

# Magičnost zvjezdastih poligona

Sanela Halilović<sup>1</sup>, Šejla Jusić<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Tuzli

<sup>2</sup> Tehnički fakultet, Univerzitet u Bihaću

**Sažetak:** U ovom radu je obrađena tematika zvjezdastih poligona, koji su zbog svog specifičnog izgleda dugo vremena privlačili pažnju umjetnika i matematičara. Kod ovih poligona smo određivali unutrašnje uglove, sumu unutrašnjih uglova i površinu poligona. Također su navedeni neki posebni zvjezdasti poligoni kao što su pentagram, heksagram, oktagram i Lakshmi zvijezda. Pokazali smo da se kod pravilnih zvjezdastih poligona pojavljuju zlatni, srebrni i Córdoba omjer, te su korišteni kao uzorci u mnogim djelima likovne umjetnosti i arhitekture. U završnom dijelu rada pažnja je posvećena magičnim zvjezdastim poligonima.

## 1. Uvod

Zvjezdasti poligoni su jedna posebna vrsta nekonveksnih poligona. Zanimljivi su po svojoj geometrijskoj strukturi, vezi sa poznatim veličinama zlatnog i srebrnog omjera, pa ih susrećemo u raznim matematičkim problemima. Od davnina privlače pažnju umjetnika, te su se kao uzorci koristili u ukrašavanju poznatih historijskih građevina. Pojedini zvjezdasti poligoni koji su dobili i posebne nazive (pentagram, Davidova zvijezda, zvijezda Lakshmi, oktagram itd.) predstavljaju značajne simbole u pojedinim kulturama, a pripisuju im se i neke magične moći. Da bismo definisali poligon, prisjetimo se najprije nekih matematičkih definicija i činjenica.

**Definicija 1.1.** *Izlomljena linija* je unija od konačno mnogo različitih duži  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{A_2A_3}$ , ...,  $\overline{A_{n-1}A_n}$  u ravni, zadanih u određenom poretku, tako da se jedan kraj svake duži (osim zadnje) podudara s jednim krajem naredne duži. Duži koje čine izlomljenu liniju zovu se njezine **stranice**, njihovi krajevi su njeni **vrhovi**. S obzirom na dani poredak duži i vrhova, prvi vrh prve duži  $A_1$  je početak, a drugi vrh zadnje duži  $A_n$  je kraj izlomljene linije.

Izlomljena linija koja se sastoji od duži  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{A_2A_3}$ , ...,  $\overline{A_{n-1}A_n}$  zapisuje se samo pomoću vrhova  $A_1A_1 \dots A_n$ .

Izlomljena linija je *zatvorena* ako joj se početak i kraj podudaraju.

Izlomljena linija je *jednostavna* ako svaka njena tačka leži ili na samo jednoj njenoj stranici ili na samo dvjema stranicama kod kojih je ta tačka jedan kraj. U suprotnom se izlomljena linija zove *samopresijecajuća* izlomljena linija.

Zatvorena izlomljena linija se zove još i *jednodimenzionalni poligon*. Ako je ta linija i jednostavna onda se takav poligon zove *jednostavan poligon* ili *poligonalna kružnica*, a inače je *nejednostavan* ili *zvjezdast poligon*.

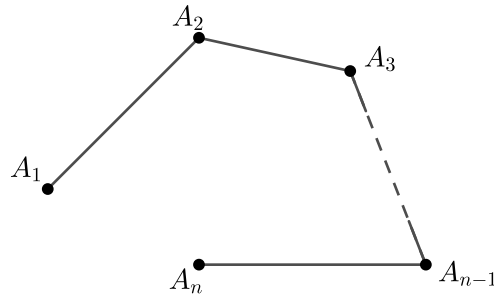
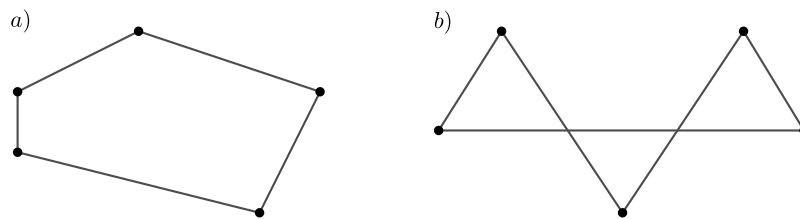
---

*Ciljna skupina:* srednja škola, fakultet

*Gljučne riječi:* zvjezdasti poligon, pentagram, zlatni rez, srebrni omjer, Córdoba omjer, magična zvijezda

*Kategorizacija:* Stručno-istraživački rad

*Rad preuzet:* 2023.

Slika 1: Izlomljena linija  $A_1A_2 \dots A_n$ 

Slika 2: a) Jednostavan jednodimenzionalni poligon i b) nejednostavan (zvjezdast) poligon

*Jednostavni dvodimenzionalni poligon* je unija jednostavnog jednodimenzionalnog poligona i njegove unutrašnjosti. Jednostavni jednodimenzionalni poligon se tada zove *rub* ili *obod* (*kontura*) danog dvodimenzionalnog poligona. Jednostavni dvodimenzionalni poligon ćemo kraće zvati *poligon* ili *mnogougao*, a ukoliko ima  $n$  vrhova zvat ćemo ga  $n$ -*tougao*.

Jedna od podjela poligona je na

- konveksne i
- nekonveksne (konkavne) poligone.

Poligon je *konveksan* ako se sve tačke duži čiji vrhovi pripadaju poligonu, također pripadaju tom poligonu.

Prije nego što iskažemo sljedeću teoremu najprije ćemo se prisjetiti šta znači da je skup konveksan. Naime, za skup  $S$  u ravni kažemo da je konveksan ako vrijedi  $A, B \in S \Rightarrow \overline{AB} \subseteq S$ .

**Teorem 1.2.** *Konveksni poligon u ravni je konveksan skup.*

**Dokaz:** Neka je  $M_i$  poluravan u kojoj se nalazi poligon  $P = A_1A_2 \dots A_n$  određena stranicom  $\overline{A_iA_{i+1}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  ( $A_{n+1} = A_1$ ).  $M_i$  je konveksan skup, a konveksni poligon je očito jednak presjeku  $M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$ . Kako je presjek konveksnih skupova ponovo konveksan skup, to je tvrdnja dokazana.  $\square$

Važna vrsta poligona su *pravilni* poligoni. Pravilni poligoni su oni poligoni koji imaju međusobno jednake stranice i međusobno jednake sve uglove. Treba imati na umu, da samo za trougao iz jednakosti stranica slijedi jednakost uglova i obratno. Naime, za svaki  $n \geq 4$  postoji  $n$ -tougao kojem su sve stranice jednake, a uglovi različiti i obratno.

## 2. Zvjezdasti poligoni

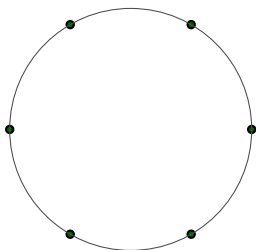
Posebna vrsta nekonveksnog (konkavnog) poligona jeste zvjezdasti poligon. Samo pravilni zvjezdasti poligoni su detaljnije istraženi. Zbog svog izgleda, pravilni zvjezdasti poligoni su stoljećima privlačili pažnju

umjetnika i matematičara. Prvi koji je proučavao njihova geometrijska svojstva je bio engleski nadbiskup od Catherburyja, matematičar i filozof Thomas Bradwardin. Međutim, njegove bilješke su ostale neotkrivene godinama nakon njegove smrti. Johannes Kepler ih je također opisivao u prvom i drugom poglavlju knjige *Harmonije svijeta*. U 19. stoljeću je poznati matematičar Coxeter predstavio detaljnu teoriju pravilnih zvjezdastih poligona dokazavši brojna geometrijska svojstva.

**Definicija 2.1.** *Neka su  $n$  i  $p$  prirodni brojevi,  $n \geq 3$ , te neka je na kružnici  $k$  na međusobno jednakim udaljenostima raspoređeno  $n$  tačaka. Povezivanjem svake  $p$ -te tačke dobija se figura koju zovemo **pravilni poligon**. Ako je  $p \geq 2$  i  $p \neq \frac{n}{2}$  onda dobijamo **pravilni zvjezdasti poligon**. Broj  $p$  se zove **gustoća** ili **kružna opisanost** poligona. Kažemo još da poligon ima  $p$  **opisanost**.*

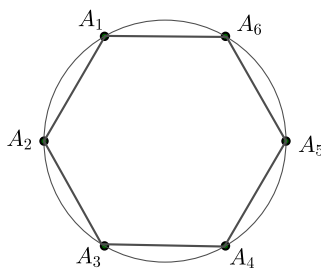
Pravilni zvjezdasti poligon se obilježava sa Schäffi simbolom  $\left\{ \frac{n}{p} \right\}$ .

Kad bi bilo  $p = 0$  onda vrhovi ne bi bili spojeni i ne bismo mogli definisati niti unutrašnji ugao, niti bismo mogli računati površinu. Ipak, takav poligon zovemo *diskretnom zvijezdom*.



Slika 3: Diskretna zvijezda

Kad bi bilo  $p = 1$  onda bismo spajali svaki susjedni vrh i dobili bismo pravilni konveksni poligon s  $n$  vrhova i označavamo ga onda s  $\{n\}$ .

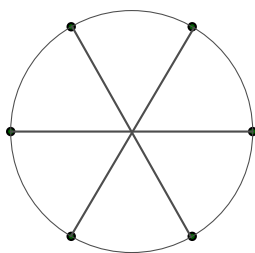
Slika 4: Pravilni poligon  $\{6\}$ 

**Primjedba 2.2.** *Kod označavanja tačaka poligona koristimo smjer obrnut kretanju kazaljke na satu, tzv. pozitivna orijentacija.*

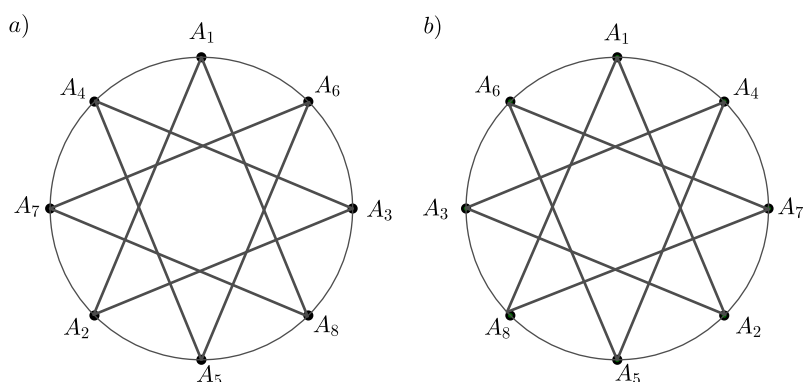
Kad bi bilo  $p = \frac{n}{2}$  i  $n$  paran broj, onda bismo spajali samo suprotne vrhove i dobili bismo figuru koju nazivamo *asteriks* (Slika 5).

Posmatrajmo zvjezdaste poligone  $\left\{ \frac{8}{3} \right\}$  i  $\left\{ \frac{8}{5} \right\}$  (Slika 6). Vidimo da su  $\left\{ \frac{8}{3} \right\}$  i  $\left\{ \frac{8}{5} \right\}$  dva ista zvjezdasta poligona. Naime, spajanjem svake  $p$ -te tačke i spajanjem svake  $(n - p)$ -te tačke dobijamo isti poligon.

Zbog svega navedenog možemo smatrati da je  $p < \frac{n}{2}$  bez ikakvog smanjenja općenitosti. Broj  $p$  se naziva *kružna opisanost* jer predstavlja broj krugova koji se opišu kad obilazimo kružnicu redom od tačke  $A_1$  do tačke  $A_n$  i onda se vratimo na  $A_1$ . Tako za pravilne konveksne poligone vrijedi  $p = 1$ . Za zvjezdaste poligone



Slika 5: Asteriks

Slika 6: Pravilni zvjezdasti poligoni a)  $\left\{\frac{8}{3}\right\}$ , b)  $\left\{\frac{8}{2}\right\}$ 

na Slikama 6 a) i 7 vidimo da se obiđu 3 kruga za poligon  $\left\{\frac{8}{3}\right\}$  i 2 kruga za poligon  $\left\{\frac{8}{2}\right\}$  kad obilazimo redom tačke  $A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A_6 - A_7 - A_8 - A_1$ .

Posmatrajmo sad konstrukciju poligona  $\left\{\frac{8}{2}\right\}$ .

Vidimo da u nekim slučajevima, kao npr.  $\left\{\frac{8}{3}\right\}$  možemo obići sve vrhove u jednom potezu, dok u drugim slučajevima kao npr.  $\left\{\frac{8}{2}\right\}$  crtanje pravilnog zvjezdastog poligona završi već nakon par koraka iako nisu svi vrhovi posjećeni. Razlika je u tome što su u prvom slučaju brojevi  $n = 8$  i  $p = 3$  relativno prosti, a u drugom slučaju  $n = 8$  i  $p = 2$  nisu relativno prosti. Ukoliko svi vrhovi nisu posjećeni, onda u sljedećem koraku odaberemo prvi sljedeći slobodan vrh i ponavljamo postupak sve dok svi vrhovi ne budu posjećeni tačno jedanput.

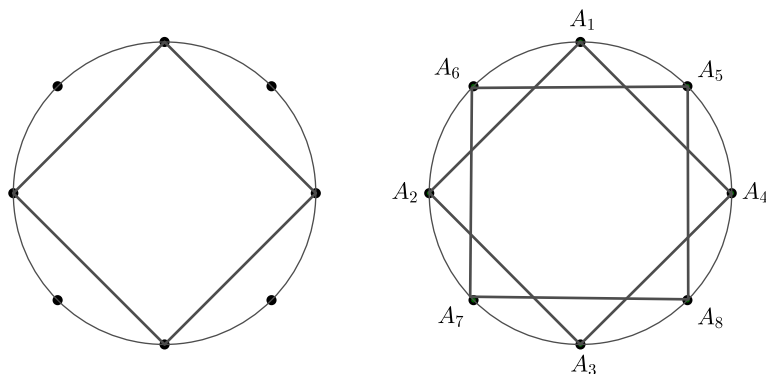
Dakle, ako  $n$  i  $p$  imaju najveći zajednički djelitelj  $d > 1$  onda se  $\left\{\frac{n}{p}\right\}$  sastoji od  $d$  poligona  $\left\{\frac{n/d}{p/d}\right\}$ . Tada kažemo da je  $\left\{\frac{n}{p}\right\}$  višestruki poligon.

Ukoliko su  $n$  i  $p$  relativno prosti, tada takve zvjezdaste poligone nazivamo *jednostavnim pravilnim zvjezdastim poligonima*.

**Primjedba 2.3.** Presječne tačke u kojima se stranice mnogougla međusobno presijecaju ne ubrajamo u vrhove mnogougla.

Za svaki prirodan broj  $n \geq 3$  postoji tačno jedan poligon s  $n$  vrhova kod kojeg su sve stranice jednakih dužina, svi uglovi jednaki i ima opisanost 1. Takav poligon je konveksan, tj. za svake svoje dvije tačke sadrži i sve tačke koje se nalaze između njih. Svi ostali poligoni s  $n$  vrhova koji imaju sve stranice jednakih dužina i sve jednake uglove su nekonveksni i imaju opisanost veću od 1.

Konveksni poligon koji ima sve stranice jednake dužine i sve jednake uglove nazivamo *pravilni konveksni poligon*. Sve ostale poligone koji imaju jednake stranice i jednake uglove ćemo zvati *pravilnim nekonveksnim poligonom* ili *zvjezdastim pravilnim poligonom*.

Slika 7: Konstrukcija pravilnog zvjezdastog poligona  $\left\{\frac{8}{2}\right\}$ 

**Definicija 2.4.** Funkcija  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , koja prirodnom broju  $n$  pridružuje broj prirodnih brojeva manjih ili jednakih  $n$ , koji su relativno prosti s  $n$ , naziva se **Eulerova funkcija**.

Pokazuje se da vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 2.5.** Neka je  $n \geq 3$  prirodan broj. Broj svih pravilnih poligona (konveksnih ili nekonveksnih) s  $n$  vrhova jednak je  $\frac{\varphi(n)}{2}$ .

**Dokaz:** Dokaz se može pronaći u [7].  $\square$

### 2.1. Unutrašnji ugao pravilnih zvjezdastih poligona

Za veličinu unutrašnjeg ugla pravilnog zvjezdastog poligona vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 2.6.** Unutrašnji ugao pri vrhu pravilnog  $\left\{\frac{n}{p}\right\}$  zvjezdastog poligona iznosi  $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}p$ .

**Dokaz:** Tačka  $T_0$  se rotacijom za  $\frac{360^\circ}{n} \cdot 2p$  oko središta  $S$  kružnice na kojoj leže vrhovi posmatrane figure preslika u tačku  $T_{2p}$ . Tada je

$$\angle T_0ST_{2p} = 360^\circ - \frac{360^\circ}{n} \cdot 2p.$$

Na Slici 8 vidimo da se zaista tačka  $T_0$  rotacijom za  $\frac{360^\circ}{12} \cdot 2 \cdot 5 = 300^\circ$  preslika u tačku  $T_{2 \cdot 5} = T_{10}$ . Kako je  $\angle T_0ST_{2p}$  centralni ugao nad tetivom  $\overline{T_0T_{2p}}$  i  $\angle T_0T_pT_{2p}$  periferijski ugao nad istom tom tetivom, to je

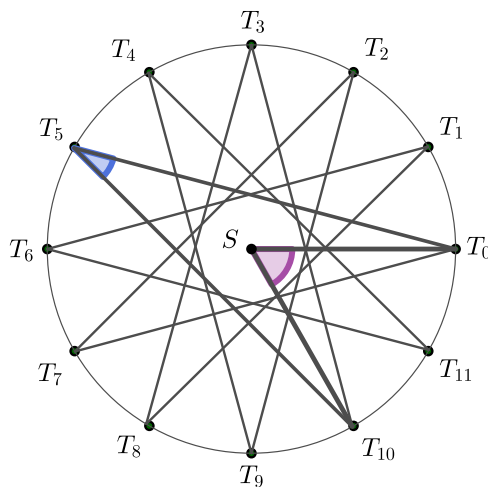
$$\angle T_0T_pT_{2p} = \frac{360^\circ - \frac{360^\circ}{n} \cdot 2p}{2} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \cdot p. \quad (1)$$

$\square$

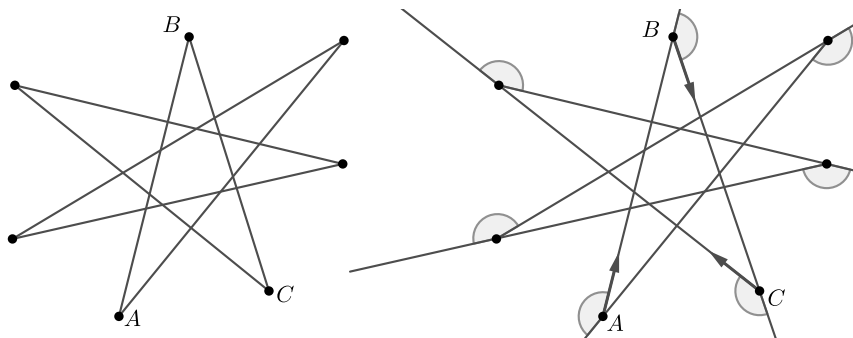
Kako u pravilnom  $\left\{\frac{n}{p}\right\}$  zvjezdastom poligonu ima ukupno  $n$  vrhova, onda je zbir unutrašnjih uglova jednak

$$S_n = n \cdot \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \cdot p\right) = (n - 2p) \cdot 180^\circ. \quad (2)$$

Ova relacija vrijedi i za nepravilne zvjezdaste poligone. Nepravilne zvjezdaste poligone označavamo sa  $\left[\frac{n}{p}\right]$ . Naime, neka je zadan nepravilni zvjezdasti poligon  $\left[\frac{n}{p}\right]$  i neka su  $n$  i  $p$  relativno prosti. Na Slici 9 je prikazan



Slika 8: Pravilni zvjezdasti poligon  $\left\{\frac{12}{5}\right\}$ .



Slika 9: Nepravilni zvjezdasti poligon  $\left[\frac{7}{3}\right]$

nepravilni zvjezdasti poligon  $\left[\frac{7}{3}\right]$ . Zamislimo mrava koji putuje od tačke  $A$  do tačke  $B$ , okrećući se kroz označeni vanjski ugao, a zatim nastavljajući do  $C$  ponovo se okrećući itd. Kada se mrav vrati u  $A$  gledat će u istom smjeru kao i kad je krenuo. Ukupno skretanje su tri potpuna kruga.

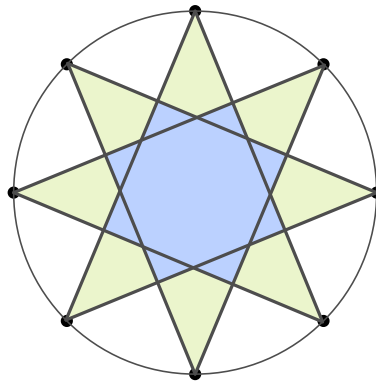
Dakle, suma svih vanjskih uglova je  $3 \cdot 360^\circ$ . Kako je svaki unutrašnji ugao jednak razlici ispruženog ugla i odgovarajućeg vanjskog ugla, to je suma svih unutrašnjih uglova jednaka  $7 \cdot 180^\circ - 3 \cdot 360^\circ = (7 - 2 \cdot 3)180^\circ$ . Kada zamijenimo  $\left[\frac{7}{3}\right]$  s  $\left[\frac{n}{p}\right]$  dobijamo da je suma unutrašnjih uglova  $(n - 2p)180^\circ$ .

### 2.2. Površina pravilnih zvjezdastih poligona

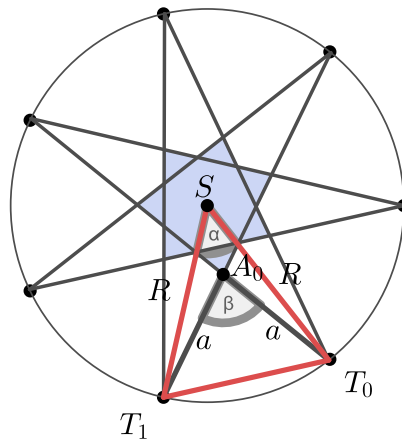
Unutar svakog  $\left\{\frac{n}{p}\right\}$  pravilnog zvjezdastog poligona možemo uočiti  $\left\{\frac{n}{p-1}\right\}$  pravilni zvjezdasti poligon. Unutar  $\left\{\frac{n}{p-1}\right\}$  možemo uočiti pravilni  $\left\{\frac{n}{p-2}\right\}$  zvjezdasti poligon. Dakle, unutar svakog  $\left\{\frac{n}{p}\right\}$  pravilnog zvjezdastog poligona postoji  $p$  pravilnih zvjezdastih poligona čija se gustoća razlikuje za 1.

Svaki pravilni  $\left\{\frac{n}{p}\right\}$  zvjezdasti poligon možemo rastaviti na  $1 + np - n$  geometrijskih figura, i to jedan pravilni poligon,  $n$  trouglova i  $n(p - 2)$  deltoida.

Na Slici 10 vidimo da se  $\left\{\frac{8}{3}\right\}$  rastavlja na jedan pravilni 8-ugao (osmorougao), 8 trouglova i 8 deltoida. Poluprečnik kružnice koja je opisana pravilnom  $\left\{\frac{n}{p}\right\}$  zvjezdastom poligonu označimo s  $R$ . Površinu ovog poligona ćemo odrediti tako da od površine pravilnog  $n$ -ougla oduzmemo površinu jednakokrakih trouglova s kracima koji se podudaraju sa krakovima pravilnog zvjezdastog poligona.



Slika 10: Pravilni zvjezdasti poligoni  $\{\frac{8}{3}\}$  i  $\{\frac{8}{2}\}$  (plave boje)



Slika 11: Pravilni zvjezdasti poligon  $\{\frac{7}{3}\}$

Najprije ćemo izračunati površinu pravilnog  $n$ -tougla. Podijelit ćemo  $n$ -tougao na  $n$  podudarnih jednakokrakih trouglova s krakom dužine  $R$  i uglom prvi vrhu  $S$  koji iznosi  $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ . Površina takvog trougla je

$$P_{\Delta T_0 S T_1} = \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Kako se  $n$ -terougao sastoji od  $n$  takvih trouglova, to je njegova površina

$$P_{\{n\}} = n \cdot P_{\Delta T_0 S T_1} = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}. \quad (3)$$

Sad treba odrediti površinu trouglova  $\Delta T_i A_i T_{i+1}$ , gdje  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  i  $A_i$  je sjecište (presjek) duži koje spajaju vrhove pravilnog poligona. Kako ovi trouglovi imaju jednake krakove i ugao između njih, to su prema pravilu *SUS* ovi trouglovi podudarni i dovoljno je izračunati površinu jednog od njih. Izračunajmo površinu trougla  $T_0 A_0 T_1$  (pogledati Sliku 11). Kao što smo rekli, unutar pravilnog  $\{\frac{n}{p}\}$  zvjezdastog poligona nalazi se pravilni  $\{\frac{n}{p-1}\}$  zvjezdasti poligon. Označen je plavom bojom. Unutrašnji ugao pri vrhu  $A_0$  zvjezdastog

poligona  $\left\{\frac{n}{p-1}\right\}$  je unakrsan uglu  $\beta = \angle T_0A_0T_1$ , pa zbog (1) vrijedi  $\beta = 180^\circ - 360^\circ \frac{p-1}{n}$ .

Treba još izračunati dužinu kraka  $\left\{\frac{n}{p}\right\}$  pravilnog zvjezdastog poligona. Posmatrajmo trouglove  $\triangle T_0ST_1$  i  $\triangle T_0A_0T_1$ . Iz  $\triangle T_0ST_1$  je  $|T_0T_1| = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$ , tj.

$$|T_0T_1| = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}. \quad (4)$$

Iz  $\triangle T_0A_0T_1$  je

$$|T_0T_1| = 2a \sin \frac{\beta}{2} = 2a \sin \left(90^\circ - 180^\circ \frac{p-1}{n}\right) = 2a \cos \left(180^\circ \frac{p-1}{n}\right). \quad (5)$$

Izjednačavanjem jednakosti (4) i (5) dobijamo

$$a = R \frac{\sin \frac{180^\circ}{n}}{\cos \left(180^\circ \frac{p-1}{n}\right)}. \quad (6)$$

Površina trougla  $\triangle T_0A_0T_1$  je

$$P_{\triangle T_0A_0T_1} = \frac{1}{2} a^2 \sin \left(180^\circ - 360^\circ \frac{p-1}{n}\right) = \frac{1}{2} a^2 \sin \left(360^\circ \frac{p-1}{n}\right). \quad (7)$$

Površinu pravilnog  $\left\{\frac{n}{p}\right\}$  zvjezdastog poligona se računa po formuli

$$P_{\left\{\frac{n}{p}\right\}} = P_{\{n\}} - n \cdot P_{\triangle T_0A_0T_1}.$$

Uvrštavanjem izraza (3) i (7) u prethodnu jednakost dobijamo

$$P_{\left\{\frac{n}{p}\right\}} = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n} - \frac{n}{2} a^2 \sin \left(360^\circ \frac{p-1}{n}\right). \quad (8)$$

Uvrstimo li (6) u (8), dobijamo

$$P_{\left\{\frac{n}{p}\right\}} = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n} - \frac{n}{2} \cdot R^2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{180^\circ}{n}}{\cos^2 \left(180^\circ \frac{p-1}{n}\right)} \cdot \sin \left(360^\circ \frac{p-1}{n}\right).$$

Primjenom formule  $\sin \left(360^\circ \frac{p-1}{n}\right) = 2 \sin \left(180^\circ \frac{p-1}{n}\right) \cdot \cos \left(180^\circ \frac{p-1}{n}\right)$ , dobijamo sljedeću formulu za površinu

$$P_{\left\{\frac{n}{p}\right\}} = nR^2 \sin \frac{180^\circ}{n} \left( \cos \frac{180^\circ}{n} - \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ(p-1)}{n} \right). \quad (9)$$

Obim pravilnog  $\left\{\frac{n}{p}\right\}$  zvjezdastog poligona računamo po formuli  $O = 2na$ , jer on sadrži  $2n$  kraka dužine  $a$ . Uvrštavanjem (6) dobijamo

$$O = 2nR \frac{\sin \frac{180^\circ}{n}}{\cos \left(180^\circ \frac{p-1}{n}\right)}. \quad (10)$$

**Primjer 2.7.** Vrtlar Maksim želi u svome vrtu posaditi cvijeće u obliku pravilnog  $\left\{\frac{10}{3}\right\}$  zvjezdastog poligona, i taj cvjetnjak ograditi žicom tako da se na krajevima svakog kraka postavi stupac koji će držati žicu. Ukoliko Maksim želi da su suprotni vrhovi pravilnog zvjezdastog poligona udaljeni 2 m, odredite

- (1) površinu prekrivenu cvijećem,
- (2) potrebnu dužinu žice i



(3) broj potrebnih stubova.

**Rješenje:** Suprotni vrhovi pravilnog zvjezdastog poligona udaljeni su 2 m, pa je poluprečnik kružnice opisane oko njega  $R = 1$  m.

1. Površinu pravilnog  $\left\{\frac{10}{3}\right\}$  zvjezdastog poligona računamo po formuli (9). Sada je

$$P = 10 \cdot (1 \text{ m})^2 \cdot \sin 18^\circ (\cos 18^\circ - \sin 18^\circ \cdot \operatorname{tg} 36^\circ) \approx 2,245 \text{ m}^2.$$

Dakle, površina vrta je približno  $2,245 \text{ m}^2$ .

2. Da bismo odredili koliko je potrebno metara žice izračunat ćemo obim cvjetnjaka. Obim računamo po formuli (10), pa je

$$O = 2 \cdot 10 \cdot 1 \text{ m} \cdot \frac{\sin 18^\circ}{\cos 36^\circ} \approx 7,64 \text{ m}.$$

Potrebno je otprilike  $7,64 \text{ m}$  žice da bi se ogradio cvjetnjak.

3. Odredimo sada i broj potrebnih stupaca. Broj stupaca je jednak zbiru broja vrhova i broja presječnih tačaka koji odgovara broju vanjskih deltoida u pravilnom zvjezdastom mnogouglu. Naime, presječne tačke su 2 vrha deltoida, no kako je jedna presječna tačka vrh od dva deltoida, to je broj presječnica jednak  $\frac{2 \cdot 10}{2} = 10$  budući da presječne tačke brojimo dvaput. Stoga je broj stubova jednak  $10 + 10 = 20$ .

□

### 2.3. Neki zvjezdasti poligoni

Mnogi pravilni zvjezdasti poligoni imaju svoje ime. Tako je:

- $\left\{\frac{5}{2}\right\}$  – pentagram;
- $\left\{\frac{6}{2}\right\}$  – heksagram, Davidova zvijezda, Solomonov pečat;
- $\left\{\frac{8}{2}\right\}$  – zvijezda Lakshmi;
- $\left\{\frac{8}{3}\right\}$  – oktagram.

#### 2.3.1. Pentagram

Pravilni  $\left\{\frac{5}{2}\right\}$  zvjezdasti poligon se popularnije naziva pentagram. Još u antičkom razdoblju je predstavljao planete: Merkur, Veneru, Mars, Jupiter i Saturn te je simbolizirao vječnost. Također je znak prepoznavanja učenika pitagorejske škole, a sakralne građevine iz perioda srednjeg vijeka gotovo su sigurno ukrašene ornamentima takvog oblika. U srednjem vijeku je pentagram služio u magijske svrhe te su ga također koristili umjetnici i graditelji. Danas se obrnuti pentagram povezuje s okultizmom i crnom magijom.

Pentagram je direktno povezan sa zlatnim rezom i zlatnim trouglom.

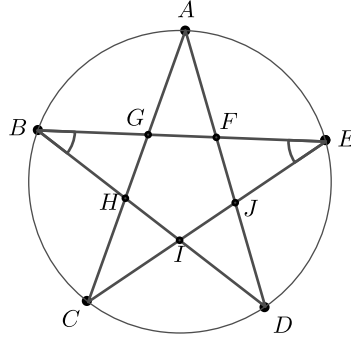
Kažemo da su dvije duži u omjeru zlatnog reza ako se dužina veće odnosi prema dužini manje duži isto kao što se zbir njihovih dužina odnosi prema dužini veće duži. Taj omjer iznosi  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , a naziva se još i božanski ili zlatni omjer.

Zlatni trougao je jednakokraki trougao u kojem se dužina kraka i dužina osnovice nalaze u omjeru zlatnog reza.

Zlatni rez nalazimo i u prirodi, umjetnosti i arhitekturi.

Posmatrajmo pentagram na Slici 12. Ovo je pravilni zvjezdasti poligon  $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ , pa na osnovu Teorema 2.6 možemo izračunati ugao pri vrhu

$$\angle BEC = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} \cdot 2 = 36^\circ, \quad \angle EBD = 36^\circ.$$



Slika 12: Pentagram

Treći ugao u trouglu  $\triangle BIE$  iznosi

$$\angle BIE = 180^\circ - (\angle BEC + \angle EBD) = 180^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 108^\circ.$$

Na osnovu sinusnog teorema za  $\triangle BIE$  nalazimo

$$\frac{|BE|}{|BI|} = \frac{\sin \angle BIE}{\sin \angle BEI} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} = 2 \cos 36^\circ = 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Kako je  $|BI| = |BF|$ , to slijedi

$$\frac{|BE|}{|BF|} = \Phi. \quad (11)$$

Prema tome, tačka  $F$  dijeli duž  $\overline{BE}$  u omjeru zlatnog reza. Analogno vrijedi i za tačke  $G, H, I, J$  i duži  $\overline{AC}, \overline{BD}, \overline{CE}, \overline{AD}$  redom. Označimo  $|BG| = |FE| = a$ ,  $|GF| = b$ . Iz (11) slijedi

$$\frac{2a + b}{a + b} = \frac{a + b}{a} = \Phi, \quad (12)$$

tj.

$$\frac{|BG| + |GF| + |FE|}{|BG| + |GF|} = \frac{|BG| + |GF|}{|BG|}.$$

Iz (12) dobijamo  $a^2 = b(a + b)$ , odnosno

$$\frac{a}{b} = \frac{a + b}{a}. \quad (13)$$

Na osnovu (12) i (13) zaključujemo

$$\frac{a}{b} = \Phi. \quad (14)$$

Ovo znači da za trougao  $\triangle AGF$  vrijedi

$$\frac{|AF|}{|GF|} = \frac{a}{b} = \Phi, \quad (15)$$

pa je to zlatni trougao. Analogno su i  $\triangle BGH$ ,  $\triangle HCI$ ,  $\triangle DIJ$  i  $\triangle FEJ$  zlatni trouglovi.

Pokazuje se i da trouglovi  $\triangle ACD$ ,  $\triangle BDE$ ,  $\triangle BDA$ ,  $\triangle ACE$  i  $\triangle BEC$  predstavljaju zlatne trouglove. Pokažimo da je  $\triangle ACD$  zlatni trougao. Uočimo sličnost trouglova  $\triangle ACD \sim \triangle AFG$ , te stoga vrijedi

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|AF|}{|FG|}.$$

Sada iz (15) slijedi

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \Phi.$$

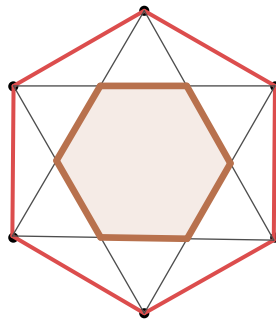
### 2.3.2. Heksagram

Heksagram (Davidova zvijezda) se pojavljuje na naslovnoj stranici lenjingradskog kodeksa, najstarijem sačuvanom prijepisu Starog zavijeta na hebrejskom jeziku. Datira iz davne 1008. ili 1009. godine. Davidova zvijezda je prepoznatljiv simbol judaizma i nalazi se na zastavi Izraela.



Slika 13: Davidova zvijezda na naslovnoj strani lenjingradskog kodeksa

Heksagram čine dva jednakostranična trougla, od kojih je jedan okrenut prema gore, a drugi prema dole. Tačke u kojima se stranice trougla međusobno sijeku formiraju novi heksagon, što se vidi na Slici 14.

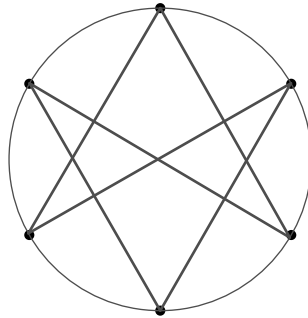


Slika 14: Heksagram

Za heksagram s poluprečnikom opisane kružnice  $R = a$  je poluprečnik upisane kružnice unutrašnjem heksagonu  $r = \frac{a}{2}$ , a poluprečnik opisane kružnice tom heksagonu je  $\rho = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

Lako se vidi da će površina unutrašnjeg heksagona biti dva puta manja od površine polaznog heksagrama, a površina heksagrama će biti  $\frac{2}{3}$  površine polaznog heksagona.

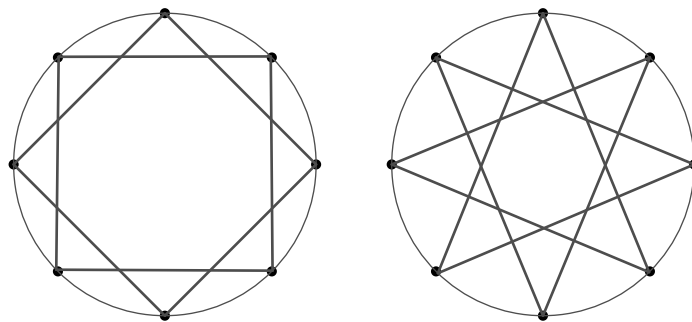
Drugi zvjezdasti heksagon je takozvani jednosmjerni heksagram, kao što je prikazano na Slici 15. Takav naziv je dobio jer se može dobiti u jednom neprekidnom pokretu. On nije pravilan, jer nisu sve stranice iste dužine. Suma unutrašnjih uglova je  $240^\circ$ .



Slika 15: Jednosmjerni heksagram

### 2.3.3. Zvijezda Lakshmi i oktagram

Dva pravilna zvjezdasta poligona se mogu konstruisati pomoću 8 tačaka ravnomjerno raspoređenih na kružnici i to je zvijezda Lakshmi  $\{\frac{8}{2}\}$  i oktagram  $\{\frac{8}{3}\}$ , kao što je prikazano na Slici 16.



Slika 16: Zvijezda Lakshmi i oktagram

U indijskoj filozofiji Lakshmi zvijezda simboliše *Ashtalakshmi*, osam božanskih oblika koji po svojoj individualnoj prirodi ispunjavaju sve ljudske potrebe i želje.

Dvije zanimljive konstante, *Córdoba omjer* i *srebrni omjer*, se mogu dobiti iz oktagrama. Da bismo to prikazali najprije trebamo pronaći dužine stranica  $\{\frac{8}{2}\}$  i  $\{\frac{8}{3}\}$  zvjezdastih poligona, tj. dužine dijagonala pravilnog oktagona. Lako se određuje koristeći se pravouglim trouglovima kao što je prikazano na Slici 17.

Ako stavimo da je stranica oktagona dužine 1 i  $d_1$ ,  $d_2$  i  $d_3$  njegove dijagonale, onda je

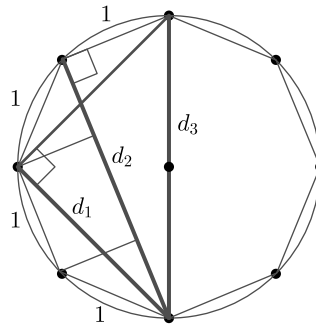
$$d_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad d_2 = 1 + \sqrt{2}, \quad d_3 = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$$

Poluprečnik opisane kružnice  $\{\frac{8}{2}\}$  zvijezde je

$$R = \frac{d_3}{2} = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\sqrt{2}}} \approx 1,3065.$$

Dobijena konstanta se naziva Córdoba omjer, a prvi ju je otkrio španski arhitekt Rafael de la Hoz. On je otkrio da se ovaj omjer nalazi u mnogim arapskim i mavarskim građevinama kao npr. Mezquita džamija u Córdoba.

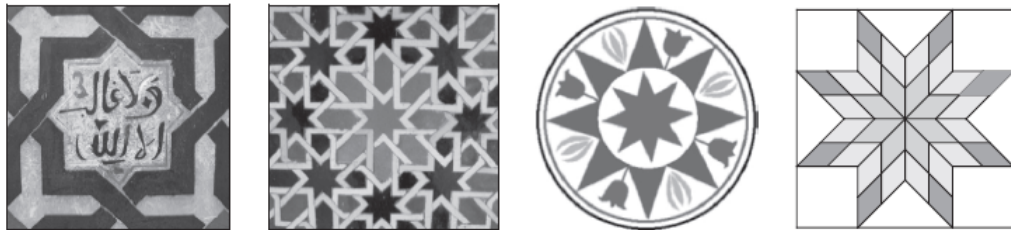
Dužina stranice oktagrama  $d_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2,414$  se naziva srebrni omjer zbog zajedničkih osobina s zlatnim omjerom. Čest simbol za srebrni omjer je  $\delta_S$ .



Slika 17: Dijagonale pravilnog oktagona

I  $\Phi$  i  $\delta_S$  se javljaju kao dužine stranica zvjezdastih poligona i imaju jednostavan razvoj u verižni razlomak. Naime, vrijedi

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad \text{i} \quad \delta_S = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$



Slika 18: Zvjezdasti poligoni u poznatim građevinama.

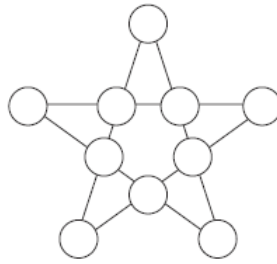
Veličanstvena Alhambra u Granadi je poznata po arabesknim ukrasima, a jedan od tih ukrasa vidimo na prvoj slici (u Slici 18) gdje se može uočiti Lakshmi zvijezda  $\{\frac{8}{2}\}$  iz Patio del Cuarto Dorado. Na drugoj slici (u Slici 18) je ukras iz Real Alcázar u Sevilji na kojem se nalazi oktagram unutar  $\{\frac{8}{2}\}$  zvijezde koja je okružena sa osam  $\{\frac{8}{3}\}$  zvijezdi. Treća slika (u Slici 18) predstavlja znak obilja i dobre volje, a nalazi se na građevini iz istočne Pensilvanije sagrađene sredinom 19. stoljeća. Zadnja slika (u Slici 18) prikazuje tradicionalnu zvijezdu Betlehema koja krasi mnoge sakralne objekte.

#### 2.4. Zvjezdasti poligoni u popularnoj matematici

Postoji mnogo matematičkih problema gdje se javljaju zvjezdasti poligoni. Njih je naročito popularizirao Martin Gardner. Magične zvijezde su slične magičnim kvadratima. Šablon za magični pentagram izgleda kao na Slici 19.

Cilj je popuniti ćelije s brojevima tako da suma brojeva u svakoj liniji bude ista. Ta suma se naziva magična konstanta.

Za magični pentagram je lako pronaći magičnu konstantu. Naime, kako imamo brojeve od 1 do 10, a suma tih brojeva je 55, a svaki broj se pojavljuje u dvije linije, onda suma brojeva u pet linija je  $2 \cdot 55 = 110$ . Kako je suma u svakoj liniji ista, to je onda magična konstanta, ukoliko magični pentagram postoji, jednaka  $\frac{110}{5} = 22$ .



Slika 19: Šablon za magični pentagram

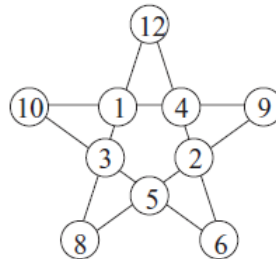
Međutim, magični pentagram ne postoji. Dvije linije koje sadrže broj 1 bi trebale imati šest brojeva čija je suma  $2 \cdot (22 - 1) = 42$ . Kako je  $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 39$ , to 1 i 10 moraju ležati u istoj liniji, neka je to linija  $A$ . Neka je  $B$  druga linija koja prolazi kroz 1, a  $C$  linija kroz 10. Ako linija  $A$  sadrži brojeve 1, 10, 4 i 7, onda je nemoguće pronaći brojeve koji bi bili na linijama  $B$  i  $C$ . Imamo sljedeće mogućnosti navedene u Tablici 1.

$A$	$B$	$C$
1, 10, 2, 9	1, 6, 7, 8	10, 5, 4, 3
1, 10, 3, 8	1, 5, 7, 9	10, 6, 4, 2
1, 10, 5, 6	1, 4, 8, 9	10, 7, 3, 2

Tablica 1: Mogućnosti popunjavanja linija

Kako ni za jednu kombinaciju linije  $B$  i  $C$  nemaju zajedničkih brojeva, to magični kvadrat ne postoji.

Ukoliko se ne ograničavamo da brojevi moraju biti između 1 i 10, nego samo zahtijevamo da brojevi budu prirodni i različiti, onda možemo popuniti magični pentagram, kao npr. na Slici 20.

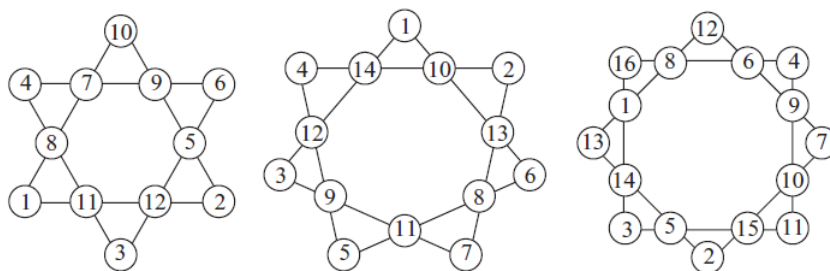


Slika 20: Magični pentagram ukoliko se ne ograničavamo na brojeve od 1 do 10

Magični heksagrami, heptagrami i oktagrami postoje, sa magičnim konstantama 26, 30 i 34, respektivno. Može se pokazati da postoji 80 različitih heksagrama, 72 različita heptagrama i 112 različitih oktagrama (vidi Sliku 21).

### 3. Zaključak

Zvjezdasti poligoni imaju mnoge interesantne osobine i pojavljuju se svuda oko nas. U ovom radu smo samo izložili kako se računaju neki njihovi uglovi i površine, sa posebnim osvrtom na pentagram, heksagram, zvijezdu Lakshmi i oktagram. Pokazali smo vezu između pentagrama i zlatnog omjera, te vezu između oktagrama i srebrnog i Córdoba omjera. Vidjeli smo da se i u popularnoj matematici susrećemo sa zvjezdastim poligonima, gdje im se dodaje pridjev *magični*. Zainteresovanim čitaocima možemo toplo preporučiti dalje otkrivanje ljepota i magičnosti zvjezdastih poligona.



Slika 21: Magični heksagram, heptagram i oktagram

## Literatura

- [1] C. Alsina, R. B. Nelsen: *Icons of Mathematics – An Exploration of Twenty Key Images*, The Mathematical Association of America, 2011.
- [2] A. Corn, Lj. Primorac Gajčić: Pravilni zvjezdasti mnogokuti, *Osječki matematički list*, 17, 161–170, 2017.
- [3] H. S. M. Coxeter: *Introduction to Geometry*, John Wiley & sons, inc., New York, 1969.
- [4] H. S. M. Coxeter: *Regular Polytopes*, Methuen & Co Ltd., London, 1948.
- [5] S. K. Ghosh: *Visibility Algorithms in the Plane*, Cambridge University Press, 2007.
- [6] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.
- [7] Grupa studenata Filozofskog fakulteta u Rijeci, O poligonima kojima su sve stranice jednake i svi kutovi jednaki, *Matematičko – fizički list*, LVIII 2 (2007.–2008.), Zagreb
- [8] V. Benčić: *Elementarna geometrija*, II. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1974.
- [9] B. Bold: *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, New York: Dover, 1982.