**Лилјана Стефаноска, Скопје**
**Љубомир Протиќ, Белград**

# ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ И ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ

Поимот функција е еден од основните поими во математиката. Во овој напис нема да се задржиме на објаснувањето на овој поим, туку функциите ќе ги разгледаме преку неколку групи задачи. Притоа посебно внимание ќе обрнеме на некои елементарни функционални равенки.

## 1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Дадени се функциите

$$f(x)=2+3x \quad \text{и} \quad g(x)=2+x.$$

**а)** Пресметајте

$$f(1), f(2), g(1), f(g(1)) \text{ и } g(f(1)).$$

**б)** Пресметајте

$$f(2x), g(3x), g(f(x)) \text{ и } f(g(x)).$$

**в)** Решете ги равенките: $i) f(x)=17$,

$ii) f(x)=g(x)$ $\quad iii) g(g(x))=10$.

**Решение. а)** Имаме $f(1)=2+3\cdot1=5$,

$$f(2)=2+3\cdot2=8,\ g(1)=2+1=3,$$

$$f(g(1))=f(3)=2+3\cdot3=11 \text{ и}$$

$$g(f(1))=g(3)=2+3=5.$$

**б)** Имаме

$$f(2x)=2+3\cdot2x=2+6x,\ g(3x)=2+3x,$$

$$g(f(x))=g(2+3x)=2+(2+3x)=4+3x$$

$$\text{и } f(g(x))=f(2+x)=2+3(2+x)=8+3x$$

**в)** $i)$ Равенката $f(x)=17$ е еквивалентна на равенката $2+3x=17$. Решение на последната равенка е $x=5$. Значи, решение на дадената равенка е $x=5$.

$ii)$ Равенката $f(x)=g(x)$ е еквивалентна на равенката $2+3x=2+x$ чие решение е $x=0$. Значи, решение на дадената равенка е $x=0$.

$iii)$ Од $g(g(x))=g(2+x)=2+(2+x)=4+x$ добиваме дека дадената равенка е еквивалентна на равенката $4+x=10$. Решение на последната равенка е $x=6$, па значи, решение на дадената равенка е $x=6$.

**Задача 2.** Дадената е функцијата

$$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{x-1}{x+1}.$$

Пресметајте $f(2), f\left(\frac{1}{2}\right), f(a), f(a^2-1)$,

$f\left(\frac{1}{a}\right)$, $f(\sqrt{a})$.

**Решение.** Функцијата $f(x)$ е дефинирана за $x\neq0$ и $x\neq-1$. Имаме,

$$f(2)=2^2+\frac{1}{2^2}+\frac{2-1}{2+1}=\frac{55}{12},$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{47}{12}.$$

$$f(a)=a^2+\frac{1}{a^2}+\frac{a-1}{a+1}, \text{ за } a\neq0, a\neq-1$$

$$f(a^2-1)=(a^2-1)^2+\frac{1}{(a^2-1)^2}+\frac{a^2-1-1}{a^2-1+1}=$$

$$=(a^2-1)^2+\frac{1}{(a^2-1)^2}+\frac{a^2-2}{a^2},$$

за $a^2-1\neq0$ и $a^2-1\neq-1$ т.е. за $a\neq0$ и $a\neq\pm1$.

За $a\neq0$ и $\frac{1}{a}\neq-1$ т.е. за $a\neq0$ и $a\neq-1$ добиваме

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^2}+\frac{\frac{1}{a}-1}{\frac{1}{a}+1}=\frac{1}{a^2}+a^2+\frac{1-a}{1+a}$$

За $a>0$ добиваме:

$$f(\sqrt{a})=(\sqrt{a})^2+\frac{1}{(\sqrt{a})^2}+\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}$$

**Задача 3.** Дадена е функцијата

$$f(x)=\frac{3x+1}{3-2x^3}.$$

Пресметајте $f(1-a)$ и $f\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)$.

**Решение.** Функцијата $f(x)$ е дефинирана за $3-2x^3\neq0$, т.е. $x^3\neq\frac{3}{2}$, односно $x\neq\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$. Значи, $f\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)$ не постои бидејќи во $x=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ функцијата не е дефинирана.

