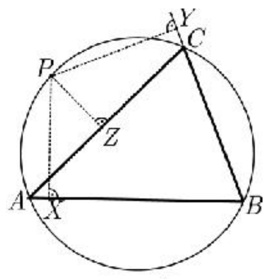
Валентина Миовска,
Скопје

ТЕОРЕМА НА СИМСОН

Ако од произволна точка P на опишаната кружница околу еден триаголник аABC повлечеме нормали на правите на кои лежат неговите страни, тогаш подножјата лежат на една права. Иако оваа права е откриена од Вилијам Валас, се припишува на Роберт Симсон и ја нарекуваме **Симсонова права** за точката P и триаголникот ABC.

Прво, да го докажеме горното тврдење познато како Теорема на Симсон:

Од произволна точка P на опишаната кружница околу аABC ги повлекуваме нормалите PX, PY и PZ на правите AB, BC и CA, соодветно, при што X, Y и Z се соодветните подножја (црт. 1). Бидејќи четириаголникот $PZCY$ е тетивен следува $\sphericalangle PYZ = \sphericalangle PCZ = \sphericalangle PCA$. Слично, четириаголникот $PXBY$ е тетивен па $\sphericalangle PYX = \sphericalangle PBX = \sphericalangle PBA$ и четириаголникот $ABCP$ е тетивен од каде што $\sphericalangle PCA = \sphericalangle PBA$. Затоа $\sphericalangle PYZ = \sphericalangle PYX$, а оттука следува дека X, Y и Z се колинеарни точки. ■

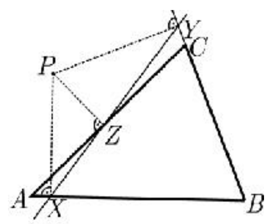


црт. 1

Важи и обратното тврдење на Теоремата на Симсон:

Ако подножјата на нормалите повлечени од една точка до правите на кои лежат страните на даден триаголник ABC се колинеарни точки, тогаш точката лежи на кружницата опишана околу триаголникот ABC.

Доказ. Нека точките X, Y и Z се колинеарни и се подножја на нормалите PX, PY и PZ, од точката P на AB, BC и CA, соодветно (црт. 2). Бидејќи аглите PZA и PXA се прави, четириаголникот $PAXZ$ е тетивен па $\sphericalangle PAX = 180^\circ - \sphericalangle PZX$, а од колинеарноста на X, Y и Z имаме $180^\circ - \sphericalangle PZX = \sphericalangle PZY$ или $\sphericalangle PAX = \sphericalangle PZY$. Бидејќи аглите PZC и PYC се прави, четириаголникот $PZCY$ е тетивен, па $\sphericalangle PCY = \sphericalangle PZY$. Значи $\sphericalangle PAX = \sphericalangle PCY$ или $\sphericalangle PAB = 180^\circ - \sphericalangle PCB$, од каде што следува дека четириаголникот $ABCP$ е тетивен, односно точката P лежи на опишаната кружница околу аABC.■

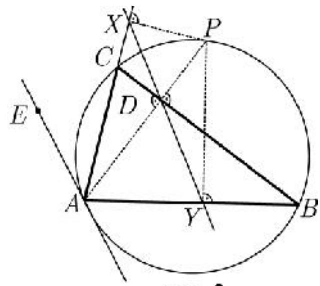


црт. 2

Задача 1. Од произволна точка P на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ ги повлекуваме нормалите PX, PY и PZ на правите AB, BC и CA, соодветно, притшо X, Y и Z се на соодветните прави. Докажи дека $\overline{PA}\cdot\overline{PY}=\overline{PC}\cdot\overline{PX}$.

Решение. Бидејќи четириаголниците $AXZP$ и $PZCY$ се тетивни, имаме $\measuredangle PAZ=\measuredangle PXZ$ и $\measuredangle PYZ=\measuredangle PCZ$ (црт. 1). Според условот во задачата, точките X, Y и Z ја определуваат Симсоновата права за P и $\triangle ABC$. Од нивната колинеарност следува $\measuredangle PAC=\measuredangle PAZ=\measuredangle PXZ=\measuredangle PXY$ и слично, $\measuredangle PCA=\measuredangle PYX$. Тогаш триаголниците PAC и PXY се слични, па затоа важи $\frac{\overline{PC}}{\overline{PY}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PX}}$.■

Задача 2. Висината AD на триаголникот ABC ја сече опишаната кружница околу триаголникот во точка P. Докажи дека Симсоновата права за P и $\triangle ABC$ е паралелна со тангентата на опишаната кружница во темето A.



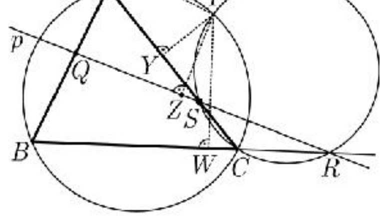
црт. 3

Решение. Нека висината AD ја сече страната BC на триаголникот ABC во точката D, а опишаната кружница околу триаголникот во точка P. Со X и Y ги означуваме подножјата на нормалите од P на CA и AB, соодветно, а тангентата во A нека е правата AE (црт. 3). Симсоновата права за P и $\triangle ABC$ е определена со точките X и D (и Y). Четириаголникот $DPXC$ е тетивен па $\measuredangle CXD=\measuredangle CPD$.

Тогаш важи $\measuredangle EAC=\measuredangle CPA=\measuredangle CPD=\measuredangle CXD$, т,е, $\measuredangle EAX=\measuredangle AXD$, од каде што добиваме дека правите AE и XD се паралелни. ■

Задача 3. Правата p ги сече страните (или продолженијата на страните) AB, BC и CA на триаголникот ABC во точки Q, R и S, соодветно. Нека кружниците опишани околу $\triangle ABC$ и $\triangle SCR$ се сечат во точката P. Докажи дека четириаголникот $AQSP$ е тетивен.

Решение. Нека $\overline{PX}$, $\overline{PY}$, $\overline{PZ}$ и $\overline{PW}$ се нормалите од точката P на AB, CA, QR и BC, соодветно (црт. 4). Тогаш X, Y и W ја определуваат Симсоновата права за P и $\triangle ABC$, а Y, Z и W ја определуваат Симсоновата права за P и $\triangle SCR$. Значи

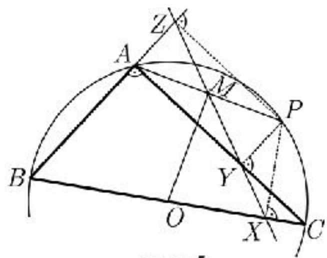


црт. 4

точките X, Y, Z и W се колинеарни. Бидејќи X, Y и Z се подножја на нормалите спуштени од P на AQ, AS и QS, според обратната теорема на Теоремата на Симсон следува дека P лежи на кружницата опишана околу триаголникот AQS, односно четириаголникот $AQSP$ е тетивен. ■

Задача 4. Правоаголен триаголник ABC со прав агол кај темето A е впишан во кружница. Нека Симсоновата права за точка P и аABC ја сече тетивата PA во точка M. Докажи дека MO и PA се заемно нормални, ако O е центарот на опишаната кружница околу аABC.

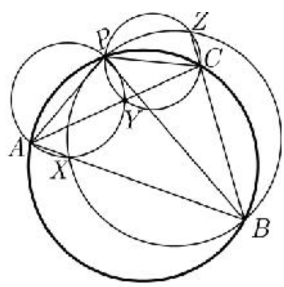
Решение. Нека PX, PY и PZ се нормалите на BC, CA и AB, соодветно (црт. 5). Тогаш Симсоновата права за P и аABC е правата $XY(=XZ)$. Бидејќи аглите PZA, PYA и ZAY се прави, четириаголникот $AYPZ$ е правоаголник. Точката M е пресек на дијагоналите на правоаголникот, затоа таа е средина на отсечката PA. Тогаш MO и PA се заемно нормални. ■



црт. 5

Задача 5. Нека $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ и $\overline{PC}$ се три тетиви во произволна кружница. Докажи дека пресечните точки на кружниците со дијаметри $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ и $\overline{PC}$, се колинеарни точки.

Решение. Со X ќе ја означиме втората пресечна точка на кружниците со дијаметри $\overline{PA}$ и $\overline{PB}$, Y е пресечната точка на кружниците со дијаметри $\overline{PA}$ и $\overline{PC}$ и Z е пресечната точка на кружниците со дијаметри $\overline{PB}$ и $\overline{PC}$ (црт. 6). Бидејќи аглите AXP и PXB се агли над дијаметрите $\overline{PA}$ и $\overline{PB}$, соодветно, тие се прави, а оттука точките A, X и B се колинеарни.

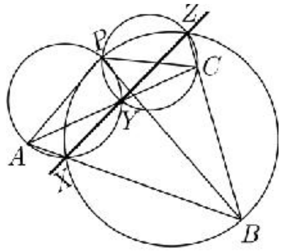


црт. 6

Слично, колинеарни се точките A, Y и C, како и точките B, C и Z. Значи PX, PY и PZ се нормалите од точката P, на опишаната кружница околу триаголникот ABC, на правите на кои лежат страните на триаголникот, па X, Y и Z ја определуваат Симсоновата права за точката P и аABC. ■

Задача 6. Ако три кружници со дијаметри $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ и $\overline{PC}$ се сечат, две по две, во колинеарни точки тогаш четириаголникот $ABCP$ е тетивен. Докажи.

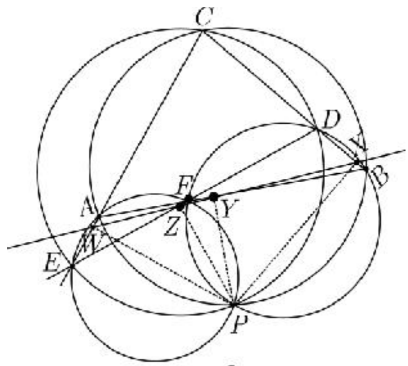
Решение. Нека X е втората пресечната точка на кружниците со дијаметри $\overline{PA}$ и $\overline{PB}$, Y е пресечната точка на кружниците со дијаметри $\overline{PA}$ и $\overline{PC}$ и Z е пресечната точка на кружниците со дијаметри $\overline{PB}$ и $\overline{PC}$ (црт. 7). Тогаш точките A, X и B; A, Y и C и B, C и Z се колинеарни и $PX\perp AB$, $PY\perp AC$, $PZ\perp BC$. Бидејќи X, Y и Z се колинеарни, од обратната теорема на Теоремата на Симсон следува дека четириаголникот $ABCP$ е тетивен. ■



црт. 7

Задача 7. Даден е триаголник ABC и точки D и F на страните BC и AB, соодветно. Нека правите DF и AC се сечат во точка E. Докажи дека кружниците опишани околу триаголниците ABC, FBD, EFA и EDC се сечат во една иста точка.

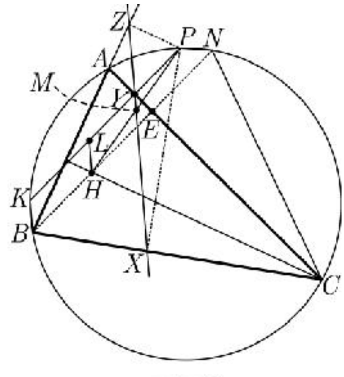
Решение. Нека кружниците околу триаголниците ABC и FBD се сечат во точката P, а PX, PY, PZ и PW се нормалите повлечени од P на BC, AB, ED и EC, соодветно (црт. 8). Тогаш колинеарни се точките X, Y и W и точките X, Y и Z, односно сите четири точки лежат на иста права. Од колинеарноста на Y, Z и W и од обратната теорема на Теоремата на Симсон, следува дека P лежи на кружницата опишана околу триаголникот EFA. Слично, P лежи и на кружницата опишана околу триаголникот EDC.■



црт. 8

Задача 8. Докажи дека Симсоновата права, за произволна точка P и аABC, ја полови отсечката чиишто крајни точки се ортоцентарот H и точката P.

Решение. Нека X, Y и Z се подножјата на нормалите од P на BC, AC и AB, соодветно, односно XY е Симсоновата права за P и аABC. Со K и N да ги означиме пресечните точки на опишаната кружница околу аABC со правите PY и BH, соодветно, E нека е пресечната точка на BH и AC, LH нека е права паралелна со KB, каде што $L\in PK$ и нека пресечната точ-



црт. 9

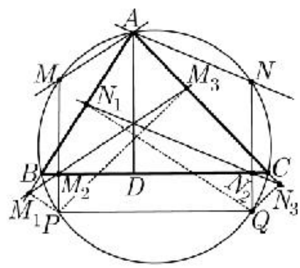
ка на HP и XY е M (црт. 9). Бидејќи PK е паралелна со NB и LH е паралелна со KB, следува дека четириаголникот $BHLK$ е паралелограм, односно $\overline{LH}=\overline{KB}$. Од $PK \parallel NB$ следува дека лаците PN и KB се еднакви, а оттука $\overline{PN}=\overline{KB}$. Значи четириаголникот $HNPL$ е рамнокрак трапез. Од

$$\measuredangle HCA = 90^\circ - \measuredangle BAC = \measuredangle NBA = \measuredangle NCA,$$

имаме $\measuredangle HCE = \measuredangle NCE$, а бидејќи $\measuredangle HEC = \measuredangle NEC = 90^\circ$ и страната EC е заедничка за триаголниците HCE и NCE следува дека $\triangle HCE \cong \triangle NCE$, па $\overline{HE}=\overline{NE}$. Тогаш E е средина на основата $\overline{HN}$ на рамнокракиот трапез $HNPL$ и $AC \perp HN$, па Y е средина на основата $\overline{LP}$. Од тетивноста на четириаголникот $AYPZ$ следува $\measuredangle KBA = \measuredangle KPA = \measuredangle YPA = \measuredangle YZA$, односно $\measuredangle KBZ = \measuredangle YZB$. Оттука следува паралелност на правите KB и YZ, односно паралелни се правите LH и YZ. Тогаш YZ минува низ средната линија за триаголникот LHP, па M е средина на $\overline{PH}$. ■

Задача 9. Тетивата PQ на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ е паралелна со страната BC. Докажи дека Симсоновите прави за P и Q и $\triangle ABC$ и висината AD минуваат низ една иста точка.

Решение. Нека M_1, M_2 и M_3 ја определуваат Симсоновата права за P и $\triangle ABC$, а точките N_1, N_2 и N_3 Симсоновата права за Q и $\triangle ABC$ (црт. 10). Пресечната точка на кружницата и правата PM_2 ќе ја означиме со M, пресекот на кружницата и правата QN_2 со N, пресекот на правата M_1M_2 и висината $\overline{AD}$ со T и пресекот на N_1N_2 и $\overline{AD}$ со S. Од тетивноста на четириаголниците PM_2BM_1 и $AMBP$ имаме: $\measuredangle M_1M_2P = \measuredangle M_1BP = 180^\circ - \measuredangle ABP = 180^\circ - \measuredangle AMP$ од каде што следува дека правите M_1M_2 и AM се паралелни. Слично, паралелни се и правите N_1N_2 и AN. Бидејќи $MM_2 \parallel AD \parallel NN_2$ следува дека четириаголниците M_2TAM и SN_2NA се паралелограми. Значи важат $\overline{MM_2}=\overline{AT}$ и $\overline{AS}=\overline{NN_2}$, а од паралелноста на PM и QN важи и $\overline{MN}=\overline{PQ}$. Од паралелноста на PQ и BC имаме дека MP и PQ се нормални, од каде што четириаголниците $PQNM$ и PQN_2M_2 се правоаголници. Оттука

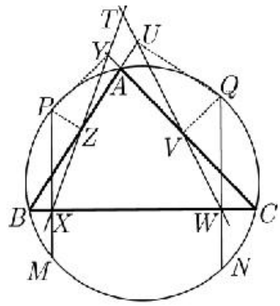


црт. 10

$\overline{MM_2} = \overline{NN_2}$, односно $\overline{AT} = \overline{AS}$. Значи висината ги сече Симсоновите прави во една иста точка. ■

Задача 10. Аголот меѓу двете Симсонови прави за дадените точки P и Q и $\triangle ABC$, е еднаков со периферниот агол над тетивата $\overline{PQ}$. Докажи.

Решение. Нека Симсоновата права за P и $\triangle ABC$ е определена со точките X, Y и Z, а Симсоновата права за Q и $\triangle ABC$ е определена со U, V и W (црт. 11) и нека правите се сечат во T. Со M ќе ја означиме пресечната точка на кружницата и правата PX, а со N, пресечната точка на кружницата и QW. Од претходната задача имаме дека $XZ \parallel AM$ и $VW \parallel AN$.

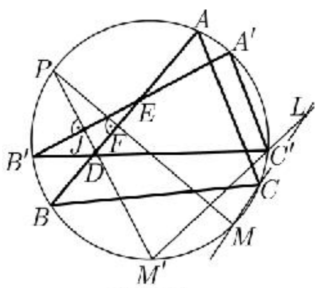


црт. 11

Значи $\sphericalangle XTW = \sphericalangle MAN$. Од паралелноста на PM и QN имаме $\overline{PQ} = \overline{MN}$, па $\sphericalangle XTW = \sphericalangle MAN = \sphericalangle PBQ$, како периферни агли над еднакви тетиви.■

Задача 11. Аголот меѓу Симсоновите прави за една иста точка и два триаголници кои се впишани во една иста кружница е константен. Докажи.

Решение. Симсоновата права за точката P и $\triangle ABC$ е паралелна со правата MC и минува низ точката F, која е подножје на нормалата од P кон страната AB, а M е пресечната точка на кружницата и правата PF (задача 9). Слично, Симсоновата права за точката P и $\triangle A'B'C'$ е паралелна со $M'C'$ и минува низ J, која е подножје на нормалата од P кон страната $A'B'$, а M' е пресечната точка на кружницата и PJ (црт. 12).



црт. 12

Тогаш аголот α меѓу Симсоновите прави е еднаков со аголот меѓу правите MC и $M'C'$. Уште, со D ќе ја означиме пресечната точка меѓу PM' и AB, со E пресекот на AB и $A'B'$ и со L пресекот на MC и $M'C'$. Тогаш:

$$\sphericalangle M'CM = 180^\circ - \sphericalangle M'CL = \sphericalangle LM'C + \sphericalangle M'LC = \sphericalangle C'M'C + \alpha\ ,$$

односно $\alpha = \sphericalangle M'CM - \sphericalangle C'M'C$. Од друга страна, триаголниците PFD и EJD се слични и затоа $\sphericalangle FPD = \sphericalangle JED$, односно

$$\begin{aligned}\measuredangle MPM' &= \measuredangle B'EB = 180^\circ - \measuredangle B'EA = \measuredangle AB'E + \measuredangle B'AE \\ &= \measuredangle AB'A' + \measuredangle B'AB = \measuredangle AB'A' + \measuredangle B'AB\end{aligned}.$$

Значи

$$\begin{aligned}\alpha &= \measuredangle M'CM - \measuredangle C'M'C = \measuredangle M'PM - \measuredangle C'M'C \\ &= \measuredangle AB'A' + \measuredangle B'AB - \measuredangle C'M'C \\ &= \frac{1}{2}(\measuredangle AOA' + \measuredangle B'OB - \measuredangle C'OC)\end{aligned},$$

каде што O е центарот на кружницата.

Големината на аголот $\frac{1}{2}(\measuredangle AOA' + \measuredangle B'OB - \measuredangle C'OC)$ не зависи од позицијата на точката P, односно е константен агол. ■

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија