Сабота, 15 април, 2023

Задача 1. Дадени се $n \geqslant 3$ позитивни реални броеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$. За секое $1 \leqslant i \leqslant n$ се дефинира $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ (притоа земаме дека a_0 е еднакво со a_n и a_{n+1} е еднакво со a_1). Претпоставуваме дека за секои i и j од 1 до n важи $a_i \leqslant a_j$ ако и само ако $b_i \leqslant b_j$.

Докажи дека $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Задача 2. Даден е остроаголен триаголник ABC. Нека D е точка на неговата опишана кружница таква што отсечката AD е нејзин дијаметар. Нека точките K и L лежат на отсечките AB и AC, соодветно, и нека DK и DL се тангенти за кружницата AKL.

Докажи дека правата KL минува низ ортоцентарот на триаголникот ABC.

Ортоцентар на триаголник е пресечната точка на висините на триаголникот.

Задача 3. Нека k е природен број. Лекси има речник $\mathcal{D}$ кој се состои од зборови со должина k, запишани само со буквите A и B. Лекси сака да пополни мрежа со $k \times k$ полиња, запишувајќи ги само буквите A или B во секоја од ќелиите на мрежата, така што секоја колона содржи збор од $\mathcal{D}$ кога читаме од горе надолу и секој ред содржи збор од $\mathcal{D}$ кога читаме од лево на десно.

Кој е најмалиот цел број m таков што ако $\mathcal{D}$ содржи најмалку m различни зборови, тогаш Лекси може да ја пополни мрежата на горе наведениот начин, без разлика кои зборови се во $\mathcal{D}$?

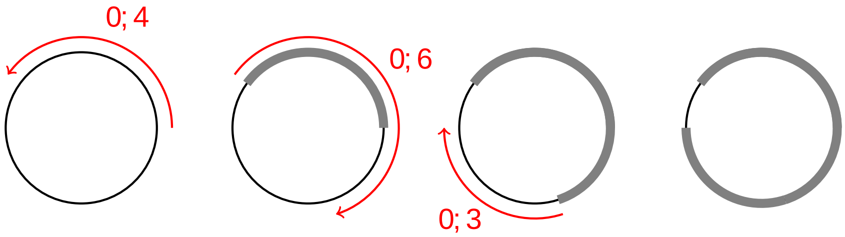
Време: 4 часа и 30 минути
Секоја задача носи 7 поени

Проблемите се од доверлива природа заклучно со недела, 16 април, 22:00 UTC (00:00 (понеделник) по централно европско време (CET)).

Íåäåëà, 16 àïðèë, 2023

Çàäà÷à 4. Ïîëæàâîò Òóðáî ñå íàîãà âî òî÷êà îä êðóæíèöà ñî ïåðèìåòàð 1. Çà äàäåíà áåñêîíå÷íà íèçà îä ïîçèòèâíè ðåàëíè áðîåâè $c_1; c_2; c_3; :::$. Òóðáî óñïåøíî ëàçè ïîìèíóâàjêè ðàñòîjàíèjà $c_1; c_2; c_3; :::$ ïî êðóæíèöàòà, ïðèòîà âî ñåêîj ÷åêîð èçáèðà âî êîjà íàñîêà êå ëàçè, äàëè âî íàñîêà èëè ñïðîòèâíî îä íàñîêàòà íà ñòðåëêèòå íà ÷àñîâíèêîò.

Íà ïðèìåð, àêî íèçàòà ðàñòîjàíèjà $c_1; c_2; c_3; :::$ å $0;4; 0;6; 0;3; :::$, òîãàø Òóðáî ïî÷íóâà äà ëàçè íà ñëåäíèîò íà÷èí:



Îäðåäè jà íàjãîëåìàòà êîíñòàíòà $C > 0$ êîjà ãî çàäîâîëóâà ñëåäíîòî ñâîjñòâî: çà ñåêîjà íèçà îä ïîçèòèâíè ðåàëíè áðîåâè $c_1; c_2; c_3; :::$, çà êîè, çà ñåêîå i âàæè $c_i < C$, Òóðáî ìîæå (îòêàêî êå jà ïðîó÷è íèçàòà) äà å ñèãóðåí äåêà ïîñòîè òî÷êà íà êðóæíèöàòà âî êîjà íåìà äà çàñòàíå, íèòó ïàê ïðåêó íåà êå ïîìèíå.

Çàäà÷à 5. Äàäåí å ïðèðîäåí áðîj $s > 2$. Çà ñåêîj ïðèðîäåí áðîj k, äåôèíèðàìå íåãîâî èçâðòó-âà»å k^0 íà ñëåäíèîò íà÷èí: ãî çàïèøóâàìå k âî îáëèê $as + b$, êàäå $a; b$ ñå íåíåãàòèâíè öåëè áðîåâè è $b < s$, è òîãàø ñòàâàìå $k^0 = bs + a$. Çà ïðèðîäíèîò áðîj n, jà ðàçãëåäóâàìå áåñêîíå÷íàòà íèçà $d_1; d_2; :::$, êàäå $d_1 = n$ è d_{i+1} å èçâðòóâà»åòî íà d_i çà ñåêîj ïðèðîäåí áðîj i.

Äîêàæè äåêà îâàà íèçà ãî ñîäðæè áðîjîò 1 àêî è ñàìî àêî îñòàòîêîò ïðè äåëå»åòî íà n ñî s^2 1 å èëè 1 èëè s.

Çàäà÷à 6. Íåêà ABC å òðèàãîëíèê ñî îïèøàíà êðóæíèöà . Ñî S_b è S_c ñîîäâåòíî, ãè îçíà÷ó-âàìå ñðåäèíèòå íà êðóæíèöèòå ëàöè AC è AB òàêà øòî ëàöèòå íå ãî ñîäðæàò òðåòîòî òåìå. Ñî N_a å îçíà÷åíà ñðåäèíàòà íà ëàêîò BAC (òîà å ëàêîò BC êîj jà ñîäðæè òî÷êàòà A). Ñî I å îçíà÷åí öåíòàðîò íà âïèøàíàòà êðóæíèöà âî òðèàãîëíèêîò ABC. Íåêà $!_b$ å êðóæíèöàòà êîjà jà äîïèðà ñòðàíàòà AB è îäâíàòðå jà äîïèðà êðóæíèöàòà âî òî÷êàòà S_b, è íåêà $!_c$ å êðóæíèöà êîjà jà äîïèðà ñòðàíàòà AC è îäâíàòðå jà äîïèðà êðóæíèöàòà âî òî÷êàòà S_c. Äîêàæè äåêà ïðàâàòà IN_a è ïðàâàòà êîjà ìèíóâà íèç ïðåñåöèòå íà êðóæíèöèòå $!_b$ è $!_c$, ñå ñå÷àò íà êðóæíèöàòà .

Âïèøàíà êðóæíèöà íà òðèàãîëíèêîò å êðóæíèöàòà êîjà ãè äîïèðà ñèòå òðè ñòðàíè íà òðè-àãîëíèêîò.

Ïðîáëåìèòå ñå îä äîâåðëèâà ïðèðîäà çàêëó÷íî ñî íåäåëà, 16 àïðèë, 22:00 UTC (00:00 (ïîíåäåëíèê) ïî öåíòðàëíî åâðîïñêî âðåìå (CET)).