Задача 1

Барон Мюнхгаузен заявляет, что нарисовал два разных и не противоположных луча OA и OB с общим началом O. На луче OA он отметил 10 точек $K_1, \ldots, K_5, L_1, \ldots, L_5$, а на луче OB — 10 точек $M_1, \ldots, M_5, N_1, \ldots, N_5$ так, что все 20 точек различны. Барон говорит также, что $K_iM_j = L_iN_j$ при всех i и j. Могут ли слова барона оказаться правдой?

Ответ. Могут.

Решение. Предъявим пример расположения точек, удовлетворяющего всем требованиям. Нарисуем прямой угол AOB. Выберем 10 различных положительных чисел $k_1, \ldots, k_5, m_1, \ldots, m_5$ и положительное число c такое, что все числа $\ell_j = k_j - c$ и $n_j = m_j + c$ положительны и отличны от чисел k_i и m_i.

Теперь выберем на луче OA точки K_i и L_i такие, что $OK_i = \sqrt{k_i}$, $OL_i = \sqrt{\ell_i}$. Выберем на луче OB точки M_i и N_i такие, что $OM_i = \sqrt{m_i}$ и $ON_i = \sqrt{n_i}$. По нашему выбору, все 20 точек различны. Кроме того, поскольку угол AOB прямой, из теоремы Пифагора имеем

$$L_iN_j^2 = OL_i^2 + ON_j^2 = \ell_i + n_j = (k_i - c) + (m_j + c) = k_i + m_j = OK_i^2 + OM_j^2 = K_iM_j^2,$$

то есть $L_iN_j = K_iM_j$ при всех i и j.

Задача 2

Натуральное число n можно представить и в виде $[a\sqrt{10}]$ с некоторым натуральным a, и в виде $[b\sqrt{11}]$ с некоторым натуральным b. Докажите, что n можно представить в виде $[c(11\sqrt{10}-10\sqrt{11})]$ с некоторым натуральным c.

Решение. Обозначим $\alpha=\sqrt{10}$, $\beta=\sqrt{11}$, $\gamma=11\sqrt{10}-10\sqrt{11}$. Заметим, что

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\sqrt{10\cdot 11}}\cdot\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{10}}{\sqrt{10\cdot 11}}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}.$$

Условие $n=[a\alpha]$ означает, что $n\leqslant a\alpha<n+1$, то есть $\frac{a}{n+1}<\frac{1}{\alpha}\leqslant\frac{a}{n}$, и аналогично имеем $\frac{b}{n+1}<\frac{1}{\beta}\leqslant\frac{b}{n}$. Складывая эти два неравенства, получаем

$$\frac{a+b}{n+1}<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\gamma}\leqslant\frac{a+b}{n},$$

или $n\leqslant\gamma(a+b)<(n+1)$, что и значит, что $c=a+b$ удовлетворяет условию задачи.

Задача 3

Даны натуральные $m > k > 1$. На доске $N \times N$ расставлены N фишек так, что в каждой строке и в каждом столбце есть ровно по одной фишке. Оказалось, что доску нельзя разрезать по сторонам клеток одной вертикальной и одной горизонтальной прямой на четыре прямоугольника и выбрать из этих четырёх прямоугольников два так, что

(i) выбранные прямоугольники не имеют общей стороны, и

(ii) в одном из них не менее m фишек, а в другом не менее k.

При каком наибольшем N это возможно?

Ответ. При $N = 2(k+m) - 4$.

Решение. *Оценка.* Пусть $N \geqslant 2(k+m)-3$; докажем, что требуемое разбиение на 4 прямоугольника всегда найдётся. Очевидно, достаточно доказать это для $N = 2(k+m)-3$: если N больше, удалим часть фишек вместе с содержащими их строками и столбцами. Если получившуюся таблицу удастся разбить требуеммм образом, то удастся и исходную.

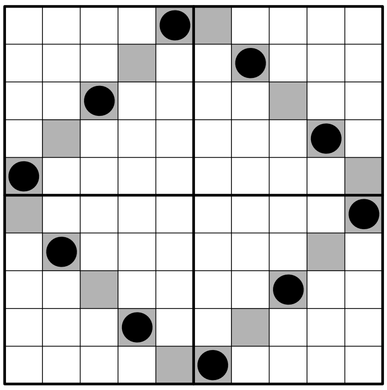
Заметим, что $N = 2(k+m) - 3 \geqslant 2(k+k+1) - 3 > 2(2k-1)$. Рассмотрим средний (то есть $(k+m-1)$-й) столбец доски; тогда либо в его верхних $2k-1$ клетках, либо в его нижних $2k-1$ клетках нет фишки. Пусть для определённости верхние $2k-1$ клеток этого столбца пустые. Тогда в верхних $2k-1$ строках доски содержатся либо k фишек левее среднего столбца, либо k фишек правее него; не умаляя общности, будем считать, что в них есть k фишек левее среднего столбца.

