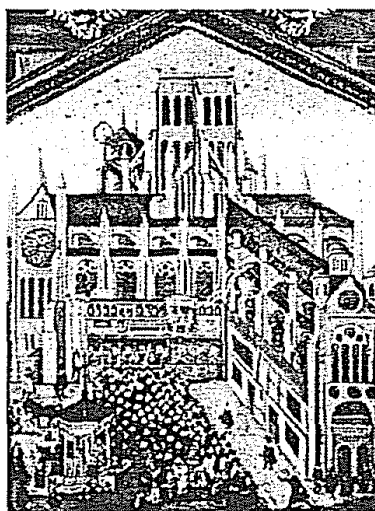


ДВОРАЗМЕРА

Дражан Ђокић, Београд

1. УВОД

Погледајмо наредну слику. На њој је приказана црква Светог Паула у Лондону. Приметићете да су се архитекте потрудили да цела зграда изгледа геометријски савршено, као и да сама црква има доста украса који су геометријски потпуно правилно распоређени. Слика је покушао да све то пренесе на платно, али да ли је у томе и успео?



Слика 1. Џон Гипкин: Катедрала Светог Паула, 1616.

Некоме ће се слика допасти, а некоме неће, то је већ ствар укуса. Али једно је очигледно, делује некако чудно и неприродно. Ова слика је настала почетком 17. века и има исти проблем као и велики број слика које су тада (и раније) насликане.

На слици су обележени стубови (тј. њихови врхови) који се истичу на фасади. И они су прецизно распоређени, тачније, колинеарни су и налазе се на једнаком растојању. Ако замислимо праву у простору која их садржи, јасно је да ће се она и на слици видети као права, тј. да ће врхови и на слици бити колинеарни. Али сада се поставља питање да ли ће и њихова растојања на тој правој бити једнака. Очигледно је Гипкин¹ (као и многи други) мислио да хоће. Или још општије, можемо питати да ли ће на слици растојање између првог и последњег бити онолико пута веће од растојања између првог и другог колико јесте у природи.

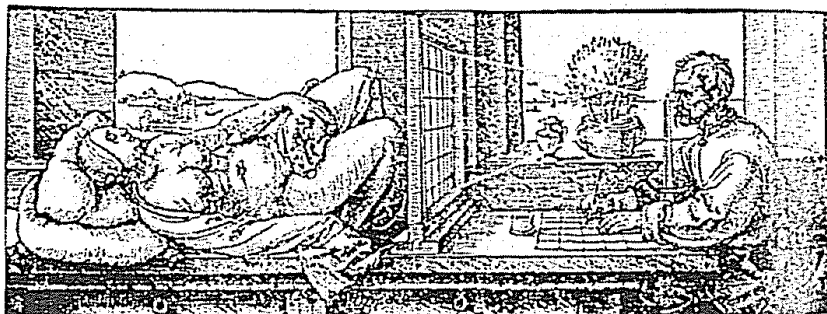
Има ту још сличних проблема, нпр. бочна страна цркве на уз леву ивицу слике је лоше приказана. Мада да је ту, поред *размере*, проблем и *перспектива* (о којој ћемо такође причати).

Као што је пример показао размера се *не чува*. Али сада се поставља питање постоји ли нешто што се чува и што може овде да се искористи, тј. да ли ипак можемо

¹ John Gipkyn (1594 – 1629)

да одредимо како да цртамо ове стубове. Занимљиво је запитати се и зашто се ово не примећује код оних других стубова (који су распоређени паралелно са платном).

Увидевши овај проблем, људи су се довијали на различите начине. На пример, на наредној слици уметник користи квадратну мрежу и посматрање врши увек из исте тачке. Зато он никада неће погршити.



Слика 2.

Такве технике могу понекад да се искористе. Али ми хоћемо да проучимо проблем и дамо одговор шта се ту, заправо, дешава. Одговор се крије, наравно, у геометрији, тачније у *пројективној геометрији*.

2. ИСТОРИЈСКИ РАЗВОЈ

Почеци пројективне геометрије

Тешко је рећи када је настала пројективна геометрија. Постоје јако старе теореме које се доводе у везу са пројективном геометријом нпр. Папусова² теорема из 4. века.

Међутим, сам настанак се углавном везује за почетак 17. века. Занимљиво је да су се у почетку њоме углавном бавили сликари, инжењери, архитекте и тек по неки математичар. Главни разлог за то били су управо проблеми са цртањем, на које су свакодневно наилазили. И логично, ти њихови радови су били доста непрецизни и непотпуни али су успели много тога да открију. Најзначајнији међу њима био је француски инжењер *Жерар Дезарг*³.

Његова идеја није била да овај проблем детаљно разјасни и да све коректно заснује, већ је само хтео да открије нешто што би могло да се користи за нагомилане проблеме у струци. Зато уводи *шачку у бесконачности* доста интуитивно, и третира је исто као било коју другу. Овако нешто већина математичара је оспоравала јер са тадашњим знањем то је било немогуће оправдати.



Слика 3. Жерар Дезарг

²Παππος Αλεξανδρενς (око 290 – око 340)

³ Gerard Desargues(1591 – 1661)

Свој целокупан рад изложио је у делу „Образац једног од општих начина... за употребу перспектива...”, које је имало свега 12 страна и састојало се углавном од полуемпиријских правила и савета. Поред овога Дезарг је објавио још само један рад из пројективне геометрије под називом „Груба контура” у ком се углавном бавио конусним пресецима. Ту су се истакле две битне теореме које по њему и носе назив. Његов рад је у то време прошао незапажено (иако га је касније Ојлер⁴ више пута хвалио). Значај његових идеја први је увидео Блез Паскал⁵. Он је употпунио и уобличио све оно што је Дезарг радио. Паскалова предност (у односу на Дезарга) била је у томе што су се тада већ увелико користиле координате широм геометрије, те је помоћу њих могао све лепо да објасни.

Лазар Карно⁶ и његово схватање дужине

Лазар Карно је био један од најутицајнијих политичара свог времена. Био је један од вођа француске револуције, а затим и председник Националног конвента и носилац више министарских функција. Познат је и под надимком Организатор победе.

За нас је значајан због свог доприноса у пројективној геометрији. Његова најпознатија дела су „Геометија положаја” и „Експерименти са трансверзалама”. У њима, по први пут, уводи оријентацију дужи и *оријентисану дужину дужи*. Замислио је то овако: уколико се дуж $\overline{AB}$ оријентише од A према B и измери њена дужину $d > 0$, онда ће дужина оријентисане дужи $\overline{BA}$ бити једнака $-d < 0$. Дакле, он се први успротивио идеји „потпуног искључивања негативних бројева из геометрије”, која је тада била широко заступљена.

Помоћу овога, Карно проширује дефиницију тригонометријских функција (на интервал $[0, 2\pi]$, уместо $[0, \frac{\pi}{2}]$ на ком су се дотад користиле).



Слика 4. Лазар Карно

3. ПРОЈЕКТИВНА ГЕОМЕТРИЈА

Пројективни простор

Како видимо објекте око нас? Како да нацртамо то што видимо?

Познато је да људско око идентификује све тачке које се налазе на једном зраку (замишљеној полуправој у простору која полази из ока), односно да види само једну тачку која представља цео тај зрак. Кад сликар постави платно, свака тачка коју видимо на слици представља пресек зрака и платна (полуправе и равни). Додатно, могли смо уместо полуправе узети и праву. То неће ништа битно променити, наставак праве „иза ока” нећемо видети нити ће сећи платно. С друге стране, то ће нам битно олакшати посао у даљем разматрању.

⁴ Leonhard Euler (1707 – 1783)

⁵ Blaise Pascal (1623 – 1662)

⁶ Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753 – 1823)

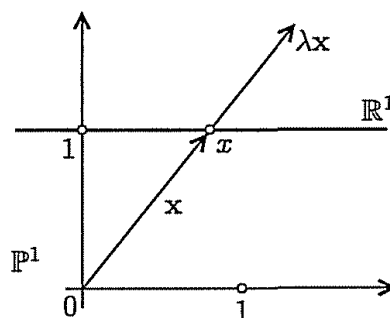
Нека је на простору $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ задата релација $\sim$ са

$$x \sim y \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) x = \lambda y.$$

Скуп $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ ћемо звати n -димензиони (реални) *пројективни простор* и означајати $\mathbb{R}P^n$. Има смисла ово разматрати за било које $n \in \mathbb{N}$, али ми ћемо се ограничити углавном на $n = 0$ (пројективна тачка), $n = 1$ (пројективна права), $n = 2$ (пројективна раван) и $n = 3$ (пројективни простор). Наравно, могли смо овде уместо $\mathbb{R}$ ставити и $\mathbb{C}$ и тако добити *комплексан пројективни простор*.

Приметимо да је пројективна тачка „исто” што и обична тачка. Али како изгледају пројективна права и простор?

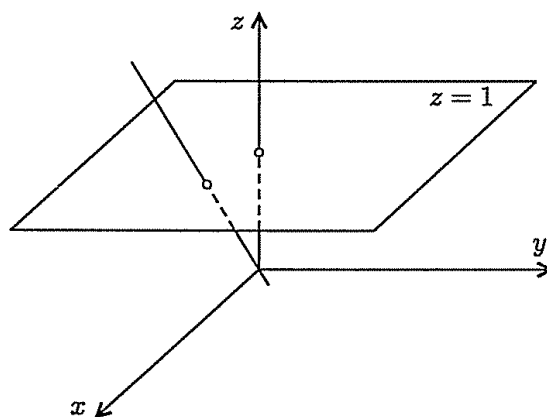
Кренули смо од равни $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, избацили смо координатни почетак $(0, 0)$ и потом поистоветили све тачке на једној правој кроз $(0, 0)$. (Дакле, исто као у примеру са сликом) Ако у $\mathbb{R}^2$ посматрамо праву $y = 1$ (или било коју другу која не пролази кроз $(0, 0)$) она сече све класе еквиваленције, сем једне, тачно једном. Зато све класе (сем једне) можемо поистоветити са поменутиим пресецима. Дакле, пројективну праву треба схватити као обичну праву којој је додата још једна тачка. Ту додатну тачку обично зовемо *бесконечно далека тачка*.



Слика 5.

И најбитнија ствар, она се ни по чему *не разликује* од осталих тачака. Изабрали смо једну праву и тако добили бесконачно далеку тачку, за неку другу праву имаћемо другу бесконачно далеку тачку. Да смо на почетку само додали још једну тачку реалној правој она би била другачија од осталих. Зато смо увели ову апстрактну конструкцију, да би нам све тачке биле равноправне и да бисмо по потреби могли да бирамо бесконачно далеку тачку.

Исто урадимо за $n = 3$, посматрамо $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ и уочимо неку раван, на пример $z = 1$. Тада та раван садржи по једног представника свих класа сем оних чије праве леже у равни $z = 0$. Та раван (без координатног почетка) је заправо пројективна права. Значи пројективни простор можемо схватити и као обичан простор плус једна *бесконачно далека пројективна права*.



Слика 6.

Пети Еуклидов⁷ постулат

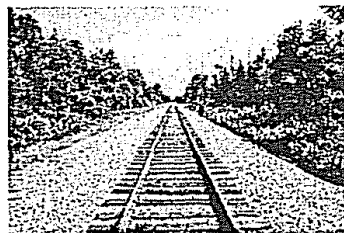
Познато је да се геометрија развила још у античко доба. Сва знања из тог периода Еуклид је скупио у 13 књига под називом „Елементи” (грчки $\Sigma\tau\omicron\iota\chi\epsilon\iota\alpha$). Посебно је занимљив ἡ πέμπη ὑπόθεσις који каже следеће: „У равни одређеној тачком A и правом b која не садржи A постоји тачно једна права која пролази кроз тачку A и са правом b нема заједничких тачака”. Управо ту праву Еуклид назива паралелном са b .

Он ово наводи без доказа позивајући се на очигледност. Међутим, наредних 2000 година многи познати математичари покушавају и не успевају ни да докажу, ни да оповргну ово тврђење. На крају се долази до закључка да се ово и не може доказати из основних аксиома, те да га треба прихватити као аксиому.

Развиле су се и друге геометрије које ову аксиому не признају, односно претпостављају супротно. На пример, Лобачевски⁸ је ово негирао тако што је претпоставио да постоји више од једне праве.

