XVIII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Десет години републички натпревари по математика ‘86-‘95
подготвена од Илија Јанев, Никола Петрески и Милчо Аврамоски

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Најди најмал природен број n со кој треба да се помножи бројот 2520 за да се добие квадрат на природен број.

2. Една третина од вкупната количина на некоја стока е продадена со 10% заработувачка, а половината од истата стока е продадена со загуба од 15%. За колку проценти треба да се зголеми цената на преостанатата стока, за да се надополни загубата?

3. Над страните на еден произволен триаголник ABC конструирани се, надвор од него, рамностраните триаголници ABC_1, BCA_1 и ACB_1. Докажи дека $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1}$.

4. Во внатрешноста на еден паралелограм $ABCD$ означена е произволна точка M. Докажи дека збирот од плоштините на триаголниците ABM и CDM е еднаков на збирот од плоштините на триаголниците BCM и DAM.

5. Најди ги аглите на триаголникот ABC, ако центарот V на неговата впишана кружница и центарот O на неговата опишана кружница се симетрични во однос на страната AB.

XVIII (93.VII.1)

За еден природен број да биде точен квадрат, потребно е сите негови прости делители да бидат степенувани со парен показател. Бидејќи:

$$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

заклучуваме дека бројот 2520 треба да го помножиме со бројот $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ и тогаш добиваме:

$$2520 \cdot 70 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 420^2$$

Можеме да заклучуваме и вака:

$$2520 \cdot n = k^2, \qquad n, k \in \mathbb{N}$$

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot n = k^2, \quad 2^2 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot n = k^2$$

а оттука: $n = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70.$

XVIII (93.VII.2)

Бидејќи од стоката се продадени $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, значи преостанала уште $\frac{1}{6}$. Да го означиме со x процентот со кој треба да се зголеми цената на оваа $\frac{1}{6}$ од стоката. Притоа, заработувачката треба да биде еднаква на загубата, па имаме:

$$\frac{1}{3}10\% + \frac{1}{6}x\% = \frac{1}{2} \cdot 15\%$$

$$\frac{1}{3}\frac{10}{100} + \frac{1}{6}\frac{x}{100} = \frac{1}{2}\frac{15}{100}$$

$$\frac{x}{600} = \frac{15}{200} - \frac{10}{300}$$

$$\frac{x}{600} = \frac{25}{600}; \qquad x = 25$$

Значи, цената на преостанатата шестина од стоката треба да се зголеми за 25%.

XVIII (93.VII.3)

Нека однадвор над страните на ΔABC се конструирани рамностраните триаголници AC_1B, BA_1C и CB_1A (црт. 1). Треба да докажеме дека $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1}$. За таа цел ќе докажеме дека триаголниците AA_1C и B_1BC се складни. Очигледно:

1) $\overline{AC} = \overline{B_1C}$

2) $\overline{A_1C} = \overline{BC}$

3) $\measuredangle ACA_1 = \measuredangle ACB + 60° = \measuredangle B_1CB$

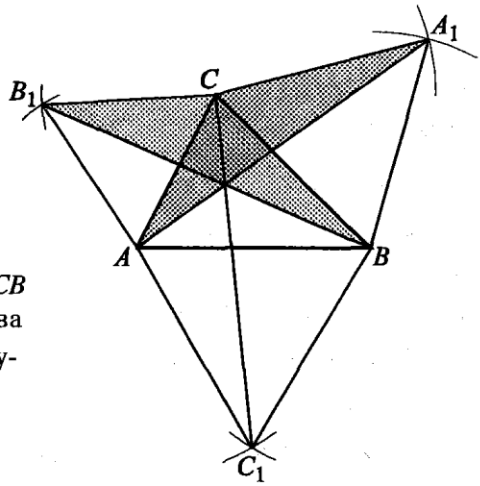
па според признакот САС следува дека $\Delta AA_1C \cong \Delta B_1BC$. Оттука заклучуваме дека:

(1) $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$

На сличен начин, од складноста на триаголниците AC_1C и ABB_1 заклучуваме дека:

(2) $\overline{BB_1} = \overline{CC_1}$

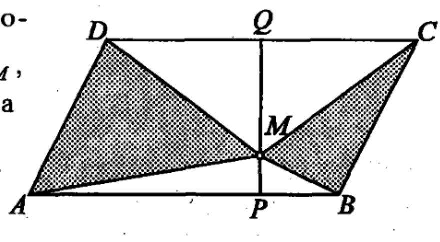
Од (1) и (2) следува: $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1}$.