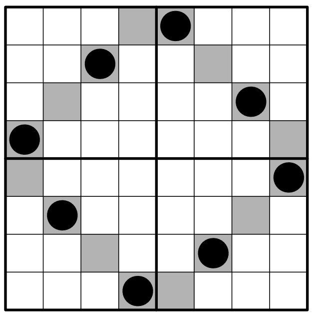
Разделим доску на 4 прямоугольника, отделив верхние $2k-1$ строки и левые $k+m-2$ столбца. Докажем, что левый верхний (A) и правый нижний (B) прямоугольники разбиения подходят. В A находится не менее k фишек по нашему выбору. Обозначим верхний правый прямоугольник разбиения через C, и обозначим через $N(X)$ количество фишек в прямоугольнике X. Тогда $N(A)+N(C) = 2k-1$ и $N(B) + N(C) = N - (k+m-2) = k+m-1$, поскольку в каждой строке и в каждом столбце находится по фишке. Значит,

$$N(B) = (N(B) + N(C)) - (N(A) + N(C)) + N(A) \geqslant (k+m-1) - (2k-1) + k = m,$$

что и требовалось.

Пример. Осталось привести пример расстановки, в которой требуемого разбиения нет при $N = 2(k+m-2)$. Положим $n = k+m-2$ и разобьём нашу доску на 4 квадрата $n \times n$. Пронумеруем строки числами $1, 2, \ldots, N$ сверху вниз, а столбцы — слева направо; клетку будем обозначать парой её координат (r, c), где r — номер её строки, а c — номер её столбца. Отметим все клетки доски, у которых сумма координат равна $n+1$ или $3n+1$, или разность координат равна $\pm n$ (эти клетки образуют «каёмку», состоящую из диагоналей квадратов $n \times n$). Пронумеруем клетки каёмки по часовой стрелке, начиная с произвольной клетки, числами $1, 2, \ldots, 4n$ и поставим фишки в клетки с чётными номерами. На рисунке показаны такие расстановки при $n = 5$ и при $n = 4$.





Нетрудно видеть, что в квадратах $n \times n$, соседних по горизонтали, фишки стоят в строках с номерами разной чётности; аналогично, в квадратах, соседних по вертикали, фишки стоят в столбцах с номерами разной чётности. Отсюда получаем, что действительно в каждой строке и в каждом столбце стоит ровно по одной фишке.

Пусть теперь доска разбита горизонтальной и вертикальной линиями сетки на 4 прямоугольника. Рассмотрим два из них — скажем, левый верхний (A, с a строками и a' столбцами) и правый нижний (B, с b строками и b' столбцами) и предположим, что A содержит хотя бы m фишек, а B — хотя бы k фишек. Если A содержит фишку из правого нижнего квадрата $n \times n$, то $a + a' \geqslant 3n + 1$, а тогда $b + b' \leqslant n - 1$, и B не содержит фишек вообще, что не так. Аналогично, B не содержит фишек из левого верхнего квадрата $n \times n$.

Поскольку $m \geqslant 3$, прямоугольник A содержит хотя бы две отмеченных клетки в левом верхнем квадрате $n \times n$, то есть содержит пустую клетку вида $(x, n + 1 - x)$. Следовательно, A содержит пустой прямоугольник $x \times (n + 1 - x)$ в верхнем левом углу. Тогда все фишки в A находятся либо в левой половине доски, причём в нижних $a - x$ строках прямоугольника A, либо в верхней половине доски, причём в правых $a' - (n + 1 - x)$ столбцах прямоугольника A. При этом в первом случае задействованы лишь строки, идущие через одну, а во втором — лишь столбцы, идущие через один. Значит, общее количество фишек в A не больше $(a-x+1)/2+(a'-(n+1-x)+1)/2 = (a+a'+1-n)/2$, то есть $m \leqslant (a + a' + 1 - n)/2$, или $a + a' \geqslant 2m + n - 1$.

Аналогично, прямоугольник B содержит пустую клетку вида $(n+1+y, 2n+1-y)$ (расположенную непосредственно под диагональю в правом нижнем квадрате), и потому $k \geqslant (b - (n - y) + 1)/2+$ $+(b' - y + 1)/2$, то есть $b + b' \geqslant 2k + n - 2$. Итого,

$$4n = a + a' + b + b' \geqslant (2m + n - 1) + (2k + n - 2) = 4n + 1.$$

Противоречие.

