# IX РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

*Задачите и решенијата се скенирани од книгата*
*Десет години републички натпревари по математика 1976-1985*
*подготвена од Илија Јанев и Коста Мишовски*

## VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Во една група натпреварувачи по математика имало 20 ученици. Од нив 14 ученици имале сини очи, 15 црна коса, 17 биле потешки од 40 килограми и 18 биле повисоки од 160 cm. Колку најмалку ученици ги имале сите четири особини?

2. Ако на некој двоцифрен број му се допише цифрата 5 еднаш на почетокот а другпат на крајот, се добиваат два различни броја. Кој е тој двоцифрен број, ако разликата на овие два броја е 252?

3. Аце, Ване и Стојче заработиле заедно 6000 дин. Аце заработил двапати повеќе од Ване, а Стојче заработил 180 динари повеќе од Аце и Ване заедно. По колку динари заработил секој од нив?

4. Две кружници $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ се допираат однадвор во точката A. Една заедничка тангента ги допира кружниците во точките B и C. Докажи дека аголот BAC е прав!

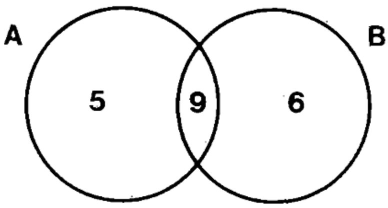
5. Определи ги острите агли во правоаголниот триаголник ABC ($\measuredangle C = 90^\circ$), ако аголот меѓу симетралата и медијаната на правиот агол е 1/5 од тапиот агол што го образуваат симетралите на острите агли во тој триаголник.

**61. (1984.VII.1)**

I. Ако 14 ученици имале сини очи, а 15 црна коса, тогаш најголемиот број ученици, што ги имаат двете особини е 14 (помалиот од овие два броја!). Најмалиот пак број ученици што ги имаат овие две особини е:

$(14 + 15) - 20 = 9$

Тоа се гледа најдобро од Ојлер–Веновиот дијаграм, каде што А е множество на ученици што имаат сини очи, а В е множество на ученици што имаат црна коса.




До овој резултат може да се дојде и од следново равенство

$k\,(A \cup B) = k\,A + k\,B - k\,(A \cap B)$
$k\,(A \cap B) = k\,A + k\,B - k\,(A \cup B)$
$k\,(A \cap B) = 14 + 15 - 20$
$k\,(A \cap B) = 9.$

Значи, првите две особини ги имаат најмалку 9 ученици. Понатаму, на сличен начин, лесно се наоѓа:

$(9 + 17) - 20 = 6$; што значи дека првите три особини ги имаат најмалку 6 ученици.

$(6 + 18) - 20 = 4$; што значи дека најмалку 4 ученици ги имаат сите четири особини.

Да споменеме на крајот дека најмногу 14 ученици ги имаат сите четири особини.

Одговор: 4 ученици.

**62. (1984.VII.2)**

I. Ако x е двоцифрениот број, тогаш од условот на задачата постојат две можности:

1) $\overline{5x} - \overline{x5} = 252$, од каде што добиваме:

$$5 \cdot 100 + x - (x \cdot 10 + 5) = 252$$
$$500 + x - 10x - 5 = 252$$
$$-9x = -243$$
$$x = 27;$$

2) $\overline{x5} - \overline{5x} = 252$, од каде што добиваме:

$$x \cdot 10 + 5 - (5 \cdot 100 + x) = 252$$
$$10x + 5 - 500 - x = 252$$
$$9x = 747$$
$$x = 83.$$

Значи, постојат два двоцифрени броја, кои што го задоволуваат условот на задачата, а тоа се броевите 27 и 83.

II. Бараниот двоцифрен број нека е $\overline{xy} = 10x + y$. Тогаш од условот на задачата ќе следуваат две можности:

1) $\overline{5xy} - \overline{xy5} = 252$, од каде што добиваме:

$$5 \cdot 100 + x \cdot 10 + y - (x \cdot 100 + y \cdot 10 + 5) = 252$$
$$500 + 10x + y - 100x - 10y - 5 = 252$$
$$243 = 90x + 9y$$
$$9 \cdot 27 = 9\,(10x + y)$$
$$27 = 10x + y.$$

Значи бараниот двоцифрен број е 27.

2) Втората можност е $\overline{xy5} - \overline{5xy} = 252$, од каде што се добива:

$$10x + y = 83,$$

т.е. бараниот двоцифрен број е 83.

Одговор: 27 или 83.

**63. (1984.VII.3)**

I. Ако Ване заработил $x$ динари, тогаш Аце заработил $2x$ динари, а Стојче $x + 2x + 180 = 3x + 180$ динари. Тогаш од

$$x + 2x + 3x + 180 = 6000,$$

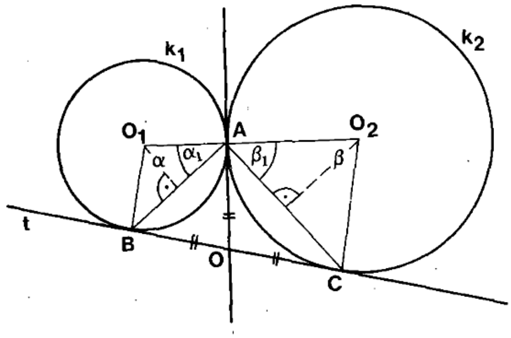
добиваме $$x = 970.$$

Значи:
Ване заработил 970 динари;
Аце заработил $2 \cdot 970 = 1940$ динари;
Стојче заработил $3 \cdot 970 + 180 = 3090$ динари.

Одговор: Ване 970 дин., Аце 1940 дин., Стојче 3090 дин.

**64. (1984.VII.4)**

I. Кружниците $k_1$ $(0_1, r_1)$ и $k_2$ $(0_2, r_2)$ нека се допираат во точката А, а заедничката тангента t нека ги допира кружниците $k_1$ и $k_2$ во точките В и С, респективно (по тој редослед) (види цртеж 43). Ја повлекуваме заедничката тангента на кружницата низ точката А, која дадената тангента t ја сече во точката 0.




Црт. 43

Ќе имаме:

$\overline{OA} = \overline{OB}$ и $\overline{OA} = \overline{OC}$, како тангентни отсечки на истата кружница!
Од ова следува дека О е центар на опишана кружница околу $\triangle$ ABC. Бидејќи О лежи на страната ВС, следува (од Талесовата теорема) дека е $\measuredangle BAC = 90^\circ$.

II. Го набљудуваме четириаголникот $O_1BCO_2$. Бидејќи аглите кај В и С се прави (види црт. 43) ќе следува дека збирот на аглите кај $O_1$ и $O_2$ е $180^\circ$, т.е.

$$\measuredangle BO_1A + \measuredangle CO_2A = 180^\circ$$
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\text{но } \alpha_1 + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ \text{ и } \beta_1 + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$$

$$\text{па } \alpha_1 + \beta_1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180^\circ$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \frac{\alpha+\beta}{2} = 180^\circ$$

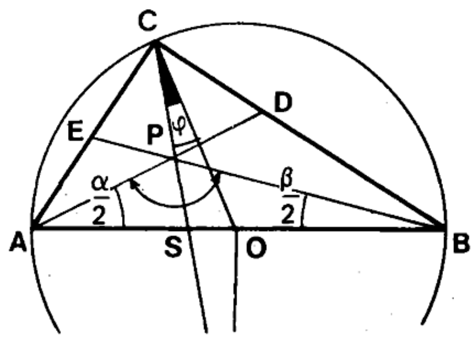
$$\alpha_1 + \beta_1 + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ.$$

Одовде следува дека е $\measuredangle BAC = 90^\circ$ што требаше и да се докаже!

**65. (1984.VII.5)**

I. Нека е ABC правоаголен триаголник ($\measuredangle C = 90^o$) и нека е CS симетрала, а CO медијана на правиот агол, а AD и BE бисектриси на аглите кај темињата A односно B (цртеж 44).




Црт. 44

Ќе покажеме дека тапиот агол што го образуваат бисектрисите на остриите агли во правоаголниот триаголник изнесува $135^o$ т.е. дека е $\measuredangle APB = 135^o$. Збирот на внатрешните агли во $\Delta$ ABP е $180^o$, т.е.

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \delta = 180^o$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} + \delta = 180^o$$

$$\frac{90^o}{2} + \delta = 180^o$$

$$\delta = 135^o$$

Тогаш аголот $\varphi = \measuredangle SCO$ е :

$$\varphi = \frac{1}{5} \cdot 135^o = 27^o.$$

Понатаму, триаголникот BCO е рамнокрак ($\overline{BO} = \overline{CO}$), па имаме:

$$\beta = \measuredangle OCB = \frac{\gamma}{2} - \varphi = 45^o - 27^o = 18^o.$$

Тогаш од $\alpha + \beta = 90^o \Rightarrow \alpha = 72^o$. Значи, остриите агли во $\Delta$ ABC се $72^o$ и $18^o$.

Одговор: $72^o$ и $18^o$.

## VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Еден велосипедист се движи по автобуска линија меѓу две места во еден град. При движењето забележал дека на секој 9 минути го престигнува, а на секој 6 минути го пресретнува по еден автобус од таа линија. Во кој временски интервал тргнуваат автобусите од почетната станица? (Автобусите се движат со еднакви брзини и тргнуваат во исти временски интервали, а велосипедистот се движи со рамномерна брзина).

2. За кои цели вредности на n, изразот $\frac{n^2+1}{n+2}$ е цел број?

3. Четворица работници ако работат заедно, можат да завршат една работа за 9 дена. Но работниците не започнале да работат едновремено, туку еден по друг во еднакви временски интервали. Тие ја завршиле работата кога првиот што почнал да работи, работел петпати повеќе од оној што започнал да работи последен. Пресметај за колку дена е завршена работата.

4. Во правоаголниот триаголник ABC ($\measuredangle C = 90^\circ$) еден остар агол е $30^\circ$ а катетата спроти тој агол е 15 cm. Во триаголникот е впишан правилен шестаголник, така што по две темиња лежат на зададената катета и хипотенузата, а едно теме на другата катета. Пресметај ги плоштините на сите добиени делови од дадениот триаголник.

5. Страната BC од триаголникот ABC е продолжена преку точките B и C до точките $B_1$ и $C_1$ така што $\overline{BB_1} = \overline{CC_1} = \overline{BC}$. Низ точките $B_1$ и $C_1$ се повлечени прави паралелни со страните AB и AC, во чиј пресек е точката $A_1$. Докажи дека точката A е тежиште на триаголникот $A_1B_1C_1$.

**66. (1984.VIII.1)**

I. Ако велосипедистот почнува да го мери времето откако двата автобуса ќе се разминат, тогаш за 18 минути ќе го пресретнат 3 автобуса, а ќе го престигнат 2 автобуса; (бројот 18 е н.з.д. за броевите 6 и 9). За уште 18 минути, во спротивен правец, велосипедистот ќе го пресретнат 3, а ќе го престигнат 2 автобуса.

Значи, за 36 минути тој ќе сретне во обете насоки по 5 автобуса, т.е. за 36 минути од почетната стачица A или B ќе тргнат точно 5 автобуса. Од ова заклучуваме дека автобусите тргнуваат во временски интервал од $\frac{36}{5}=\frac{72}{10}=7{,}2$ односно 7 минути и 12 секунди.

Забелешка. Можеби некои од вас брзо (но и погрешно) би заклучиле дека бараното време е $\frac{6+9}{2}=7{,}5$ минути, што очигледно не е точно.

Одговор: 7 минути и 12 секунди.

**67. (1984.VIII.2)**

I. При делењето на биномот $n^2+1$ со биномот $n+2$ се добива количникот $n-2$ и остатокот 5, т.е.

$$\frac{n^2+1}{n+2}=n-2+\frac{5}{n+2},$$

значи, изразот $\frac{n^2+1}{n+2}$ ќе биде цел број само ако изразот $\frac{5}{n+2}$ е цел број.

Тоа е можно само ако $n+2$ има вредност $1, -1, 5$ или $-5$.

Ќе имаме:

$n+2=1 \Rightarrow n=-1$

$n+2=-1 \Rightarrow n=-3$

$n+2=5 \Rightarrow n=3$

$n+2=-5 \Rightarrow n=-7$.

Конечно, множеството на бараните вредности на n, за кои изразот $\frac{n^2+1}{n+2}$ е цел број е множеството $\{-1, -3, 3, -7\}$

Одговор: $n \in \{-7, -3, -1, 3\}$.

**68. (1984.VIII.3)**

I. Ако првиот работник работел x дена, тогаш вториот работел $x - y$ дена, третиот работел $x - 2y$ дена, а четвртиот $x - 3y$ $(x > 3y)$ дена. (Со y е означен бројот на деновите за кои секој нареден работник ја започнувал работата подоцна од претходниот).

Условот дека четворицата работници заедно ја свршуваат работата за 9 дена, сега ќе го напишеме вака:

$$x + (x - y) + (x - 2y) + (x - 3y) = 4 \cdot 9.$$

Вториот услов на задачата се запишува со следнава равенка:

$$x = 5(x - 3y).$$

Сега ќе го решиме системот

$$\begin{cases} x + x - y + x - 2y + x - 3y = 36 \\ x = 5(x - 3y). \end{cases}$$

Овој систем е еквивалентен, по ред со системите:

$$\begin{cases} 4x - 6y = 36 \\ -4x + 15y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 36 \\ 9y = 36. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 18 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 30 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 4. \end{cases}$$

Значи, со ваков начин на работа работниците би ја завршиле работата за 15 дена, т.е. ако секој работник почнувал да работи со 4 дена задоцнување од претходниот.

Првиот работник работел 15 дена, вториот $15 - 4 = 11$ дена, третиот $15 - 2 \cdot 4 = 7$ дена и четвртиот $15 - 3 \cdot 4 = 3$ дена, т.е. петпати помалку од првиот.

Одговор: 15 дена.

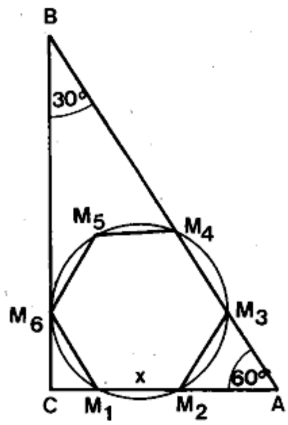
**69. (1984.VIII.4)**

I. Нека е даден триаголникот ABC со агли $\measuredangle C = 90^\circ$, $\measuredangle B = 30^\circ$, $\measuredangle A = 60^\circ$ и $\overline{AC} = 15$ cm, а правилниот шестоаголник нека е $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ (цртеж 45).

Страната на шестоаголникот нека е x, т.е. $\overline{M_1M_2} = x$.

Триаголникот ABC е сличен со триаголникот $M_1M_6C$ (Зошто?), па е $\overline{CM_1} = \frac{1}{2}\overline{M_1M_6} = \frac{1}{2}x$. Значи, $\overline{CM} = \frac{1}{2}x$. Од друга страна $\triangle AM_3M_2$ е рамностран, па е $\overline{M_2A} = x$. Од $\frac{1}{2}x + x + x = 15$ добиваме

$x = 6$ cm.




Црт. 45

Нека P е плоштина на $\triangle$ ABC,

$P_1$ е плоштина на $\triangle M_2AM_3$,

$P_2$ е плоштина на $\triangle CM_1M_6$,

$P_3$ е плоштина на шестоаголникот $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$

$P_4$ е плоштина на четириаголникот $BM_6M_5M_4$.

Ќе имаме:

$$P = \frac{1}{2}\,\overline{AC}\cdot\overline{BC} = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 15\sqrt{3} = \frac{225\sqrt{3}}{2}$$

$$P_1 = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\cdot P_1 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$P_3 = 6P_1 = 54\sqrt{3}$$

$$P_4 = P - (P_1 + P_2 + P_3) = \frac{225\sqrt{3}}{2} - \left(9\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{2} + 54\sqrt{3}\right) =$$

$$= \frac{225\sqrt{3}}{2} - \frac{(18+9+108)\sqrt{3}}{2} = \frac{(225-135)\sqrt{3}}{2} = \frac{90\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 45\sqrt{3}.$$

Одговор: $P_1 = 9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$; $P_2 = \frac{9\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2$

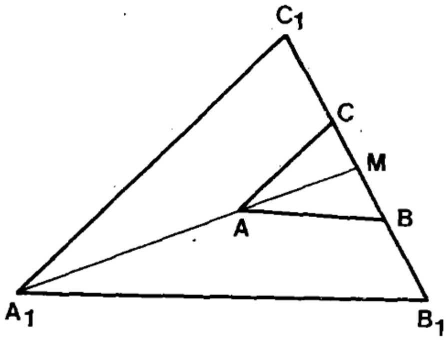
$P_3 = 54\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ и $P_4 = 45\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

**70. (1984.VIII.5)**

I. $\Delta$ ABC нека е дадениот триаголник и нека е $\overline{BB_1} = \overline{CC_1} = \overline{BC}$ и $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1C_1 \parallel AC$ (цртеж 46).

Очигледно е дека триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се слични (страните им се паралелни).

Имаме: $\overline{BC} = \frac{1}{3}\,\overline{B_1C_1}$




Црт. 46

Ако M е средина на BC, тогаш M е средина и на $B_1C_1$, т.е. AM и $A_1M_1$ се тежишни линии на триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$. Од сличноста на триаголниците следува:

$$\overline{AM} : \overline{A_1M_1} = \overline{BC} : \overline{B_1C_1} = 1 : 3$$

значи, A е тежиште на $\Delta$ $A_1B_1C_1$, што требаше и да се докаже.