Трећа могућност је да се претпостави да *не постоји ниједна* таква права. Управо то ће се десити у пројективној геометрији. Рекли смо да су пројективне праве заправо равни кроз координатни почетак. Узмемо две различите пројективне праве, оне се (као две равни) секу у $(0, 0, 0)$, тј. имају заједничку тачку. Али ако имају заједничку, онда је њихов пресек права (која садржи ту тачку), тј. пројективна тачка.

Илуструјмо то на једном примеру. Стојимо на прузи и посматрамо шине. (Претпостављамо да је пруга права) Шине су паралелне (иначе воз не би могао да се креће по њима), али нама изгледа као да се њихово растојање постепено смањује, тако да се завршавају у једној (бесконечно далекој) тачки. Ову појаву сте сигурно већ приметили, а сада знате и да је објасните.



Слика 7.

Доказали смо ово у равни јер се ту геометријски најлепше види ово својство. Али исти доказ се може уопштити и на веће димензије. У $\mathbb{R}P^3$ имамо да се сваке две равни секу (по правој), одакле следи и да се свака права и раван секу. Наиме, узмемо праву p и раван α . Произволна раван π која садржи праву p сече раван α дуж праве q . Праве p и q леже у истој равни π те се у њој и морају сећи. И та пресечна тачка је управо она коју тражимо.

Хомогене координате и карте

Приметимо да на природан начин можемо увести координате у $\mathbb{R}P^n$ уз помоћ оних које смо имали у $\mathbb{R}^{n+1}$. Нека је $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ тачка из $\mathbb{R}^{n+1}$. И за пројективну тачку $[x]$ ћемо рећи да има исте ове координате уз напомену да у том случају користимо ознаку $[x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}]$. Ове координате неће бити јединствене, тј. тачка x ће имати и координате $[\lambda x_1 : \lambda x_2 : \dots : \lambda x_{n+1}]$ за било које $\lambda \in \mathbb{R}$. Дакле, ове координате су дефинисане до на множење константом и зато се и зову *хомогене координате*. И

⁷Ευκλείδης ο Αλεξανδρεὺς гбв (око 300. године пре нове ере)

⁸Николай Иванович Лобачевский (1793 – 1856)

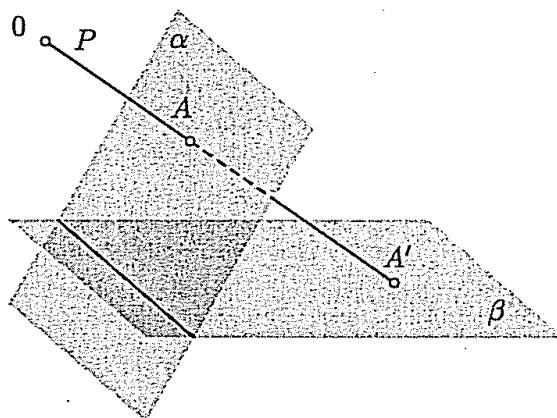
сама ознака где се користе две тачке уместо запете сугерише да је овде битан однос ових бројева, а не вредност сваког појединачно. Битно је уочити да у n -димензионом простору имамо $n + 1$ координату.

Већ смо рекли како треба замишљати пројективни простор. Сада ћемо ту идеју мало да формализујемо. Посматрајмо $\mathbb{R}P^2$ (само да бисмо поједноставили запис и да бисмо све лепо геометријски видели, аналогно се ради и у произвољној димензији). Нека је $A = [x : y : z]$ пројективна тачка којој је последња координата различита од нуле. То значи да је A класа неке праве која не лежи у Oxy -равни (јер су све њене тачке ван ове равни). Негде на тој правој се налази тачка A' са координатама $[\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1]$, и то је једина тачка пресека поменуте праве са равни $z = 1$. На овај начин је дефинисана *бијекција* између пројективне равни без једне пројективне праве и обичне равни:

$$\pi : \{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 | z \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \pi([x : y : z]) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

Скуп $\pi(\{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 | z \neq 0\}) = \mathbb{R}^2$ зове *карта*, а пресликавање π *пројектовање* (у ту карту). У карти видимо „скоро целу” пројективну раван; не види се једино $\{[x : y : 0] | x, y \in \mathbb{R}^2\}$ што је заправо пројективна права.

Раван $z = 1$ смо изабрали потпуно произвољно, могли смо уместо ње да узмемо било коју другу раван која не пролази кроз $(0, 0, 0)$ и да помоћу ње формирамо неку другу карту. Избор карте заправо одговара постављању платна код цртања.



Слика 8. Пројективна тачка P се у равни (карти) α види као тачка A , а у карти β као тачка A'

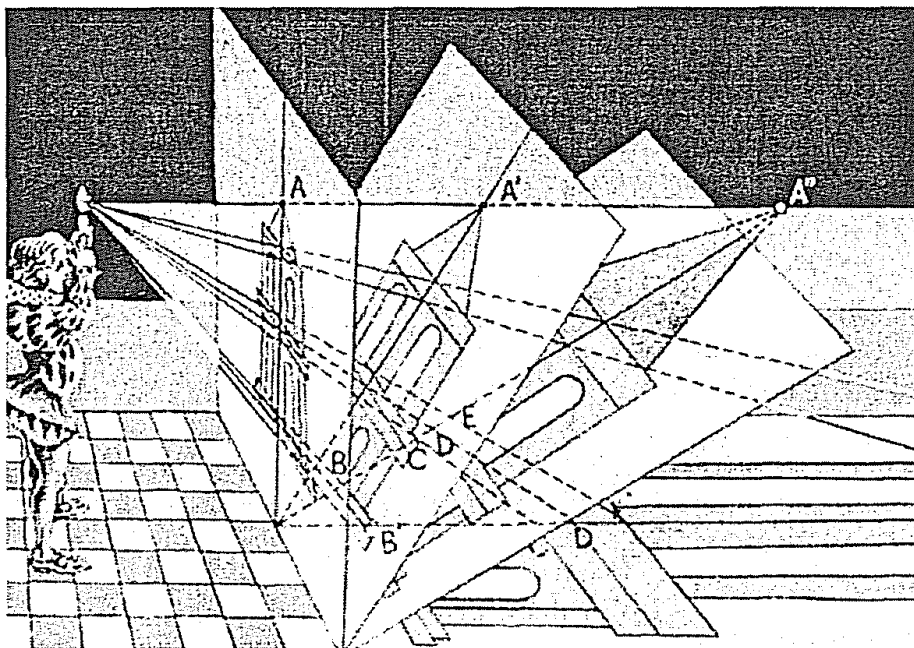
Пошто смо се уверили да су ова два представљања еквивалентна убудуће ћемо без упозорења прелазити са једних на друге координате.

