

Ристо Малчески
Вера Малческа

МАТЕМАТИКА 5
ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

ФОН универзитет
Скопје, 2012

СОДРЖИНА

Предговор

vii

XXIII ГЛАВА

СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ. ВЕРОЈАТНОСТ

1. Експеримент и настан. Статистичка веројатност	1
2. Елементарни настани. Операции со настани	5
2.1. Елементарни настани	5
2.2. Операции со настани	7
3. Класична дефиниција на веројатност	9
4. Основни својства на веројатноста	13
5. Експерименти со пребројливо многу исходи	17
6. Геометриска веројатност	19
7. Условна веројатност. Теорема за множење	23
8. Полна веројатност. Формули на Бајес	26
9. Независни настани	29
10. Независни експерименти	33
11. Бернулиева шема	34
12. Аксиоматско градење на теоријата на веројатност	37
Задачи	42

XXIV ГЛАВА

ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

1. Поим за дискретна случајна променлива	51
2. Повеќедимензионални дискретни случајни променливи	56
3. Маргинални и условни распределби	59
4. Функции од дискретни случајни променливи	63
5. Математичко очекување на дискретна случајна променлива	65
6. Моменти од повисок ред. Дисперзија и стандардна девијација	71
7. Биномна распределба	75
8. Пуасонова распределба	80
9. Рамномерна дискретна распределба	83
10. Геометриска распределба	84
11. Независност на случајни променливи	86
12. Условно математичко очекување	95
13. Коефициент на корелација	101
14. Средноквадратна регресија. Линеарна регресија	108
15. Теорема на Поасон	113
16. Локална теорема на Моавр-Лаплас	116

17. Интегрална теорема на Моавр-Лаплас	118
Задачи	123

XXV ГЛАВА

ДИФЕРЕНЦНИ РАВЕНКИ

1. Воведни поими	137
2. Линеарна диференцна равенка од прв ред	138
3. Линеарна диференцна равенка од втор ред	140
4. Хомогена линеарна диференцна равенка од втор ред со константни коефициенти	142
5. Систем диференцни равенки од видот $\begin{cases} x_{n+1} = px_n + qy_n \\ y_{n+1} = rx_n + sy_n \end{cases}$	144
6. Решавање на некои нехомогени линеарни диференцни равенки од втор ред со константни коефициенти	147
7. Триангулација на n -аголник и проблем на загради	150
8. Фибоначиеви броеви	154
9. Решавање на некои нелинеарни диференцни равенки	157
10. Конечни разлики	159
11. Факториелни полиноми	161
Задачи	168

XXVI ГЛАВА

РАЗБИВАЊА

1. Разбивање на броеви	171
2. Подредено разбивање на броеви	176
3. Разбивање на множества	178
4. Деаранжмани	185
Задачи	188

XXVII ГЛАВА

ЛАТИНСКИ КВАДРАТИ, БЛОК ДИЗАЈНИ И КОДОВИ

1. Поим за латински квадрат	189
2. Проширување на латински квадрати	191
3. Ортогоналност на латински квадрати	191
4. Блок дизајни	194
5. Матрици на Адамар	197
6. Основни поими од теоријата на кодирање	199
7. Граница на Плоткин	203
8. Кодови на Адамар	206
9. Теорема на Левенштајн	207
10. Латински квадрати и кодови	209

11. Совршени кодови	210
Задачи	211

XXVIII ГЛАВА ГЕНЕРАТОРНИ ФУНКЦИИ

1. Поим за генераторна функција	215
2. Операции со генераторни функции	216
3. Генераторни функции и диференцни равенки	221
4. Производ на Адамар за рационални генераторни функции	229
5. Примена на генераторните функции во теоријата на пребројување	230
6. Генераторни функции и разбивања	233
7. Експоненцијални генераторни функции	236
8. Хармониски броеви	240
9. Збирови од степени на природни броеви	241
10. Бернулиеви полиноми и Бернулиеви броеви	243
11. Каталанови броеви	245
Задачи	250

XXIX ГЛАВА ТЕОРИЈА НА ГРАФОВИ

1. Поим за граф. Изоморфни графови	255
2. Матрично задавање на графови	257
3. Видови графови. Подграфови	259
4. Степен на теме. Регуларен граф	261
5. Операции над графови	262
6. Вериги и циклуси	265
7. Сврзаност	267
8. Дрва	273
9. Цикломатичен број на граф	280
10. Разделувачки множества. Пресеци	282
11. Својства на матриците на инциденција и соседство	286
12. Ојлерови графови	290
13. Хамилтонови графови	294
14. Планарни графови	297
15. Карактеризација на планарните графови	301
Задачи	302

ДОДАТОК А ЕДНА КЛАСА ПРОБЛЕМИ НА БОЕЊЕ ОД РЕМЗИЕВ ТИП

1. Воведни поими	307
2. Боење од Ремзиев тип во две бои	308

3. Боење од Ремзијев тип во повеќе бои	309
Индекс на поими	317
Литература	321
За авторите	325

ПРЕДГОВОР

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките, каде нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Оваа книга е продолжение на книгата Математика 4 - калкулус II и ги содржи предавањата по предметот Дискретна математика кој е задолжителен за студентите по информатика на ФОН универзитетот во Скопје. Материјалот во книгата е поделен на шест глави и тоа:

1. Случајни настани. Веројатност
2. Дискретни случајни променливи
3. Диференцни равенки
4. Разбивања
5. Латински квадрати, блок дизајни и кодови
6. Генераторни функции и
7. Теорија на графови.

Содржините кои се разработени во петте глави во целост кореспондираат со насловите, но разгледувањата се прилагодени за студенти на кои математиката не им е основна преокупација.

Во првата глава се воведени поимите случаен настан и веројатност и се разгледани основните теореми во теоријата на веројатност. Притоа, тежиштето на разгледувањата е поместено на случајните настани со конечно и пребројливо многу исходи, за на крајот да се даде преглед на аксиоматското градење на теоријата на веројатност. Покрај класичните содржини за ваквата обработка на материјалот, обработена е и геометриската веројатност, која се јавува во многу практични проблеми во техничките науки.

Втората глава е посветена на дискретните случајни променливи, функциите од истите и нивните бројни карактеристики. Покрај тоа, разгледани се магиналните и условните распределби, класичните дискретни случајни променливи, како и граничните теореми поврзани со истите. Притоа, заради комплетност на разгледувањата, при разра-

ботката на независноста на случајните променливи, корелацијата и регресијата, одделно е обработено условното математичко очекување, за кое е докажано дека всушност е средноквадратната регресија.

Во третата глава се разгледани диференцните равенки, при што тежиштето е дадено на изучување на линеарните диференцни равенки од прв и втор ред, а само накратко е разгледано решавањето на некои нелинеарни диференцни равенки. Во рамките на оваа глава посебно внимание е посветено на изучувањето на проблемот на загради и триангулацијата на конвексен многуаголник, при што е покажано дека овие два проблеми всушност се еквивалентни. Нестандардно, но заради нивната практична примена посебно внимание е посветено на низата Фибоначиеви броеви, за која се докажани повеќе својства. Конечно, на крајот од оваа глава се разгледани конечните разлики и факториелните полиноми, при што се воведени и Стирлинговите броеви од прв и втор вид.

Четвртата глава, која по обем е најмала, е посветена на разбивањата. Притоа, одделно се разгледани разбивањето и подреденото разбивање на броеви, како и разбивањето на множества. Стандардно, при изучувањето на разбивањата на множества се воведени Беловите броеви, за кои се докажани повеќе својства. Понатаму, во овој дел е дадена и врската меѓу разбивањата на множества на k -блокови и Стирлинговите броеви од втор вид, ако и врската меѓу распределувањето на n објекти во k по парови дисјунктни циклуси и Стирлинговите броеви од прв вид. На крајот од оваа глава, накратко се разгледани деаранжманите за кои се покажани неколку својства.

Петтата глава е посветена на латинските квадрати, блок дизајните и кодовите. При разгледувањето на латинските квадрати посебно внимание е посветено на поимот ортогоналност, при што е докажано дека за секој прост број p постои потполн систем ортогонални латински квадрати. При разгледувањето на блок-дизајните (конфигурациите) разгледани се и матриците на Адамар, при што е покажано дека во одделни случаи егзистенцијата на матрица на Адамар ја повлекува егзистенцијата на определена конфигурација. На крајот од оваа глава се дадени основни поими од теоријата на кодирање, при што се разгледани границата на Плоткин, кодовите на Адамар и совршените кодови.

Во шестата глава се изучуваат генераторните функции, кои имаат посебна улога при изучувањето на својствата на дискретните случајни променливи. Меѓутоа, во нашите разгледувања тежиштето е насочено кон изучување на основните својства на генераторните функции и нивната улога при решавањето на диференцните равенки, во теоријата на пребројување и теоријата на разбивања. Вториот дел на оваа глава е посветен на примената на генераторните функции при пресметување на збиорови од степени на природни броеви, изучувањето на Хармониските броеви, Бернулиевите полиноми и Бернулиевите броеви, како и на примената на генераторните функции во изучувањето на Каталановите броеви и нивната примена (пат на Дик, пат на Моцкин,, стек-сортибилните пермутации и слично).

Во последната, седма глава, се разработуваат елементи од теоријата на графови. Стандардно, со воведувањето на основните поими, се дефинира изонорфизмот на графови, видовите графови и операциите со графови. Понатаму, разгледано е задава-

њето на граф со помош на матриците на инциденција и на соседство, за кои во натамошните разгледувања се докажани низа својства и е покажана нивната примена во определувањето на бројот на патиштата меѓу две темиња и бројот на покривните дрва на неориентиран граф. Исто така, воведен е поимот степен на теме, во врска со кој се докажани повеќе својства. Во натамошните разгледувања значително внимание е посветено на изучувањето на патиштата во графовите, циклусите и сврзаноста на графовите. Во контекст на овие проучувања, посебно се разработени дрвата, цикломатскиот број на граф, разделувачките множества и пресеците на граф. На крајот од оваа глава се разгледани три вида на графови: Ојлеровите, Хамилтоновите и планарните графови, кои имаат посебна улога во решавањето на голем број практични задачи. Стандардно, за овие видови графови се дадени критериуми за нивна карактеризација, при што во разгледувањето на планарните графови е докажана Ојлеровата формула за конвексните полиедри.

На крајот од книгата, во посебен додаток, е разработена една класа на боења од Ремзиев тип. Всушност ова е само еден мал дел од Ремзиевата теорија, која започнала да се развива во 1930 година со работите на англискиот математичар Френк П. Ремзи. Јасно, оваа содржина не е целосно кореспондентна со разгледувањата во претходните глави, но сепак сме на мислење дека е добро студентите да се запознаат со некои резултати од Ремзиевата теорија, бидејќи истата наоѓа примена при решавањето на голем број практични проблеми.

Важно е да споменеме дека, како и во претходните четири книги, мал дел од разгледаните 198 теореми, лемии и последици не се докажани, и ова посебно се однесува на теоремите за карактеризација на планарните графови, чии докази излегуваат надвор од рамките на нашите разгледувања. Сепка, како и останатите тврдења и овие се илустрирани со бројни примери и цртежи. Всушност, севкупните разгледувања во оваа книга содржат и 133 цртеж, дел од кои се во функција на илустрација на разгледуваните дефиниции и тврдења, а дел од кои се во рамките на решените примери, кои вкупно ги има 211. Но, како што знаеме, изучувањето на која било математичка дисциплина не е можно без систематско самостојно решавање на задачи, па на крајот од секоја глава се дадени задачи за самостојна работа, вкупно 266, дел од кои, како и примерите содржат и по неколку подзадачи, па така бројот на решените примери задачите за самостојна работа е значително поголем. Стандардно, воведувањето на поимите, доказите на теоремите, лемите и последиците, како и обработката на примерите се пропратени со бројни коментари и забелешки, дел од кои се во функција на појаснување, а дел се однесуваат и на генерализации на одделни поими и тврдења.

На крајот од книгава е даден индекс на поими, кој се надеваме ќе го олесни нејзиното користење. Исто така е даден список на користена литература, при што сакаме да споменеме дека книгите [4], [9], [25], [14], [45], [53], [55] и [60] имаа посебно влијание при оформувањето на овој ракопис.

Пријатна должност и особено задоволство ни е да им искажам благодарност на рецензентите доц. д-р Лидија Горачинова и проф. д-р Зоран Гацовски кои со своите забелешки и сугестии придонесоа за подобрување на содржините на оваа книга, како и на асс. м-р Емилија Камчева која детално го провери овој ра-

копис и со своите забелешки придонесе да се отстранат некои технички пропусти, но и да се подобри самото изложување на разработуваниот материјал.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа книга, па затоа сме однапред благодарни на секоја добронамерна критика и сугестија.

Септември, 2012
Скопје

Авторите