Задача 4

Дано натуральное $v \geqslant 4$. При каком наименьшем e в каждом связном графе на v вершинах с e рёбрами существует цикл, после удаления всех рёбер которого граф остаётся связным? (После удаления рёбер цикла в графе остаются все его вершины, в том числе и те, в которых удалены все рёбра.)

Ответ. При $2v-2$.

Решение. Оценка снизу.

Докажем, что $e = 2v-3$ ребер недостаточно.

Пусть в графе с вершинами $a_1, a_2, \ldots, a_v$ проведены ребра a_1a_2, a_1a_i и a_2a_i для всех $i = 3, 4, \ldots, v$. Каждый цикл содержит одну из вершин $a_3, a_4, \ldots, a_v$, у каждой из которых степень равна 2. Значит, после удаления всех рёбер этого цикла эта вершина станет изолированной, следовательно, граф перестанет быть связным.

Пример для $v \leqslant e \leqslant 2v-4$ можно получить из примера выше, удалив несколько рёбер вида a_2a_i с $i \geqslant 3$.

Оценка сверху.

Выберем вершину a_1 и рассмотрим дерево T, содержащее все вершины графа (такое дерево называется *остóвным*), в которое входят все рёбра, исходящие из a_1. (Вот как получить такое дерево. Если в графе есть цикл, удалим из этого цикла любое ребро, не выходящее из a_1. Связность не нарушится, а количество рёбер уменьшится. Это можно продолжать, пока не останется дерево.)

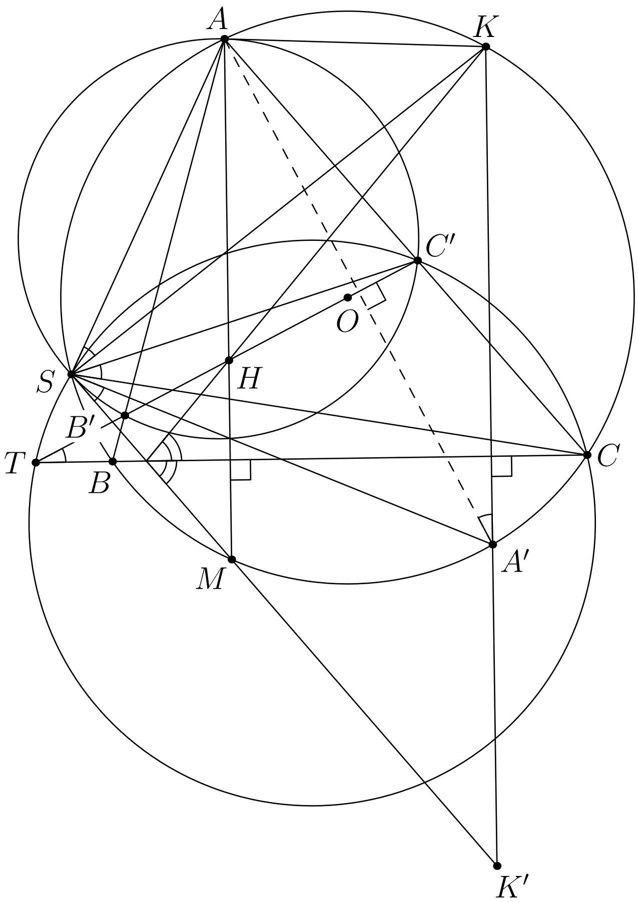
Покрасим все $v-1$ рёбер дерева T. Если удалить даже все непокрашенные ребра, наш граф останется связным. Поэтому достаточно найти цикл из непокрашенных рёбер.

Рассмотрим граф G, в котором $v-1$ вершин — это все вершины данного графа, кроме вершины a_1, а рёбра — это все непокрашенные рёбра исходного графа (вспомним здесь, что все рёбра, исходящие из a_1, покрашены). Количество этих рёбер равно $e-(v-1) \geqslant 2v-2-v+1 = v-1$. Видим, что в G количество рёбер не меньше количества вершин, поэтому в нем найдётся некоторый цикл.

Задача 5

Точки O и H — центр описанной окружности и точка пересечения высот неравнобедренного треугольника ABC. Прямая OH пересекает отрезки AB и AC в точках B' и C' соответственно. Допустим, что описанные окружности Γ и Ω треугольников $AB'C'$ и ABC соответственно пересекаются в точке $S \neq A$.Касательная, проведённая к Γ в точке A, пересекает Ω в точке $K \neq A$. Прямая AH пересекает Ω в точке $M \neq A$. Докажите, что прямые KH, BC и SM пересекаются в одной точке.

