

О ЈЕДНОЈ КЛАСИ ХЕРОНОВИХ ТРОУГЛОВА

Милан Живановић*, Бајина Башта

Под Хероновим троугловима подразумевамо троуглове код којих су странице и површина изражене природним бројевима. Посебно су занимљиви случајеви Херонових троуглова, код којих странице уређене у растћем (опадајућем) поретку чине аритметички низ. У следећем примеру дефинисана је једна таква класа Херонових троуглова.

Дат је низ природних бројева $d_1, d_{n+1} = d_n + 12n, n \in \mathbb{N}$. Докажимо да тројка бројева $a_n = d_n + 2, b_n = 2d_n + 2, c_n = 3d_n + 2$, за сваки природан број n , представља странице Хероновог троугла.

Одредимо најпре општи члан низа d_n .

$$d_n = d_{n-1} + 12(n-1) = d_{n-2} + 12(n-2) + 12(n-1) = \dots = 1 + 12 \cdot \frac{(n-1)n}{2}.$$

Дакле, $d_n = 6n^2 - 6n + 1$ (што се и индукцијом може лако доказати). Тада су странице троугла: $a_n = 6n^2 - 6n + 3 = 3(2n^2 - 2n + 1), b_n = 12n^2 - 12n + 4 = 4(3n^2 - 3n + 1), c_n = 18n^2 - 18n + 5$, па је полуобим $s_n = 18n^2 - 18n + 6 = 6(3n^2 - 3n + 1)$. Израчунајмо површину троугла помоћу Хероновог обрасца:

$$\begin{aligned} P_n &= \sqrt{6(3n^2 - 3n + 12) \cdot (12n^2 - 12n + 3) \cdot (6n^2 - 6n + 2) \cdot 1} \\ &= \sqrt{6(3n^2 - 3n + 12) \cdot 3(4n^2 - 4n + 1) \cdot 2(3n^2 - 3n + 1) \cdot 1} \\ &= \sqrt{36(2n-1)^2(3n^2 - 3n + 1)^2} = 6(2n-1)(3n^2 - 3n + 1). \end{aligned}$$

Овим је доказано да је тројка (a_n, b_n, c_n) Херонова. Можемо уочити и следеће:

$$P_n = (2n-1) \cdot 6(3n^2 - 3n + 1) = (2n-1)s_n,$$

тј. обзиром да је $P_n = r_n \cdot s_n$, при чему је r_n полупречник кружнице уписане у Хероновог троугла, закључујемо да је: $r_n = \frac{P_n}{s_n} = 2n - 1$.

Дакле, у претходном примеру дефинисана је класа Херонових троуглова код којих је и полупречник уписане кружнице такође природан број, а странце уређене у растућем (опадајућем) поретку чине аритметички низ. У следећој табели дато је првих 10 чланова ове класе Херонових троуглова:

n	d_n	a_n	b_n	c_n	s_n	P_n	r_n
1	1	3	4	5	6	6	1
2	13	15	28	41	42	126	3
3	37	39	76	113	114	570	5
4	73	75	148	221	222	1554	7
5	121	123	244	365	366	3294	9
6	181	183	364	545	546	6006	11
7	253	255	508	761	762	9906	13
8	337	339	676	1013	1014	15210	15
9	433	435	868	1301	1302	22134	17
10	541	543	1084	1625	1626	30894	19