Ристо Малчески
Алит Ибраими
Алекса Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ С9

(збирка нерешени задачи за натпревари за средно образиование)

Скопје, 2020

Рецензенти

Слаѓана Брсаковска
Катерина Аневска

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент* C9 (*збирка нерешени задачи за натпревари за средно образование*) е дел од серијата збирки во која веќе се издадени осум книги, по две за секоја година во средното образование. Во книгата се содржани вкупно 2340 нерешени задачи, од кои 1937 се задачи на основно ниво, т.е. задачи за подготовка за општинските, регионалните и државните натпревари, а 403 се задачи на напредно ниво и истите се наменети за подготовка за меѓународните натпревари. Незначителен дел од задачите се содржани во претходните осум книги, а нивното поместување во оваа книга е во функција на поврзување на книгите во една целина.

Задачите во основното ниво се поделени во 18 теми, со што практично се опфатени сите области од елементарната математика кои се застапени до државните натпревари. Притоа, во некои теми задачи се распределени на поттеми, што има за цел учениците полесно да препознаат со кој апарат треба да се решаваат определени задачи. Меѓутоа, во делот на теоријата на броеви, планиметријата и неравенствата ваквата поделба е на поголеми области, што има за цел учениците самостојно да препознаваат во кој дел од наведената област се наоаѓа определена задача. Последното посебно се однесува на планиметриските задачи, дел од кои успешно може да се решаваат со помош на тригонометрија, но тоа на учениците не им е посочено. Сметаме дека учениците кои претходно, користејќи ги првите осум збирки од оваа серија, ги усвоиле знаењата од соодветните области нема да имаат потешкотии во изборот на методите за решавање на задачите содржани во оваа збирка. Покрај тоа, на мислење сме дека самостојното решавање на задачите во оваа збирка ќе биде добредојдено за финалните подготовки за натпрварите по математика за учениците од средното образование. Слични забелешки и напатставија важат и за задачите содржани во напредното нивко, кои се поделени во шест теми.

Рецензентите, д-р Слаѓана Брсаковска и д-р Катерина Аневска, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје Авторите
февруари, 2020 г.

I ОСНОВНО НИВО

1. МНОЖЕСТВА И ЛОГИКА

1. Од 100 ученици: 24 ученици не учат ниту еден од јазиците англиски, руски и германски; 48 учат англиски, 8 учат и англиски и руски, 26 учат германски, 8 учат и германски и англиски, 13 и германски и руски и 28 учат руски. Колку ученици ги учат сите три јазици?

2. Во кутија се наоѓаат 100 коцки, чии страни се обоени со црвена, жолта и зелена боја. Меѓу нив 75 коцки имаат најмалку еден црвен ѕид, 80 коцки имаат барем еден зелен ѕид, а 85 коцки имаат барем еден жолт ѕид. Определи го најмалиот можен број коцки кои имаат ѕидови од сите три бои,

3. Определи го најмалиот број елементи кои ги има множеството природни броеви A чиј најмал елемент е 1, најголем елемент е 100, и е такво што секој број од A, освен 1, е еднаков на збирот на два (еднакви или различни) броеви од A.

4. На правата се наоѓаат n затворени интервали. Докажи дека ако секои два од овие интервали имаат непразен пресек, тогаш пресекот на сите интервали е непразен.

5. Колку најмногу елементи може да има подмножество на множеството $\{1,2,3,...,2017\}$ такво што за секои два елементи a и b на тоа подмножество бројот $a+b$ не е делив со бројот $a-b$?

6. Колку најмногу цели броеви може да содржи конечно множество S такво што меѓу секои три елементи на множеството S постојат два различни броја чиј збир припаѓа на S?

7. Дадено е разбивањето на множеството природни броеви
$$\mathbb{N}=\{1\}\cup\{2,3\}\cup\{4,5,6\}\cup\{7,8,9,10\}\cup\{11,12,13,14,15\}\cup... .$$
Ако S_k е збирот на k – те броеви во k – тотот множество, докажи дека
$$S_1+S_3+S_5+...+S_{2n-1}=n^n,$$
за секој природен број n.

8. Тркало за рулет е поделено на 36 делови. Во овие делови по некој редослед се запишани броевите од 1 до 36. Докажи дека постојат три последователни делови такви што збирот на броевите запишани во нив е поголем или еднаков на 56.

9. Тркалото на среќата е поделено на 30 делови во кои се запишани броевите 1, 2, 3, ...,30. Докажи дека постојат три последователни делови во кои збирот на запишаните броеви е поголем или еднаков на 47.

10. Природните броеви од 1 до 2003 произволно се наредени во низа. На низата ја реализираме следнва операција: ако првиот број во низата е еднаков на k, го вртиме редоследот на првите k броеви. Докажи дека по конечен број последователни примени на оваа операција бројот 1 ќе се појави на првото место независно од почениот распоред.

11. На таблата се запишани броевите $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{2001}$. Андреј избира два од запишаните броеви, на пример x и y, го пресметува бројот $x + y + xy$, резултатот го запишува на таблата и ги брише броевите x и y. Определи кој број ќе остане на таблата ако оваа постапка ја повтори 2000 пати.

12. Дадени се 99 (не задолжително различни) природни броеви помали од 100. Ако збирот на никои два, три или повеќе броеви (помалку од 100) не е делив со 100, докажи дека сите овие броеви се меѓусебно еднакви.

13. Должините на страните на конвексен многуаголник со 1998-аголник се природни броеви. Периметарот на многуаголникот е еднаков на 1997000. Докажи дека барем две страни на овој многуаголник имаат еднакви должини.

14. Томе, Филип и Никола дошле со своите девојки Ана, Марија и Ивана во трговски центар. Секој од шестмината за секој купен предмет платил онолку евра колку што купил предмети, а секој дечко потрошил 63 евра повеќе од својата девојка. Томе купил 23 предмети повеќе од Марија, а Никола 11 предмети повеќе од Ивана. Откриј ги паровите момче – девојка.

15. На n картици запишани се речениците:

Најмалку k реченици лево од оваа картица се невистинити.

за $k = 0,1,2,...,n-1$. Картиците се наредени во некој редослед од лево на десно. Колку најмногу реченици може да бидат вистинити?

16. Едно утро 11 пријатели решиле да обојат една ограда. Боењето почнале во 9 часот и завршило во 16 часот. Секој од пријателите почнал да работи на цел час и работел точно два часа. Дали можеме да бидеме сигурни дека во некој период работеле најмалку четири пријатели?

17. Во трка учествуваат 200 велосипедисти. На почетокот на трката велосипедистите се наредени еден зад друг. Ќе велиме дека еден велосипедист претекнува ако го менува местото со велосипедистот непосредно пред него. Во те-

кот на трката редоследот се менува само кога некој велосипедист претекнува. Нека A е бројот на сите можни редоследи на крајот на трката во која секој велосипедист претекнувал точно еднаш, а нека B е бројот на сите можни редоследи на крајот на трката во која секој велосипедист претекнувал најмногу еднаш. Докажи дека $B = 2A$.

18. На шаховски турнир со 8 учесници секои двајца шахисти одиграле по една партија. Победникот во секоја партија добива по 1 бод, поразениот по 0 бодови, а ако партијата заврши нерешено секој од играчите добива по $\frac{1}{2}$ бодови. На крајот на турнирот секои два шахисти имаат различен број бодови, а второпласираниот шахист има онолку бодови колку што имаатпоследните четворица заедно. Колку бодови освоил седмопласираниот шахист во партијата со третопласираниот шахист?

19. На шаховски турнир учествувале три ученици од прва година и неколку ученици од втора година. Трите ученици од прва година освоиле вкупно 7 бодови, а секој ученик од втора година освоил еднаков број бодови. Колку ученици од втора година имало на турнирот ако за победа се добива по 1 бод, за пораз по 0 бодови и за нерешен резултат по половина бод. Турнирот се игра така што секој играч игра со секој од преостанатите играчи по една партија.

20. На еден турнир учествувале n кошаркарски тимови. Секој ти одиграл со секој друг тим точно еден натпревар. Во кошарката нема нерешени исходи. Ако на крајот на турнирот $i-$тиот тим има x_i победи и y_i порази, $i = 1, 2, ..., n$ докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 .$$

21. На кошаркарски турнир учествувале 8 екипи и секоја со секоја одиграла по еден натпревар. Во кошарката за победа се добиваат по 2 бода, а за пораз 0 бодови (нема нерешени резултати). Екипите освоиле 14, 12, 8, 8, 6, 4, 2 и 2 бода. Колку натпревари последните четири екипи изгубиле од првите четири екипи.

22. Во секое поле на табела 4×4 е впишан по еден број. За секое поле збирот на броевите во неговите соседни полиња е еднаков на ист природен број x (соседни се полињата кои имаат заеничка страна). Збирот на сите броеви во табелата е еднаков на 282. Определи го бројот x.

23. На две спротивни страни на коцката се наоѓа по една точка, на другите две спротивни страни по две, а на преостанатите две по три точки. Од осум такви коцки е направена коцка $2\times 2\times 2$, па потоа се изброени точките на секоја страна. Дали може на овој начин да се добијат шест последователни природни броеви?

24. Во 20 садови (секоја содржи најмалку 210 литри) се наоѓаат редоследно 1, 2, 3, ..., 20 литри вода. Од садот A во садот B дозволено е да се прелие точно онолку вода колку што веќе има во садот B (при претпоставка дека во садот A има барем толку вода колку што има во садот B). Дали е мно по конечен број прелевања да се добијат:
а) пет садови со по 3 литри вода, а во останатите садови да има по 6, 7, .. 20 литри вода,
б) сите 210 литри вода да се во еден сад.

25. Осум светилки се распоредени на кружница. Секоја светилка може да биде запалена или изгасната. Во еден чекор дозволена е следнава трансформација: светилката по трансформацијата ќе биде угасена, ако една од нејзините соседни светилки е запалена, а другата угасена, односно светилката по трансформацијата ќе свети ако двете соседни светилки се или запалени или угасени. Во еден чекор се менува состојбата на сите свитилки истовремено. Докажи дека по најмногу четири чекори сите светилки ќе светат.

26. Во една вреќа се наоѓаат 255 топчиња означени со броевите 1, 2, ,3, ..., 255. Секој од N ученици од вреќата зел по едно топче. Се покажало дека ниту еден од извлечените броеви не е точно двапати поголем од некој друг извлечен број. Определи ја најголемата можна вредност на N.

27. Имаме монети од 1, 2, 5, 10, 20, 50 центи и 1 евро. Докажи дека ако сума од M центи може да се плати со помош на N монети, тогаш сума од N евра може да се плати со помош на M монети.

28. Докажи дека темињата на коцката може да се означат со степените 2^i, $i = 1,2,3,4,5,6,7,8$ така што производот на сите степени кои се наоѓаат на една страна на коцката е еднаков за сите страни на коцката. Определи го тој производ.

29. Сопружниците Ана и Томе дошле на забава на која имало уште четири пара. При доаѓањето имало извесен број ракувања. Притоа никој не се ракувал со својот брачен другар, ниту со самиот себе. Кога покасно Томе ги прашал сите присутни со колку лица се ракувале, добил девет различни одговори. Со колку лица се ракувала Ана?

30. Околу тркалезна маса седат m жени и n мажи ($m+n \geq 3$). Кога во зависност од m и n можеме да тврдиме дека постои лице кое седи меѓу двајца мажи?

31. Во селото на дедо Илко има 20 клубови. Секој жител на селото е член на еден или два клуба. Секој клуб има најмногу 25 членови и за секој пар клубови постои жител кој е член на двата клуба. Определи го најголемиот и најмалиот можен број жители на селото на дедо Илко.

32. Ванчо на таблата ги запишал броевите 1 и 2, а потоа продолжил да пишува броеви така што секој нов број е еднаков на збирот на квадратите на послед-

ните два запишани броја. Докажи, дека продолжувајќи ја оваа постапка Ванчо никогаш нема да запише број кој е делив со 3 или кој е делив со 7.

33. На почетокот на таблата се наоѓаат броевите 2015, 2018 и 2021. Илија во секој чекор ги означува броевите на таблата со a,b и c во некој редослед, а потоа ги заменува со броевите $3a-b, 3b-c$ и $3c-a$. Дали може Илија со последователна примена на оваа постапка во некој момент на таблата да добие три еднакви броеви?

34. На таблата се запишани броевите 1, 2, 3, ..., 2015, 2016. Во секој чекор избираме два од запишаните броеви a и b, ги бришиме и на нивно место ги запишуваме броевите $3a-b$ и $13a-3b$. Дали после конечен број чекори може на таблата да се појават броевите 2, 4, 6, ..., 4030, 4032.

35. Ламјата Огненка има 2010 глави. Јунакот Марко може со еден удар на мечот да и отсече 2, 17, 21 или 33 лави, по што на Огненка и растат 9, 10, 0, или 47 глави, соодветно. Дали може во некој момент Марко да и ги отсече сите глави на Огненка?

36. Дадена е тројката броеви $(a_1,a_2,a_3)=(3,4,12)$. Ја спорведуваме следната постапка: избираме два броја a_i и a_k, $i\neq k$ и ги заменуваме со броевите $0,6a_i-0,8a_k$ и $0,8a_i+0,6a_k$. Дали може со повеќекратно повоторување на опишаната постапка да се добие тројката $(2,8,10)$.

37. Жаба скока по точките на координатната мрежа почнувајќи од точката (1,1) по следниве правила:
    1) од точката (a,b) жабата може да скокне во една од точките $(a,2b)$ или $(2a,b)$,
    2) ако $a>b$, жабата смее да скокне од (a,b) во $(a-b,b)$, а ако $a<b$ смее да скокне од (a,b) во $(a,b-a)$.

    Дали жабата може да стигне до точката:
    а) (24, 40), б) (40, 60), в) (24, 60), г) (200, 4)?

38. Три скакулци седат во три темиња на еден квадрат. Секоја минута еден од нив прескокнува еден од другите два и се сместува во точката која е симетрична на точката од која скокнал во однос на точката во која е скакулецот кој го прескокнал. Дали може барем еден од скакулците по конечен број чекори да се најде во четвртото теме на квадратот?

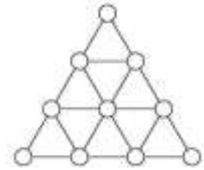
39. Дали може рабовите на тетраедар да се означат со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6 (секој број за точно еден раб) така што збировите на броевите придружени на секој ѕид на тетраедарот ќе бидат еднакви?

40. Броевите 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28 се распоредени на кружница. Со N да го означиме најголемиот од десетте збирови кои се добиваат така што

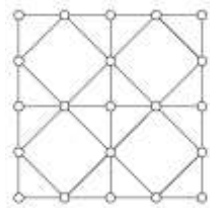
секој од броевите го собереме со двата негови соседни броја. Определи ја најмалата вредност на бројот N која можеме да ја постигнеме.

41. Квадратна табела 2009×2009 е пополнета со броевите 1, 2, 3, ..., 2009 така што во секој ред и во секоја колона се појавува секој од броевите. Ако табелата е симетрична во однос на една дијагонала, тогаш на таа дијагонала се наоѓаат сите броеви 1, 2, 3, ..., 2009. Докажи!

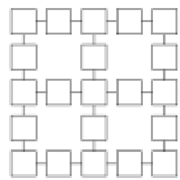
42. Броевите 1, 2, 3, ..., 10 се распоредини во крукчињата на цртежот десно, а потоа во секој од деветте мали триаголници е запишан звирот на броевите запишани во неговите темиња.
Докажи, дека меѓу броевите запишани во триаголниците подтојат три броја чиј збир е поголем или еднаков на 48.



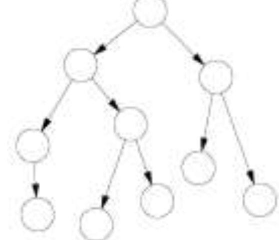
43. Дадени се 21 точка како на цртежот десно. На почетокот на секоја точка е придружен бројот 0. Во секој потез се избира права која содржи некоја од нацртаните отсечки и во сите точки низ кои минува оваа права придружените броеви се зголемуваат за 1. Ќе велиме дека природниот број n е достижен ако на опишаниот начин по конечен број чекори може да се постигне на сите точки да е придружен бројот n.
а) Докажи дека бројот 2010 е достижен.
б) Докажи дека бројот 2011 не е достижен.



44. На почетокот во секој квадрат на цртежот десно е запишан бројот 0. Во секој потез се избира еден квадрат и истовремено сите броеви во тој квадрат и соседните на него квадрати се зголемуваат за 1. Д0окажи дека по конечен број потези:
а) може да се постиогне во секој квадрат да е запишан бројот 2010,
б) не може да се постигне во секојквдрат да е запишан бројот 2011.



45. На колку начини можеме во кругчињата на цртежот десно да ги запишеме броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 така што секоја стрелка ќе покажува од поголем кон помал број?



46. Иван и Маја имаат два идентични сета од по 50 картички со различни симболи. Секој од нив го измешал својот сет картички. Потоа Иван на масата го става својот сет картички, а Маја своите картички ги става над картичките на Иван. Иван потоа брои колку картички има меѓу две идентични картички и тоа го прави за секој од 50-те парови идентични картилчки, па ги собира добиените броеви. Кои збирови може да ги добие Иван?

2. АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

1. Докажи, дека производот на било кои два елементи на множеството
$$\{m \mid m = a^2 - 5b^2,\ a, b \in \mathbb{N}\}$$
исто така припаѓа на ова множество.

2. Разложи го на множители изразот
$$(b-c)(b+c)^3 + (c-a)(c+a)^3 + (a-b)(a+b)^3 .$$

3. Докажи дека за секои цели броеви a и b важи
$$a^3 - 3a^2b - 9ab^2 - b^3 + 6 \neq 0 .$$

4. Докажи дека
$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a) .$$

5. Ако $x + y + z = 0$, докажи дека $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

6. Ако $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$ и $ac + bd = 0$, пресметај $ab + cd$?

7. Нека $a + b = 2$ и $a^2 + b^2 = 6$. Пресметај ја вредноста на изразот $a^{-1} + b^{-1}$.

8. За реалните броеви a, b, c важи $a + b + c = 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Определи ја вредноста на изразот $a^4 + b^4 + c^4$.

9. Нека x, y, z се реални броеви такви што $x + y + z = xyz$. Докажи дека
$$x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-x^2)(1-z^2) + z(1-x^2)(1-y^2) = xyz .$$

10. За реалните броеви a и b важи
$$a^3 - 3ab^2 = 44 \text{ и } b^3 - 3a^2b = 8 .$$
Пресметај $a^2 + b^2$.

11. Ако $a + b = 4,\ a^2 + b^2 = 14$, пресметја ја вредноста на изразот $a^3 + b^3$.

12. Која релација ги поврзува броевите a, b и c ако за некои броеви x и y важи
$$a = x - y,$$
$$b = x^2 - y^2,$$
$$c = x^3 - y^3.$$

13. Ако $a + b = 1$ и $ab \neq 0$ докажи дека

$$\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

14. Пресметај го збирот
$$\frac{2}{2\cdot5}+\frac{2}{5\cdot8}+...+\frac{2}{1997\cdot2000}+\frac{2}{2000\cdot2003}.$$

15. Нека x,y,z и w се позитивни реални броеви такви што
$$\frac{x}{y+z+w}+\frac{y}{x+z+w}+\frac{z}{x+y+w}+\frac{w}{x+y+z}=1.$$
Пресметај го збирот
$$\frac{x^2}{y+z+w}+\frac{y^2}{x+z+w}+\frac{z^2}{x+y+w}+\frac{w^2}{x+y+z}.$$

16. а) Разложи го на множители изразот n^4+4.
б) Докажи:
$$\frac{(1^4+\frac{1}{4})(3^4+\frac{1}{4})(5^4+\frac{1}{4})...(11^4+\frac{1}{4})}{(2^4+\frac{1}{4})(4^4+\frac{1}{4})(6^4+\frac{1}{4})...(12^4+\frac{1}{4})}=\frac{1}{313}.$$

17. Пресметај ја вредноста на изразот
$$\frac{1234321234321\cdot2468642468641-1234321234320}{1234321234320\cdot2468642468641+1234321234321}.$$

18. Упрости го изразот
$$3(5^n-5)(5^n+5)+2(25+5^{2n})+25^{n+1}:5^{2n}$$

19. Упрости го изразот
$$\frac{2^{2n+1}-2^{4n+3}+2^{6n+3}}{2^{2n}-2^{4n+1}}.$$

20. Упрости го изразот
$$\frac{2016^{3n+2}-2016^5}{2016^{2n+3}+2016^{n+4}+2016^5}.$$

21. Нека $x>0$. Упрости го изразот
$$-x^{-x^{-x}}\cdot\frac{x^{-x^{-x}}+x^{x^{-x}}}{x^{-x^{-x}}+x^{x^{x}}}.$$

22. Докажи дека од $xyz=1$ следува $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1$.

23. Определи ги меѓусебните односи на броевите x,y,z ако за дадените броеви $a,b,c,abc\neq-1$ важат равенствата $x+by=y+cz=z+ax$.

24. Нека a,b,c се по парови различни ненулти реални броеви такви што $a+b+c=0$. Докажи дека

а) $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=3$,

б) $(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b})(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a})=9$.

25. Докажи дека за реалните броеви $a\neq b\neq c\neq a$ е точно равенството
$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c.$$

26. Ако се a,b,c реални броеви такви што $a\neq b\neq c\neq a$ докажи дека
$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

27. Ако збирот $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ е еднаков на 1, тогаш два од трите собирци се еднакви на 1, а третиот е еднаков на -1. Докажи!

28. За броевите a,b,c важи
$$\frac{a^2-bc}{a(1-bc)}=\frac{b^2-ac}{b(1-ac)} \text{ и } abc(1-bc)(1-ac)\neq 0.$$
Ако $a\neq b$, докажи дека
$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

29. Ако за реалните броеви a,b,c важи
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1,$$
докажи дека
$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

30. Изразот
$$A=\frac{x^3+a^3}{x-a}+\frac{x^3-a^3}{x+a}-\frac{8x^3a^3}{x^4-a^3},\ \ x\neq a,-a$$
запиши го како нескратлива дропка $\frac{P}{Q}$ и докажи дека изразот $Q^2-P-3a^2x^2$ е точен квадрат.

31. Ако $x+y+z=0$, упрости ги изразот
$$\frac{x^7+y^7+z^7}{xyz(x^4+y^4+z^4)}.$$

32. Нека $y\neq 0,\pm 1$. Ставаме $x_1=\frac{y-1}{y+1}$, $x_2=\frac{x_1-1}{x_1+1}$, $x_3=\frac{x_2-1}{x_2+1}$ итн. Определи го y ако $x_{1972}=3$.

33. Нека a_i, $i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a_1}{a_2(a_1+a_2)}+\frac{a_2}{a_3(a_2+a_3)}+...+\frac{a_n}{a_1(a_n+a_1)}=\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}+\frac{a_3}{a_2(a_2+a_3)}+...+\frac{a_1}{a_n(a_n+a_1)}.$$

34. Пресметај го збирот

$$\frac{2^2+1}{2^2-1}+\frac{3^2+1}{3^2-1}+...+\frac{100^2+1}{100^2-1}.$$

35. Нека a и b се позитивни реални броеви за кои важи

$$a^2+b^2=8 \text{ и } a^6+b^6=416.$$

Определи го производот ab.

36. Нека a и b се различни ненулти реални броеви такви што

$$\frac{a}{2017}+\frac{2017}{a}=\frac{b}{2017}+\frac{2017}{b}.$$

Определи го $\sqrt{ab}$.

37. За реалните броеви $x_1,x_2,...,x_{2016}$ точни се равенствата

$$\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_2}{x_2+2}=...=\frac{x_{2016}}{x_{2016}+2016}$$

$$x_1+x_2+...+x_{2017}=2017.$$

Пресметај го x_{2017}.

38. Нека x и y се меѓусебно различни реални броеви за кои важи

$$x+4=(y-2)^2, \quad y+4=(x-2)^2.$$

Определи ја вредноста на изразот x^2+y^2.

39. Докажи дека не постојат реални броеви a,b,c за кои се исполнети равенствата

$$a+b+c=63$$

$$ab+bc+ca=1996.$$

40. Нека a,b,c се реални броеви такви што

$$a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}=c+\frac{1}{c}.$$

Докажи дека

$$a+\frac{1}{b}=-abc.$$

41. Ако

$$x+y+z=a,$$

$$x^2+y^2+z^2=b^2$$

$$x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=c^{-1}$$

пресметај $x^3+y^3+z^3$.

42. Ако $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$ и $\frac{a}{1}+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0$, определи ја вредноста наизразот
$$\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{9}{c^2}.$$

43. Нека $x+\frac{1}{x}=1$. Докажи дека $x^{6n+1}+\frac{1}{x^{6n+1}}=1$ за секој природен број n.

44. Ако $x+\frac{1}{x}=a$, пресметај $x^7+\frac{1}{x^7}$.

45. Што може да се заклучи за броевите a^2,b^2,c^2 ако важи равенството
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{2}{a+c}.$$

46. Докажи дека бројот
$$\underbrace{111...11}_{2n}-\underbrace{222...22}_{n}$$
е точен квадрат на природен број.

47. Спореди ги изразите
$$A=\frac{2{,}00...004}{(1{,}00...004)^2+2{,}00...004} \text{ и } B=\frac{2{,}00...002}{(1{,}00...002)^2+2{,}00...002}$$
каде во секој број во броителот и именителот има по 1988 нули.

48. Упрости го изразот $\sqrt{6-4\sqrt{2}}-\sqrt{6+4\sqrt{2}}$.

49. Докажи дека вредноста на изразот $\frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\,(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$ е природен број.

50. Докажи дека $\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}}+\sqrt[3]{26}$ е цел број и определи го.

51. Докажи дека $\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}-\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}$ е рационален број.

52. Пресметај
$$\sqrt{\underset{2n}{44...4}+\underset{n+1}{11...1}-\underset{n}{66..6}}.$$

53. Нека a,b,c се реални броеви такви што $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$. Докажи дека $(a+b+c)^3=27abc$.

54. Ако $ax^3=by^3=cz^3$ и $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, докажи дека
$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}.$$

55. Пресметај го збирот $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$.

56. Во множеството реални броеви е дефинирана функцијата

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}}.$$

Пресметај го збирот

$$f(1)+f(2)+...+f(2003).$$

57. Докажи дека: $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2004^2}+\frac{1}{2005^2}}=2005-\frac{1}{2005}$.

58. Определи ја најмалата можна вредност на изразот

$$(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)+3^2.$$

59. За реалните броеви x,y,z важи $x^2+y^2+z^2=1$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот $S=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}$.

60. Нека x,y,z,w се реални броеви такви што важи

$$x^2+y^2+z^2+w^2+x+3y+5z+7w=4.$$

Определи ја најголемата можна вредност на збирот $x+y+z+w$.

61. Нека a,b,c се реални броеви. Определи ја најмалата можна вредност на изразот $a^2+5b^2+8c^2-4ab-4bc-8c+24$.

62. Нека a,y и a се реални броеви такви што $x+y=a-1$ и $xy=a^2-7a+12$.Определи ја вредноста на a за која изразот x^2+y^2 прима најголема можна вредност.

63. Определи ја најмалата можна вредност на изразот $\frac{4x^2+2y^2-4y+4}{2x^2+y^2-2y+5}$.

64. Докажи дека во табелата

1
2, 3, 4,
3, 4, 5, 6, 7,
4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
....

збирот на сите броеви во секој ред е еднаков на квадратот на средиот број.

65. Пресметај го збирот $\sum_{i=0}^{2007}\frac{x_i^3}{1-3x_i+x_i^2}$, каде $x_i=\frac{i}{2007}$, за $i=0,1,2,...,2007$

3. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА, РАВЕНКА И НЕРАВЕНКА

1. Реши ја равенката
$$\frac{a-5}{x+1}-\frac{7+3a}{x-2}=\frac{2ax-5}{x^2-x-2},$$
каде a е реален параметар.

2. Реши ја равенката
$$\frac{6a+1}{a}x+\frac{6a}{a+1}+\frac{a^2}{(a+1)^3}=\frac{2a+1}{a^3+2a^2+a}x$$
каде a е параметар.

3. Реши ја равенката
$$(m+x)^2-(x-3)^2=x(3+m^2)\ .$$

4. Определи ја вредноста на реалниот параметар a така што решението на равенката
$$\frac{2a+x}{2-x}-\frac{2a-x}{2+x}=\frac{4a}{4-x^2}$$
е помало или еднакво на 1.

5. Во множеството реални броеви решија равенката
$$\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}-2\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}}+3\sqrt{2x+8-6\sqrt{2x-1}}=4\ .$$

6. Во множеството реални броеви реши ја равенката
$$\left(4-\frac{x}{2013}\right)^{10^{2013}}=\left(\frac{x}{671}\right)^{10^{2013}}\ .$$

7. Реши ја равенката
$$|\,x-|\,x-|\,x+1||=x\ .$$

8. а) Реши ја равенката
$$|\,3x-2\,|+|\,3x+2\,|=5\ .$$
б) Определи ја плоштината на фигурата ограничена со правата $y=5$ и графикот на функцијата
$$y=\sqrt{9x^2-12x+4}+\sqrt{9x^2+12x+4}\ .$$

9. Во множеството реални броеви реши ја равенката
$$|\,x+3\,|+2\sqrt{x^2+2x+1}=7\ .$$

10. За која вредност на реалниот параметар a равенката $|\,3-2\,|\,x\,||=-\frac{3}{4}a$ има точно три решенија?

11. За кои реални броеви a равенката

$$|x-2|+|3-x|=a$$

има точно две решенија.

12. Нека n е природен број. Определи ги сите решенија на равенката
$$||...|||x-1|-2|-3|-...-(n-1)|-n|=0 .$$

13. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$2|x-1|+a|x-3|=3a+5-x .$$

14. Во множеството реални броеви реши ја равенката
$$f(x)+f(2-x)=2 ,$$
каде
$$f(x)=\begin{cases}|x|, & x\leq 1\\ 2-x, & x>1.\end{cases}$$

15. Нека $\{p,r,s,t\}=\{4,8,12,16\}$. Разгледувајќи ги сите можни избори на броевите p,r,s,t определи ги сите решенија (x,y,z) на системот равенки
$$\begin{aligned} x+y+z&=p\\ x+y-z&=r\\ x-y+z&=s\\ x-y-z&=t. \end{aligned}$$

16. Реши го системот равенки
$$\begin{cases} 2x_1-5x_2+3x_3=0\\ 2x_2-5x_3+3x_4=0\\ ....\\ 2x_{1993}-5x_{1994}+3x_1=0\\ 2x_{1994}-5x_1+3x_2=0 \end{cases}$$

17. Реши го системот равенки
$$x_1+a_1x_2=x_2+a_2x_3=x_3+a_3x_4=x_4+a_4x_5=x_5+a_5x_1=1 ,$$
каде $a_1a_2a_3a_4a_5\neq -1$.

18. Реши го системот равенки
$$\begin{cases} \frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\frac{x_3}{a_3}=...=\frac{x_{n-2}}{a_{n-2}}=\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{x_n}{a_n}\\ x_1+x_2+...+x_n=0 \end{cases}$$

19. Определи го x_{1000} ако
$$\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_2}{x_2+3}=\frac{x_3}{x_3+5}=...=\frac{x_{1006}}{x_{1006}+2011}$$
$$x_1+x_2+...+x_{1006}=503^2.$$

20. Во Декартов координатен систем претстави го множеството точки (x, y) за кои важи

$$||x-1|-1|=|y+1|.$$

21. Скицирај го множеството точки (x, y) во координатната рамнина за кои важи

$$y \geq |2|x|+|x-2||, \quad y \leq 8.$$

Определи ја плоштината на добиената геометриска фигура.

22. За која вредност на реалниот параметар a равенката $|3-2|x||=-\frac{3}{4}a$ има точно три решенија?

23. Определи ја плоштината на множеството точки за кои во Декартов координатен систем важи

$$|x|+|y|+|x+y| \leq 2.$$

24. Во координатната рамнина нацртај го множеството точки (x, y) кои го задоволуваат равенството

$$|y|=x+\sqrt{x^2-6x+9}.$$

25. Докажи дека за секој $a \in (1, 2)$ плоштината на ликот ограничен со графиците на функциите

$$y=1-|x-1| \text{ и } y=|2x-a|$$

е помала од $\frac{1}{3}$.

26. Во Декартов координатен систем скицирај го множеството тоочки за кои важи

$$||x|+|y|-2| \geq 1.$$

27. Ако $a>0$, во Декартов правоаголен координатен систем прикажи го множеството точки кои ја задоволуваат неравенката

$$||x+a|-|y-a||<a.$$

28. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} |x+y|=1 \\ |x|+|y|=1. \end{cases}$$

29. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} |x+y-4|=5 \\ |x-3|+|y-1|=5. \end{cases}$$

30. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} |x-3|+|y+2|=1 \\ |x+1|-|y-1|=2. \end{cases}$$

31. Определи го бројот на негативните цели броеви x за кои важи $\frac{x-2011}{x+2012} \leq 1$.

32. Реши ја неравенката
$$\frac{x-8}{2012}+\frac{x-7}{2013}+\frac{x-6}{2014}+\frac{x-5}{2015}+\frac{x-4}{2016}<\frac{x-2012}{8}+\frac{x-2013}{7}+\frac{x-2014}{6}+\frac{x-2015}{5}+\frac{x-2016}{4}.$$

33. Реши ја неравенката
$$\left|\frac{2013}{x+2013}+\frac{2013}{(x+1)(x+2)}+\frac{2013}{(x+2)(x+3)}+...+\frac{2013}{(x+2012)(x+2013)}\right|<1.$$

34. Реши ја неравенката
$$|||9-x|-x|+2x|\leq 2009.$$

35. Системот неравенки

нема ниту едно решение. Докажи дека постојат броеви такви што