Црт. 1

XVIII (93.VII.4)

Нека M е внатрешна точка во паралелограмот $ABCD$, и нека $h_1 = \overline{MP}$, $h_2 = \overline{MQ}$ и $PQ \perp AB$ (црт. 2). За да докажеме дека $P_{ABM} + P_{CDM} = P_{BCM} + P_{ADM}$, доволно е да докажеме дека $P_{ABM} + P_{CDM} = \frac{1}{2}P$, каде што P е плоштината на паралелограмот $ABCD$. Ако ставиме $\overline{AB} = a$, добиваме:



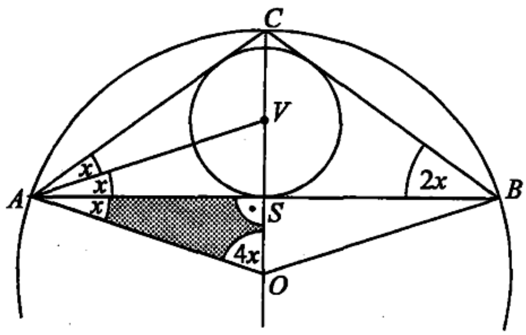
Црт. 2

$$P_{ABM} + P_{CDM} = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 = \frac{1}{2}a(h_1 + h) = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}P,$$

бидејќи $h_1 + h_2 = h$, а $P = ah$.

XVIII (93.VII.5)

Прв начин. Ако центарот V на впишаната кружница и центарот O на опишаната кружница на ΔABC се симетрични во однос на страната AB, тоа значи дека симетралата на AB е воедно и симетрала на аголот кај темето C, т.е. ΔABC е рамнокрак (црт.3).



Црт. 3

Нека $\alpha = \beta = 2x$.

Очигледно, $\Delta ASV \cong \Delta ASO$, па оттука следува дека

$$\measuredangle SAV = \measuredangle SAO = \frac{\alpha}{2} = x \ .$$

Понатаму $\measuredangle AOC = 4x$, како централен агол над тетивата AC, чиј периферен агол $\beta = 2x$. Бидејќи ΔASO е правоаголен, следува дека $x + 4x = 90°$, од каде што $x = 18°$.

Следствено, аглите во ΔABC се: $36°, 36°$ и $108°$.

Втор начин. Од симетричноста на O и V во однос на AB и условот $\overline{OA} = \overline{OB}$, следува и $\overline{VA} = \overline{VB}$, т.е. ΔABV е рамнокрак, па следува $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$, т.е. $\alpha = \beta$. Но тоа значи дека и ΔOVA е рамнокрак $(\overline{OA} = \overline{VA})$, па следува дека $\measuredangle OAS = \frac{\alpha}{2}$. Значи , аголот OAC е поделен на три еднакви дела. Од друга страна и ΔACO е рамнокрак $(\overline{OA} = \overline{OC})$, па следува дека $\measuredangle OAC = \measuredangle OCA$, т.е. $\frac{3}{2}\alpha = \frac{\gamma}{2}$, $3\alpha = \gamma$. Тогаш за аглите во ΔABC имаме:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$\alpha + \alpha + 3\alpha = 180°$$
$$5\alpha = 180°; \quad \alpha = 36°, \quad \beta = 36°, \quad \gamma = 108°$$

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Збирот на цифрите на четирицифрениот број $\overline{abba}$ е 24. Бројот што го образуваат последните две цифри е за 36 поголем од бројот што го образуваат првите две цифри. Одреди го тој четирицифрен број.

2. Билјана потрошила извесна сума пари за да купи тетратка, молив и гума. Кога кажала каде ги купила, татко ѝ рекол: "Има продавница каде што тетратката е 2 пати поевтина, моливот 4 пати поевтин, а гумата 3 пати поевтина и така ќе потрошеше 24 денари". Мајката рекла: "Јас знам продавница каде што тетратката е 5 пати поевтина, моливот 2 пати поевтин, а гумата 2,5 пати поевтина и така Билјана ќе потрошеше само 16 денари". Колку денари потрошила Билјана ?

3. Дали може секоја цена на стока што е изразена во цел број денари и е поголема од 7 денари да се плати со парични бонови од 3 денари и 5 денари? Образложи!

4. Триаголникот ABC е зададен со страните $\overline{AB} = 6\,cm$, $\overline{BC} = 3\,cm$ и аголот $\beta = 120°$. Пресметај ја должината BB_1 на симетралата на аголот β.

