

Diudžang suanšu — Devet poglavlja umijeća računanja

Franka Miriam Brückler*

Sažetak

Jedno od najpoznatijih djela u povijesti matematike je starokineski tekst *Devet poglavlja*. U ovom članku opisujemo njegov sadržaj i značaj, ali ga i komentiramo iz moderne perspektive.

Ključne riječi: *proporcionalnost, Euklidov algoritam, trojno pravilo, pravokutni trokut, Gaußova metoda eliminacija, korjenovanje, geometrija, linearne jednadžbe, povijest matematike, kineska matematika*

Jiuzhang suanshu — Nine Chapters on the Art of Calculation

Abstract

One of the most famous texts in the history of mathematics is the ancient Chinese *Nine chapters*. In this article we describe its contents and impact, but also comment it from a contemporary perspective.

Keywords: *proportionality, Euclid's algorithm, rule of three, right triangle, Gauß eliminations, roots, geometry, linear equations, history of mathematics, Chinese mathematics*

*Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: bruckler@math.hr

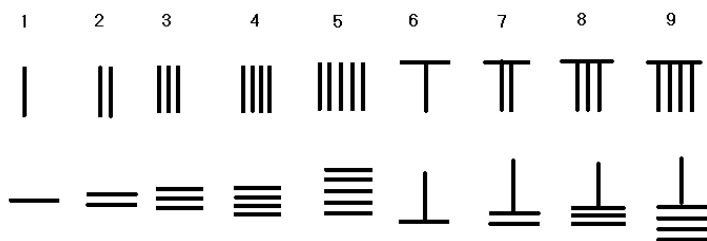
1 Uvod

U prošlom smo broju spominjali kako su stari Kinezi računali površinu i opseg kruga. Pritom smo kao jedan od najvažnijih starih kineskih matematičkih tekstova spomenuli *Devet poglavlja umijeća računanja* (prema pomoćnom kineskom latiničnom alfabetu pinjin, izvorni naslov se transkribira na hrvatski kao *Diudžang suanšu*).¹ U ovom ćemo broju reći više o sadržaju tog znamenitog djela iz povijesti matematike.

Devet poglavlja je anonimna kompilacija starijih rezultata nastala u doba dinastije Han, dakle negdje između 200. g. pr. Kr. i 300. g. n. e. [6]. Slično kao i kod staroegipatskog Rhindovog i Moskovskog papirusa, radi se o zbirci zadataka namijenjenoj obrazovanju za razne struke, odnosno tekst je praktične orijentacije. Ukupno sadrži 246 zadataka raspoređenih u 9 poglavlja, a za razliku od spomenutih papirusa daju se i opća pravila rješavanja, iako bez dokaza. Naslovi poglavlja su, u slobodnom prijevodu, redom „Mjerenje polja“, „Proso i riža“, „Raspodjela po proporciji“, „Koja širina?“, „Rasprave o radu“, „Pošteni prijenosi“, „Višak i manjak“, „Pravokutne tablice“ te „Pravokutni trokuti“ [5]. U nastavku ćemo malo detaljnije opisati sadržaj pojedinih poglavlja.

Prije toga spomenimo da iako se radi o vrlo starom djelu, brojevni sustav korišten u *Devet poglavlja* je poprilično moderan. Naime, stari Kinezi su već u davna vremena (najkasnije u 5. st. pr. Kr.) razvili *pozicijski* dekadski brojevni sustav bez nule (dakle, bez apsolutne pozicije). Brojke tog sustava, koje se koriste u *Devet poglavlja*, poznate su pod nazivom **kineske štapićaste brojke**, a razvile su se iz korištenja štapića kao pomagala u računanju. Znamenke su postojale u dva oblika, horizontalnom i vertikalnom, ovisno o tome radi li se o parnoj ili neparnoj potenciji od 10 (slika 1). Primjerice, | može značiti 1, 100, 10000, ..., dok – može značiti 10, 1000, ... [5, 6]. Ono što danas zapisujemo kao 110101, u starih Kineza bilo bi – ||| (uočite da zbog nedostatka apsolutne pozicije, tj. znamenke nula, isti zapis može predstavljati i, primjerice, 10010001000001, pa čak, ako razmaci među znamenkama nisu jasno naznačeni, može biti i 13).

¹*Suanšu* je kineska riječ za matematiku, ali doslovno znači „umijeće računanja“ [5].



Slika 1. Kineske štapićaste brojke. Izvor: Gisling, Wikipedia, GNU Free Documentation License.

Također, **sustav mjera** je bio (više-manje) decimalni. Spomenimo ovdje samo neke od češće korištenih mjernih jedinica iz doba dinastije Han, a koje susrećemo u *Devet poglavlja* [5]: Osnovna mjera duljine je džang (iznosa otprilike 2.3 m), koji se dijeli na 10 čiova, a svaki či se dijeli na 10 cuna. Često su korištene i jedinice li (1 li = 180 džang) te bu (1 bu = 60 cun):

$$1 \text{ li} = 180 \text{ džang} = 300 \text{ bu} = 1800 \text{ či} = 18000 \text{ cun}.$$

Osnovna mjerna jedinica za površine bio je cing, koji se dijeli na 100 mu, alternativno je 1 cing isto što i 24000 kvadratnih bu:

$$1 \text{ cing} = 100 \text{ mu} = 24000 \text{ kvadratnih bu}.$$

Za volumen osnovna mjerna jedinica je bila hu (iznosa otprilike 20 L), koja se dijelila na 10 doua, a svaki dou se dijelio na 10 šeng:

$$1 \text{ hu} = 10 \text{ dou} = 100 \text{ šeng}.$$

Naposlijetku, osnovna mjerna jedinica za masu bio je đin (1 đin je malo više 200 g), koji se dijelio na 16 lianga, a svaki liang se dijelio na 24 džua:

$$1 \text{ đin} = 16 \text{ liang} = 384 \text{ džua}.$$

2 Mjerenje polja (*Fang tjen*)

U prvom se poglavlju nalazi 38 zadataka, vezanih za izračune površina polja oblika pravokutnika, trokuta, trapeza, krugova, ... Tu nalazimo i pravila za račun s razlomcima i određivanje najvećih zajedničkih djelitelja [5, 6]. Kako smo vidjeli u prošlom broju, izračuni površina krugova ekvivalentni

su lošoj aproksimaciji broja π s 3 [1]. Iz zadataka sa skraćivanjem razlomaka vidljivo je da su Kinezi tog doba poznavali **Euklidov algoritam**, iako zasigurno nisu znali za antičke grčke rezultate:

Primjer 1. *Peti i šesti zadatak u prvom poglavlju glase [4]:²*

„I sad je dan razlomak $\frac{12}{18}$. Reci, što se dobije kad ga se skrati? Odgovor: $\frac{2}{3}$.

A sad je dan drugi razlomak $\frac{49}{91}$. Reci, što se dobije kad ga se skrati? Odgovor: $\frac{7}{13}$.“

Nakon ta dva zadatka, mi bismo rekli primjera, slijedi opća uputa:

„Pravilo za skraćivanje razlomaka: Ako se [brojnik i nazivnik] mogu prepоловити, prepолови ih. Ako ne, zapiši brojnik i nazivnik, oduzmi manji broj od većeg. Ponavlaj postupak da dobiješ par jednakih brojeva.³ Koristi ga da skratiš [razlomak].“

Izuzev zadataka spomenutih u [1], ostali zadaci s izračunima površina su prilično elementarni. Navedimo samo jedan primjer.

Primjer 2. *Zadatak br. 27 glasi [4]:*

„I sad je dano pravokutno trapezno polje s osnovicama 30 bu i 42 bu i visinom 64 bu. Reci, kolika mu je površina? Odgovor: 9 mu 144 (kvadratna) bu.“

Zatim slijedi sličan zadatak pod rednim brojem 28 i onda opet zaključak o općem pravilu za računanje površina pravokutnih trapeznih polja: „Pomnoži pola zbroja osnovica s visinom, ili pola visine sa zbrojem osnovica. Podijeli brojem kvadratnih bu po jednom mu.“

Što se misli pod posljednjim? Naravno, misli se na to da se skupe manje jedinice u veću, kad je moguće. Konkretno, za gore navedeni 27. zadatak izračunalo bi se zbroj osnovica 72 bu, njegova polovina 36 bu, što množenjem s visinom daje površinu 2304 kvadratna bu. No, kako smo rekli u uvodu, 1 mu = 240 kvadratna bu, dakle dijeljenjem ($2304 : 240 = 9$ i ostatak 144) dobivamo rješenje u navedenom obliku.

Kao što vidimo, iako matematičkih formula u to doba u Kini (zapravo nigdje) nije bilo, pravila za računanje površina iskazana su u formulacijama ekvivalentnim suvremenim formulama.

3 Proso i riža (*Su mi*)

U ovom poglavlju nalazimo 46 zadataka vezane za razmjenu raznih plodova i žitarica, koji se rješavaju koristeći **trojno pravilo** [6]. Poglavlje za-

²Svi prijevodi prate izvornik, ali su prilagođeni duhu hrvatskog jezika.

³Taj par jednakih brojeva je najveći zajednički djelitelj, tj. zadnji broj u Euklidovom algoritmu.

počinje tablicom ekvivalenata raznih tipova prosa, riže,⁴ pšenice, ječma i graha, nakon čega je izrečeno pravilo *đin jou* (doslovno: „I sad je dano“, što je — možda ste već primijetili — bio standardni uvodni tekst u zadatke): „Pomnoži ekvivalentnu vrijednost onog što se traži s onim što je dano da dobiješ djeljenik. Neka je ekvivalentna vrijednost danoga djelitelj. Podijeli djeljenik s djeliteljem.“ Ovo je, čini se, najstariji poznati zapis trojnog pravila, koje danas iskazujemo ovako: Ako je $a : b = x : d$, onda je $x = a \cdot \frac{d}{b}$. Slijedi 31 zadatak koji se rješavaju koristeći navedenu tablicu i pravilo [2].

Primjer 3. *Prvi zadatak drugog poglavlja glasi [2]: „I sad je dan 1 dou prosa koje se želi razmijeniti za grubu rižu. Nađi dobivenu količinu. Odgovor kaže: 6 šenga grube riže.“*

Kako je to dobiveno? U tablici je navedeno da je standardna ekvivalentna vrijednost 50 za proso i 30 za grubu rižu, odnosno 50 volumnih jedinica prosa vrijedi jednako kao 30 istih volumnih jedinica grube riže. Mi bismo pisali:

$$V_P : 50 = V_{G.R.} : 30.$$

Dakle, da dobijemo traženi volumen grube riže treba podijeliti $30 : 50 = \frac{3}{5}$ i to pomnožiti s danim volumenom prosa, odnosno ekvivalent 1 dou prosa je $\frac{3}{5}$ dou grube riže. Budući da je desetina jednog doua jedan šang, vidimo da se stvarno dobilo traženo rješenje.

Nakon zadatka ovog tipa, slijedi 15 zadataka vezanih za razmjenu novca za dobra, za koje je specijalni slučaj trojnog pravila naveden ovako: „Neka je ekvivalentna vrijednost kupljene količine djelitelj, a potrošeni novac djeljenik. Podijeli djeljenik s djeliteljem da dobiješ cijenu jednog komada“ [2]. Kao primjer dajemo sljedeći zadatak.

Primjer 4. *Zadatak pod rednim brojem 34 glasi [2, 5]: „I sad je dano 5785 ciana potrošenih na kupnju 1 hu 6 dou $7\frac{2}{3}$ šenga boje. Žele se koristiti ekvivalentne vrijednosti u douima. Nađi cijenu jednog doua. Odgovor kaže: Jedan dou košta $345\frac{15}{503}$ ciana.“*

U skladu s definicijama mjernih jedinica volumena iz uvoda, volumen boje izražen u douima je $16\frac{23}{30}$ dou. Stoga je cijena jednog doua boje $5785 : 16\frac{23}{30}$, tj. $345\frac{15}{503}$ ciana.

4 Raspodjela po proporciji (*Cui fen*)

Zadaci, njih 20, u ovom poglavlju tiču se raspodjele novca i drugih dobara [2, 6]. Posebno, ovdje susrećemo direktnu i obrnutu **proporcionalnost**, ali

⁴U doba kad su nastala *Devet poglavlja*, poljoprivreda je bila glavni izvor bogatstva. Najraširenija žitarica bio je proso, dok je riža bila relativno skuplje jelo bogatijih slojeva [5].

i aritmetičke i geometrijske nizove [5]. Kao i u drugom poglavlju, i ovdje se glavna metoda, izražena slično kao ondje trojno pravilo, nalazi na početku, a zatim se primjenjuje u zadacima. Navedimo prvi od njih [2]:

Primjer 5. „I sad je tu bilo pet osoba, Dai Fu, Bu Geng, Dzan Niao, Šang Zao i Gong Ši, koji su otišli u lov i ukupno ulovili pet jelena. Želili su rasporediti u skladu s njihovim redosljedom. Nađi koliko je tko dobio.”

Dakle, traži se da 5 jelena rasporedimo u produženom omjeru $5 : 4 : 3 : 2 : 1$.

„Odgovor kaže: Dai Fu je dobio $1\frac{2}{3}$ jelena, Bu Geng je dobio $1\frac{1}{3}$ jelena, Dzan Niao je dobio 1 jelena, Šang Zao je dobio $\frac{2}{3}$ jelena, Gong Ši je dobio $\frac{1}{3}$ jelena.

Metoda kaže: Zapiši brojeve prema redosljedu, pri čemu je svaki proporcionalni udio. Udvostruči ih i zbroji da dobiješ djelitelj. Pomnoži svaki koji nije pribrojen s brojem jelena i neka je svaki takav umnožak djeljenik. Podijeli djeljenik s djeliteljem da dobiješ količinu jelena koju dobije jedna osoba.”

Iako suvremenom čitatelju neobično formulirana uputa, nije ju teško modernije formulirati: Djeljenik za svakog će biti $2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 30$ jer je zadan produženi omjer $5 : 4 : 3 : 2 : 1$. Za svakog pojedinačno, djeljenik je ukupni broj jelena 5 pomnožen s njegovim članom u prethodnom zbroju. Recimo, za drugog je djeljenik $5 \cdot (4 \cdot 2) = 40$ pa je njegova količina jelena $\frac{40}{30} = 1\frac{1}{3}$.

Nakon prvih 7 zadataka koji kao gore koriste „rastuću” proporcionalnost, slijede njih 2 vezani za „padajuću” proporcionalnost, a nakon tog 11 zadataka u kojima se koristi trojno pravilo za razne varijante raspodjela.

Primjer 6. Jedan od zadataka u ovom poglavlju glasi [5]: „I sad je tu 1 đin svile koji košta 240 novčića. Reci: Ako je dano 1328 novčića, koliko đina svile je dobiveno?”

Rješenje prepuštamo čitatelju.

5 Koja širina? (Šao guang)

Ovo poglavlje sadrži 24 geometrijska zadatka. Većinom se radi o određivanju stranice kvadrata poznate površine ili brida kocke poznatog volumena. Stoga ovdje nalazimo i iracionalne brojeve, točnije kvadratne i kubne korijene [6]. Zbog numeričkih metoda **korjenovanja** ovo je poglavlje jedno od dva najzanimljivija iz moderne perspektive.

Prvih 11 zadataka tiču se pravokutnih polja površine 1 mu kojima je duljina jedne stranice zadana kao $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ bu, a treba odrediti duljinu druge stranice. Postupak je očigledan, iako malo netipično formuliran (kao množenje 240 (kvadratnih) bu, što je naravno 1 mu, sa zajedničkim nazivnikom dane sume, mi bismo rekli s najmanjim zajedničkim višekratnikom

svih nazivnika, pa dijeljenjem s brojnikom koji se izračunava tako da za svaki $\frac{1}{k}$ pribrojimo najmanji zajednički višekratnik podijeljen k). Ono što je iz ovih zadataka očito je da su stari Kinezi znali odrediti **najmanji zajednički višekratnik** brojeva u skupu tipa $\{1, 2, \dots, n\}$. Primjerice, u 10. zadatku gdje je duljina stranice $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{11}$ kao „množitelj površine“ ne uzima se $11!$, već 27720 [2].

Nakon toga slijede zadaci s izračunavanjem duljine stranice kvadrata poznate površine, tj. računanja \sqrt{x} za dani x . Opća metoda, naziva *kai fang*, navedena je nakon 16. zadatka. Iako je u samom tekstu vrlo kratka, zbog podrazumijevanja poznavanja računa sa štapićima, a i nekih drugih specifičnosti, nema ju smisla dati u prijevodu. Puno objašnjenje je također prilično dugo, no objasniti ćemo ju u obliku prilagođenom suvremenim brojkama na primjeru u kojem je \sqrt{x} prirodan broj (iako je metoda dana i za slučajeve kad je razlomak) [2, 3].

Primjer 7. 12. zadatak u ovom poglavlju glasi [2]: „I sad je dana površina 55225 [kvadratnih] bu. Nađi stranicu kvadrata.“

Postupak za izračun $\sqrt{55225}$ (odnosno, najvećeg cijelog od traženog korijena) je iterativan, određuje se znamenka po znamenka. Prvo se utvrdi broj znamenki koje treba odrediti. Budući da je $100^2 < 55225 < 1000^2$, zaključujemo da je $\sqrt{55225}$ troznamenasti broj (abc) , tj.

$$\begin{aligned} 55225 &= (100a + 10b + c)^2 = 10000a^2 + 100(20a + b)b + (20(10a + b) + c)c \\ &= 10000a^2 + \dots \end{aligned}$$

Isprobavanjem $a = 1, 2, \dots$ utvrđujemo da je $a = 2$, jer bi za $a = 3$ desni izraz bio prevelik. Uvrstimo $a = 2$ pa dobijemo

$$15225 = 100(40 + b)b + (20(20 + b) + c)c = 100(40 + b)b + \dots$$

Opet, isprobavanjem $b = 1, 2, \dots$ zaključujemo da je druga znamenka $b = 3$. Uvrstimo pa preostane

$$2325 = (460 + c)c.$$

Isprobavanje daje $c = 5$ pa zaključujemo da je $\sqrt{55225} = 235$, odnosno da je rješenje zadatka 235 bu.

Zadaci s rednim brojevima 17. i 18. tiču se određivanja opsega kruga poznate površine (s tim da se pretpostavlja da je opseg trostruki promjer, kako je opisano u [1]), a zatim slijede četiri zadataka određivanja duljine brida kocke poznatog volumena i dva zadatka nalaženja promjera kugle pozna-

tog volumena,⁵ tj. računanja kubnih korijena. Metodu nećemo opisivati, ali radi se o sličnoj metodi kao onoj za kvadratne korijene [2].

6 Rasprave o radu (Šang gong)

U ovom poglavlju nalazi se 28 zadataka koji pomažu u vrednovanju radnih učinaka. Stoga ovdje nalazimo razne probleme vezane za izračune volumena (kvadara, piramida, valjaka, stožaca, krnjih piramida, krnjih stožaca, klinova, ...) [6]. Kao primjere dajemo sljedeća dva.

Primjer 8. 15. zadatak glasi [2]: „I sad je dana piramida s pravokutnom osnovkom, širine 5 čija, dubine 7 čija i visine 8 čija. Nađi njen volumen.”

Odgovor je $93\frac{2}{3}$ čija (očigledno se misli na kubični), a uputa je doslovno kao moderna formula: „Pomnoži širinu i dubinu pa pomnoži s visinom. Podijeli s 3.”

Primjer 9. 18. zadatak glasi [2]: „I sad je dan klin s pravokutnom osnovkom, donja širina 3 džanga, donja dubine 4 džanga; gornja dubina 2 džanga, nema širine; visina je 1 džang. Nađi njen volumen.”

Odgovor je 5000 čija (opet naravno kubični), a uputa je: „Udvostruči donju dubinu, dodaj joj gornju dubinu, pomnoži sa širinom pa s visinom. Podijeli sa 6.”

Zanimljivo zadatak za Vas, suvremenog čitatelja, je skicirati klin o kojem se radi!

7 Pošteni prijenosi (Dzun šu)

Zadaci, njih 28, u ovom poglavlju posebno puno otkrivaju o socijalnim i ekonomskim odnosima u staroj Kini. Što se matematičkih metoda tiče, ovo poglavlje ne sadrži nikoje novo opće pravilo, ali svaki zadatak je zaključen s pripadnim konkretnim pravilom, slično kao što smo vidjeli u prvom poglavlju. S druge strane, tipovi zadataka su vrlo raznoliki i dotiču se raznih aspekata svakodnevnog života, posebice raznih vrsta poreza. Posebno kompliciran je četvrti zadatak [2]:

Primjer 10. „I sad imamo pošteno oporezivanje transporta prosa između četiri okruga. Okrug A, 8 dana od poreznog ureda, ima 10000 kućanstava. Okrug B, 10 dana od poreznog ureda, ima 9500 kućanstava. Okrug C, 13 dana od poreznog ureda, ima 12350 kućanstava, Okrug D, 20 dana od poreznog ureda, ima 12200 kućanstava. Ukupna količina oporezivog prosa je 250000 hu i za to treba 10000 kola. Pretpostavi da se porez treba rasporediti u skladu s udaljenosti od ureda i

⁵Pretpostavlja se da se volumen kocke prema volumenu upisane kugle odnose kao 16 : 9, što opet odgovara aproksimaciji π s 3.

brojem kućanstava. Reci: Koliko prosa treba prevesti koji okrug? Koliko kola svaki okrug treba koristiti?

Odgovor: Okrug A 83100 hu prosa u 3324 kola. Okrug B 63175 hu prosa u 2527 kola. Okrug C 63175 hu prosa u 2527 kola. Okrug D 40550 hu prosa u 1622 kola."

Možete li temeljem rješenja sami otkriti kako je ovdje matematički interpretiran uvjet „rasporediti u skladu s udaljenosti od ureda i brojem kućanstava”?

Neki zadaci tiču se relativnog odnosa udaljenosti i brzina. Kao ljubiteljica pataka, za primjer dajem jedan zadatak s patkom.

Primjer 11. Dvadeseti zadatak glasi [2]: „I sad ima divlja patka kojoj treba 7 dana da od južnih mora doleti do sjevernih. Divljoj guski treba 9 dana da od sjevernih mora doleti do južnih. Sad, ako divlja patka i divlja guska krenu u istom trenutku, nađi broj dana dok se ne sretnu.

Odgovor: $3\frac{15}{16}$ dana.

Metoda kaže: Zbroji dane da dobiješ djelitelj. Pomnoži dane da dobiješ djeljenik. Podijeli djeljenik s djeliteljem da dobiješ broj dana."

Kako bismo danas provjerili da se radi o korektnom pravilu? Dane su brzine divlje patke i guske ($v_P = \frac{d}{7}$, $v_G = \frac{d}{9}$, gdje je d udaljenost koju obje prevaljuju). Očito se podrazumijevaju konstantne brzine, tj. jednoliko gibanje. Dakle, $d = 7v_P = 9v_G$.

Traži se vrijeme t do susreta. Susrest će se kad je patka preletjela neku udaljenost x , a guska $d - x$. Vrijeme koje patki treba za prijeći udaljenost x je $\frac{x}{v_P}$, a guski za $d - x$ treba $\frac{d-x}{v_G}$. Dakle, $\frac{x}{\frac{d}{7}} = \frac{d-x}{\frac{d}{9}}$, odnosno $7x = 9(d - x)$, dakle $x = \frac{9}{16}d$ pa je $t = \frac{9 \cdot 7}{9+7}$ dana.