За $1-a\neq\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ т.е. $a\neq 1-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ имаме

$$f(1-a)=\frac{3(1-a)+1}{3-2(1-a)^3}=\frac{4-3a}{1+6a-6a^2+2a^3}$$

**Задача 4.** Пресметајте ги вредностите на функциите

**а)** $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$, **б)** $f(x)=x^4+\frac{1}{x^4}$

за оние вредности на променливата $x$ за кои $x+\frac{1}{x}=4$.

**Решение. а)** Од

$$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

добиваме дека точка $x_o$ за која важи $x_o+\frac{1}{x_o}=4$ имаме $f(x_o)=4^2-2=16-2=14$.

**б)** Од

$$g(x)=x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]-2$$

имаме

$$g(x_o)=\left[4^2-2\right]^2-2=14^2-2=196-2=194$$

**Задача 5.** Функцијата $f(x)$ ја задоволува релацијата

$$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x,\ x\neq 0 \qquad (1)$$

Пресметајте $f(1)$ и $f(2)$.

**Решение.** Од релацијата (1), за $x=1$ добиваме $f(1)+2f(1)=3$ Значи, $f(1)=1$.

Ако во (1) ставиме последователно $x=2$ и $x=\frac{1}{2}$ добиваме $f(2)+2f\left(\frac{1}{2}\right)=6$ и $f\left(\frac{1}{2}\right)+2f(2)=\frac{3}{2}$, соодветно. Според тоа, $f(2)$ го добиваме од системот

$$\begin{cases} f(2)+2f\left(\frac{1}{2}\right)=6 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)+2f(2)=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Конечно, $f(2)=-1$ и $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}$.

**Забелешка.** Последната задача можеме да ја решиме и ако во (1) ставиме $x=t$ и $x=\frac{1}{t}$, $t\neq 0$. Притоа, го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} f(t)+2f\left(\frac{1}{t}\right)=3t \\ f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=\frac{3}{t}, t\neq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Од (2) наоѓаме $f(t)=\frac{6}{t}-3t, t\neq 0$. Значи, функцијата $f(x)$ е $f(x)=\frac{2}{x}-x, x\neq 0$. Сега лесно се пресметуваат $f(1)$ и $f(2)$.

**Задача 6.** Дадена е функцијата

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-2}, x\neq 2 .$$

Пресметајте:

**а)** $f(f(1996))$ **б)** $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{1996}(1997))\ldots))$

**в)** $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{1997}(1996))\ldots))$

**Решение. а)** Од

$$f(f(x))=f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)=\frac{2\frac{2x+1}{x-2}+1}{\frac{2x+1}{x-2}-2}=\frac{5x}{5}=x$$

добиваме $f(f(1996))=1996$

Ќе докажеме дека

$$\underbrace{f(f(\ldots(f}_{2k}(x))\ldots))=x \text{ и}$$

$$\underbrace{f(f(\ldots(f}_{2k+1}(x))\ldots))=\frac{2x+1}{x-2},$$

за секој $k\in N$. Притоа ќе користиме индукција по $k$.

Од а) за $k=1$ имаме $\underbrace{f(f}_{2\cdot 1}(x))=x$, а од дефиницијата на $f$ добиваме

$$\underbrace{f(f(f}_{2\cdot 1+1}(x)))=\underbrace{f(f}_{2\cdot 1}(f(x)))=f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$$

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $k=n$. Од индуктивната претпоставка за $k=n+1$ добиваме

$$\underbrace{f\left(f\left(\ldots\left(f\left(f(x)\right)\right)\ldots\right)\right)}_{2(n+1)}=\underbrace{f\left(f\left(\ldots\left(\right.\right.\right.}_{2n}f\left[f\left(f(x)\right)\right]\left.\left.\left.\right)\ldots\right)\right)=$$

$$=\underbrace{f\left(f\left(\ldots\left(f\left(f(x)\right)\right)\ldots\right)\right)}_{2n}=x$$

$$\underbrace{f\left(f\left(\ldots\left(f\left(f(x)\right)\right)\ldots\right)\right)}_{2(n+1)+1}=\underbrace{f\left(f\left(\ldots\left(\right.\right.\right.}_{2n}f\left[f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right]\left.\left.\left.\right)\ldots\right)\right)=$$

$$=f\left(f\left(f(x)\right)\right)=\frac{2x+1}{x-2}$$

т.е. тврдењето важи и за $k=n+1$, па според принципот на математичка индукција заклучуваме дека важи за секој $k\in N$.

