

2004/05

ДИНАМИЧКО РЕЗАЊЕ ТРОУГЛА

Небојша Лазовић, Београд

Будени³ је један од најзначајнијих твораца загонетки и слагалица (puzzle) у Енглеској. Познато је да је своје проблеме размењивао са чувеним америчким творцем загонетки Семјуелом Лојдом⁴. У својој првој књизи THE CANTERBURY PUZZLES AND OTHER CURIOUS PROBLEMS (Кентерберијске загонетке) из 1907. године задао је проблем: разрезати једнакостранични троугао на четири дела од којих се може саставити квадрат. У литератури се често појављује и обрнут проблем: разрезати квадрат на четири дела од који се може саставити једнакостранични троугао. Конструкција у програму за геометријске конструкције Geometer's SketchPad изгледа у корацима овако:

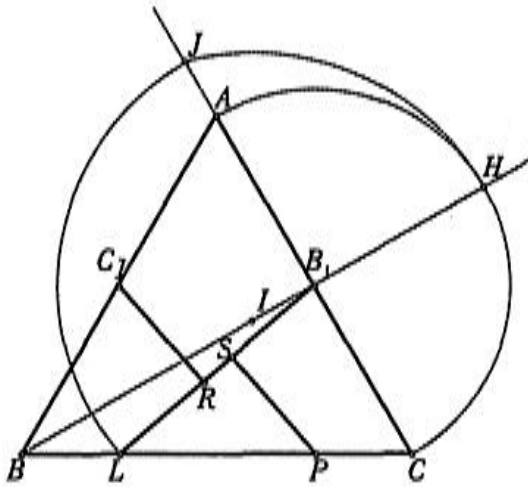
1. Конструира се једнакостранични троугао ABC .
2. Конструира се средишта страница AB и AC , означимо их са B_1 и C_1 .
3. Конструира се полуправа BB_1 .
4. На полуправој BB_1 конструира се тачка H тако да је H пресек полукруга са центром у тачки B_1 и полупречником $\frac{a}{2}$ са оне стране тачке B у односу на B_1 .
5. Конструира се тачка I средиште дужи BH .
6. На правој AC конструира се тачка J као пресек лука са центром у тачки I и полупречником $IH = IB$.
7. Тачка L се добија у пресеку лука са центром у тачки B_1 полупречника B_1J и дужи AB .
8. На дужи LC конструира се тачка P тако да је $LP = \frac{a}{2}$.
9. Из тачака C_1 и P конструира се нормале на дуж B_1L . Пресеке oznaчимо са R и S . Добија се цртеж као на слици 1.
10. $BLRC_1$, PCB_1S , LPS и RB_1AC_1 су делови троугла ABC који подесним преслигањем чине квадрат.

Ако четвороугао $BLRC_1$ ротирамо око тачке C_1 , а четвороугао PCB_1S око тачке B_1 за угао од 180° , а троугао LPS транслирамо за вектор A_1A , добићемо цртеж као на слици 2.

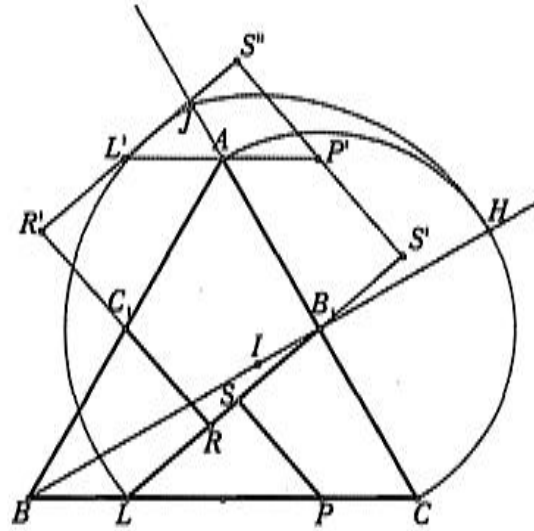
² притежавам земљу \approx држим се земље

³ Henry Ernest Dudeney (1857–1930)

⁴ Samuel Loyd (1841–1911)



Слика 1



Слика 2

Докажимо да је $RR'S''S'$ квадрат. На основу конструкције је:

$$BH = BB_1 + B_1H = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{3}+1)}{2}.$$

Такође на основу конструкције, важи:

$$BI = IH = IJ = \frac{a(\sqrt{3}+1)}{4} \quad \text{и} \quad IB_1 = IH - B_1H = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

Из правоуглог троугла IB_1J применом Питагорине теореме и на основу конструкције добија се:

$$LB_1 = B_1J = \sqrt{(IJ)^2 + (IB_1)^2} = \sqrt{\frac{a^2(\sqrt{3}+1)^2}{4} - \frac{a^2(\sqrt{3}-1)^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

На основу конструкције четвороугао LPB_1C_1 је паралелограм, јер је $LP \parallel B_1C_1$ и $LP = B_1C_1$. Висина паралелограма је растојање тачке C_1 односно B_1 од праве BC и, како су B_1 и C_1 средишта страница троугла ABC , биће:

$$h = d(C_1, BC) = d(B_1, BC) = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4},$$

(као висина једнакостраничног троугла странице $\frac{a}{2}$). Према томе, површина паралелограма LPB_1C_1 је:

$$P(LP B_1 C_1) = \frac{a}{2} \cdot h = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Како је четвороугао LPB_1C_1 паралелограм, троуглови LPB_1 и B_1C_1L су подударни, па имају једнаке површине и једнаке висине и важи:

$$P(LP B_1) = P(B_1 C_1 L) = \frac{P(LP B_1 C_1)}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16},$$

односно:

$$SP = C_1R = \frac{2P(LP B_1)}{LB_1} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{8}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Одавде следи, према конструкцији, да за правоугли четвороугао $RR'S''S'$ важи:

$$RR' = S''S' = \frac{a\sqrt[4]{3}}{2}.$$

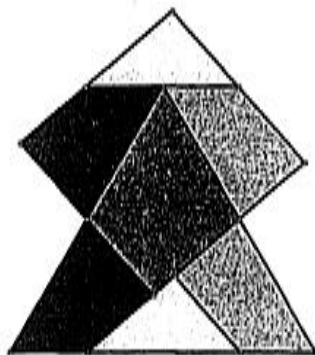
С друге стране троуглови B_1C_1R и LPS су правоугли и подударни па је:

$$B_1R = LS = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt[4]{3}}{4}\right)^2} = \frac{a}{4}\sqrt{4 - \sqrt{3}}.$$

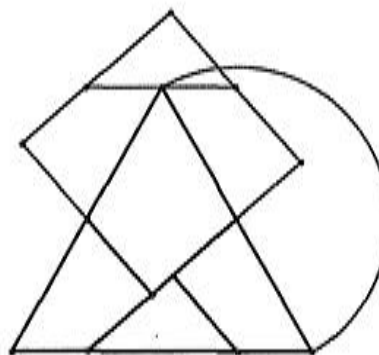
Одавде следи:

$$RS' = R'S'' = B_1L = \frac{a\sqrt[4]{3}}{2}.$$

Коначно, правоугли четвороугао $RR'S''S'$ има све једнаке странице, па следи да је квадрат, што је и тебало доказати. Ако се делови обоје и помере, добиће се цртеж као на слици 3.



Слика 3



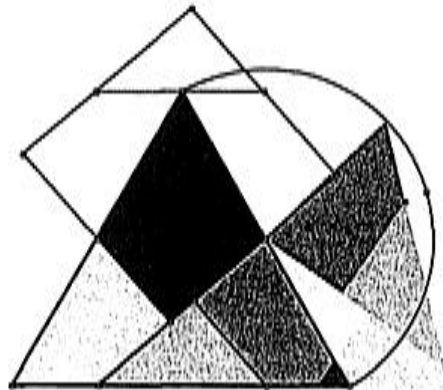
Слика 4

Програм за геометријске конструкције Geometer's SketchPad омогућава да се урађене конструкције анимирају. Показаћемо неколико интересантних анимација.

Пример 1. Могуће је искористити конструкцију са слике 2, али да би била ефектна потребно је неке елементе сакрити, неким елементима променити карактеристике, тако да на цртежу остану елементи као на слици 4.

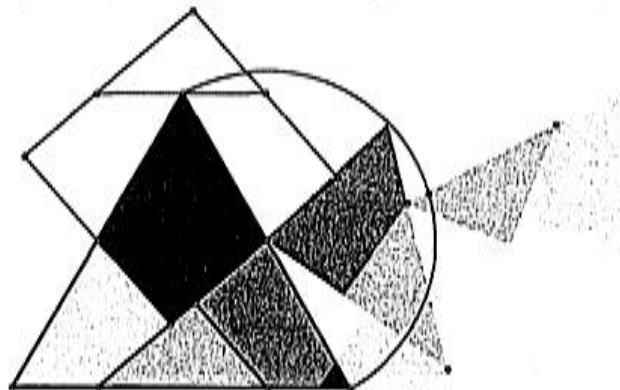
Конструкција даље тече по следећим корацима:

1. Означи се лук над страницом AC и користећи **Мени за конструкције** и опцију **Тачка на објекту**, конструише се тачка која се креће искључиво по посматраном луку.
2. Означе се баш тим редом тачке новоконструисана тачка, B_1 и C . Из **Менија за трансформације** изабере се опција **Означи угао** (Mark Angle).
3. Означи се тачка B_1 и користећи **Мени за трансформације** изабере се опција **Означи центар**. На тај начин смо одабрали тачку B_1 као центар око кога ће се ротирати делови троугла.
4. Маркирају се делови PCB_1S , LPS , $BLRC_1$, тачка P и тачка L .
5. Из **Менија за трансформације** изабере се опција **Ротирај** и само треба прихватити понуђени угао ротације који је одабран у кораку 2. Померањем покретне тачке на луку ротирају се и одабрани делови. Могуће је добити цртеж као на слици 5.

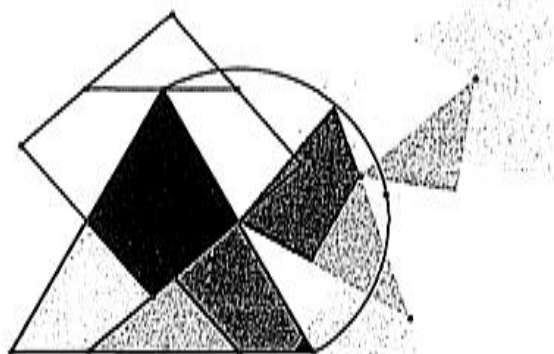


Слика 5

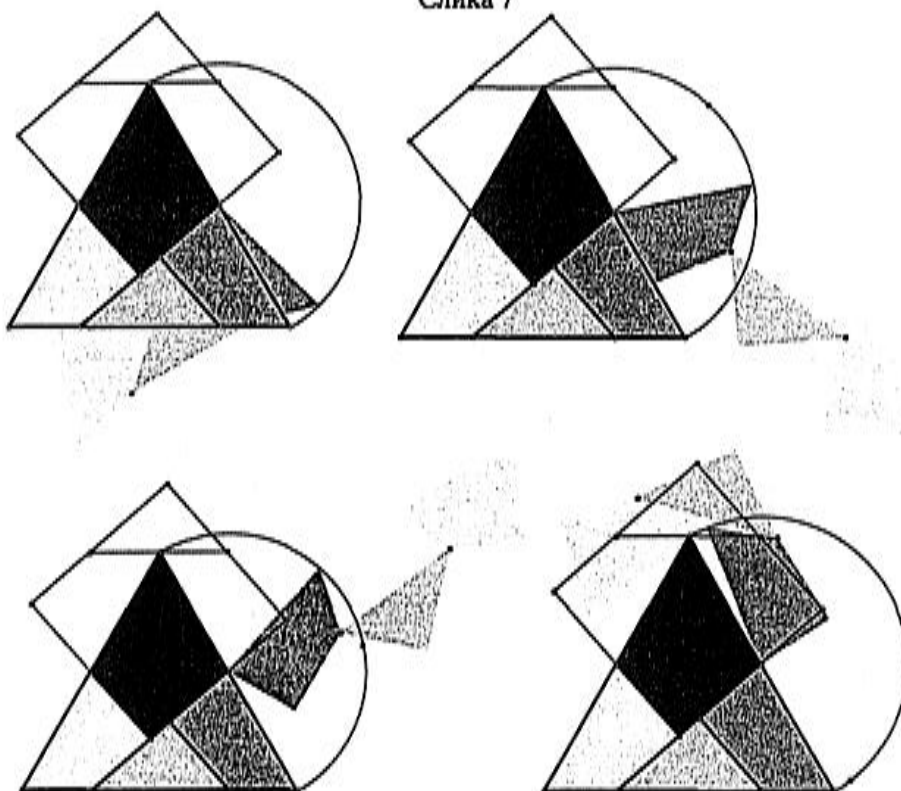
6. Означи се слика тачке P и користећи **Мени за трансформације** изабере се опција **Означи центар**. На тај начин смо одабрали ту тачку као центар око кога ће се ротирати друга два дела троугла.
7. У следећем кораку маркирају се пресликани делови LPS , $BLRC_1$ и слика тачке P .
8. Понови се корак 5. Померањем покретне тачке на луку ротирају се и одабрани делови. Могуће је добити цртеж као на слици 6.
9. Означи се друга слика тачке L и користећи **Мени за трансформације** изабере се опција **Означи центар**. На тај начин смо одабрали ту тачку као центар око кога ће се ротирати преостали део троугла
10. У следећем кораку маркира се други пресликани део $BLRC_1$.
11. Понови се корак 5. Померањем покретне тачке на луку ротирају се и одабрани делови. Могуће је добити цртеж као на слици 7.
12. Кад се сакрију неки пресликани делови у четири корака могу се добити цртежи као на слици 8.
13. Ако се маркирају лук и тачка на њему и из **Менија за промене (Edit Menu)** изабере опција **Дугме за акцију (Action Button)** и у њој опција **Анимација**, може се направити дугме којим се аутоматски покреће анимација.