8 Višak i manjak (Jing bu zu)

Ovdje nalazimo rješavanje linearnih jednadžbi koristeći metodu poznatu puno kasnije u Europi pod nazivom *regula falsi* [6]. U *Devet poglavlja* ona se naziva „pravilo od previše i nedovoljno” (nazovimo to metodom viška i manjka), a ono se temelji na računskim postupcima kod zbrajanja razlomaka (i potencijalno na konfucijanizmu u kojem se traži uravnotežavanje jina i janga) [5]. Poglavlje sadrži ukupno 20 zadataka. Prvih 8 zadataka su vezani za određivanje viška i manjka, evo jednog [2]:

Primjer 12. „I sad neki broj ljudi kupuje zlato. Ako svaki plati po 400 ostaje višak 3400, a ako svaki plati 300, višak je 100. Nađi broj ljudi i cijenu zlata."

Broj ljudi se dobije tako da razliku viškova podijelimo s razlikom uplata po osobi: $(3400 - 100) : (400 - 300) = 33$. Cijena zlata je onda broj ljudi pomnožen s

jednom od njihovih uplata i zatim oduzetim odgovarajućim viškom: $33 \cdot 400 - 3400 = 9800$.

Slijede zadaci koji koriste metodu viška i manjka, tj. *regula falsi*, koju ćemo opisati na primjeru 19. zadatka iz ovog poglavlja [2].

Primjer 13. „A sad imamo dobrog konja i lošeg konja koji kreću iz Čang'ana za Ci. Od Cia do Čang'ana ima 3000 li. Dobri konj prijeđe 193 li prvi dan i dalje svaki dan po 13 li više. Loši konj prijeđe 97 li prvi dan i dalje svaki dan po $\frac{1}{2}$ li manje. Dobri konj stiže u Ci, te se okrene i pri povratku sretno lošeg konja. Nađi broj dana dok se ne susretnu te koliko su dotad prešli svaki od njih.”

Pretpostave se dva različita broja dana, konkretno su u tekstu uzeti 15 i 16, pa se izračunaju odgovarajući viškovi i manjkovi (prijeđene udaljenosti).

Da je do susreta trebalo 15 dana, dobri konj bi prešao $193 + (193 + 13) + (193 + 2 \cdot 13) + \dots + (193 + 14 \cdot 13) = 4260$ li (dakle, došao je do Cija i pri povratku prešao 1260 li), a loši konj bi prešao $97 + (97 - \frac{1}{2}) + (97 - 2 \cdot \frac{1}{2}) + \dots + (97 - 14 \cdot \frac{1}{2}) = 1402\frac{1}{2}$ li. Budući da je $1260 + 1402\frac{1}{2} = 3000 - 333\frac{1}{2}$, vidimo da za 15 dana imamo manjak $337\frac{1}{2}$ li (dakle, 15 dana nije dovoljno).

Da je do susreta trebalo 16 dana, dobri konj bi prešao $(4260 + 193 + 15 \cdot 13)$ li = 4648 li, a loši konj bi prešao $(1402\frac{1}{2} + 97 - 15 \cdot \frac{1}{2})$ li = 1492 li. Budući da je $1648 + 1492 = 3000 + 140$, vidimo da za 16 dana imamo višak 140 li.

Sad se iskoristi jedna od metoda iz prvih osam zadataka (varijanta za jedan višak i jedan manjak), pa se traženi broj dana dobije kao $\frac{16 \cdot 337\frac{1}{2} + 15 \cdot 140}{337\frac{1}{2} + 140} = 15\frac{135}{191}$. Dotad je dobri konj prešao 4260 li i još $\frac{135}{191}$ od $193 + 15 \cdot 13$ li, dakle $4534\frac{46}{191}$ li. Analogno je loši konj do susreta prešao $1465\frac{45}{191}$ li.

9 Pravokutne tablice (*Fang čeng*)

Iz moderne perspektive ovo poglavlje je najzanimljivije, jer sadrži 18 zadataka sa sustavima linearnih jednadžbi koji se rješavaju metodom fang-čeng, koja je *de facto* **Gaußova metoda eliminacija** [6]. Među sustavima u zadacima ovog poglavlja najveći je sustav s 5 jednadžbi i 6 nepoznanica:

Primjer 14. Zadatak br. 13. glasi [2]: „I sad je tu pet obitelji koje dijele bunar. Za 2 konopa obitelji A treba 1 konop obitelji B da dosegne vodu. Za 3 konopa obitelji B treba 1 konop obitelji C da dosegne vodu. Za 4 konopa obitelji C treba 1 konop obitelji D da dosegne vodu. Za 5 konopa obitelji D treba 1 konop obitelji E da dosegne vodu. Za 6 konopa obitelji E treba 1 konop obitelji A da dosegne vodu. Dakle, svakoj grupi konopa nedostaje jedan iz prethodne grupe. Nađi dubinu bunara i duljine pojedinih konopa.”

Iako problem ima beskonačno mnogo rješenja, u Devet poglavlja je dano samo jedno od njih.

Metoda *fang čeng* znači „kvadratno tabeliranje“. U računima se pojavljuju i **negativni brojevi**, poznati u Kini najkasnije od 2. st. pr. Kr,⁶ te su ovdje objašnjena i pravila za račun s njima.

Osnovna razlika metode *fang čeng* u odnosu na modernu Gaußovu metodu je da se matrica sustava zapisuje transponirano u odnosu na suvremenu. Ilustrirajmo metodu *fang čeng* primjerom iz [5].

Primjer 15. *Iz tri snopa dobrog žita, dva snopa srednjeg i jednog snopa lošeg žita dobije se prinos 39 dou. Iz dva snopa dobrog žita, tri snopa srednjeg i jednog snopa lošeg žita dobije se prinos 34 dou. Iz jednog snopa dobrog žita, dva snopa srednjeg i tri snopa lošeg žita dobije se prinos 26 dou. Koliki je prinos po jednog snopa dobrog, srednjeg i lošeg žita?*

Postupak je sljedeći. Prvo se ispiše pravokutna tablica:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

U prvom koraku se od trostrukog drugog stupca oduzme dvostruki treći, rezultat zapisujemo u drugi stupac:⁷

1		3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

Sad se trostruki prvi stupac oduzme od trećeg, rezultat zapišemo u prvi stupac:

		3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

⁶Nigdje drugo tako davno još nisu bili poznati negativni brojevi. Za njih su se koristili štapići crne boje, dok su se za pozitivne koristili crveni štapići.

⁷U to doba u Kini nula još nije bila poznata, pa se mjesta koja odgovaraju iznosu nula ostavljaju prazna.

Sad se još poništi 4 u prvom stupcu, tako da od peterostrukog prvog stupca oduzemo četverostruki drugi, rezultat pišemo u prvi:

		3
	5	2
36	1	1
99	24	39

Naposljetku očitavamo rješenje, uvrštavanjem „unatrag“. Prvo vidimo da je prinos lošeg žita $\frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$. Stoga je prinos srednjeg žita $(24 - 1 \cdot 2\frac{3}{4}) : 5 = 4\frac{1}{4}$ dou i naposljetku prinos dobrog žita je $(39 - 1 \cdot 2\frac{3}{4} - 2 \cdot 4\frac{1}{4}) : 3 = 9\frac{1}{4}$ dou,

10 Pravokutni trokuti (*Gou gu*)

Zadaci, njih 24, ovog poglavlja rješavaju se koristeći Pitagorin poučak te sličnost. **Pitagorin poučak** se u Kini nazivao pravilom *gou gu*, ali dokaz se u to doba još nije nigdje navodio, nego se kao i primjerice kod Babilonaca radilo o empirijskom pravilu [6]. Pritom, *gou* je naziv za kraću katetu, *gu* je naziv za dulju katetu pravokutnog trokuta, a naziv za hipotenuzu je *sian*. Prva tri zadatka tiču se pravokutnih trokuta s najpoznatijim duljinama stranica, 3, 4 i 5 (zadane su po dvije, a određuje se treća od njih). Daljnji zadaci su raznolikiji ne samo u pogledu duljina stranica, nego i zadanih iznosa (u nekim zadacima se umjesto duljine jedne ili dviju stranica zadaju razlike ili zbrojevi duljina dviju stranica trokuta).

Primjer 16. U 11. zadatku traži se visina i širina vrata za koje je poznato da je visina od širine dulja za 6 čija i 8 cuna te da je razmak nasuprotnih vrhova (dijagonala) duljine 1 džang [2].

Mi bismo danas zadatak zapisali kao $x - y = 68$ cuna i $x^2 + y^2 = 1$ kvadratni džang (što je 10000 kvadratnih cuna), iz čega bismo supstitucijom dobili kvadratnu jednadžbu

$$x^2 + (x - 68)^2 = 10000,$$

$$2x^2 - 136x - 5376 = 0,$$

čije jedino pozitivno rješenje je visina $x = 96$ cuna, tj. 9 čija i 6 cuna, a širina je onda 3 čija i 2 cuna.

Isto rješenje dano je i u Devet poglavlja, ali sa sljedećim objašnjenjem [2]: „Neka je kvadrat od 1 džanga djeljenik. Prepolovi danu razliku, kvadriraj i udvostruči. Oduzmi to od djeljenika i prepolovi rezultat. Kad kvadratni korijen tog broja oduzima pola zadane razlike, dobije se širina vrata, a kad se pribroji polovici zadane razlike, dobije se visina vrata.“ Vidimo dakle da su starokineski matematičari

rješenje ovakvog zadatka sveli na

$$x, y = \sqrt{\frac{d^2}{2} - \frac{(x-y)^2}{4}} \pm \frac{x-y}{2},$$

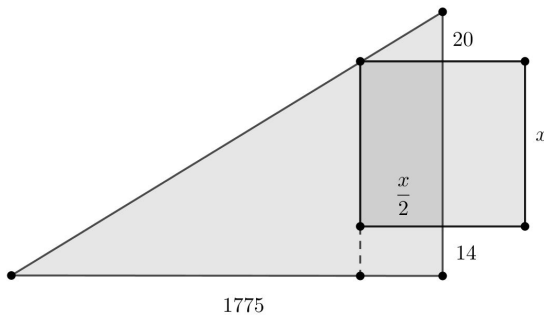
što je naravno ekvivalentno našem gore danom modernom postupku.