Као што слика 9 показује не чува се размера тачака и исти објекат се на различитим платнима види различито. Чак се може и тако поставити платно да се објекат на њему не види (потпуно или делимично). Да не буде забуне, овде се посматрање врши из врха свеће, односно та тачка је изабрана за координатни почетак.

И аналогно, пројективна права је $\mathbb{R}P^1 = \{[x : y] | x, y \in \mathbb{R}\}$, или еквивалентно

$$\{[\lambda : 1] | \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{[1 : 0]\}.$$

Избором карте која одговара правој $y = 1$ пројективна права се може видети као $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, где је ∞ бесконачно далека тачка.



Слика 9.

Пројективне трансформације

Пројективна трансформација τ праве $\mathbb{R}P^1$ је пресликавање које тачки $[x : y]$ додељује тачку $[x' : y']$ на следећи начин:

$$\begin{aligned}\lambda x' &= p_{11}x + p_{12}y, \\ \lambda y' &= p_{21}x + p_{22}y,\end{aligned}$$

где је $\lambda \neq 0$ и $\Delta := \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

И аналогно, пројективна трансформација τ равни $\mathbb{R}P^2$ је пресликавање које тачки $[x : y : z]$ додељује тачку $[x' : y' : z']$ на следећи начин:

$$\begin{aligned}\lambda x' &= p_{11}x + p_{12}y + p_{13}z, \\ \lambda y' &= p_{21}x + p_{22}y + p_{23}z, \\ \lambda z' &= p_{31}x + p_{32}y + p_{33}z,\end{aligned}$$

где је $\lambda \neq 0$ и $\Delta := \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} \neq 0$.

Аналогно се дефинише за више димензије.

Овде напомињемо неколико ствари.

1. Рекли смо да су хомогене координате дефинисане до на множење константом и зато овде у свим једначима стоји λ како би све било коректно дефинисано. Дакле, то λ није параметар, већ се мења од тачке до тачке. Можда би било коректније рећи $\lambda_{[x:y]}$
2. Услов $\Delta \neq 0$ нам је посебно важан јер из њега следи (по Крамеровој⁹ теореме) да систем има јединствено решење по x и y (и z). То даље повлачи да је пројективна трансформација бијекција.
3. Постоји тачно једна пројективна трансформација праве која три различите тачке $[x_1 : y_1]$, $[x_2 : y_2]$ и $[x_3 : y_3]$ пресликава у тачке $[1 : 0]$, $[0 : 1]$ и $[1 : 1]$. Ово се показује рачунски, тако што се ове вредности замене у једначине и покаже се да оне имају јединствено решење по p_{ij} . Добија се систем од шест једначина са седам непознатих ($p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$, као и три параметра λ_1, λ_2 и λ_3). Испостави се да он има јединствено решење до на множење константом (али то нас не брине јер је све ионако дефинисано до на множење константом). Ко не верује може да распише и увери се да је тако.

Дворазмера и њена својства

Нека су дате четири тачке a, b, c и d (реалне) пројективне праве $\mathbb{R}P^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Дворазмера *тачака*, у ознаци $[a, b; c, d]$ је број

$$[a, b; c, d] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}.$$

Дозволили смо и да неки од бројева буде ∞ , у том случају овде подразумевамо граничне вредности. Нисмо инсистирали да тачке буду различите, тако да ако се деси да због истих тачака дође до дељења нулом ту опет подразумевамо граничну вредност ($\frac{1}{0} = \infty$). Приметимо да је овако дефинисана дворазмера заправо размера две размере дужина (јер је $x - y$ оријентисано растојање од x до y како га је Карно дефинисао). Зато и не чуди назив дворазмера. Особине дворазмере су:

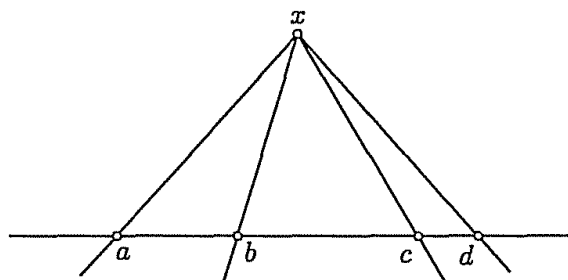
1. $[a, b; c, d] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{1}{\frac{c-b}{c-a} : \frac{d-b}{d-a}} = \frac{1}{[b, a; c, d]}$;
2. слично, $[a, b; c, d] = \frac{1}{[a, b; d, c]}$;
3. $[a, b; c, d] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} = [c, d; a, b]$;
4. $[a, b; c, d] + [a, c; b, d] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} + \frac{b-a}{b-c} : \frac{d-a}{d-c}$
 $= \frac{(c-a)(d-b) - (b-a)(d-c)}{(c-b)(d-a)} = \frac{cd - ac - bd + ab}{cd - ac - bd + ab} = 1$;

⁹ Gabriel Cramer (1704 – 1752)

$$5. [\infty, 0; 1, a] = \frac{1 - \infty}{1 - 0} : \frac{a - \infty}{a - 0} = a.$$

Помоћу 4 тачке можемо направити $4! = 24$ различитих дворазмера (или мање уколико међу њима има истих). Прва три својства показују да се све оне могу лако изразити преко једне од њих.

Дворазмера има и занимљиву геометријску интерпретацију. (У ствари, то је и била Карноова дефиниција дворазмере.)



Слика 10.