5. Впишаната кружница во правоаголниот триаголник ABC ја допира хипотенузата AB во точката M. Ако $\overline{AM} = m$, а $\overline{BM} = n$, тогаш плоштината на триаголникот ABC е еднаква на $m \cdot n$. Докажи!

XVIII (93.VIII.1)

Од условот збирот на цифрите на бројот $\overline{abba}$ да е 24 добиваме $a+b+b+a=24$, т.е. $a+b=12$.

Од вториот услов на задачата имаме:

$$\overline{ab}+36=\overline{ba} \Leftrightarrow 10a+b+36=10b+a \Leftrightarrow$$
$$9a+36=9b \Leftrightarrow \quad b-a=4.$$

Решавајќи го системот равенки $\begin{cases} b+a=12 \\ b-a=4 \end{cases}$ наоѓаме $a=4, b=8$.

Значи, четирицифрениот број е 4884.

XVIII (93.VIII.2)

Нека тетратката чини x денари, моливот y денари, а гумата z денари. Се бара збирот $x+y+z$. Според условите имаме:

$$\begin{array}{lcl} \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=24 & & 6x+3y+4z=288 \\ & \text{т.е.} & \\ \frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2,5}=16 & & 2x+5y+4z=160 \end{array}$$

Ако ги собереме последните две равенки добиваме:

$$8x+8y+8z=448, \quad 8(x+y+z)=448,$$

од каде што: $x+y+z=56$.

Значи, Билјана потрошила 56 денари.

Забележувате дека го одредивме збирот $x+y+z$, без посебно да ги одредиме собироците x, y и z.

XVIII (93.VIII.3)

Тврдењето во задачата се сведува на тоа да докажеме дека секој природен број n поголем од 7 може да се запише во видот $3x+5y$, каде што $x,y\in\mathbb{N}_0$.

Секој природен број n поголем од 7 може да се запише во видот:

$$n=3k \quad \text{или} \quad n=3k+1 \quad \text{или} \quad n=3k+2.$$

1) Ако $n=3k$, тогаш $n=3\cdot k+0\cdot 5$. Во овој случај $x=k,\ y=0$, т.е. исплатата се врши само со бонови од 3 денари.

2) Ако $n=3k+1$, тогаш $n=3k-9+10=3\cdot(k-3)+2\cdot 5$. Во овој случај $x=k-3,\ \ y=2$.

3) Ако $n=3k+2$, тогаш $n=3k-3+5=3(k-1)+1\cdot 5$; тука $x=k-1$, $y=1$.

Покажавме дека секоја цена изразена со природен број поголем од 7 може да се исплати само со парични бонови од 3 денари и 5 денари.

Може ли да заклучуваме и поинаку? Да ја користиме деливоста со 5, т.е. секој природен број n да го запишеме во еден од видовите: $5k,\ \ 5k+1,\ 5k+2,\ \ 5k+3$ или $5k+4$. Во тој случај треба да разгледаме пет можности. На пример:

$$n=5k+2=5k-10+12=5(k-2)+3\cdot 4 \text{ итн.}$$

Можеме и вака да резонираме. Доволно е да провериме дали тврдењето е точно за $n\in\{8,9...,15\}$. Имаме:

$$8=1\cdot 3+1\cdot 5,\ \ 9=3\cdot 3+0\cdot 5,\ \ 10=0\cdot 3+2\cdot 5,\ \ 11=2\cdot 3+1\cdot 5,$$
$$12=4\cdot 3+0\cdot 5,\ \ 13=1\cdot 3+2\cdot 5,\ \ 14=3\cdot 3+1\cdot 5,\ \ 15=5\cdot 3+0\cdot 5.$$

Наредните осум природни броја, од 16 до 23 ги запишуваме вака:

$$16=8+8,\ \ 17=8+9,...,\ \ \ 23=8+15$$

па заклучуваме дека секој од нив може да се претстави во видот $3x+5y$, бидејќи така можат да се претставаат двата нивни собироци. На сличен начин заклучуваме дека тврдењето важи и за наредните осум природни броја, од 24 до 31, потоа и за наредните осум итн., т.е. тврдењето важи за секој природен број n поголем од 7.

XVIII (93.VIII.4)

Прв начин. Нека $\overline{BB_1}=x$ е симетрала на аголот $\beta=120°$ на ΔABC (црт. 4). Низ B_1 повлекуваме права $p\| BC$ и нека $p\cap AB=\{D\}$. Бидејќи $\measuredangle DBB_1=60°=\frac{1}{2}120°$ и $\measuredangle BDB_1=\measuredangle MBC=60°$ (агли со заемно паралелни краци), заклучуваме дека ΔDBB_1 е рамностран, т.е. $\overline{DB_1}=x$. Очигледно е дека:

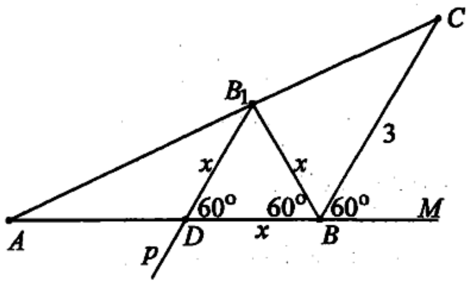
$$\Delta ADB_1\sim\Delta ABC$$

а оттука:

$\overline{AD}:\overline{DB_1}=\overline{AB}:\overline{BC}$ т.е. $(6-x):x=6:3$

од каде што $x=2$. Значи:

$$\overline{BB_1}=2cm.$$



Црт. 4

Втор начин. Нека $\overline{BB_1}=x$ е симетрала на аголот $\beta=120°$ и нека $CD\| B_1B$ (црт. 5). Лесно заклучуваме дека ΔBCD е рамностран и дека:

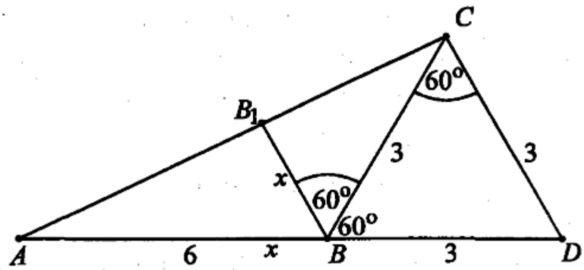
$$\Delta BB_1\sim\Delta ADC,$$

а оттука:

$$\overline{AB}:\overline{BB_1}=\overline{AD}:\overline{DC}$$

$$6:x=(6+3):3$$

т.е. $x=2$. Значи: $\overline{BB_1}=2cm$.



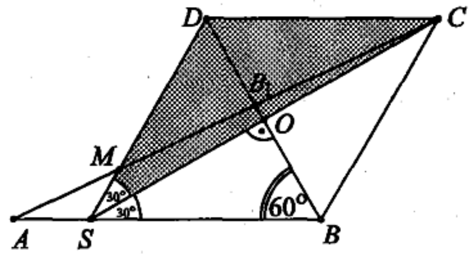
Црт. 5

Трет начин. Нека S е средина на страната AB, тогаш $\overline{BS}=\overline{BC}=3cm$, па следува дека SCB е рамнокрак триаголник (црт. 6). Цртаме точка D симетрична на точката B, во однос на правата SC. На таков начин го добиваме ромбот $SBCD$, чии дијагонали се преполовуваат во точката O. Бидејќи $\measuredangle BCD=30°+30°=60°=\measuredangle BCD$ следува дека триаголниците SBD и BCD се рамнострани, со страни еднакви на 3 cm. Значи, $\overline{BD}=3cm$, а $\overline{OD}=1{,}5cm$. Бидејќи $SM\| BC$, следува дека SM е средна линија во ΔABC, т.е. $\overline{SM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{3}{2}cm$. Но $\overline{SD}=3cm$, па значи M е средина на отсечката SD.

Следствено, отсечката CM е тежишна линија во ΔSCD. Исто така, и DO е тежишна линија во истиот триаголник. Значи, нивниот пресек, точката B_1, е тежиште во ΔSCD, тогаш:

$$\overline{OB_1} = \frac{1}{3}\overline{OD} = \frac{1}{3}\cdot 1,5 = 0,5,$$

$$\overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2}\cdot 3 = 1,5.$$



Црт. 6

Конечно:

$$\overline{BB_1} = \overline{BO} + \overline{OB_1} = 1,5 + 0,5 = 2.$$

Значи: $\overline{BB_1} = 2cm$.

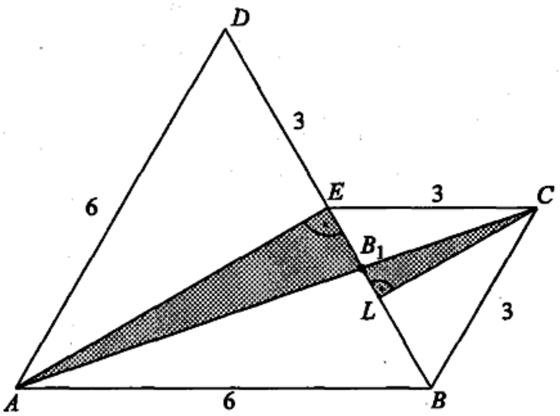
Четврти начин. Бидејќи $\measuredangle ABB_1 = 60° = \measuredangle CBB_1$, конструираме два рамнострани триаголника ABD и BCE со страни 6 cm и 3 cm (црт. 7). Нивните висини се однесуваат како 2 : 1, т.е. $\overline{AE}:\overline{CL} = 2:1$.

Правоаголните триаголници AEB_1 и CLB_1 се слични, па имаме:

$$\overline{AE}:\overline{CL} = \overline{EB_1}:\overline{LB_1}$$

$$2:1 = \overline{EB_1}:\overline{LB_1}$$

Значи: $\overline{LB_1} = \frac{1}{3}\overline{EL} = \frac{1}{3}\overline{BL}$.



Црт. 7

Имајќи предвид дека $\overline{BE} = 3$, добиваме:

$$\overline{BB_1} = \overline{BL} + \overline{LB_1} = \overline{BL} + \frac{1}{3}\overline{BL} = \frac{4}{3}\overline{BL} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{BE} = \frac{2}{3}\overline{BE} = \frac{2}{3}\cdot 3 = 2$$

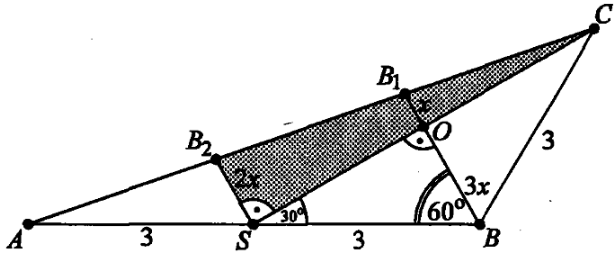
Следователно, $\overline{BB_1} = 2cm$.

Петти начин. Нека S е средина на страната AB, тогаш ΔSCB е рамнокрак (црт. 8), со агол при основата од $30°$. Од правоаголниот триаголник SBO следува:

(1) $$\overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{SB} = \frac{1}{2}\cdot 3 = 1,5$$

(катета наспроти агол од $30°$ е еднаква на половина од хипотенузата). Низ S повлекуваме $SB_2 \| OB_1$. Бидејќи O е средина на отсечката SC, следува дека

$\overline{OB_1} = x$ е средна линија во ΔSCB_2; тогаш $\overline{SB_2} = 2x$. Но, SB_2 е средна линија во ΔABB_1, па следува дека $\overline{BB_1} = 2\overline{SB_1} = 4x$.



Црт. 8

Тогаш:

$\overline{BO} = \overline{BB_1} - \overline{OB_1} = 4x - x = 3x$

Имајќи предвид (1), добиваме:

$$3x = 1{,}5, \quad x = 0{,}5, \quad \overline{BB_1} = 4x = 2.$$

Значи: $\overline{BB_1} = 2cm$.

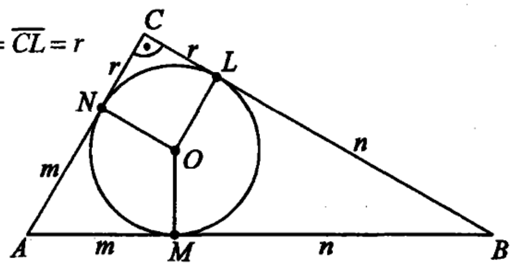
XVIII (93.VIII.5)

Нека впишаната кружница во правоаголникот ΔABC ја допира хипотенузата AB во точката M и нека $\overline{AM} = m, \overline{BM} = n$. Треба да докажеме дека $P=mn$. Очигледно е:

$\overline{AM} = \overline{AN} = m, \quad \overline{BM} = \overline{BL} = n, \quad \overline{CN} = \overline{CL} = r$

Плоштината на правоаголникот ΔABC е:

$$P = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(n+r)(m+r)$$



Црт. 9

(1) $$P = \frac{1}{2}(mn + mr + nr + r^2).$$

Ако ја примениме Питагоровата теорема за ΔABC, ќе добиеме:

$$(m+n)^2 = (n+r)^2 + (m+r)^2$$

$$m^2 + 2mn + n^2 = n^2 + 2nr + r^2 + m^2 + 2mr + r^2$$

$$2mn = 2mr + 2nr + 2r^2$$

(2) $$mn = mr + nr + r^2$$

Заменувајќи (2) во (1) добиваме:

$$P = \frac{1}{2}(mn + mn) = \frac{1}{2}2mn = mn.$$