Решение. Заметим сперва, что S – точка Микеля четверки прямых $B'C'$, AB, BC, AC. Из этого следует, что треугольник $SB'C'$ переводится в треугольник SBC некоторой поворотной гомотетией с центром в точке S, которую мы будем обозначать буквой f (то есть $f(C') = C$ и $f(B') = B$).



Заметим теперь, что

$$\angle KBC = \angle KAC = \angle AB'C'.$$

Аналогично, $\angle AC'B' = \angle KCB$, откуда треугольники $B'AC'$ и BKC подобны, то есть $f(A) = K$.

Так как $f(A) = K$ и $f(C') = C$, то треугольники CSC' и KSA подобны, откуда

$$\angle KSA = \angle CSC' = \angle C'TC,$$

где последнее равенство следует из того, что точки C', S, T, C лежат на одной окружности.

Пусть A' – точка, симметричная A относительно $B'C'$. Так как $OA = OA'$, A' лежит на Ω.

Имеем

$$\angle C'TC = \angle ASK = \angle AA'K,$$

и так как $AA' \perp B'C'$, то и $KA' \perp BC$.

Пусть теперь K' – точка симметричная K относительно BC, тогда $f(A') = K'$, так как $f(A) = K$.

В свою очередь это означает, что треугольники $SA'K'$ и SAK подобны, откуда

$$\angle K'SA' = \angle KSA = \angle MSA',$$

так как $AKA'M$ – равнобедренная трапеция, оба основания которой перпендикулярны BC.

Значит, S, M, K' лежат на одной прямой, которая пересекает BC в той же точке, что и прямая, симметричная ей относительно BC.

Это означает, что прямая SM пересекается с прямой KH на прямой BC, что и требовалось.

Задача 6

Для многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами нашлись четыре различных непостоянных многочлена $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$ с вещественными коэффициентами, старшие коэффициенты которых положительны,

$$f_1(x)f_2(x) = f_3(x)f_4(x) \quad \text{и} \quad P(f_1(x))P(f_2(x)) = P(f_3(x))P(f_4(x))$$

при всех вещественных x. Найдите все многочлены $P(x)$, для которых это возможно.

Ответ: $P(x) = ax^n$ при всех целых неотрицательных n и всех вещественных a.

Решение. Очевидно, многочлены, указанные в ответе, удовлетворяют условию задачи. Докажем, что ему удовлетворяют только они. Поскольку нас не интересует случай, когда $P(x)$ – тождественный ноль, заменив, если нужно, $P(x)$ на $-P(x)$ (условие задачи не нарушится), мы можем считать, что старший коэффициент $P(x)$ положителен.

Лемма. Для всех многочленов $P(x)$ с положительным старшим коэффициентом, кроме многочленов вида $P(x) = ax^n$, функция $q(t) = \ln P(e^t)$ либо выпукла при всех $t > t_0$, либо вогнута при всех $t > t_0$ для некоторого вещественного t_0.

Доказательство. Обозначим $u(t) = P(e^t)$. Поскольку $P(x) > 0$ при всех достаточно больших x, $u(t)$ определена при всех достаточно больших t. Имеем $q(t) = \ln P(e^t)$, и $q'(t) = \frac{u'(t)}{u(t)} = \frac{e^t P'(e^t)}{P(e^t)}$ – частное двух многочленов от e^t. Следовательно, и $q''(t)$ является таким частным. Если у многочлена в числителе конечное число корней (то есть он не является тождественным нулём), то при всех t, больших некоторого t_0, функция $q''(t)$ знакопостоянна (в качестве t_0 можно взять логарифм наибольшего из положительных корней многочленов, стоящих в числителе и знаменателе, или любое положительное число, если таких корней нет). Если $q''(t) > 0$ при всех $t > t_0$, то $q(t)$ выпукла при всех $t > t_0$, в противном случае она вогнута.

Осталось выяснить, когда $q''(t)$ – тождественный ноль при всех достаточно больших t. В этом случае функция $q'(t)$ постоянна: $q'(t) = C$, а функция $q(t) = Ct + D$ для некоторых постоянных C и D. Возвращаясь к многочлену $P(x)$, находим, что при всех достаточно больших x имеет место равенство $P(x) = Ax^C$, где $A = e^D$. Проверим, что C – целое неотрицательное число. Отрицательным оно быть не может (иначе $P(x)$ стремился бы к нулю на бесконечности), а если $n < C < n+1$ для некоторого целого неотрицательного n, то $P(x)$ при достаточно больших x больше любого многочлена степени не выше n и меньше (по модулю) любого многочлена степени хотя бы $n+1$, то есть вообще не может быть многочленом. Лемма доказана.

Пусть теперь $P(x)$ – удовлетворяющий условию задачи непостоянный многочлен с положительным старшим коэффициентом, не имеющий вида ax^n. По лемме функция $\ln P(e^t)$ выпукла при всех $t > t_0$ или вогнута при всех $t > t_0$. Тогда для четырёх различных чисел a, b, c, d, больших $x_0 = e^{t_0}$ и удовлетворяющих условию $ab = cd$, не может выполняться условие $P(a)P(b) = P(c)P(d)$. Действительно, пусть $a = e^{a_0}$, $b = e^{b_0}$, $c = e^{c_0}$, $d = e^{d_0}$. Отсюда следует, что $a_0 + b_0 = c_0 + d_0$, а, с другой стороны, $u(a_0)u(b_0) = u(c_0)u(d_0)$, то есть $q(a_0) + q(b_0) = q(c_0) + q(d_0)$. Следовательно, середины хорд графика функции $q(t)$, соединящих точку $(a_0, q(a_0))$ с точкой $(b_0, q(b_0))$ и точку $(c_0, q(c_0))$ с точкой $(d_0, q(d_0))$, совпадают, что противоречит выпуклости (или вогнутости) функции $q(t)$.

Problem 1

1. Baron Münchhaisen claimed that he chose two distinct, non-opposite rays OA and OB with common origin O. On the ray OA he marked 10 points $K_1, \ldots, K_5, L_1, \ldots, L_5$, and on the ray OB he marked 10 points $M_1, \ldots, M_5, N_1, \ldots, N_5$, such that all 20 marked points are distinct. He further claimed that for all i and j, the distances K_iM_j and L_iN_j are equal. Can all of the baron's statements be true?

Ответ. Yes.

Решение. Here is an example of arrangement of points satifying all the requirements. First we draw a right angle AOB. Then we choose 10 distinct positive numbers $k_1, \ldots, k_5, m_1, \ldots, m_5$ and a positive number c such that all numbers $\ell_j = k_j - c$ and $n_j = m_j + c$ are positive and distinct from k_i and m_i.

Now we choose on the ray OA points K_i and L_i so that $OK_i = \sqrt{k_i}$, $OL_i = \sqrt{\ell_i}$, and on the ray OB points M_i and N_i so that $OM_i = \sqrt{m_i}$ and $ON_i = \sqrt{n_i}$. By virtue of aou choice all 20 points are distinct. Since the angle AOB is right, it also follows from the Pythagorean theorem that

$$L_iN_j^2 = OL_i^2 + ON_j^2 = \ell_i + n_j = (k_i - c) + (m_j + c) = k_i + m_j = OK_i^2 + OM_j^2 = K_iM_j^2,$$

that is, $L_iN_j = K_iM_j$ for all i и j.

Problem 2

Let n be a positive integer that can be represented both as $\left[a\sqrt{10}\right]$ for some positive integer a and as $\left[b\sqrt{11}\right]$ for some positive integer b. Prove that n can also be represented as $\left[c(11\sqrt{10}-10\sqrt{11})\right]$ for some positive integer c.

Solution. Let $\alpha=\sqrt{10}$, $\beta=\sqrt{11}$, $\gamma=11\sqrt{10}-10\sqrt{11}$. Note that

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\sqrt{10\cdot 11}}\cdot\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{10}}{\sqrt{10\cdot 11}}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}.$$

The equation $n=[a\alpha]$ means that $n\leqslant a\alpha<n+1$, that is, $\frac{a}{n+1}<\frac{1}{\alpha}\leqslant\frac{a}{n}$, and similarly $\frac{b}{n+1}<\frac{1}{\beta}\leqslant\frac{b}{n}$. Adding up the two inequalities we get

$$\frac{a+b}{n+1}<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\gamma}\leqslant\frac{a+b}{n},$$

or $n\leqslant\gamma(a+b)<(n+1)$, which means that $c=a+b$ is the number in question.

Problem 3

Let $m > k > 1$ be positive integers. Consider an $N \times N$ checkered board with N tokens placed so that each row and each column contains exactly one token. Suppose that for every partition of the board into four rectangles by one vertical and one horizontal grid line, it is impossible to choose two of those rectangles such that

1) they do not share a side, and
2) one of them contains at least m tokens while the other contains at least k tokens.

Determine the maximum possible value of N.

Ответ. $N = 2(k+m) - 4$.

Solution. *Upper bound.* Let $N \geqslant 2(k+m)-3$; we prove that a required split always exists. It is clearly enough to prove it for $N = 2(k+m)-3$: if N is greater, we can remove some tokens together with their rows and columns. If the resulting table admits the desired split, obviously so does the original table.