Уочимо неку тачку x ван наше праве. Применимо синусну теорему на $\triangle axc$, добијамо

$$\frac{c - a}{\sin \angle axc} = \frac{x - a}{\sin \angle acx}$$

(посматрамо оријентисане дужи и оријентисане углове). Дакле,

$$c - a = (x - a) \frac{\sin \angle axc}{\sin \angle acx},$$

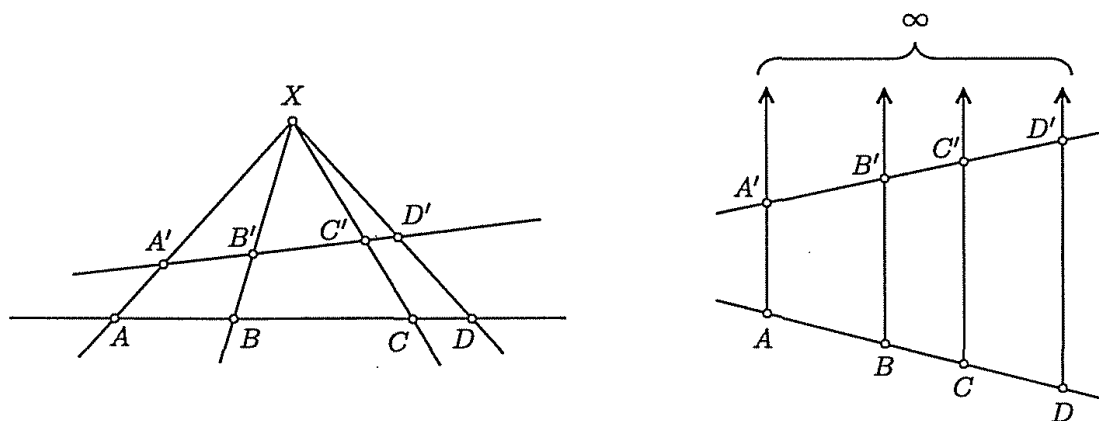
а слично се добија и $c - b = (x - b) \frac{\sin \angle bxc}{\sin \angle bcx}$. Следи

$$\frac{c - a}{c - b} = \frac{x - a}{x - b} \frac{\sin \angle axc}{\sin \angle bxc}.$$

Слично, $\frac{d - a}{d - b} = \frac{x - a}{x - b} \frac{\sin \angle axd}{\sin \angle bxd}$, те добијамо

$$[a, b; c, d] = \frac{\sin \angle axc}{\sin \angle bxc} : \frac{\sin \angle axd}{\sin \angle bxd}.$$

Дакле, дворазмера се може изразити само помоћу углова, и то за произвољну тачку X . Прикажимо једну последицу тога. Узмемо једну тачку и из ње повучемо четири праве. Када узмемо четири колинеарне тачке (по једну са сваке праве као што је приказано на сликама када је X коначно и када није) дворазмера ће бити увек иста, тј. неће зависити од избора тачака. Тада ту дворазмеру зовемо и *дворазмером њрамена њравих*.



Слика 11.

Инваријантност дворазмере

Пројективна пресликавања *чувају колинеарносћ*. Знамо да су тачке у равни колинеарне акко леже на истој правој, тј. задовољавају исту линеарну једначину. Већ смо констатовали да се приликом пројективне трансформације (због Крамерове теореме) координате нових тачака могу изразити преко старих, а очигледно је та веза линеарна. И потом то треба вратити у једначину и уверити се да слике тачака задовољавају једначину (неке друге) праве.

Сада ћемо доказати дуго обећавану чињеницу да се дворамера чува при пројективним трансформацијама. Нека су дате четири тачке a, b, c, d на пројективној правој $\mathbb{R}P^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ и нека је дата пројективна трансформација Φ која их слика у a', b', c', d' , редом. Да не компликујемо претпоставићемо да су a, b, c и d међусобно различите (па су самим тим и њихове слике међусобно различите). Случај када се неке две поклапају није битан јер нам неће бити од користи (али може још лакше да се испита).

Знамо да постоји тачно једна пројективна трансформација која $a \mapsto \infty$, $b \mapsto 0$, $c \mapsto 1$, па хајде да покушамо да погодимо која је у питању. Дефинишемо:

$$\Psi : \mathbb{R}P^1 \longrightarrow \mathbb{R}P^1, \quad \Psi(x) = [a, b; c, x].$$

Имамо да је

$$\Psi(a) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{a-a}{a-b} = \infty, \quad \Psi(b) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{b-a}{b-b} = 0 \quad \text{и} \quad \Psi(c) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{c-a}{c-b} = 1.$$

И стварно се испоставило да је Ψ поменута трансформација. Из истог разлога је

$$\Psi' : \mathbb{R}P^1 \longrightarrow \mathbb{R}P^1, \quad \Psi'(x) = [a', b'; c', x]$$

једна једина трансформација која $a' \mapsto \infty$, $b' \mapsto 0$, $c' \mapsto 1$.

Погледајмо шта $\Psi' \circ \Phi$ ради тачкама a, b и c . $\Psi' \circ \Phi(a) = \Psi(a') = \infty$, $\Psi' \circ \Phi(b) = \Psi(b') = 0$, $\Psi' \circ \Phi(c) = \Psi(c') = 1$. Овим је $\Psi' \circ \Phi$ у потпуности одређена, а ми знамо

да постоји само једна таква (а то је Ψ). Дакле, $\Psi' \circ \Phi$ мора бити једнака баш њој, тј. $\Psi' \circ \Phi \equiv \Psi$.

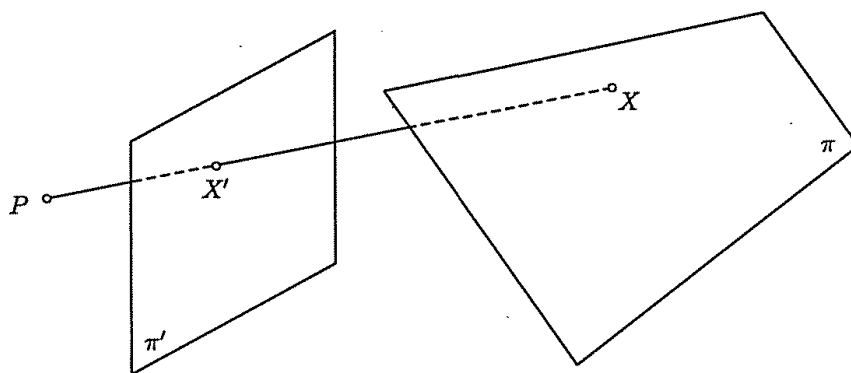
То значи да је

$$[a, b; c, d] = \Psi(d) = \Psi' \circ \Phi(d) = \Psi'(d') = [a', b'; c', d'].$$

Другим речима, *пројективне трансформације чувају дворазмеру*.

Перспективно пресликавање

Нека су у пројективном простору $\mathbb{R}P^3$ задате две пројективне равни π и π' и тачка P ван њих. Дефинисаћемо *перспективно пресликавање* из равни π у раван π' из тачке P на следећи начин. Нека је X произвољна тачка равни π , постоји тачно једна права која садржи P и X . Она сече раван π' (уvek у пројективном простору!) у некој тачки X' . Дефинисаћемо перспективно пресликавање (перспективу) као $X \mapsto X'$.

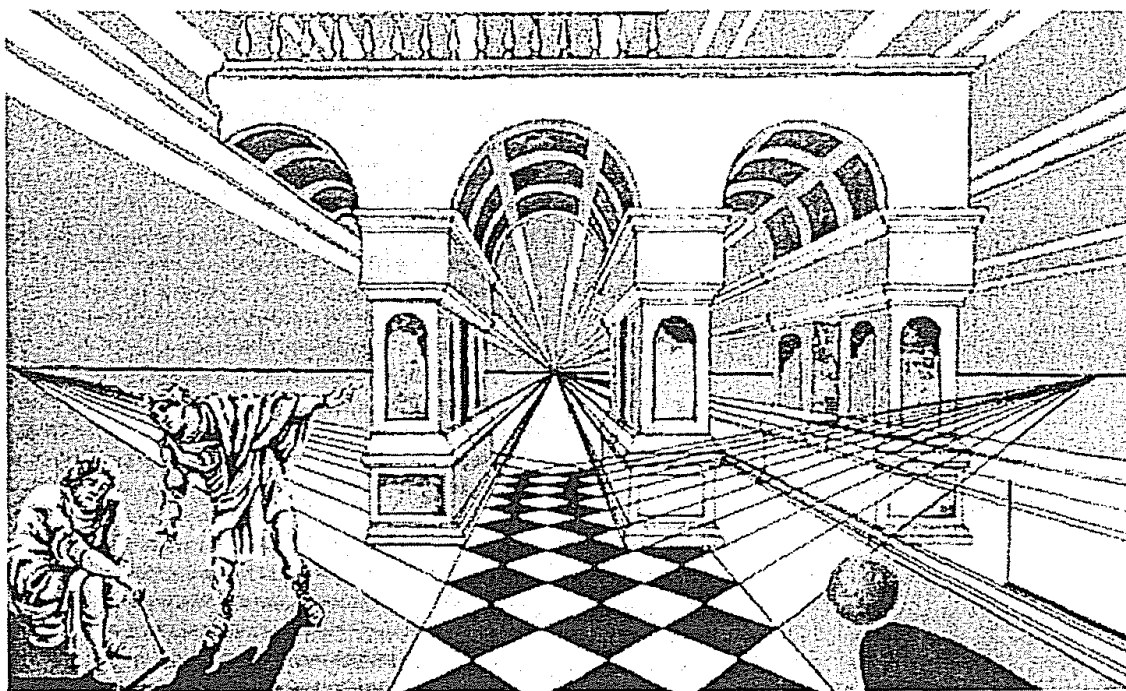


Слика 12.

И аналогно се дефинише у равни (с тим да су тада α и β праве).

Када се све то лепо распише по координатама види се да је овако дефинисано перспективно пресликавање једна пројективна трансформација. То одмах повлачи и да чува дворазмеру. Сад видите где се крије одговор на проблеме са сликама из увода. Ова перспективна пресликавања одговарају преласку са једног платна на друго. То смо заправо имали и избором афиних карата. Међутим, перспективе нам дају још једну флексибилност, можемо тачку из које вршимо пројектовање (положај ока) изабрати произвољно, за разлику од избора карата где смо подразумевали да је то координатни почетак. Тако да сада можемо да посматрамо из било које тачке (чак и да је мењамо током цртања) и да платно поставимо било како, (уз мало рачуна) знаћемо како слика треба да изгледа (за разлику од уметника са почетка који се мучи са оним помагалима). Са дворазмером и перспективом слике нам изгледају боље, уверите се сами на слици 13.

Поред перспективе, овде се лепо види још нешто. Све паралелне праве се секу, а све те пресечне тачке леже на једној (бесконечно далекој) правој о чему је већ било речи. Утврдили смо да се чува дворазмера, а као што видимо из приложеног *не чувају се размера и углови*.



Слика 13.

3. ПРИМЕНЕ

Распоред тачака

Користићемо $\mathfrak{B}(a, b, c)$ да означимо да је тачка b између a и c . (Наравно, $\mathfrak{B}(a, b, c) = \mathfrak{B}(c, b, a)$) И аналогно се дефинише $\mathfrak{B}$ за четири тачке. Пар тачака (a, b) *раздваја* пар (c, d) ако важи неки од распореда $\mathfrak{B}(a, c, b, d)$, $\mathfrak{B}(a, d, b, c)$, $\mathfrak{B}(b, c, a, d)$ или $\mathfrak{B}(b, d, a, c)$ (или неки њима еквивалентан распоред). Другим речима, (a, b) раздваја (c, d) ако је једна од тачака c, d између a и b ($\mathfrak{B}(a, c, b)$).

То се лако испитује помоћу дворазмере. $\mathfrak{B}(a, b, c)$ је еквивалентно са тим да је један од израза $c - a$ и $c - b$ позитиван а други негативан. Следи:

$$\mathfrak{B}(a, c, b) \iff \frac{c-a}{c-b} < 0,$$

$$\mathfrak{B}(a, d, b) \iff \frac{d-a}{d-b} < 0.$$

Као што смо рекли пар (a, b) раздваја пар (c, d) акко је тачно једна од тачака c и d између a и b , тј. треба да важи тачно једна од претходних релација што је еквивалентно са $\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} < 0$, односно $[a, b; c, d] < 0$.

Сада имамо брз алгоритам за одређивање распореда тачака. То је јако добар алгоритам за реализацију на рачунару, има само пар инструкција те се извршава готово тренутно. Једино је проблем што га можемо користити само за коначне тачке (јер рачунар не може да ради са граничним вредностима). Али кад је нека тачка

бесконечно далеко онда цела ова прича око раздвајања парова тачака и нема превише смисла. На пример, на језику C код би изгледао овако:

```
#include<stdio.h>
main()
{
printf("Unesite brojeve a,b,c,d");
float a,b,c,d;
scanf("%f%f%f%f",&a,&b,&c,&d);
if ((c-a)/(c-b))/((d-a)/(d-b))>0
printf("Par tacaka (%f,%f) ne razdvaja par tacaka (%f,%f)",a,b,\c,d)
else printf("Par tacaka (%f,%f) razdvaja par tacaka (%f,%f)",a,\b,c,d);
}
```

Сигурносне камере

Вероватно сте чули за сигурносне камере које бележе саобраћајне прекршаје. Знате ли како раде? Нпр. како мере брзину?

Уколико полиција успе да одреди положај возила у два тренутка, ствар је готова. Могу да одреде растојање, поделе га временом (које протекне између та два положаја) и тако добију средњу брзину. Али како одредити та два положаја? Камера даје слике у два тренутка, али како са слике одредити где се налази тачка на путу?



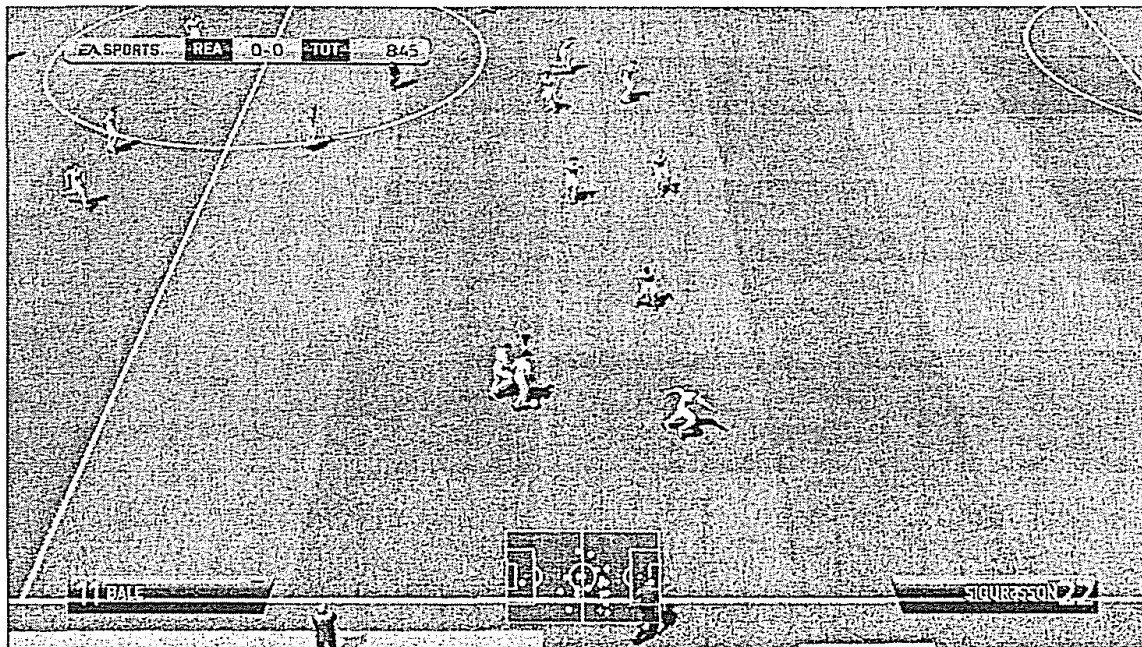
Слика 14. Сигурносна камера снима аутопут

Ту се користи дворазмера. Битно је истаћи да полиција овде користи три непокретна објекта на путу (нпр. семафор, саобраћајни знак и неко стабло). Уз помоћ њих и дворазмере (коју срачунају са слике) могу да одреде те две тачке на путу (не одједном, већ једну па другу) и измере растојање. Наравно, неће то мерити ручно сваки пут. Извели су формулу и написали програм који рачуна растојање. Дакле, уколико хоћете да покварите камеру, довољно је да откријете један од тих објеката и да га уклоните са пута.

На исти начин помоћу камере је могуће открити да ли два возила одржавају прописано растојање, да ли се возило зауставило на довољном одстојању од пешачког прелаза... Овај пример је супротан оном са цртањем. Када цртамо, ми имамо тродимензионални објекат и користимо дворазмеру да бисмо нацртали дводимензионалну слику. Овде имамо дводимензионалну слику са камере од које помоћу дворазмере добијамо податке о тродимензионалном објекту.

Рачунарска графика

Погледајте пажљиво слику и реците да ли се фудбалер Реала налази у офсајду или не?



Слика 15. Спорна ситуација из игре ФИФА 14

На први поглед делује као да јесте. Међутим, видимо да судија није подигао заставицу, што значи да није. Ако пажљивије погледате и обратите пажњу на линију која раздваја две нијансе зелене боје схватићете да је судија у праву.

Шта је овде заправо проблем? Када некога питате овако нешто, он несвесно посматра нормалу на ближу аут-линију и врши процену у односу на њу. Зато прво помислите да је офсајд. Али ми знамо да се углови не чувају, па нормала на слици неће бити нормала и у простору у ком се то дешава.

Дакле, овде је у питању перспектива. Помоћни судија трчи уз аут-линију како би спорну ситуацију видео што боље, тј. како би му се слика „што мање искривила”. На пример, кад би стално стајао на једном месту морао би увек да пресликава оно што види перспективним пресликавањем и да доноси одлуку на основу тако добијене слике, а за то нема времена.

Са истим проблемима се сусрећу и произвођачи видео-игара. Морају да испрограмирају судију да не грешу у оваквим ситуацијама. Затим, видите да су фудбалерима направили и сенке (које су заправо слике играча при пројектовању на раван терена из тачке на рефлектору).

У менију постоји и опција за промену камере, што није ништа друго до промена карте у пројективном простору.

4. КОМПЛЕКСНА ПРОЈЕКТИВНА ПРАВА

Геометријски смисао модула дворазмере

Све што смо досад радили односило се на реалну пројективну праву $\mathbb{R}P^1$. Аналогно се дефинише и *комплексна пројективна права* $\mathbb{C}P^1$ и аналогно се на њој дефинише дворазмера. Уобичајен је назив права, мада са преласком на комплексне бројеве то више изгледа као *раван* (где су координате реални и имагинарни део). Нас занима како се у тој равни види аргумент дворазмере у односу на посматране четири различите коначне тачке.

Посматрајмо тачке A, B, C и D . Знамо да је $\overrightarrow{XY} = Y - X$ у комплексној равни. Важи:

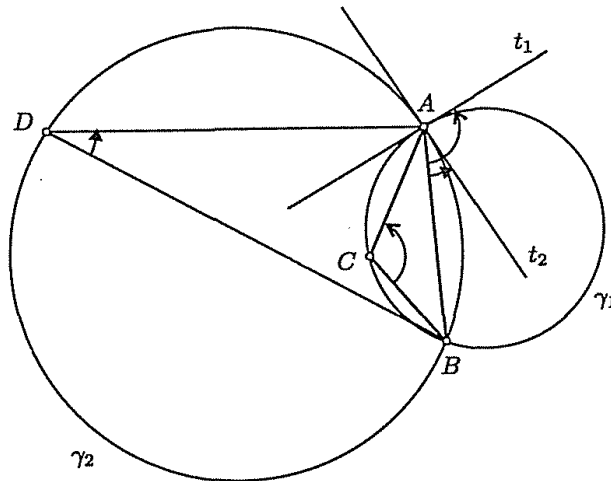
$$\arg[A, B; C, D] = \arg\left(\frac{C-A}{C-B} : \frac{D-A}{D-B}\right) = \arg\left(\frac{C-A}{C-B}\right) - \arg\left(\frac{D-A}{D-B}\right).$$

Приметимо да је

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{C-A}{C-B}\right) &= \arg\left(\frac{A-C}{B-C}\right) = \arg(A-C) - \arg(B-C) \\ &= \angle(\overrightarrow{CA}, 1) - \angle(\overrightarrow{CB}, 1) = \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}). \end{aligned}$$

(Овде под 1 подразумевамо вектор из координатног почетка до броја 1.) На исти начин се показује да важи и $\arg\left(\frac{D-A}{D-B}\right) = \angle(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD})$.

Нека су γ_1 и γ_2 описане кружнице око троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$, редом и нека су t_1 и t_2 њихове тангенте у тачки A . Из елементарне геометрије знамо да је $\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = \angle(\overrightarrow{AB}, t_1)$ и $\angle(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD}) = \angle(\overrightarrow{AB}, t_2)$. Следи $\arg[A, B; C, D] = \angle(\overrightarrow{AB}, t_1) - \angle(\overrightarrow{AB}, t_2) = \angle(t_1, t_2)$.

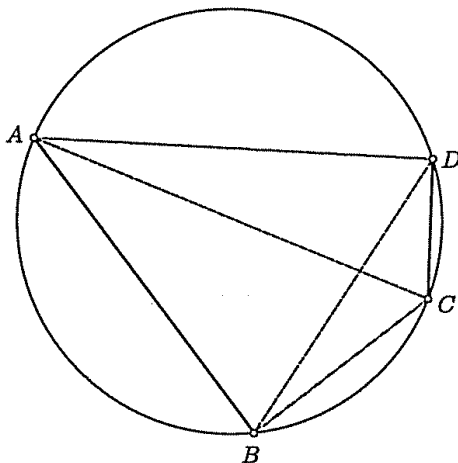


Слика 16.

Птоломејева теорема

Птоломејева теорема. У тетивном четвороуглу (тј. четвороуглу који је уписан у круг) производ дужина дијагонала је једнак збиру производа дужина насупрамних странаца. Другим речима,

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$



Слика 17.

Ова теорема вам је вероватно позната, као и њен доказ. Овде дајемо доказ преко дворазмере. Пошто је четвороугао тетиван, малопре поменуте кружнице γ_1 и γ_2 се поклапају. Зато је аргумент дворазмере нула, тј. дворазмера је реална (и ово важи за сваку комбинацију темена A, B, C и D). Примењујући ово и четврту особину дворазмере добијамо

$$\begin{aligned} 1 &= [A, B; D, C] - [A, D; B, C] = |[A, B; D, C]| - |[A, D; B, C]| \\ &= \left| \frac{D-A}{D-B} : \frac{C-A}{C-B} \right| + \left| \frac{B-A}{B-D} : \frac{C-A}{C-D} \right| \\ &= \frac{|D-A|}{|D-B|} : \frac{|C-A|}{|C-B|} + \frac{|B-A|}{|B-D|} : \frac{|C-A|}{|C-D|} \\ &= \frac{|\vec{AD}|}{|\vec{BD}|} : \frac{|\vec{AC}|}{|\vec{BC}|} + \frac{|\vec{AB}|}{|\vec{DB}|} : \frac{|\vec{AC}|}{|\vec{DC}|} \\ &= \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BC}{AC} + \frac{AB}{BD} \cdot \frac{CD}{AC}. \end{aligned}$$

Следи $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Анатолий Павлович Савин, *Энциклопедический словарь юного математика*, Педагогика, Москва, 1989.
- [2] И. Г. Башмакова, Л. Е. Майстров, Б. А. Розенфельд, М. В. Чириков, О. Б. Шейнин, А. П. Юшкевич, *История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, Том второй: Математика XVII столетия*, Издательство „Наука“, Москва, 1970.
- [3] В. И. Антропова, И. Г. Башмакова, А. В. Дорофеева, Л. Е. Майстров, Е. П. Ожигова, Б. А. Розенфельд, Н. И. Симонов, О. Б. Шейнин, А. П. Юшкевич, *История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, Том третий: Математика XVIII столетия*, Издательство „Наука“, Москва, 1972.
- [4] Яков Петрович Понарин, *Аффинная и проективная геометрия*, Пиксель, Минск, 2009.
- [5] Яков Петрович Понарин, *Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах*, Издательство московского центра непрерывного математического образования, Москва, 2004.
- [6] Richard Courrant, Herbert Robbins, *What's Mathematics?*, Oxford University Press, Oxford, 1941.
- [7] John Stillwell, *Mathematics and Its History*, Springer, New York, 2000.
- [8] R. Mohr., L. Morin, *Relative Positioning from Geometric Invariants*, LIFLA-IMAG, Grenhoble, 1991.
- [9] www.wikipedia.org
- [10] www.cut-the-knot.org
- [11] www.wolframalpha.com

**Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на
ДМ на Србија во 2014/15 година**