Pojavljaju se i zadaci koji koriste **sličnost trokuta**. Među njima se posebno često citira 20. zadatak, jer uključuje rješavanje kvadratne jednadžbe koja nije „čisto“ kvadratna (oblika $x^2 = c$, rješiva direktno korjenovanjem), nego ima i linearni član [2].

Primjer 17. *I sad imamo kvadratni grad opasan zidinama nepoznate veličine s vratima na sredinama svake od četiriju strana. Na udaljenosti 20 bu (sjeverno) od sjevernih vrata raste stablo. To stablo se može vidjeti ako se od južnih vrata hoda na jug 14 bu pa se skrene na zapad i hoda 1775 bu. Treba odrediti duljinu strana kvadratnog grada.*

Metoda uz rješenje (250 bu) kaže da se udvostruči umnožak udaljenosti od sjevernih vrata i puta prema zapadu ($2 \cdot 20 \cdot 1775 = 71000$), to daje ono što danas nazivamo slobodnim članom u jednadžbi. Koeficijent uz linearni član je zbroj pomaka na sjever i jug ($20 + 14 = 34$). Rješavanje takvih jednadžbi (oblika $x^2 + bx = c$ s pozitivnim b i c) opisano je u četvrtom poglavlju, uz metode korjenovanja. Rješenje je, riječima opisano, dano kao $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} - \frac{b}{2}$. Do te jednadžbe najjednostavnije se dođe uočavanjem sličnosti najmanjeg i najvećeg od pravokutni trokuta na slici 2:

$$20 : \frac{x}{2} = (x + 34) : 1775.$$



Slika 2. Skica uz 20. zadatak u 9. poglavlju u *Devet poglavlja*

11 Zaključak

Devet poglavlja nije samo impresivno matematičko djelo za svoje doba, nego zadaci u njemu otkrivaju i mnogo o kineskom životu u doba dinastije Han. No, najvažnije je da je bitno utjecalo na matematiku Dalekog Istoka stoljećima kasnije. Objašnjenja, odnosno opravdanja pravila danih u *Devet poglavlja* dao je u 3. st. n. e. veliki kineski matematičar Liu Hui te su u stoljećima nakon njega *Devet poglavlja* korištena skupa s njegovim komentarima i nadopunama. Kad je, nakon više stoljeća zatišja u razvoju matematike, znanosti i tehnologije kao i političke razdijeljenosti, u 7. st. kineska dinastija Tang provela niz obrazovnih reformi, u njih je uključen i popis „deset matematičkih klasika“ (zapravo ih je bilo 12), službeni popis matematičke literature za poduku na Carskoj akademiji. Jedan od njih je bio i *Devet poglavlja* te je ovo djelo tako zadržalo veliku važnost još puno stoljeća nakon svog nastanka [2, 4, 5, 6, 7]. Za suvremenog nastavnika matematike, ovo je djelo zasigurno zanimljivo. Jedan razlog su nerijetko atraktivne, „egzotične“, formulacije zadataka i težišta na zadacima riječima s praktičnim implikacijama. Drugi razlog je svakako usporedba nastavnih sadržaja: Kako smo vidjeli, *Devet poglavlja*, stara nekih 2 tisuće godina, sadrži mnoge matematičke teme i metode koje se i danas obrađuju u osnovno- i srednjoškolskom gradivu matematike, no postoje i značajne iznimke, među kojima se ističu Gaušova metoda eliminacija, numeričko korjenovanje i metoda *regula falsi* za rješavanje linearnih jednažbi.

Literatura

- [1] Franka Miriam Brückler, *π prije nego se za njega znalo*, Osječki matematički list **21**(2) (2021), 151–161.
- [2] Lam Lay Yong, *Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art): An Overview*, Archive for History of Exact Sciences **47**(1) (1994), 1–51
- [3] Lam Lay Yong, *The Geometrical Basis of the Ancient Chinese Square-Root Method*, Isis **61**(1) (1970), 92–102
- [4] Kangshen Shen, John N. Crossley, Anthony W.-C. Lun, *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary*, Oxford Univ. Press, 1999.

- [5] Randy K. Schwartz, *A Classic from China: The Nine Chapters*. <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/a-classic-from-china-the-nine-chapters-introduction-and-history>, pristupljeno 18. 5. 2022.
- [6] Hans Wußing, *6000 Jahre Mathematik* (Band 1), Springer, 2008.
- [7] MacTutor History of Mathematics Archives: The Ten Mathematical Classics. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Ten_classics/, pristupljeno 20. 5. 2022.