1)(x_6 + 1)(x_7 + 1)(x_8 + 1)(x_9 + x_{10})x_{11}x_{12}, \\ (x_1 + x_2)x_3x_4(x_5 + 1)(x_6 + 1)x_7x_8(x_9 + 1)(x_{10} + 1)(x_{11} + x_{12}), \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + x_4)x_5x_6(x_7 + x_8)x_9x_{10}(x_{11} + 1)(x_{12} + 1), \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + x_4)x_5x_6(x_7 + 1)(x_8 + 1)(x_9 + x_{10})x_{11}x_{12}, \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + x_4)x_5x_6x_7x_8(x_9 + 1)(x_{10} + 1)(x_{11} + x_{12}), \\ x_1x_2(x_3 + 1)(x_4 + 1)(x_5 + x_6)(x_7 + x_8)x_9x_{10}(x_{11} + 1)(x_{12} + 1), \\ x_1x_2(x_3 + 1)(x_4 + 1)(x_5 + x_6)(x_7 + 1)(x_8 + 1)(x_9 + x_{10})x_{11}x_{12}, \\ x_1x_2(x_3 + 1)(x_4 + 1)(x_5 + x_6)x_7x_8(x_9 + 1)(x_{10} + 1)(x_{11} + x_{12}), \\ x_1x_2(x_3 + 1)(x_4 + 1)(x_5 + x_6)(x_7 + x_8)(x_9 + x_{10})(x_{11} + x_{12}), \\ (x_1 + x_2)x_3x_4(x_5 + 1)(x_6 + 1)(x_7 + x_8)(x_9 + x_{10})(x_{11} + x_{12}), \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + x_4)x_5x_6(x_7 + x_8)(x_9 + x_{10})(x_{11} + x_{12}), \\ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_5 + x_6)x_7x_8(x_9 + 1)(x_{10} + 1)(x_{11} + x_{12}), \\ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_5 + x_6)(x_7 + x_8)x_9x_{10}(x_{11} + 1)(x_{12} + 1), \\ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_5 + x_6)(x_7 + 1)(x_8 + 1)(x_9 + x_{10})x_{11}x_{12}\}.$$

Problem 43. Take an s_1 -long packing of big (m_1, t_1, r_1) -products and an s_2 -long packing of big (m_2, t_2, r_2) -products. Enumerate the variables of these packings so that no variable participates in both packings. After that we take a “direct product” of the two packings, multiplying every big product from the first packing by every big product from the second one. One can easily check that we obtain a packing with the required parameters, i.e., an s_1s_2 -packing of big $(m_1 + m_2, t_1 + t_2, r_1 + r_2)$ -products.

Problem 44. Let P be a packing of (n, k) -products. For every product in P , take all $n - 2k$ variables that are absent in it and multiply the product by all those variables as factors of type a); we will get some big product in n variables with $k + (n - 2k) = n - k$ factors of types a) and b) — i.e., a big $(n, n - k)$ -product.

Performing this operation to all products in P , we get a collection P' of big $(n, n - k)$ -products of the same length as P .

Let us show that P' is a packing. Consider any two different big products p_1 and p_2 in P' . Construct the following bipartite graph G : the vertices of the left (resp., right) part correspond to the factors of p_1 (resp., p_2), and two vertices are connected with an edge if and only if the corresponding factor have a common variable. Thus, the vertices corresponding to factors of type a) and b) have degrees 1 and 2, respectively.

We need to show that the decompositions of p_1 and p_2 contain no common monomials. Assume the contrary. In the graph language, the existence of such monomial is equivalent to the existence of a perfect matching in G . Remove all edges of this matching from the graph; all degrees of vertices decrease by 1, so after the removal each vertex of type b) has degree 1, and each vertex of type a) has no edges adjacent to it. But then the set of remaining edges corresponds to a monomial that appears in both initial products (which were transformed to p_1 and p_2). This is impossible, since P is a packing. The obtained contradiction shows that P' is a packing.

Problem 45. Consider any big product p in the packing; let a , b , and c be the numbers of its factors of types a), b), and c), respectively. Since p is a (m, t) -product, we have $a + 2b + c = m$ and $a + b = t$; therefore, $b + c = (a + 2b + c) - (a + b) = m - t$. Notice now that each factor of types b) and c) contains two summands, while that of type a) contains only one summand. So, the decomposition of p contains exactly $2^{b+c} = 2^{m-t}$ monomials. Since the packing contains 2^r big products, the total number of monomials in their decompositions is 2^{m-t+r} .

Now, the total number of monomials in m variables is 2^m . So, if the decompositions of the big products from the packing contain not all possible monomials, then we obtain $2^{m-t+r} < 2^m$, whence $t > r$, as required. Otherwise, one of these decompositions contains monomial 1 which could happen only if all factors in the big product are of type c). But then the decomposition of this big product already contains all possible monomials, so the packing contains only one big product. This is prohibited by the problem condition.

Problem 46. Let $\mathcal{B}_{m-n,i}$, $i = t - n, \dots, t - \lceil \frac{n}{2} \rceil$, be arbitrary $S_{m-n,i}$ -long packings of big $(m - n, i)$ -products; the set of variables for each of them is $\{x_1, \dots, x_{m-n}\}$. Let $\mathcal{P}_{n,k}$, $k = 0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, be arbitrary packings of (n, k) -products of length $A_{n,k}$, the set of variables for each of them is $\{x_{m-n+1}, \dots, x_n\}$. For every $k = 0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, according to problem 44, we transform the packing $\mathcal{P}_{n,k}$ into an $A_{n,k}$ -long packing $\mathcal{P}'_{n,n-k}$ of big $(n, n - k)$ -products. After that we again form a “direct product” of the packings $\mathcal{B}_{m-n,t-n+k}$ and $\mathcal{P}'_{n,n-k}$, i.e., multiply each product of the former one by each product of the latter; we obtain a collection of big (m, t) -products. Finally, we take the union of all obtained collections over all $k = 0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

We claim that the obtained union is a packing of (m, t) -products. Indeed, consider any two different big products in this collection. If they lie in different “direct products”, then the monomials in their decompositions contain different number of variables from $\{x_{m-n+1}, \dots, x_n\}$, so these decompositions share no monomial. Otherwise, these decompositions have no common monomial, since $\mathcal{B}_{m-n,i}$ and $\mathcal{P}'_{n,n-k}$ are packings.

Problem 47. Notice that the sequence $w_\ell = X_{\max}^\ell$ satisfies the same recurrence relation

$$w_{\ell+n} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} w_{\ell+k}$$

(in fact, this is true for every root of the polynomial $P(x)$ in place of X_{\max}).

Since the numbers u_1, u_2, \dots, u_n are positive, there exist some positive constants C_1 and C_2 such that the inequalities $C_1 w_\ell \leq u_\ell \leq C_2 w_\ell$ hold for every $\ell = 1, 2, \dots, n$. Now we use the induction to show that these inequalities hold for all positive integer ℓ ; the base case $\ell \leq n$ has been already established. To

prove the induction step, for $\ell \geq n + 1$ we have

$$u_\ell = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} u_{\ell-n+k} \geq \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,k} w_{\ell-n+k} = C_1 w_\ell;$$

the inequality $u_\ell \leq C_2 w_\ell$ can be checked similarly.

Remark 7 The same arguments work if we know only that the sequence $\{u_\ell\}$ contains n positive elements in a row.

Problem 48. We arrange a recursive construction based on the inequality from problem 46 for $n = 2$. Fix any positive integers m_0, t_0 and take any $s(m_0, t_0 + i)$ -long packings \mathcal{B}_{m_0, t_0+i} of big $(m_0, t_0 + i)$ -products for $i = 0, 1$. We will successively construct packings B_{m_0+2d, t_0+d+i} , $i = 0, 1$, as follows. On the d th step, the packing B_{m_0+2d, t_0+d+1} is obtained from (already constructed) packings $B_{m_0+2(d-1), t_0+(d-1)+i}$, $i = 0, 1$, using the construction from the solution of problem 46. The packing B_{m_0+2d, t_0+d} is obtained from $B_{m_0+2(d-1), t_0+d}$ by augmenting its products with factors of type c) containing two new variables.

The lengths of the obtained packings satisfy the recurrence relation

$$s(-, t) = \sum_{k=0}^1 A_{2,k} \cdot s(-, t-2+k) = s(-, t-2) + s(-, t-1)$$

with a characteristic polynomial

$$x^2 - \sum_{k=0}^1 A_{2,k} x^k = x^2 - x - 1. \quad (2)$$

Due to problem 47, the values of $s(m, t)$ for some m (depending on t) satisfy the relation

$$s(m, t) \geq CX_{\max}^t,$$

where C is some positive constant, and $X_{\max} = 1.6180\dots$ is the largest root of the polynomial (2). Hence, $\log_2 s(m, t) \geq t \log_2 X_{\max} - \log_2 C$. Removing “superfluous” big products to make their number to be a power of 2, and setting $r = \lfloor \log_2 s(m, t) \rfloor$, we obtain for $t \rightarrow \infty$ a sequence of 2^r -long packings of big $(-, t)$ -products such that $\frac{t}{t+r} \rightarrow \frac{1}{1+\log_2(X_{\max})} = 0.5902\dots$

Problem 49. Let \mathcal{B}_t be the packing of big $(-, t)$ -products constructed in the solution of problem 48. We have already shown that the length of \mathcal{B}_t is at least $C\varphi^t$, where $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.6180\dots$. Now, it suffices to show that the packing \mathcal{B}_t contains at most $C'c^t$ big products containing more than r factors of type b) ((for some $c < \varphi$). Denote by $\rho(t, r)$ the number of big products in \mathcal{B}_t with more than r factors of type b). Then the construction yields the recurrence relation $\rho(t, r) = \rho(t-2, r) + \rho(t-1, r-1)$.

Now we define the following constants: $d = \log_2 \varphi$, $A = \frac{3-d}{2}$, $\alpha = \frac{\ln \frac{3-d}{2}}{2 \ln A}$, $\beta = 1 - \alpha$.

We prove that the inequality

$$\rho(t, r) \leq \gamma A^{\alpha t + \beta r} \quad (3)$$

holds for all $0 \leq r \leq t$, where γ is some fixed constant. The proof goes by induction on ℓ . For the base case, we choose $\gamma > 0$ so that the estimate (3) holds for $t = t_0, t_0 + 1$; we will show that this value of γ fits.

To perform an induction step, assume that (3) holds for $t' < t$. Then

$$\rho(t, r) = \rho(t-2, r) + \rho(t-1, r-1) \leq \gamma A^{\alpha t + \beta r} (A^{-2\alpha} + A^{-1}).$$

We claim that $A^{-2\alpha} + A^{-1} = 1$. Indeed, we have $A^{-1} = \frac{2}{3-d}$ and $A^{-2\alpha} = A^{-\frac{\ln(\frac{3-d}{2})}{\ln A}} = e^{-\ln \frac{3-d}{2}} = \frac{1-d}{3-d}$, whence $A^{-2\alpha} + A^{-1} = 1$. This shows that $\rho(t, r) \leq \gamma A^{\alpha t + \beta r}$. The step is proved.

Now set $r = \lfloor \alpha t \rfloor$. Then $\rho(t, r) \leq \gamma A^{\alpha t + \beta \alpha t}$, where $A^{\alpha + \beta \alpha} = 1.5032\dots < \varphi = 1.6180\dots$. Thus, the ratio of the number of “bad” big products in \mathcal{B}_t to the total number of big products in it indeed tends to 0.

Problem 50. Consider an arbitrary 2^r -long rigid packing of big (m, t) -products. Since the packing is rigid, the number m of variables is even; denote $p = m/2$. We may assume that the variables are paired up as $(x_1, x_2), (x_3, x_4), \dots, (x_{m-1}, x_m)$.

To every big product compatible with this pairing, we put into correspondence a word of p letters a , b , and c , where the i th symbol indicates the type of factors containing the variables x_{2i-1} and x_{2i} . Denote by W the set of words corresponding to the products in our packing.

Consider any big (m, t) -product and the word w corresponding to it. Let w' be a word obtained from w by replacing one letter c by either a or b , and let P' be the big product corresponding to w' . Then any monomial in the decomposition of P' also appears in that of P . Therefore, performing series of such replacements, one cannot transform two different words in W into two equal words (otherwise the decompositions of the corresponding big products would share a monomial)³.

Let now W' be the set of all words of letters a and b obtained from the words in W by replacing each letter c by either a or b . Then every word in W' is obtained from exactly one word in W .

To every word consisting of x letters a , y letters b , and z letters c , we assign the *weight* φ^{y+2z} , where $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ is the positive root of the equation $\varphi^2 = \varphi + 1$. Notice that for every word w , after replacing one letter c in w by a and b we obtain two words whose total weight is equal to the weight of w .

Every word in W contains d letters a , $t - 2d$ letters b , and $p - t + d$ letters c (for some $d \leq t/2$); therefore, its weight equals $\varphi^{(t-2d)+2(p-t+d)} = \varphi^{2p-t}$. Due to the above argument, the total weight of all words in W' obtained from w also equals φ^{2p-t} . On the other hand, the total weight of all words in W' does not exceed the total weight of all words consisting of p letters a and b , i.e.,

$$\sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \varphi^{p-i} = (1 + \varphi)^p = \varphi^{2p}.$$

Since $|W| = 2^r$, and every word in W' is obtained from exactly one word in W , we conclude that

$$2^r \cdot \varphi^{2p-t} \leq \varphi^{2p},$$

whence $2^r \leq \varphi^t$, and $r \leq t \log_2 \varphi$. This yields $\frac{t}{t+r} \geq \frac{1}{1+\log_2 \varphi}$. Finally, the inequality is in fact strict, at least because the number $\log_2 \varphi$ is irrational (otherwise the number φ^ℓ for some positive integer ℓ would be a power of 2, so it would be integer).

Problem 51. Similarly to problem 48, we arrange a recursive construction based on the inequality from problem 46 for $n = 10$. Fix any positive integers m_0, t_0 and take any $s(m_0, t_0 + i)$ -long packings \mathcal{B}_{m_0, t_0+i} of big $(m_0, t_0 + i)$ -products for $i = 0, \dots, 9$. We will successively construct packings $\mathcal{B}_{m_0+10d, t_0+5d+i}$, $i = 0, \dots, 9$, as follows. On the d th step, the packings $\mathcal{B}_{m_0+10d, t_0+5d+i}$ for $i = 5, \dots, 9$ are obtained from (already constructed) packings $\mathcal{B}_{m_0+10(d-1), t_0+5(d-1)+j}$, $j = 0, \dots, 9$, using the construction from the solution of problem 46. The packings $\mathcal{B}_{m_0+10d, t_0+5d+i}$, $i = 0, \dots, 4$, are obtained from $\mathcal{B}_{m_0+10(d-1), t_0+5d+i}$ by augmenting its products with factors of type c) containing ten new variables. The lengths of the

³In fact, the formulated condition is a *criterion* for the big products corresponding to the words of the set W to form a rigid packing. A curious reader is invited to prove this criterion.

obtained packings satisfy the recurrence relation

$$\begin{aligned} s(-, t) = \sum_{k=0}^5 A_{10,k} \cdot s(-, t-10+k) &= s(-, t-10) + 5s(-, t-9) + \\ &+ 10s(-, t-8) + 15s(-, t-7) + 5s(-, t-6) + s(-, t-5) \end{aligned}$$

with a characteristic polynomial

$$x^{10} - \sum_{k=0}^5 A_{10,k} x^k = x^{10} - x^5 - 5x^4 - 15x^3 - 10x^2 - 5x - 1. \quad (4)$$

Due to problem 47, the values of $s(m, t)$ for some m (depending on t) satisfy the relation

$$s(m, t) \geq CX_{\max}^t,$$

where C is some positive constant, and $X_{\max} = 1.6556\dots$ is the largest root of the polynomial (4). Hence, $\log_2 s(m, t) \geq t \log_2 X_{\max} - \log_2 C$. Removing “superfluous” big products to make their number to be a power of 2, and setting $r = \lfloor \log_2 s(m, t) \rfloor$, we obtain for $t \rightarrow \infty$ a sequence of 2^r -long packings of big $(-, t)$ -products such that $\frac{t}{t+r} \rightarrow \frac{1}{1+\log_2(X_{\max})} = 0.5789\dots$

Problem 52. Denote by $l_j(t)$ the number of big products in the packing $\mathcal{B}_{m,t}$ from the solution of problem 51, which contain exactly j factors of type b).

Choose some $\varepsilon > 0$. We claim that, if t is sufficiently large and $j \geq (2/3 + \varepsilon)t(1 + o(1))$, then we have

$$\frac{l_{j-2}(t+2)}{l_j(t)} > 15. \quad (5)$$

For an arbitrary big product α in $\mathcal{B}_{m,t}$, denote by $n_i(\alpha)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, the number of “pieces” of variables of length 10 in the product α containing exactly i factors of type b) (we do not take into account the prefix piece obtained from the induction base, neither the pieces containing factors of type c)). Let $j_0(\alpha)$ be the number of factors of type b) in the prefix of α , and let $t_0(\alpha)$ be the total number of factors of types a) and b) in the prefix of α . Now, the ratio of the number $j(\alpha)$ of factors of type b) to the total number $t(\alpha)$ of factors of types a) and b) is expressed as

$$\frac{j(\alpha)}{t(\alpha)} = \frac{5n_5(\alpha) + 4n_4(\alpha) + 3n_3(\alpha) + 2n_2(\alpha) + n_1(\alpha) + j_0(\alpha)}{5n_5(\alpha) + 6n_4(\alpha) + 7n_3(\alpha) + 8n_2(\alpha) + 9n_1(\alpha) + 10n_0(\alpha) + t_0(\alpha)}. \quad (6)$$

For our claim, we are interested only in big products α in the packing $\mathcal{B}_{m,t}$ (for sufficiently large t) which satisfy $\frac{j(\alpha)}{t(\alpha)} > \frac{2}{3} + \varepsilon'$, $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Therefore, due to (6), we may assume that $\min_{\alpha \in \mathcal{B}_{m,t}} n_5(\alpha) \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$,

and that for sufficiently large t every big product $\alpha \in \mathcal{B}_{m,t}$ we are interested in satisfies $n_5(\alpha) > n_3(\alpha) + 1$.

Denote by $S(t, j, n_5)$ the set of big products in $\mathcal{B}_{m,t}$ which contain exactly j factors of type b), as well as exactly n_5 pieces of length 10 with exactly 5 factors of type b). Take some values of j and t (where t is sufficiently large), and consider any value of n_5 such that the set $S(t, j, n_5)$ is nonempty. In every big product α in $S(t, j, n_5)$ we replace one length 10 piece with 5 factors of type b) by an appropriate length 10 piece with 3 such factors. This can be made in $15n_5$ ways, each of which results in a big product from $\mathcal{B}_{m,t+2}$ containing exactly $j-2$ factors of type b); every such product is obtained from $n_3(\alpha) + 1 < n_5$ big products from $S(t, j, n_5)$. (It may happen that, to make this procedure correct, we will need to swap some pieces of factors of type c) with the adjacent pieces; but such swapping is determined uniquely in terms of the resulting piece.) Thus, to the set $S(t, j, n_5)$ we put into correspondence the

set of big products $S(t+2, j-2, n_5 - 1)$ whose cardinality more than 15 times larger. Applying this argument to all values of n_5 we obtain that the inequality (5) indeed holds for sufficiently large t and $j \geq (2/3 + \varepsilon)t(1 + o(1))$.

Now we will prove that the number of big products with at least $k_0 = \lfloor 0.70t \rfloor$ factors of type b) in the packing $\mathcal{B}_{m,t}$ is asymptotically smaller than the total number of big products in the packing (for our purposes, it suffices to show that for infinitely many values of t).

To this end, we estimate the ratio of these two numbers. Choose d (depending on t) so that $d \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$, but at the same time $\frac{\lfloor 0.70t \rfloor - 2d}{t+2d} > 2/3 + \varepsilon$. Using the inequality (5) we get

$$\frac{\sum_{j=k_0}^t l_j(t)}{s(t)} < \frac{\sum_{j=k_0-2d}^{t-2d} l_j(t+2d)}{15^d s(t)} < \frac{s(t+2d)}{15^d s(t)}.$$

From problem 47 we get that for infinitely many values of t the inequality $\frac{s(t+2d)}{s(t)} \leq 2X_{\max}^{2d}$ holds; for such values of t we have

$$\frac{\sum_{j=k_0}^t l_j(t)}{s(t)} < 2 \left(\frac{X_{\max}^2}{15} \right)^d \rightarrow 0, \quad d \rightarrow \infty.$$

Thus, the number of big products with at least $t \log_2 X_{\max} = 0.7274\dots$ factors of type b) is asymptotically smaller than $s(t)$, at least for infinitely many values of t . (In fact, one can show that this holds for *all* sufficiently large values of t .) Consequently, for such values of t , removing such big products from the packing $\mathcal{B}_{m,t}$ constructed in the solution of problem 51, we still get a sequence of 2^r -long packings of big (m, t, r) -products such that $\frac{t}{t+r} \rightarrow \frac{1}{1+\log_2(X_{\max})} = 0.5789\dots$

References

- [1] Tarannikov Y. V. Generalized proper matrices and constructing of m -resilient Boolean functions with maximal nonlinearity for expanded range of parameters. — Siberian Electronic Mathematical Reports, 2014. — V. 11, pp. 229–245 (<http://semr.math.nsc.ru/v11/p229-245.pdf>).
- [2] Sauskan A. V., Tarannikov Yu. V. On packings of (n,k)-products. — Siberian Electronic Mathematical Reports, 2016. — V. 13, pp. 888–896 (<http://semr.math.nsc.ru/v13/p888-896.pdf>).
- [3] Agahanov N. H., Bogdanov I. I., Kozhevnikov P. A., Podlipskij O. K., Tereshin D. A., *Vserossijskie olimpiady shkol'nikov po matematike 1993–2006: Okruzhno i final'nyj etapy*, Pod red. N. H. Agahanova, M.: MCNMO, 2007, Problem 447, pp. 58, 276–277 (in Russian).
- [4] Tarannikov Yu. V., *Nesokratimye razlozhenija odnorodnyh proizvedenij dvuchlenov dlja postroenija m-ustojchivyh funkciy s maksimal'no vozmozhnoj nelinejnoscju*, Problemy teoreticheskoy kibernetiki. Materialy XII mezhdunarodnoj konferencii (Kazan, 16–20 June 2014), Kazan': Otechestvo, (2014), 271–272 (in Russian).
- [5] Tarannikov Yu. V., *O vozmozhnosti postroenija m-ustojchivyh funkciy s optimal'noj nelinejnoscju v ramkah odnogo metoda*, Materialy XII Mezhdunarodnogo seminara Diskretnaja matematika i ee prilozhenija imeni akademika O. B. Lupanova (Moscow, MSU, 20–25 June 2016.), M.: Izd-vo mehaniko-matematicheskogo fakul'teta MSU, (2016), 394–397 (in Russian).

Инварианты изображений графов на плоскости

представляют А. Еннэ, Т. Зайцев, А. Рябичев и А. Скопенков *

Содержание

1 Задачи до промежуточного финиша	3
1.1 Теоремы Радона и Тверберга для плоскости	3
1.2 Линейные реализации графов	4
1.3 Основные результаты о планарности графов	6
1.4 Число пересечения для ломаных на плоскости	8
1.5 Инвариант самопересечения изображения графа	10
Указания и решения к задачам до промежуточного финиша	11
2 Задачи после промежуточного финиша	18
2.1 Полиномиальный алгоритм распознавания планарности	18
2.2 Топологическая теорема Радона для плоскости	20
2.3 К доказательству теоремы Тверберга для плоскости	20
Указания и решения к задачам после промежуточного финиша	23
3 Дополнительные задачи для продвинутых команд	27
3.1 Пересечения со знаком и для отображений в прямую	27
3.2 Топологическая гипотеза Тверберга для плоскости	28

Введение

Основные результаты данного текста следующие:

- полиномиальный алгоритм распознавания планарности графов (утверждение 1.3.6) и объяснение, как его придумать (§2.1);
- теоремы Радона, Тверберга и Езайдына для плоскости (линейные и топологические) 1.1.1.c, 1.1.5.c, 2.2.1, 3.2.2, 3.1.4.d, 3.2.5 и их элементарные доказательства (§§1.1, 1.1, 3.2; для теорем Тверберга и Езайдына в частных случаях).

Элементарные доказательства, которые мы приводим, не упоминают конфигурационных пространств и когомологических препятствий. Однако основное содержание этого текста — *введение в алгебраическую топологию* (точнее, в теорию конфигурационных пространств и когомологических препятствий) *мотивированное алгоритмическими, комбинаторными и геометрическими задачами*. Мы представим некоторые идеи

*Мы благодарны И. Богданову, Р. Карасеву, Ю. Макарычеву, Г. Челнокову и М. Танцеру за плодотворные обсуждения, а также Е. Морозову, Е. Стрельцову и А. Щепиновой за перевод частей текста.

А. Еннэ: Петрозаводский Государственный Университет.

Т. Зайцев: Высшая Школа Экономики.

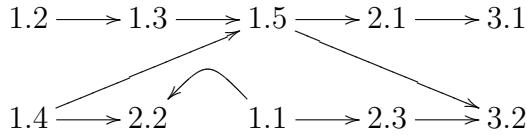
А. Рябичев: Высшая Школа Экономики, Независимый Московский Университет.

А. Скопенков: Московский Физико-Технический Институт, Независимый Московский Университет. Частично поддержан Российским Фондом Фундаментальных Исследований, гранты номер 07-01-00648а и 15-01-06302, грантами фонда Саймонса и грантом фонда Д. Зимина «Династия». Email: skopenko@mccme.ru. <http://www.mccme.ru/~skopenko>

решения топологической гипотезы Тверберга, поставленной в 1966 г. и окончательно решенной в 2015 г., см. обзоры [BZ, Sk16].

Два вышеуказанных направления связаны между собой понятием *числа ван Кампена*, обобщения которого требуются для обоих пунктов. Идея более общего *препятствия* (=инварианта) ван Кампена нужна и для придумывания полиномиального алгоритма распознавания планарности, и для формулировки теоремы Езайдына.

Для решения приводимых задач не нужно специальных знаний, все новые определения будут даны. При этом потребуется (и будет далее развиваться) опыт сообразительности, т.е. математическая культура.



Вот схема (наиболее существенной) зависимости пунктов. Таким образом, начинать можно с п. 1.1, 1.2 или 1.4.

Важные утверждения называются ‘теоремами’, ‘леммами’ и т.д. Они также являются задачами для решения, если явно не указано противоположное. Как правило, мы приводим *формулировку* утверждения перед его *доказательством*.¹ В таких случаях для доказательства утверждения могут потребоваться следующие задачи. Это всегда явно оговаривается в подсказках, а иногда и прямо в тексте.

Соглашения

Если текст задачи является утверждением, то в задаче требуется его доказать. Если номер задачи помечен звездочкой (например, (b)*), эта задача посложнее соседних. Такие задачи можно отложить до тех пор, пока не будут решены остальные.

Участник (или группа участников) конференции, решающий задачи проекта, получает «боб» за каждое *записанное* решение, оцененное в «+» или «+.». Дополнительные бобы могут выдаваться за красивые решения, решения сложных проблем, или оформление некоторых решений в системе TeX. У жюри бесконечно много бобов. Решения можно сдавать и устно, отдавая один боб за каждые пять попыток (неважно, удачных или нет).

Если вы застряли на какой-нибудь задаче, советуем перейти к следующим, они могут помочь. Приглашаем участников, работающим над проектом, *обсуждать* с жюри все возникающие вопросы. Особо успешным решателям мы выдаем *дополнительные задачи* для исследования.

Пожалуйста, сообщите нам, если Вам знакомы какие-то из основных задач. Если Вы подтвердите свои знания, сообщив нам строгие доказательства некоторых из них, Вам будет разрешено не получать плюсы по всем этим задачам.

¹Часто происходит обратное: формулировки красивых результатов и важных проблем, ради которых была придумана теория, приводятся только *после* продолжительного изучения этой теории (или не приводятся совсем). Это способствует появлению представления о математике как науке, изучающей немотивированные понятия и теории. Такое представление принижает ценность математики.

1 Задачи до промежуточного финиша

1.1 Теоремы Радона и Тверберга для плоскости

1.1.1. (a) Существуют такие 4 точки на плоскости, что для любого их разбиения на две пары отрезок, соединяющий точки в первой паре, не пересекает отрезок, соединяющий точки во второй паре.

(b) Существуют такие 4 точки на плоскости, ни одна из которых не лежит внутри треугольника, образованного оставшимися точками.

(c) **Теорема Радона для плоскости.** Для любых 4 точек на плоскости либо одна из них лежит внутри треугольника, образованного оставшимися точками, либо их можно разбить на две пары так, что отрезок, соединяющий точки в первой паре, пересекает отрезок, соединяющий точки во второй паре.

Выпуклой оболочкой конечного набора точек плоскости называется наименьший (по включению, или по площади) выпуклый многоугольник, их содержащий. Теорему Радона для плоскости можно переформулировать так: *любые 4 точки на плоскости можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются*.

1.1.2. (Ср. с задачей 2.2.2) Если никакие 3 из 4 точек на плоскости не лежат на прямой, то существует ровно одно их (*радоновское*) разбиение на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

1.1.3. (a) Существуют 6 точек плоскости, при любом разбиении которых на три множества выпуклые оболочки этих трех множеств не имеют общей точки.

(b) Существуют 7 точек на плоскости, для любой нумерации $1, \dots, 7$ которых точка 1 не лежит в одном из (двумерных) треугольников 234 и 567.

(c) Существуют 7 точек на плоскости, для любой нумерации $1, \dots, 7$ которых точка пересечения отрезков 12 и 34 не лежит в треугольнике 567.

1.1.4. (a) Вершины любого выпуклого 8-угольника на плоскости можно разбить на 3 множества, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.

(b)* То же для 7-угольника.

(c) Любые 15 точек плоскости можно разбить на 3 множества, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.

(d)* То же для 7 точек.

Подсказка к доказательству утверждений 1.1.4.d и 1.1.5.c приведена в задаче 2.3.8.

1.1.5. (a) Для любого r существуют $3r - 3$ точки плоскости, при любом разбиении которых на r множеств выпуклые оболочки этих множеств не имеют общей точки.

(b) Для любого r существует такое N , что любые N точек плоскости можно разбить на r множеств, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.

(c)* **Теорема Тверберга для плоскости.** Для любого r любые $3r - 2$ точки плоскости можно разбить на r множеств, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.

1.2 Линейные реализации графов

В этом и следующем пунктах мы представляем две формализации понятия реализуемости графа на плоскости. Важны оба способа; второй способ использует первый. (Они оказываются эквивалентными по теореме Фари 1.3.4; их многомерные версии не эквивалентны.)

Под k точками на плоскости подразумевается k -элементное подмножество плоскости, т.е., считается, что эти k точек различны.

Утверждение 1.2.1.² (a) Из любых 5 точек на плоскости можно выбрать две такие непересекающиеся пары точек, что отрезок, соединяющий точки первой пары, пересекает отрезок, соединяющий точки второй пары.

Более того, если никакие 3 из них не лежат на прямой, то количество точек пересечения внутренностей отрезков, соединяющих данные точки, нечетно.

(b) Даны две тройки точек на плоскости. Тогда существуют два пересекающихся отрезка, не имеющие общих вершин, каждый из которых соединяет точки из разных троек.

Утверждение 1.2.1 легко доказывается с помощью рассмотрения выпуклой оболочки точек.

Теорема 1.2.2 (Общего положения). Для любого n существуют такие n точек в трехмерном пространстве, что отрезки, их соединяющие, не имеют общих внутренних точек.

1.2.3. Для любых пяти точек 1, 2, 3, 4, 5 на плоскости если отрезки

(a) jk , $1 \leq j < k \leq 5$, $j \neq 2$, имеют непересекающиеся внутренности, то точки 1 и 2 находятся по разные стороны от треугольника 345, ср. рис. 1 справа;

(b) jk , $1 \leq j < k \leq 5$, $(j, k) \notin \{(1, 2), (1, 3)\}$, имеют непересекающиеся внутренности, то

ЛИБО точки 1 и 2 находятся по разные стороны от треугольника 345,

ЛИБО точки 1 и 3 находятся по разные стороны от треугольника 245.

(c) jk , $1 \leq j < k \leq 5$, $(j, k) \notin \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$, имеют непересекающиеся внутренности, то

ЛИБО точки 1 и 2 находятся по разные стороны от треугольника 345,

ЛИБО точки 1 и 3 находятся по разные стороны от треугольника 245,

ЛИБО точки 1 и 4 находятся по разные стороны от треугольника 235.

(d) Ой... Вы уже догадались, как формулируется эта задача и вообще как при изучении вложимости возникают булевые функции.

Эти утверждения иллюстрируют некоторые идеи NP-трудности распознавания реализуемости 2-гиперграфов в \mathbb{R}^4 [Sk', §4]; ср. с задачей 1.5.6.

Графом (V, E) называется конечное множество V вместе с набором $E \subset \binom{V}{2}$ его двухэлементных подмножеств (т. е. неупорядоченных пар несовпадающих элементов).³ Элементы данного конечного множества называются **вершинами**. Выделенные пары вершин называются **ребрами**.

²Это «линейные» версии непланарности графов K_5 и $K_{3,3}$. Но доказываются они проще, ибо не требуют леммы о четности 1.4.4.

³Общепринятый термин для понятия графа, данного здесь — *граф без петель и кратных ребер или простой граф*.

Графы G_1 и G_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение f множества V_1 вершин графа G_1 на множество V_2 вершин графа G_2 , удовлетворяющее следующему условию: вершины $A, B \in V_1$ соединены ребром тогда и только тогда, когда вершины $f(A), f(B) \in V_2$ соединены ребром.

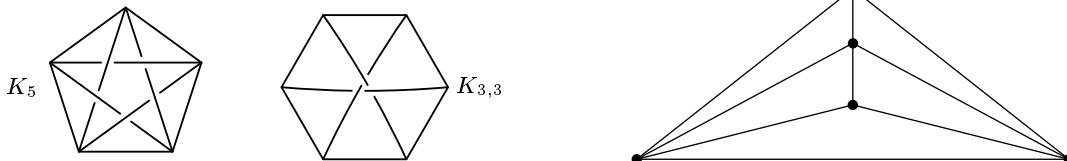


Рис. 1: (Слева) Непланарные графы K_5 и $K_{3,3}$.
 (Справа) Изображение графа K_5 без одного из ребер на плоскости

Граф с n вершинами, любые две из которых соединены ребром, называется *полным* и обозначается K_n . Через $K_{m,n}$ обозначается *полный двудольный граф* с долями из m и из n вершин: в нем имеются все ребра между вершинами разных долей. См. рис. 1.

Неформально говоря, граф линейно реализуем в \mathbb{R}^d (например, на плоскости или в трехмерном пространстве), если его можно без самопересечений нарисовать в \mathbb{R}^d так, чтобы ребра изображались прямолинейными отрезками. Формально, граф **линейно реализуем в \mathbb{R}^d** , если существует семейство отрезков, вершины которых соответствуют вершинам графа, сами отрезки — ребрам графа, и внутренности отрезков не пересекаются. Такое семейство отрезков называется *линейной реализацией* графа.

Следующие результаты являются классическими:

- график K_4 и даже график K_5 без ребра линейно вложимы в плоскость (рис. 1 справа).
- ни график K_5 , ни график $K_{3,3}$ не вложим линейно в плоскость (утверждение 1.2.1);
- любой график линейно вложим в пространство (теорема общего положения 1.2.2).

1.2.4. (а) Существует алгоритм распознавания линейной вложимости графов в плоскость.

(Строгое определение алгоритма непростое, поэтому мы не приводим его, а принимаем решения, основанные на интуитивном представлении об алгоритмах. Более формально, п. (а) означает, что существует алгоритм вычисления функции, которая по любому графу выясняет, является ли он линейной вложимым в плоскость. Аналогично формализуются другие утверждения об алгоритмах в этом тексте.)

(б) Оцените сверху количество шагов в Вашем алгоритме для данного количества вершин графа.⁴

Для решения пригодятся следующие две задачи. Набор точек на плоскости называется набором **общего положения**, если никакие три из них не лежат на прямой и никакие три отрезка, их соединяющие, не имеют общей внутренней точки.

1.2.5. (а) Если график линейно реализуем на плоскости, то существует линейная реализация этого графа, вершины которой находятся в общем положении.

(б) На сколько частей делят плоскость n прямых общего положения (т.е. никакие две из которых не параллельны и никакие три из которых не имеют общей точки)?

Пусть A, A' — две точки и M — множество на плоскости. Множества $M \cup A$ и $M \cup A'$ называются *элементарно изотопными*, если отрезок AA' не пересекается ни с одной прямой, проходящей через любые две точки множества M . Два множества на плоскости называются *изотопными*, если их можно соединить последовательностью множеств, в которой любые два соседние множества элементарно изотопны.

1.2.6. (а) Для любого n существует конечное число n -элементных множеств на плоскости таких, что любое n -элементное множество на плоскости изотопно одному из них.

(б)* (Загадка) Оцените сверху количество таких n -элементных подмножеств.

⁴Поскольку для плоского графа с n вершинами и e ребрами выполнено $e \leq 3n - 6$, и поскольку существуют планарные графы с $e = 3n - 6$, «сложность» по количеству ребер «такая же», как по количеству вершин.

Критерий линейной реализуемости графа на плоскости следует из теоремы Фари 1.3.4 и любого критерия планарности (например, из теоремы Куратовского 1.3.3).

1.3 Основные результаты о планарности графов

Неформально говоря, график планарен, если его можно «без самопересечений» нарисовать на плоскости. Формально, график называется **планарным** (или кусочно-линейно вложимым в плоскость), если на плоскости существует набор несамопересекающихся (незамкнутых) ломаных, концы которых соответствуют вершинам графа, сами ломанные — ребрами графа, и внутренности ломаных не пересекаются.

Например, графы K_5 и $K_{3,3}$ (рис. 1) не планарны. Доказательство для K_5 приведено в доказательстве (более сильного) утверждения 1.5.1, см. также задачу 1.5.5.

1.3.1. (а) Существует алгоритм распознавания планарности графов. (Используйте без доказательства теорему Куратовского 1.3.3.)

(б) Оцените сверху количество шагов в Вашем алгоритме для данного количества вершин графа.

(с)* **Теорема.** *Существует алгоритм распознавания планарности графов, полиномиальный по количеству вершин n , т.е. число шагов в котором не превосходит Cn^k для некоторых чисел C и k .* (Если не получается, то см. утверждение 1.3.6.)

Неформально говоря, *подграф* данного графа — это его часть. Формально, график G называется **подграфом** графа H , если каждая вершина графа G является вершиной графа H , и каждое ребро графа G является ребром графа H . (При этом две вершины графа G , соединенные ребром в графе H , не обязательно соединены ребром в графике G .)

Ясно, что подграф планарного графа планарен.

Операция *подразделения ребра* графа показана на рис. 2. Два графа называются *гомеоморфными*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций подразделения ребра и обратных к ним. Это эквивалентно существованию графа, который можно получить из каждого из данных графов операциями подразделения ребра.

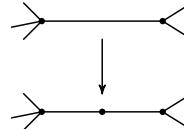


Рис. 2: Подразделение ребра

1.3.2. (а) Существует график, степень каждой вершины которого больше двух, не имеющий подграфа, изоморфного K_5 , но имеющий подграф, гомеоморфный K_5 .

(б) Граф планарен тогда и только тогда, когда некоторый график, гомеоморфный ему, линейно вложим в плоскость.

Ясно, что гомеоморфные графы являются планарными одновременно.

Теорема 1.3.3 (Куратовского). *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу K_5 или $K_{3,3}$ (рис. 1).*

Следующий результат показывает, что любой планарный график можно нарисовать без самопересечений на плоскости так, что каждое ребро будет отрезком.

Теорема 1.3.4 (Фари). *Если график планарен (т.е. кусочно-линейно вложим в плоскость), то он линейно вложен в плоскость.*

Доказывать эти теоремы здесь не требуется (доказательства см., например, в [Pr04, Sk05, ST07]). Но теорему Кура́товского можно применять для доказательства других результатов.

Замечание об алгоритмах. (Это замечание можно пропустить без ущерба для понимания остального материала.) Несмотря на красоту и простоту теорем Кура́товского и Фари, соответствующие алгоритмы распознавания планарности графов медленно работают. Поэтому интересны другие способы распознавания планарности. Еще один (экспоненциальный) алгоритм основан на рассмотрении *утолщений* [Sk15, §1]. Существует даже линейный по количеству вершин алгоритм [BM04, HT74]. Этот линейный алгоритм непростой. Следующий критерий 1.3.6.а интересен, поскольку он дает полиномиальный алгоритм.

1.3.5. (а) Имеется 5 кавалеров, упорядоченных по благородству, и 5 их жен. В танце участвуют два кавалера и жена третьего, но не все такие тройки благопристойны. Докажите, что для некоторых двух непересекающихся пар кавалеров сумма следующих трех чисел нечетна:

- количество кавалеров первой пары, лежащих по благородству между кавалерами второй пары,
- количество жен кавалеров первой пары, которые могут танцевать со второй парой,
- количество жен кавалеров второй пары, которые могут танцевать с первой парой⁵

(б) То же, но имеется 6 кавалеров, 3 из которых англичане, а 3 — французы (все 6 упорядочены по благородству произвольным образом), а в танце участвует 1 англичанин, 1 француз и жена любого из оставшихся четырех кавалеров (но не все такие тройки благопристойны).

Утверждение 1.3.6. (а)* Пусть дан граф и произвольное упорядочение его вершин. Граф планарен тогда и только тогда, когда существуют его вершины V_1, \dots, V_s и ребра $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, для которых $V_i \notin \gamma_i$ при любом $i = 1, \dots, s$ и для любых несмежных ребер σ, τ графа

количество концов ребра σ , лежащих между концами ребра τ ,

имеет ту же четность, что и

количество тех $i = 1, \dots, s$, для которых либо $V_i \in \sigma$ и $\gamma_i = \tau$, либо $V_i \in \tau$ и $\gamma_i = \sigma$.

(б) Существует алгоритм распознавания разрешимости системы k линейных уравнений с k неизвестными, полиномиальный по k .

Часть «тогда» пункта (а) следует из теоремы Кура́товского 1.3.3 и утверждений 1.3.5. Вы сможете доказать часть «только тогда» пункта (а) после изучения п. 2.1, в котором также объясняется, как придумать формулировку (он содержит переформулировку *когомологического препятствия ван Кампена*). Формально, часть «только тогда» пункта (а) следует из утверждений 2.1.1.b, 2.1.2 и 2.1.7.b. Пункт (б) доказывается с помощью *исключения неизвестных*, см. подробности в [CLR, Vi02].

⁵Благопристойность — свойство именно неупорядоченной пары кавалеров и жены. Например, если A, B могут танцевать с женой C и даже B, C могут танцевать с женой A , то не обязательно C, A могут танцевать с женой B .

А вот переформулировка на математическом языке. Не существует пять семейств A_1, \dots, A_5 (неупорядоченных) пар (различных элементов) из $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ таких, что

- никакое $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ не входит ни в одну пару из A_j , и
- для любых четырех различных чисел $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ количество элементов в $\{i, j\}$, лежащих между k и l , имеет ту же четность, что и

$$|\{\{k, l\}\} \cap A_i| + |\{\{k, l\}\} \cap A_j| + |\{\{i, j\}\} \cap A_k| + |\{\{i, j\}\} \cap A_l|.$$

1.4 Число пересечения для ломаных на плоскости

1.4.1. На плоскости имеется 14 точек общего положения: 7 красных и 7 желтых. Может ли количество всех точек пересечения красных отрезков (т.е. отрезков, соединяющих красные точки) с желтыми отрезками быть равным 7?

Указание. Для решения этой задачи используйте следующий факт: *Для любых 3 красных и 3 желтых точек общего положения на плоскости количество точек пересечения красных отрезков и желтых отрезков четно.*

Если мы докажем теорему Жордана 1.4.3.b для треугольника, этот факт будет очевиден, поскольку желтая ломаная (составленная из сторон желтого треугольника) заходит *внутрь* красного столько же раз, сколько выходит *наружу*. Приведем более простое рассуждение, которое обобщается на высшие размерности [SS].

Пересечение выпуклой оболочки красного треугольника и желтой ломаной является объединением конечного числа ломаных (невырожденных). Точки пересечения красной и желтой ломаной суть концы этих ломаных. Их число четно. Из этого и следует нужный факт.

1.4.2. * (a) Придумайте алгоритм, который по замкнутой несамопересекающейся ломаной на плоскости и двум точкам вне нее выясняет, можно ли эти точки соединить некоторой ломаной, не пересекающей данной ломаной.

(b) То же, если стерта часть ломаной, лежащая вне некоторого квадрата, содержащего данные точки.

Для решения задач 1.4.2.ab и 1.4.3.bc докажите и используйте лемму о четности 1.4.4. Из данного пункта только эта лемма используется далее.

Подмножество плоскости называется *связным*, если любые две его точки можно соединить ломаной, лежащей в этом подмножестве. (Осторожно, в для более общих подмножеств, чем рассматриваемые здесь, определение связности другое!)

1.4.3. (a)* Любая замкнутая несамопересекающаяся ломаная делит плоскость не более, чем на две связные части.

(b) **Теорема Жордана.** Замкнутая несамопересекающаяся ломаная L на плоскости разбивает плоскость, т.е. $\mathbb{R}^2 - L$ несвязно.⁶

(c) Любые две ломаные в квадрате, соединяющие его противоположные вершины, пересекаются.

Две плоских ломаных находятся в *общем положении*, если их вершины находятся в общем положении.

Лемма 1.4.4 (о четности). *Любые две замкнутые плоские ломаные в общем положении пересекаются в четном числе точек.*⁷

Эта лемма сводится к частному случаю треугольников, доказанному в указании к задаче 1.4.1. Таким же образом, как в этом частном случае, лемма может быть доказана в «промежуточном» случае, если только одна из ломаных является треугольником. Однако мы приведем другое доказательство этого «промежуточного» случая, которое обобщается на общий случай (и на высшие размерности) [SS]. Доказательство сводит

⁶Если Вы выводите теорему Жордана из формулы Эйлера, то подумайте, как доказывается формула Эйлера. Будьте осторожны: в доказательстве теоремы 1.2 из [Pr04] лемма о четности 1.4.4 используется неявно, когда в первом предложении на стр. 20 написано, что четность меняется непрерывно.

⁷Это нетривиально, поскольку ломаные могут иметь самопересечения, и поскольку теорема Жордана 1.4.3.b нетривиальна. Выводить лемму о четности из теоремы Жордана или формулы Эйлера неразумно, ибо их доказательства используют лемму о четности. Будьте осторожны: утверждение [Pr04, задача 1.2] неверно для «восьмерки» и треугольника, проходящего через точку самопересечения «восьмерки».

«промежуточный» случай к случаю треугольников с помощью идеи *сингулярного конуса*, которая является короткой формализацией идеи *непрерывного передвижения ломаной на бесконечность* [BE82, §5].

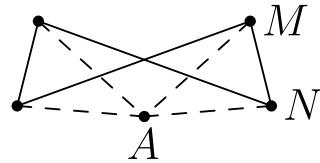


Рис. 3: Идея сингулярного конуса

Доказательство леммы 1.4.4 для случая когда одна из ломаных b является треугольником. Обозначим другую ломаную через a . Возьмем такую точку A , что $\partial(AMN)$ и b находятся в общем положении для каждого ребра MN ломаной a . Периметр треугольника T будем обозначать через ∂T . Тогда (см. рис. 3)

$$|a \cap b| = \sum_{MN} |MN \cap b| \equiv \sum_{MN} |\partial(AMN) \cap b| \equiv 0.$$

Здесь суммирование идет по всем ребрам MN ломаной a ; второе равенство следует из частного случая двух треугольников. \square

1.4.5. (a) Возьмем плоскую ломаную L и точку $A \notin L$. Покрасим точку A в цвет 0. Далее, каждую точку $P \notin L$ покрасим в цвет 0 или 1, совпадающий по четности с числом точек пересечения с L пути *общего положения* (дайте определение самостоятельно), соединяющего P и A . Докажите, что такая раскраска корректно определена.

(b) Дополнение до замкнутой плоской ломаной (вершины которой находятся в общем положении) допускает шахматную раскраску (такую, что соседние области покрашены в разные цвета, см. рис. 4).

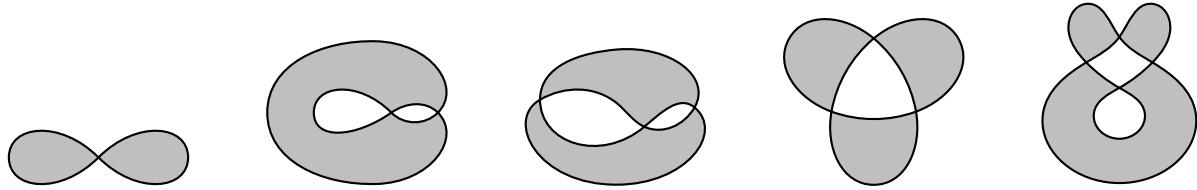


Рис. 4: Внутренности по модулю 2 ломаных

Для плоской ломаной ее *внутренностью по модулю 2* называется объединение черных областей шахматной раскраски (при условии, что бесконечная область покрашена в белый цвет).

1.5 Инвариант самопересечения изображения графа

Линейным отображением $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа $K = (V, E)$ в плоскость назовем отображение $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$. Образом $f(AB)$ ребра AB графа назовем отрезок $f(A)f(B)$.

Кусочно-линейным отображением $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа K в плоскость назовем набор (незамкнутых) ломаных, концы которых соответствуют вершинам графа, сами ломаные — ребрам графа. Образом $f(\sigma)$ ребра σ графа K назовем ломаную, соответствующую ребру σ .

Ясно, что кусочно-линейное отображение графа K в плоскость — «то же самое», что линейное отображение в плоскость некоторого графа, гомеоморфного графу K .

На этом языке граф планарен, если существует его кусочно-линейное отображение в плоскость, для которого образы ребер (=ломаные) несамопересекающиеся и имеют непересекающиеся внутренности.

Утверждение 1.5.1. (a) Для любого кусочно-линейного отображения графа K_5 в плоскость найдутся два несмежных ребра графа K_5 , образы которых пересекаются.

(b)* То же для любого непрерывного отображения $K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Проиллюстрируем важную идею препятствия Ван Кампена (см. утверждение 1.3.6.а) на примере «количественной версии» непланарности графа K_5 (леммы 1.5.4), аналогичной части «более того» утверждения 1.2.1.а. Докажем, что при «почти любом» изображении графа K_5 на плоскости количество точек пересечения несмежных ребер нечетно.

Линейное отображение графа в плоскость называется *линейным отображением общего положения*, если образы вершин находятся в общем положении. Кусочно-линейное отображение $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа K в плоскость называется *отображением общего положения*, если существует график H , гомеоморфный графу K , и линейное отображение общего положения графа H в плоскость, «соответствующее» отображению f .

1.5.2. При любом кусочно-линейном отображении общего положения графа в плоскость образы любых двух несмежных ребер пересекаются в конечном числе точек.

Для отображения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения назовем **числом ван Кампена** (или инвариантом самопересечения) $v(f)$ четность числа точек пересечения образов несмежных ребер. Ясно, что если график K планарен, то $v(f) = 0$ для некоторого отображения общего положения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$.

1.5.3. (a) Существует такое отображение общего положения $f : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$, что $v(f) = 1$.

(b) Если K — несвязное объединение двух циклов длины 3, то $v(f) = 0$ для любого отображения общего положения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$.

(c) Существуют планарный график K и его отображение общего положения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которого $v(f) \neq 0$.

Лемма 1.5.4. Для любого отображения общего положения графа K_5 в плоскость число ван Кампена нечетно.

1.5.5. Верны ли аналоги утверждений 1.5.1, 1.5.3.а и леммы 1.5.4 с заменой графа K_5 на график $K_{3,3}$?

1.5.6. (a) При любом кусочно-линейном вложении в плоскость графа, получающемся из K_5 удалением ребра, соединяющего вершины 1 и 2, образы точек 1 и 2 находятся по разные стороны от образа треугольника 345. (Эта формулировка осмыслена по теореме Жордана 1.4.3.б.)

(b,c,d) Сформулируйте и докажите аналог задач 1.2.3.bcd для кусочно-линейных вложений.

Инварианты изображений графов на плоскости

представляют А. Еннэ, Т. Зайцев, А. Рябичев и А. Скопенков

Указания и решения к задачам до промежуточного финиша⁸

1.1.1. (a) Возьмем треугольник и точку внутри него.

(b) Возьмем квадрат.

(c) См. доказательство утверждения 1.1.2.

1.1.2. Так как точки общего положения, то их выпуклая оболочка — или треугольник, или четырехугольник. Если выпуклая оболочка данных 4 точек это четырехугольник, то радоновская точка — точка пересечения диагоналей. Если же выпуклая оболочка — треугольник, то радоновская точка — та точка множества, которая не является вершиной выпуклой оболочки.

1.1.3. (a) *Первое решение.* Возьмем по паре точек в каждой вершине треугольника (или близкий набор различных точек).

Второе решение. Возьмем 6 вершин выпуклого шестиугольника, которые являются точками общего положения. Если в каком-то из 3 множеств разбиения одна точка, то из-за выпуклости шестиугольника эта точка не лежит внутри выпуклой оболочки любого множества оставшихся точек, следовательно у трех наших оболочек нет общей точки. Если же в каждом из множеств разбиения по 2 точки, то наши оболочки — это 3 отрезка. Так как наши точки общего положения, то эти отрезки не имеют общей точки.

(b) Возьмем выпуклый 7-угольник.

(c) Возьмем правильный треугольник ABC и его центр O . Определим точки A_1, B_1, C_1 как образы A, B, C соответственно, при гомотетии с центром в O и коэффициентом $1/2$.

Докажем, что данный набор точек удовлетворяет условию задачи. Заметим, что любую пару пересекающихся отрезков можно движением перевести в одну из пар: $\{AB_1, BA_1\}, \{AO, A_1B_1\}, \{AO, BA_1\}$. Также видно, что $A_1 = AO \cap A_1B_1 = AO \cap A_1B$ не лежит ни в $\triangle BC_1C$, ни в $\triangle B_1C_1C$, а $AB_1 \cap BA_1$ не лежит в $\triangle OC_1C$.

1.1.4. (a) *Первое решение; написано Н. Волковым.* Назовем вершины восьмиугольника в порядке обхода $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, см. рис. 5 . Разобъем множество его вершин на три непересекающиеся множества — $\{A_1, A_3, A_5, A_7\}$, $\{A_2, A_6\}$ и $\{A_4, A_8\}$. Выпуклые оболочки этих множеств — четырехугольник $A_1A_3A_5A_7$ и отрезки A_2A_6 и A_4A_8 соответственно. Покажем, что они имеют общую точку.

Рассмотрим пересечение отрезка A_2A_6 и четырехугольника $A_1A_3A_5A_7$. Так как исходный восьмиугольник выпуклый, то четырехугольник $A_1A_2A_3A_6$ тоже выпуклый. Значит, отрезки A_2A_6 и A_1A_3 пересекаются, как диагонали выпуклого четырехугольника. Аналогично, пересекаются отрезки A_2A_6 и A_5A_7 . Тогда из выпуклости получаем, что пересечение A_2A_6 с $A_1A_3A_5A_7$ — это отрезок с концами на сторонах A_1A_3 и A_5A_7 четырехугольника $A_1A_3A_5A_7$. Аналогично, пересечение A_4A_8 с $A_1A_3A_5A_7$ — это отрезок с концами на сторонах A_1A_7 и A_3A_5 четырехугольника $A_1A_3A_5A_7$. Так как $A_1A_3A_5A_7$ выпуклый, то отрезки с концами на его противоположных сторонах пересекаются. Значит, отрезки A_2A_6 , A_4A_8 и четырехугольник $A_1A_3A_5A_7$ имеют общую точку.

Второе решение. Назовем вершины восьмиугольника в порядке обхода $A_1\dots A_8$. Разобъем множество его вершин на три непересекающиеся множества — $\{A_1, A_5\}$, $\{A_2, A_4, A_7\}$, $\{A_3, A_6, A_8\}$ и обозначим их выпуклые оболочки через X, Y и Z соответственно.

⁸Компьютерные версии рисунков 3, 4 и 10 были подготовлены И. Деркачем, В. Ковыршиной и Ю. Тихоновым.

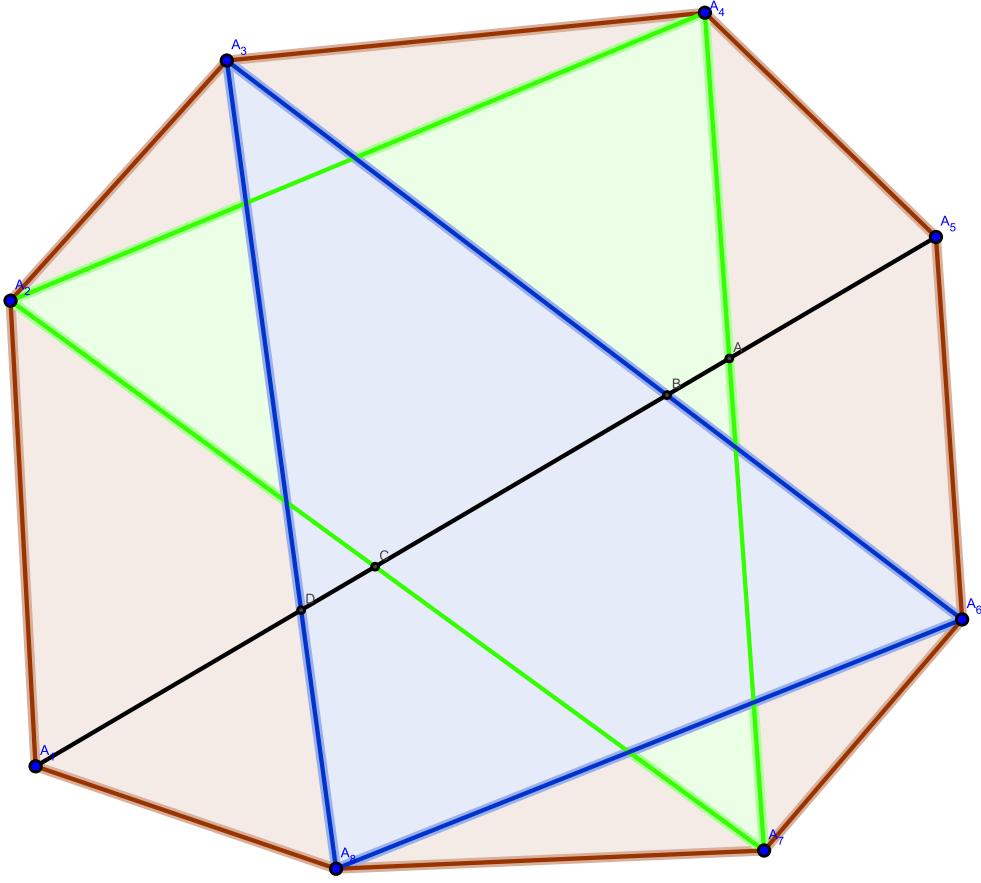


Рис. 5: Выпуклый восьмиугольник.

Тогда $X = \triangle A_2A_4A_7$, $Y = \triangle A_3A_6A_8$ и Z — отрезок A_1A_5 . Покажем, что они имеют общую точку.

Определим

$$A := A_4A_7 \cap A_1A_5, \quad B := A_2A_7 \cap A_1A_5, \quad C := A_3A_6 \cap A_1A_5, \quad D := A_3A_8 \cap A_1A_5.$$

Тогда $X \cap Y = AB$ и $X \cap Z = CD$, следовательно $\overrightarrow{X \cap Y \cap Z} = \overrightarrow{AB \cap CD} \neq \emptyset$, что легко видеть из того, что точки A_1, B, D, A_5 лежат на $\overrightarrow{A_1A_5}$ именно в таком порядке, и что точки A_1, C, A, A_5 также лежат на $\overrightarrow{A_1A_5}$ именно в таком порядке.

(b) Обозначим выпуклый 7-угольник $A_1 \dots A_7$. Проведем отрезок A_4A_7 . Определим точки A, B, C, D, E, F как точки пересечения $A_5A_3, A_5A_2, A_5A_1, A_6A_3, A_6A_2, A_6A_1$ соответственно с A_4A_7 . Разберем 2 случая.

Случай, когда точки A, B, C, D, E, F идут на $\overrightarrow{A_4A_7}$ именно в таком порядке (см. рис. 6). В этом случае определим X как $A_1A_5 \cap A_3A_6$. Докажем, что X лежит в $\triangle A_2A_4A_7$. Так как C лежит между A_4 и D , то X лежит с той же стороны от A_4A_7 , что и A_1 . Но из-за выпуклости семиугольника точки X и A_3 лежат по разные стороны от A_2A_4 . Аналогично с A_2A_7 . Следовательно, X лежит в $\triangle A_2A_4A_7$.

Случай, когда точки A, B, C, D, E, F идут на $\overrightarrow{A_4A_7}$ в любом другом порядке. Очевидно, что точки A, B, C располагаются на $\overrightarrow{A_4A_7}$ именно в таком порядке. Аналогичное утверждение верно для точек D, E, F и для пар точек $(A, D), (B, E), (C, F)$. Если C лежит между D и E , то C лежит в $\triangle A_2A_3A_6$. Следовательно можно считать, что C лежит между E и F . Аналогично можно считать, что D лежит между A и B . Значит

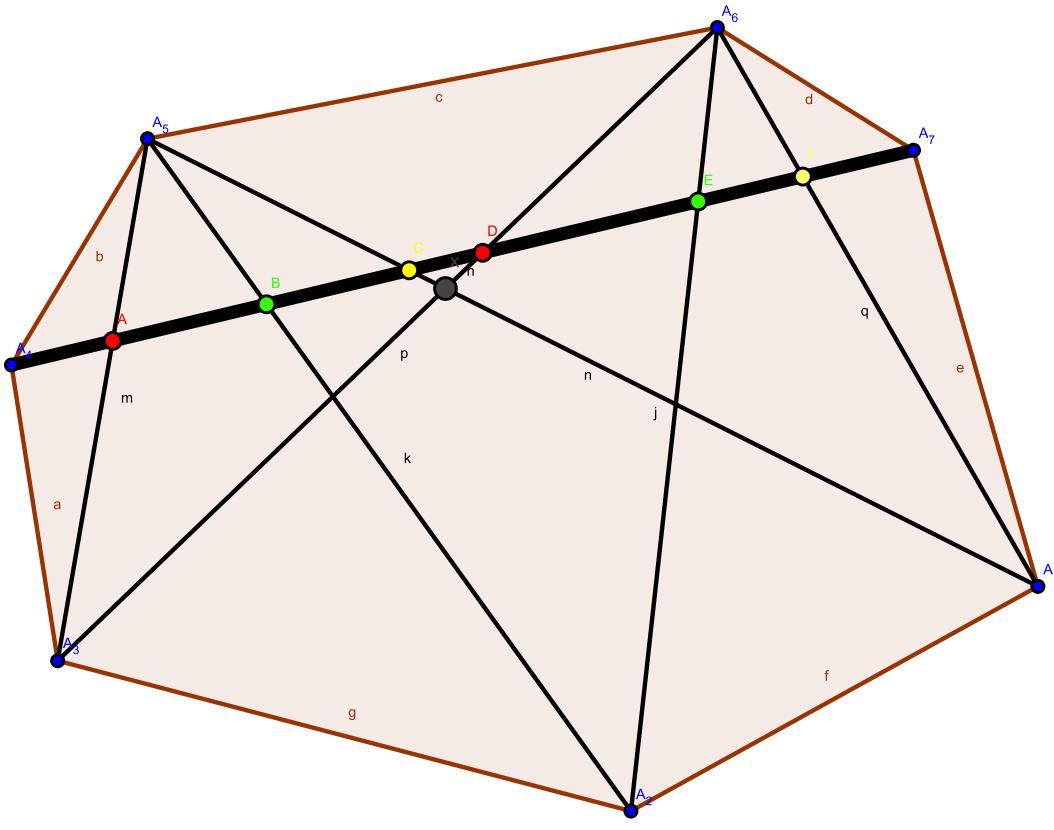


Рис. 6: Выпуклый семиугольник.

точки лежат на $\overrightarrow{A_4A_7}$ в порядке $ADBECF$. В таком случае E лежит между A и C , а значит, в $\triangle A_1A_3A_5$.

Другое решение, написанное А. Львовым и Т. Ковалевым. Аналогичное решение придумано В. Кулишовым. Рассмотрим выпуклый семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Точка пересечения A_3A_7 и A_2A_6 лежит внутри $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, т.к. A_3A_7 и A_2A_6 лежат внутри него. Если точка пересечения A_3A_7 и A_2A_6 лежит в треугольнике $A_1A_4A_5$, тогда разбиение исходных семи точек на A_3A_7 , A_2A_6 и $A_1A_4A_5$ является тверберговским. Если точка пересечения A_3A_7 и A_2A_6 лежит вне $A_1A_4A_5$, значит она или в $A_1A_5A_6A_7$, или в $A_1A_2A_3A_4$. Не умаляя общности допустим, что она лежит внутри четырехугольника $A_1A_5A_6A_7$. Докажем, что тверберговским будет разбиение $A_2A_4A_6$, A_3A_7 , и A_1A_5 . Действительно, точка пересечения A_1A_5 и A_3A_7 не лежит в $A_1A_2A_6A_7$, т.к. иначе точка пересечения A_2A_6 и A_3A_7 лежит в $A_1A_2A_3A_4A_5$. Эта точка не лежит внутри треугольника $A_2A_3A_4$, т.к. A_1A_5 не пересекается с $A_2A_3A_4$. Эта точка не лежит внутри $A_4A_5A_6$, т.к. A_3A_7 не пересекается с $A_4A_5A_6$. И эта точка не лежит вне $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, т.к. A_1A_5 и A_3A_7 лежат внутри него.

(с) Возьмем множество Z из 15 точек. Разберем вершины выпуклой оболочки множества Z . Если их не менее, чем восемь, то разобьем эти 8 точек на 3 множества по пункту (а).

Если же выпуклая оболочка состоит меньше, чем из 8 точек, то возьмем вершины выпуклой оболочки множества Z , образующие ее границу, как множество разбиения S_1 , а так как осталось не менее 4 точек, то оставшиеся точки можно разбить на 2

множества S_2, S_3 , выпуклые оболочки которых пересекаются. При этом это пересечение будет лежать внутри выпуклой оболочки множества S_1 .

1.1.5. (a) *Первое решение.* Предположим противное. Возьмем выпуклый $(3r - 3)$ -угольник, никакие 3 диагонали которого не пересекаются в одной точке. По принципу Дирихле, среди множеств разбиения есть либо множество из 1 вершины, либо 3 множества из 2 вершин. В первом случае получаем противоречие вследствие выпуклости многоугольника, во втором случае — благодаря общности положения вершин.

Второе решение. Возьмем по $r - 1$ точке в вершинах треугольника или близкую конфигурацию.

(b) Эти решения написаны И. Богдановым и А. Полянским.

Теорема о центральной точке: Пусть на плоскости есть $3r$ точек. Тогда найдется такая точка плоскости, что любая полуплоскость, содержащая данную точку содержит по крайней мере r точек из нашего множества.

Доказательство. Рассмотрим выпуклые оболочки любых $2r + 1$ и более точек. По теореме Хелли все они имеют общую точку O (т.к. любые три из них имеют общую точку). Тогда эта точка будет центральной. Предположим, что это не так. Тогда существует прямая через эту точку, что одна из полуплоскостей, содержащая точку O , содержит меньше, чем r точек. Значит ее дополнение содержит более $2r$ точек. Значит, многоугольник, образованный этими точками, содержит точку O . Но это невозможно. Противоречие. Теорема о центральной точке доказана.

Первое решение. Возьмем $N = 9r$. Итак, O лежит в выпуклой оболочке любых $6r + 1$ данных точек. Иначе говоря, из любых $6r + 1$ данных точек можно выбрать три таких, что треугольник с вершинами в них содержит O . Будем выбирать такие треугольники, выкидывать их, выбирать новые и т.д. Это можно сделать хотя бы r раз.

Второе решение.

Возьмем $N = 3r$. Теперь соединим наши $3r$ точек с центральной точкой и пронумеруем наши точки от 1 до $3r$ так, чтобы номера нестрого возрастали по часовой стрелке (относительно O). Легко видеть (из теоремы о центральной точке), что треугольник с вершинами $i, i + r, i + 2r \pmod{3r}$ покрывает точку O .

1.2.1. (a) Предположим, напротив, что существуют такие 5 точек $OABCD$ на плоскости, что нужную пару выбрать нельзя. Тогда $A \notin OB$ и $B \notin OA$. Значит, A не лежит на луче OB . Поэтому можно считать, что точки A, B, C, D идут в том порядке, в котором они видны из O . Тогда треугольники OAC и OB пересекаются в единственной точке O . Значит, по следующей версии леммы о четности 1.4.4 $AC \cap BD \neq \emptyset$ — противоречие.

Предположим, что контуры двух треугольников на плоскости пересекаются в единственной точке, и прямая, бесконечно близкая к ней, пересекает их в четырех различных точках. Тогда точки X, Y соответствующие одному треугольнику соединены с точками Z, T соответствующими другому треугольнику, т.е. отрезок XY содержит либо обе, либо ни одной из точек Z, T .

Доказательство. Обозначим точку пересечения O , а треугольники — $OX'Y'$ и $OZ'T'$ (так, что X, Y, Z, T — точки пересечения прямой и OX', OY', OZ', OT' соответственно). Пусть $a := \partial(OX'Y')$ и $b := \partial(OZ'T')$. Отсюда следует утверждение леммы, поскольку

$$|XY \cap \{Z, T\}| = |XY \cap b| = |\partial(OXY) \cap b| - 1 \equiv |a \cap b| + |\partial(XYY'X') \cap b| - 1 \equiv 0.$$

Здесь последняя конгруэнтность выполняется, поскольку $|a \cap b| = 1$ и верна лемма о четности 1.4.4 (собственно, нам нужен случай, когда b — треугольник).

(b) Аналогично (a).

1.2.2. Выберем в пространстве три точки, не лежащие на одной прямой. Предположим, у нас есть $n \geq 3$ точек в общем положении. Тогда существует конечное число плоскостей, проходящих через тройки из этих n точек. Значит, в пространстве существует точка, не принадлежащая никакой из этих плоскостей. Добавим эту точку к нашему n -точечному множеству. Так как «новая» точка не лежит в одной плоскости ни с какой тройкой из n «старых» точек, то в рассматриваемом множестве из $n+1$ точки все точки находятся в общем положении. А это значит, что *для каждого n существует n точек в пространстве, находящихся в общем положении.*

Выберем такие n точек. Пусть A — множество всех отрезков, соединяющих пары этих точек. Если какие-то два отрезка из A с концами в разных точках пересекаются, то 4 конца этих отрезков лежат в одной плоскости. Если какие-то два отрезка из A с общим концом пересекаются не только в этой общей конечной точке, то три конца этих двух отрезков лежат на одной прямой. Мы пришли к противоречию.

1.2.3. (a) Пять точек можно привести в общее положение, не изменяя ни одного из рассматриваемых свойств. По условию количество точек пересечения отрезка 12 с контуром треугольника 345 равно количеству точек пересечения внутренностей отрезков, соединяющих данные пять точек. Оно нечетно по утверждению 1.2.1.a.

(b,c,d) Эти утверждения аналогичным образом следуют из утверждения 1.2.1.a.

1.2.4, 1.2.5, 1.2.6. [Ta, Chapters 1 and 6].

Ответ к 1.2.4.b — более, чем экспоненциальное.

1.3.1. (a) См. детали в [Ta, Chapters 1 and 6]. *Другой алгоритм* получается из утверждения 1.2.4.a и теоремы Фари.

(b) Более, чем экспоненциальное [Ta, Chapters 1 and 6].

(c) Следует из утверждения 1.3.6.a,b.

1.3.2. (a) Возьмем 7 вершин 1234567. Любые 2 из вершин 12345, кроме пар $\{3, 4\}$ и $\{4, 5\}$, соединены ребром, 6 соединено с $\{3, 4, 7\}$, 7 соединено с $\{4, 5, 6\}$. Тогда в этом графе только 5 вершин степени ≥ 4 , но они не все соединены ребрами. Чтобы получить подграф, гомеоморфный K_5 , надо удалить ребро 67.

(b) Утверждение следует из определения планарности. Если граф планарен, то каждое ребро — это ломаная. Отметив вершины каждой ломаной как вершины нового графа, а звенья каждой ломаной как ребра нового графа, получим требуемое. В другую сторону аналогично.

1.3.5. Просуммируем рассматриваемые суммы по всем 15 неупорядоченным парам непересекающихся пар кавалеров. Докажите, что она нечетна для любого выбора благоприятных троек.

1.4.1. Нет, не может, т. к. это число всегда четно.

Доказательство четности. (Аналогично доказательству леммы о четности 1.4.4.) Обозначим желтые точки через A_1, A_2, \dots, A_7 , а красные — через B_1, B_2, \dots, B_7 . Возьмем две точки C и D , так чтобы все 16 точек были в общем положении. Тогда

$$0 \equiv \sum_{i < j, k < l} |\partial(CA_iA_j) \cap \partial(DB_kB_l)| \equiv \sum_{i < j, k < l} |A_iA_j \cap B_kB_l|.$$

Здесь первое равенство следует из факта, приведенного в указании, а второе из того, что каждый отрезок CA_i или DB_j присутствует в шести треугольниках, следовательно лежащие на нем точки пересечения «посчитаны» в первой сумме четное число раз.

1.4.2. Обозначим точки через A и B . Вот алгоритм.

Проведем все прямые, проходящие через A, B и каждую вершину ломаной. Возьмем точку C , не лежащую ни на одной из них. Найдем число точек пересечения ломаной

ACB и данной ломаной. Если это число четно, то ответ «можно», а если нечетно, то ответ «нельзя».

Доказательство для случая нечетности аналогично утверждению 1.4.5. Обозначим исходную ломаную через L . Предположим, что существует ломаная L_1 , соединяющая A и B , которая не пересекает L . Заменим L_1 на близкую ломаную L'_1 (т. е. на такую, вершины которой соответствуют вершинам L_1 и удалены от них менее чем на ε), такую что вершины L'_1 вместе с вершинами L и точкой C образуют набор точек общего положения. Обозначим концы L'_1 через A' и B' . Если ε достаточно мало, то L'_1 не пересекает L , а число точек пересечения ломаной $A'CB'$ с L такое же, как у ACB . Применив лемму о четности 1.4.4 к замкнутым ломанным $A'CB' \cup L'_1$ и L , получаем противоречие, т. к. эти ломаные пересекаются в нечетном числе точек.

Доказательство для случая четности аналогично утверждению 1.4.3.а.

1.4.3. (а) [BE82, §6].

(б,с) См. задачу 1.4.5.

1.4.4. Общий случай сводится к частному случаю, разобранному в §1.4, аналогично сведению этого частного случая к случаю для двух треугольников. Просто замените b на вторую ломаную.

Замечание. Верно следующее обобщение леммы о четности 1.4.4. Назовем *1-циклом по модулю два* конечный набор (незамкнутых) ломаных на плоскости, такой что каждая точка плоскости является концом четного числа ломаных. Тогда любые два 1-цикла, находящиеся в общем положении (определите!), пересекаются в четном числе точек. Доказательство получается из доказательства леммы о четности 1.4.4 заменой «замкнутых ломаных» на «1-циклы».

1.4.5. (а) Пусть имеется две ломаных общего положения L_1 и L_2 , соединяющих A и P . Заменим L_1 на близкую ломаную L'_1 , так чтобы точки пересечения ломаных L'_1 и L_2 не совпадали с точками их самопересечения и их вершинами (не считая общего начала и конца). Если выбрать ε достаточно малым, то L_1 и L'_1 будут иметь одинаковое число точек пересечения с L . Применим лемму о четности 1.4.4 к замкнутым ломанным L и $L'_1 \cup L_2$. Получим, что $|L \cap L_2| \equiv |L \cap L'_1| = |L \cap L_1|$.

(б) При переходе в соседнюю область число точек пересечения из п. (а) увеличивается на 1, поэтому соседние области покрашены в разные цвета.

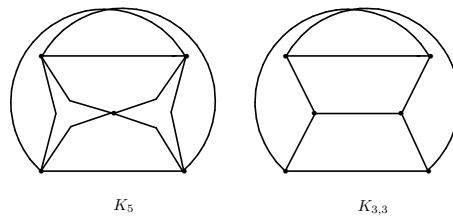


Рис. 7: «Почти-вложение» $K_5 \rightarrow K_{3,3}$

1.5.1. (а) Следует из леммы 1.5.4.

Замечание. Утверждение 1.5.1.а и рис. 7 дают еще одно доказательство непланарности графа $K_{3,3}$ [Sk03].

1.5.2. Образ каждого ребра — это ломаная, то есть объединение отрезков. Любые 2 отрезка или пересекаются по конечному числу точек, или являются подмножествами одной прямой. Докажем от противного: пусть 2 образа несмежных ребер пересекаются по бесконечному числу точек. Тогда есть прямая, содержащая хотя бы по одному звену каждой ломаной. Но тогда данное отображение не является отображением общего положения. Противоречие.

- 1.5.3.** (a) Возьмем правильный пятиугольник и его диагонали.
 (b) Эта задача является следствием леммы о четности 1.4.4.
 (c) Достаточно нарисовать два отрезка, имеющие общую внутреннюю точку.

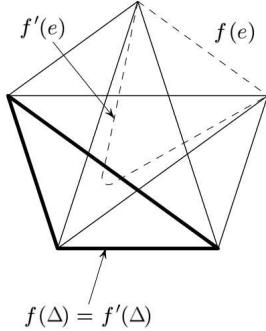


Рис. 8: Независимость $v(f)$ от f .

1.5.4. Пусть даны отображения $f, f' : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения. Можно считать, что они в общем положении *друг относительно друга*, ср. со вторым другим доказательством линейного аналога 1.2.1.а леммы 1.5.4. Ввиду утверждения 1.2.1.а достаточно доказать лемму для частного случая, когда отображения f и f' отличаются только на внутренности одного ребра σ , причем отображение $f \cup f' : K_5 \cup \sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения. См. рис. 8. Все ребра графа K_5 , несмежные с σ , образуют цикл Δ (это то самое свойство графа K_5 , которое необходимо для доказательства). Поэтому и по лемме о четности 1.4.4

$$v(f) - v(f') = |(f\sigma \cup f'\sigma) \cap f\Delta| \mod 2 = 0.$$

1.5.5. Аналогично утверждению 1.5.1 и лемме 1.5.4.

1.5.6. Аналогично утверждению 1.2.3.

Инварианты изображений графов на плоскости

представляют А. Еннэ, Т. Зайцев, А. Рябичев и А. Скопенков

2 Задачи после промежуточного финиша

2.1 Полиномиальный алгоритм распознавания планарности

Идея заключается в том, чтобы рассмотреть естественный объект (расстановку пересечения) для любого отображения общего положения графа в плоскость, чтобы исследовать, как этот объект зависит от отображения, и таким образом получить из этого объекта препятствие к планарности, уже не зависящее от отображения.

Граф называется \mathbb{Z}_2 -планарным, если существует такое его отображение общего положения в плоскость, при котором образы любых двух несмежных ребер пересекаются в четном числе точек.

2.1.1. (a) Граф, полученный из K_5 подразделением ребра, не \mathbb{Z}_2 -планарен.

(b) *Теорема Ханани-Татта.* Граф планарен тогда и только тогда, когда он \mathbb{Z}_2 -планарен. (Используйте теорему Куратовского 1.3.3.)

2.1.2. Пусть дан граф и произвольное упорядочение его вершин. Существует такое отображение общего положения графа в плоскость, что для любых несмежных ребер σ, τ графа количество точек пересечения их образов имеет ту же четность, что и количество концов ребра σ , лежащих между концами ребра τ .

Пусть $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ — отображение общего положения графа K . Возьмем любые два несмежных ребра σ, τ . По утверждению 1.5.2 пересечение $f\sigma \cap f\tau$ состоит из конечного числа точек. Поставим в соответствие неупорядоченной паре $\{\sigma, \tau\}$ вычет

$$|f\sigma \cap f\tau| \mod 2.$$

Обозначим через K^* множество неупорядоченных пар несмежных ребер графа K . Назовем полученное отображение $K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ **расстановкой (или коциклом) пересечений**. (Мы называем его расстановкой, чтобы не путать с отображением f .) Иными словами, получена «частичная матрица», т.е. симметричная расстановка нулей и единиц в клетках таблицы размера $e \times e$, отвечающих парам несмежных ребер, где e — количество ребер графа K .

2.1.3. (a) Найдите расстановку пересечений для линейного отображения общего положения $K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, образы вершин при котором образуют выпуклый 4-угольник.

(b) То же для графа K_5 .

2.1.4. Пусть $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ — отображение общего положения графа K и σ, τ — несмежные ребра.

(a) Для любой пары $(x, y) \in \partial(\sigma \times \tau) := (\partial\sigma \times \tau) \cup (\sigma \times \partial\tau)$ имеем $f(x) \neq f(y)$.

(b)* Число $|f\sigma \cap f\tau|$ имеет ту же четность, что число оборотов вектора $f(x) - f(y)$ при обходе по границе $\partial(\sigma \times \tau)$ прямоугольника $\sigma \times \tau$.

2.1.5. Как меняется расстановка пересечений

(a) из задачи 2.1.2 при изменении упорядочения вершин?

(I-V) при преобразованиях Райдемайстера на рис. 9.I-V? (Отображение графа изменяется в круге, как на рисунках 9.I-V, а вне этого круга остается без изменений. Никакие образы ребер, кроме изображенных, этот круг не пересекают. На рис. 9.V вершина A является концом ребра τ .)

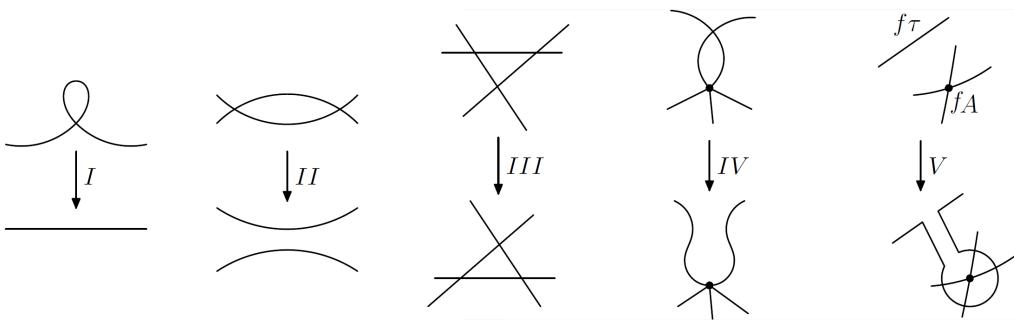


Рис. 9: Преобразования Райдемайстера для графов в плоскости.

Элементарной кограницей пары (A, σ) , в которой A — вершина, не являющаяся концом ребра σ , называется отображение $\delta(A, \sigma) : K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$, при котором каждая пара $\{\sigma, \tau\}$ с $\tau \in A$ отображается в единицу, а остальные пары — в ноль. Ответ к задаче 2.1.5.V: к расстановке пересечений добавляется $\delta(A, \sigma)$, покомпонентно и по модулю 2.

2.1.6. (a) Найдите все элементарные кограницы пар (A, σ) для графа K_4 .

(b) То же для графа K_5 .

(c) Является ли расстановка пересечений из задачи 2.1.3.a элементарной кограницей? А суммой нескольких элементарных кограниц?

(d) То же для графа K_5 , т.е. для задачи 2.1.3.b.

Назовем расстановки $\nu_1, \nu_2 : K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ **когомологичными**, если

$$\nu_1 - \nu_2 = \delta(A_1, \sigma_1) + \dots + \delta(A_k, \sigma_k)$$

для некоторых вершин A_1, \dots, A_k и ребер $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ (не обязательно различных).

Ответ к задаче 2.1.5.V и следующая лемма 2.1.7.a показывают, что когомологичность — это то отношение эквивалентности на расстановках, которое порождают изменения отображения графа в плоскость.

2.1.7. (a) **Лемма.** Расстановки пересечений разных отображений общего положения одного графа в плоскость когомологичны.⁹

(b) Граф \mathbb{Z}_2 -планарен тогда и только тогда, когда расстановка пересечений некоторого (или, эквивалентно, любого) его отображения общего положения в плоскость когомологична нулевой расстановке.

(Ввиду теоремы 2.1.1.b Ханани-Татта получится критерий планарности графа. Ввиду утверждения 2.1.2 этот критерий равносителен утверждению 1.3.6.a.)

⁹При доказательстве леммы нельзя использовать без обоснования то, что любые два отображения общего положения одного графа в плоскость можно перевести друг в друга преобразованиями Райдемайстера на рис. 9. Впрочем, доказать лемму проще, чем этот факт.

2.2 Топологическая теорема Радона для плоскости

2.2.1. Топологическая теорема Радона для плоскости. Для любого отображения общего положения $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ либо

- образы некоторых несмежных ребер пересекаются, либо
- образ некоторой вершины лежит во внутренности по модулю 2 (см. определение в п. 1.4) образа цикла из трех ребер, не содержащих эту вершину.

Утверждение 2.2.1 вытекает из утверждений 2.2.2.ab, ср. с задачей 1.1.2 и с [Sk17].

2.2.2. Для любого отображения общего положения $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ покрасим в красный цвет

- точки пересечения образов несмежных ребер, и
- те образы вершин графа K_4 , которые лежат во внутренности по модулю 2 образа цикла из трех ребер, не содержащих эту вершину.

(а) Отметьте красные точки для выбранного Вами отображения f .

(б) Четность количества красных точек не зависит от f .

(с) Количество красных точек (т.е. *радоновских разбиений*) нечетно для любого f .

Утверждение 2.2.1 можно переформулировать следующим образом, используя вместо понятия внутренности по модулю 2 понятие непрерывного отображения окружности в плоскость (см. замечание о гомеоморфности в решениях; см. также утверждения 3.2.2 (4), (6)).

2.2.3. (а) *Топологическая теорема Радона для прямой.* Для любого непрерывного отображения треугольника в прямую образ некоторой вершины лежит на образе противоположного ребра.

(б)* *Топологическая теорема Радона для плоскости.* Для любого непрерывного отображения тетраэдра в плоскость либо

- образы некоторых противоположных ребер пересекаются, либо
- образ некоторой вершины лежит в образе противоположной грани.

(с)* Если в (б) заменить «непрерывное» на «кусочно-линейное» (сами определите, что это), то получится равносильное утверждение.

2.3 К доказательству теоремы Тверберга для плоскости

В этом параграфе мы покажем, как доказать теорему Тверберга (1.1.4.d и 1.1.5.c). На самом деле, эта идея будет работать для топологической теоремы Тверберга (§3.2). Вы докажете утверждение 1.1.4.d в следующей более сильной форме.

2.3.1. * Любые семь занумерованных точек $1, \dots, 7$ на плоскости можно разбить (даже двумя способами) на три множества, выпуклые оболочки которых имеют общую точку, и ни одно из которых не содержит ни одного из множеств $\{1, 6\}, \{3, 4\}, \{2, 5\}$.

Для подмножества $X \subset [7] := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ упорядоченное разбиение $X = R_1 \sqcup R_2 \sqcup R_3$ на 3 непустых множества называется **радужным** если $7 \in R_3$ и ни одно из множеств R_1, R_2, R_3 не содержит двух чисел, сумма которых равна 7 (т.е. не содержит подмножества $\{1, 6\}, \{3, 4\}, \{2, 5\}$).

2.3.2. Сколько существует радужных разбиений множества $[7]$?

2.3.3. Для любого $j \in [6]$ и любого радужного разбиения S для $[7] - \{j\}$ существует ровно два радужных разбиения множества $[7]$, продолжающих S .

(Комментарий. Например, радужное разбиение $(\{1\}, \{6, 4, 5\}, \{3, 7\})$ для $[7] - \{2\}$ продолжается до двух радужных разбиений $(\{1, 2\}, \{6, 4, 5\}, \{3, 7\})$ и $(\{1\}, \{6, 4, 5\}, \{3, 2, 7\})$ множества $[7]$: разбиение $(\{1\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{3, 7\})$ не допускается, поскольку $2 + 5 = 7$.)

Обозначим $\langle X \rangle$ выпуклую оболочку конечного множества $X \subset \mathbb{R}^2$.

Определим *тройное число ван Кампена по модулю 2* для упорядоченного множества $f = (1, \dots, 7)$ точек общего положения на плоскости (с выбранной ориентацией) как

$$v(f) := \sum_R |\langle R_1 \rangle \cap \langle R_2 \rangle \cap \langle R_3 \rangle| \mod 2 \in \mathbb{Z}_2,$$

где суммирование ведется по всем радужным разбиениям $R = (R_1, R_2, R_3)$ множества f .

2.3.4. (a) Найдите $v(f)$ для выбранного Вами f .

(b) Вычет $v(f)$ равен нулю для любого f .

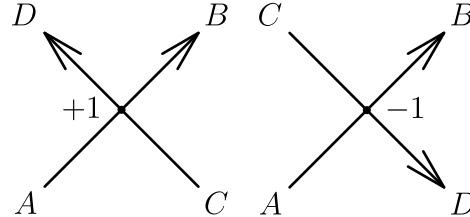


Рис. 10: Знак точки пересечения

Знаком точки пересечения ориентированных отрезков \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} назовем $+1$, если обход ABC происходит по часовой стрелке, и -1 в противном случае.

2.3.5. На плоскости имеется 14 точек общего положения: 7 красных и 7 желтых. По красным отрезкам течет ток. Сумма токов, входящих в любую красную точку, равна сумме токов, из нее выходящих. По желтым отрезкам течет ток с выполнением того же правила Кирхгофа. Ориентируем каждый красный или желтый отрезок направлением тока, текущего по нему. В каждой точке пересечения ориентированных красного и желтого отрезков поставим произведение токов, текущих по этим отрезкам, на знак точки пересечения. Могут ли так располагаться точки и течь токи, что сумма всех поставленных чисел (т.е. поток красного тока через желтый) равна $42A^2$?

Указание: для 3+3 точек поток красного тока через желтый равен нулю.

Лемма 2.3.6 (о тривиальности). Для любых двух замкнутых плоских ломаных в общем положении сумма знаков их точек пересечения равна нулю.

2.3.7. Существует единственное отображение $\text{csgn} : \text{Ra} \rightarrow \{+1, -1\}$ из множества Ra всех радужных разбиений множества [7], такое что

- $\text{csgn}(\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7\}) = +1$.
- Для любого $j \in [6]$ и любого радужного разбиения S множества $[7] - \{j\}$ возьмем два радужных разбиения R, T множества $[7]$, продолжающие S (см. утверждение 2.3.3). Тогда $\text{csgn } R + \text{csgn } T = 0$.

Для каждого разбиения $R = (R_1, R_2, R_3)$ упорядоченного множества $(1, \dots, 7)$ точек общего положения на (ориентированной) плоскости определим **знак тройного пересечения** $\text{gsgn } R$ следующим образом:

- $\text{gsgn } R = +1$, если с точностью до четной перестановки множества (R_1, R_2, R_3)
 - либо $R_1 = \{a, b, c\}$, $R_2 = \{d, e, f\}$, $a < b < c$, $d < e < f$, и треугольники abc , def на плоскости имеют одинаковую ориентацию;
 - либо $R_1 = \{a, b, c\}$, $R_2 = \{d, e\}$, $R_3 = \{f, g\}$, $a < b < c$, $d < e$, $f < g$ и треугольники abc , deg на плоскости имеют противоположные ориентации;
- $\text{gsgn } R = -1$ в противном случае.

Тройное число ван Кампена упорядоченного множества $f = (1, \dots, 7)$ точек общего положения на плоскости (с выбранной ориентацией) равно

$$V(f) := \sum_R \text{csgn } R \cdot \text{gsgn } R \cdot |\langle R_1 \rangle \cap \langle R_2 \rangle \cap \langle R_3 \rangle|,$$

где суммирование ведется по всем радужным разбиениям $R = (R_1, R_2, R_3)$ множества f .

2.3.8. * Cp. [BMZ09, MTW10].

(a) Найдите $V(f)$ для выбранного Вами f .

(b) Верно ли, что вычет $V(f) \pmod{3}$ не зависит от f ?

(Подсказка. Аналогично задаче 2.3.4.a.)

(c) Верно ли, что $V(f) \equiv 2 \pmod{6}$ для любого f ?

(Подсказка. Следует из (a), (b) и задачи 2.3.4.c.)

Если в пунктах (b) и (c) ответ «нет», то переопределите $V(f)$ аналогичным образом, чтобы утверждения (b) и (c) для нового $V(f)$ выполнялись.

(5) Сформулируйте и докажите аналоги пунктов (a,b,c) для разбиений 13 точек на 5 множеств.

(p) То же самое для разбиений $3p - 2$ точек на p множеств, для любого простого p .

(4) То же самое для разбиений 10 точек на 4 множества.

(pk) То же самое для разбиений $3 \cdot 2^k - 2$ точек на 2^k множеств, для любого целого k .

(6) То же самое для разбиений 16 точек на 6 множеств.

Инварианты изображений графов на плоскости

представляют А. Еннэ, Т. Зайцев, А. Рябичев и А. Скопенков

Указания и решения к задачам после промежуточного финиша

2.1.1. (а) Заметим, что если граф K' получается из графа K подразделением ребра, то любое кусочно-линейное отображение $K' \rightarrow \mathbb{R}^2$ соответствует некоторому кусочно-линейному отображению $K \rightarrow \mathbb{R}^2$. Поэтому из \mathbb{Z}_2 -планарности графа K_5 с подразделенным ребром следует \mathbb{Z}_2 -планарность графа K_5 . Однако из леммы 1.5.4 следует, что граф K_5 не \mathbb{Z}_2 -планарен.¹⁰

(б) Аналогично предыдущему пункту, из леммы 1.5.4 и результата задачи 1.5.5 можно вывести, что любой граф, гомеоморфный K_5 или $K_{3,3}$ не \mathbb{Z}_2 -планарен. Остается воспользоваться теоремой Куратовского 1.3.3.

Замечание. Прямой вывод планарности из \mathbb{Z}_2 -планарности см. в [Sa91]; К. Саркария подтверждает, что в этом выводе имеются пробелы. Прямой вывод \mathbb{Z}_2 -планарности из отсутствия подграфов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$, см. в [Sa91].

2.1.2. Подойдет отображение, образы вершин при котором лежат на окружности (в заданном порядке), а образы ребер являются хордами.

2.1.3. Если упорядочить вершины по кругу, а ребра — лексикографически, то ответ будет следующим:

$$(a) \begin{pmatrix} & & & & & & 0 \\ - & - & - & - & - & - & \\ - & - & - & - & 1 & - & \\ - & - & - & 0 & - & - & \\ - & - & 0 & - & - & - & \\ - & 1 & - & - & - & - & \\ 0 & - & - & - & - & - & \end{pmatrix} . \quad (b) \begin{pmatrix} & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & 1 & 1 & - & - & 0 \\ - & - & - & - & 0 & - & 1 & - & 1 & - & \\ - & - & - & - & 0 & 0 & - & 0 & - & - & \\ - & - & 0 & 0 & - & - & - & - & - & - & 0 \\ - & 1 & - & 0 & - & - & - & - & - & 1 & - \\ - & 1 & 1 & - & - & - & - & 0 & - & - & \\ 0 & - & - & 0 & - & - & 0 & - & - & - & \\ 0 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & \\ 0 & 0 & - & - & 0 & - & - & - & - & - & \end{pmatrix} .$$

Иными словами, ответ в (а) есть $\{(13), (24)\}$.

2.1.4. (а) При $(x, y) \in \partial(\sigma \times \tau)$ или x , или y является вершиной графа K . Поэтому $f(x) = f(y)$ только если образ вершины совпадает с образом точки на некотором ребре. Это невозможно, т. к. f — отображение общего положения.

(б)¹¹ Возьмем кусочно-линейный путь $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, проходящий вдоль $f\sigma$. Если $\gamma(t) \notin f\tau$, то можно посчитать то же число оборотов для «фрагмента» $\gamma|_{[0;t]}$ образа ребра σ от 0 до t и ребра τ . Если же $\gamma(t) \in f\tau$, то для $\gamma|_{[0;t-\varepsilon]}$ и $\gamma|_{[0;t+\varepsilon]}$ эти числа различаются на ± 1 (в зависимости от знака пересечения $f\sigma$ и $f\tau$ в $\gamma(t)$, см. рис. 10). Последнее можно строго доказать после должной формализации понятия «числа оборотов».

2.1.5. Ответ к I-IV: расстановка пересечений не меняется.

2.1.6. Например, кограницами $\delta(3, (12))$ в K_4 и K_5 (с нумерацией вершин и ребер

¹⁰Также это можно вывести из 2.1.6.d и 2.1.7.a

¹¹Утверждения 2.1.4.b и 3.1.2.e. могут быть доказаны аналогично равенству $v(f) = o(f)$ для $r = 2$ в [Sk16, §3.4].

как в решении задачи 2.1.3) являются следующие частичные матрицы:

$$(a) \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & 1 \\ - & - & - & - & 0 & - \\ - & - & - & 0 & - & - \\ - & - & 0 & - & - & - \\ - & 0 & - & - & - & - \\ 1 & - & - & - & - & - \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & - & - & 0 & 1 & 1 \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 0 & - & 0 \\ - & - & - & - & 0 & - & 0 & 0 & - & 0 \\ - & - & - & - & 0 & 0 & - & 0 & - & - \\ - & 0 & 0 & - & - & - & - & - & - & 0 \\ - & 0 & - & 0 & - & - & - & - & 0 & - \\ - & 0 & 0 & - & - & - & - & 0 & - & - \\ 1 & - & - & 0 & - & - & 0 & - & - & - \\ 1 & - & 0 & - & - & 0 & - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & 0 & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}.$$

Иными словами, $\delta_{K_4}(3, (12)) = \{(12), (34)\}$ и $\delta_{K_5}(3, (12)) = \{(12), (34), (12), (35)\}$.

(с) Да, она равна $\delta(1, (24))$ (также подойдут $\delta(2, (13))$, $\delta(3, (24))$ и $\delta(4, (13))$)

(д) Нет, не является: прибавление элементарной кограницы не меняет четность количества единиц над диагональю, коих пять.

2.1.7. (а) Пусть даны граф K и отображения $f, f' : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения. Можно считать, что они в общем положении друг относительно друга, ср. с доказательством линейного аналога леммы 1.5.4.

Доказательство для частного случая, когда отображения f и f' отличаются только на внутренности одного ребра σ . Возьмем точку O на плоскости. Для каждой вершины B графа K , не являющейся концом ребра σ , соединим fB с O ломаной b , находящейся в общем положении относительно цикла $\hat{\sigma} := f\sigma \cup f'\sigma$. Тогда для любого ребра B_1B_2 , несмежного с σ , по лемме о четности 1.4.4.а

$$0 \equiv \frac{1}{2} |\hat{\sigma} \cap (b_1 \cup b_2 \cup f(B_1B_2))| \equiv \frac{1}{2} |\hat{e} \cap b_1| + |\hat{\sigma} \cap b_2| + |\hat{\sigma} \cap f(B_1B_2)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\hat{\sigma} \cap f(B_1B_2)| \equiv \frac{1}{2} |\hat{\sigma} \cap b_1| + |\hat{\sigma} \cap b_2|.$$

Обозначим через B_1, \dots, B_k все те вершины, для которых ломаные b_1, \dots, b_k пересекают цикл $\hat{\sigma}$ в нечетном числе точек. (Набор вершин B_1, \dots, B_k зависит от выбора точки O , но следующая формула справедлива при любом таком выборе.) Тогда разность расстановок пересечений для f и для f' равна

$$\delta(B_1, \sigma) + \dots + \delta(B_k, \sigma) = \sum_{B \notin \sigma} |\hat{\sigma} \cap b| \cdot \delta(B, \sigma).$$

Сведение общего случая к частному (предложено Р. Карасевым). Достаточно доказать утверждение для f , отличающегося от f' только на множестве ребер, выходящих из одной вершины A . Соединим $f(A)$ с $f'(A)$ ломаной общего положения. Меняя f и f' на внутренностях ребер, можно добиться того, чтобы это ломаная не пересекала f и f' -образов ребер, выходящих из A . По рассмотренному частному случаю расстановки пересечений заменяются на когомологичные. Тогда возьмем отображение f'' , полученное из f «подтаскиванием окрестности вершины A от $f(A)$ к $f'(A)$ вдоль ломаной». Расстановки пересечений отображений f и f'' когомологичны. По рассмотренному частному случаю расстановки пересечений отображений f' и f'' равны. Значит, расстановки пересечений отображений f и f' когомологичны.

Другое доказательство. Первые два предложения те же, что и в предыдущем доказательстве. Достаточно доказать утверждение для f , отличающегося от f' только на множестве ребер, выходящих из одной вершины A_1 . Соединим fA_1 с $f'A_1$ ломаной x .

Возьмем точку O на плоскости. Для каждой вершины B соединим fB с O ломаной b , находящейся в общем положении относительно цикла $f(A_1A_2) \cup f'(A_1A_2) \cup x$ для каждого ребра A_1A_2 , выходящего из A_1 . Для любых двух непересекающихся ребер A_1A_2 и B_1B_2 обозначим $\widehat{a} := f(A_1A_2) \cup f'(A_1A_2)$ и $\widehat{b} := f(B_1B_2) = f'(B_1B_2)$. Замкнутые ломаные $\widehat{a} \cup x$ и $b_1 \cup b_2 \cup \widehat{b}$ находятся в общем положении. Поэтому

$$0 \equiv \frac{1}{2}|(\widehat{a} \cup x) \cap (b_1 \cup b_2 \cup \widehat{b})| \equiv \frac{1}{2}|(\widehat{a} \cup x) \cap b_1| + |(\widehat{a} \cup x) \cap b_2| + |x \cap \widehat{b}| + |\widehat{a} \cap \widehat{b}| \Rightarrow \\ \Rightarrow |\widehat{a} \cap \widehat{b}| \equiv \frac{1}{2}|(\widehat{a} \cup x) \cap b_1| + |(\widehat{a} \cup x) \cap b_2| + |x \cap \widehat{b}|.$$

Иными словами, разность расстановок пересечений для f и для f' равна

$$\sum_{A_2 \in \delta A_1, B \notin \delta A_1} |(\widehat{a} \cup x) \cap b| \cdot \delta(B, A_1A_2) + \sum_{\sigma \cap \delta A_1 = \emptyset} |x \cap f\sigma| \cdot \delta(A_1, \sigma).$$

Здесь суммирование ведется по всем вершинам A_2 , смежным с A_1 , по всем вершинам B , не смежным с A_1 , и по всем ребрам σ , несмежным ни с каким ребром A_1A_2 .

(b) Используйте (a) и рис. 9.V.

2.2.1. По утверждение 2.2.2.c существует хотя бы одна красная точка. Из этого следует нужное утверждение.

2.2.2. (a) Возьмем линейное отображение графа K_4 в плоскость, образы вершин при котором являются вершинами правильного треугольника и его центром. Тогда единственной красной точкой является центр треугольника.

(b) Пусть даны отображения $f, f' : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения. Можно считать, что они в общем положении *друг относительно друга*, ср. с доказательством линейного аналога леммы 1.5.4. Сведение общего случая к частному случаю, когда отображения f и f' отличаются только на внутренности одного ребра σ , аналогично лемме 1.5.4 (или доказательству леммы 2.1.7.a). Приведем доказательство для этого частного случая (ср. с леммой 1.5.4). Возьмем точку O на плоскости. Для каждой из двух вершин B графа K_4 , не являющихся концом ребра e , соединим $f(B)$ с O ломаной b , находящейся в общем положении относительно цикла $\widehat{\sigma} := f\sigma \cup f'\sigma$. Тогда для ребра B_1B_2 , несмежного с σ ,

$$0 \equiv \frac{1}{2}|\widehat{\sigma} \cap (b_1 \cup b_2 \cup f(B_1B_2))| \equiv \frac{1}{2}|\widehat{\sigma} \cap b_1| + |\widehat{\sigma} \cap b_2| + |\widehat{\sigma} \cap f(B_1B_2)| \equiv (v_1 + v_2)(f) - (v_1 + v_2)(f').$$

(c) Следует из пунктов (a) и (b).

2.2.3. (a) Очевидно, что образ одной из вершин треугольника лежит нестрого между образами двух других. Так как отображение непрерывно, образ этой вершины лежит на образе противоположного ребра.

Утверждение (b) вытекает из (c) и топологической теоремы Радона для плоскости 2.2.2.

2.3.2. Ответ: $6^3 - 2 \cdot 2^3 = 200$. Рассмотрим аналогичные разбиения, при которых множества разбиений могут быть пустыми. Для таких аналогичных разбиений каждая из пар $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$ может быть распределена одним из шести способов между тремя множествами. Элемент 7 лежит в R_3 . Следовательно, количество таких аналогичных разбиений равно 6^3 .

В каждом из аналогичных разбиений, не являющихся радужными, одно из множеств R_1, R_2 пустое. Посчитаем эти «лишние» разбиения. Каждую из пар $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$ можно распределить одним из двух способов. Следовательно, количество аналогичных разбиений, не являющихся радужными, равно $2 \cdot 2^3$.

2.3.3. Число j может быть добавлено к двум из трех множеств в разбиении S , потому что ровно одно из этих трех множеств содержит «партнера» $7 - j$ числа j , который не может содержаться в одном множестве с j .

2.3.4. (b) Сопоставим каждому радужному разбиению R_1, R_2, R_3 радужное разбиение R_2, R_1, R_3 . Таким образом, слагаемые разбиваются на пары равных (по модулю два), следовательно $v(f) = 0$.

Также задачу 2.3.4 можно решать аналогично задачам 1.2.1.a, 1.5.4, 2.2.2.b, ср. с задачами 2.1.7.a и [Sk17'].

2.3.5. *Доказательство аналога для 3+3 точек.* Сила тока на каждом контуре постоянна, а знаки точек пересечения чередуются, поэтому сумма равна нулю.

Решение задачи. Нет, не может, т. к. это число всегда нулевое. Назовем *красным током* (соотв., желтым) расстановку токов на красных (соотв., желтых) отрезках, удовлетворяющую правилу Кирхгофа. Для доказательства заметим, что если взять два красных тока и один желтый, то поток суммы красных токов через желтый будет равен сумме потоков. Аналогично, для одного красного и двух желтых токов сумма потоков равна потоку суммы (т. е. поток *биаддитивен*).

Как и в задаче 1.4.1, добавим к желтым точкам точку C , а к красным — точку D , так чтобы все 16 точек находились в общем положении, и на отрезках CA_i и DB_j положим токи равными нулю. Для каждого отрезка A_iA_j рассмотрим ток, текущий по треугольнику CA_iA_j , равный исходному желтому току на A_iA_j (и нулевой вне треугольника CA_iA_j). Тогда сумма этих $\binom{7}{2}$ токов равна исходному желтому току. Аналогично, разобьем красный ток в сумму $\binom{7}{2}$ токов, текущих по треугольникам DB_kB_l . Пользуясь биаддитивностью и применяя аналог для 3+3 точек, получаем требуемое.

2.3.6. Аналогично лемме о четности.

Инварианты изображений графов на плоскости

представляют А. Еннэ, Т. Зайцев, А. Рябичев и А. Скопенков

3 Дополнительные задачи для продвинутых команд

3.1 Пересечения со знаком и для отображений в прямую

Здесь определяется препятствие Ван Кампена к \mathbb{Z} -планарности графа (задачи 3.1.1-3.1.4) и к \mathbb{Z}_2 -вложимости графа в прямую (задача 3.1.5). Эти обобщения конструкций из п. 2.1 формально не используются далее. Однако эти простые обобщения полезно проделать перед более сложными обобщениями в задачах 3.2.4, 3.2.5.

Граф называется **\mathbb{Z} -планарным**, если существует его отображение общего положения в плоскость, при котором сумма знаков точек пересечения f -образов любых двух несмежных ребер равна нулю, для некоторых (или, эквивалентно, для любых) ориентаций на этих ребрах [Sk16, Fig. 4].

3.1.1. (a) Нарисуйте две (незамкнутые) ориентированные ломаные общего положения, пересекающиеся в четном числе точек, сумма знаков которых не равна нулю.

(b) Граф планарен тогда и только тогда, когда он \mathbb{Z} -планарен.

Ориентируем ребра графа K . Пусть $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ — отображение общего положения. Поставим в соответствие упорядоченной паре (σ, τ) несмежных ребер сумму $f\sigma \cdot f\tau$ знаков точек пересечения их f -образов. Обозначим через \tilde{K} множество упорядоченных пар несмежных ребер графа K . Тогда получено отображение $\tilde{K} \rightarrow \mathbb{Z}$. Назовем его **целочисленной расстановкой пересечений**. В этом пункте слово «целочисленная» пропускается.

3.1.2. (a) Ориентируйте ребра графа K_5 и найдите расстановку пересечений для линейного отображения общего положения $K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$, образы вершин при котором образуют выпуклый 5-угольник.

(b) $f\sigma \cdot f\tau = -f\tau \cdot f\sigma$.

(c) Как меняется расстановка пересечений при изменении ориентации ребра?

(d) Как меняется расстановка пересечений при изменении ориентации плоскости, т.е. при композиции f с осевой симметрией?

(e)* В условиях задачи 2.1.4.b $f\sigma \cdot f\tau$ равно числу оборотов вектора при обходе по $\partial(\sigma \times \tau)$.

3.1.3. (I-V) Как меняется расстановка пересечений при преобразованиях Райдемайстера на рис. 9.I-V? (На рис. 9.V вершина A не является концом ребра τ .)

Элементарной (целочисленной) кограницей пары (A, σ) , в которой A — вершина, не являющаяся концом ребра σ , называется отображение $\delta(A, \sigma) : \tilde{K} \rightarrow \mathbb{Z}$, при котором

- в единицу отображается каждая пара (σ, τ) , для которой τ выходит из A , и каждая пара (τ, σ) , для которой τ входит в A ,

- в минус единицу отображается каждая пара (σ, τ) , для которой τ входит в A , и каждая пара (τ, σ) , для которой τ выходит из A ,

- в ноль отображаются все остальные пары.

Ответ к задаче 3.1.3.V — к расстановке пересечений добавляется $\delta(A, \sigma)$.

Назовем расстановки $N_1, N_2 : \tilde{K} \rightarrow \mathbb{Z}$ **(целочисленно) когомологичными**, если

$$N_1 - N_2 = m_1\delta(A_1, \sigma_1) + \dots + m_k\delta(A_k, \sigma_k)$$

для некоторых вершин A_1, \dots, A_k , ребер $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ и целых чисел m_1, \dots, m_k (не обязательно различных).

3.1.4. (a), (b) Сформулируйте и докажите целочисленные аналоги задач 2.1.7.ab.

(c) Удвоенная расстановка пересечений любого отображения общего положения графа в плоскость когомологична нулю.

3.1.5. (a) Для любых отображения $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ общего положения графа K (определите, что это такое!) и пары $\{AB, CD\}$ несмежных ребер графа K

$$|f(A) \cap f(CD)| + |f(B) \cap f(CD)| + |f(AB) \cap f(C)| + |f(AB) \cap f(D)| \equiv 0.$$

(b)* Для любых отображения $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ общего положения графа K назовем *расстановкой пересечений* сопоставление числа $|f(A) \cap f(\sigma)|$ каждой паре A, σ из вершины и не содержащего ее ребра. Придумайте хотя бы два аналога преобразований Райдемайстера на рис. 9 для отображений графов в прямую. Выясните, как меняется расстановка пересечений при таких аналогах.

(c)* Определим граф $K^{*(1)}$. Его вершины — неупорядоченные пары $\{A, B\}$ различных вершин графа K . Для каждой пары A, BC из вершины и не содержащего ее ребра в графе K соединим ребром в графе $K^{*(1)}$ вершины $\{A, B\}$ и $\{A, C\}$. Это ребро обозначается $A \times BC = BC \times A$.

Найдите $K^{*(1)}$, если K — цикл с тремя вершинами, триод, K_4 .

(d) Для вершины B графа G назовем *элементарной кограницей* $\delta_G B$ вершины B расстановку единиц на ребрах графа G , содержащих эту вершину, и нулей на остальных ребрах. (Иными словами, $\delta_G B$ соответствует множеству ребер с концом B .) Назовем расстановки ω_1 и ω_2 *когомологичными*, если $\omega_1 - \omega_2$ является суммой некоторых элементарных кограниц $\delta_{K^{*(1)}} \{A, B\}$. Верно ли, что существует отображение $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ общего положения графа K , для которого $f(A) \notin f(\sigma)$ для любой вершины A и ребра $\sigma \not\ni A$, тогда и только тогда, когда расстановка пересечений некоторого отображения общего положения $f' : K \rightarrow \mathbb{R}$ когомологична нулю?

(e)* *Коциклом* называется такая расстановка нулей и единиц на ребрах графа $K^{*(1)}$, что сумма четырех чисел ребрах $A \times CD, B \times CD, C \times AB, D \times AB$ четна для любых непересекающихся ребер AB, CD графа K (ср. с п. (a)). Для каждого коцикла ν сопоставим неупорядоченной паре $\{AB, CD\}$ непересекающихся ребер графа K сумму двух чисел на «противоположных» ребрах $A \times CD$ и $B \times CD$ «прямоугольника» $AB \times CD$. Т.е. определим отображение $Sq^1 \nu : K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ формулой

$$Sq^1 \nu \{AB, CD\} := \nu(A \times CD) + \nu(B \times CD) = \nu(AB \times C) + \nu(AB \times D).$$

Докажите, что $Sq^1(\mu + \nu) = Sq^1 \mu + Sq^1 \nu$.

(f)* Выразите $Sq^1(\mu\nu)$ через $\mu, \nu, Sq^1 \mu, Sq^1 \nu$. (Здесь сумма и произведение коциклов — пореберные.)

(g)* $\delta_{K^{*(1)}} \{A, B\}$ — коцикл.

(h)* $Sq^1 \delta_{K^{*(1)}} \{A, B\} = \sum_{\sigma \ni B} \delta(A, \sigma) =: \delta(A \times \delta_K B)$.

3.2 Топологическая гипотеза Тверберга для плоскости

Числом оборотов замкнутой ориентированной ломаной $A_1 \dots A_n$ вокруг не лежащей на ней точки O называется следующая сумма ориентированных углов, деленная на 2π :

$$\deg_{A_1 \dots A_n} O := (\angle A_1 O A_2 + \angle A_2 O A_3 + \dots + \angle A_{n-1} O A_n + \angle A_n O A_1) / 2\pi.$$

3.2.1. (a) Найдите число оборотов (произвольно ориентированного) правильного пятиугольника вокруг его центра и вокруг точки пересечения прямых, содержащих несмежные стороны.

(b) Для каждой ломаной (с произвольной ориентацией) на рис. 4 и точки на ваш выбор (в любой из ограниченной областей) найдите число оборотов ломаной вокруг точки.

3.2.2. * (3) Для любого отображения $f : K_7 \rightarrow \mathbb{R}^2$ можно так занумеровать вершины числами $1, \dots, 7$, что либо

- число оборотов образа цикла 567 вокруг некоторой точки пересечения образов ребер 12 и 34 не равно нулю, либо

- число оборотов образа каждого из циклов 567 и 234 вокруг образа точки 1 не равно нулю.

(4) **Топологическая теорема Тверберга для плоскости.** Если r — степень простого, то для любого отображения $f : K_{3r-2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ можно так занумеровать вершины числами $1, \dots, 3r-2$, что либо

- число оборотов образа каждого из циклов $3t-1, 3t, 3t+1$, $t = 2, 3, \dots, r-1$, вокруг некоторой точки пересечения образов ребер 12 и 34 не равно нулю, либо

- число оборотов образа каждого из циклов $3t-1, 3t, 3t+1$, $t = 1, 2, 3, \dots, r-1$, вокруг образа точки 1 не равно нулю.

(Случай $r = 5$, r простого, $r = 4$, $r = 2^k$ засчитываются как отдельные пункты.)

(6) **Топологическая проблема Тверберга для плоскости.** Верен ли аналог утверждения (4), если r — не степень простого?

Подсказки к задаче 3.2.2 приведены в следующей задаче, cf. problem 2.3.8. By [Sc05, SZ] Теорема 3.2.2 эквивалентна следующему утверждению: *Если r — степень простого, то для любого отображения $(3r-1)$ -мерного симплекса в плоскость существует r парно непересекающихся граней, образы которых имеют общую точку.* Аналогичным образом можно переформулировать задачу 3.2.2.

3.2.3. * (a) Для любого отображения общего положения $f : K_7 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\sum_{\substack{|R_1|=1, \\ |R_2|=|R_3|=3}} \text{csgn } R \deg_{fR_2}(fR_1) \deg_{fR_3}(fR_1) + \sum_{\substack{|R_1|=|R_2|=2, \\ X \in fR_1 \cap fR_2}} \text{csgn } R \operatorname{sgn} X \deg_{fR_3} X \equiv_6 2.$$

Здесь суммирование происходит по всем радужным разбиениям $R = (R_1, R_2, R_3)$ с указанными ниже знаком суммы свойствами, а fR_i есть f -образ вершины R_i , ребра R_i или ориентированного цикла $R_i = abc$, $a < b < c$.

(b-g) Сформулируйте и докажите аналог пункта (a) для разбиений вершин графа K_{3r-2} на r множеств. (Случай $r = 5$, r простого, $r = 4$, $r = 2^k$, r степени простого и $r = 6$ засчитываются как отдельные пункты.)

3.2.4. * Пусть $f : K_7 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — отображение общего положения. Определите *расстановку трехкратных пересечений* и *когомологичность нулю* аналогично п. 3.1 и задачам 2.3.8, 3.2.3. Сделайте то же для любого графа вместо K_7 , и для r -кратных пересечений.

3.2.5. * (3) Устроенная расстановка трехкратных пересечений любого отображения общего положения $K_7 \rightarrow \mathbb{R}^2$ когомологична нулю.

(4) Расстановка 4-кратных пересечений любого отображения общего положения $K_{10} \rightarrow \mathbb{R}^2$, умноженная на 8, когомологична нулю.

(r) Если целое число r не является степенью простого p , то расстановка r -кратного пересечения любого отображения общего положения $K_{3r-2} \rightarrow \mathbb{R}^2$, умноженная на $r! / \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{r}{p^k} \right\rfloor$, когомологична нулю.

(0) **Теорема Езайдына.** Если r — не степень простого, то расстановка r -кратных пересечений любого отображения общего положения $K_{3r-2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ когомологична нулю. (То же справедливо даже для любого графа.)

Список литературы

- [AMSW] *S. Avvakumov, I. Mabillard, A. Skopenkov and U. Wagner.* Eliminating Higher-Multiplicity Intersections, III. Codimension 2, arxiv:1511.03501.
- [BE82] * *V.G. Boltyansky and V.A. Efremovich.* Intuitive Combinatorial Topology. Springer. Russian version: Moscow, Nauka, 1982, <http://ilib.mccme.ru/djvu/geometry/boltiansky-nagl-topo.htm>.
- [BM04] *Boyer, J. M. and Myrvold, W. J.* On the cutting edge: simplified $O(n)$ planarity by edge addition, Journal of Graph Algorithms and Applications, 8:3 (2004) 241–273.
- [BMZ09] P. V. M. Blagojević, B. Matschke, G. M. Ziegler, Optimal bounds for the colored Tverberg problem, J. European Math. Soc., arXiv:0910.4987.
- [BZ] P. V. M. Blagojević and G. M. Ziegler, Beyond the Borsuk-Ulam theorem: The topological Tverberg story, arXiv: 1605.07321.
- [CLR] * *T. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Рибест.* Москва. МЦНМО. Алгоритмы: построение и анализ, 1999.
- [Fo04] * *R. Fokkink.* A forgotten mathematician, Eur. Math. Soc. Newsletter 52 (2004) 9–14, <http://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2004-06-52.pdf>.
- [Fr15] *F. Frick,* Counterexamples to the topological Tverberg conjecture, arXiv:1502.00947.
- [Gr10] M. Gromov, *Singularities, expanders and topology of maps. Part 2: From combinatorics to topology via algebraic isoperimetry,* Geometric and Functional Analysis 20 (2010), no. 2, 416–526.
- [HT74] *J. Hopcroft and R. E. Tarjan,* Efficient planarity testing, Journal of the Association for Computing Machinery, 21:4 (1974) 549–568.
- [Ma03] *J. Matoušek,* Using the Borsuk-Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry, Springer, 2003.
- [MTW10] *J. Matoušek, M. Tancer, U. Wagner.* A geometric proof of the colored Tverberg theorem, arXiv:1008.5275.
- [MW15] *I. Mabillard and U. Wagner.* Eliminating Higher-Multiplicity Intersections, I. A Whitney Trick for Tverberg-Type Problems. arXiv:1508.02349.
- [Oz] *M. Özaydin,* Equivariant maps for the symmetric group, unpublished, <http://minds.wisconsin.edu/handle/1793/63829>.
- [Pr95] * *V. V. Prasolov.* Intuitive topology. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1995. Russian version: Moscow, MCCME, 1995, <http://www.mccme.ru/prasolov>.
- [Pr04] * *B. B. Прасолов.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004. <http://www.mccme.ru/prasolov>.
- [Sa91] *K. S. Sarkaria.* A one-dimensional Whitney trick and Kuratowski's graph planarity criterion, Israel J. Math. 1991. 73. P. 79-89.
- [Sc05] *T. Schöneborn,* On the Topological Tverberg Theorem, arXiv:math/0405393.

- [Si16] S. Simon, Average-Value Tverberg Partitions via Finite Fourier Analysis, Israel J. Math., 216 (2016), 891–904, Arxiv:1501.04612.
- [Sk'] * A. Скопенков. Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, <http://www.mccme.ru/circles/oim/algory.pdf>.
- [Sk15] * A. Скопенков. Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, Москва, МЦНМО, 2015, <http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>.
- [Sk16] * A. Skopenkov, A user's guide to the topological Tverberg Conjecture, arXiv:1605.05141.
- [Sk17'] * A. Skopenkov, On van Kampen-Flores, Conway-Gordon-Sachs and Radon theorems, arxiv:1704.00300.
- [SS] * A. Skopenkov. Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory, arxiv:1402.0658.
- [Sk05] * A. Skopenkov. On the Kuratowski graph planarity criterion, Mat. Prosveschenie, 9 (2005), 116–128. arXiv:0802.3820.
- [Sk03] M. Skopenkov. Embedding products of graphs into Euclidean spaces, Fund. Math. 2003. 179. P. 191–198.
- [ST07] * A. Скопенков и А. Телишев. И вновь о критерии Куратовского планарности графов, Мат. Просвещение, 11 (2007), 159–160.
- [SZ] T. Schöneborn and G. Ziegler, The Topological Tverberg Theorem and Winding Numbers, http://page.math.tu-berlin.de/~schoenei/papers/The_Topological_Tverberg_Theorem_and_Winding_Numbers.pdf.
- [Ta] * Handbook of Graph Drawing and Visualization. Ed. R. Tamassia, CRC Press. <https://cs.brown.edu/~rt/gdhandbook/>.
- [Vi02] * Э. Б. Винберг. Курс алгебры. Москва. Факториал Пресс. 2002.
- [vK32] E. R. van Kampen, Komplexe in euklidische Räumen, Abh. Math. Sem. Hamburg, 9 (1932) 72–78; Berichtigung dazu, 152–153.

В этом списке звездочками отмечены книги, обзоры и популярные статьи.

Invariants of graph drawings in the plane

presented by A. Enne, A. Ryabichev, A. Skopenkov and T. Zaitsev *

Contents

1 Problems before the semifinal	3
1.1 Radon and Tverberg theorems for the plane	3
1.2 Linear realizations of graphs	4
1.3 Main results on graph planarity	6
1.4 Intersection number for polygonal lines in the plane	8
1.5 Self-intersection invariant for graph drawings	10
Hints and solutions for some problems before the semifinal	11
2 Problems after the semifinal	17
2.1 Polynomial algorithm for recognition of planarity	17
2.2 The topological Radon theorem for the plane	18
2.3 Toward Tverberg Theorem for the plane	19
Hints and solutions for some problems after the semifinal	21
3 Additional problems for advanced teams	24
3.1 Intersections with signs and for line drawings	24
3.2 The topological Tverberg conjecture for the plane	25

The main results of this text are

- polynomial algorithm for recognition planarity of graphs (Proposition 1.3.6) and explanation how to invent it (§2.1);
- Radon, Tverberg and Özaydin theorems for the plane (linear and topological) 1.1.1.c, 1.1.5.c, 2.2.1, 3.2.2, 3.1.4.d, 3.2.5 and their elementary proofs (§§1.1, 1.1, 3.2; for Tverberg and Özaydin in particular cases).

The elementary proofs we present do not involve configuration spaces and cohomology obstructions. However, the main contents of this text is *introduction into algebraic topology* (more precisely, into the theories of configuration spaces and cohomology obstructions) *motivated by algorithmic, combinatorial and geometric problems*. We shall introduce some ideas of solution of Topological Tverberg Conjecture posed in 1966 and finally solved in 2015, see surveys [BZ, Sk16].

*We are grateful to I. Bogdanov, G. Chelnokov, R. Karasev, Yu. Makarychev and M. Tancer for useful discussions, and to E. Morozov, A. Shchepinova and E. Streletsova for translation of certain parts of this text.

A. Enne: Petrozavodsk State University.

T. Zaitsev: Higher School of Economics.

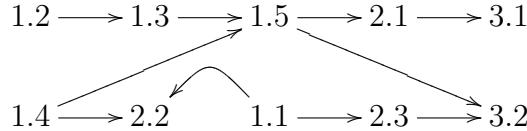
A. Ryabichev: Higher School of Economics, Independent University of Moscow.

A. Skopenkov: Moscow Institute of Physics and Technology, Independent University of Moscow. Supported in part by RFBR, Grants No. 15-01-06302, the D. Zimin Dynasty foundation, and the Simons-IUM fellowship. Email: skopenko@mccme.ru. <http://www.mccme.ru/~skopenko>.

The above two directions are linked together by the notion of *the van Kampen number*, whose generalizations is required for both. Idea of a more general *van Kampen obstruction* (=invariant) is necessary to find a polynomial algorithm for recognition of planarity and to formulate the Özaydin theorem.

No specific knowledge is required to solve these problems. All necessary definitions are presented here. But you would need some cleverness, i.e. mathematical culture (which will be improved as a result of solving these problems).

We shall present some beautiful research problems whose solutions we do not know.



Here is the diagram of (the most essential) dependence of the sections. Therefore, you can start with 1.1, 1.2 or 1.4.

Important statements are named ‘Theorems’, ‘Lemmas’ etc. These are also problems to solve, unless the opposite is explicitly indicated. We usually *formulate* the result before its *proof*.¹ In this case the subsequent problems are required to prove the statement. This is always explicitly indicated in the hints or right in the text.

Conventions

If a problem is a statement then a proof of this statement is required in this problem. If a problem is marked with a star (like $(b)^*$), then the problem is more complicated. You can postpone its solution until solving other problems.

For every written solution that the jury mark withs either ‘+’ or ‘+.’ a student (or a group of students) gets a ‘bean’. The jury may award extra beans for beautiful solutions, solutions of hard problems, or (some) solutions typeset in \TeX . The jury has infinitely many beans. One may submit a solution in the oral form, giving a bean with each 5 attempts (successful or not).

If you are stuck on a certain problem, we suggest to look at the next ones. They may turn out to be helpful. We suggest to all the students working on the project to *consult* the jury on any questions on the project. Students who brilliantly work on the project will get several *extra problems*.

Please let us know if you are familiar with some of more basic problems. If you confirm this familiarity by telling us rigorous proofs of some of them, you would be allowed not to receive plus-marks for all of them.

¹Often the opposite happens, when the formulations of beautiful results or important problems, for which the theory is developed, are given *after* long time of learning this theory (or not given at all). This approach promotes the wrong view that mathematics studies unmotivated notions and theories. Such a promotion belittles the value of mathematics.

1 Problems before the semifinal

1.1 Radon and Tverberg theorems for the plane

1.1.1. (a) There exist 4 points in the plane such that for any their decomposition into two pairs the segment joining the points of the first pair does not intersect the segment joining the points of the second pair.

(b) There exist 4 points in the plane such that none of them belongs to the triangle with vertices at the others.

(c) **Radon theorem for the plane.** For any 4 points in the plane either one of them belongs to the triangle with vertices at the others, or they can be decomposed into two pairs such that the segment joining the points of the first pair intersects the segment joining the points of the second pair.

The *convex hull* of a finite set of points in the plane is the smallest convex polygon that contains them.

The Radon theorem can be reformulated as follows: *any 4 points in the plane can be decomposed into two disjoint sets whose convex hulls intersect.*

1.1.2. (Cf. Problem 2.2.2) For any 4 points in the plane such that no line contains more than 2 points there exists exactly one (Radon) decomposition of these points into two sets such that the convex hulls of these sets do not intersect.

1.1.3. (a) There exist 6 points in the plane which cannot be decomposed into three disjoint sets whose convex hulls have a common point.

(b) There exist 7 points in the plane such that for any their numbering from 1 to 7 point 1 does not belong to the triangles 234 and 567.

(c) There exist 7 points in the plane such that for any their numbering from 1 to 7 the intersection point of the segments 12 and 34 does not belong to the triangle 567.

1.1.4. (a) The vertices of any convex octagon can be decomposed into three disjoint sets whose convex hulls have a common point.

(b)* The same problem with octagon replaced by heptagon.

(c) Any 15 points in the plane can be decomposed into three disjoint sets whose convex hulls have a common point.

(d)* The same problem with 7 points instead of 15.

Hints for problems 1.1.4.d and 1.1.5.c are given in problem 2.3.8.

1.1.5. (a) For any r there exist $3r - 3$ points in the plane which cannot be decomposed into three disjoint sets whose convex hulls have a common point.

(b) For any r there exist N such that any N points in the plane can be decomposed into r disjoint sets whose convex hulls have a common point.

(c)* **Tverberg theorem for the plane.** For any r and any $3r - 2$ points in the plane can be decomposed into r disjoint sets whose convex hulls have a common point.

1.2 Linear realizations of graphs

In this and the following subsections we present two formalizations for the notion of realizability of graphs in the plane. Both formalizations are important; the second one uses the first one. (The formalizations turn out to be equivalent by Fary Theorem 1.3.4; their higher-dimensional generalizations are not.)

By k points in the plane we mean a k -element subset of the plane; so these k points are assumed to be pairwise distinct.

Proposition 1.2.1. ² (a) From any 5 points in the plane one can choose two disjoint pairs such that the segments with the vertices at these pairs intersect.

Moreover, if no 3 of these points belong to a line, then the number of intersection points of interiors of segments joining the points is odd.³

(b) Two triples of points in the plane are given. Then there exist two intersecting segments without common vertices and such that each segment joins the points from distinct triples.

Proposition 1.2.1 is easily proved by analyzing the convex hull of the points.

Theorem 1.2.2 (General Position). For each n there exist n points in 3-space such that the segments joining the points have disjoint interiors.

1.2.3. For any five points in the plane numbered 1, 2, 3, 4, 5 if the segments

(a) jk , $1 \leq j < k \leq 5$, $k \neq 2$, have disjoint interiors then the points 1 and 2 lie on opposite sides of the triangle 345, cf. figure 1, right;

(b) jk , $1 \leq j < k \leq 5$, $(j, k) \notin \{(1, 2), (1, 3)\}$, have disjoint interiors then

EITHER the points 1 and 2 lie on opposite sides of the triangle 345,

OR the points 1 and 3 lie on opposite sides of the triangle 245.

(c) jk , $1 \leq j < k \leq 5$, $(j, k) \notin \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$, have disjoint interiors then

EITHER the points 1 and 2 lie on opposite sides of the triangle 345,

OR the points 1 and 3 lie on opposite sides of the triangle 245,

OR the points 1 and 4 lie on opposite sides of the triangle 235.

(d) Oups... You have already guessed how this problem is formulated and how boolean functions appear in the study of embeddings.

Cf. problem 1.5.6. This illustrates some ideas of NP-hardness of recognizing realizability of 2-hypergraphs in \mathbb{R}^4 [Sk', §4].

A **graph** (V, E) is a finite set V together with a collection $E \subset \binom{V}{2}$ of two-element subsets of V .⁴ The elements of this finite set are called *vertices*. The selected pairs of vertices are called *edges*.

A *complete graph* is a graph in which every pair of vertices is connected by a unique edge. The complete graph on n vertices is denoted by K_n . A *complete bipartite graph* with two parts consisting of n and m vertices respectively is denoted by $K_{m,n}$: in this graph for any

²These are ‘linear’ versions of the nonplanarity of the complete graph K_5 on 5 vertices and the bipartite graph $K_{3,3}$, see fig. 1, left. But they can be proved easier because the Parity Lemma 1.4.4 is not required for the proof.

³The first sentence indeed follows by the ‘moreover’ part: put the points in general position by a small shift so that no intersection points of segments with disjoint vertices are added. (Or else, for non-general-position points Proposition 1.2.1 is obvious: if points A, B, C among given 5 points belong to one line, B between A and C , and D is any other given point, then segments AC and BD intersect).

⁴The commonly term is *a graph without multiple edges or loops or a simple graph*.

The graphs G_1 and G_2 are called *isomorphic* if there is a 1–1 correspondence $f : V_1 \rightarrow V_2$ between the set V_1 of vertices of G_1 and the set V_2 of the vertices of G_2 such that *vertices $A, B \in V_1$ are adjacent in G_1 if and only if $f(A), f(B) \in V_2$ are adjacent in G_2* .

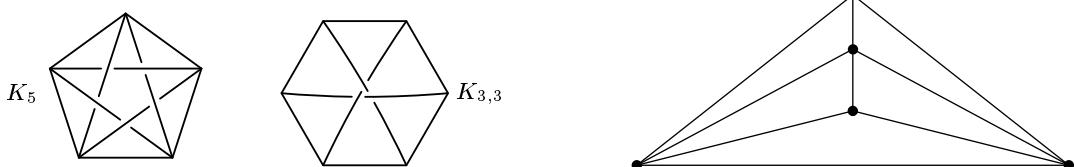


Figure 1: (Left) Nonplanar graphs K_5 and $K_{3,3}$.
(Right) A planar drawing of K_5 without one of the edges.

two vertices from different parts there is the edge between them and every edge connects the vertices from different parts. See Fig. 1.

Informally speaking, a graph (V, E) is called **linear realizable** in \mathbb{R}^d (e.g. in the plane or in 3-space) if there exists a planar drawing without self-intersection of this graph such that every edge is drawn as line segment. Formally, a graph (V, E) is called **linear realizable** in \mathbb{R}^d if there exists an embedded set of segments in \mathbb{R}^d whose vertices correspond to V and whose segments correspond to E such that these segments have disjoint interiors. Such a set is called a *linear realization* of the graph.

The following results are classical:

- K_4 and K_5 without one of the edges are linearly realizable in the plane (figure 1, right);
- neither K_5 nor $K_{3,3}$ is linearly realizable in the plane (Proposition 1.2.1);
- every graph is linearly realizable in 3-space (General Position Theorem 1.2.2).

1.2.4. (a) There is an algorithm for recognition of linear realizability of graphs in the plane.

(Rigorous definition of the notion of algorithm is complicated, we do not give it here. We will accept your solutions based on intuitive understanding of algorithms. To be more precise, (a) means that there is an algorithm for calculating the function that for any graph checks whether the graph is linearly realizable in the plane or not. All other statements on algorithms in this paper can be formalized analogously.)

(b) Give an upper bound of the number of steps in your algorithm for given number of vertices in the graph.⁵

For a solution the following two problems will be useful.

A finite set of points in the plane is *in general position* if no three of these points lie on one line and no three line segments with ends at these points have a common interior points.

1.2.5. (a) If a graph is linear realizable in the plane, then there is a linear realization whose vertices are in general position.

(b) Into how many parts the plane is split by n general position lines (i.e. every two lines are not parallel and for every three lines they do not have a common point)?

Let A, A' and M be two points and a subset in the plane. Sets $M \cup A$ and $M \cup A'$ are called *elementary isotopic* if the segment AA' is disjoint with any line passing through some two points of M . Two subsets of the plane are called *isotopic* if they can be joined by a sequence of subsets, in which every two consecutive subsets are elementary isotopic.

1.2.6. (a) For every n there is a finite number of n -element subsets of the plane such that every n -element subset of the plane is isotopic to one of them.

(b)* (Riddle) Give an upper bound of the number of this n -element subsets.

⁵The ‘complexity’ in the number of edges is ‘the same’ as the complexity in the number of vertices, because for a planar graph with n vertices and e edges we have $e \leq 3n - 6$ and there are planar graphs with n vertices and e edges such that $e = 3n - 6$.

A criterion for linear realizability of graphs in the plane follows from the Fary Theorem 1.3.4 below and any planarity criterion (e.g. Kuratowski Theorem 1.3.3 below).

1.3 Main results on graph planarity

Informally speaking, a graph is called planar if this graph can be drawn in the plane without ‘self-intersections’. Formally, a graph is called **planar** (or piecewise linear realizable in the plane) if there exists a set of polygonal lines in the plane, such that the end vertices of these polygonal lines correspond to the vertices of the graph, the polygonal lines correspond to the edges of the graph, and the interiors of the polygonal lines do not intersect.

For example, the graphs K_5 and $K_{3,3}$ (pic. 1) are not planar. The proof for K_5 is given in the proof of the (stronger) Proposition 1.5.1, see also Problem 1.5.5.

1.3.1. (a) There is an algorithm for recognition of planarity of graphs. (You can use without proof Kuratowski theorem 1.3.3 below.)

(b) Give an upper bound of the number of steps in your algorithm for given number of vertices in the graph.

(c)* There is an algorithm for recognition of planarity of graphs that is polynomial in the number of the vertices n in the graph, i.e. the number of steps in this algorithm does not exceed Cn^k for some numbers C and k . (Hint: see Proposition 1.3.6.)

Informally speaking, a *subgraph* of a given graph is a part of this graph. Formally, graph G is called the **subgraph** of graph H if any vertex of the graph G is the vertex of the graph H , and any edge of the graph G is the edge of the graph H . (Two vertices of the graph G connected by an edge in the graph H are not necessarily connected by an edge in the graph G .)

It is clear that any subgraph of a planar graph is planar.

The *subdivision of edge* operation for a graph is shown in the pic. 2. Two graphs are called *homeomorphic* if one can be transformed to the other using subdivisions of edges and inverse operations. This is equivalent to the existence of a graph that can be obtained from each of these graphs by subdivisions of edges. A motivation for this definition is given in the solutions.

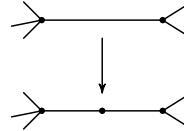


Figure 2: Subdivision of edge

1.3.2. (a) There is a graph such that the degree of any vertex of this graph is more than two, this graph does not have a subgraph isomorphic to K_5 , but there is a subgraph of this graph homeomorphic to K_5 .

(b) A graph G is planar if and only if there is some graph H such that G homeomorphic to H and H is linear realizable in the plane.

It is clear that homeomorphic graphs are planar or not simultaneously.

Theorem 1.3.3 (Kuratowski). *A graph is planar if and only if this graph have no subgraphs homeomorphic to K_5 or $K_{3,3}$ (Fig. 1).*

Theorem 1.3.4 (Fary). *A planar graph can be drawn in the plane such that all edges will be corresponded to segments. Formally, if a graph is planar (i.e. piecewise linear realizable in the plane), then it is linear realizable in the plane.*

It is not required to prove these theorems (for proofs see e.g. [?, Sk05, ST07]). But Kuratowski Theorem is allowed to prove other results.

A note on algorithms. (This note can be skipped without compromising the understanding of the rest of the material.)

Despite the beauty and simplicity of the Kuratowski and Fari theorems, the corresponding algorithms for recognizing graph planarity are slow. Therefore, other ways of recognizing planarity are of interest. Another (exponential) algorithm is based on consideration of *thickenings* [Sk15, §1]. There is even an algorithm which is linear in the number of vertices [BM04, HT74]. This linear algorithm is complicated. The following criterion 1.3.6.a is interesting because it gives polynomial algorithm.

1.3.5. (a) There are 5 cavaliers, ranked by nobility, and five their wives. Two cavaliers and the wife of the third one participate in a dance, but not all such trios are decent. Prove that for some two disjoint pairs of cavaliers the sum of the following three numbers is odd:

- the number of cavaliers from the first pair, lying between the cavaliers from the second pair on the scale of decency,
- the number of wives of the cavaliers from the first pair, who can dance with the second pair,
- the number of wives of the cavaliers from the second pair, who can dance with the first pair.

(Decency is the property of an unordered pair of cavaliers and a wife. For example, if A, B can dance with the wife of C and B, C can invite wife of A , it is not necessary that C, A can dance with the wife of B .)

(b) Analogous problem for 6 cavaliers of whom 3 are English and 3 are French, all 6 are ranked by nobility in an arbitrary way, and one Englishman, one Frenchman and wife of any of the remaining four cavaliers participate in the dance (but not all such trios are decent).

Proposition 1.3.6. (a)* Suppose that an arbitrary ordering of the vertices of a graph is given. The graph is planar if and only if there are vertices V_1, \dots, V_s and edges e_1, \dots, e_s such that $V_i \notin e_i$ for each $i = 1, \dots, s$, and for each non-adjacent edges x, y

the number of ends of x , lying between ends of y (for the above ordering),

has the same parity as

the number of those $i = 1, \dots, s$ for which either $V_i \in x$ and $e_i = y$, or $V_i \in y$ and $e_i = x$.

(b) There is an algorithm for recognizing the solvability of a system of k linear equations with k variables, the algorithm polynomial in k .

The ‘only if’ part of (a) follows by the Kuratowski Theorem 1.3.3 and assertions 1.3.5. You will be able to prove the ‘if’ part of (a) after studying §2.1, where it is also explained how to invent the statement (it involves a reformulation of the *van Kampen cohomology obstruction*). Formally, the ‘if’ part of (a) follows by statements 2.1.1.b, 2.1.2 and 2.1.7.b.

Proposition 1.3.6.b is proved using *exclusion of variables*, see details in [CLR, Vi02].

1.4 Intersection number for polygonal lines in the plane

1.4.1. Take 14 general position points in the plane, of which 7 are red and another 7 are yellow. Can the number of intersection points of the red segments (i.e. the segments between the red points) with the yellow segments be equal to 7?

Hint. To solve the problem use the following fact: *For every 3 red and 3 yellow general position points in the plane the number of intersection points of the red segments with the yellow segments is even.*

If we prove the Jordan Theorem 1.4.3.b below for a triangle, this fact would follow because the outline of the yellow triangle comes *into* the red triangle as many times as it comes *out*. The following proof is easier and can be generalized to higher dimensions [SS].

The intersection of the convex hull of the red triangle and the outline of the yellow triangle is a finite union of polygonal lines (non-degenerate to points). The outlines of the triangles intersect at the endpoints of the polygonal lines. The number of endpoints is even, so the fact follows.

1.4.2. * (a) A closed non-self-intersecting polygonal line in the plane and two points outside this line are given. Find an algorithm checking if we can connect these points by a polygonal line which does not intersect the given polygonal line.

(b) The same question if we can see only the part of the polygonal line that lies in some square containing two given points.

To solve Problems 1.4.2.ab and 1.4.3.bc prove and use Parity Lemma 1.4.4. Only this lemma is used in the following sections.

A subset of the plane is called *connected*, if every two points of this subset can be connected by a polygonal path lying in this subset.

1.4.3. (a)* Every non-self-intersecting polygonal line separates the plane into no more than two parts.

(b) **Jordan Theorem.** *Every non-self-intersecting polygonal line L separates the plane, i.e. $\mathbb{R}^2 - L$ is not connected.*⁶

(c) Any two polygonal lines in square connecting its opposite vertices intersect.

Two polygonal lines in the plane are called *in general position*, if their vertices are in general position.

Lemma 1.4.4 (Parity). *Any two general position closed polygonal lines in the plane intersect each other at an even number of points.*⁷

This lemma will be reduced to its particular case, which is proved in the hint to the problem 1.4.1. If one of the polygonal lines is a triangle, the lemma can be proved analogously to that particular case. We present a different proof of this ‘intermediate’ case, which generalizes to a proof of the general case. The proof is by reduction to the particular case, using *singular cone* idea which formalizes in a short way the *motion-to-infinity* idea [BE82, §5].

Proof of the Parity Lemma 1.4.4 for the case when one of the polygonal lines b is the outline of a triangle. Denote another polygonal line by a . Take a point A such that $\partial(AMN)$ and b are in general position for each edge MN of the polygonal line a . Denote by ∂T the outline of a triangle T . Then (see Fig. 3)

$$|a \cap b| = \sum_{MN} |MN \cap b| \equiv \sum_{MN} |\partial(AMN) \cap b| \equiv 0.$$

⁶If you deduce the Jordan Theorem from the Euler Formula, think how to prove the Euler Formula.

⁷This is not trivial because the polygonal lines may have self-intersections and because the Jordan Theorem 1.4.3.b is not obvious. It is not reasonable to deduce the Parity Lemma from the Jordan Theorem or the Euler Theorem because this will make a vicious circle.

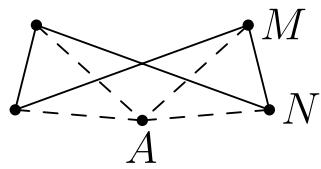


Figure 3: Singular cone idea

Here the summation is over edges MN of a , and the last congruence follows by the particular case of triangles. \square

1.4.5. (a) Take a closed polygonal line L in the plane. Take any point $A \notin L$ and color it in the color 0. For any point $P \notin L$ let the color 0 or 1 of P be the parity of the number of intersection points of a *general position* polygonal line (define what it is!) joining P to A . Prove that this coloring is well-defined.

(b) The complement to a closed polygonal line in the plane (with general position vertices) has a chess-board coloring (so that the adjacent domains have different colors, Fig. 4).

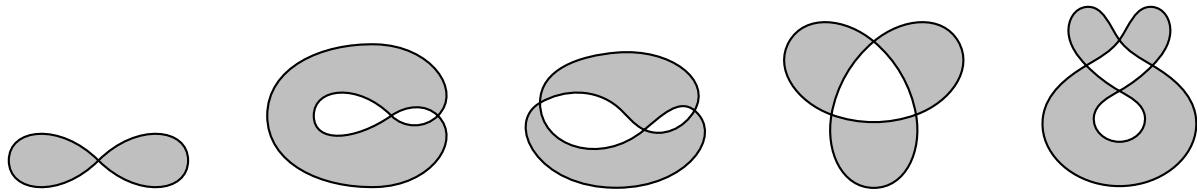


Figure 4: The modulo two interiors of some closed polygonal lines

The **modulo two interior** of a closed polygonal line in the plane is the union of black domains for a chess-board coloring (provided the infinite domain is white).

1.5 Self-intersection invariant for graph drawings

For some given graph we will consider its plane drawings such that the drawings of edges are polygonal lines (possibly with intersections). Let us explain this formally.

A linear map $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ of a graph $K = (V, E)$ to the plane is a map $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$. The image $f(AB)$ of the edge AB is the segment $f(A)f(B)$.

A piecewise-linear map $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ of a graph $K = (V, E)$ to the plane is a collection of (non-closed) polygonal lines corresponding to the edges of K , whose endpoints correspond to the vertices of K . The image $f(AB)$ of the edge AB is the corresponding polygonal line.

Clearly, a piecewise-linear map of a graph K to the plane is ‘the same’ that a linear map of some graph homeomorphic to K .

So a graph is planar if there exists its piecewise-linear map to the plane such that the images of all the edges of the graph are disjoint (except for their common endpoints) and non-self-intersecting polygonal lines.

Proposition 1.5.1. (a) For every piecewise-linear map of the graph K_5 to the plane there exist two non-adjacent edges with intersecting images.

(b)* The same for a continuous map $K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

To illustrate the *van Kampen obstruction* idea (see 1.3.6.a) consider the proof of the following ‘quantitative version’ of non-planarity of the graph K_5 (similar to the ‘moreover’ part of the Proposition 1.2.1.a). We will prove that for ‘almost every’ piecewise-linear map of K_5 to the plane the number of the intersection points of non-adjacent edges is odd. Think how to formalize the words ‘almost every’ and compare your formalization with the definition given below.

A linear map of a graph to the plane is called a *general position linear map* if the images of all the vertices are in general position. A piecewise-linear map f of a graph K to the plane is called a **general position map** if there exist a graph H homeomorphic to K and a general position linear map of H to the plane such that this map ‘corresponds’ to the map f .

1.5.2. For every general position map of a graph to the plane the images of any two non-adjacent edges intersect in a finite number of points.

For a general position map $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ the **van Kampen number** (or the self-intersection invariant) $v(f)$ is the parity of the number of intersection points of the pairs of images of non-adjacent edges. Obviously, if K is planar then $v(f) = 0$ for some general position map $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$.

1.5.3. (a) There exists a general position map $f : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that $v(f) = 1$.

(b) If a graph K is a disjoint union of two cycles length 3, then $v(f) = 0$ for every general position map $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$.

(c) There exist a planar graph K and a general position map $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that $v(f) \neq 0$.

Lemma 1.5.4. For every general position map $f : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ the van Kampen number $v(f)$ is odd.

1.5.5. Are the statements 1.5.1, 1.5.3.a and the Lemma 1.5.4 correct when we replace the graph K_5 by the graph $K_{3,3}$?

1.5.6. (a) Remove the edge joining the vertices 1 and 2 from the graph K_5 . Then for every general position embedding of the obtained graph to the plane the images of the vertices 1 and 2 are separated by the image of the triangle 345. (This statement is meaningful because of Jordan Theorem 1.4.3.b.)

(b,c,d) State and prove analogue of problems 1.2.3.bcd for piecewise-linear embeddings.

Invariants of graph drawings in the plane

presented by A. Enne, A. Ryabichev, A. Skopenkov and T. Zaitsev

Hints and solutions for some problems before the semifinal⁸

1.1.1. (a) Consider a triangle and any point inside it.

(b) Consider a square.

(c) See proof of statement 1.1.2

1.1.2. The convex hull of 4 points in general position is either a triangle or a quadrilateral.

In the case of a triangle, the Radon point is the point that is not a vertex of the convex hull.

In the case of a quadrilateral, the Radon point is the intersection point of the diagonals.

1.1.3. (a) Consider a pair of points at each vertex of a triangle (or a similar set of distinct points).

(b) Consider a convex 7-gon.

(c) Consider an equilateral triangle ABC . Denote by O its center. Define points A_1, B_1, C_1 as the images of points A, B, C under homothetic transformation with the center O and the ratio $1/2$.

Let us show that this set of points satisfies the required condition. Observe that for each pair of intersecting segments there exists an isometry mapping from this pair to one of the following pairs: $\{AB_1, BA_1\}$, $\{AO, A_1B_1\}$, $\{AO, BA_1\}$. Note also that $A_1 = AO \cap A_1B_1 = AO \cap A_1B$ belongs neither to $\triangle BC_1C$ nor to $\triangle B_1C_1C$, and $AB_1 \cap BA_1$ does not belong to $\triangle OC_1C$.

1.1.4. (a) (*Written by N. Volkov.*) Consider an octagon with vertices denoted by $A_1 \dots A_8$ (in clockwise order, see Fig. 5). Decompose the set of its vertices into three disjoint sets: $\{A_1, A_3, A_5, A_7\}$, $\{A_2, A_6\}$ and $\{A_4, A_8\}$. Convex hulls of these sets are quadrilaterals $A_1A_3A_5A_7$ and segments A_2A_6 and A_4A_8 , respectively. Let us show that these convex hulls have a common point.

Consider intersection of the segment A_2A_6 and the quadrilateral $A_1A_3A_5A_7$. Since the octagon is convex, the quadrilateral $A_1A_2A_3A_6$ is also convex. Segments A_2A_6 and A_1A_3 intersect because they are the diagonals of a convex quadrilateral. We obtain analogous assertion for the segments A_2A_6 and A_5A_7 . Since our figures are convex, the intersection of A_2A_6 and $A_1A_3A_5A_7$ is a segment whose ends belong to sides A_1A_3 and A_5A_7 of the quadrilateral $A_1A_3A_5A_7$. For the same reason, the intersection of A_4A_8 and $A_1A_3A_5A_7$ is a segment whose ends belong to sides A_1A_7 and A_3A_5 of the quadrilateral $A_1A_3A_5A_7$. It follows from convexity of $A_1A_3A_5A_7$ that segments with ends on its opposite sides intersect. This proves that segments A_2A_6 , A_4A_8 and the quadrilateral $A_1A_3A_5A_7$ have a common point.

(b) Consider a convex 7-gon $A_1 \dots A_7$. Then draw a segment A_4A_7 . Define points A, B, C, D, E, F as the intersection points of segments $A_5A_3, A_5A_2, A_5A_1, A_6A_3, A_6A_2, A_6A_1$ with the segment A_4A_7 , respectively. Let us consider the following two cases.

The case when points A, B, C, D, E, F lie on $\overrightarrow{A_4A_7}$ in this very order (see Fig. 6). In this case define X as $A_1A_5 \cap A_3A_6$. Let us prove that X belongs to $\triangle A_2A_4A_7$. Since the point C lies between points A_4 and D , we must also have that the point X lies on the same side as point A_1 with respect to the segment A_4A_7 . But points X and A_3 lie on the different sides with respect to A_2A_4 because of convexity of the 7-gon. The same argument applies to A_2A_7 . Hence point X belongs to $\triangle A_2A_4A_7$.

⁸The computer versions of Figures 3, 4 and 10 was prepared by I. Derkach, V. Kovirshina and Yu. Tikhonov.

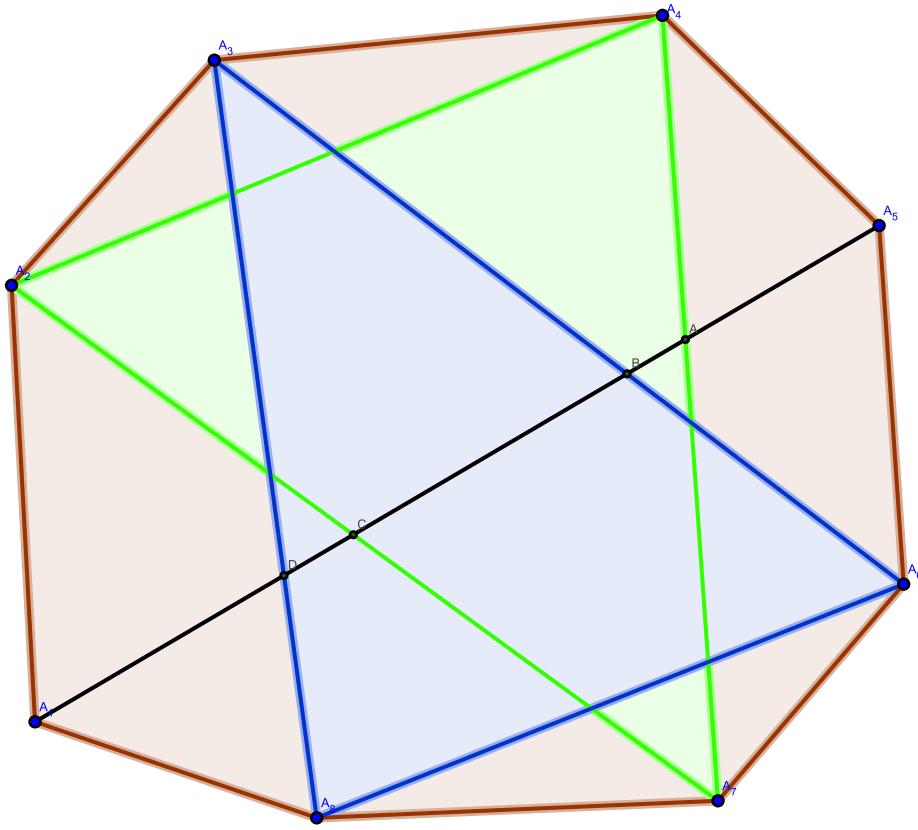


Figure 5: The convex octagon.

The case when points A, B, C, D, E, F lie on $\overrightarrow{A_4A_7}$ in any other order. It is obvious that points A, B, C lie on $\overrightarrow{A_4A_7}$ in this very order. Similar assertion is true for points D, E, F and for pairs of points $(A, D), (B, E), (C, F)$. If point C lies between D and E , then point C belongs to $\triangle A_2A_3A_6$. Therefore we can assume that point C lies between E and F . For the same reason point D lies between A and B . This implies that points lie on $\overrightarrow{A_4A_7}$ in order $ADBECF$. Then, point E lies between points A and C , therefore it belongs to $\triangle A_1A_3A_5$.

(c) Let Z be the given set of 15 points. Consider the vertices of the convex hull of Z . If the number of the vertices is at least eight, then we can decompose these points into three sets using (a).

Otherwise, if convex hull consists of less than 8 points, then let the first set of our decomposition S_1 be the vertices forming a boundary of the convex hull of set Z . Since at least 4 points are left, it follows that we can decompose them into two sets S_2, S_3 with intersecting convex hulls. The intersection point belong to the convex hull of S_1 .

1.1.5. (a) *The first solution.* Suppose the contrary. Take a convex $(3r - 3)$ -gon such that no three of its diagonals have a common point. Among the decomposition sets of its vertices there is either a set consisting of 1 vertex, or 3 sets consisting of 2 vertices. In the first case we obtain a contradiction because the polygon is convex. In the second case we obtain a because the vertices are in general position.

The second solution. Consider $r - 1$ points at each vertex of a triangle or a similar set of distinct points.

(b) (*Solution for $N = 9r+1$, written by I. Bogdanov.*) Consider convex hulls for each $6r+1$ of required points. Any three of these convex hulls intersect because they have a common point. Therefore by the Helly theorem they all have a common point (not necessary one of the preceding points). Denote by O this common point. Let us prove that O a common

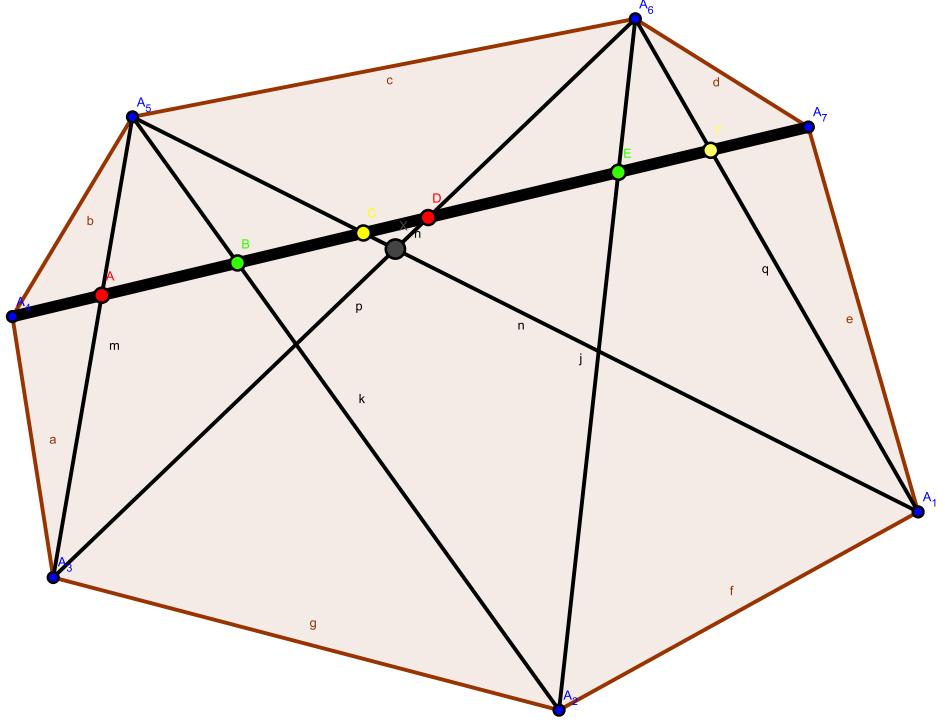


Figure 6: The convex heptagon.

point of our polygons.

(The following elegant property of O we will not use: on both sides of any line passing through O there is at least $3r + 1$ of the given points.)

Point O belongs to the convex hull of any $6r + 1$ of these given points. In other words, from any $6r + 1$ of the given points we can choose three points such that the triangle with vertices at these points contains point O . Let us choose this triangle, remove it, choose new triangle, etc. This can be done at least r times.

1.2.1. (a) Suppose to the contrary that there exists 5 points $OABCD$ in the plane such that one cannot choose two required disjoint pairs. Hence $A \notin OB$ and $B \notin OA$. Then the point A does not belong to the ray OB . For this reason we can assume that the points A, B, C, D are seen from the point O in this order. Then the triangles OAC and OBD intersect at a unique point O . Therefore using the following modification of the Parity Lemma 1.4.4 we get that $AC \cap BD \neq \emptyset$, which is a contradiction.

Assume that the outlines of two triangles in the plane intersect at a unique point, and a line sufficiently close to this point intersects the outlines by four distinct points. Then the points X, Y corresponding to one triangle are unlinked with the points Z, T corresponding to the other triangle, i.e. the segment XY contains either both or none of the points Z, T .

Proof. Denote the point by O and the triangles by $OX'Y'$ and $OZ'T'$ (so that X, Y, Z, T are the intersection points of the line and OX', OY', OZ', OT' respectively). Let $a := \partial(OX'Y')$ and $b := \partial(OZ'T')$. The statement follows because

$$|XY \cap \{Z, T\}| = |XY \cap b| = |\partial(OXY) \cap b| - 1 \equiv |a \cap b| + |\partial(XYY'X') \cap b| - 1 \equiv 0.$$

Here the last congruence holds because $|a \cap b| = 1$ and by the Parity Lemma 1.4.4 (in fact,

we need the case when b is a triangle).

(b) Analogously to (a).

1.2.2. Choose three points in 3-space that do not belong to one line. Suppose that we have $n \geq 3$ points in general position. Then there is a finite number of planes containing triples of these n points. Hence there is a point that does not lie on any of these planes. Add this point to our set of n points. Since the ‘new’ point is not in one plane with any three of the ‘old’ n points, the obtained set of $n + 1$ points is in general position. Thus *for each n there exist n points in 3-space that are in general position*.

Take such n points. Denote by A the set of all segments joining pairs of these points. If some two segments from A with different endpoints intersect, then four endpoints of these two segments lie in one plane. If some two segments from A with common endpoint intersect not only at their common endpoint, then the three endpoints of these two segments are on one line. So we obtain a contradiction.

1.2.3. (a) Any five points can be transformed into five points in general position leaving the required properties unchanged. By hypothesis, the number of intersection points of segment 12 and the outline of triangle 345 equals to the number of intersection points of interiors of segments joining the points. This number is odd by Proposition 1.2.1.a.

(b,c,d) Analogously, the assertion follows by Proposition 1.2.1.a.

1.2.4, 1.2.5, 1.2.6. [Ta, Chapters 1 and 6].

Answer for 1.2.4.b: the number of steps is more than exponential.

1.3.1. (a) See details in [Ta, Chapters 1 and 6]. *Another algorithm* can also be obtained using proposition 1.2.4.a and the Fary theorem.

(b) The number of steps is more than exponential time [Ta, Chapters 1 and 6].

(c) This fact follows from Proposition 1.3.6.a,b.

1.3.2. (a) Take 7 vertices 1234567. Suppose that each two of the vertices 12345 except the pairs $\{3, 4\}$ and $\{4, 5\}$ are connected by an edge, 6 is connected with $\{3, 4, 7\}$ and 7 is connected with $\{4, 5, 6\}$. There are only 5 vertices having degree ≥ 4 in this graph, but they does not form a complete graph. But if we remove the edge 67, then the obtained graph will be homeomorphic to K_5 .

(b) The statement follows by the definition of planarity. If the graph is planar, then every edge is presented by a polygonal line. Define a new graph as follows: the vertices of a new graph correspond to the vertices of the polygonal line, and the edges of a new graph correspond to the edges of the polygonal line. The proof of the converse implication is analogous.

1.3.5. Let us sum the considered sums over all 15 unordered pairs of disjoint pairs of cavaliers. Prove that this larger sum is odd for any choice of decent trios.

1.4.1. The answer is ‘no’, because the number of the intersection points is even.

Proof that the number is even. (Analogously to the proof of the Parity Lemma 1.4.4.) Denote the yellow points by A_1, \dots, A_7 and the red points by B_1, \dots, B_7 . Take two points C and D in the plane such that all the 16 points are in general position. Then

$$0 \equiv \sum_{i < j, k < l} |\partial(CA_iA_j) \cap \partial(DB_kB_l)| \equiv \sum_{i < j, k < l} |A_iA_j \cap B_kB_l|.$$

Here the first equality follows from the fact in the hint, and the second one holds because each of the edges CA_i and DB_j belongs to six triangles, so the intersection points lying on these edges appear in the first sum an even number of times.

1.4.2. Denote the points by A and B . The algorithm is the following.

Draw all the lines passing through A , B and each of the vertices of the given polygonal line. Take a point C outside these lines. Calculate the number of intersection points of the polygonal line ACB with the given polygonal line. The answer is “we can” if this number is even, and “we cannot” otherwise.

If the number is odd the proof is analogous to the one of the Problem 1.4.5. Denote the given polygonal line by L . Suppose there exists a polygonal line L_1 joining A to B such that L and L_1 are disjoint. Replace L_1 by a close polygonal line L'_1 such that the vertices of L'_1 , the vertices of L_2 and the point C are in general position. The word ‘close’ means that the vertices of L'_1 correspond to the vertices of L_1 and the distance between the corresponding vertices is less than sufficiently small ε . Denote the endpoints of L'_1 by A' and B' . If we choose ε sufficiently small, then L'_1 and L are disjoint and polygonal lines ACB and $A'CB'$ intersect L at the same number of points. Then, applying the Parity Lemma 1.4.4 to the closed polygonal lines $A'CB' \cup L'_1$ and L , we obtain a contradiction, because these polygonal lines intersect each other at an odd number of points.

If the number is even, the proof is analogous to the one of the Problem 1.4.3.a.

1.4.3. (a) [BE82, §6].

(b,c) See Problem 1.4.5.

1.4.4. The general case is reduced to the particular case considered in §1.4 analogously to the above reduction of the particular case of two triangles. Just replace b by the second polygonal line.

Remark. The following generalization of the Parity Lemma 1.4.4 is true. A *1-cycle (modulo 2)* is a finite collection of (non-closed) polygonal lines in the plane such that each point of the plane is the end of an even number of them. Then any two *general position* (define!) 1-cycles in the plane intersect at an even number of points. The proof is obtained from the proof of the Parity Lemma 1.4.4 by replacing ‘the closed polygonal lines’ by ‘1-cycles’.

1.4.5. (a) Suppose there are two general position polygonal lines L_1 and L_2 joining A to P . Replace L_1 by a close polygonal line L'_1 such that the intersection points of L'_1 and L_2 do not coincide with the self-intersection points and the vertices of L'_1 and L_2 , except for their common endpoints. If we choose ε sufficiently small, then L'_1 and L_1 intersect L at the same number of points. Then, applying the Parity Lemma 1.4.4 to the closed polygonal lines L and $L'_1 \cup L_2$, we conclude that $|L \cap L_2| \equiv |L \cap L'_1| = |L \cap L_1|$.

(b) When the polygonal line L_1 passes to the adjacent domain, the number of the intersection points considered in (a) increases by 1, therefore the adjacent domains have different colors.

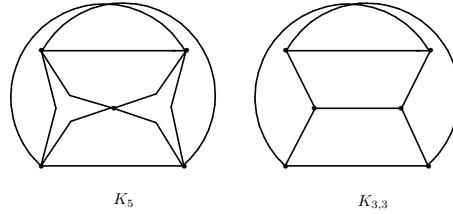


Figure 7: “Almost embedding” $K_5 \rightarrow K_{3,3}$

1.5.1. (a) This follows from the Lemma 1.5.4.

Note. Another proof of non-planarity of $K_{3,3}$ follows by Statement 1.5.1.a and Fig. 7.

1.5.2. The image of every edge is a polygonal line, i. e. a finite union of segments. Every two segments in general position intersect at a finite number of points.

1.5.3. (a) Consider the regular pentagon with the diagonals.

(b) This statement follows from the Parity Lemma 1.4.4.

(c) Take two segments with a common interior point.

1.5.4. Suppose the maps at general position $f, f' : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ are given. Assume these maps are in general position *relative to each other*, cf. the proof of linear analogue 1.2.1.a of Lemma 1.5.4. By statement 1.2.1.a, it suffices to prove the Lemma in the particular case when the maps f and f' coincide on all the edges except one edge σ , see Fig. 8. All the edges of K_5 non-adjacent to σ form a cycle, denote it by Δ (this very property of the graph K_5 is necessary to the proof). Therefore by the Parity Lemma 1.4.4 we have

$$v(f) - v(f') = |(f\sigma \cup f'\sigma) \cap f\Delta| \pmod{2} = 0.$$

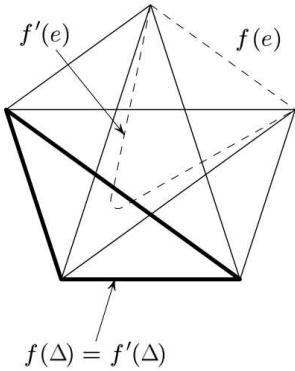


Figure 8: The residue $v(f)$ is independent of f

1.5.5. Analogously to Problem 1.5.1 and Lemma 1.5.4.

1.5.6. Analogously to Problem 1.2.3.

Invariants of graph drawings in the plane

presented by A. Enne, A. Ryabichev, A. Skopenkov and T. Zaitsev

2 Problems after the semifinal

2.1 Polynomial algorithm for recognition of planarity

The idea is to consider natural object (intersection sufficiently small) for any general position map from a graph to the plane, to investigate how this object depends on the map, and so to derive from this object an obstruction to planarity which is independent of the map.

A graph is called **\mathbb{Z}_2 -planar** if there exists a general position embedding of this graph in the plane such that the number of intersection points of any two non-adjacent edges is even.

2.1.1. (a) The graph obtained from K_5 by the subdivision of an edge is not \mathbb{Z}_2 -planar.

(b) *Hanani-Tutte Theorem.* A graph is planar if and only if it is \mathbb{Z}_2 -planar. (Hint: use the Kuratowski Theorem 1.3.3.)

2.1.2. A graph and an arbitrary ordering of its vertices are given. Then there exists a general position embedding of this graph into the plane such that for any pair of non-adjacent edges σ, τ the number of intersection points of their images has the same parity as the number of ends of σ that lie between the ends of τ .

Let $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ be a general position embedding of a graph K . Take any pair of non-adjacent edges σ, τ . By assertion 1.5.2 the intersection $f\sigma \cap f\tau$ consists of a finite number of points. Assign to the unordered pair $\{\sigma, \tau\}$ the residue

$$|f\sigma \cap f\tau| \mod 2.$$

Denote by K^* the set of all unordered pairs of non-adjacent edges of the graph K . The obtained map $K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ is called **intersection cocycle**. In other words, we obtained a ‘partial matrix’, i. e., a symmetric arrangement of zeroes and units in some cells of a $e \times e$ -matrix, where e is the number of edges of the graph K . Those cells of this matrix correspond to the pairs of non-adjacent edges.

2.1.3. (a) Find the intersection cocycle for a linear general position map $K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that the images of vertices form a convex quadrilateral.

(b) The same for the graph K_5 .

2.1.4. Suppose $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ is a general position map of a graph K and σ, τ is a pair of non-adjacent edges.

(a) For any pair $(x, y) \in \partial(\sigma \times \tau) := (\partial\sigma \times \tau) \cup (\sigma \times \partial\tau)$ we have $f(x) \neq f(y)$.

(b)* The number $|f\sigma \cap f\tau|$ has the same parity as the number of rotations of the vector $f(x) - f(y)$ while one goes around the border $\partial(\sigma \times \tau)$ of the rectangle $\sigma \times \tau$.

2.1.5. How does the intersection cocycle change

(a) if in Problem 2.1.2 we change the order of vertices?

(I-V) under the Reidemeister moves in Fig. 9.I-V? (The graph drawing changes in the disk as in Fig. 9.I-V, while out of this disk the graph drawing remains unchanged. Drawings of all edges distinct from the pictured edges do not intersect the disk. The vertex A is not an end of the edge τ in Fig. 9.V.)

Suppose A is a vertex which is not an end of an edge σ . **An elementary coboundary** of the pair (A, σ) is the map $\delta(A, \sigma) : K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ which assigns 1 to any pair $\{\sigma, \tau\}$ with $\tau \ni A$, and 0 to any other pair. The answer to Problem 2.1.5.V: $\delta(A, \sigma)$ is added to the intersection cocycle (componentwise and modulo 2).

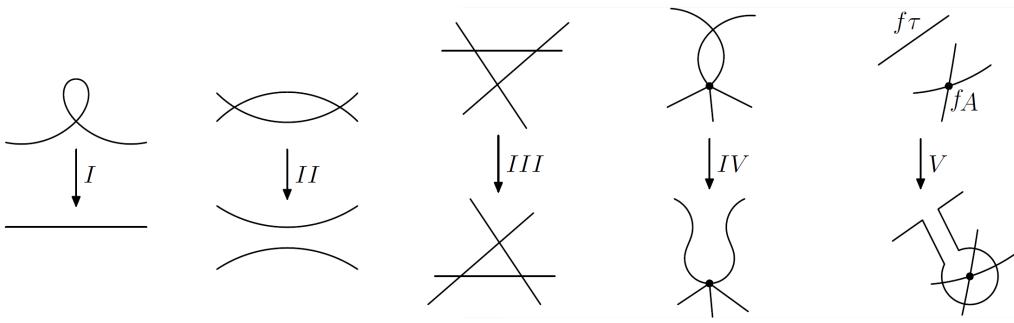


Figure 9: The Reidemeister moves for graphs in the plane.

- 2.1.6.** (a) Find elementary coboundary of every pair (A, σ) for the graph K_4 .
 (b) The same for the graph K_5 .
 (c) Is the intersection cocycle of Problem 2.1.3.a an elementary coboundary? Is it the sum of elementary coboundaries?
 (d) The same for the graph K_5 , i.e., for Problem 2.1.3.b.

Two maps $\nu_1, \nu_2 : K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ are called **cohomological** if

$$\nu_1 - \nu_2 = \delta(A_1, \sigma_1) + \dots + \delta(A_k, \sigma_k)$$

for some vertices A_1, \dots, A_k and edges $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ (not necessarily distinct).

The answer to Problem 2.1.5 and the following Lemma 2.1.7 show that cohomology is the equivalence relation generated by changes of graph drawing.

2.1.7. (a) **Lemma.** The intersection cocycles of different plane drawings of the same graph are cohomological.

(b) A graph is \mathbb{Z}_2 -planar if and only if the intersection cocycle of some (or equivalently, of any) general position map of this graph to the plane is cohomologous to the zero cocycle.

(In view of the Hanani-Tutte Theorem this gives a graph planarity criterion. By Proposition 2.1.2 this criterion is equivalent to 1.3.6.a.)

2.2 The topological Radon theorem for the plane

2.2.1. The topological Radon theorem for the plane. For any general position map $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ either

- the images of certain non-adjacent edges intersect, or
- the image of certain vertex belongs to the interior modulo 2 (see definition in §1.4) of the image of the cycle formed by those three edges that do not contain this vertex.

Proposition 2.2.1 follows from Propositions 2.2.2.ab, cf. assertion 1.1.2 and [Sk17].

2.2.2. For any general position map $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ paint in red

- the intersections points of the images of non-adjacent edges, and
- those images of the vertices of K_4 that belong to the interior modulo 2 of the image of the cycle formed by three edges that do not contain this vertex.

- (a) Mark the red points for a map f of your choice.
- (b) The parity of the number of red points does not depend on f .
- (c) The number of red points (i.e. of *Radon partitions*) is odd for any f .

Proposition 2.2.1 can be reformulated as follows, using the concept of continuous map of the circle to the plane (see Propositions 3.2.2 (4), (6)), instead of the notion of interior modulo 2.

2.2.3. (a) *The topological Radon theorem for the line.* For any continuous map of a triangle to the line the image of certain vertex belongs to the image of the opposite edge.

(b)* *The topological Radon theorem for the plane.* For any continuous map of a tetrahedron to the plane either

- the images of certain opposite edges intersect, or
- the image of certain vertex belongs to the image of the opposite facet.

(c)* If in (b) we replace ‘continuous’ by ‘piecewise linear’ (define this notion!), we obtain an equivalent assertion.

2.3 Toward Tverberg Theorem for the plane

In this subsection we shall show how to prove Tverberg Theorem (1.1.4.d and 1.1.5.c). This idea will actually work for the topological Tverberg Theorem (§3.2). You will prove assertion 1.1.4.d in the following stronger form.

2.3.1. * Any seven enumerated points $1, \dots, 7$ in the plane can be decomposed (even in two ways) into three sets such that their convex hulls have a common point and none of this sets contains any of the sets $\{1, 6\}, \{3, 4\}, \{2, 5\}$.

For a subset $X \subset [7] := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ an ordered partition $X = R_1 \sqcup R_2 \sqcup R_3$ into 3 non-empty subset is **rainbow** if $7 \in R_3$ and no set R_1, R_2, R_3 contains two numbers whose sum is 7 (i.e. contains any of the subsets $\{1, 6\}, \{3, 4\}, \{2, 5\}$).

2.3.2. How many rainbow partitions of $[7]$ are there?

2.3.3. For each $j \in [6]$ and each rainbow partition S of $[7] - \{j\}$ there are exactly two rainbow partitions of $[7]$ extending S .

(Comment. For example, a rainbow partition $(\{1\}, \{6, 4, 5\}, \{3, 7\})$ of $[7] - \{2\}$ extends to two rainbow partitions $(\{1, 2\}, \{6, 4, 5\}, \{3, 7\})$ and $(\{1\}, \{6, 4, 5\}, \{3, 2, 7\})$ of $[7]$, but $(\{1\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{3, 7\})$ would not be allowed because $2 + 5 = 7$.)

Denote by $\langle X \rangle$ the convex hull of a finite subset $X \subset \mathbb{R}^2$.

The *triple van Kampen number modulo 2* for an ordered set $f = (1, \dots, 7)$ of general position points in the (oriented) plane is

$$v(f) := \sum_R |\langle R_1 \rangle \cap \langle R_2 \rangle \cap \langle R_3 \rangle| \pmod{2} \in \mathbb{Z}_2,$$

where the summation is over all rainbow partitions $R = (R_1, R_2, R_3)$ of $[7]$.

2.3.4. (a) Find $v(f)$ for some f of your choice.

(b) The residue $v(f)$ is zero for each f .

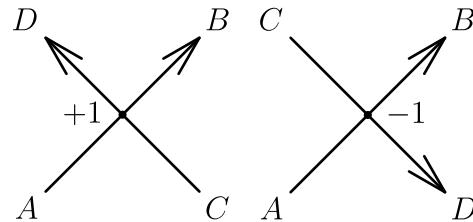


Figure 10: The sign of intersection point

Define **the sign** of intersection point of oriented segments \overrightarrow{AB} and \overrightarrow{CD} as the number $+1$ if ABC is oriented clockwise and the number -1 otherwise.

2.3.5. Suppose we have 14 points in general position in the plane: 7 red points and 7 yellow points. Electric current flows through every red segment. The sum of the currents flowing to any red point equals the sum of the currents issuing out of the point. The current also flows through the yellow segments conforming to the same Kirchhoff's law. Let us orient each red or yellow segment accordingly to the direction of the current passing through it. Assign to each intersection point of oriented red and yellow segments the product of currents passing through these segments and the sign of the intersection point. Are there points and currents such that the sum of all assigned products (that is *the flow of the red current through the yellow one*) would be equal to $42A^2$?

Hint: for 3 + 3 points the flux of the red current through the yellow one equals to zero.

Lemma 2.3.6 (Triviality). *For each two general position closed polygonal lines in the plane the sum of signs of their intersection points is zero.*

2.3.7. There is a unique map $\text{csgn} : \text{Ra} \rightarrow \{+1, -1\}$ from the set Ra of all rainbow partitions of [7] to $\{+1, -1\}$ such that

- $\text{csgn}(\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7\}) = +1$.

- For every $j \in [6]$ and every rainbow partition S of $[7] - \{j\}$ take the two rainbow partitions R, T of [7] extending S (see assertion 2.3.3). Then $\text{csgn } R + \text{csgn } T = 0$.

For every partition $R = (R_1, R_2, R_3)$ of the ordered set $(1, \dots, 7)$ of general position points in the (oriented) plane define the **geometric sign** $\text{gsgn } R$ as follows:

- $\text{gsgn } R = +1$, if up to an even permutation of (R_1, R_2, R_3)

- either $R_1 = \{a, b, c\}$, $R_2 = \{d, e, f\}$, $a < b < c$, $d < e < f$, and the plane triangles abc, def have the same orientation;

- or $R_1 = \{a, b, c\}$, $R_2 = \{d, e\}$, $R_3 = \{f, g\}$, $a < b < c$, $d < e$, $f < g$ and the plane triangles abc, deg have the opposite orientation;

- $\text{gsgn } R = -1$ otherwise.

The *triple van Kampen number* for an ordered set $f = (1, \dots, 7)$ of general position points in the (oriented) plane is

$$V(f) := \sum_R \text{csgn } R \cdot \text{gsgn } R \cdot |\langle R_1 \rangle \cap \langle R_2 \rangle \cap \langle R_3 \rangle|,$$

where the summation is over all rainbow partitions $R = (R_1, R_2, R_3)$ of f .

2.3.8. * Cf. [BMZ09, MTW10].

(a) Find $V(f)$ for some f of your choice.

(b) Is the residue $V(f) \pmod{3}$ independent of f ?

(Hint. Analogously to Problem 2.3.4.a.)

(c) Is it correct that $V(f) \not\equiv 0 \pmod{6}$ for each f ?

(Hint. Follows from (a), (b) and Problem 2.3.4.c.)

If (b) and (c) do not hold, then redefine $V(f)$ in an analogous way so that the analogues of (b) and (c) for the new $V(f)$ would be correct.

(5) State and prove analogues of parts (a,b,c) for decompositions of 13 points into 5 sets.

(p) The same for decompositions of $3p - 2$ points into p sets, for each prime p .

(4) The same for decompositions of 10 points into 4 sets.

(pk) The same for decompositions of $3 \cdot 2^k - 2$ points into 2^k sets, for each integer k .

(6) The same for decompositions of 16 points into 6 sets.

Invariants of graph drawings in the plane

presented by A. Enne, A. Ryabichev, A. Skopenkov and T. Zaitsev

Hints and solutions for some problems after the semifinal

2.1.1. (a) Note that if the graph K' is obtained from a graph K by subdivision of an edge, then a piecewise-linear map $K' \rightarrow \mathbb{R}^2$ corresponds to the piecewise-linear map $K \rightarrow \mathbb{R}^2$. Therefore, the \mathbb{Z}_2 -planarity of the graph K_5 with an edge subdivided implies the \mathbb{Z}_2 -planarity of the graph K_5 . However, by Lemma 1.5.4 we have that the graph K_5 is not \mathbb{Z}_2 -planar.⁹

(b) Analogously to (a), Lemma 1.5.4 and Statement 1.5.5 imply that any graph homeomorphic to K_5 or $K_{3,3}$ is not \mathbb{Z}_2 -planar. Using Kuratowski Theorem 1.3.3, we obtain the required assertion.

2.1.2. Put the images of the vertices on the unit circle preserving the order and let the images of the edges be the chords.

2.1.3. Order the points round the quadrilateral (resp. pentagon) perimeter and let the edges be ordered lexicographically. Then the answer is the following:

$$(a) \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & 0 \\ - & - & - & - & - & 1 \\ - & - & - & 0 & - & - \\ - & - & 0 & - & - & - \\ - & 1 & - & - & - & - \\ 0 & - & - & - & - & - \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & - & - & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & 1 & 1 & - & - & 0 \\ - & - & - & - & 0 & - & 1 & - & 1 & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 0 & - & 0 & - & - & - \\ - & - & 0 & 0 & - & - & - & - & - & - & 0 \\ - & 1 & - & 0 & - & - & - & - & - & 1 & - \\ - & 1 & 1 & - & - & - & - & 0 & - & - & - \\ 0 & - & - & 0 & - & - & 0 & - & - & - & - \\ 0 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & - & 0 & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}.$$

2.1.4. (a) For $(x, y) \in \partial(\sigma \times \tau)$ either x or y is a vertex of the graph K . So we have $f(x) = f(y)$ only if the image of a vertex and the image of some point of an edge coincide. This is impossible when f is a general position map.

(b)¹⁰ Take the piecewise-linear map $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ corresponding to $f\sigma$. If $\gamma(t) \notin f\tau$, then the number of rotations for the ‘piece’ $\gamma|_{[0;t]}$ of the edge σ from 0 to t and the edge τ is well defined. And if $\gamma(t) \in f\tau$, then these numbers of rotations for restrictions $\gamma|_{[0;t-\varepsilon]}$ and $\gamma|_{[0;t+\varepsilon]}$ differ by ± 1 (depending on the sign of the intersection point, see Fig. 10). This argument becomes rigorous after defining ‘the number of rotations’ formally.

2.1.5. Answer to I-IV: the intersection cocycle does not change.

2.1.6. For example, the coboundaries $\delta(3, (12))$ for K_4 and K_5 (with vertices and edges ordered as in the proof of Problem 2.1.3) are the following partial matrices:

⁹This also may be deduced from Problems 2.1.6.d and 2.1.7.a

¹⁰Statements 2.1.4.b and 3.1.2.e can also be proved analogously to the proof that $v(f) = o(f)$ for $r = 2$ in [Sk16, §3.4].

$$(a) \begin{pmatrix} & & & & & & 1 \\ & & & & & 0 & - \\ & & & 0 & - & - \\ & 0 & - & - & - \\ - 0 & - & - & - \\ 1 & - & - & - & - \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} & & & & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 & - & 0 \\ & & & 0 & - & 0 & 0 & - & 0 \\ & & 0 & 0 & - & 0 & 0 & - & 0 \\ & 0 & 0 & - & - & - & 0 & - & 0 \\ & 0 & 0 & - & - & - & 0 & - & 0 \\ 1 & - & 0 & - & - & 0 & 0 & - & 0 \\ 1 & - & 0 & - & - & 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 & - & - & 0 & - & 0 \end{pmatrix}.$$

In other words, $\delta_{K_4}(3, (12)) = \{(12), (34)\}$, $\delta_{K_5}(3, (12)) = \{(12), (34), ((12), (35))\}$.

(c) Yes, it equals $\delta(1, (24))$ (it also equals $\delta(2, (13))$, $\delta(3, (24))$ and $\delta(4, (13))$).

(d) No, it is not: addition of an elementary coboundary does not change the parity of the number of units above the diagonal, while initially this number equals five.

2.1.7. (a) Suppose a graph K and two general position maps $f, f' : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ are given. Suppose these maps are in general position relatively to each other, cf. the proof of the linear analogue of Lemma 1.5.4.

The proof of the particular case when the maps f and f' differ only on the interior of one edge σ . Take a point O in the plane. For every vertex B of the graph K , if B is not an end of the edge σ , join fB to O by a polygonal line b in general position to the cycle $\widehat{\sigma} := f\sigma \cup f'\sigma$. Then by the Parity Lemma 1.4.4 for every edge B_1B_2 nonadjacent to σ we have

$$0 \equiv \frac{1}{2} |\widehat{\sigma} \cap (b_1 \cup b_2 \cup f(B_1B_2))| \equiv \frac{1}{2} |\widehat{\sigma} \cap b_1| + |\widehat{\sigma} \cap b_2| + |\widehat{\sigma} \cap f(B_1B_2)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} |\widehat{\sigma} \cap f(B_1B_2)| \equiv |\widehat{\sigma} \cap b_1| + |\widehat{\sigma} \cap b_2|.$$

Denote by B_1, \dots, B_k all the vertices for which the polygonal lines b_1, \dots, b_k intersect the cycle $\widehat{\sigma}$ at an odd number of points. (The set B_1, \dots, B_k depends on the choice of the point O , but the following equality holds for every choice.) Then the difference of the intersection cocycle of f and f' equals

$$\delta(B_1, \sigma) + \dots + \delta(B_k, \sigma) = \sum_{B \notin \sigma} |\widehat{\sigma} \cap b| \cdot \delta(B, \sigma).$$

(b) Use (a) and Fig. 9.V.

2.2.1. By assertion 2.2.2 we have that there exists at least one red point, as it is desired.

2.2.2. (a) Take a linear map of the graph K_4 to the plane such that the images of the vertices are the vertices of the regular triangle and its center. Then there is only one red point, namely the center.

(b) Let $f, f' : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be maps in general position. We may assume that they are in general position *relatively to each other*, cf. proof of linear analogue of Lemma 1.5.4. The reduction of the general case to the particular one when maps f and f' differ from each other only on the interior of one edge σ is similar to Lemma 1.5.4. Let us prove the particular case (cf. Lemma 1.5.4). Consider a point O in the plane. For each of the two vertices B of graph K_4 that are not the ends of edge σ connect $f(B)$ and O to a polygonal chain b , which is in general position to the cycle $\widehat{\sigma} := f\sigma \cup f'\sigma$. Then for edge B_1B_2 non-adjacent with σ we get

$$0 \equiv \frac{1}{2} |\widehat{\sigma} \cap (b_1 \cup b_2 \cup f(B_1B_2))| \equiv \frac{1}{2} |\widehat{\sigma} \cap b_1| + |\widehat{\sigma} \cap b_2| + |\widehat{\sigma} \cap f(B_1B_2)| \equiv (v_1 + v_2)(f) - (v_1 + v_2)(f').$$

(c) Follows from (a) and (b).

2.2.3.(a) Obviously, the image of some vertex lies between the images of two other vertices. Then use Intermediate value theorem.

Assertion (b) follows from (c) and piecewise-linear case topological Radon theorem for the plane. The piecewise-linear case follows from 2.2.2.

2.3.2. The answer is $6^3 - 2 \cdot 2^3 = 200$. Consider analogous partitions where the sets can be empty. For such partitions each of the pairs $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$ can be distributed in 6 ways and element 7 always lies in R_3 . Therefore, the number of such partitions equals 6^3 .

Then count the considered partitions that are not rainbow. In each of them one of the sets R_1, R_2 is empty, for each of the pairs $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$ there are two ways to distribute it. So the number of excess partitions equals $2 \cdot 2^3$.

2.3.3. The element j can be added to two of three sets of partition S since one of the sets of partition contains the “partner” $7 - j$ of j that cannot be contained in the same set as j .

2.3.4. (b) Assign to a rainbow partition R_1, R_2, R_3 the rainbow partition R_2, R_1, R_3 (this correspondence is a bijection). We can observe that the number of nonzero summands in the formula is even, so $v(f) = 0$.

Also the Problem 2.3.4 can be solved analogously to Problems 1.2.1.a, 1.5.4, 2.2.2.b, cf. Problems 2.1.7.a and [Sk17].

2.3.5. *Proof for analogue with 3+3 points.* The current is constant for each loop, and the signs of intersection points alternate, therefore the sum equals zero.

Answer. There is no such point and currents, because the sum of all assigned products always equals zero.

Solution. Denote by *red current* (resp. *yellow*) assignment of currents for red (resp. yellow) segments conforming to the Kirchhoff’s law. Note that if we consider two red currents and one yellow current, then the flow of the sum of the red currents through the yellow one equals the sum of the flows. Analogously for one red current and two yellow currents the sum of the flows equals the flow of the sum (that is, the flow is *biadditive*).

Add a point C to the yellow points and a point D to the red points so that all 16 points are in general position, as in Problem 1.4.1. Assume that the currents on the segments CA_i and DB_j equal zero. For each segment A_iA_j consider the current flowing through the triangle CA_iA_j equal the initial yellow current through A_iA_j (and equal zero out of the triangle CA_iA_j). Then the sum of these $\binom{7}{2}$ currents equals the initial yellow current. Analogously decompose the red current into the sum of $\binom{7}{2}$ currents flowing through triangles DB_kB_l . The required statement follows from property of biadditivity and analogue for 3+3 points.

2.3.6. The proof is analogous to the proof of the Parity Lemma 1.4.4.

Invariants of graph drawings in the plane

presented by A. Enne, A. Ryabichev, A. Skopenkov and T. Zaitsev

3 Additional problems for advanced teams

3.1 Intersections with signs and for line drawings

In this section we define the van Kampen obstruction to \mathbb{Z} -planarity of a graph (Problems 3.1.1-3.1.4) and to \mathbb{Z}_2 -embeddability of a graph into the line (Problem 3.1.5). These generalizations of constructions from Section 2.1 we formally will not use further. However, it is useful to obtain these simple generalizations before moving to the more complicated generalisation in Problems 3.2.4, 3.2.5.

A graph is called **\mathbb{Z} -planar** if there exists a general position map of this graph to the plane such that the sum of the signs of intersection points of f -images of any two non-adjacent edges is zero for some (or equivalently any) orientations of its edges [Sk16, Fig. 4].

3.1.1. (a) Draw two (not closed) oriented general position polygonal lines, intersecting each other in an even number of points, sum of whose signs is not equal to zero.

(b) A graph is planar if and only if it is \mathbb{Z} -planar.

Orient the edges of a graph K . Suppose $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ is a general position map. Assign to each ordered pair of non-adjacent edges (σ, τ) the sum of the signs of the intersection points of its f -images $f\sigma \cdot f\tau$. Denote by \tilde{K} the set of all ordered pairs of non-adjacent edges of the graph K . The obtained map $\tilde{K} \rightarrow \mathbb{Z}$ is called **integral intersection cocycle**. In this section we drop the word ‘integral’.

3.1.2. (a) Orient the edges of the graph K_5 . Find the intersection cocycle for a linear general position map $K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that the images of the vertices form a convex pentagon.

(b) $f\sigma \cdot f\tau = -f\tau \cdot f\sigma$.

(c) How does the intersection cocycle change if we change the orientation of an edge?

(d) How does the intersection cocycle change if we change the orientation of the plane, that is if we compose f with a rotational symmetry?

(e)* In Problem 2.1.4.b the number $f\sigma \cdot f\tau$ equals the number of rotations of the vector while one goes around $\partial(\sigma \times \tau)$.

3.1.3. (I-V) How does the intersection cocycle change under the Reidemeister moves in Fig. 9.I-V? (The vertex A is not an end of the edge τ in Fig. 9.V.)

Suppose A is a vertex which is not an end of an edge σ . An **elementary coboundary** of the pair (A, σ) is the map $\delta(A, \sigma) : \tilde{K} \rightarrow \mathbb{Z}$ which assigns

- 1 to any pair (σ, τ) with τ directed out of A and any pair (τ, σ) with τ directed into A ,
- -1 to any pair (σ, τ) with τ directed into A and any pair (τ, σ) with τ directed out of A ,
- 0 to any other pair.

The answer to Problem 3.1.3.V: $\delta(A, \sigma)$ is added to the intersection cocycle.

Two maps $N_1, N_2 : \tilde{K} \rightarrow \mathbb{Z}$ are called **(integrally) cohomologous**, if

$$N_1 - N_2 = m_1 \delta(A_1, \sigma_1) + \dots + m_k \delta(A_k, \sigma_k)$$

for some vertices A_1, \dots, A_k , edges $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ and integer numbers m_1, \dots, m_k (not necessarily distinct).

3.1.4. (a), (b) State and prove integral analogous of problems 2.1.7.ab.

(c) Doubled intersection cocycle of any general position map of a graph in the plane is null-cohomologous.

3.1.5. (a) For any general position map $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ of a graph K (define this notion!) and a pair of non-adjacent edges $\{AB, CD\}$ of the graph K

$$|f(A) \cap f(CD)| + |f(B) \cap f(CD)| + |f(AB) \cap f(C)| + |f(AB) \cap f(D)| \equiv 0.$$

(b)* Take a general position map $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ of a graph K . The map assigning the number $|f(A) \cap f(BC)|$ to any pair A, BC consisting of a vertex A and an edge BC such that $A \neq B, C$ is called *intersection cocycle*. Define analogues of at least two of the Reidemeister moves in Fig. 9 for maps of a graphs to the line. How does the intersection cocycle change for the analogous moves?

(c)* Define graph $K^{*(1)}$ as follows. The vertices of $K^{*(1)}$ are unordered pairs $\{A, B\}$ of different vertices of a graph K . For each pair A, BC consisting of a vertex A and an edge BC of K such that $A \neq B, C$ connect vertex $\{A, B\}$ to $\{A, C\}$ with an edge in graph $K^{*(1)}$. Denote this edge by $A \times BC = BC \times A$.

Find $K^{*(1)}$, if K is a cycle with 3 vertices, a triod, K_4 .

(d)* For a vertex B of a graph G define an *elementary coboundary* $\delta_G B$ as a map from the set of the edges of G to the set $\{0, 1\}$ which assigns 1 to the edges that contain this vertex, and 0 to any other edge. (In other words, $\delta_G B$ corresponds to the set of edges containing B .) Dispositions ω_1 and ω_2 of zeroes and units on edges of graph $K^{*(1)}$ are called *cohomologous* if $\omega_1 - \omega_2$ is the sum of some elementary coboundaries $\delta_{K^{*(1)}} \{A, B\}$. Is it correct that there is a general position map $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ of a graph K such that $f(A) \notin f(\sigma)$ for each vertex A and edge $\sigma \not\ni A$, if and only if the intersection cocycle of some general position map $f' : K \rightarrow \mathbb{R}$ is zero?

(e)* A *cocycle* is a map from the edges of the graph $K^{*(1)}$ to the set $\{0, 1\}$ such that the sum of images of edges $A \times CD, B \times CD, C \times AB, D \times AB$ is even for any non-adjacent edges AB, CD of graph K (cf. part (a)). For each cocycle ν assign to any unordered pair $\{AB, CD\}$ of disjoint edges of graph K the sum of two numbers on ‘opposite’ edges $A \times CD$ and $B \times CD$ of ‘square’ $AB \times CD$. That is, define a map $\text{Sq}^1 \nu : K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ by the formula

$$\text{Sq}^1 \nu \{AB, CD\} := \nu(A \times CD) + \nu(B \times CD) = \nu(AB \times C) + \nu(AB \times D).$$

Prove that $\text{Sq}^1(\mu + \nu) = \text{Sq}^1 \mu + \text{Sq}^1 \nu$.

(f)* Express $\text{Sq}^1(\mu\nu)$ in terms of $\mu, \nu, \text{Sq}^1 \mu, \text{Sq}^1 \nu$. (Here we consider componentwise sum and product.)

(g)* Prove that $\delta_{K^{*(1)}} \{A, B\}$ is a cocycle.

(h)* Prove that $\text{Sq}^1 \delta_{K^{*(1)}} \{A, B\} = \sum_{\sigma \ni B} \delta(A, \sigma) =: \delta(A \times \delta_K B)$.

3.2 The topological Tverberg conjecture for the plane

The **winding number** of a closed oriented polygonal line $A_1 \dots A_n$ around a given point O that does not belong to the polygonal line is a sum

$$\deg_{A_1 \dots A_n} O := (\angle A_1 OA_2 + \angle A_2 OA_3 + \dots + \angle A_{n-1} OA_n + \angle A_n OA_1)/2\pi$$

of the oriented angles divided by 2π .

3.2.1. (a) Find a winding number of the regular pentagon (with arbitrary orientation) around its center and around the intersection point of two lines passing through non-adjacent sides.

(b) Find the winding number for each (arbitrarily oriented) polygonal line from figure 4 and a point of your choice (in any finite domain).

3.2.2. * (3) For every map $f : K_7 \rightarrow \mathbb{R}^2$ there exists an enumeration of the vertices by the numbers $1, \dots, 7$ such that either

- the winding number of the cycle 567 around some intersection point of the edges 12 and 34 is nonzero, or
- the winding number of each of the cycles 567 and 234 around the point 1 is nonzero.

(4) **The topological Tverberg theorem for the plane.** If r is a power of a prime, then for every map $f : K_{3r-2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ there exists an enumeration of the vertices by the numbers $1, \dots, 3r-2$ such that either

- the winding number of each of the cycles $3t-1, 3t, 3t+1$, $t = 2, 3, \dots, r-1$, around some intersection point of the edges 12 and 34 is nonzero, or
- the winding number of each of the cycles $3t-1, 3t, 3t+1$, $t = 1, 2, 3, \dots, r-1$, around the point 1 is nonzero.

(The cases $r = 5$, arbitrary prime r , $r = 4$, $r = 2^k$ are counted as separate problems.)

(6) **The topological Tverberg conjecture for the plane.** Is the analogue of assertion (4) correct, if r is not a power of a prime?

Hints to problem 3.2.2 are in the following problem, cf. problem 2.3.8. By [Sc05, SZ] Theorem 3.2.2 is equivalent to the following result: *If r is a power of a prime, then for every map of the $(3r-1)$ -simplex to the plane there exist r pairwise disjoint faces, images of that have a common point.* Problem 3.2.2 has the analogous reformulation.

3.2.3. * (a) For every general position map $f : K_7 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\sum_{\substack{|R_1|=1, \\ |R_2|=|R_3|=3}} \text{csgn } R \deg_{fR_2}(fR_1) \deg_{fR_3}(fR_1) + \sum_{\substack{|R_1|=|R_2|=2, \\ |R_3|=3, \\ X \in fR_1 \cap fR_2}} \text{csgn } R \operatorname{sgn} X \deg_{fR_3} X \equiv_6 2.$$

Here the summation is over all the rainbow partitions $R = (R_1, R_2, R_3)$ with specified properties, and fR_i is the image of a vertex R_i , edge R_i or an oriented cycle $R_i = abc$, $a < b < c$, under f .

(b) State and prove the analogue of (a) for partitions of the vertices of K_{3r-2} into r sets. (The cases $r = 5$, arbitrary prime r , $r = 4$, $r = 2^k$, r the power of prime and $r = 6$ are counted as separate problems.)

3.2.4. * Suppose $f : K_7 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is a general position map. Define *threefold intersection cocycle* and *cohomologous cocycles* analogously to §3.1 and Problems 2.3.8, 3.2.3. Do the same for arbitrary graph instead K_7 and for r -fold intersections.

3.2.5. * (3) Tripled threefold intersection cocycle of any general position map $K_7 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is null-cohomologous.

(4) The 4-fold intersection cocycle of any general position map $K_{10} \rightarrow \mathbb{R}^2$ multiplied by 8 is null-cohomologous.

(r) If integer r is not a power of a prime p , then the r -fold intersection cocycle of any general position map $K_{3r-2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ multiplied by $r!/\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{r}{p^k} \right\rfloor$ is null-cohomologous.

(0) **Özaydin theorem.** If r is not a prime number, then the r -fold intersection cocycle of any general position map $K_{3r-2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ is null-cohomologous. (The same is correct for every graph.)

References

- [AMSW] *S. Avvakumov, I. Mabillard, A. Skopenkov and U. Wagner.* Eliminating Higher-Multiplicity Intersections, III. Codimension 2, arxiv:1511.03501.
- [BE82] * *V.G. Boltiansky and V.A. Efremovich.* Intuitive Combinatorial Topology. Springer. Russian version: Moscow, Nauka, 1982, <http://ilib.mccme.ru/djvu/geometry/boltiansky-nagl-topo.htm>.
- [BM04] *Boyer, J. M. and Myrvold, W. J.* On the cutting edge: simplified $O(n)$ planarity by edge addition, Journal of Graph Algorithms and Applications, 8:3 (2004) 241–273.
- [BMZ09] P. V. M. Blagojević, B. Matschke, G. M. Ziegler, Optimal bounds for the colored Tverberg problem, J. European Math. Soc., arXiv:0910.4987.
- [BZ] P. V. M. Blagojević and G. M. Ziegler, Beyond the Borsuk-Ulam theorem: The topological Tverberg story, arXiv: 1605.07321.
- [CLR] * *T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein.* Introduction to Algorithms, MIT Press, 2009.
- [Fo04] * *R. Fokkink.* A forgotten mathematician, Eur. Math. Soc. Newsletter 52 (2004) 9–14, <http://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2004-06-52.pdf>.
- [Fr15] *F. Frick,* Counterexamples to the topological Tverberg conjecture, arXiv:1502.00947.
- [Gr10] M. Gromov, *Singularities, expanders and topology of maps. Part 2: From combinatorics to topology via algebraic isoperimetry,* Geometric and Functional Analysis 20 (2010), no. 2, 416–526.
- [HT74] *J. Hopcroft and R. E. Tarjan,* Efficient planarity testing, Journal of the Association for Computing Machinery, 21:4 (1974) 549–568.
- [Ma03] *J. Matoušek,* Using the Borsuk-Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry, Springer, 2003.
- [MTW10] *J. Matoušek, M. Tancer, U. Wagner.* A geometric proof of the colored Tverberg theorem, arXiv:1008.5275.
- [MW15] *I. Mabillard and U. Wagner.* Eliminating Higher-Multiplicity Intersections, I. A Whitney Trick for Tverberg-Type Problems. arXiv:1508.02349.
- [Oz] *M. Özaydin,* Equivariant maps for the symmetric group, unpublished, <http://minds.wisconsin.edu/handle/1793/63829>.
- [Pr95] * *V. V. Prasolov.* Intuitive topology. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1995. Russian version: Moscow, MCCME, 1995, <http://www.mccme.ru/prasolov>.
- [Pr06] * *V. V. Prasolov.* Elements of Combinatorial and Differential Topology, 2006, GSM 74, AMS, Providence, RI.
- [Sa91] *K. S. Sarkaria.* A one-dimensional Whitney trick and Kuratowski's graph planarity criterion, Israel J. Math. 1991. 73. P. 79-89.
- [Sc05] *T. Schöneborn,* On the Topological Tverberg Theorem, arXiv:math/0405393.

- [Si16] S. Simon, Average-Value Tverberg Partitions via Finite Fourier Analysis, Israel J. Math., 216 (2016), 891-904, Arxiv:1501.04612.
- [Sk'] * A. Skopenkov. Algebraic Topology From Algorithmic Viewpoint, draft of a book, in Russian, <http://www.mccme.ru/circles/oim/algtop.pdf>.
- [Sk15] * A. Skopenkov. Algebraic Topology From Geometric Viewpoint (in Russian), MC-CME, Moscow, 2015. <http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>.
- [Sk16] * A. Skopenkov, A user's guide to the topological Tverberg Conjecture, arXiv:1605.05141.
- [Sk17'] * A. Skopenkov, On van Kampen-Flores, Conway-Gordon-Sachs and Radon theorems, arxiv:1704.00300.
- [SS] * A. Skopenkov. Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory, arxiv:1402.0658.
- [Sk05] * A. Skopenkov. On the Kuratowski graph planarity criterion, Mat. Prosveschenie, 9 (2005), 116-128. arXiv:0802.3820.
- [Sk03] M. Skopenkov. Embedding products of graphs into Euclidean spaces, Fund. Math. 2003. 179. P. 191-198.
- [ST07] * A. Skopenkov and A. Telishev, Once again on the Kuratowski graph planarity criterion, Mat. Prosveschenie, 11 (2007), 159-160. arXiv:0802.3820.
- [SZ] T. Schöneborn and G. Ziegler, The Topological Tverberg Theorem and Winding Numbers, http://page.math.tu-berlin.de/~schoenei/papers/The_Topological_Tverberg_Theorem_and_Winding_Numbers.pdf.
- [Ta] * Handbook of Graph Drawing and Visualization. Ed. R. Tamassia, CRC Press. <https://cs.brown.edu/~rt/gdhandbook/>.
- [Vi02] * E. B. Vinberg. A Course in Algebra. Graduate Studies in Mathematics, vol. 56. 2003.
- [vK32] E. R. van Kampen, Komplexe in euklidische Räumen, Abh. Math. Sem. Hamburg, 9 (1932) 72–78; Berichtigung dazu, 152–153.

Books, reviews and popular articles in this list are marked by the stars.

Теорема Ван Дер Вардена и игры

Всем хорошо известна **Теорема ван-дер-Вардена**: *Пусть натуральный ряд раскрашен в конечное число цветов. Тогда в нем можно найти сколь угодно длинную конечную однокрасочную арифметическую прогрессию.*

Теорема может быть переформулирована следующим образом: *Пусть k и l – натуральные числа. Существует такое число $N(k, l)$, что для любого натурального $N > N(k, l)$ и любого разбиения множества $1, \dots, N$ на k подмножеств, одно из подмножеств содержит арифметическую прогрессию длины l .*

Верхние оценки на числа $N(k, l)$ просто чудовищные. Например, $N(k, 3)$ имеет порядок экспонента от экспоненты и т.д. k раз, для $N(k, 4)$ вместо экспоненты итерируется функция $N(k, 3)$ и т.д. (лучшие оценки были получены совсем недавно и неэлементарными методами). Нижние оценки – только экспоненциальные. Этой теореме, в частности, был посвящен проект на Летней конференции Турнира Городов в 1995 году, так что **ее доказательство не является нашей целью**. Смежные вопросы над которыми предлагается подумать участникам таковы:

1. Можно ли раскрасить множество натуральных чисел так, чтобы бесконечной однокрасочной арифметической прогрессии не нашлось?
2. Докажите экспоненциальную нижнюю оценку: $N(s, l) > s^{l/2}$. Попробуйте построить явную конструкцию.
3. Можно ли раскрасить более половины вершин какого-нибудь правильного n угольника в чёрный цвет так, что объединение исходной раскраски и любых десяти её поворотов не покроют чёрным цветом все клетки? Постарайтесь получить по-возможности лучшие оценки на n , а также явные конструкции.

Теорема Семереди (она же **гипотеза Эрдеша-Турана**, поставленная в 1936 году) утверждает, что если A – произвольное подмножество натурального ряда и последовательность $a_n = \frac{A \cap \{1, \dots, N\}}{N}$ имеет предельную точку отличную от нуля (то есть существует подпоследовательность $a_{k_1}, \dots, a_{k_i}, \dots$ стремящаяся к точке отличной от нуля), тогда для любого натурального $k > 3$ множество A содержит арифметическую прогрессию длины k . Это один из основных результатов Семереди (полученный в 1975 году), за которые он получил премию Абеля. Для прогрессий длины 3 этот результат получен Клаусом Ротом в 1953 году.

https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Семереди.

Один из основных результатов Теренса Тао явились доказательство того, что *среди простых чисел найдется сколь угодно длинная арифметическая прогрессия*. Результат И.Д.Шкредова относится к нахождению чёрного треугольника в квадрате $N \times N$ при раскраске некоторой доли клеток в чёрный цвет

(см. http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=912&option_lang=rus).

Наша цель – посмотреть на эту тематику с игровой точки зрения. Возможно, этот альтернативный взгляд позволит лучше понять вопросы, связанные с теоремами Ван-Дер-Вардена и Семереди и получить новые результаты, в частности, оценки в теореме Ван-Дер-Вардена.

Серия А

1. Двое играют в следующую игру. На бесконечной в обе стороны клетчатой полоске первый ставит в свободную клетку один крестик, второй ставит в 1000 свободных клеток нули. Цель первого игрока – создать арифметическую прогрессию из крестиков длины 3, цель второго – ему помешать.
 - а) Докажите, что у первого игрока существует выигрышная стратегия.
 - б) Докажите, что найдется число n , такое что первый сможет гарантированно завершить игру за n ходов.
 - в) Найдите минимальное n в условиях пункта б).

- г) Пусть теперь первый и второй играют на бесконечной в **одну** сторону полосе. Найдите минимальное число ходов достаточное для выигрыша первого игрока.
2. Двое играют на бесконечной клетчатой плоскости в следующую игру. Первый ходит крестиком в свободную клетку, второй отвечает ему 1000 нулями. Цель первого – создать равнобедренный прямоугольный треугольник из крестиков, катеты которого параллельны осям координат. Цель второго – помешать ему.
 - а) Докажите, что у первого игрока существует выигрышная стратегия
 - б) Найдите минимально число ходов необходимое для гарантированного выигрыша первого.
 3. Сможет ли первый создать арифметическую прогрессию длины 4 в условиях задачи 1?
 4. В условиях задачи 2 может ли первый построить квадрат?
 5. Пусть в игре на полоске первый ставит один крестик, а второй отвечает ему n ноликами. Может ли первый создать арифметическую прогрессию длины k ?
 6. Оцените минимальное число ходов необходимое для выигрыша первого в предыдущей задаче.
 7. Теперь два игрока играют в игру на плоскости. Первый ставит одну красную точку, второй отвечает k синими. Докажите, что для любого набора из n точек F , первый сможет создать фигуру F' подобную F (то есть получающуюся из F композицией гомотетии и параллельного переноса), все вершины которой красные.

Серия Б

Обобщенная теорема ван-дер-Вардена: Пусть рациональные точки плоскости раскрашены в конечное число цветов. Тогда для любой фигуры M состоящей из конечного числа рациональных точек, можно найти одноцветную фигуру M' подобную M (то есть получающуюся из M композицией гомотетии и параллельного переноса) состоящую из рациональных точек.

1. Докажите, что в формулировке обобщенной теоремы Ван-Дер-Вардена понятие *подобного множества* нельзя заменить на понятие *конгруэнтного* (или *равного* согласно терминологии современной школьной программы). Иными словами, одноцветного множества, конгруэнтного множеству M может и не оказаться.
- (*) А что если рассмотреть группу преобразований, сохраняющих площадь или *гиперболических поворотов* (а именно, преобразований, сжимающих одну ось координат OX и растягивающих другую OY в одно и то же число раз)?
2. Рациональные точки плоскости раскрашены в несколько цветов. Доказать, что найдется прямоугольный треугольник, с катетами, параллельными осям координат с одноцветными вершинами. (При решении этой задачи разрешено пользоваться теоремой Ван-Дер-Вардена).
3. (** решение этой задачи неизвестно) В условиях предыдущей задачи докажите, что найдется одноцветный прямоугольник площади 1 с одноцветными вершинами.
Назовем симплекс в n -мерном пространстве *стандартным* если у него есть n ребер, параллельным осям координат.
4. Рациональные точки n -мерного пространства раскрашены в несколько цветов. Доказать, что найдется стандартный симплекс с одноцветными вершинами. (При решении этой задачи разрешено пользоваться теоремой Ван-Дер-Вардена).
5. Сформулируйте и докажите игровую форму предыдущих пунктов.
Вторая задача в этой серии в игровой форме становится уже подъемной. В этой связи возникает вопрос:
6. (*) Сформулируйте и решите игровую форму задачи об образе данного конечного множества под действием гиперболических поворотов.

Серия В

- Имеется неограниченное количество игральных досок 8×8 . Первый своим ходом ставит 2 фишки на любые из них, второй отвечает постановкой одной черной фишкой на любую из досок.
 - Может ли первый гарантированно замостить одну из досок?
 - За какое наименьшее число ходов первый сможет это сделать?
- Двое играют в крестики – нолики на бесконечной в одну сторону клетчатой полоске. Первый ходит двумя крестиками, второй отвечает ноликом. Может ли первый получить 100 крестиков идущих подряд?
- Может ли первый в условиях первой задачи добиться этого за 2^{45} ходов?
- А за 2^{90} хода?

Серия Г

Двое художников играют в следующую игру. Первый ставит на плоскости точку и соединяет с несколькими поставленными ранее. При этом пересекать ранее проведенные дуги нельзя. Второй красит поставленную первым точку так, чтобы никакие две одноцветные точки не были соединены дугой.

- Может ли первый заставить второго использовать более n цветов?
- Может ли первый достичь этого за полиномиальное число ходов (от n)?
- Нарисовано дерево. Двое по очереди красят вершины так, чтобы соседние вершины были раскрашены в разные цвета. Может ли первый заставить второго использовать более четырех цветов?
- Может ли первый, в условиях предыдущей задачи, заставить второго использовать более трех цветов?
- Имеется двудольный граф G . Двое по очереди красят его вершины так, чтобы соседние вершины были раскрашены в разные цвета. При этом второй игрок старается использовать как можно меньше цветов, а первый хочет заставить его использовать как можно больше цветов. Верно ли, что при любом натуральном N двудольный граф G можно подобрать так, что второму не хватит N цветов?

Серия Д

- Дан полный граф на n вершинах. Двое по очереди красят его рёбра. Первый красит одно ребро красным, второй красит 100 ребер в синий цвет, и так повторяется, пока все рёбра не будут покрашены. Может ли первый при достаточно больших n добиться появления полного подграфа со 100 вершинами и всеми красными рёбрами?
- В красный цвет раскрашены 99% рёбер полного графа из n вершин. Верно ли, что при достаточно большом n найдётся полный подграф из 1000 вершин с ребрами красного цвета?
- Каждое k -элементное подмножество множества $\{1, \dots, n\}$ раскрашено в один из s цветов (например, при $k = 2$ получаем раскраску рёбер полного графа на n вершинах). Докажите, что при достаточно большом n найдётся такое подмножество $U \subset \{1, \dots, n\}$, что все его k -элементные подмножества – одного и того же цвета, причём если x – минимальный элемент из U , то число элементов в U не меньше $\exp(x) + s$.

Теорема Ван Дер Вардена и игры 2

Серия Е

Проблемы Ван Дер Варденского типа можно рассматривать в классическом, плотностном (типа теоремы Семиреди) и в игровом аспектах.

Классическая версия

1. Целочисленные точки плоскости раскрашены в k цветов. Докажите, что найдется одноцветный прямоугольник с вершинами в целых точках.
2. Целочисленные точки пространства раскрашены в k цветов. Докажите, что найдется одноцветный параллелепипед с вершинами в целых точках.
3. Сформулируйте и докажите n -мерный аналог предыдущих задач.
4. Докажите, что аналог задачи E1 верен для раскраски целочисленных точек прямоугольника:
 - а) Размера $(k+1) \times (k^{(k+1)} + 1)$
 - б) Размера $(k+1) \times (kC_k^2 + 1)$
5. Сформулируйте и докажите аналоги предыдущей задачи для:
 - а) Трехмерной сетки
 - б) n -мерной сетки
6. Целочисленные точки квадрата $S \times S$ красятся в k цветов. Получите оценку на S при которой найдется одноцветный прямоугольник.
7. Назовем **l -решеткой** множество из l^2 точек, получаемых как пересечение l вертикальных прямых с l горизонтальными. Докажите, что при раскраске плоскости в k цветов найдется l -решетка.
8. Целочисленные точки квадрата $S \times S$ красятся в k цветов. Получите оценку на S при которой найдется l -решетка.

Плотностная версия

Определим понятие **плотности** для целочисленных точек на плоскости: скажем, что какой-либо цвет имеет плотность k , если последовательность

$$a_n = \frac{\text{Количество черных точек внутри квадрата } n \times n \text{ с центром в точке } (0; 0)}{n^2}$$

стремится к k .

9. Докажите, что при раскраске некоторых точек плоскости в черный цвет с плотностью 1% найдется черный прямоугольник.
10. Сформулируйте и докажите аналогичное условие для:
 - а) Пространства
 - б) n -мерного пространства
11. Докажите, что при раскраске некоторых точек плоскости в черный цвет с плотностью 1% найдется одноцветная l -решетка.

Игровая версия

12. Двое играют на бесконечной клетчатой плоскости в следующую игру. Первый ходит крестиком в свободную клетку, второй отвечает ему k нулями. Цель первого – прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат. Цель второго – помешать ему. Докажите, что первый сможет победить.
13. В условиях предыдущей задачи найдите минимальное число ходов необходимых первому для победы.
14. Решите 12 задачу для параллелепипеда в пространстве. Постарайтесь как можно лучше оценить число ходов.
15. Решите задачу 12 для l -решеток. Постарайтесь как можно лучше оценить число ходов.

Дополнительные задачи к серии А

8. Докажите в условиях задачи А1, что первый сможет построить прогрессию длины 5.

Дополнительные задачи к серии Б

7. Пусть квадрат $S \times S$ разбит на многоугольники. Некоторые из них покрашены в черный цвет (с границей) так, что суммарная площадь закрашенных многоугольников равна 1% от площади всего квадрата.
 - а) Докажите, что существует такое S , что внутри квадрата всегда можно найти прямоугольный треугольник со сторонами, параллельными сторонам квадрата, единичной площади с черными вершинами.
 - б)* Докажите, что существует такое S , что внутри квадрата всегда можно найти прямоугольник единичной площади с черными вершинами.

Теорема Ван Дер Вардена и игры. Решения

Серия А

1. Ответ: 336. Первый ставит 334 крестика куда угодно, 335 ставит далеко справа от уже поставленных крестиков и ноликов так, чтобы 335 крестик образовывал со всеми предыдущими крестиками 3 потенциальных места для выигрыша и 336 ходом заканчивает партию. Второй в свою очередь может не проиграть за 335 ходов, так как каждый новый крестик образует с каждым предыдущим крестиком как максимум 3 угрозы завершения матча на следующем ходу, которые второй и будет закрывать ноликами. В пункте г) ответ такой же, стратегия второго остается неизменной,
2. Ответ: 253. Стратегия и первого, и второго аналогичны предыдущей задаче, с поправкой на то, что каждым первый может создавать 4 угрозы ставя крестики в ряд.
3. Да, сможет. Приведем решение Гаркавенко Андрея. Первый ставит R крестиков в начале и объединяет их в фигуру X . Пусть фигура X занимает k клеток. После построения первой фигуры X первый выбирает k клеток справа без нулей и начинает в них воссоздавать фигуру X . Полностью она у него конечно же не получится, но получится точно хотя бы $\frac{1}{1000}$ часть. После этого первый повторяет данный процесс, только строит уже подфигуру последней подфигуры, пока не получит l вложенных подфигур типа X (выбрав R достаточно большим, можно гарантировать для каждого фиксированного l сколь угодно большой размер l -той подфигуры X). После этого первый строит подфигуру последней фигуры, но повернутую на 180 градусов, обозначим ее за X' . Заметим, что между X' и любой до этого построенной подфигурой X можно поставить крестик так, чтобы элементы образовывали $|X'|$ последовательностей длины 3. Такой ход будет существовать, так как можно ставить все крестики только в четные клетки. Теперь если выбрать R такое что X' больше 1001, чтобы $l = 1001|X'|$ тогда во время построения X' второй не успеет закрыть все клетки средние клетки между X' и каждой из l подфигур X и первый ставя соедующим ходом крест в один из таких центров создает как минимум 1001 угрозу последовательности длины 4 и выигрывает.

Серия Б

Все известные результаты задач данной серии можно найти в дипломной работе В. З. Шарича <https://istina.msu.ru/diplomas/60736779/>

Серия В

1. Первый строит 2^{62} досок с одной фишкой за 2^{63} хода, из них делает 2^{61} досок с двумя фишками и так далее, пока до хода второго не получит две доски с 62 крестиками. Второй уничтожит как максимум одну из них и первый поставит сдвоенные фишки на оставшуюся, затратив в сумме $2^{64} - 1$ ход. Требуется минимум $2^{64} - 1$ ход, так как если назвать весом доски с k белыми фишками величину $2^k - 1$, то после хода первого и второго суммарный вес изменяется на 1, а требуется получить $2^{64} - 1$.
2. Первому для победы достаточно повторить алгоритм из предыдущей задачи, только досками считать отрезки вида $(100k + 1; 101k)$.
3. Заметим, что второй может объединить фишку с номерами вида $(50k + 1; 51k)$ в доски из первой задачи и помешать первому за 2^{45} ходов собрать полную последовательность такого вида, осталось заметить, что в любой последовательности из 100 чисел идущих подряд есть отрезок из 50 чисел вида $(50k + 1; 51k)$.

Серия Г

1. Да, сможет. Докажем утверждение по индукции. Пусть первый умеет строить фигуру с такими свойствами:

а) На раскраску второму всегда потребуется хотя бы k цветов.

б) Каждая новая точка во время построения данной фигуры лежала во внешней грани.

Тогда построить фигуру с такими же свойствами, только для $k + 1$ цвета можно так: первый строит k фигуру k раз и каждый раз останавливается когда второй поставит новый еще не использовавшийся до этого цвет, потом начинает строить следующую k фигуру. Каждый раз новый цвет оказывается на границе фигуры по условию б). И заканчивает построение постановкой точки вне всех предыдущих фигур, соединяя с k цветами.

3. Покажем, что второ й может поддерживать следующую ситуацию: закрашенные ранее вершины разбивают дерево на части, в каждой не более 2 окрашенных вершины.

В самом деле. Пусть первый в одной из таких частей красит вершину. Получается дерево с 3 окрашенными вершинами. В этом случае либо оно распадается на деревья с 2 окрашенными вершинами, либо можно указать вершину, при выбрасывании которой все 3 покрашенные вершины окажутся в разных компонентах. Второй туда и ходит четвртым цветом.

4. Конструкция в данной задаче была предложена участниками Георгиевым Филиппом, Широковских Светой и Пушкаревой Марией и является крайне сложной.
5. Достаточно ставить каждый раз цвет который ставил второй в другую долю, это будет вынуждать его не использовать этот цвет еще раз в случае полного двудольного графа.

Серия Д

1. Докажем по индукции, что для любого k существует $n(k)$ такое, что при игре на графе из $n(k)$ вершин у первого получится построить полный граф на k вершинах с красными рёбрами. Для $k = 1$ это очевидно. Теперь из существования такого $n(k)$ выведем существование $n(k+1)$. Опишем стратегию первого для $k+1$, считая стратегию для k известной. Он выбирает произвольную вершину A и старается получить $n(k)$ вершин, соединённых с A красными рёбрами и попарно не соединённых между собой. Если ему это удастся, то, по предположению индукции, он может построить полный граф на k вершинах среди этих $n(k)$ соединённых с A вершин, и этот граф вместе с A будет искомым полным графиком. Осталось показать, как первый может содинить A и сколь угодно много не попарно не соединённых рёбрами вершин.

Сначала первый соединяет A и $1000n(k)$ вершин, причём каждая следующая вершина до этого не должна быть соединена ни с одной из предыдущих. Средняя «синяя степень» этих $1000n(k)$ вершин не более 200, значит существует множество вершин S , такое что $|S| = 1000n(k)/2$ и из каждой вершины из S выходит не более 400 синих рёбер. Теперь докажем, что S уже содержит подмножество P , состоящее из $n(k)$ попарно не соединённых вершин. Будем добавлять в P вершины по одной. Начнём с произвольной вершины из S , зачёркнём все соединённые с ней синими рёбрами, их не более 400, затем добавим любую ещё не зачёркнутую вершину из S , зачёркнём все соединённые с ней. Повторим эту процедуру, пока в P не окажется $n(k)$ вершин. Ясно, что вершин в S хватит и P — искомое множество. Как было сказано, применим к P предположение индукции, полученный график вместе с A — полный график с красными рёбрами.

2. Это неверно: для сколь угодно большого n можно построить граф на n вершинах, 99% рёбер которого покрашены в красный цвет, в котором не полного подграфа на 1000 вершинах. Изложенное ниже решение на летней конференции было придумано Петром Кучерявым.

Разделим n вершин на 999 долей размерами $\left[\frac{n}{999}\right]$ и $\left[\frac{n}{999}\right] + 1$. Соединим вершины красным рёбром тогда и только тогда, когда они лежат в разных долях, если получилось более 99% красных рёбер, некоторые из них можно перестать считать красными. Подграфа на 1000 вершинах с красными рёбрами нет, так как среди 1000 вершин найдутся две, лежащие в одной доле, то есть не соединённые красным ребром. Несложно понять, что для достаточно больших n красных рёбер будет не менее 99%.

3. Сформулируем две стандартные леммы, из которых будет следовать решение задачи.

Лемма 0.1 (Бесконечная теорема Рамсея для гиперграфов.) *Каждое k -элементное подмножество множества натуральных чисел раскрашено в 1 из s цветов. Тогда найдётся такое бесконечное подмножество множества натуральных чисел, что все его k -элементные подмножества одного цвета.*

Эта лемма — обобщение теоремы Рамсея для обычных графов, частным случаем которой является, например, утверждение о том, что среди любых шести людей найдётся трое попарно знакомых или трое попарно незнакомых.

Лемма 0.2 (Компактность пространства гиперграфов.) *Дано бесконечное множество раскрасок k -элементных подмножеств множества $\{1 \dots n_i\}$ в s цветов, причём среди n_i есть сколь угодно большие. Тогда можно раскрасить все k -элементные подмножества натурального ряда так, что для любого N в этой раскраске цвета k -элементных подмножеств $\{1 \dots N\}$ совпадают с их цветами из какой-то из исходных раскрасок.*

Эту лемму можно считать следствием леммы Кёнига о деревьях, даже компактности канторова множества (или множества p -адических чисел). Её не очень сложно доказать самому. Подобные рассуждение часто используются для того, чтобы свести бесконечный случай к конечному.

Доказательство. [Вывод задачи из лемм.] Допустим, условие задачи не выполняется. Построим бесконечную последовательность из раскрасок подмножеств возрастающих нача натурального ряда, для которого не выполняется условие задачи. С помощью второй леммы, получим из неё раскраску k -элементных подмножеств всех натуральных чисел. По первой лемме в ней есть бесконечное подмножество, все k -элементные подмножества которого одного цвета. Из него можно выбрать конечное подмножество, удовлетворяющее условию задачи. Но оно целиком лежит в одной из выбранных вначале раскрасок, которые для которых условие задачи не должно выполняться. Противоречие, значит утверждение задачи верно.

Серия E

Решения задач 1–8 можно найти в статье В. Знака <https://www.mccme.ru/free-books/matprosk.html>
С более полной версией решений можно будет ознакомиться на сайте Турнира Городов

Van der Waerden's theorem and games

The well-known **Van der Waerden's theorem** states: *If the natural numbers are colored in finite number of colors then one can find a finite arbitrarily large arithmetic progression, all of the same color.*

The theorem can be reformulated as follows: *Let k and l be natural numbers. Then there exists a number $N(k, l)$ such that for any natural $N > N(k, l)$ and any partitioning of the set $1, \dots, N$ into k subsets, one of the subsets contains an arithmetic progression of length l .*

Upper bounds for the numbers $N(k, l)$ are huge. For example, complexity of the upper bound for $N(k, 3)$ is an exponent of the exponent etc. k times taken. For $N(k, 4)$, instead of the exponent, the function $N(k, 3)$ is iterated, and so on. (The best estimates were obtained quite recently and by non-elementary methods). Lower estimates are only exponential. In particular, the project at the Summer Conference of the Tournament of Towns in 1995 was devoted to this theorem. **Its proof is not our goal.** Related questions on which is suggested to think for participants are:

1. Is it possible to color the set of natural numbers so that there would be no infinite monochromatic arithmetic progression?
2. Prove an exponential lower bound: $N(s, l) > s^{l/2}$. Implement an explicit construction.
3. Is it possible to color black more than half of the vertices of some regular n -gon so that the union of the original coloring and any ten its rotations will not make all vertices black?
Try to get the best estimates for n as well as explicit constructions.

Szemerédi's theorem (also known as **Erdős-Turan conjecture**, 1936) states that *if A is an arbitrary set of natural numbers and the sequence $a_n = \frac{|A \cap \{1, \dots, N\}|}{N}$ has a subsequence with a nonzero limit point then for any natural $k > 3$ the set A contains an arithmetic progression of length k . This is one of the main results of Szemerédi (obtained in 1975), for which he received the Abel Prize. For progressions of length 3 this result was obtained by Klaus Roth in 1953.*

https://en.wikipedia.org/wiki/Szemer%C3%A9di%27s_theorem.

One of the main results of Terence Tao was the proof that *among prime numbers there is an arbitrarily long arithmetic progression*. The result of I.D.Shkhedov refers to finding of a black corner in the square $N \times N$ when a certain fraction of cells is colored black.

(http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=912&option_lang=rus).

Our main goal is to look at this topic from the game point of view. Perhaps this alternative view will enable us to better understand the issues related to the theorems of Van der Waerden and Szemerédi and to obtain new results, in particular, the estimates in the Van der Waerden's theorem.

Series A

1. Two players play the following game. On a both-ways endless checkered strip, the first player puts one cross into a free cell, and the second player puts 1000 zeroes in free cells. The goal of the first player is to create an arithmetic progression of crosses of length 3, and the goal of the second player is to prevent him.
 - A) Prove that the first player has a winning strategy.
 - B) Prove that there is a number n such that the first player safely can finish the game in n moves.
 - C) Try to estimate the minimum number of moves necessary for the first to surely win under the assumptions above.
 - D) Solve previous task for **one-way** strip.

2. Two players are playing the following game on an infinite checkered plane. The first one puts a cross in a free cell, the second one answers by putting 1000 zeros. The goal of the first player is to create an isosceles rectangular triangle of crosses whose sides are parallel to the coordinate axes.
 - A) Prove that the first player has a winning strategy
 - B) Find the minimum number of moves necessary for the guaranteed win of the first.
3. Can the first player create an arithmetic progression of length 4 under the assumptions of the problem 1?
4. Under the assumptions of problem 2, can the first player construct a square?
5. Suppose that in the game on the strip the first player puts one cross, and the second one answers by putting n zeros. Can the first one create an arithmetic progression of length k ?
6. Estimate the minimum number of moves necessary for the first player to win in the previous problem.
7. Now two players play a game on the plane. The first one puts one red dot, the second one answers by putting k blue dots. Prove that for any set F that consists of n points, the first player can create a figure F' similar to F (that is, obtained from F by a composition of homothety and parallel translation), all of whose vertices are red.

Series B

Generalized van der Waerden theorem: *Let rational points of the plane be painted in a finite number of colors. Then for any figure M consisting of a finite number of rational points, one can find a one-color figure M' similar to M (that is, obtained from M by a composition of homothety and parallel transport) consisting of rational points.*

1. Prove that in the formulation of the generalized Van der Waerden's theorem, the concept of *similar set* can not be replaced by the concept of *congruent* (or *equal* set, according to the terminology of the modern school program). In other words, a one-color set congruent to the set M not necessarily exists.

And what if we consider the group of transformations preserving the area, or *hyperbolic rotations* (namely, transformations that shrink the X -axis and dilate Y -axis with the same factor)?

2. The rational points of the plane are colored in several colors. Prove that there is a right triangle with sides parallel to the coordinate axes and monochrome vertices. (For solving this problem, Van der Waerden's theorem may be used.)
3. (** The solution of this problem is unknown.) Under the assumptions of the previous problem, prove that there is a monochrome rectangle of area 1 with monochrome vertices.

We call a simplex in the n -dimensional space *standard* if it has n edges parallel to the coordinate axes.

4. Rational points of the n -dimensional space are colored in several colors. Prove that there is a standard simplex with monochrome vertices.

(For solving this problem, Van der Waerden's theorem may be used.)

5. Formulate and prove the game form of the previous items.

The second problem of this series reduced to the game form is solvable. In this connection, the question arises:

6. Formulate and solve the game form of the problem about the image of a given finite set under the action of hyperbolic rotations.

Series C

1. There is an unlimited number of boards 8×8 . The first player puts 2 chips on any of them, the second one answers setting one black chip on any of the boards.
 - a) Can the first player pave one of the boards for sure?
 - b) What is the smallest number of moves sufficient for the first player to do this?
2. Two play tic-tac-toe on a one-way endless checkered strip. The first one puts two crosses at each move, the second one replies with a zero. Can the first player obtain 100 consecutive crosses in a row?
3. Under the assumptions of the first, can the first player obtain the above result in 2^{45} moves?
4. And in 2^{90} turns?

Series D

Two painters play the following game. The first one marks a point on a plane and connects it with some points that were marked before. Previously drawn arcs cannot be crossed. The second painter colors the point just marked by the first painter in such a manner that no two points of the same color are connected by an arc.

1. Can the first painter make the second one use more than n colors?
2. Can the first painter achieve that in polynomial (in n) number of moves?
3. A tree is drawn. Two players paint its vertices in turn so that no two neighbouring vertices are of the same color. Can the first player make the second one use more than four colors?
4. Under assumptions of the previous problem, can the first player make the second one use more than three colors?
5. Let G be a bipartite graph. Two players in turn color its vertices so that any two neighbouring vertices are of different color. The second player tries to use the minimum possible number of colors, and the first one wants to make him use the maximum possible number of colors as possible. Is it true that for any natural N this bipartite graph G can be chosen so that N is not a sufficient number of colors for the second player?

Series E

1. A complete graph with n vertices is given. Two players paint its edges in turn. The first player colors one edge red, the other one colors 100 edges blue, and this is repeated until all edges are painted. Can the first player obtain for sure for sufficiently large n a complete subgraph with 100 vertices all whose edges are red?
2. 99% of a complete graph's edges are colored red. Given sufficiently large n , does there exist a complete subgraph on 1000 vertices with red edges?
3. Every subset with k elements in the set $\{1, \dots, n\}$ is colored into one of s colors (for example, for $k = 2$ we get a coloring of edges of a complete graph with n vertices). Prove that for sufficiently large n there exists a subset $U \subset \{1, \dots, n\}$ such that all its subsets having k elements are of the same color, and if x is the minimal element of U then the number of elements in U is at least $\exp(x) + s$.