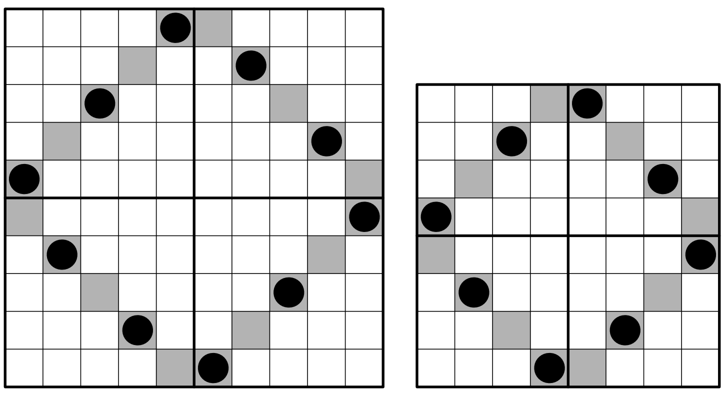
Note that $N = 2(k+m)-3 \geqslant 2(k+k+1)-3 > 2(2k-1)$. Consider the central (that is, the $(k+m-1)$-th) column of the bourd; either its upper $2k-1$ squares or its lower $2k-1$ squares do not contain a token. We may assume that the upper $2k-1$ squares are empty. Then in the upper $2k-1$ rows of the table there are either k tokens to the left of the central column, or k tokens to the right of it. Again, we may assume that these rows contain k tokens to the left of the central column.

Now we split the board into 4 rectangles separating upper $2k-1$ rows and left $k+m-2$ columns. We prove that the upper left (A) rectangle and the lower right (B) rectangles of this partition satisfy the conditions. A contain at least k tokens by virtue of our choice. Let C be the upper right rectangle of the partition, and $N(X)$ denote the nnumber of tokens in a rectangle X. Then $N(A)+N(C) = 2k-1$ and $N(B)+N(C) = N-(k+m-2) = k+m-1$, since every row and every column contains a token. Therefore

$$N(B) = (N(B)+N(C)) - (N(A)+N(C)) + N(A) \geqslant (k+m-1) - (2k-1) + k = m,$$

as desired.

Example. It remains to show an example of token placement admitting no desired split for $N = 2(k+m-2)$. Take $n = k+m-2$ and divide the board into four $n \times n$ squares. We number the rows with the numbers $1, 2, \ldots, N$ up to down, and the columns left to right; a square will be denoted by the pair of its cordinates (r, c), where r is the number of its row and c is the number of its column. Now let us mark all the squares where either the sum of coordinates is $n+1$ or $3n+1$, or the difference of coordinates is $\pm n$ (these squares form a "border" made of diagonals of the $n \times n$ squares). Let us number the squares of the border by the numbers $1, 2, \ldots, 4n$ clockwise, beginning with arbitrary square, and place tokens in the squares with even numbers. In the picture, such arrangements for $n = 5$ and $n = 4$ are shown.



It is easy to see that in the horizontally adjacent $n \times n$ squares tokens are placed in rows of different parity, and, similarly, in the vertically adjacent squares tokens are placed in columns of different parity. It follows that, indeed, every row and every column contains exactly one token.

Suppose now that the board is split into four rectangles by one horizontal grid line and one vertical grid line. Consider two of these triangles, say, the upper left one (A, with a rows and a' columns) and the lower right one (B, with b rows and b' columns). Suppose that A contains at least m tokens, and B contains at least k tokens. If A contains a square from the lower right $n \times n$ square, then $a + a' \geqslant 3n + 1$ and therefore $b + b' \leqslant n - 1$, so B does not contain tokens at all, which is not true. Similarly, B does not contain tokens from the upper left $n \times n$ square.

Since $m \geqslant 3$, the rectangle A contains at least two marked squares in the upper left $n \times n$ square, that is, it contains an empty square of the form $(x, n + 1 - x)$. It follows that A contains an empty rectangle $x \times (n+1-x)$ in the upper left corner. Then all the tokens in A either lie in the left half of the board, and in $a - x$ lower rows of A, or lie in the upper half of the board, and in $a' - (n+1-x)$ rightmost columns of A. In the first case only rows of one parity are used; in the second case, only columns of one parity. Thus the total number of tokens in A does not exceed $(a-x+1)/2 + (a' - (n+1-x)+1)/2 = (a+a'+1-n)/2$, that is, $m \leqslant (a + a' + 1 - n)/2$, and $a + a' \geqslant 2m + n - 1$.

Similarly, B contains an empty square of the form $(n+1+y, 2n+1-y)$ (directly under the diagonal in the lower right square), and therefore $k \geqslant (b - (n - y) + 1)/2 + +(b' - y + 1)/2$, that is, $b + b' \geqslant 2k + n - 2$. The sum total is

$$4n = a + a' + b + b' \geqslant (2m + n - 1) + (2k + n - 2) = 4n + 1,$$

a contradiction.

Problem 4

Let $v \geqslant 4$ be a positive integer. Find the minimum e such that every connected graph with v vertices and e edges contains a cycle with the property that removing all edges of this cycle leaves the graph connected (After removing the edges of the cycle, all vertices of the graph remain, including those that became isolated.)

Answer: $2v-2$.

Solution.

I. *Lower bound.* First we show that $e = 2v-3$ edges is not enough.

Let the vertices of the graph be $a_1, a_2, \ldots, a_v$, and edges a_1a_2, a_1a_i and a_2a_i for all $i = 3, 4, \ldots, v$. Every cycle contains one of the vertices $3, 4, \ldots, v$ with degree 2. Removing the edges of the cycle makes this vertex isolated, and the graph becomes disconnected.

An example for $v \leqslant e \leqslant 2v-4$ is obtained from the example above by removing some edges of the form a_2a_i with $i \geqslant 3$.

II. *Upper bound.* Now let $e \geqslant 2v-2$.

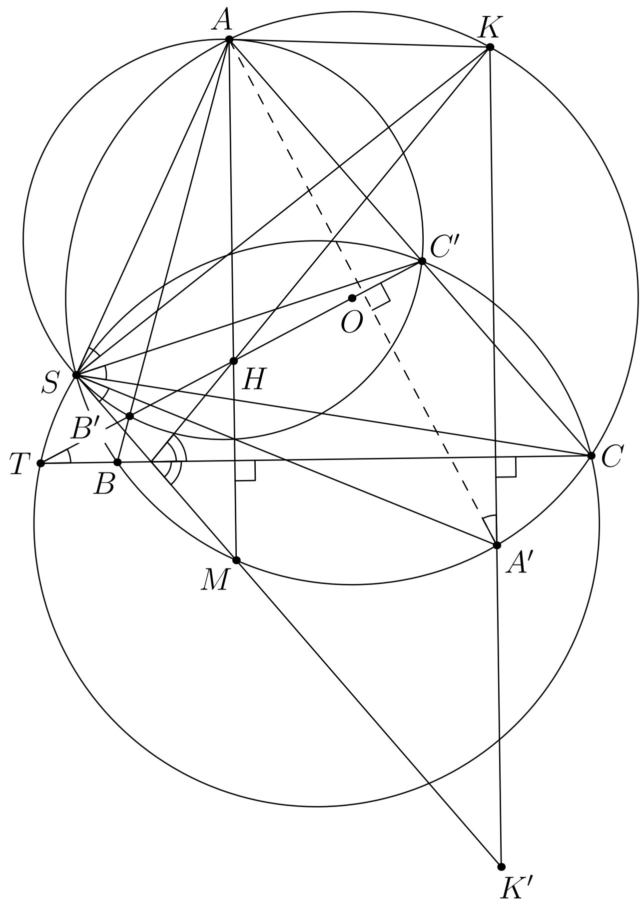
We choose a vertex a_1 and consider a tree T containing all vertices of the graph (such a tree is called *spanning tree*) so that all the edges from a_1 are in T. (Here is a way to construct such a tree. If there is a cycle in the graph, remove any edge of this cycle not incidental to a_1; the graph remain connected, and the number of edges diminishes. In the end we will get the desired tree.)

Let us mark all $v-1$ edges of the tree T. The graph remains connected even if we remove all marked edges. Therefore it is enough to find a cycle made of unmarked edges. Consider graph G on all vertices of the original graph except a_1 and all the unmarked edges (we remember here that all the edges from a_1 are marked). This graph has $v-1$ vertices and $e-(v-1) \geqslant 2v-2-v+1 = v-1$ edges, therefore it contains a cycle.

Problem 5

Let O and H be the circumcenter and the orthocenter of a scalene triangle ABC. The line OH intersects the segments AB and AC at B' and C' respectively. Suppose that the circumcircles Γ and Ω of the triangles $AB'C'$ and ABC respectively, meet at $S \neq A$. The line tangent to Γ at A intersects Ω at $K \neq A$. The line AH intersects Ω at $M \neq A$. Prove that the lines KH, BC and SM are concurrent.

Solution. First note that S is the Miquel point for the four lines $B'C'$, AB, BC, AC. It follows that the triangle $SB'C'$ can be transformed to the triangle SBC by some rotational homothety centred at S; we denote this transformation by f (thus $f(C') = C$ and $f(B') = B$).



We see now that

$$\angle KBC = \angle KAC = \angle AB'C'.$$

By the same argument, $\angle AC'B' = \angle KCB$, hence the triangles $B'AC'$ and BKC are similar, that is, $f(A) = K$.

Since $f(A) = K$ and $f(C') = C$, the triangles CSC' and KSA are similar, therefore

$$\angle KSA = \angle CSC' = \angle C'TC$$

(the last equality is true because C', S, T, C are concyclic).

Let A' is symmetric to A with repect to $B'C'$. Since $OA = OA'$, A' belongs to Ω.

We have

$$\angle C'TC = \angle ASK = \angle AA'K,$$

and since $AA' \perp B'C'$, $KA' \perp BC$.

Now let K' be symmetric to K with respect to BC. Then $f(A') = K'$ because $f(A) = K$.

It follows now that the triangles $SA'K'$ and SAK are similar, hence

$$\angle K'SA' = \angle KSA = \angle MSA',$$

since $AKA'M$ is an isosceles trapezoid with bases perpendicular to BC.

Therefore S, M, K' are collinear; the line SM and the line symmetric to it with respect to BC meet BC at the same point.

This means that the line SM meets the line KH on BC, q.e.d.

Problem 6

Let $P(x)$ be a real polynomial. Suppose there exist four distinct nonconstant real polynomials $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ with positive leading coefficients such that

$$f_1(x)\cdot f_2(x) = f_3(x)\cdot f_4(x) \quad \text{and} \quad P(f_1(x))\cdot P(f_2(x)) = P(f_3(x))\cdot P(f_4(x))$$

for all real x. Determine all polynomials $P(x)$ for which this is possible.

Answer: $P(x) = ax^n$ for all non-negative integers n and all real a.

Solution. Obviously the polynomials described above satisfy the condition. We will prove now that they are the only such polynomials. We ignore the case when $P(x)$ is identically zero, and when it is not we may replace $P(x)$ by $-P(x)$ if necessary, and assume that the leading coefficient of $P(x)$ is positive.

Lemma. For each polynomial $P(x)$ with positive leading coefficient, not of the form $P(x) = ax^n$, the function $q(t) = \ln P(e^t)$ is either convex for all $t > t_0$ or concave for all $t > t_0$, where t_0 is a real number depending on P.

Proof. Let $u(t) = P(e^t)$. Since $P(x) > 0$ for large enough x, $u(t)$ is defined for large enough t. We have $q(t) = \ln P(e^t)$, and $q'(t) = \frac{u'(t)}{u(t)} = \frac{e^t P'(e^t)}{P(e^t)}$ is a ratio of two polynomials in e^t. It follow that $q''(t)$ is also such a ratio. If the polynomial in the numerator has finitely many roots (that is, if it is not identically zero), then for all t greater than some t_0 the function $q''(t)$ has constant sign (for t_0 we can take the logarithm of the greatest positive root of the numerator and the denominator, or any positive number if there are no such roots). If $q''(t) > 0$ for all $t > t_0$ then $q(t)$ is convex for all $t > t_0$, otherwise it is concave.

It remains to determine when $q''(t)$ is identically zero for all large enough t. In this case $q'(t)$ is constant: $q'(t) = C$, and $q(t) = Ct + D$ for some constant C and D. Returning to the polynomial $P(x)$ we find that $P(x) = Ax^C$ for all large enough x, where $A = e^D$. The exponent C cannot be negative (otherwise $P(x)$ tends to zero as x tends to infinity), and if $n < C < n+1$ for some non-negative integer n, then for large enough x the polynomial $P(x)$ is greater than any polynomial of degree not exceeding n, and less than any polynomial of degree at least $n+1$, that is, it cannot be a polynomial. The lemma is proved.

Not let $P(x)$ is a polynomial not of the form ax^n satisfying the condition. By the Lemma, the function $\ln P(e^t)$ is convex for all $t > t_0$ or concave for all $t > t_0$. Then four distinct numbers a, b, c, d greater than $x_0 = e^{t_0}$ and satisfying $ab = cd$ cannot satisfy $P(a)P(b) = P(c)P(d)$. Indeed, let $a = e^{a_0}$, $b = e^{b_0}$, $c = e^{c_0}$, $d = e^{d_0}$. We have $a_0 + b_0 = c_0 + d_0$, and, on the other hand, $u(a_0)u(b_0) = u(c_0)u(d_0)$, that is, $q(a_0) + q(b_0) = q(c_0) + q(d_0)$. Thus the midpoints of the chords of the graph of $q(t)$ connecting $(a_0, q(a_0))$ with $(b_0, q(b_0))$ and $(c_0, q(c_0))$ with $(d_0, q(d_0))$ coincide, a contradiction with convexity (or concavity) of $q(t)$.