Слика 6



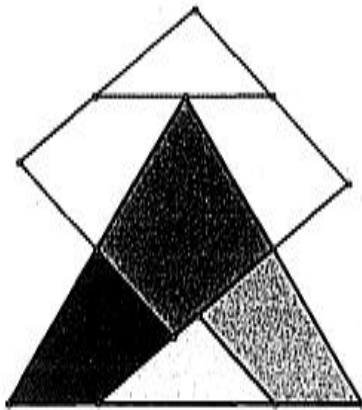
Слика 7



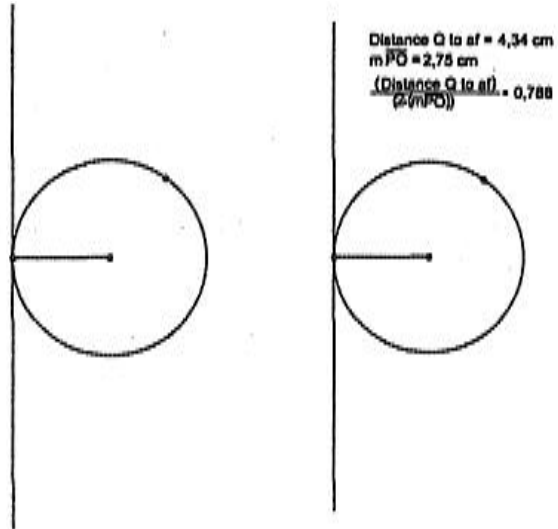
Слика 8

Пример 2. Конструкција може да се побољша тако да се контрола анимације изведе ван саме конструкције, како би се боље контролисала. Полази се од модификоване конструкције са слике 3. Даља конструкција може да тече по следећим корацима:

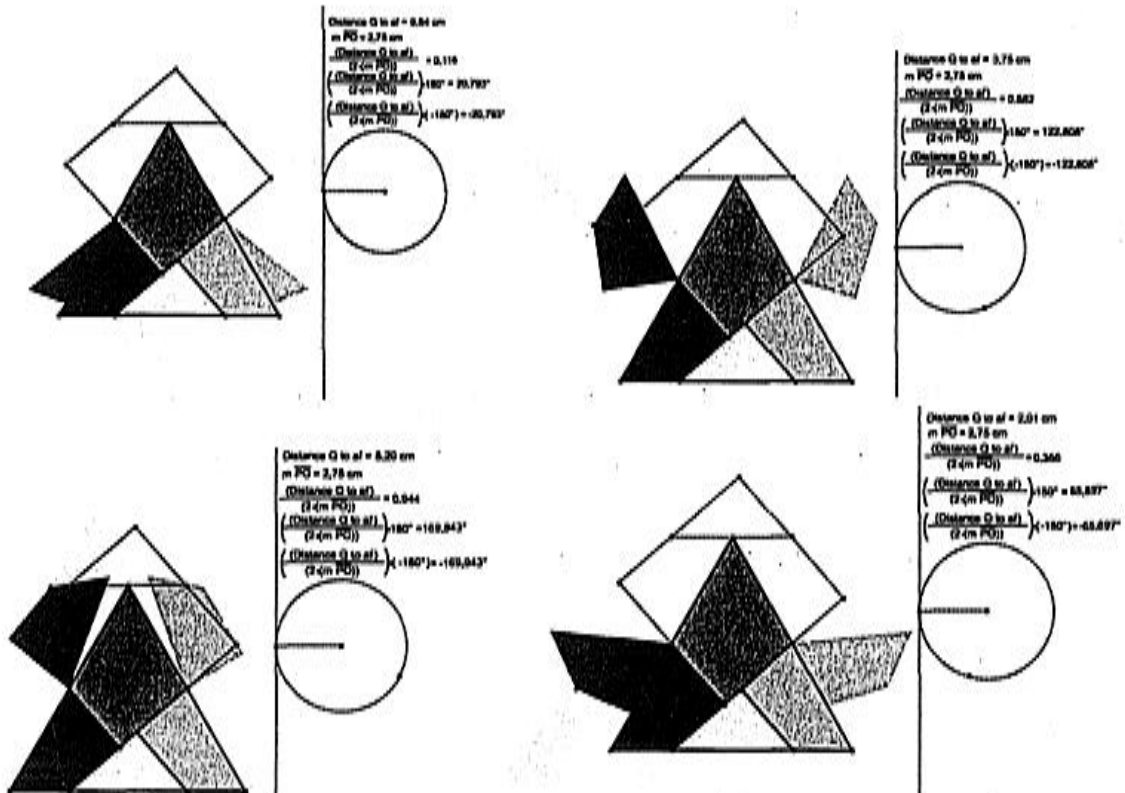
1. Конструира се круг, одговарајући пречник и праву нормалну на тај пречник као на слици 9. Идеја је да се користи покретна тачка на кругу, мери њено одстојање од праве нормалне на полупречнику круга, растојање претвори у угао и искористи за контролу анимације.
2. Конструира се тачка на кругу коришћењем Менија за конструкције и опције Тачка на објекту.



Слика 9



Слика 10



Слика 11

3. Маркирају се покретна тачка на кругу и нормална права. Помоћу Менија за мерење и опције Растојање измери се одстојање покретне тачке од праве.
4. Измери се дужина полупречника помоћу Менија за мерење и опције Дужина.
5. Помоћу Менија за мерење и опције Рачунање подели се растојање покретне тачке од праве са двоструким полупречником и добије број између 0 и 1. Део који се односи на

- мерење може да изгледа као на слици 10. Померањем покретне тачке по кругу види се да последњи број добија вредност између 0 и 1.
6. Помоћу **Менија за мерење** и опције **Рачунање** последња добијена вредност помножи се углом од 180° и на тај начин померањем тачке по кругу добија променљиви угао између 0° и 180° .
 7. Помоћу **Менија за мерење** и опције **Рачунање** последња добијена вредност помножи се углом од -180° и на тај начин померањем тачке по кругу добија променљиви угао између 0° и -180° . Потребан нам је и негативан угао да би побољшали анимацију. Делове који се ротирају поделићемо у две групе тако да се два ротирају у смеру кретања казаљки на сату а један у супротном смеру.
 8. Маркира се тачка C_1 и означи као центар ротације. Изабере се негативан угао и означи као угао ротације
 9. Понови се идеја ротације два дела одједном као у примеру 1.
 10. Померањем покретне тачке на кругу могуће је добити четири корака анимације као на слици 11.

Као и у примеру 1 могуће је аутоматизовати анимацију убацивањем дугмета за анимацију.

После Ђуденијеве смрти Мартин Гарднер је издао књигу Н. Е. Dudeney's 536 puzzles and curious problems (536 Ђуденијевих слагалица и проблема за радознале) 1967. године.

Више детаља о резању геометријских фигура можете наћи у књигама Dissection: Plane & Fancy и Hinged Dissection: Swinging & Twisting Greg-a Frederikson-a, а такође и на сајту <http://www.cs.purdue.edu/homes/gnf/book/webdiss.html>.