**б)** Од претходно изнесеното имаме:

$$\underbrace{f\left(f\left(\ldots\left(f\right.\right.\right.}_{1996}(1997)\left.\left.\left.\right)\ldots\right)\right)=1997$$

**в)** Аналогно, како под б) добиваме:

$$\underbrace{f\left(f\left(\ldots\left(f\right.\right.\right.}_{1997}(1996)\left.\left.\left.\right)\ldots\right)\right)=\frac{2\cdot 1996+1}{1996-2}=\frac{3993}{1994}$$

**Задача 7.** Дадени се функциите

$$f(x)=\frac{x^2-x}{2}+a \quad \text{и} \quad \varphi(x)=\frac{x-x^2}{2}-a,$$

каде $a\in R$. Докажете ги релациите $f(1+x)+\varphi(1-x)=x$ и $f(-x)+\varphi(1+x)=0$.

**Решение.** Имаме,

$$f(1+x)+\varphi(1-x)=$$

$$=\frac{(1+x)^2-(1+x)}{2}+a+\frac{1-x-(1-x)^2}{2}-a=$$

$$=\frac{1+x}{2}[1+x-1]+\frac{1-x}{2}[1-(1-x)]=$$

$$=\frac{x(x+1)}{2}+\frac{x(1-x)}{2}=x$$

$$f(-x)+\varphi(1+x)=$$

$$=\frac{(-x)^2-(-x)}{2}+a+\frac{1+x-(1+x)^2}{2}-a=$$

$$=\frac{x^2+x}{2}+\frac{1+x}{2}[1-(1+x)]=$$

$$=\frac{x^2+x}{2}-\frac{x^2+x}{2}=0$$

што и требаше да докажеме.

## 2. ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ

Во задача 7 докажавме дека функциите $f(x)$ и $\varphi(x)$ задоволуваат определени релации. Природно е да се запрашаме дали може да се реши обратната задача, т.е. дали ако за некои функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ знаеме дека задоволуваат определени релации можеме да ги определиме овие функции. Решавањето на оваа задача по правило е значително покомплицирано, но ние во овој дел ќе се задржиме на неколку наједноставни задачи од овој вид.

**Задача 8.** Најдете ја функцијата $f(x)$ ако:

**а)** $f(x+3)=2x-5$

**б)** $f(x-1)=x^2-5x+6$

**в)** $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$

**г)** $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$, $x\neq 0$

**д)** $f\left(x^2\right)=\frac{1}{x}$

**Решение. а)** Со смената $x+3=t$, т.е. $x=t-3$ од дадената равенка добиваме $f(t)=2(t-3)-5$ т.е. $f(t)=2t-11$. Значи бараната функција е $f(x)=2x-11$.

**б)** Ставаме $x-1=t$ т.е. $x=t+1$ и добиваме

$$f(t)=(t+1)^2-5(t+1)+6=t^2-3t+2$$

т.е. бараната функција е

$$f(x)=x^2-3x+2.$$

**в)** Од $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ добиваме $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ т.е.

$$f(t)=t^2-2, \text{ за } t=x+\frac{1}{x}, x\neq 0.$$

Значи, бараната функција е

$$f(x)=x^2-2, x\neq 0.$$

**г)** Ја воведуваме смената $\frac{1}{x}=t$ и до-

биваме $f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}, t\neq 0$. Значи, бараната функција е
$$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}, x\neq 0.$$

д) Од $x>0$ и $x^2=t, t>0$ добиваме $x=\sqrt{t}, t>0$. Според тоа, $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$, $t>0$, односно бараната функција е
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}},\ x>0.$$

**Задача 9.** Дадена е функцијата $f(x)=x+2$. Најдете функција $g(x)$, таква што $f(g(x))=3x$.

**Решение.** Имаме, $f(g(x))=g(x)+2$. Со замена во дадената релација добиваме $g(x)+2=3x$ т.е. бараната функција е $g(x)=3x-2$.

**Задача 10.** Дадена е функцијата $f(x)=x+2$. Најдете функција $g(x)$, таква што $f(g(f(x)))=5x-1$.

**Решение.** Имаме,
$$f(g(f(x)))=g(f(x))+2=g(x+2)+2$$
Со замена во дадената релација добиваме $g(x+2)+2=5x-1$ т.е.
$$g(x+2)=5x-3$$
Ставаме $x+2=t$ т.е. $x=t-2$ и добиваме $g(t)=5(t-2)-3=5t-13$. Значи, бараната функција е $g(x)=5x-13$.

## 3. ХОМОГЕНИ ДИФЕРЕНЦНИ РАВЕНКИ ОД II РЕД СО КОНСТАНТНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Нека $P(x), Q(x)$ и $R(x)$ се дадени реални функции. Функционалната равенка
$$f(x+2)+P(x)f(x+1)+Q(x)f(x)=R(x) \qquad (1)$$
ја нарекуваме линеарна диференцна равенка од II ред. Ако $R(x)\equiv 0$, тогаш за равенката (1) ќе велиме дека е хомогена. За равенката (1) ќе велиме дека е со константни коефициенти ако
$$P(x)\equiv a_1, Q(x)\equiv a_2,\ a_1,a_2\in R.$$

За функцијата $f_o(x)$ ќе велиме дека е решение на диференцната равенка (1) ако
$$f_o(x+2)+P(x)f_o(x+1)+Q(x)f_o(x)=R(x)$$
за секој $x\in R$

**Задача 11.** Нека $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ се произволни партикуларни решенија на линеарната хомогена диференцна равенка (1). Тогаш, функцијата
$$f_o(x)=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x),$$
каде $C_1, C_2$ се произволни комплексни броеви е решение на дадената равенка. Докажете!

**Решение.** Со замена во (2) добиваме
$$\begin{aligned}&f_o(x+2)+P(x)f_o(x+1)+Q(x)f_o(x)=\\&=[C_1\varphi_1(x+2)+C_2\varphi(x+2)]+\\&\quad+P(x)[C_1\varphi_1(x+1)+C_2\varphi(x+1)]+\\&\quad+Q(x)[C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi(x)]=\\&=C_1[\varphi_1(x+2)+P(x)\varphi_1(x+1)+Q(x)\varphi_1(x)]+\\&\quad+C_2[\varphi_1(x+2)+P(x)\varphi_1(x+1)+Q(x)\varphi_1(x)]=0\end{aligned}$$
бидејќи $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ се партикуларни решенија на разгледуваната хомогена равенка.

Да ја разгледаме хомогената диференцна равенка од II ред со константни коефициенти:
$$f(x+2)+a_1f(x+1)+a_2f(x)=0,\ a_2\neq 0 \qquad (2)$$

Релацијата со која можат да се добијат сите решенија на равенката (2), доколку постои ќе ја наречеме нејзино општо решение, а функцијата од која не може да се изведи општото решение на дадената равенка ќе ја нарекуваме ***партикуларно решение*** на истата.

За равенката (2) ја формираме квадратната равенка
$$r^2+a_1r+a_2=0 \qquad (3)$$
која ја нарекуваме карактеристична равенка на равенката (2). Нека $r_1, r_2$ се решенија на равенката (3). Може да се докаже дека општото решение на равенката (2) зависи од решенијата на равенката (3) и притоа:
$$f(x)=C_1r_1^x+C_2r_2^x,\ \text{ако } r_1\neq r_2, r_1,r_2\neq R \qquad (4)$$

$f(x)=C_1 r_1^x + C_2 x r_2^x$, ако $r_1=r_2, r_1, r_2 \in R$ (5)

$f(x)=C_1 \rho^x \cos\varphi_x + C_2 \rho^x \sin\varphi_x$,

ако $r_1 = x+iy=\overline{r_2}$ (6)

и важи $\rho=|r_1|=|r_2|=\sqrt{x^2+y^2}$, $tg\varphi=\frac{y}{x}$.

**Задача 12.** Решете ја диференцната равенка $f(x+2)-7f(x+1)+12f(x)=0$.

**Решение.** Соодветната карактеристична равенка е $r^2-7r+12=0$, чии решенија се

$$r_{1/2}=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot1\cdot12}}{2\cdot1}=\frac{7\pm1}{2}$$

т.е. $r_1=4, r_2=3$. Според тоа општото решение на равенката е $f(x)=C_1 3^x + C_2 4^x$, каде $C_1, C_2$ се произволни комплексни броеви.

**Задача 13.** Решете ја диференцната равенка $f(x+2)-6f(x+1)+9f(x)=0$.

**Решение.** Соодветната карактеристична равенка е $r^2-6r+9=0$ т.е. $(r-3)^2=0$. Од $r_{1/2}=3$, според (5) добиваме дека општото решение на дадената равенка е $f(x)=(C_1+C_2x)3^x$

**Задача 14.** Решете ја диференцната равенка $f(n+2)-2f(n+1)+2f(n)=0$

**Решение.** За карактеристичната равенка имаме $r^2-2r+2=0$. Нејзини решенија се $r_1=1+i$, $r_2=1-i$. Според (6) добиваме дека општото решение на дадената равенка е

$$f(x)=\rho^x(C_1\cos\varphi x + C_2\sin\varphi x)$$

каде $\rho=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $tg\varphi=\frac{1}{1}=1$ т.е. $\rho=\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Значи, општото решение на дадената равенка е

$$f(x)=\sqrt{2}^x\left(C_1\cos\frac{\pi x}{4}+C_2\sin\frac{\pi x}{4}\right).$$

Од досега изнесеното можеме да забележиме дека општото решение на равенката (2) е множеството функции, при што секој елемент $f_o$ од ова множество се добива за соодветен избор на константите $C_1$ и $C_2$. Јасно, ако за функцијата $f_o(x)$, која е решение на равенката (2), се познати нејзините вредности во две различни точки $x_o$ и $x_1$, тогаш од системот

$$\begin{cases} f(x_o)=f_o(x_o) \\ f(x_1)=f_o(x_1) \end{cases}$$

можеме да ги определиме константите $C_1$ и $C_2$, со чија помош функцијата $f_o$ се добива од општото решение на равенката (2). Вредностите $f_o(x_o)$ и $f_o(x_1)$ ги нарекуваме почетни услови за равенката (2).

**Задача15.** Решете ја диференцната равенка $f(x+2)-f(x+1)-f(x)=0$ при почетни услови $f(0)=0$ и $f(1)=1$.

**Решение.** Соодветната карактеристична равенка е $r^2-r-1=0$ и таа има решенија $r_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Значи, општото решение на дадената равенка е

$$f(x)=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x$$

Ако ги искористиме почетните услови добиваме:

$$\begin{cases} 0=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^o+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^o \\ 1=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1\frac{1+\sqrt{5}}{2}+C_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1 \end{cases}$$

Решение на системот е

$$C_1=\frac{1}{\sqrt{5}},\ C_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Значи, решение на дадената равенка е

$$f_o(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x$$

**Забелешка.** Со $f(0)=0, f(1)=1$, $f(n+2)=f(n+1)+f(n)$ всушност е дадена низата на Фибоначи. Според тоа, Фибоначиевите броеви можеме да ги добиеме ако ја искористиме формулата

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, n=0,1,...$$

## 4. НЕКОИ "ИСТОРИСКИ" ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ

Во овој дел ќе разгледаме неколку основни функционални равенки, за кои сметаме дека ќе го привлечат вашето внимание.

**Задача 16.** *(Равенка на Коши,* 1821). Во множеството на рационалните броеви решете ја равенката

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad (1)$$

**Решение.** Ако во (1) ставиме $x=1$, $y=0$ добиваме $f(1)=f(1)+f(0)$ од што следува $f(0)=0$. За $y=-x$, од (1) следува $f(0)=f(x)+f(-x)$ т.е.

$$f(-x)=-f(x) \qquad (2)$$

Јасно $f(2x)=2f(x)$. Нека претпоставиме дека $f(nx)=nf(x)$. За $n+1$ добиваме

$$f((n+1)x)=f(nx+x)=f(nx)+f(x)=$$
$$=nf(x)+f(x)=(n+1)f(x)$$

т.е. $f((n+1)x)=(n+1)f(x)$. Значи,

$$f(mx)=mf(x), \text{ за секој } m\in N,$$

што заедно со $f(0)=0$ и (2) дава

$$f(nx)=nf(x), \text{ за секој } n\in Z, x\in Q \qquad (3)$$

Нека $x\in Q$. Тогаш $x=\frac{p}{q}, p,q\in Z, q\neq 0$.

Имаме

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}\left(qf\left(\frac{p}{q}\right)\right)=\frac{1}{q}f\left(q\frac{p}{q}\right)=$$
$$=\frac{1}{q}f(p)=\frac{1}{q}pf(1)=\frac{p}{q}f(1) \qquad (4)$$

Ако ставиме $f(1)=c$, тогаш добиваме дека $f(x)=cx, x\in Q$ е решение на (1).

**Задача 17.** *(Равенка на Јенсен,* 1906). Во множеството рационални броеви решете ја равенката

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f(x)+f(y) \qquad (5)$$

**Решение.** Нека $f(0)=a$. Ако во (5) ставиме $y=0$ добиваме $2f\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)+a$. Ја воведуваме смената $f(x)=g(x)+a$ и добиваме

$$g(x)+g(y)+2a=[g(x)+a]+[g(y)+a]=f(x)+f(y)=$$
$$=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f(x+y)+a=g(x+y)+2a$$

Според тоа, решението на равенката (5) има облик $f(x)=g(x)+a$, каде $g(x)$ е решение на равенката

$$g(x+y)=g(x)+g(y),\ x,y\in Q \qquad (6)$$

Од претходната задача добиваме $g(x)=xg(1), x\in Q$. Ако ставиме $b=f(1)$, добиваме $g(1)=f(1)-a=b-a$, па значи

$$f(x)=g(x)+a=g(1)x+a=(b-a)x+a,\ x\in Q$$

е општо решение на (5).

**Задача 18.** (*Равенка на Пексидер*, решена 1900,1903 год.). Во множеството рационални броеви решете ја равенката

$$f(x+y)=g(x)+h(y) \qquad (7)$$

**Решение.** Нека $a=-h(0)$, $b=-g(0)$. Ако во (7) ставиме $y=0$ добиваме $g(x)=f(x)+a$, а за $x=0$ добиваме $h(y)=f(y)+b$. Според тоа

$$f(x+y)=f(x)+a+f(y)+b$$

односно

$$f(x+y)+a+b=[f(x)+a+b]+[f(y)+a+b]$$

Ставаме $F(x)=f(x)+a+b$ и добиваме

$$F(x+y)=F(x)+F(y) \qquad (8)$$

Според задача 16 $F(x)=\alpha x, \alpha\in R, x\in Q$.

Значи, $f(x)=F(x)-a-b=\alpha x-a-b$; $g(x)=\alpha x-b$, $h(x)=\alpha x-a$; $x\in Q, \alpha, a, b\in R$.

**Задача 19.** (*Модифицирана Јенсенова равенка*). Во множеството рационални броеви решете ја равенката:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{g(x)+h(y)}{2}$$

**Упатство.** Воведете ги смените $f(t)=r(2t), g(t)=2s(t)$ и $h(t)=2u(t)$, а потоа искористете ја претходната задача.

## 5. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

На крајот од оваа работа ви предлагаме неколку задачи за вежбање. Сметаме дека, доколку сте ги разработиле претходните четири дела, нема да ви претставува тешкотија самостојно да ги решите следните задачи.

1. Дадена е функција $f(x)=x+2$. Да се определи функција $g(x)$ таква што $f(2+g(x))=3x-1$.

2. Најдете функција $g(x)$ таква што за функцијата $f(x)=3x+2$ важи

$$f\left(x^2+xg(x)\right)=3x^2+6x+5$$

3. Решете ги равенките:

а) $f(x+2)-4f(x+1)+3f(x)=0$

б) $f(x+2)+3f(x)=0$

в) $f(x+2)-f(x)=0$

г) $f(x+2)=10f(x+1)-25f(x)$

4. Во множеството рационални броеви решете ја равенката

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$$

5. Најдете ги сите полиноми $f(x)$ за кои што важи

$$(x-1)f(x+1)-(x+2)f(x)=0, \ \forall x\in R.$$

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија