Ристо Малчески
Алекса Малчески
Самоил Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ С11
ПАРАМЕТАРСКИ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

Скопје, 2021

Рецензент

Проф. Алија Муминагиќ, Данска

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

> Ниту едно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Решавањето на равенки и неравенки со параметар на учениците им открива голем број евристички методи, кои не само што се значајни за нивниот математички развој, туку истите наоѓаат широка примена и во други математички области. Тоа се однесува на идејата за симетрија на аналитичките изрази и за примената на функциите во неочекувани ситуации кои се карактеризираат со примена на математичката анализа која не е стандардна за училишната математика.

Во книгава систематизацијата на задачите е извршена според видот на функциите кои учествуваат во равенката или неравенката, иако далеку подобро е истата да е направена според природата на математичките дејствија потребни за решавање на задачите, како на пример:

- аналитичките начини за решавање на задачите со параметар (параметарот и бројот на решенијата на равенката, неравенката и ситемот, параметарот и својствата на решенија на равенката, неравенката и ситемот, параметарот како рамноправна променлива, примена на изводите: тангента на крива, критични точки, монотоност, најголема и најмала вредност на функција, конструкција график на функција),
- својствата на функциите во заадачите со параметар,
- графичкиот начин за решавање на задачите со параметар,
- полиномни равенки (Виетови правила, водечки коефциент, распоредување на решенија на равенката),
- методите на наоѓање на потребни услови итн.

Меѓутоа, ваквиот пристап бара многу повеќе задачи и се разбира целосна промена на концепирањето на книгата, нешто што е направено во книгата [6], која на читателите им ја препорачуваме како основна збирка задачи за усвојување на методите за решавање на задачи со параметар. Покрај тоа на читателите им препорачуваме при усвојување на методите за решавање на задачи со параметар, коии и тоа како може да бидат сложени, да ги користат и задачите кои се содржани во книгите [7]-[11] и кои се дел од серијата Математички талент наменета за учениците од основното и средното образование. Како и во другите книги од оваа серија, така и овде е направен обид во рамките на една област задачите да се подредат по тежина. Но веројатно овој обид не е многу успешен бидејќи задача која е лесна за еден ученик може да е тешка за друг ученик и обратно.

Книгава содржи 200 решени задавани на математички натпревари. Меѓутоа истата е корисна и за подготовка за приемни испити на Универзитетите надвор од нашата држава, на кои не ретко се задаваат токму задачи со параметар.

Стандардно, книгава содржи список на користената литература. За крај, и покрај вложениот напор, свесни сме дека се можни подобрувања на оваа книга, како и дека се присутни грешки, кои за жал не го одминуваат издавањето на било кој ракопис. Затоа однапред сме благодарни на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе допринесе да се подобри книгава.

Скопје — Авторите

март, 2021 г.

I РАВЕНКИ, НЕРАВЕНКИ И НИВНИ СИСТЕМИ

I.1. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

1. Даден е изразот $A=\dfrac{\frac{\sqrt{b^2-2b+1}}{b}+b\sqrt{b^2-2b+1}+2-\frac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\frac{1}{b}}}$.

   а) Упрости го изразот A.

   б) Определи ја вредноста на A ако $b=\frac{1}{9}(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}-x_1^3-x_2^3)$, каде x_1 и x_2 се решенијата на равенката $3x^2-9x+2=0$.

2. Квадратната равенка $x^2-bx+c=0$ има две различни решенија, кои се природни броеви. Познато е дека $2b+c=2016$. Определи ги решенијата на равенката и коефициентите b и c.

3. Реши ја равенката

$$(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)=(x+2)^2+(x+4)^2+(x+6)^2+(x+8)^2+40.$$

4. Нека x_1 и x_2 се решенијата на равенката $x^2-5x=3$. Определи ги сите реални броеви z за кои важи равенството

$$(2z^2-4z-\sqrt{z^2-2z-10}(x_1^2+x_2^2)=2015. \qquad (1)$$

5. Докажи дека броевите a,b,c се такви што $a+b+c=5$ и $ab+bc+ca=8$, тогаш $a,b,c\in[1,2\frac{1}{3}]$.

6. Реши ја равенката

$$\frac{3x}{\sqrt{2-|1-2x|}}=1. \qquad (1)$$

7. Реши ја равенката

   а) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=\sqrt{2x}$.

   б) $(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+8}-\sqrt{x+2}-1)=1$.

8. Реши ја равенката

$$\sqrt{x^3-11|x-1|}=2x-1\,.$$

9. Реши ја равенката

$$\sqrt{x-2}+2\sqrt{x^2-x-2}=\sqrt{(x^2-4)(x^2-x-1)}\,.$$

10. Реши ја равенката

$$x^2+3\sqrt{x+3}=7\,.$$

11. Реши ја равенката

$$\sqrt{6-x}=6-x^2\,.$$

12. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{5x^2+5x+7}+\sqrt{7x^2+7x+5}=4x^2+4x+\sqrt{5}+\sqrt{7}\,.$$

13. Реши ја неравенката

$$x\cdot 4^x+\tfrac{16}{x}+5\cdot 2^{x+1}>0\,.$$

14. Реши ја равенката

$$3x^4-4x^3-12x^2+16\tfrac{4^{x-1}+6}{2^x+1}=0\,.$$

15. Реши ја равенката

$$20^{x^2}\cdot 10^x=2\,.$$

16. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\cos 9x=16\cos x\,.$$

17. Реши ја равенката

$$\operatorname{ctg}4x+\cos 2x+\frac{\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)}{\sin 4x}=0\,.$$

18. Докажи дека равенката $\lg(\sin x)=\sin(\lg x)$ има бесконечно многу реални решенија.

19. Дали постојат реални броеви x и y такви што

$$2\sin x+2\sin y=12\sin(x+y)+15\,. \qquad (1)$$

20. Реши ја неравенката

$$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x^2-3}+x\sqrt{3}>0 .$$

21. Реши ја неравенката

$$\sqrt{x^3-7x^2+36}<x-1 .$$

22. Реши ја неравенката

$$\frac{\sqrt{7-3x}+x-5}{x}\geq -1 .$$

23. Реши ја неравенката

$$\sqrt{1-3x-\sqrt{12-8x}}>\sqrt{-x^2-3x+4} .$$

24. Реши ја неравенката

$$\sqrt{3-2^x}\leq 3-4^x .$$

25. Реши ја неравенката

$$\frac{6}{2x-1}>\frac{1+\log_2(2+x)}{x} .$$

26. Реши ја неравенката

$$\sin x+\cos x+\sin 2x\leq 1 .$$

I.2. СИСТЕМИ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

1. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^3+xy^2+16=0 \\ 3y^3-xy^2+16=0. \end{cases}$$

2. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} xy+2yz=5 \\ yz+2zx=3 \\ zx+2xy=7. \end{cases}$$

3. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{2xy}{z} \\ y^2+z^2=\frac{2yz}{x} \\ z^2+x^2=\frac{2zx}{y}. \end{cases}$$

4. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2+y+z=1 \\ x+y^2+z=1 \\ x+y+z^2=1. \end{cases}$$

5. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} xy-\frac{1}{yz}=\frac{2}{3} \\ yz-\frac{1}{zx}=\frac{5}{2} \\ zx-\frac{1}{xy}=1. \end{cases}$$

6. Определи го бројот на реалните решенија на системот

$$\begin{cases} x+y+z=3xy \\ x^2+y^2+z^2=3xz \\ x^3+y^3+z^3=3yz. \end{cases}$$

7. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2y^2+|xy|=\frac{4}{9} \\ xy+1=x+y^2. \end{cases} \qquad (1)$$

8. Докажи дека системот равенки

$$\begin{cases} (x^2-2)(y^2-2)=2009 \\ (x-9)^2+(y-9)^2=100 \end{cases}$$

има точно два пара решенија (x,y) за кои x и y се рационални броеви.

9. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} \sqrt{x}+y=3 \\ \sqrt{y}+z=3-\sqrt{2} \\ \sqrt{z}+x=\sqrt{2}. \end{cases}$$

10. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} (x^2+1)(x-1)^2 = 2017yz \\ (y^2+1)(y-1)^2 = 2017zx \\ (z^2+1)(z-1)^2 = 2017xy, \end{cases}$$

каде $x \geq 1, y \geq 1.z \geq 1$.

11. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} 3\cdot 4^x + 2^{x+1}\cdot 3^y - 9^y = 0 \\ 2\cdot 4^x - 5\cdot 2^x\cdot 3^y + 9^y = -8. \end{cases}$$

12. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} y + 2\cdot 4^{x+y-1} = 10 \\ \frac{4}{\sqrt{2y-3}} + 2^{2-x-y} = 5. \end{cases}$$

13. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} \lg^2(\frac{x^2+x}{y}) = \lg^2(\frac{y^2+y}{x}) + \lg^2(x+1)(y+1) \\ \lg(x+6) = \lg(x-y) + \lg(y+1). \end{cases}$$

14. Во множеството $[0, \frac{\pi}{2}]$ реши го системот равенки

$$\begin{cases} \sin x + \cos x - \sin(x-y) = 1 \\ \cos x - \sin y + \sin(x-y) = 1. \end{cases}$$

15. Определи ги аглите α, β, γ на остроаголниот триаголник ABC ако

$$\sin\gamma + \cos\beta = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \text{ и } \cos\gamma + \sin\beta = \frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

16. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 = 5xy \\ \cos^2 x + \sin^2 y = 1, \end{cases}$$

каде $x, y \in [0, \pi]$.

II ПАРАМЕТАРСКИ РАВЕНКИ И СИСТЕМИ РАВЕНКИ

II.1. ПОЛИНОМНИ ПАРАМЕТАРСКИ РАВЕНКИ

1. Реши ја равенката $|x-m|+|x+m|=x$ во зависност од вредностите на параметарот m.

2. Реши ја равенката $a|x-1|=1-a^2x$ каде a е параметар.

3. Реши ја равенката
$$2^k(x+1)+|x-1|=4^k,$$
каде k е реален параметар.

4. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката
$$|x-4^a|+|x-2^a|=2^{a-1}+1$$
има бесконечно многу решенија.

5. а) Определи ги вредностите на параметарот a за кои равенката
$$||x|+2018-a|=2 \qquad (1)$$
има три различни решенија.
б) За кои вредности на реалниот параметар a равенките
$$||x|+2018-a|=2 \text{ и } x^4+x^2+1=(x^2+x+1)^2+2(x^2+x+1)$$
имаат заедничко реално решение.

6. Определи ги вредностите на параметарот p за кои равенките
$$p^2x+p=25x-5 \text{ и } |2x+3|=|5-2x|$$
се еквивалентни.

7. Дадена е равенката $|x-3a|+|x-b|=x+1$, каде a и b се параметри кои се природни броеви.
а) Определи го b ако $\frac{b^2+b+1}{b+2}$ е природен број.
б) За најдените вредности на b реши ја равенката. Определи ги вредности на

a така што решението x на равенката е такво што x^2+2 е прост број.

8. Определи ги сите прости броеви p и q за кои равенката $x^2+px+q=100$ има две различни целобројни решенија.

9. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$|x|(x+1)=ax+a^2$$

има точно две реални и различни решенија.

10. Определи ја вредноста на параметарот a за која равенките

$$(1-x)^2-(a-2)^2+a(a-x-1)^2=3-(a-x)(a+x) \text{ и}$$

$$3ax-1=x-|4x(3a+x)-(3a+2x)^2|$$

се еквивалентни.

11. Определи го реалниот параметар a за кој равенката

$$|3x-a^2+2a-5|=|2x-2a^2+a+7|$$

има две различни реални решенија кои се еднакво оддалечени од бројот 6.

12. Даден е прост број p. Определи ги сите вредности на целиот број n за кои равенката

$$px^3-px+n=0$$

има три различни рационални решенија.

13. Дадени се функциите $f(x)=2x^2+2x-4$ и $g(x)=x^2-x+2$. Определи за кои вредности на x:

а) $\frac{f(x)}{g(x)}$ е природен број,

б) е исполнето неравенството $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\geq\sqrt{2}$.

14. Нека a,b,c се реални броеви такви што равенката $ax^2+bx+c=0$ има реални решенија. Докажи дека, ако

$$|a(b-c)|>|b^2-ac|+|c^2-ab|,$$

тогаш равенката има едно решение во интервалот $(0,2)$.

15. Определи ги вредностите на параметарот a за кои равенката

$$ax^2+|x-1|=0$$

има барем две позитивни решенија.

16. Определи ги сите природни броеви a,b,c за кои решенијата на равенките

$$x^2-2ax+b=0$$
$$x^2-2bx+c=0$$
$$x^2-2cx+a=0$$

се природни броеви.

17. Нека x,y и a се реални броеви такви што $x+y=a$ и $xy=a+3$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот x^2+y^2.

18. Определи ги вредностите на параметарот m за кои равенката

$$(x^2-x-6)(x^2-7x+6)=m^2-15m$$

има две различни позитивни и две различни негативни решенија.

19. Дадена е равенката

$$x^2+\frac{64}{x^2}=a(x-\frac{8}{x})+2,$$

каде a е параметар, природен број. За кои вредности на a равенката има четири рационални решенија.

20. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$x^2-(2018^2-1+a)x + 2018^2(2018-a)=0$$

има реални решенија x_1 и x_2 за кои важи

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2017}.$$

21. Ги разгледуваме квадратните равенки $x^2-bx+c=0$ и $x^2-cx+b=0$, каде b и c се природни броеви.

а) Докажи дека ако равенките имаат реални решенија, тогаш $b\geq 4$ и $c\geq 4$.

б) Определи ги сите парови реални броеви (b,c) за кои двете равенки имаат по две (не задолжително различни) природни решенија.

22. Определи ги вредностите на реалниот параметар a а кои равенката

$$x^2+2ax+(a-1)^2=0$$

има две реални решенија x_1 и x_2 такви што

$$\frac{x_1+1}{x_1-1}+\frac{x_2+1}{x_2-1}=1. \qquad (1)$$

23. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои квадратните равенки

$$x^2+2a^2x+2a=0 \text{ и } y^2+y+a=0$$

имаат соодветно реални решенија x_1, x_2 и y_1, y_2 такви што

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=2(y_1y_2+y_1+y_2)\,.$$

24. Определи ги сите вредности на реалниот параметар p за кои равенката $x^2+(p^2+1)x+p=2$ има две реални и различни решенија x_1 и x_2 такви што

$$\frac{2x_1-1}{x_2}+\frac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\frac{55}{x_1x_2}\,.$$

25. Определи ги сите целобројни вредности на параметрите b и c за кои равенката $x^2-bx+c=0$ има две реални решенија x_1 и x_2 такви што

$$x_1^2+x_2^2=5\,.$$

26. Даден е квадратниот трином $f(x)=x^2+ax+2$, каде a е реален параметар. Познато е дека равенката $f(x)-x=0$ има две реални решенија x_1 и x_2, а равенката $f(x-a)-x=0$ има две реални решенија x_3 и x_4 и дека важи $x_3-x_1=3(x_4-x_2)$.

а) Докажи дека $x_4=x_2+\frac{a}{2}$.

б) Определи ги можните вредности на a.

27. Дадена е равенката $2p^2(x-p)x=\sqrt{2}$ каде p е реален параметар.

а) Колку реални решенија има оваа равенка?

б) Ако равенката има реални решенија, определи го најмалиот можен збир на нивните четврти степени.

28. Определи ги вредностите на реалниот параметар k за кои равенката $k(x+1)^2=4x-1$ има две различни реални решенија x_1 и x_2 такви што е исполнето равенството

$$k^3(x_1^3+x_2^3-7x_1x_2)=5k^2-92k+64\,.$$

29. Нека a реален број таков што квадратната равенка $x^2-x+a=0$ има две реални и различни решенија x_1 и x_2. Докажи дека $|x_1^2-x_2^2|=1$ ако и само ако $|x_1^3-x_2^3|=1$.

30. Нека b и c се реални параметри за кои квадратната равенка $x^2+bx+c=0$ има две реални различни решенија x_1 и x_2 такви што $x_1=x_2^2+x_2$.
а) Определи ги вредностите на b и c ако $b+c=4$.
б) Определи ги параметрите b и c ако тие се заемно прости броеви.

31. Дадена е равенката $(p-6)x^2+2px-p=4$, каде p е реален параметар.
а) За која вредност на p равенката има единствено реално решение?
б) За кои вредноисти на параметарот p равенката има две реални и различни решенија x_1 и x_2 такви што

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=\sqrt{\frac{27}{2}}\,, \tag{1}$$

при што сите изрази во (1) се реални.

32. Определи ги вредностите на паровите реални параметри (a,b) за кои квадратните равенки $ax^2+bx+2016=0$ и $bx^2+ax+2016=0$ имаат заедничко реално решение.

33. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенките $(a+1)x^2+x-1=0$ и $ax^2-2x+3=0$ имаат заедничко решение.

34. Определи ги сите вредности на реалните ненегативни параметри a и b за кои равенките $x^2+a^2x+b^3=0$ и $x^2+b^2x+a^3=0$ имаат заедничко реално решение.

35. Реши ги равенките $x^3-6x^2+11x+a=0$ и $x^3+4x^2+x+a=0$, каде a е параметар, ако е познато дека тие имаат заедничко решение.

36. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a, за кои едно од решенијата на равенката $|ax|x+x+6=0$ е реципрочна вредност на решение на равенката $2|ax|x+(a+2)x-a=0$.

37. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката $x^2+8=|x+a|+|x-a|$ има непарен број различни реални решенија.

38. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои решенијата x_1 и x_2 на квадратната равенка $x^2+(a+2)x+a-1=0$ го задоволуваат равен-

ството

$$x_1+\frac{1}{1+x_1}+x_2+\frac{1}{x_2-1}=0\,.$$

39. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката $x^2+2(a+1)x+a^2=0$ има две различни реални решенија x_1 и x_2 такви што

$$|\,4x_1x_2-(x_1+x_2)^2\,|\le 1\,.$$

40. Во зависност од вредноста на параметарот a определи го бројот на решенијата на равенката

$$\frac{(x-|a-3|)(x-|a+1|)}{x^2+4x-a^2+2a+3}=0\,.$$

41. Дадена е функцијата $f(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}$. Докажи дека

а) $-1\le f(x)\le 1$ за секој $x\in\mathbb{R}$,

б) за секоја вредност на реалниот параметар m равенката

$$f(x)^2-3f(x)+1=5x^2+2(3m-7)x+2m^2-8m+15$$

нема реални решенија.

42. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$\frac{a+2}{x-2}+\frac{a+3}{x-3}=\frac{a+5}{x-5}$$

има точно едно решение.

43. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$|\,ax-1\,|=ax^2-(2a-1)x+1$$

има точно едно решение.

44. Дадена е функцијата $f(x)=16x^2-8mx+m^2-4m+11$, каде m е реален параметар.

а) Определи ги сите вредноти на m за кои равенката $f(x)=0$ има точно едно решение во интервалот $(0,1)$.

б) Определи ги сите вредности на параметарот m за кои најмалата вредност на функцијата $f(x)$ во интервалот $[0,1]$ е позитивна.

45. Нека $f(x)=x^2+(2a-1)x-3$ и $g(x)=x^2+(a-2)x-1$, каде a е реален параметар. Определи ги сите вредности на a за кои решенијата на равенките $f(x)=0$ и $g(x)=0$ се реални и се такви што меѓу решенијата на едната

равенка има точно едно решение на другата равенка.

46. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$x^2+(a-2)(a-3)x+a^3-4a+9=0$$

има две различни реални решенија x_1 и x_2 такви што $a(x_1+x_2)=\frac{18}{x_1}+\frac{18}{x_2}$.

47. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои решенијата x_1 и x_2 на равенката $x^2+(\sqrt{a+1}-a)x-1=0$ се реални и го задоволуваат условот

$$x_1^2+x_2^2+a^2=2a(x_1+x_2)+2+\sqrt{a^3+a^2-14a+25}\,.$$

48. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои решенијата x_1, x_2 на равенката $x^2-ax+8-a=0$ се позитивни реални броеви за кои важи $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}>16$.

49. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенките $x^2+ax-1=0$ и $y^2+(a+1)y-1=0$ имаат соодветно решенија x_1, x_2 и y_1, y_2 за кои важи

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}=\frac{y_1^2+y_2^2}{y_1+y_2}\,.$$

50. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенките

$$x^2-(2a+1)x+a=0 \text{ и } x^2+(a-4)x+a-1=0$$

имаат соодветно реални решенија x_1, x_2 и x_3, x_4, такви што

$$\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_4}{x_2}=\frac{x_1x_4(x_1+x_2+x_3+x_4)}{a}\,.$$

51. Определи ги сите вредности на реалните параметри p и q за кои равенката $(p+3)x^2+2px+p-1=0$ има реално решение и секое нејзино решение е три пати помало од некое решение на равемката $z^2+pz=q$.

52. Нека $f(x)=x^2-ax+a^2-4$, каде a е реален параметар. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a такви што:

а) равенката $f(x)=0$ има реални решенија x_1 и x_2 за кои важи $|\,x_1^3-x_2^3\,|\le 4$, б) неравенството $f(x) \geq 0$ е исполнето за секој цел број x.

53. Определи ги сите вредности на параметрите p и q за кои равенката $x^2 + px + q = 0$ има два реални корени x_1 и x_2 такви што

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}.$$

54. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$|x^2 + x - 2| = ax + 2$$

има точно три реални решенија.

55. Определи ја најмалата можна вредност на $\overline{AB}$, каде A и B се точки соодветно од графиците на функциите $y = (6-x)^2$ и $y = -x^2$.

56. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои решенијата x_1, x_2, x_3 на равенката

$$x^3 + 2x^2 + (a^2+1)x + a^2 = 0$$

се реални и го задоволуваат неравенството

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} < 36. \qquad (1)$$

57. Дадена е равенката

$$(x^2 + 6x + 1)^2 + (m+7)(x^2 + 6x + 1) + m^2 + 7 = 0,$$

каде m е реален параметар.

а) Определи го бројот на реалните решенија на равенката за $m = 4$.

б) Определи ги вредностите на параметарот m за кои равенката има точно три реални и различни решенија.

58. Нека $f(x) = (a^2 + 4a + 2)x^3 + (a^3 + 4a^2 + a + 1)x^2 + (2a - a^2)x + a^2$, каде a е реален параметар. Определи ги сите вредности на a за кои равенката $f(x) = 0$ има три различни реални позитивни решенија.

59. Определи ги вредностите на параметарот a за кои равенката

$$x^3 - ax^2 + (a-1)^2 = 0$$

има најмногу едно позитивно речение.

60. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$x^3+ax^2-(1-a)^2=0$$

има три различни реални решенија x_1,x_2,x_3 за кои важи

$$\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}>\frac{3}{2}.$$

61. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$(x^2-2x)^2-3(x^2-2x)+a=0$$

има четири реални и различни решенија чиј производ е еднаков на 2.

62. Определи ги сите вредности на реалниот параметар p за кои равенката $|x^2-px-2p+1|=p-1$ има четири реални корени x_1,x_2,x_3,x_4 такви што

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=20.$$

63. Нека $f(x)=x^4-ax^3+(a+1)x^2-2x+1$, каде a е реален параметар.

а) Определи го множеството вредности на изразот $\frac{x^2}{x-1}$ за сите допустливи реални вредности на x.

б) Определи ги сите реални вредности на параметарот a за кои равенката $f(x)=a$ нема реални решенија.

64. Нека $f(x)=x^4-x^3+8ax^2-ax+a^2$ и $g(y)=y^2-y+6a$.

а) Докажи дека $f(x)=(x^2-y_1x+a)(x^2-y_2x+a)$, каде y_1,y_2 се корените на равенката $g(y)=0$.

б) Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката $f(x)=0$ има четири реални различни позитивни решенија.

65. Определи ги вредностите на реалните параметри a и b за кои функцијата $y=x^3+ax+b$ има точно три заеднички точки со координатните оски и тие се темиња на правоаголен триаголник.

66. Во зависност од вредноста на параметарот m определи го бројот на различните реални решенија на равенката

$$x^6-4x^5+rx^4+(8-3r)x^3-rx^2-4x-1=0.$$

II.2. ИРАЦИОНАЛНИ ПАРАМЕТАРСКИ РАВЕНКИ

1. Реши ја равенката
$$\sqrt{x^2+x+3}=x-a,$$
каде a е реален параметар.

2. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката
$$\sqrt{x^2+a}=x-a$$
има барем едно целобројно решение.

3. Реши ја равенката $\sqrt{x-a}=x^2+a$, каде a е реален ненегативен параметар.

4. Реши ја равенката
$$\sqrt{x-\sqrt{a}}=a-x,$$
каде a е реален параметар.

5. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката
$$\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}=x$$
има целобројни решенија.

6. Определи ги сите вредности на параметарот a за кои равенката
$$2x^2-ax=4-2x\sqrt{x^2-ax}$$
има единствено решение.

7. Нека $f(x)=x^2+ax+1$, каде a е реален параметар. Во зависност од a реши ја равенката
$$f(x)=f(\sqrt{a^2-x^2}). \qquad (1)$$

8. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кој равенката
$$\sqrt{(4a^2-4a-1)x^2-2ax+1}=1-ax-x^2 \qquad (1)$$
има точно две решенија.

9. Определи ги вредностите на реалниот параметар a, за кои равенката
$$\sqrt{8x^2+(8a-6)x+2(2a^2-3a+1)}=3x+a-1$$
има два различни позитивни корени.

10. За кои вредности на параметарот a равенката

$$(2x-a)\sqrt{ax^2-(a^2+a+2)x+2(a+1)}=0$$

има три реални и различни решенија.

11. а) Докажи дека функцијата $f(x)=x^3+4x^2+6x$ строго монотоно расте на множеството реални броеви.
б) Определи ги сите реални вредности на параметарот a, за кои равенката
$$x^3+5x=(a-4)x^2-a+4\sqrt[3]{(ax^2+x-a)^2}+6\sqrt[3]{ax^2+x-a}$$
има точно две решенија.

12. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката
$$\sqrt{3+2x-x^2}-\sqrt{4-a^2+2ax-x^2}=1-a$$
има единствено решение.

13. Реши ја равенката
$$x+\sqrt{x^2+2}=2a+1+\sqrt{2ax+2a+3}\,,$$
каде a е реален параметар.

II.3. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ, ЛОГАРИТАМСКИ И ТРИГОНОМЕТРИСКИ ПАРАМЕТАРСКИ РАВЕНКИ

1. Определи ги сите вредности на реалниот параметар $a>0$ за кои равенката $a^{|x+1|}-|a^{x+1}-1|=1$ има точно еден корен.

2. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката
$$2^{3x}-2^{2x+1}a+2^x(a^2+a-1)-a^2+a=0$$
има точно два реални корени.

3. Определи ги сите целобројни вредности на реалниот параметар a, за кои постои ненулти цел број кој е решение на равенката
$$a4^x+(a-1)9^x=(2a-1)6^x\,.$$

4. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката
$$4^x-(a^2+3a-2)2^x+3a^3-2a^2=0$$

има единствено решение.

5. Определи ги сите вредности на параметарот a за кои равенката

$$3(5x^2 - a^4) - 2x = 2a^2(6x - 1)$$

нема повеќе решенија од равенката

$$2x^3 + 6x = (3^{6a} - 9)\sqrt{2^{8a} - \tfrac{1}{6}} - (3a-1)^2 \cdot 12^x .$$

6. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$4^{x-2} - 2^{x-a} + a = 0$$

има точно едно реално решение.

7. Определи ги сите вредности на параметарот a за кои равенката

$$2^{2x+1} - (a+8)\cdot 2^x + a^2 + 4 = 0$$

има едно позитивно и едно негативно решение.

8. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$a - 4^x = \sqrt{a + 2^x}$$

има решение.

9. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$\sqrt[3]{1+3^x} + \sqrt[3]{1-3^x} = a$$

има решение.

10. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$(2+\sqrt{3})^x + (2a-1)(2-\sqrt{3})^x = a - 3$$

има единствено решение.

11. Определи ги вредностите на реалниот параметар m за кои равенката

$$9^{x^2-x} - 3^{x^2} m + 9^x = 0$$

има точно две реални решенија.

12. Определи ги вредностите на реалниот параметар a при кои равенките

$$5^{2x-1}a + 5^{x-1}|a-5| = 1 \text{ и } 9^x + 3^{x+1} = 4$$

се еквивалентни.

13. За кои вредности на реалниот параметар a равенката

$$8^{x^2-x+a^2} - 2^{2x^2-x+2a^2-a+1} - 2^{x^2-2x+a^2+a+2} + 8 = 0$$

има точно три реални и различни решенија.

14. Реши ја равенката

$$\log_a(a^{2(x^2+x)}+a^2)=x^2+x+\log_a(a^2+1)\ ,$$

каде a е реален параметар.

15. За кои вредности на реалниот параметар a равенката

$$\lg(ax+1)=\lg(x-1)+\lg(2-x)$$

има само едно решение?

16. Определи ги сите вредности на реалниот парамтар a за кои равенката

$$\log_{x+a}(x+2a)=\tfrac{1}{2}$$

има единствено решение.

17. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$\log_{ax}(3^x+4^x)=\log_{(ax)^2}(7^2(4^x-3^x))+\log_{(ax)^3}8^{x-1}$$

има решение.

18. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$\lg(\lg(x^3+ax+1))=\lg(\lg(2x^3+a))$$

има точно едно решение.

19. Определи ги вредностите на реалниот параметар a кои равенката

$$\log_{4ax}(x-3a)+\tfrac{1}{2}\log_{x-3a}4ax=\tfrac{3}{2}$$

има точно две различни решенија.

20. Определи ги сите вредности на парметарот a а кои равенката

$$a\sin^2 x-3\sin x\cos x+\cos^2 x=0$$

има две различни решенија во интервалот $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$.

21. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$\sin 2x\sin 4x-\sin x\sin 3x=a$$

има единствено решение во интервалот $[0,\pi)$.

22. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$\sin(\sin x)=\cos(a\cos x)$$

има решение.

23. Дадена е равенката

$$\sin x+\cos x=\sin 2x+a\,,$$

каде a е реален параметар.

а) За $a=1$ во интервалот $[0,\pi]$ реши ја равенката.

б) Определи ја вредноста на a за која равенката има точно три решенија во интервалот $[0,\pi]$.

24. Определи ги сите целобројни вредности на параметарот a кои равенката

$$\sin x+a\sin 2x+\sin 5x=2a$$

има решение.

25. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$a(\sin 2x+1)+1=(a-3)(\sin x+\cos x)$$

има решение.

26. Дадена е равенката

$$5-4\sin^2 x-8\cos^2 \tfrac{x}{2}=3m\,.$$

а) Реши ја равенката за $m=0$.

б) Определи ги сите целобројни вредности на параметарот m за кои равенката има решение.

27. Определи ги сите рални броеви x,y,z за кои

$$a(\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z)+2(1-a)(\cos x+\cos y+\cos z)+6=9a\,,$$

каде a е целоброен параметар.

28. За кои вредности на реалниот параметар a равенката

$$\sin\tfrac{x}{2}+\cos\tfrac{9}{x}=a$$

има позитивно реално решение.

29. Определи ги сите природни броеви n такви што за секој x е исполнето равенството

$$(\sin x)^{2n}+(\cos x)^{2n}+n\sin^2 x\cos^2 x=1\,. \qquad (1)$$

30. Определи ги целобројните вредности на параметарот a за кои постои x таков што $\sin^6 x+\cos^6 x=a\sin x\cos x$ и $\sin 2x$ е рационален број.

31. Дадена е равенката

$$2^{\sin^2 x}a+4^{\cos^2 x}=2a+1\,,$$

каде a е реален параметар.

а) Докажи дека равенката има решение за секоја вредност на параметарот a .

б) Определи ги вредностите на a за кои равенката има точно едно решение во интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$.

32. Определи ги сите природни броеви n за кои равенката

$$\log_n(\sin \pi x) = \sin^2(\log_n x^\pi) \qquad (1)$$

има реални решенија.

II.4. СИСТЕМИ ПАРАМЕТАРСКИ РАВЕНКИ

1. Системот равенки

$$\begin{cases} ax + by = 24a - 4b \\ (c-25)x + cy = 1 - a \end{cases}$$

има бесконечно многу реални решенија. Определи ги вредностите на реалните параметри a, b, c ако едно од решенијата на системот е $(x, y) = (4, 2016)$.

2. Најди ги сите вредности на параметарот a , за кои што системот

$$\begin{cases} x + 4|y| = |x| \\ |y| + |x - a| = 1 \end{cases}$$

има точно две решенија.

3. Определи ги целобројните вредности на параметарот a , за кои системот

$$\begin{cases} a(x - y - 3) = 5 - x - 2y \\ a(x + y - 3) = 2y + 3 - x \end{cases}$$

има целобројни решенија.

4. Даден е системот

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a, \end{cases}$$

каде a е реален параметар.

а) Реши го системот за $a = 0$.

б) Определи ги сите вредности на параметарот a за кои системот има точно две решенија.

5. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои системот равенки

$$\begin{cases} x^2 + 2ax - a^2 + 2 = 0 \\ y^2 + y - x = 0 \end{cases}$$

има точно две решенија.

6. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + a = y + b \\ x^3 + a^3 = y^3 + b^3 \end{cases}$$

каде $a \neq 0, b \neq 0$ се реални параметри.

7. Даден е системот

$$\begin{cases} x - y = a - 1 \\ xy = a^2 - a - 3 \end{cases} \qquad (1)$$

каде a е реален параметар. Нека (x, y) е решение на (1). Определи ја најмалата вредност на изразот $x^2 + y^2$ и вредноста на a за која таа се достигнува.

8. Определи ги вредностите на реалниот параметар m за кои системот

$$\begin{cases} (x + m + 2)^2 + y^2 = 1 \\ y^2 = 2mx \end{cases}$$

има четири различни решенија.

9. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои системот равенки

$$\begin{cases} x^3 = ax + y \\ y^3 = x + ay \end{cases}$$

има единствено реално решение.

10. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои системот

$$\begin{cases} x^2 - 2y - 2z = a \\ y^2 - 2z - 2x = a \\ z^2 - 2x - 2y = a \end{cases}$$

има барем едно реално решение.

11. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+ay^2+a^2z^2=a^2 \\ x+by^2+b^2z^2=b^2 \\ x+cy^2+c^2z^2=c^2 \end{cases}$$

каде $a,b,c\ (a\neq b\neq c\neq a)$ се реални параметри.

12. Даден е системот

$$\begin{cases} (a^2-90a+2016)(|x|+1)=y-9-8|x| \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

каде a е реален параметар. Определи ги сите вредности на a за кои системот има единствено решение.

13. Определи ги вредностите на реалниот параметар a кои системот

$$\begin{cases} 2x^2+x(2y+3)-y-2=0 \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

има точно три реални решенија.

III ПАРАМЕТАРСКИ НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМИ НЕРАВЕНКИ

1. Дадена е неравенката
$$|x^2-5x+6|\leq x+a,$$
каде a е реален параметар.
а) Реши ја неравенката за $a=0$.
б) Определи ги сите вредности на параметарот a за кои неравенката има точно три целобројни решенија.

2. Определи ги сите вредности на реалните параметри a и b за кои неравенката
$$2|x^2+ax+b|>1$$
има решенија во интервалот $[1,3]$.

3. Определи ги вредностите на параметарот a за кои за секој реален број x важи
$$x^3+a^3\leq(x+a)^3-3a(x-1)^2.$$

4. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои неравенката
$$a^2x^4-(4a-1)x^2+7<0$$
има решение.

5. Определи ги сите ненегативни вредности на реалниот параметар a за кои решенијата на неравенката
$$(a-4x^2)^2-(2a+1)x^2+6x^3\leq 0$$
формираат конечен затворен интервал.

6. Нека a е реален параметар. Определи го најмалиот можен број целобројни решенија на неравенката
$$\frac{2x^2+(3a^2+1)x-2a^2+4a-6}{x^2+(a^2+a-3)x-a^2+2a-3}<1.$$

7. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои максимумот на

функцијата $f(x)=\frac{ax-1}{x^4-x^2+1}$ е еднаков на 1.

8. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои неравенката $\sqrt{4+3x}\ge x+a$ нема целобројни решенија.

9. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои неравенката $\sqrt{1+4x}\ge x^2-x+a$ нема целобројни решенија.

10. Дадена е неравенката $\sqrt{a-x}\le x$, каде a е реален параметар.
а) Реши ја неравенката за $a=2$.
б) Определи ги сите вредности на a за кои множеството решенија на неравенката е интервал со должина 1.

11. Дадена е неравенката
$$\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\ge\sqrt{a},$$
каде a е параметар.
а) Реши ја неравенката за $a=3$.
б) Определи ги вредностите на a за кои неравенката има решенија и множеството решенија е интервал со должина помала или еднаква на $\sqrt{3}$.

12. Реши ја неравенката
$$\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}}>\frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}},$$
каде a и b се реални параметри и $a>b>0$.

13. Определи ги сите вредности на параметарот a за кои неравенката
$$\sqrt{x-x^2-a}+\sqrt{6a-2x-x^2}\le\sqrt{10a-2x-4x^2}$$
има единствено решение.

14. Реши ја неравенката
$$2^{2ax+1}+2^a\le 2^{ax}+2^{ax+a+1}.$$

15. За кои вредности на параметарот a неравенката
$$4\cdot 27^{2x^2+x-a}<31\cdot 3^{2x^2+x-a}+15$$
има точно едно целобројно решение.

16. За кои вредности на реалниот параметар m неравенството
$$4^{x^2}-2^{x^2+x+1}m+4^x m^3\ge 0$$

е точно за секој цел број x.

17. Определи ги вредноститре на реалниот параметар $a > 2$ за кои неравенката

$$(ax-1)^{6x^2-(2a+3)x+a} < 0$$

има точно едно целобројно решение.

18. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои неравенката $\log_{x+a} x \le \log_a x$ има решенија чија разлика е еднаква на a.

19. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои неравенството

$$\log_{\frac{a+1}{a-1}}(x^2-x+1) < 1$$

е исполнето за секој реален број x.

20. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои неравенката

$$\log_{a+2-x}(\log_{x-a} a) > 0$$

има решение.

21. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои точно две од целобројните решенија на неравенката

$$\log_a |\log_{\frac{2}{a}}(x+1)| < 0$$

се помали или еднакви на 3.

22. За кои вредности на реалниот параметар a системот

$$\begin{cases} y \ge x^2 + ay + 1 \\ x \ge y^2 + ax + 1 \end{cases}$$

има единствено решение.

23. Определи ги вредностите на параметарот a за кои системот

$$\begin{cases} 4^x + 9^y \le a \\ 2^x - 3^y \ge 1 \end{cases}$$

има решение.

IV ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Нека x, y, z се реални броеви такви што

$$x^4 - 4xz + z^2 - 2z = 0 \text{ и } y^4 - 4yz + z^2 - 2z = 0 . \qquad (1)$$

Определи ја најголемата можна вредност на $| x - y |$.

2. Нека $k \in (0,1)$ е реален параметар. Определи ја најголемата можна вредност на изразот $\frac{x+k^2 y+(1-k)^2 xy}{(1+x+y)^2}$, кога $x, y \geq 0$.

3. Определи ги сите природни броеви n за кои

$$(x+y)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} = (2n+1)xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)^{n-1} \qquad (1)$$

за секои реални броеви x и y.

4. Определи ги вредностите на реалниот параметар a, за кои равенката

$$\left| \frac{|x+1|-|x-1|}{|x+1|+|x-1|} \right| = a$$

има четири различни реални решенија, кои формираат аритметичка прогресија.

5. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$x^3 - ax^2 + (a^2 - 1)x - a^2 + a = 0$$

има три различни реални решенија кои формираат аритметичка прогресија.

6. Определи ги сите реални броеви b и c за кои равенката $x^2 - bx + c = 0$ има две реални и различни ненулти решенија x_1 и x_2, а броевите x_1, x_2, b и c формираат (во некој редослед) аритметичка прогресија.

7. Определи ги вредностите на реалните параметри p, q и r, ако броевите $p, -\frac{q}{2}$ и r формираат аритметичка прогресија и равенката

$$x^3 + px^2 + qx + r - 1 = 0$$

има три корени кои се природни броеви и кои формираат артиметичка прогресија со разлика 2013.

8. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$2^{3x}-2^{2x+1}a+2^{x}(a^{2}+1)-a=0$$

има три реални и различни решенија, кои формираат аритметичка прогресија.

9. Права која минува низ почетокот O на координатниот систем го сече графикот на функцијата $y=x(x-1)(x+2)$ во уште две точки A и B при што O лежи меѓу овие точки. Докажи дека $\overline{AB}>\sqrt{5}$.

10. Реалниот број a е таков што графикот на функцијата $y=x^{2}-a$ го сече квадратот $|x|+|y|=1$ во шест точки. Докажи, дека плоштината на добиениот шестаголник е помала од $\frac{17}{16}$.

11. Позитивните броеви a,b,c во овој редослед формираат геометриска прогресија. Определи го количникот q на оваа прогресија ако решенијата на равенката $a^{3}x^{3}+b^{2}x^{2}+cx=0$ формираат аритметичка прогресија.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

I РАВЕНКИ, НЕРАВЕНКИ И НИВНИ СИСТЕМИ

I.1. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

1. Даден е изразот $A=\frac{\frac{\sqrt{b^2-2b+1}}{b}+b\sqrt{b^2-2b+1}+2-\frac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\frac{1}{b}}}$.

   а) Упрости го изразот A.

   б) Определи ја вредноста на A ако $b=\frac{1}{9}(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}-x_1^3-x_2^3)$, каде x_1 и x_2 се решенијата на равенката $3x^2-9x+2=0$.

   Решение. а) Имаме:

$$A=\frac{\frac{\sqrt{b^2-2b+1}}{b}+b\sqrt{b^2-2b+1}+2-\frac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\frac{1}{b}}}=\frac{(1+b^2)|b-1|+2(b-1)}{|b-1|\sqrt{b}}.$$

   1) Ако $0<b<1$, тогаш $A=\frac{b^2-1}{\sqrt{b}}$.

   2) Ако $b>1$, тогаш $A=\frac{b^2+3}{\sqrt{b}}$.

   б) Од Виетовите формули следува $x_1+x_2=3, x_1x_2=\frac{2}{3}$. Затоа $x_1^2+x_2^2=\frac{23}{3}$ и $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)=21$. Сега лесно се пресметува дека $b=\frac{5}{12}<1$ и затоа $A=\frac{119\sqrt{15}}{360}$.

2. Квадратната равенка $x^2-bx+c=0$ има две различни решенија, кои се природни броеви. Познато е дека $2b+c=2016$. Определи ги решенијата на равенката и коефициентите b и c.

   Решение. Од Виетовите формули следува $x_1+x_2=b, x_1x_2=c$. Тогаш

$$2016=2b+c=2(x_1+x_2)+x_1x_2=(2+x_1)(2+x_2)-4,$$

   т.е. $(2+x_1)(2+x_2)=2020$. Имаме, $2020=2^2\cdot 5\cdot 101$, па затоа ако земеме $x_1<x_2$ (очигледно случајот $x_1=x_2$ не е можен), добиваме четири можности:

   1) $2+x_1=4, 2+x_2=505$ и тогаш $x_1=2, x_2=503, b=505$ и $c=1006$.

   2) $2+x_1=5, 2+x_2=404$ и тогаш $x_1=3, x_2=403, b=405$ и $c=1206$.

   3) $2+x_1=10, 2+x_2=202$ и тогаш $x_1=8, x_2=200, b=208$ и $c=1600$.

4) $2+x_1=20, 2+x_2=101$ и тогаш $x_1=18, x_2=99, b=117$ и $c=1782$.

3. Реши ја равенката

$$(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)=(x+2)^2+(x+4)^2+(x+6)^2+(x+8)^2+40 .$$

Решение. На левата страна ги множиме првиот и четвртиот множител, и вториот и третиот множител, а на десната страна се ослободуваме од заградите. Потоа воведуваме смена $x^2+10x+16=y$ и ја добиваме равенката $y(y+8)=4y+96$ чии решенија се $y_1=-12$ и $y_2=8$. Првото решение ја дава равенката $x^2+10x+28=0$ чии решенија се $x_{1,2}=-5\pm i\sqrt{3}$, а второто решение ја дава равенката $x^2+10x+8=0$ чии решенија се $x_{3,4}=-5\pm\sqrt{17}$.

4. Нека x_1 и x_2 се решенијата на равенката $x^2-5x=3$. Определи ги сите реални броеви z за кои важи равенството

$$(2z^2-4z-\sqrt{z^2-2z-10}(x_1^2+x_2^2)=2015. \quad (1)$$

Решение. Од Виетовите формули следува

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5^2+2\cdot 3=31,$$

па затоа равенката е еквивалентна со равенката

$$2z^2-4z-\sqrt{z^2-2z-10}=65 .$$

Ставаме $t=\sqrt{z^2-2z-10}\geq 0$ и ја добиваме равенката $2t^2+20-t=65$, која е еквивалентна со равенката $2t^2-t-45=0$. Единствен ненегативен корен на оваа равенка е $t=\frac{1+\sqrt{1+360}}{4}=5$. Значи, $z^2-2z-10=5^2$, од каде добиваме $z=7$ или $z=-5$.

5. Докажи дека броевите a,b,c се такви што $a+b+c=5$ и $ab+bc+ca=8$, тогаш $a,b,c\in[1,2\frac{1}{3}]$.

Решение. Имаме $b+c=a-5$ и $bc=8-a(b+c)=8-a(a-5)$. Според тоа, b и c се решенија на квадратната равенка $t^2-(5-a)t-a(5-a)=0$. Но последната квадратна равенка има реални решенија ако нејзината дискриминанта е ненегативна, од што се добиав дека $3a^2-10a+7\leq 0$. Решение на последната неравенка е $a\in[1,2\frac{1}{3}]$. Условот на задачата е цикличен во однос на a,b,c , па затоа важи $a,b,c\in[1,2\frac{1}{3}]$.

6. Реши ја равенката

$$\frac{3x}{\sqrt{2-|1-2x|}}=1. \qquad (1)$$

Решение. Да забележиме дека ако дадената равенка има решение, тогаш тоа е позитивно, т.е. $x>0$. Така, по квадрирањето на дефиниционата област на (1) ја добиваме еквивалентната равенка

$$9x^2=2-|1-2x|,$$

каде $x>0$. Ќе разгледаме два случаја:

Прв случај. Ако $1-2x\geq 0$, т.е. $x\leq\frac{1}{2}$, ја добиваме равенката $9x^2-2x-1=0$ чии решенија се $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{10}}{9}$, од кои само $x=\frac{1+\sqrt{10}}{9}\in(0,\frac{1}{2}]$. Лесно се проверува дека за најденото решение именителот на (1) е определен.

Втор случај. Ако $1-2x<0$, т.е. $x>\frac{1}{2}$, ја добиваме равенката $9x^2+2x-3=0$ чии решенија се $x_{3,4}=\frac{-1\pm2\sqrt{7}}{9}$ и ниту едно од нив не е во интервалот $(\frac{1}{2},+\infty)$.

Конечно, равенката (1) има единствено решение $x=\frac{1+\sqrt{10}}{9}$.

7. Реши ја равенката

а) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=\sqrt{2x}$.

б) $(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+8}-\sqrt{x+2}-1)=1$.

Решение. а) Ако ставиме $\sqrt{x+4}=u$ и $\sqrt{x-4}=v$, добиваме $2x=u^2+v^2$. Сега зако замениме во дадената равенка добиваме $u+v=\sqrt{u^2+v^2}$, односно $(u+v)^2=u^2+v^2$, од каде следува $uv=0$. Ако $u=0$, тогаш $x=-4$ и тоа не е решение на задачата. Ако $v=0$, тогаш $x=4$ и тоа е решение на задачата.

б) Допустливи вредности на x се $x\geq-2$. Ако равенката ја помножиме со $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}>0$, добиваме дека таа е еквивалентна со равенката

$$\sqrt{x+8}-\sqrt{x+2}-1=\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2},$$

т.е. со равенката

$$\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}=1.$$

Ако земеме предвид дека $\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}>0$, по квадрирањето и средувањето на добиените изрази добиваме дека последната равенка е еквивалентна со равенката

$$x+5=\sqrt{x^2+11x+24}.$$

Бидејќи $x+5>0$ имаме $x^2+10x+25=x^2+11x+24$, т.е. $x=1$ и тоа е единствено решение на задачата.

8. Реши ја равенката

$$\sqrt{x^3-11|x-1|}=2x-1.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$x^3-11|x-1|=(2x-1)^2,\ \text{за}\ x\geq\tfrac{1}{2}. \qquad (1)$$

Заради апсолутната вредност разгледуваме два случаја.

Случај 1. Ако $x\in[\frac{1}{2},1)$, тогаш ја добиваме равенката

$$x^3-4x^2+15x-12=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)(x^2-3x+12)=0$$

која нема решенија во разгледуваниот интервал.

Случај 2. Ако $x\geq 1$, тогаш ја добиваме равенката

$$x^3-4x^2-7x+10=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)(x-5)(x+2)=0$$

и добиваме две решенија $x_1=1$ и $x_2=5$.

9. Реши ја равенката

$$\sqrt{x-2}+2\sqrt{x^2-x-2}=\sqrt{(x^2-4)(x^2-x-1)}.$$

Решение. Равенката има смисла за $x\geq 2$. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$\sqrt{x-2}+2\sqrt{(x-2)(x+1)}=\sqrt{(x-2)(x+2)(x^2-x-1)}.$$

Јасно, $x=2$ е решение на последната равенка, па ако скратиме со $\sqrt{x-2}$, по средувањето ја добиваме равенката

$$1+2\sqrt{x+1}=\sqrt{x^3+x^2-3x-2}.$$

Последната равенка ја квадрираме и ја добиваме равенката

$$4\sqrt{x+1}=x^3+x^2-7x-7,$$

т.е. равенката

$$4=(x^2-7)\sqrt{x+1}.$$

Ако $x\in(2,3)$, тогаш $x<(3^2-7)\sqrt{3+1}=4$, а ако $x\geq 3$, тогаш $x>4$, па затоа равенката има уште едно решение, а тоа е $x=3$.

10. Реши ја равенката

$$x^2+3\sqrt{x+3}=7.$$

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во видот $3\sqrt{x+3}=7-x^2$. Јасно, $x+3\geq 0$ и $7-x^2\geq 0$, па затоа $x\in[-3,\infty)$ и $x\in[-\sqrt{7},\sqrt{7}]$, од каде следува $x\in[-\sqrt{7},\sqrt{7}]$. По квадрирањето на последната равенка и средување на истата ја добиваме равенката $x^4-12x^2-9x+22=0$, каде $x\in[-\sqrt{7},\sqrt{7}]$. Делители на бројот 22 се $\pm1,\pm2,\pm11,\pm22$ и само $\pm1,\pm2$ се во интервалот $[-\sqrt{7},\sqrt{7}]$.

Со непосредна проверка добиваме дека решенија на равенката се $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$, па затоа оваа равенка е еквивалентна на равенката

$$(x-1)(x+2)(x^2-x-11) = 0 .$$

Но, $x \in [-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$ и како $\sqrt{7}^2 \pm \sqrt{7} - 11 = -4 \pm \sqrt{7} < 0$, заклучуваме дека $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$ се единствени решенија на задачата.

11. Реши ја равенката

$$\sqrt{6-x} = 6 - x^2 .$$

Решение. Равенката има смисла за $x \le 6$, а $x \in [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$ таа е еквивалентна со равенката $6 - x = 36 - x^2 + x^4 \Leftrightarrow x^4 - x^2 + x + 30 = 0$. Со проверка на делителите на 30 добиваме дека 2 е решение и добиваме

$$x^4 - x^2 + x + 30 = (x-2)(x^3 + 2x^2 - 3x - 15)$$

Равенката $x^3 + 2x^2 - 3x - 15 = 0$ има решение $x = -3$, кое не е решение на дадената равенка. Разложуваме

$$x^3 + 2x^2 - 3x - 15 = (x-3)(x^2 - x - 5) .$$

Квадратната равенка $x^2 - x - 5 = 0$ има решенија $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$, од кои само $x = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ е во интервачот $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$.

12. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{5x^2 + 5x + 7} + \sqrt{7x^2 + 7x + 5} = 4x^2 + 4x + \sqrt{5} + \sqrt{7} .$$

Решение. Воведуваме смена $t = x^2 + x$ и ја добиваме равенката

$$\sqrt{5t+7} + \sqrt{7t+5} = 4t + \sqrt{5} + \sqrt{7} . \qquad (1)$$

Бидејќи $(2x+1)^2 \ge 0$, добиваме $x^2 + x \ge -\frac{1}{4}$. Според тоа, $5t + 7 \ge \frac{23}{4} > 0$ и $7t + 5 \ge \frac{13}{4} > 0$, за секој $t \ge -\frac{1}{4}$, т.е. задачата е добро дефинирана за секој реален број x. Понатаму, равенката (1) последователно е еквивалентна на равенките

$$(\sqrt{5t+7} - \sqrt{7}) + (\sqrt{7t+5} - \sqrt{5}) - 4t = 0$$
$$t\left(\frac{5}{\sqrt{5t+7}+\sqrt{7}} + \frac{7}{\sqrt{7t+5}+\sqrt{5}} - 4\right) = 0.$$

Но, кога $t \ge -\frac{1}{4}$ важи $\sqrt{5t+7} + \sqrt{7} \ge 2\sqrt{-\frac{5}{4}+7} = 2\sqrt{\frac{23}{4}} > 4$. Аналогно се докажува $\sqrt{7t+5} + \sqrt{5} \ge 2\sqrt{-\frac{7}{4}+5} = 2\sqrt{\frac{13}{4}} > 3$. Според тоа,

$$\frac{5}{\sqrt{5t+7}+\sqrt{7}}+\frac{7}{\sqrt{7t+5}+\sqrt{5}}-4<\frac{5}{4}+\frac{7}{3}-4=-\frac{5}{12}<0,$$

па затоа $t=0$. Оттука $x^2+x=0$, т.е. $x=0$ и $x=-1$.

13. Реши ја неравенката

$$x\cdot 4^x+\frac{16}{x}+5\cdot 2^{x+1}>0.$$

Решение. Дадената неравенка има смисла за $x\neq 0$ и последователно е еквивалентна на неравенките

$$x(2^{2x}+\frac{16}{x^2}+10\cdot\frac{2^x}{x})>0$$

$$x(2^x-\frac{8}{x})(2^x-\frac{2}{x})>0.$$

Јасно, последната неравеннка нема решение за $x<0$, бидејќи во овој случај левата страна очигледно е негативна. Нека $x>0$. Сега неравенката го добива видот

$$(2^x-\frac{8}{x})(2^x-\frac{2}{x})>0.$$

Бидејќи при $x>0$ функцијата 2^x строго монотоно расте, а функцијата $\frac{1}{x}$ строго монотоно опаѓа, првиот множител го менува знакот во $x=2$, а вториот во $x=1$. За $x\in(0,1)$ и двата множители се негативни, за $x\in(1,2)$ едниот е негативен, а другиот е позитивен и за $x\in(2,+\infty)$ и двата множители се позитивни. Според тоа, решенијата на неравенката се $x\in(0,1)\cup(2,+\infty)$.

14. Реши ја равенката

$$3x^4-4x^3-12x^2+16\frac{4^{x-1}+6}{2^x+1}=0.$$

Решение. Ја испитуваме функцијата $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$ во интервалот $(-\infty,+\infty)$. Имаме $f'(x)=12(x^3-x^2-2x(=12x(x+1)(x-2)$. Значи, $f'(x)<0$ за $x\in(-\infty,-1)\cup(0,2)$ и $f'(x)>0$ за $x\in(-1,0)\cup(2,+\infty)$. Тоа значи дека f опаѓа во првите два интервала и расте во вторите два интервала. Според тоа, најмалата вредност на f се достигнува за $x=-1$ или $x=2$. Бидејќи $f(-1)=-5>-32=f(2)$, таа е еднаква на $f(2)=-32$.

Од друга страна, $g(x)=\frac{4^{x-1}+6}{2^x+1}\geq 2$ ако и само ако $4(2^{x-2}-1)^2\geq 0$. Според тоа $f(x)+16g(x)\geq -32+16\cdot 2=0$, при што знак за равернство важи за $x=2$.

15. Реши ја равенката

$$20^{x^2}\cdot 10^x=2.$$

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во видот $2^{x^2-1}\cdot 10^{x^2+x}=1$, т.е. $(2^{x-1}\cdot 10^x)^{x+1}=1$. Можни се два случаја $x+1=0$ или $2^{x-1}\cdot 10^x=1$. Во првиот случај го добиваме решението $x=-1$, а во вториот ја добиваме равенката $20^x=2$, чие решение е $x=\log_{20}2$. Јасно, најдените решенија се решенија на почетната равенка.

16. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\cos 9x=16\cos x .$$

Решение. Со смената $x=\frac{\pi}{2}-x$, равенката го добива обликот $\sin 9y=16\sin y$ Бидејќи $|\sin ny|\leq n|\sin y|$ за $y\neq k\pi$, единствени решенија се $y=k\pi$, т.е. $x=\frac{\pi}{2}+l\pi, l\in\mathbb{Z}$.

17. Реши ја равенката

$$\operatorname{ctg}4x+\cos 2x+\frac{\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)}{\sin 4x}=0 .$$

Решение. Воведуваме смена $y=\frac{\pi}{4}-x$ и ја добиваме равенката

$$-\operatorname{ctg}4y+\sin 2y+\frac{\cos^2 y}{\sin 4y}=0 ,$$

при што $y\neq\frac{k\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$. Од последната равенка ја добиваме равенката

$$4\cos^3 2y+4\cos^2 2y-5\cos 2y-3=0$$

и ако воведеме смена $\cos 2y=u$ ја добиваме равенката

$$4u^3+4u^2-5u-3=0 .$$

Решенијата на последната равенка се $-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}$ и 1. Првото и третото решение не даваат решенија на дадената равенка, а од второто решение добиваме $2y=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$, односно $y=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Сега, ако замениме во $x=\frac{\pi}{4}-y$, добиваме $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ и $x=\frac{7\pi}{12}+m\pi, m\in\mathbb{Z}$

18. Докажи дека равенката $\lg(\sin x)=\sin(\lg x)$ има бесконечно многу реални решенија.

Решение. Дефиниционата област на функцијата $f(x)=\lg(\sin x)-\sin(\lg x)$ се интервалите од видот $(2k\pi,(2k+1)\pi), k\in\mathbb{Z}^+$ и на овие интервали функцијата е непрекината. Бидејќи кога $\lim\limits_{x\to 2k\pi^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(2k+1)\pi^-}f(x)=-\infty$, доволно е да докажеме дека $f(2k\pi+\frac{\pi}{2})=-\sin(\lg(2k\pi+\frac{\pi}{2}))\geq 0$ за бесконечно многу вредности на $k\in\mathbb{Z}^+$. Последното значи дека

$$(2m-1)\pi \le \lg(2k\pi+\tfrac{\pi}{2}) \le 2m\pi\,,\ m\in\mathbb{Z}\,,$$

т.е. $k\in[\frac{2\cdot 10^{(2m-1)\pi}-\pi}{4\pi},\frac{2\cdot 10^{2m\pi}-\pi}{4\pi}]$. Останува да забележиме дека должината на секој од овие интервали е поголема од 1 и левата крајна точка е позитивна за секој $m\in\mathbb{N}$, што значи дека за $m\in\mathbb{N}$ секој од овие интервали содржи природен број.

19. Дали постојат реални броеви x и y такви што

$$2\sin x+2\sin y=12\sin(x+y)+15\,. \qquad (1)$$

Решение. Ако $s=\frac{x+y}{2}$, $z=2s$ и $f(s)=|\sin s|-3\sin 2s$, тогаш

$$A(x,y)=2\sin x+2\sin y-12\sin z=4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-12\sin(x+y)\le 4f(s)\,.$$

За $t\in(0,\pi)$ имаме

$$f'(t)=\cos t-6\cos 2t=\cos t-6(2\cos^2 t-1)=-12(\cos t-\tfrac{3}{4})(\cos t+\tfrac{2}{3})\,.$$

Постои единствено $t_0\in(0,\pi)$, таков што $\cos t_0=-\frac{2}{3}$. Тогаш $\sin t_0=\frac{\sqrt{5}}{3}=c$. Бидејќи $f(z)=f(z+\pi)$, лесно се добива дека $\max f=f(t_0)=5c$. Оттука следува дека $A\le 20c=\frac{20\sqrt{5}}{3}<15$. Според тоа, не постојат реални броеви x и y за кои е исполенто равенството (1).

20. Реши ја неравенката

$$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x^2-3}+x\sqrt{3}>0\,.$$

Решение. Дадената неравенка има смисла за $x\in(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty)$. Очигледно сите вредности на x од интервалот $[\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty)$ се решение. Нека $x\in(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{2}]$. Тогаш неравенката последователно е еквивалентна со неравенките

$$\sqrt{(x^2-1)(2x^2-3)}>2,$$
$$2x^4-5x^2-1>0.$$

Имајќи ги предвид корените на биквадратната равенка $2x^4-5x^2-1=0$, добиваме дека во овој случај $x\in(-\infty,-\frac{\sqrt{5+\sqrt{33}}}{2})$. Според тоа,

$$x\in(-\infty,-\frac{\sqrt{5+\sqrt{33}}}{2})\cup[\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty)\,.$$

21. Реши ја неравенката

$$\sqrt{x^3-7x^2+36}<x-1.$$

Решение. Дефиниционата област е определена од неравенството

$$x^3-7x^2+36\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+2)(x-3)(x-6)\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\in[-2,3]\cup[6,+\infty).$$

Случај 1. Ако $x\in[-2,1)$, тогаш $\sqrt{x^3-7x^2+36}\ge 0>x-1$ и немаме решение.

Случај 2. Ако $x\in[1,3]\cup[6,+\infty)$, тогаш дадената неравенка ја квадрираме и добиваме

$$\begin{aligned}x^3-8x^2+2x+35<0 \quad&\Leftrightarrow\quad (x-7)(x^2-x-5)<0\\ &\Leftrightarrow\quad x\in(-\infty,\tfrac{1-\sqrt{21}}{2})\cup(\tfrac{1+\sqrt{21}}{2},7).\end{aligned}$$

Конечно, $x\in(\frac{1+\sqrt{21}}{2},3]\cup[6,7)$.

22. Реши ја неравенката

$$\frac{\sqrt{7-3x}+x-5}{x}\ge -1.$$

Решение. Дефиниционата област на неравенката е $x\le\frac{7}{3}$, $x\ne 0$.

1) Нека $x>0$. Тогаш неравенката е еквивалентна со $\sqrt{7-3x}\ge 5-2x$. Десната страна на последната неравенка е позитивна, па затоа можеме да квадрираме и ја добиваме неравенката $4x^2-17x+18\le 0$, чии решенија се $x\in[2,\frac{9}{4}]$.

2) Нека $x<0$. Сега имаме $\sqrt{7-3x}\le 5-2x$ и $4x^2-17x+18\ge 0$. Решенија на последната неравенка се $x\in(-\infty,2]\cup[\frac{9}{4},+\infty)$ и како $x<0$ добиваме $x\in(-\infty,0)$.

Конечно, добиваме $x\in(-\infty,0)\cup[2,\frac{9}{4}]$.

23. Реши ја неравенката

$$\sqrt{1-3x-\sqrt{12-8x}}>\sqrt{-x^2-3x+4}.$$

Решение. Допуштливите вредности на x се решенијата на системот

$$\begin{cases}-x^2-3x+4\ge 0\\ 12-8x\ge 0\\ 1-3x-\sqrt{12-8x}\ge 0.\end{cases}$$

Оттука добиваме $x\in[-4,-\frac{11}{9}]$. Понатаму, ја квадрираме дадената неравенка и по средувањето ја добиваме неравенката

$$x^2-3>\sqrt{12-8x}.$$

Од последната неравенка следува дека $x \notin [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, а за сите останатите вредности на x со повторно квадрирање добиваме

$$x^6 - 6x^2 + 8x - 3 = (x-1)^2(x^2 + 2x - 3) > 0 . \qquad (1)$$

Бидејќи $(x-1)^2 > 0$ за допустливите вредностим на x, неравенката (1) е еквивалентна со $x^2 + 2x - 3 > 0$, од каде добиваме $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$. Конечно, од $x \in [-4, -\frac{11}{9}]$, $x \notin [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ и $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ следува дека решението на задачата е $x \in [-4, -3]$.

24. Реши ја неравенката

$$\sqrt{3 - 2^x} \le 3 - 4^x .$$

Решение. Со смената $t = 2^x > 0$, ја добиваме неравенката $\sqrt{3-t} \le 3 - t^2$. Оттука следува дека $t \in (0, \sqrt{3}]$ и по квадрирањето ја добиваме еквивалентната неравенка

$$t^4 - 6t^2 + t + 6 \ge 0 .$$

Лесно се добива дека -1 и 2 се целобројни корени на полиномот на десната страна во горната неравенка, па затоа таа е еквивалентна со неравенката

$$(t+1)(t-2)(t^2 + t - 3) \ge 0 .$$

Бидејќи $t \in (0, \sqrt{3}]$, добиваме $t \in (0, \frac{\sqrt{13}-1}{2}]$ и затоа $x \in (-\infty, \log_2 \frac{\sqrt{13}-1}{2}]$.

25. Реши ја неравенката

$$\frac{6}{2x-1} > \frac{1+\log_2(2+x)}{x} .$$

Решение. Дадената неравенка има смисла за $x \in (-2, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, +\infty)$.

Прв случај. Ако $x > 0$, неравенката е еквивалентна на $\frac{4x-1}{2x+1} > \log_2(2+x)$. Бидејќи за $x \in (0,1]$ важи $\frac{4x-1}{2x+1} \le 1 < \log_2(2+x)$, останува да го разгледаме случајот $x \in (1, +\infty)$. Во овој интервал функцијата $f(x) = \frac{4x-1}{2x+1}$ расте од од 1 до 2, па бидејќи $\log_2(2+x) \ge 2$ кога $x \ge 2$ останува да го разгледаме случајот $x \in (1, 2)$. Кога $x \in (1, 2)$ имаме $\log_2(2+x) \ge \log_2 \frac{3}{2}$, додека $\frac{4x-1}{2x+1} \le \frac{7}{5}$. Сега, бидејќи $\log_2 \frac{3}{2} > \frac{7}{5}$, дадената неравенка нема решение во овој интервал.

Втор случај. Ако $x \in (-2, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 0)$, тогаш неравенката е еквивалентна на неравенката $\frac{4x-1}{2x+1} < \log_2(2+x)$. Имаме $\log_2(2+x) < 1$, додека $\frac{4x-1}{2x+1} > 1$ кога $x \in (-2, -\frac{1}{2})$, па затоа во овој интервал неравенката нема решение.

Конечно, лесно се гледа дека решение на дадената неравенка е секој $x\in(-\frac{1}{2},0)$.

26. Реши ја неравенката

$$\sin x+\cos x+\sin 2x\leq 1.$$

Решение. Нека $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$. Тогаш $\sin 2x=y^2-1$ и дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $y^2+y-2\leq 0$. Решенијката на последната неравенка се $y\in[-2,1]$. Според тоа, $-2\leq\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\leq 1$, од каде добиваме $-\sqrt{2}\leq\sin(x+\frac{\pi}{4})\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$. Левото неравенство е исполнето за секој x, а за десното добиваме

$$\frac{3\pi}{4}+2k\pi\leq x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{9\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

односно

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq x\leq 2\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

I.2. СИСТЕМИ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

1. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}x^3+xy^2+16=0\\ 3y^3-xy^2+16=0.\end{cases}$$

Решение. Ако ја одземеме втората равенка од првата ја добиваме равенката $x^3+2xy^2-3y^3=0$. Лесно се гледа дека за $y=0$ не се добива решение на системот. За $y\neq 0$ ја делиме последнта равенка со y^3 и ако ставиме $\frac{x}{y}=t$ ја добиваме равенката $t^3+2t-3=0$, која е еквивалентна со равенката

$$(t-1)(t^2+t+3)=0.$$

Последната равенка има единствено решение $t=1$. Тогаш $x=y$ и од системот добиваме $x=y=2$.

2. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}xy+2yz=5\\ yz+2zx=3\\ zx+2xy=7.\end{cases}$$

Решение. Ако ги собереме трите равенки на системот ја добиваме равенката $xy+yz+zx=5$. Оттука и од првата равенка добиваме $zx-yz=0$, т.е. $z=0$

или $x = y$. Првата можност отпаѓа заради втората равенка на системот, а за $x = y$ системот го добива видот

$$\begin{cases} x^2 + 2zx = 5 \\ xz = 1. \end{cases}$$

Според тоа, $x^2 = 3$, па затоа $x = \pm\sqrt{3}$. Значи, $y = x = \pm\sqrt{3}$ и $z = \frac{1}{x} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Конечно, решенија на системот се $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ и $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$.

3. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{2xy}{z} \\ y^2 + z^2 = \frac{2yz}{x} \\ z^2 + x^2 = \frac{2zx}{y}. \end{cases}$$

Решение. Јасно, $x, y, z \neq 0$. Ако првата равенка ја одземеме од втората, по елементарни трансформации ја добиваме равенката $z^2 - x^2 = \frac{2y(z^2 - x^2)}{xz}$. Можни се следниве случаи $z = x$ или $z = -x$ или $2y = xz$. Во првиот случај ако замениме во третата равенка добиваме $y = 1$ и потоа ако замениме во првата равенка добиваме $x = z = \pm 1$. Аналогно во вториот случај добиваме $y = -1$ и $x = -z = \pm 1$. Ако $2y = xz$, од првата раенка добиваме $x^2 + y^2 = x^2$, т.е. $y = 0$, што е противречност.

Конечно, системот има четири решенија $(\pm 1, 1, \pm 1)$ и $(\pm 1, 1, \mp 1)$.

4. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2 + y + z = 1 \\ x + y^2 + z = 1 \\ x + y + z^2 = 1. \end{cases}$$

Решение. Ако од првата равенка прво ја одземеме втората, а потоа од првата равенка ја одземеме третата добиваме $x(x-1) = y(y-1) = z(z-1)$. Оттука следува дека барем два од броевите x, y, z се еднакви. Нека $y = z$. Сега, дадениот систем го добива видот

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 1 \\ x + y^2 + y = 1. \end{cases}$$

Од првата равенка имаме $y = \frac{1-x^2}{2}$ и ако замениме во втората равенка, по средувањето, ја добиваме равенката $x^4-4x^2+4x-1=0$. Јасно, $x=1$ е едно решение на дадената равенка, па затоа дадената равенка е еквивалентна на равенката $(x-1)^2(x^2+2x-1)=0$. Решенија на последната равенка се $x=1$ и $x=-1\pm\sqrt{2}$. Оттука ги добиваме петте решенија на дадениот систем:

$$(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ (-1+\sqrt{2},-1+\sqrt{2},-1+\sqrt{2}),\ (-1-\sqrt{2},-1-\sqrt{2},-1-\sqrt{2}).$$

5. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} xy-\frac{1}{yz}=\frac{2}{3} \\ yz-\frac{1}{zx}=\frac{5}{2} \\ zx-\frac{1}{xy}=1. \end{cases}$$

Решение. Воведуваме замени

$$xy=a, yz=b, zx=c,$$

при што важи

$$x^2=\frac{ac}{b},\ y^2=\frac{ab}{c},\ z^2=\frac{bc}{a}.$$

Од третата равенка добиваме $c=\frac{a+1}{a}$ и оттука и од втората равенка следува

$$b=\frac{5}{2}+\frac{a}{a+1}=\frac{7a+5}{2a+2}.$$

Сега од првата равенка следува

$$a=\frac{2}{3}+\frac{2a+2}{7a+5}\text{, т.е. } 21a^2-5a-16=0.$$

Решенија на последната равенка се $a=1$ и $a=-\frac{16}{21}$. Според тоа, можни решенија се $(1,3,2)$ и $(-\frac{16}{25},-\frac{7}{10},-\frac{5}{16})$. Второто решение отпаѓа, а од првото добиваме $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, y=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, z=\pm\sqrt{6}$. Бидејќи x,y,z имаат еднакви знаци, добиваме дека решенија се

$$x=\sqrt{\tfrac{2}{3}}, y=\sqrt{\tfrac{3}{2}}, z=\sqrt{6} \text{ и } x=-\sqrt{\tfrac{2}{3}}, y=-\sqrt{\tfrac{3}{2}}, z=-\sqrt{6}.$$

6. Определи го бројот на реалните решенија на системот

$$\begin{cases} x+y+z=3xy \\ x^2+y^2+z^2=3xz \\ x^3+y^3+z^3=3yz. \end{cases}$$

Решение. Ако $y=0$, тогаш првата равенка се сведува на $x=-z$. Заменуваме во втората равенка и добиваме $x=z=0$. Јасно, тројката $(0,0,0)$ е решение на системот.

Ако $y \neq 0$, ставаме $a = \frac{x}{y}, b = \frac{z}{y}$ и системот го добива видот

$$\begin{cases} 1 + a + b = 3ay \\ 1 + a^2 + b^2 = 3ab \\ y(1 + a^3 + b^3) = 3b. \end{cases}$$

Ако од првата равенка за y замениме во третата го добиваме системот

$$\begin{cases} (1 + a + b)(1 + a^3 + b^3) = 9ab \\ 1 + a^2 + b^2 = 3ab. \end{cases}$$

Воведуваме смени $u = a + b, v = ab$ и добиваме

$$\begin{cases} (1 + u)(1 + u^3 - 3uv) = 9v \\ 1 + u^2 = 5v \end{cases}$$

од каде наоѓаме

$$v = \frac{u^2+1}{5} \text{ и } u^4 + u^3 - 6u^2 + u - 2 = (u - 2)(u^3 + 3u^2 + 1) .$$

За $u = 2$ добиваме $v = 1, a = b = 1$ и решение $(x, y, z) = (1,1,1)$. Функцијата $f(u) = u^3 + 3u^2 + 1$ има локален максимум за $u = -2$ и локален минимум за $u = 0$. Бидејќи $f(0) = 1 > 0$ равенката $f(u) = 0$ има единствен реален корен u_0, при што $u_0 < -2$. Тогаш $u_0^2 - 4\frac{u_0^2+1}{5} = \frac{u_0^2-4}{5} > 0$ и затоа системот

$$\begin{cases} a + b = u_0 \\ ab = \frac{u_0^2+1}{5} \end{cases}$$

има две реални решенија, што доведува до уште две реални решенија на дадениот систем. Конечно, дадениот систем има четири реални решенија.

7. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2y^2 + |xy| = \frac{4}{9} \\ xy + 1 = x + y^2. \end{cases} \tag{1}$$

Решение. Бидејќи $x^2y^2 = |xy|^2$, од првата равенка на (1) ја добиваме равенката $(|xy| + \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{36}$, од каде добиваме $|xy| = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Втората равенка на (1) е еквивалентна на равенката $(y-1)(x-y-1) = 0$, па затоа можни се два случаја.

Случај 1. Ако $y = 1$, тогаш $|x| = \frac{1}{3}$, т.е. $x = \pm\frac{1}{3}$.

Случај 2. Ако $y = x - 1$, тогаш $|x^2 - x| = \frac{1}{3}$, т.е. $x^2 - x = \pm\frac{1}{3}$. Знакот минус не е можен, бидејќи $x^2-x+\frac{1}{3}=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{12}>0$. Значи, $x^2-x=\frac{1}{3}$, од каде добиваме $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{6}$. Соодветно $y_{1,2}=x_{1,2}-1=\frac{-3\mp\sqrt{21}}{6}$.

Конечно, решенија на системот се

$$(\tfrac{1}{3},1),\ (-\tfrac{1}{3},1),\ (\tfrac{3-\sqrt{21}}{6},\tfrac{-3+\sqrt{21}}{6}),\ (\tfrac{3+\sqrt{21}}{6},\tfrac{-3-\sqrt{21}}{6}).$$

8. Докажи дека системот равенки

$$\begin{cases}(x^2-2)(y^2-2)=2009\\(x-9)^2+(y-9)^2=100\end{cases}$$

има точно два пара решенија (x,y) за кои x и y се рационални броеви.

Решение. Лесно се проверува дека паровите $(x,y)=(3,17)$ и $(17,3)$ се решенија на системот. Значи, треба да докажеме дека системот нема други рационални решенија. Воведуваме замени $x+y=u,\ xy=v$ и системот го добива обликот

$$\begin{cases}v^2+4v-2u^2=2005\\u^2-18u-2v=-62\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}v^2+4v-2u^2=2005\\v=\frac{1}{2}(u^2-18u+62)\end{cases}$$

Ако од втората равенка го замениме v во првата, ја добиваме равенката

$$u^4-36u^3+448u^2-2376u-3680=0.$$

Бидејќи $u=17+3=20$ е решение на последната равенка, користејќи ја Хорнеровата шема добиваме дека таа е еквивалентна со равенката

$$(u-20)(u^3-16u^2+128u+184)=0.$$

Случај 1. Ако $u=20$, тогаш $v=51$ и по решавање на квадратната равека $t^2-20t+51=0$ ги добиваме горните две решенија.

Случај 2. Ако

$$u^3-16u^2+128u+184=0$$

има рационално решение u_0, тогаш бидејќи водечкиот коефициент на полиномот е 1 добиваме дека u_0 е цел број. Освен тоа,

$$u_0^3=8(2u_0^2+16u_0+23),$$

т.е. $u_0=\pm2$ или $u_0=\pm46$. Со непосредна проверка се гледа дека во овие случаи не се добиваат рационални решенија на почетната равенка.

9. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}\sqrt{x}+y=3\\ \sqrt{y}+z=3-\sqrt{2}\\ \sqrt{z}+x=\sqrt{2}.\end{cases}$$

Решение. Од условот на задачата следува дека $x, y, z \in [0,+\infty)$. На интервалот $[0,+\infty)$ функциите $f(t)=\sqrt{t}$ и $g(t)=t$ се монотоно растечки. Нека претпоставиме дека системот има две различни решенија (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1). Нека без ограничување на општоста мземеме дека $x_0 < x_1$. Бидејќи $\sqrt{x}$ и y се истовремено растечки следува дека $y_0 > y_1$. Повторувајќи ги овие аргументи добиваме $z_0 < z_1$ и $x_0 > x_1$, што е противречност. Според тоа, системот има единствено решение.

Дадениот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases}\sqrt{x}+y=\sqrt{1}+2\\ \sqrt{y}+z=\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)^2\\ \sqrt{z}+x=(\sqrt{2}-1)+1\end{cases}$$

од што лесно се гледа дека единственото решение на системот е $x=1$, $y=2$ и $z=(\sqrt{2}-1)^2$.

10. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}(x^2+1)(x-1)^2=2017yz\\ (y^2+1)(y-1)^2=2017zx\\ (z^2+1)(z-1)^2=2017xy,\end{cases}$$

каде $x \geq 1, y \geq 1.z \geq 1$.

Решение. Ако $x=1$, од првата равенка добиваме $yz=0$, т.е. $y=0$ или $z=0$. Ако, на пример, $y=0$, тогаш $z=\frac{1}{2017}$ и $z=1$, соодветно од втората и третата равенка, што е противречност. Значи, $x>1, y>1, z>1$.

Нека претпоставиме дека $x>y$. Тогаш левата страна на втората равенка е поголема од левата страна на првата равенка, а кај десните страни тоа е обратно, што не е можно. Аналогно се докажува дека $x<y$ не е можно. Значи, $x=y$ и аналогно $y=z$.

Според тоа, системот го добива видот

$$\begin{cases}x=y=z>1\\ (x^2+1)(x-1)^2=2017x^2.\end{cases}$$

Втората равенка на системот последователно е еквивалентна на равенките

$$\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{(x-1)^2}{x}=2017$$
$$(x+\tfrac{1}{x})(x-2+\tfrac{1}{x})=2017.$$

Воведуваме смена $t=x+\frac{1}{x}>2$ и ја добиваме равенката $t^2-2t-2017=0$, од каде го добиваме решението $t=1+\sqrt{2018}$. Според тоа,

$$x^2-(1+\sqrt{2018})x+1=0\text{, т.е. } x=\frac{1+\sqrt{2018}+\sqrt{2015+2\sqrt{2018}}}{2}.$$

Конечно, решението на системот е

$$x=y=z=\frac{1+\sqrt{2018}+\sqrt{2015+2\sqrt{2018}}}{2}.$$

11. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases}3\cdot4^x+2^{x+1}\cdot3^y-9^y=0\\2\cdot4^x-5\cdot2^x\cdot3^y+9^y=-8.\end{cases}$$

Решение. Воведуваме замена $u=2^x, v=3^y$ и добиваме

$$\begin{cases}3u^2+2uv-v^2=0\\2u^2-5uv+v^2=-8.\end{cases}$$

Првата равенка ја запишуваме во видот $(u+v)(3u-v)=0$, од каде добиваме $u=-v$ или $3u=v$. Јасно, првата можност отпаѓа бидејќи u и v се позитивни, па затоа $v=3u$. Со замена во втората равенка добиваме $u^2=2$, од каде имаме $2^{2x}=2$, т.е. $x=\frac{1}{2}$. Сега, за v добиваме $v=3\sqrt{2}$, од каде наоѓаме $y=1+\frac{1}{2}\log_3 2$.

12. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}y+2\cdot4^{x+y-1}=10\\\frac{4}{\sqrt{2y-3}}+2^{2-x-y}=5.\end{cases}$$

Решение. Дадениот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases}2y-3+4^{x+y}=17\\\frac{4}{\sqrt{2y-3}}+\frac{4}{2^{x+y}}=5.\end{cases}$$

Воведуваме замени $\sqrt{2y-3}=u$ и $2^{x+y}=v$, $u\ge0, v\ge0$ и го добиваме системот

$$\begin{cases}u^2+v^2=17\\\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{5}{4}\end{cases}$$

т.е. системот

$$\begin{cases}(u+v)^2-2uv=17,\\ u+v=\frac{5}{4}uv.\end{cases}$$

Ако $z=uv$, тогаш добиваме $\frac{25}{16}z^2-2z-17=0$. Решенија на последната равенка се $z_1=4$ и $z_2=\frac{-68}{25}$. Бидејќи $uv\geq 0$, второто решение отпаѓа, па затоа $u+v=5, uv=4$, што значи дека u и v се решенија на квадратната равенка $t^2-5t+4=0$. Можни се два случаја:

1) $u=4, v=1$ и тогаш добиваме $x=-\frac{19}{2}, y=\frac{19}{2}$ и

2) $u=1, v=4$ и тогаш добиваме $x=0, y=2$.

13. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}\lg^2(\frac{x^2+x}{y})=\lg^2(\frac{y^2+y}{x})+\lg^2(x+1)(y+1)\\ \lg(x+6)=\lg(x-y)+\lg(y+1).\end{cases}$$

Решение. Бидејќи

$$\lg^2(\frac{x^2+x}{y})-\lg^2(\frac{y^2+y}{x})=\lg(x+1)(y+1)\lg(\frac{x^2(x+1)}{y^2(y+1)}),$$

првата равенка е еквивалентна на равенката

$$\lg(x+1)(y+1)(\lg(\frac{x^2(x+1)}{y^2(y+1)})-\lg(x+1)(y+1))=0.$$

Ако $\lg(x+1)(y+1)=0$, тогаш $(x+1)(y+1)=1$ и едниот од x и y е позитивен, а другиот е негативен. Но, $\frac{x^2+x}{y}>0$ и $\frac{y^2+y}{x}>0$, па затоа последното не е можно.

Ако $\lg(\frac{x^2(x+1)}{y^2(y+1)})=\lg(x+1)(y+1)$, добиваме $x^2=y^2(y+1)^2$ и како $\frac{y^2+y}{x}>0$ следува $x=y(y+1)$.

Од втората равенка добиваме $(x-y)(y+1)=x+6$ и како $x=y(y+1)$, добиваме $y^3-y-6=0$, т.е. $(y-2)(y^2+2y+3)=0$. Но, $y^2+2y+3>0$, па од последната равенка следува $y=2$, што значи $x=6$.

14. Во множеството $[0,\frac{\pi}{2}]$ реши го системот равенки

$$\begin{cases}\sin x+\cos x-\sin(x-y)=1\\ \cos x-\sin y+\sin(x-y)=1.\end{cases}$$

Решение. По квадрирањето и собирање на равенките

$$\sin x + \cos x = 1 + \sin(x-y) \text{ и } \cos x - \sin y = 1 - \sin(x-y)$$

добиваме

$$2 + 2\sin(x-y) = 2 + 2\sin^2(x-y),$$

па затоа $\sin(x-y) = 0$ или $\sin(x-y) = 1$.

Ако $\sin(x-y) = 0$, добиваме $x = y$ и $\sin x + \cos x = \cos x - \sin x$, т.е. $\sin x = 0$, па затоа $x = 0$. Непосредно се проверува дека $x = y = 0$ е решение на почетниот систем.

Ако $\sin(x-y) = 1$, тогаш $x - y = \frac{\pi}{2}$, што е можно само за $x = \frac{\pi}{2}$ и $y = 0$. Непосредно се проверува дека $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ е решение на почетниот систем.

15. Определи ги аглите α, β, γ на остроаголниот триаголник ABC ако

$$\sin\gamma + \cos\beta = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \text{ и } \cos\gamma + \sin\beta = \frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

Решение. Ако двете равенки ги квадрираме и ги собереме добиваме

$$(\sin\gamma + \cos\beta)^2 + (\cos\gamma + \sin\beta)^2 = 2 + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\gamma\cos\beta + \cos\gamma + \sin\beta = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin(\gamma+\beta) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \sin 75^\circ.$$

Последното равенство следува од

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Значи, $\alpha = 75^\circ$ или $\alpha = 105^\circ$ и како триаголникот е остроаголен, следува $\alpha = 75^\circ$. Сега, непосредно се проверува дека $\gamma = 60^\circ$ и $\beta = 45^\circ$ го задоволуваат системот од условот. Ако $\gamma > 60^\circ$, тогаш $\beta < 45^\circ$, па затоа првата равенка не е задоволена. Аналогно се разгледува случајот $\gamma < 60^\circ$ и $\beta > 45^\circ$.

16. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 = 5xy \\ \cos^2 x + \sin^2 y = 1, \end{cases}$$

каде $x, y \in [0, \pi]$.

Решение. Ако $y = 0$, тогаш од првата равенка следува $x = 0$. Јасно, парот $(0,0)$ е решение и на втората равенка. Ако $y \neq 0$, од првата равенка ја добиваме равенката $(\frac{x}{y})^2 5\frac{x}{y}+6=0$ чии решенија се $\frac{x}{y}=2$ и $\frac{x}{y}=3$. Според тоа, $x=2y$ или $x=3y$.

Бидејќи $\cos^2 x=1-\sin^2 y=\cos^2 y$ и $x,y\in[0,\pi]$, важи $x=y$ или $x+y=\pi$. Заради $x=2y$ или $x=3y$ и $y\neq 0$, првото равенство не е можно. Значи, $x+y=\pi$ и сега од $x=2y$ следува $x=\frac{2\pi}{3}, y=\frac{\pi}{3}$, а од $x=3y$ следува $x=\frac{3\pi}{4}, y=\frac{\pi}{4}$.

II ПАРАМЕТАРСКИ РАВЕНКИ И СИСТЕМИ РАВЕНКИ

II.1. ПОЛИНОМНИ ПАРАМЕТАРСКИ РАВЕНКИ

1. Реши ја равенката $|x-m|+|x+m|=x$ во зависност од вредностите на параметарот m.

Решение. Нека x е решение на равенката. Тогаш од неравенството на апсолутните вредности следува

$$x=|x-m|+|x+m|\geq|(x-m)+(x+m)|=2|x|,$$

што е можно само за $x=0$ и $m=0$. Значи, ако $m=0$, тогаш равенката има решение $x=0$, а ако $m\neq 0$ равенката нема решение.

2. Реши ја равенката $a|x-1|=1-a^2x$ каде a е параметар.

Решение. Ако $x\geq 1$, тогаш равенката го добива обликот $ax(a+1)=a+1$.

- Ако $a=0$, тогаш равенката нема решение.
- Ако $a=-1$, тогаш решение е секој $x\geq 1$.
- Ако $a\neq 0, a\neq -1$, тогаш $x=\frac{1}{a}$ и од условот $\frac{1}{a}\geq 1$ добиваме $a\in(0,1)$.

Ако $x\leq 1$, тогаш равенката го добива обликот $ax(a-1)=1-a$.

- Ако $a=0$, тогаш равенката нема решение.
- Ако $a=1$, тогаш решение е секој $x\leq 1$.
- Ако $a\neq 0, a\neq 1$, тогаш $x=-\frac{1}{a}$ и од $-\frac{1}{a}\leq 1$ следува $a\in(-\infty,-1]\cup(0.+\infty)$.

3. Реши ја равенката

$$2^k(x+1)+|x-1|=4^k,$$

каде k е реален параметар.

Решение. Ако $x\geq 1$, равенката го добива видот $2^k(x+1)+x-1=4^k$, од каде добиваме $x=\frac{4^k-2^k+1}{2^k+1}$. Бидејќи $x\geq 1$ имаме $\frac{4^k-2^k+1}{2^k+1}\geq 1$, од каде следува $k\geq 1$.

Ако $x<1$, равенката го добива видот $2^k(x+1)+1-x=4^k$, од каде добиваме $k\neq 0$ и $x=\frac{4^k-2^k-1}{2^k-1}$. Бидејќи $x<1$ имаме $\frac{4^k-2^k-1}{2^k-1}<1$, од каде следува $0<k<1$.

Конечно,

- за $k\leq 0$ равенката нема решение,

- за $0 < k < 1$ решение е $x = \frac{4^k - 2^k - 1}{2^k - 1}$,
- за $k \geq 1$ решение е $x = \frac{4^k - 2^k + 1}{2^k + 1}$.

4. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката
$$|x - 4^a| + |x - 2^a| = 2^{a-1} + 1$$
има бесконечно многу решенија.

Решение. Од графикот на функцијата $f(x) = |x - p| + |x - q|$ следува дека равенката $f(x) = r$ има бесконечно многу решенија ако и само ако $|p - q| = r > 0$. Сега, за дадената равенка последното е исполнето ако и само ако
$$|4^a - 2^a| = 2^{a-1} + 1.$$
Воведуваме смена $2^a = t$ и ја добиваме равенката $|t^2 - t| = \frac{t}{2} + 1$. Равенката $t^2 - t = \frac{t}{2} + 1$ има единствено позитивно решение $t = 2$, а равенката $t - t^2 = \frac{t}{2} + 1$ нема реални решенија. Според тоа, $2^a = 2$ и бараната вредност е $a = 1$.

5. а) Определи ги вредностите на параметарот a за кои равенката
$$||x| + 2018 - a| = 2 \tag{1}$$
има три различни решенија.

б) За кои вредности на реалниот параметар a равенките
$$||x| + 2018 - a| = 2 \text{ и } x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)^2 + 2(x^2 + x + 1)$$
имаат заедничко реално решение.

Решение. а) Равенката (1) се сведува на $|x| = a - 2016$ и $|x| = a - 2020$. Две равенки имаат точно три различни решенија ако едната има едно, а другата две различни решенија или и двете равенки имаат по две решенија, од кои едното е заедничко. Со разгледување на сите случаи се добива дека $a = 2020$.

б) Втората равенка е еквивалентна на равенката $(x+1)(x^2 + x + 1) = 0$. Единствено реално решение на втората равенка е $x = -1$. Бидејќи $x = -1$ е решение и на првата равенка, добиваме $||-1| + 2018 - a| = 2$, од каде добиваме $a = 2017$ или $a = 2021$. За $a = 2017$ решенија на првата равенка се $x = \pm 1$, а за $a = 2021$ решенија на првата равенка се $x = \pm 1, \pm 5$.

6. Определи ги вредностите на параметарот p за кои равенките
$$p^2 x + p = 25x - 5 \text{ и } |2x + 3| = |5 - 2x|$$

се еквивалентни.

Решение. Втората равенка е еквивалентна на равенката $(2x+3)^2=(5-2x)^2$, т.е. на равенката $x=\frac{1}{2}$. Двете равенки ќе се еквивалентни ако параметарската равенка има единствен корен $x=\frac{1}{2}$. Заменуваме во параметарската равенка и ја добиваме квадратната равенка $p^2+2p-15=0$, чии решенија се $p=3$ и $p=-5$. За $p=3$ параметарската равенка има единствен корен $x=\frac{1}{2}$, а за $p=-5$ таа е еквивалентна на равенката $0\cdot x=0$, што значи дека секој реален број x е нејзино решение. Конечно, единствено решение на задачата е $p=3$.

7. Дадена е равенката $|x-3a|+|x-b|=x+1$, каде a и b се параметри кои се природни броеви.

а) Определи го b ако $\frac{b^2+b+1}{b+2}$ е природен број.

б) За најдените вредности на b реши ја равенката. Определи ги вредности на a така што решението x на равенката е такво што x^2+2 е прост број.

Решение. а) Имаме $\frac{b^2+b+1}{b+2}=b-1+\frac{3}{b+2}$, што значи дека $b+2$ е делител на 3, т.е. $b+2=1$ или $b+2=3$. Но, b е природен број, па затоа $b=1$.

б) За $b=1$ добиваме $|x-3a|+|x-1|=x+1$. Но, a е природен број, па затоа $3a\geq 3$. Ќе ги разгледаме случаите $x\in(-\infty,1),\ x\in[1,3a],\ x\in(3a,+\infty)$. Притоа,

1) Ако $x\in(-\infty,1)$, тогаш ја добиваме равенката $-x+3a-x+1=x+1$, па $x=a$ и тоа не е решение.
2) Ако $x\in[1,3a]$, тогаш ја добиваме равенката $-x+3a+x-1=x+1$, па $x=3a-2$.
3) Ако $x\in(3a,+\infty)$, тогаш ја добиваме равенката $x-3a+x-1=x+1$, па $x=3a+2$.

Дадената равенка има две реални решенија $x=3a-2$ и $x=3a+2$.

За $x=3a+2$ бројот $x^2+2=9a^2+12a+6=3(3a^2+4a+2)$ е сложен.

За $x=3a-2$ имаме $x^2+2=9a^2-12a+6=3(3a^2-4a+1)+3$. Ако $a=1$, тогаш $x^2+2=3$ и тоа е прост број, а ако $a>1$, тогаш x^2+2 е сложен број.

8. Определи ги сите прости броеви p и q за кои равенката $x^2+px+q=100$ има две различни целобројни решенија.

Решение. Збирот и производот на решенијата не може истовремено да се непарни броеви, па затоа најмалку еден од коефциентите е еднаков на 2.

1) За $p=q=2$ равенката $x^2+2x-98=0$ нема целобројни решенија.
2) Нека $q=2$ и p е непарен. Решенијата на равенката $x^2+px=98$ се со различни знаци и ќе го побараме позитивното решение. Во равенството $x(x+p)=98$ множителите се со различна парност и како $98=2\cdot 7^2$ добиваме $p=7,47,97$.
3) Нека $p=2$ и q е непарен. Равенката е еквивалентна на равенката $(x+1)^2=101-q$, т.е. $101-q$ е парен точен квадрат и може да биде 64, 36, 16 или 4. Со проверка добиваме дека $q=37,97$.

9. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$|x|(x+1)=ax+a^2$$

има точно две реални и различни решенија.

Решение. Ако $a=0$ тогаш решенијата на равенката се 0 и -1, што значи дека $a=0$ е решение на задачата. Нека $a\neq 0$. За $x\geq 0$ ја добиваме равенката $x^2+(1-a)x-a^2=0$ која има две решенија со различни знаци, па затоа точно едно од нив е решение на почетната равенка. За да имаме точно две реални решенија, треба равенката $x^2+(1+a)x+a^2=0$, која се добива за $x<0$ да има точно едно негативно решение. Но, решенијата на оваа равенка се со ист знак, па затоа единствена можност е да имаме двојно негативно решение. Тогаш $(a+1)^2-4a^2=0$, па затоа $a=1$ или $a=-\frac{1}{3}$, при што и во двата случаи двојното речение е негативно.

10. Определи ја вредноста на параметарот a за која равенките

$$(1-x)^2-(a-2)^2+a(a-x-1)^2=3-(a-x)(a+x) \text{ и}$$

$$3ax-1=x-|4x(3a+x)-(3a+2x)^2|$$

се еквивалентни.

Решение. Втората равенка е еквивалентна на равенката

$$(3a-1)x=(1-3a)(1+3a).$$

Ако $3a-1=0$, тогаш секој x е решение на втората равенка, а ако $3a-1\neq 0$, тогаш единствено нејзино решение е $x=-3a-1$. Првата равенка е еквивалетна со равенката $(a-2)x=(a-2)(a-3)$. Ако $a=2$, тогаш секој x е решение на првата равенка, но тогаш $3a-1\neq 0$. Ако $a\neq 2$, тогаш втората равенка има единствено решение $x=a-3$. Според тоа, равенките се еквивалетни ако и само ако $-1-3a=a-3$, т.е. ако и само ако $a=\frac{1}{2}$.

11. Определи го реалниот параметар a за кој равенката
$$|3x-a^2+2a-5|=|2x-2a^2+a+7|$$
има две различни реални решенија кои се еднакво оддалечени од бројот 6.

Решение. За поедноставно работење ги воведуваме ознаките $c=a^2-2a+5$ и $d=2a^2-a-7$. Тогаш решенијата на дадената равенка се добиваат од
$$3x-c=2x-d \text{ и } 3x-c=d-2x,$$
па тие се $x_1=c-d$ и $x_2=\frac{c+d}{5}$. Условот корените да се еднакво оддалечени од бројот 6 е еквивалентен на $\frac{x_1+x_2}{2}=6$, од каде добиваме $3c-2d=30$, односно $a^2+4a+1=0$. Конечно, бараните вредности на параметарот a се $a_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}$.

12. Даден е прост број p. Определи ги сите вредности на целиот број n за кои равенката
$$px^3-px+n=0$$
има три различни рационални решенија.

Решение. Нека $x=\frac{a}{b}$, каде a и $b>0$ се заемно прости цели броеви, е рационално решение на дадената равенка. Тогаш
$$p(\tfrac{a}{b})^3-p\tfrac{a}{b}+n=0, \text{ т.е. } pa^3-pab^2+nb^3=0.$$
Од последното равенство следува дека b^2 е делител на pa^3 и како a и b се заемно прости заклучуваме дека b^2 е делител на p. Но, p е прост број, па затоа $b=1$. Значи, решенијата на равенката се цели броеви.
Нека a и c се две од трите решнија на равенката. Тогаш
$$pa^3-pa=-n=pc^3-pc, \text{ т.е. } (a-c)(a^2+ac+c^2-1)=0.$$
Според тоа, $a^2+ac+c^2-1=0$ и ако последната равенка ја разгледаме како квадратна по a добиваме $D=4-3c^2\geq 0$. Цели броеви за кои е исполнето последнот неравенство се $c=-1,0,1$. Но, равенката има три решенија, па затоа тие се $-1,0,1$ и тогаш $n=0$.

13. Дадени се функциите $f(x)=2x^2+2x-4$ и $g(x)=x^2-x+2$. Определи за кои вредности на x:

а) $\frac{f(x)}{g(x)}$ е природен број,

б) е исполнето неравенството $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\geq\sqrt{2}$.

Решение. а) Ставаме $\frac{f(x)}{g(x)}=k$, од каде ја добиваме равенката

$$(2-k)x^2+(2+k)x-2(2+k)=0\,.$$

Ако $k=2$, тогаш $x=2$. Нека $k\neq 2$. Тогаш горната равенка е квадратна и има реални корени. Според тоа, $D=(2+k)(18-7k)\geq 0$, па затоа $k\in[-2,\frac{18}{7}]$. Бидејќи k е природен број и $k\neq 2$, добиваме $k=1$ и $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$. Конечно, бараните вредности за x се $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$ и $x_3=2$.

б) Множеството допустливи вредности за x е $x\in(-\infty,=2]\cup[1,+\infty)$. Лесно се гледа дека за секој x од ова множество важи $g(x)\geq 2$. Според тоа, $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\geq\sqrt{2}$ за $x\in(-\infty,=2]\cup[1,+\infty)$.

14. Нека a,b,c се реални броеви такви што равенката $ax^2+bx+c=0$ има реални решенија. Докажи дека, ако

$$|a(b-c)|>|b^2-ac|+|c^2-ab|\,,$$

тогаш равенката има едно решение во интервалот $(0,2)$.

Решение. Јасно, $a\neq 0$, бидејќи во спротивно $0>b^2+c^2$. Можеме да претпоставиме дека $a>0$, бидејќи условот е инваријантен во однос на замената на броевите a,b,c со нивните спротивни броеви. Тогаш имаме

$$|(b-c)(a+b+c)|=|b^2-ac-(c^2-ab)|\leq|b^2-ac|+|c^2-ab|<|a(b-c)|\,,$$

па затоа $|b-c|\cdot|a+b+c|<a|b-c|$. Од последното неравенство следува $b\neq c$ и $|a+b+c|<a$. Според тоа, $-2a<b+c<0$, т.е. $2a+b+c>0$ од каде добиваме $4a+2b+2c>0$. Нека $f(x)=ax^2+bx+c$. Значи, $f(2)+f(0)>0$. Да препоставиме дека $b<c$. Тогаш

$$\begin{aligned}(b^2-ac)+(c^2-ab)|&\leq|(b^2-ac)+(c^2-ab)|\leq|b^2-ac|+|c^2-ab|\\&<|a(b-c)|=ac-ab,\end{aligned}$$

од каде дбиваме дека $b^2+c^2<2ac$ и затоа $c>0$. Меѓутоа, тогаш неравенството $b^2+c^2<2ac$ не е можно, бидејќи според условот имаме $b^2\geq 4ac$. Според тоа $c<b$ и од $b+c<0$ следува дека $c=f(0)<0$. Претходно докажавме дека $f(2)+f(0)>0$, па затоа $f(2)>0$, што значи дека равенката $f(x)=0$ има решение во интервалот $(0,2)$.

15. Определи ги вредностите на поараметарот a за кои равенката

$$ax^2+|x-1|=0$$

има барем две позитивни решенија.

Решение. Јасно, за $a>0$ равенката нема решенија. За $a=0$ равенката има единствено решение $x=1$. Останува да го разгледаме случајот $a<0$. Дадената равенка ја запишуваме во видот

$$|x-1|=-ax^2,$$

од каде ги добиваме равенките $ax^2+x-1=0$ кога $x\geq 1$ и $-ax^2+x-1=0$ кога $x<1$. Дискриминантата на првата равенка е $D_1=1-4a>0$ и затоа таа има две реални решенија x_1 и x_2. Уште повеќе, од Виетовите формули следува $x_1x_2=\frac{1}{a}<0$, па затоа точно едно од овие решенија е позитивно. Значи, мора втората равенка да има барем едно позитивно решение. Потребен услов е $D_2=1+4a\geq 0$, т.е. $a\geq -\frac{1}{4}$. Освен тоа, ако x_3 е решение, тогаш $x_3=1-ax_3^2>0$ и затоа условот $a\geq -\frac{1}{4}$ е доволен. Конечно, $a\in[-\frac{1}{4},0)$.

16. Определи ги сите природни броеви a,b,c за кои решенијата на равенките

$$x^2-2ax+b=0$$
$$x^2-2bx+c=0$$
$$x^2-2cx+a=0$$

се природни броеви.

Решение. Нека $\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\}$ и $\{x_5,x_6\}$ се решенијата соодветно на првата, втората и третата равенка и нека сите тие се природни броеви. Да претпоставиме дека $x_i\geq 2$ за секој $i=1,2,3,4,5,6$. Тогаш $2a=x_1+x_2\leq x_1x_2=b$, $2b=x_3+x_4\leq x_3x_4=c$ и $2c=x_5+x_6\leq x_5x_6=a$, од каде со собирање на неравенствата добиваме $2(a+b+c)\leq a+b+c$, што не е можно за природни броеви a,b,c.

Значи, барем еден од броевите x_i е еднаков на 1. Нека, на пример $x_1=1$, т.е. $1-2a+b=0$. Ако $x_i\geq 2$ за $i=3,4,5,6$, тогаш

$$2(b+c)=(x_3+x_4)+(x_5+x_6)\leq x_3x_4+x_5x_6=c+a,$$

па затоа $2(2a-1+c)\leq c+a$, т.е. $c\leq 2-3a$, што не е можно.

Значи, барем еден од броевите x_i, $i=3,4,5,6$ е еднаков на 1. Нека, на пример $x_3=1$, т.е. $1-2b+c=0$. Ако претпоставиме дека $x_i\geq 2$ за $i=5,6$, тогаш важи $2c\leq x_5+x_6\leq a$, па затоа $2(2b-1)\leq\frac{b+1}{2}$, т.е. $7b\leq 5$, што не е можно. Значи еден од броевите x_i, $i=5,6$ е еднаков на 1 и тогаш $1+2c+a=0$. Оттука добиваме

$$0=(1-2a+b)+(1-2b+c)+(1-2c+a)=3-(a+b+c),$$

па затоа $a=b=c=1$. Обратно, непосредно се проверува дека овие броеви ги задоволуваат условите на задачата.

17. Нека x,y и a се реални броеви такви што $x+y=a$ и $xy=a+3$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот x^2+y^2.

Решение. Имаме

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-2(a+3)=a^2-2a-6=f(a).$$

Од Виетовите формули следува дека x и y се решенија на квадратната равенка $t^2-at+a+3=0$. Бидејќи x и y се реални броеви, важи

$$D=a^2-4a-12\geq 0,$$

па затоа $a\in(-\infty,-2]\cup[6,+\infty)$.

Квадратната функција $f(a)$ моното опаѓа на интервалот $(-\infty,1)$ и монотоно расте на интервалот $(1,+\infty)$. Според тоа, таа моното ќе опаѓа на интервалот $(-\infty,-2]$ и моното ќе расте на интервалот $[6,+\infty)$. Значи, најмалата вредност на $f(a)$ на $(-\infty,-2]\cup[6,+\infty)$ е помалиот од броевите $f(-2)$ и $f(6)$.

Од $f(-2)=2$ и $f(6)=18$ следува дека најмалата вреднотст за x^2+y^2 е еднаква на 2 и таа се достигнува за $x=y=-1$.

18. Определи ги вредностите на параметарот m за кои равенката

$$(x^2-x-6)(x^2-7x+6)=m^2-15m$$

има две различни позитивни и две различни негативни решенија.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$(x+2)(x-3)(x-1)(x-6)=m^2-15m,$$
$$(x^2-4x-12)(x^2-4x+3)=m^2-15m.$$

Воведуваме смена $x^2-4x=y$ и последователно добиваме

$$(y-12)(y+3)=m^2-15m$$
$$y^2-9y-36-m^2+15m=0$$
$$y^2-9y-(m-3)(12-m)=0$$
$$(y-m+3)(y-12+m)=0.$$

Решенијата на последната равенка се $y_1=m-3$ и $y_2=12-m$. Од условот дека треба да имаме четири различни решенија следува $m-3\neq 12-m$, т.е. $m\neq\frac{15}{2}$. Сега ги имаме равенките

$$x^2-4x-m+3=0 \text{ и } x^2-4x-12+m=0.$$

Од Виетовите формули и условот за две позитивни и две негативни решенија следува $3-m<0$ и $m-12<0$, соодветно. Според тоа, бараните вредности за m се $m\in(3,\frac{15}{2})\cup(\frac{15}{2},12)$.

19. Дадена е равенката

$$x^2+\frac{64}{x^2}=a(x-\frac{8}{x})+2,$$

каде a е параметар, природен број. За кои вредности на a равенката има четири рационални решенија.

Решение. Воведуваме смена $x-\frac{8}{x}=t$. Тогаш $x^2+\frac{64}{x^2}=(x-\frac{8}{x})^2+16=t^2+16$ и дадената равенка ја трансформираме во равенката

$$t^2-at+14=0. \qquad (1)$$

Кога x е рационален, тогаш и t е рационален, а од $x-\frac{8}{x}=t$ добиваме $x=\frac{t\pm\sqrt{t^2+32}}{2}$, што значи дека t^2+32 треба да е точен квадрат. Според тоа, (1) треба да има две рационални решенија. Последното е можно само ако дискриминантата на равенката е точен квадрат, т.е. $D=a^2-56=s^2$, од што следува $(a-s)(a+s)=2^3\cdot 7$. Бидејќи a е природен број, без ограничување на општоста можеме да земеме дека s е природен број и тогаш $a-s<a+s$, при што и двата броја се со иста кратност. Затоа се можни два случај:

1) $a-s=2, a+2=28$ и тогаш $a=15, s=13, t_1=1, t_2=14$. Но, и за две добиени решенија за t бројот t^2+32 не е точен квадрат, па затоа во овој случај немаме решение.
2) $a-s=4, a+s=14$ и тогаш $a=9, s=5, t_1=2, t_2=7$. За $t_1=2$ добиваме $x_{1,2}=\frac{2\pm6}{2}$, а за $t_2=7$ добиваме $x_{3,4}=\frac{7\pm9}{2}$.

Конечно, единствено решение на задачата е $a=9$.

20. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$x^2-(2018^2-1+a)x\ +\ 2018^2(2018-a)=0$$

има реални решенија x_1 и x_2 за кои важи

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2017}.$$

Решение. Да означиме $p=2017$. Дадениот услов е еквиувалентен на

$$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{1}{p} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(p+1)^2-1+a}{(p+1)^2(p+1-a)}=\frac{1}{p}$$

$$\Leftrightarrow\quad p(p+1)^2+p(a-1)=p(p+1)^2+(1-a)(p+1)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad (a-1)(p+(p+1)^2)=0.$$

Бидејќи $p+(p+1)^2>0$ од последното равенство следува $a=1$ и тоа е бараната вредност за a.

21. Ги разгледуваме квадратните равенки $x^2-bx+c=0$ и $x^2-cx+b=0$, каде b и c се природни броеви.
а) Докажи дека ако равенките имаат реални решенија, тогаш $b\geq 4$ и $c\geq 4$.
б) Определи ги сите парови реални броеви (b,c) за кои двете равенки имаат по две (не задолжително различни) природни решенија.
Решение. а) Равенките имаат реални решенија, па затоа нивните дискриминанти се ненегативни, т.е. $b^2\geq 4c$ и $c^2\geq 4b$. Бидејќи b и c се природни броеви, добиваме $b^4\geq 16c^2\geq 64b$, од каде следува $b\geq 4$. Аналогно се докажува дека $c\geq 4$.
б) Нека равенката $x^2-bx+c=0$ има природни решенија x_1 и x_2, а равенката $x^2-cx+b=0$ има природни решенија x_3 и x_4. Сега од Виетовите формули од првата равенка следува $x_1+x_2=b$ и $x_1x_2=c$, а од втората равенка следува $x_3+x_4=c$ и $x_3x_4=b$. Според тоа,

$$b-c=x_1+x_2-x_1x_2=1-(x_1-1)(x_2-1)$$
$$c-b=x_3+x_4-x_3x_4=1-(x_3-1)(x_4-1),$$

па затоа

$$(x_1-1)(x_2-1)+(x_3-1)(x_4-1)=2\,.$$

Бидејќи x_1, x_2, x_3 и x_4 се природни броеви собирците на левата страна во последното равенство се ненегативни цели броеви. Според тоа, можни се следниве случаи

1) $(x_1-1)(x_2-1)=(x_3-1)(x_4-1)=1$ и тогаш добиваме $(b,c)=(4,4)$,
2) $(x_1-1)(x_2-1)=0,\ (x_3-1)(x_4-1)=2$ и тогаш добиваме $(b,c)=(6,5)$,
3) $(x_1-1)(x_2-1)=2,\ (x_3-1)(x_4-1)=0$ и тогаш добиваме $(b,c)=(5,6)$.

Лесно се проверува дека во секој од тртите случаи решенијата на равенките се природни броеви.

22. Определи ги вредностите на реалниот параметар a а кои равенката

$$x^2+2ax+(a-1)^2=0$$

има две реални решенија x_1 и x_2 такви што

$$\frac{x_1+1}{x_1-1}+\frac{x_2+1}{x_2-1}=1\,. \qquad (1)$$

Решение. Дискриминатната на дадената равенка е $D=4(2a-1)$. Според тоа, равенката има реални решенија ако $a \geq \frac{1}{2}$. Условот (1) го запишуваме во видот

$$\frac{2(x_1x_2-1)}{x_1x_2-x_1-x_2+1}=1.$$

Сега од Виетовите формули следува $x_1x_2=(a-1)^2$ и $x_1+x_2=-2a$, па ако замениме во горното равенство ја добиваме равенката

$$\frac{2((a-1)^2-1)}{(a-1)^2+2a+1}=1,$$

која е еквивалентна со равенката $a^2-4a-2=0$. Решенија на последната равенка се $a=2\pm\sqrt{6}$ и како $a\geq\frac{1}{2}$, добиваме дека единствено решение на задачата е $a=2+\sqrt{6}$.

23. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои квадратните равенки

$$x^2+2a^2x+2a=0 \text{ и } y^2+y+a=0$$

имаат соодветно реални решенија x_1,x_2 и y_1,y_2 такви што

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=2(y_1y_2+y_1+y_2).$$

Решение. Бидејќи $x_1x_2\neq 0$, од Виетовите формули добиваме $a\neq 0$. Понатаму,

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{4a^4-4a}{4a}=2a^3-2 \text{ и } 2(y_1y_2+y_1+y_2)=2(a-1).$$

Сега равенството од условот на задачата го добива видот $a^3-1=a-1$, од каде добиваме $a(a-1)(a+1)=0$ и како $a\neq 0$ имаме $a=1$ или $a=-1$.

За $a=1$ равенките се

$$x^2+2x+2=0 \text{ и } y^2+y+1=0,$$

при што и двете равенки немаат реални решенија. За $a=-1$ равенките се

$$x^2+2x-2=0 \text{ и } y^2+y-1=0,$$

при што и двете равенки имаат реални решенија.

24. Определи ги сите вредности на реалниот параметар p за кои равенката $x^2+(p^2+1)x+p=2$ има две реални и различни решенија x_1 и x_2 такви што

$$\frac{2x_1-1}{x_2}+\frac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\frac{55}{x_1x_2}.$$

Решение. Од Виетовите формули следува

$$x_1+x_2=-(p^2+1) \text{ и } x_1x_2=p-2\neq 0.$$

Дадениот услов е еквивалентен со $2x_1^2 - x_1 + 2x_2^2 - x_2 = x_1^2 x_2^2 + 55$, од каде добиваме $2p^4 + 4p^2 - 48 = 0$. Последната биквадратна равенка има две реални решенија $p_1 = 2$ и $p_2 = -2$, но првото решение дава $x_1 x_2 = 0$, што не е можно. За $p = -2$ равенката е $x^2 + 5x - 4 = 0$ и таа навистина има реални решенија.

25. Определи ги сите целобројни вредности на параметрите b и c за кои равенката $x^2 - bx + c = 0$ има две реални решенија x_1 и x_2 такви што

$$x_1^2 + x_2^2 = 5.$$

Решение. Бидејќи решенијата се реални имаме $D = b^2 - 4c \geq 0$. Од Виетовите формули следува

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = b^2 - 2c,$$

т.е. $b^2 - 2c = 5$. Значи, $2c = b^2 - 5 \geq -5$, па затоа $c \geq -\frac{5}{2}$. Од друга страна $5 - 2c = b^2 = 4c \geq 0$, па затоа $c \leq \frac{5}{2}$. Според тоа, c е еден од броевите $-2, -1, 0, 1$ или 2. Целобројни вредности за b се добиваат за $c = -2$ и притоа $b = \pm 1$, односно за $c = 2$ и притоа $b = \pm 3$.

26. Даден е квадратниот трином $f(x) = x^2 + ax + 2$, каде a е реален параметар. Познато е дека равенката $f(x) - x = 0$ има две реални решенија x_1 и x_2, а равенката $f(x-a) - x = 0$ има две реални решенија x_3 и x_4 и дека важи $x_3 - x_1 = 3(x_4 - x_2)$.

а) Докажи дека $x_4 = x_2 + \frac{a}{2}$.

б) Определи ги можните вредности на a.

Решение. а) Имаме

$$f(x) - x = x^2 + (a-1)x + 2,$$
$$f(x-a) - x = x^2 - (a+1)x + 2.$$

Сега, од условот на задачата и од Виетовите формули следува

$$4(x_4 - x_2) = x_3 - x_1 + x_4 - x_2 = x_3 + x_4 - (x_1 + x_2) = a + 1 + a - 1 = 2a,$$

па затоа $x_4 = x_2 + \frac{a}{2}$.

б) Од условот на задачата и од а) добиваме

$$x_2^2 + (a-1)x_2 + 2 = 0$$
$$(x_2 + \tfrac{a}{2})^2 - (a+1)(x_2 + \tfrac{a}{2}) + 2 = 0.$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата и добиената равенка ја решиме по

x_2 добиваме $x_2 = -\frac{a}{4} - \frac{1}{2}$. Сега, заменуваме во равенката $f(x) - x = 0$ и добиваме

$$(-\tfrac{a}{4} - \tfrac{1}{2})^2 + (a-1)(-\tfrac{a}{4} - \tfrac{1}{2}) + 2 = 0,$$

од каде наоѓаме $a^2 = \frac{44}{3}$, т.е. $a = \pm\frac{2\sqrt{33}}{3}$.

27. Дадена е равенката $2p^2(x-p)x = \sqrt{2}$ каде p е реален параметар.

а) Колку реални решенија има оваа равенка?

б) Ако равенката има реални решенија, определи го најмалиот можен збир на нивните четврти степени.

Решение. а) За $p = 0$ равенката нема реални решенија. За $p \neq 0$ равенката е квадратна

$$2p^2x^2 - 2p^3x - \sqrt{2} = 0$$

со дискриминанта $D = p^6 + 2\sqrt{2}p^2 > 0$, па затоа таа има две реални решенија.

б) Од Виетовите формули добиваме $x_1 + x_2 = p, x_1x_2 = -\frac{1}{p^2\sqrt{2}}$, па затоа

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 + \frac{\sqrt{2}}{p^2} \text{ и}$$

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 &= (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = p^4 + 2\sqrt{2} + \frac{2}{p^4} - \frac{1}{p^4} \\ &= p^4 + 2\sqrt{2} + \frac{1}{p^4} = (p^2 - \frac{1}{p^2})^2 + 2 + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Од горното равенство следува дека најмалата можна вредност на $x_1^4 + x_2^4$ е $2 + 2\sqrt{2}$ и таа се достигнува кога $(p^2 - \frac{1}{p^2})^2 = 0$, т.е. кога $p = \pm 1$.

28. Определи ги вредностите на реалниот параметар k за кои равенката $k(x+1)^2 = 4x - 1$ има две различни реални решенија x_1 и x_2 такви што е исполнето равенството

$$k^3(x_1^3 + x_2^3 - 7x_1x_2) = 5k^2 - 92k + 64.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$kx^2 + 2(k-2)x + k + 1 = 0.$$

Ако $k = 0$, тогаш равенката е линеарна и нема две различни реални решенија. Ако $k \neq 0$, тогаш равенката е квадратана и има две реални и различни решенија ако неговата дискриминанта е позитивна, т.е. ако

$$4((k-2)^2 - k(k+1)) = 4(4 - 5k) > 0,$$

од каде добиваме $k<\frac{4}{5}$. Сега од Виетовите формули следува $x_1+x_2=\frac{2(2-k)}{k}$ и $x_1x_2=\frac{k+1}{k}$, па затоа

$$\begin{aligned}k^3(x_1^3+x_2^3-7x_1x_2) &= k^3((x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)-7x_1x_2)\\ &= 8(2-k)^3-6k(k+1)(2-k)-7k^2(k+1)\\ &= -9k^3+35k^2-108k+64\end{aligned}$$

и дадениот услов се сведува на

$$\begin{aligned}&-9k^3+35k^2-108k+64=5k^2-92k+64\\ &9k^3-30k^2+16k=0\\ &k(3k-2)(3k-8)=0.\end{aligned}$$

Од последната равенка добиваме $k=0, k=\frac{2}{3}, k=\frac{8}{3}$ и како $k\neq 0$ и $k<\frac{4}{5}$, добиваме дека единствено решение на заадачата е $k=\frac{2}{3}$.

29. Нека a реален број таков што квадратната равенка $x^2-x+a=0$ има две реални и различни решенија x_1 и x_2. Докажи дека $|x_1^2-x_2^2|=1$ ако и само ако $|x_1^3-x_2^3|=1$.

Решение. Нека $|x_1^2-x_2^2|=1$. Бидејќи $x_1+x_2=1$, добиваме дека $|x_1-x_2|=1$, т.е. $(x_1-x_2)^2=1$, од каде добиваме $1-4a=1$, т.е. $a=0$. Според тоа, решенијата на равенката се 0 и 1, па затоа $|x_1^3-x_2^3|=1$.

Нека $|x_1^3-x_2^3|=1$. Според тоа, $(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=1$ што значи дека важи $(x_1-x_2)^2(1-a)^2=1$, од каде добиваме $(1-4a)(1-a)^2=1$. Очигледно $a=0$ е решение на последната равенка. Ако $a<0$, тогаш $1-4a>1$ и $1-a>0$, а ако $a>0$, тогаш $0<1-4a<1$ и $0<1-a<1$. Во секој од овие случаи имаме $(1-4a)(1-a)^2\neq 1$. Значи, $a=0$ и тогаш решенијата на равенката се 0 и 1, па затоа $|x_1^2-x_2^2|=1$.

30. Нека b и c се реални параметри за кои квадратната равенка $x^2+bx+c=0$ има две реални различни решенија x_1 и x_2 такви што $x_1=x_2^2+x_2$.

а) Определи ги вредностите на b и c ако $b+c=4$.

б) Определи ги параметрите b и c ако тие се заемно прости броеви.

Решение. Ако го искористиме условот $x_1=x_2^2+x_2$, Виетовите формули и равенството $x_2^2+bx_2+c=0$ го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} x_1+(b-1)x_2=-c \\ x_1+x_2=-b \\ x_1x_2=c \end{cases}$$

од каде добиваме $c^2+4(1-b)c+b^3-b^2=0, b\neq 2$.

а) Заменуваме $c=4-b$ и добиваме

$$b^3+4b^2-28b+32=0 \text{, т.е. } (b-2)^2(b+8)=0 .$$

Според тоа, $b=-8$, па затоа $c=12$.

б) Да го разгледаме равенството $c^2+4(1-b)c+b^3-b^2=0$ како квадратна равенка во однос на c . Бидејќи c е цел број дискриминатата

$$D=16(1-b)^2-4(b^3-b^2)=4(1-b)(b-2)^2$$

треба да е точен квадрат. Според тоа, $b=2$ или $1-b=k^2$, каде k е цел број. Значи, добиваме множество решенија $(b,c)=(1-k^2,k(k-1)^2)$, кои се заемно прости само ако $k-1=\pm 1$. Тогаш $k=2$ или $k=0$, од каде добиваме $(b,c)=(-3,2)$ и $(1,0)$. И во двата случаја решенијата на дадената равенка се реални и различни.

31. Дадена е равенката $(p-6)x^2+2px-p=4$, каде p е реален параметар.

а) За која вредност на p равенката има единствено реално решение?

б) За кои вредности на параметарот p равенката има две реални и различни решенија x_1 и x_2 такви што

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=\sqrt{\frac{27}{2}} , \qquad (1)$$

при што сите изрази во (1) се реални.

Решение. а) За $p=6$ равенката е линеарна и има единствено реално решение. Нека $p\neq 6$. Условот на задачата е исполнет ако

$$D'=p^2+(p-6)(p+4)=0 \text{, т.е. } 2p^2-2p-24=0 .$$

Според тоа, $p=4$ и $p=-3$.

б) Потребно е дискриминатата на равенката да е позитивна, а тоа ќе го провериме за најдените вредности на p . Од Виетовите формули добиваме

$$x_1+x_2=\frac{2p}{6-p} \text{ и } x_1x_2=\frac{p+4}{6-p} .$$

Ако $p>6$, тогаш $6-p<0$ и $p+4>0$, што значи дека $x_1x_2<0$, па затоа $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$ не е реален број. Последното важи и кога $p<-4$, бидејќи $6-p>0$ и $p+4<0$. Од друга страна, ако $p\in(-4,6)$, тогаш $6-p>0$, $p+4>0$ и при претпоставка дека $D'>0$ изразите во (1) се реални. Имаме

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=\frac{|x_1|+|x_2|}{\sqrt{x_1x_2}}.$$

Ако $p\in(0,6)$, тогаш $x_1+x_2>0$, па затоа $x_1>0,x_2>0$ и

$$\sqrt{\frac{27}{2}}=\frac{2p}{6-p}\cdot\sqrt{\frac{6-p}{p+4}}=\frac{2p}{\sqrt{(p+4)(6-p)}}.$$

Ако $p\in(-4,0)$, тогаш $x_1+x_2<0$, па затоа $x_1<0,x_2<0$ и

$$\sqrt{\frac{27}{2}}=\frac{-2p}{6-p}\cdot\sqrt{\frac{6-p}{p+4}}=\frac{-2p}{\sqrt{(p+4)(6-p)}}.$$

И во двата случаја добиваме

$$\frac{4p^2}{(p+4)(6-p)}=\frac{27}{2}$$

$$8p^2=27(p+4)(6-p)$$

$$35p^2-54p-27\cdot 24=0.$$

Имаме $D=54^2+4\cdot 35\cdot 27\cdot 24=18^2(3^2+35\cdot 8)=18^2\cdot 17^2$ и притоа $p_1=\frac{36}{7}$ (тогаш $x_1>0,x_2>0$) и $p_2=-\frac{18}{5}$ (тогаш $x_1<0,x_2<0$).

Останува да провериме дали $D'>0$ за најдените вредности на p. За $p_1=\frac{36}{7}$ имаме $D'=\frac{912}{49}>0$, а за $p_2=-\frac{18}{5}$ имаме $D'=\frac{228}{25}>0$.

32. Определи ги вредностите на паровите реални параметри (a,b) за кои квадратните равенки $ax^2+bx+2016=0$ и $bx^2+ax+2016=0$ имаат заедничко реално решение.

Решение. Ако x_0 е заедничко решение на дадените равенки, тогаш

$$ax_0^2+bx_0+2016=bx_0^2+ax_0+2016=0,$$

од каде добиваме $(a-b)(x_0^2-x_0)=0$.

Ако $a=b\neq 0$, тогаш равенките се совпаѓаат и останува да провериме кога заедничките решенија се реални. Имаме $a^2-8064\geq 0$, од каде добиваме $a\in(-\infty,0]\cup[8064,+\infty)$. Ако $a\neq b$, тогаш за заедничкото решение добиваме $x_0^2-x_0=0$, т.е. $x_0=0$ или $x_0=1$. Првата можност очигледно отпаѓа, а за $x_0=1$ добиваме $a+b+2016=0$, т.е. $b=-2016-a$, за $a\neq -1008$.

33. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенките $(a+1)x^2+x-1=0$ и $ax^2-2x+3=0$ имаат заедничко решение.

Решение. Нека b е заедничко решение на двете равенки. Заменуваме во равенките и ако го елиминираме b^2 и ја добиваме равенката $(3a+2)b=4a+3$ која нема решение за $a=-\frac{3}{2}$, а ако $a\neq-\frac{3}{2}$, тогаш $b=\frac{4a+3}{3a+2}$. Заменуваме $b=\frac{4a+3}{3a+2}$ во втората равенка и добиваме

$$a(\tfrac{4a+3}{3a+2})^2=\tfrac{2(4a+3)}{3a+2}-3=-\tfrac{a}{3a+2}.$$

Лесно се гледа дека $a=0$ не дава решение на задачата, а ако $a\neq 0$, тогаш ја добиваме квадратна равенка $(4a+3)^2=-3a-2$, т.е. $16a^2+27a+11=0$ чии решенија се $a\ =-1$ и $a_2=-\frac{11}{16}$, за кои соодветните заеднички решенија се $b=-1$ и $b=-4$.

34. Определи ги сите вредности на реалните ненегативни параметри a и b за кои равенките $x^2+a^2x+b^3=0$ и $x^2+b^2x+a^3=0$ имаат заедничко реално решение.

Решение. Ако x_0 е заедничко решение на двете равенки, тогаш

$$x_0(a^2-b^2)=a^3-b^3.$$

Случај 1. Ако $a\neq b$, тогаш добиваме $x_0=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. Бидејќи очигледно $x_0>0$, заменуваме во првата равенка и добиваме $x_0^2+a^2x_0+b^3>0$, што противречи на тоа дека x_0 е заедничко решение на равенките.

Случај 2. Ако $a=b$, тогаш равенките се совпаѓаат и треба да провериме само кога тие имаат реални решенија. Дискриминатата е $D=a^3(a-4)$, па како $a=0$ е решение, а за $a>0$ неравенството $D\geq 0$ е еквивалентно со неравенството $a\geq 4$, заклучуваме дека решение на задачата се сите парови (a,a) за $a\in\{0\}\cup[4,+\infty)$.

35. Реши ги равенките $x^3-6x^2+11x+a=0$ и $x^3+4x^2+x+a=0$, каде a е параметар, ако е познато дека тие имаат заедничко решение.

Решение. Нека x_0 е заедничкото решение на равенките. Тогаш

$$x_0^3-6x_0^2+11x_0+a=0 \text{ и } x_0^3+4x_0^2+x_0+a=0.$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата добиваме $10x_0^2-10x_0=0$, т.е. $x_0=0$ или $x_0=1$.

Ако $x_0=1$, тогаш $a=-x_0^3+6x_0^2-11x_0=-6$, па затоа равенките се

$$0=x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$$

со решенија 1, 2 и 3, односно

$$0 = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3)$$

со решенија $1, -2$ и -3.

Ако $x_0 = 0$, тогаш $a = -x_0^3 + 6x_0^2 - 11x_0 = 0$ и равенките се

$$0 = x^3 - 6x^2 + 11x = x(x^2 - 6x + 11),$$

со решенија $0, 3 + i\sqrt{2}$ и $3 - i\sqrt{2}$, односно

$$0 = x^3 + 4x^2 + x = x(x^2 + 4x + 1),$$

со решенија $0, -2 + \sqrt{3}$ и $-2 - \sqrt{3}$.

36. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a, за кои едно од решенијата на равенката $|ax|x + x + 6 = 0$ е реципрочна вредност на решение на равенката $2|ax|x + (a+2)x - a = 0$.

Решение. Од условот на задачата следува дека ако едната равенка има решение z, тогаш другата има решение $\frac{1}{z}$, па затоа $z \neq 0$.

Нека $az \geq 0$. Тогаш $\frac{a}{z} \geq 0$ и бараните вредности за a се решенија на системот

$$\begin{cases} az^2 + z + 6 = 0 \\ \frac{2a}{z^2} + \frac{a+2}{z} - a = 0. \end{cases}$$

Ако втората равенка ја сведеме под заеднички именител и потоа ја одземеме од првата добиваме

$$(a+3)(z+2) = 0.$$

Ако $a = -3$, тогаш од првата равенка добиваме $z = \frac{1 \pm \sqrt{73}}{6}$, при што $z = \frac{1-\sqrt{73}}{6}$ соодветствува на условот $az \geq 0$. Ако $z = -2$, добиваме $a = -1$ и очигледно важи $az \geq 0$.

Нека $az < 0$. Тогаш $\frac{a}{z} < 0$ и бараните вредности за a се решенија на системот

$$\begin{cases} -az^2 + z + 6 = 0 \\ -\frac{2a}{z^2} + \frac{a+2}{z} - a = 0, \end{cases}$$

Од каде добиваме $z = \frac{2a+6}{a+1}$. Заменуваме во првата равенка и по средувањето на изразот добиваме $a^3 + 4a^2 + 4a - 3 = 0$, т.е. $a(a+2)^2 = 3$, од каде добиваме дека $a > 0$. Но, тогаш $z = \frac{2a+6}{a+1} > 0$, што противречи на $az < 0$.

Конечно, бараните вредности за a се $a = -3$ и $a = -1$.

37. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката $x^2+8=|x+a|+|x-a|$ има непарен број различни реални решенија.

Решение. Ако x_0 е решение на дадената равенка, тогаш лесно се гледа дека $-x_0$ исто така е нејзино решение. Според тоа, дадената равенка може да има непарен број решенија само ако $x=0$ е нејзино решение. Тогаш $8=2|a|$, па затоа потребен услов е $a=\pm 4$. Ќе докажеме дека овој услов е и доволен. За $a=\pm 4$ ја добиваме равенката $x^2+8=|x+4|+|x-4|$, која е еквивалентна на

$$\begin{cases} x^2+2x+8=0 \\ x\le -4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2=0 \\ -4<x<4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2-2x+8=0 \\ x\ge 4 \end{cases}$$

и истата има единствено решение $x=0$, со што задачата е решена.

38. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои решенијата x_1 и x_2 на квадратната равенка $x^2+(a+2)x+a-1=0$ го задоволуваат равенството

$$x_1+\tfrac{1}{1+x_1}+x_2+\tfrac{1}{x_2-1}=0.$$

Решение. Прво да забележиме дека решенијата на дадената равенка се секогаш реални и се различни од ± 1 за $a\ne -1$. Даденото равенство го запишуваме во видот $\frac{x_1+x_2}{(1+x_1)(x_2-1)}=-(x_1+x_2)$.

Случај 1. Ако $x_1+x_2=0$, добиваме $a=-2$ што е решение на задачата.

Случај 2. Ако $x_1+x_2\ne 0$, по скратувањето и ослободувањето од именителот добиваме $x_1x_2=x_2-x_1$. Последното равенство е еквивалентно со равенството $a-1=\pm\sqrt{a^2+8}$, од каде добиваме $a=-\frac{7}{2}$. За $a=-\frac{7}{2}$ имаме $x_1=-\frac{3}{2}$ и $x_2=3$.

39. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката $x^2+2(a+1)x+a^2=0$ има две различни реални решенија x_1 и x_2 такви што

$$|4x_1x_2-(x_1+x_2)^2|\le 1.$$

Решение. За да равенката има две реални и различни решенија потребно и доволно е да $(a+1)^2-a^2>0 \Leftrightarrow 2a+1>0$, т.е. $a\in(-\frac{1}{2},+\infty)$. Од Виетовите формули имаме $|4x_1x_2-(x_1+x_2)^2|\le 1 \Leftrightarrow |4(2a+1)|\le 1$, па како $2a+1>0$ добиваме $2a+1\le\frac{1}{4}$, т.е. $a\le -\frac{3}{8}$. Конечно, $a\in(-\frac{1}{2},-\frac{3}{8})$.

40. Во зависност од вредноста на параметарот a определи го бројот на решени-

јата на равенката

$$\frac{(x-|a-3|)(x-|a+1|)}{x^2+4x-a^2+2a+3}=0\,.$$

Решение. Бројот $|a-3|$ не е решение на задачата ако тој е корен на именителот, т.е. $(a-3)^2+4|a-3|-a^2+2a+3=0$, од каде имаме $|a-3|=a-3$, што е можно само за $a\geq 3$. Аналогно $|a+1|$ не е решение на задачата ако $|a+1|=-(a+1)$, што е можно само за $a\leq -1$. Според тоа, ако $a\leq -1$, тогаш равенката има само едно решение $x=3-a$, а ако $a\geq 3$, тогаш равенката има само едно решение $x=a+1$. Ако $-1<a<3$ и двата броја $x=3-a$ и $x=a+1$ се решенија на равенката, но при $a=1$ овие решенија се совпаѓаат. Конечно, ако $a\leq -1$, $a\geq 3$ и $a=1$ равенката има само едно решение, а ако $a\in(-1,1)\cup(1,3)$ таа има две решенија.

41. Дадена е функцијата $f(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}$. Докажи дека

а) $-1\leq f(x)\leq 1$ за секој $x\in\mathbb{R}$,

б) за секоја вредност на реалниот параметар m равенката

$$f(x)^2-3f(x)+1=5x^2+2(3m-7)x+2m^2-8m+15$$

нема реални решенија.

Решение. а) Имаме:

$$f(x)-1=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}-1=\frac{-x^2+4x-4}{x^2-2x+2}=\frac{-(x-2)^2}{x^2-2x+2}\leq 0 \text{ и}$$

$$f(x)+1=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+1=\frac{x^2}{x^2-2x+2}\geq 0\,,$$

па затоа $-1\leq f(x)\leq 1$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

б) Ставаме $y=f(x)$ и ја бараме најмалата и најголемата вредност на функцијата $t=F(y)=y^2-3y+1$ на интервалот $[-1,1]$. Од $t=0$ за $y_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, добиваме $F_{\max}=F(-1)=5$ и $F_{\min}=F(1)=-1$.

Ако $g(x)=5x^2+2(3m-7)x+2m^2-8m+15$, тогаш

$$\begin{aligned}g(x)&\geq 5\left(\tfrac{3m-7}{5}\right)^2-2\frac{(3m-7)^2}{5}+2m^2-8m+15\\&=-\frac{(3m-7)^2}{5}+2m^2-8m+15\\&=\frac{m^2+2m+26}{5}=\frac{(m+1)^2+25}{5}\geq\frac{25}{5}=5,\end{aligned}$$

при што равенства се добиваат за $x=\frac{7-3m}{5}$ и $m=-1$. Според тоа, $g(x)=5$ ако $x=\frac{7+3}{2}=2$. Но, $5\geq F(y)=g(x)\geq 5$, што значи дека равенката има решение ако $F(y)=5$ и $g(x)=5$. Но, овие равенства се исполнети за различни вредности , па затоа равенката нема решение.

42. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$\frac{a+2}{x-2}+\frac{a+3}{x-3}=\frac{a+5}{x-5}$$

има точно едно решение.

Решение. Равенката е определена кога $x\notin\{2,3,5\}$ и во овие случаи таа е еквивалентна на равенката

$$ax^2-2x(5a+6)+19a+30=0. \qquad (1)$$

За $a=0$ разгледуваната равенка има има единствено решение $x=\frac{5}{2}$. Нека $a\neq 0$. Дискриминантата на равенката $D=24(a^2+54a+6)$ е еднаква на нула за $a=-2$ и $a=-3$, но во тој случај решенија на (1) се $x=2$ и $x=3$, соодветно, кои не се во дефиниционата област на дадената равенка. Понатаму, решение $x=5$ се добива за $a=-5$, при што се добива и решението $x=\frac{13}{5}$.

Конечно, бараните врености се $a=0$ и $a=-5$.

43. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$|ax-1|=ax^2-(2a-1)x+1$$

има точно едно решение.

Решение. За $a=0$ равенката има единствено решение $x=0$, па затоа $a=0$ е едно решение на задачата.

Нека $a\neq 0$. Ставаме $y=ax-1$ и ја добиваме равенката

$$a|y|=y^2-(2a-3)y+(2-a). \qquad (1)$$

Ќе разгледаме два случаја.

Случај 1. Нека $y<0$. Тогаш (1) го прима видот $y^2-(a-3)y+(2-a)=0$ и последната равенка има две реални решенија $y=-1$ и $y=a-2$. Значи, второто решение мора да се совпаѓа со првото или да е ненегативен, т.е. $a=1$ или $a\geq 2$.

Случај 2. Нека $y\geq 0$. Тогаш (1) го прима видот $y^2-3(a-1)y+(2-a)=0$. За $a=1$ последната равенка нема реални решенија, а за $a=2$ таа има две реални решенија $y=0$ и $y=3$, а за $a>2$ од Виетовите формули следува дека има точно едно ненегативно решение, кое очигледно е различно од веќе најденото решение $y=-1$.

Конечно, бараните вредности на параметарот a се $a=0$ и $a=1$.

44. Дадена е функцијата $f(x)=16x^2-8mx+m^2-4m+11$, каде m е реален параметар.

а) Определи ги сите вредноти на m за кои равенката $f(x)=0$ има точно едно решение во интервалот $(0,1)$.

б) Определи ги сите вредности на параметарот m за кои најмалата вредност на функцијата $f(x)$ во интервалот $[0,1]$ е позитивна.

Решение. а) Равенката $f(x)=0$ има реални решенија ако и само важи $D=16(4m-11)\geq 0$, т.е. $m\geq \frac{11}{4}$. Бидејќи

$$f(0)=m^2-4m+11=(m-2)^2+7>0 \text{ и } f(1)=m^2-12m+27\,,$$

заклучуваме дека кога $m>\frac{11}{4}$, равенката $f(x)=0$ има точно едно решение во интервалот $(0,1)$ кога $f(1)<0$, од каде добиваме $3<m<9$. За $m=\frac{11}{4}$ решението на равенката $f(x)=0$ е $\frac{11}{16}\in(0,1)$. Бидејќи $\frac{11}{4}<3$, добиваме дека решение на задачата е $m\in\{\frac{11}{4}\}\cup(3,9)$.

б) Ако $D<0$, т.е. $m<\frac{11}{4}$, тогаш $f(x)>0$ за секој x и најмалата вредност на $f(x)$ во интервалот $[0,1]$ е позитивна. Нека $D>0$. Тогаш решенијата на $f(x)=0$ треба да се негативни или поголеми од 1, т.е. $f(0)>0$ и $\frac{m}{4}<0$ или $f(1)>0$ и $\frac{m}{4}>1$. Оттука добиваме $m>9$. Конечно, $m\in(-\infty,\frac{11}{4})\cup(9,+\infty)$.

45. Нека $f(x)=x^2+(2a-1)x-3$ и $g(x)=x^2+(a-2)x-1$, каде a е реален параметар. Определи ги сите вредности на a за кои решенијата на равенките $f(x)=0$ и $g(x)=0$ се реални и се такви што меѓу решенијата на едната равенка има точно едно решение на другата равенка.

Решение. Решенијата на равенките се реални и различни и се такви што меѓу решенијата на едната равенка има точно едно решение на другата равенка, ако пресечната точка на графиците на функциите $f(x)$ и $g(x)$ лежи под апсцисната оска. Бидејќи пресечната точка има апсциса $x_0=\frac{2}{a+1}$ (единствено решение на равенката $f(x)=g(x)$), добиваме $f(\frac{2}{a+1})<0$, од каде наоѓаме $a\quad -4a-1<0$. Според тоа, бараните вредности за a се $a\in(2-\sqrt{5},2+\sqrt{5})$.

46. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$x^2+(a-2)(a-3)x+a^3-4a+9=0$$

има две различни реални решенија x_1 и x_2 такви што $a(x_1+x_2)=\frac{18}{x_1}+\frac{18}{x_2}$.

Решение. Равентсвото од условот на задачата е еквивалентно со

$$ax_1x_2(x_1+x_2)=18(x_1+x_2)\,.$$

Ако $x_1+x_2=0$, добиваме $a=2$ или $a=3$. Ако $x_1+x_2\neq 0$ имаме $ax_1x_2=18$, односно

$$a(a^3-4a+9)=18,$$
$$a^4-4a^2+9a-18=0,$$
$$(a-2)(a+3)(a^2-a+3)=0.$$

Од последната равенка добиваме дека само $a=-3$ е можно ново решение на задачата.

За $a=2$ и $a=3$ соодветно ги добиваме равенките $x^2+9=0$ и $x^2+24=0$, кои немаат реални решенија, а за $a=-3$ ја добиваме равенката $x^2+30x-6=0$ која има две различни ненулти решенија. Според тоа, единствено решение на задачата е $a=-3$.

47. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои решенијата x_1 и x_2 на равенката $x^2+(\sqrt{a+1}-a)x-1=0$ се реални и го задоволуваат условот

$$x_1^2+x_2^2+a^2=2a(x_1+x_2)+2+\sqrt{a^3+a^2-14a+25}\,.$$

Решение. Равенката има смисла и решенијата и се реални за секој $a\geq -1$. Да означиме $g(a)=a^3+a^2-14a+25$. Бидејќи $x_1x_2=-1$ Дадениот услов го запишуваме во обликот

$$(x_1+x_2-a)^2=\sqrt{g(a)}\,,$$

кој е еквивалентен на равенката $a+1=\sqrt{g(a)}$. Последната равенка ја квадрираме и добиваме $a^3-16a+24=0$, односно $(a-2)(a^2+2a-12)=0$. Решенијата на последната равенка се $a_1=-2, a_2=-1+\sqrt{13}, a_3=-1-\sqrt{13}$. Бидејќи $a_3<-1<a_1<a_2$, добиваме $g(a_1)=(a_1+1)^2\geq 0$ и $g(a_2)=(a_2+1)^2\geq 0$, па затоа $a_1=-2$ и $a_2=-1+\sqrt{13}$ се единствени решенија на задачата.

48. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои решенијата x_1,x_2 на равенката $x^2-ax+8-a=0$ се позитивни реални броеви за кои важи

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}>16\,.$$

Решение. Решенијата x_1,x_2 се реални ако $D=a^2+4a-32\geq 0$. Оттука следува $a\in(-\infty,-8]\cup[4,+\infty)$. Освен тоа,

$$x_1>0,\ x_2>0 \Leftrightarrow x_1+x_2>0,\ x_1x_2>0 \Leftrightarrow a>0,\ 8-a>0 \Leftrightarrow a\in(0,8)$$

Така, $a\in[4,8)$. Понатаму, бидејќи $x_1>0,\ x_2>0$, добиваме

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}>16 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2>16x_1x_2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2>18x_1x_2$$

$$\Leftrightarrow a^2>18(8-a) \qquad \Leftrightarrow a^2+18a144>0.$$

Решенија на последната неравенка се $(-\infty,-24)\cup(6,+\infty)$. Сега, ако земеме предид дека $a\in[4,8)$, добиваме дека решенија на задачата се $a\in(6,8)$.

49. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенките $x^2+ax-1=0$ и $y^2+(a+1)y-1=0$ имаат соодветно решенија x_1,x_2 и y_1,y_2 за кои важи

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}=\frac{y_1^2+y_2^2}{y_1+y_2}.$$

Решение. Јасно, решенијата на двете равенки се реални. Од Виетовите формули следува

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}=\frac{y_1^2+y_2^2}{y_1+y_2} \Leftrightarrow \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1+x_2}=\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{y_1+y_2} \Leftrightarrow \frac{a^2+2}{a}=\frac{(a+1)^2+2}{a+1}.$$

Според тоа, $a^2+a-2=0$, од каде добиваме $a_1=1$ и $a_2=-2$.

50. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенките

$$x^2-(2a+1)x+a=0 \text{ и } x^2+(a-4)x+a-1=0$$

имаат соодветно реални решенија x_1,x_2 и x_3,x_4, такви што

$$\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_4}{x_2}=\frac{x_1x_4(x_1+x_2+x_3+x_4)}{a}.$$

Решение. За $a\neq 0, a\neq 1$ даденото равенство последователно е еквивалентно со равенствата

$$a(x_1x_2+x_3x_4)=x_1x_2x_3x_4(x_1+x_2+x_3+x_4),$$
$$2a-1=(a-1)(a-5),$$
$$a^2+2a-4=0,$$

па затоа $a_{1,2}=-1\pm\sqrt{5}$. Непосредно се проверува дека за најдените вредности на a и двете реавенки имаат реални решенија. Случајот $a\neq 0$ отпаѓа заради условот, а при $a\neq 1$ добиваме $x_4=0$, од што следува $x_1=0$, што е противречност.

51. Определи ги сите вредности на реалните параметри p и q за кои равенката $(p+3)x^2+2px+p-1=0$ има реално решение и секое нејзино решение е три

пати помало од некое решение на равемката $z^2 + pz = q$.

Решение. Ќе разгледаме три случаја.

Прв случај. $p = -3$. Првата равенка е линеарна: $-6x = 4$, т.е. $x = -\frac{2}{3}$. Тогаш $z = -2$ треба да е решение $z^2 - 3z = q$, од каде добиваме $q = 4 + 6 = 10$.

Втор случај. $p \neq -3$, $D' = p^2 - p^2 - 2p + 3 = 0$, т.е. $p = \frac{3}{2}$, $x = \frac{-2p}{2p+6} = -\frac{1}{3}$. Тогаш $z = -1$ треба да е решение на $z^2 + \frac{3}{2}z = q$, па е $q = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$.

Трет случај. $p \neq -3$, $D' = p^2 - p^2 - 2p + 3 < 0$, т.е. $p < \frac{3}{2}$. Во овој случај условот ќе биде исполнет кога решенијата на втората равенка се $z_1 = 3x_1$, $z_2 = 3x_2$. Сега од Виетовите формули добиваме

$$-p = z_1 + z_2 = 3x_1 + 3x_2 = -\frac{6p}{p+3},$$

т.е. $p = 0$ или $p = 3$, па само $p = 0$ ги задоволува бараните услови. Повторно, од Виетовите формули добиваме $q = -z_1 z_2 = -9x_1 x_2 = 3$. Јасно, броевите z_1 и z_2 се решенија на втората равенка.

Конечно, решенија на задачата се $(p, q) = (-3, 10), (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), (0, 3)$.

52. Нека $f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$, каде a е реален параметар. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a такви што:

а) равенката $f(x) = 0$ има реални решенија x_1 и x_2 за кои важи $|x_1^3 - x_2^3| \leq 4$,

б) неравенството $f(x) \geq 0$ е исполнето за секој цел број x.

Решение. а) Од Виетовите формули следува $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 4$, па затоа неравенството $|x_1^3 - x_2^3| \leq 4$ е еквивалентно со неравенството $|x_1 - x_2| \leq 1$. Според тоа, $0 \leq D = 16 - 3a^2 \leq 1$, од каде добиваме $a \in [-\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, \frac{4\sqrt{3}}{3}]$.

б) Ако $D = 16 - 3a^2 \leq 0$, т.е. $a \in (-\infty, -\frac{4\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{4\sqrt{3}}{3}, +\infty)$, тогаш $f(x) \geq 0$ за секој x. Ако $D > 0$, условот $|x_1 - x_2| \leq 1$ е потребен, но не е доволен. Според тоа, $a \in [-\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, \frac{4\sqrt{3}}{3}]$ и треба да ги определиме вредностите на a во овој интервал, за кои $f(x) \geq 0$ за секој цел број x. Ако $f(x) < 0$ за некој цел број x, тогаш темето на параболата $\frac{a}{2}$ е на растојание најмногу $\frac{1}{2}$ од x. Бидејќи $-\frac{3}{2} < -\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq \frac{a}{2} \leq -\frac{\sqrt{5}}{2} < -1$ или $\frac{3}{2} > \frac{2\sqrt{3}}{3} \geq \frac{a}{2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$, заклучуваме дека единствени можни вредности на ± 1.

Според тоа, доволно е да се исполнети условите $f(-1)\geq 0$ и $f(1)\geq 0$, од каде добиваме $a\in[-\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{-1-\sqrt{13}}{2}]\cup[\frac{1+\sqrt{13}}{2},\frac{4\sqrt{3}}{3}]$.

Конечно, $a\in(-\infty,\frac{-1-\sqrt{13}}{2}]\cup[\frac{1+\sqrt{13}}{2},+\infty)$.

53. Определи ги сите вредности на параметрите p и q за кои равенката $x^2+px+q=0$ има два реални корени x_1 и x_2 такви што

$$\frac{p^3}{q^2}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2+x_2^2}.$$

Решение. Од Ветовите формули добиваме

$$\frac{p^3}{q^2}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2+x_2^2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{p^3}{q^2}=\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{p^3}{q^2}=\frac{3pq-p^3}{p^2-2q}.$$

Последното равенство очигледно важи за $p=0$, при што тогаш корените се реални само ако $q<0$.

За $p\neq 0$ добиваме $p^2(p^2-2q)=q^2(3q-p^2)$, т.е. $p^4+q(q-2)p^2-3q^3=0$. Последната равенка ја разгледуваме како биквадратна по p и добиваме

$$p^2=\frac{-q(q-2)\pm\sqrt{D}}{2},$$

каде

$$D=q^2[(q-2)^2+12q]=q^2(q^2+8q+4).$$

Бидејќи $q\neq 0$, бројот q^2+8q+4 треба да е точен квадрат на цел број t. Така добиваме $(q+4)^2-t^2=12$, односно $(q+4-t)(q+4+t)=12$. Броевите $q+4+t$ и $q+4-t$ се со иста парност, па затоа имаме само две можности:

$$\begin{cases}q+4-t=2\\ q+4+t=6\end{cases} \quad\text{и}\quad \begin{cases}q+4-t=6\\ q+4+t=2.\end{cases}$$

Во првиот случај добиваме $q=0$, што не е можно, а во вториот случај добиваме $q=-8$, од каде следува $p^2=\frac{-80\pm16}{2}<0$, што е противречност.

Конечно, решенија на задачата се паровите $(0,q)$, каде q е произволен цел негативен број.

54. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$|x^2+x-2|=ax+2$$

има точно три реални решенија.

Решение. Бидејќи $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$ разгледуваме два случаја.

Случај 1. Нека $x\in[-2,1]$. Тогаш дадената равенка е еквивалентна на равенката $x^2+(a+1)x=0$, која во разгледуваниот интервал има две различни решенија $x=0$ $x=-(a+1)$ ако $a\in[-2,-1)\cup(-1,1]$ и едно решение $x=0$ во спротивен случај.

Случај 2. Нека $x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$. Тогаш равенката е еквивалентна со равенката $x^2+(1-a)x-4=0$, која во разгледуваниот интервал има две различни решенија ако $a\in(-2,1)$ и едно решение во спротивен случај.

Според тоа, потребен и доволен услов дадената равенка да има точно три реални решенија е $a=-2, a=1$ или $a=-1$. Соодветните решенија се $x=0;1;-4;\ x=0;-2;2;\ x=0;1-\sqrt{5};1+\sqrt{5}$.

55. Определи ја најмалата можна вредност на $\overline{AB}$, каде A и B се точки соодветно од графиците на функциите $y=(6-x)^2$ и $y=-x^2$.

Решение. Ќе бараме точки $C(x_1,y_1)$ и $D(x_2,y_2)$ од графиците на соодветните функции такви што тангентите во овие точки се нормални на правата CD. Тогаш е јасно дека растојанието меѓу графиците е еднакво на $\overline{CD}$.

Двете тангенти се нормални на CD кога нивните аглови коефициенти $2(x_1-6)$ и $2x_2$ се еднакви на $-\frac{1}{k}$, каде $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ е агловиот коефициент на CD. Тогаш $x_1-6=-x_2$ и

$$-2x_2=\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}=\frac{6-2x_2}{-2x_2^2}.$$

Според тоа, $4x_2^3+2x_2-6=0$. Лесно се гледа дека $x_2=1$ е единствено реално решение на последната равенка, па затоа

$$\overline{CD}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(6-2x_2)^2+(2x_2^2)^2}=2\sqrt{5}.$$

56. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои решенијата x_1,x_2,x_3 на равенката

$$x^3+2x^2+(a^2+1)x+a^2=0$$

се реални и го задоволуваат неравенството

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}<36. \qquad (1)$$

Решение. Лесно се гледа дека -1 е решение на дадената равенка. Оттука добиваме

$$x^3+2x^2+(a^2+1)x+a^2=(x+1)(x^2+x+a^2).$$

Нека x_1,x_2 се решенијата на равенката $x^2+x+a^2=0$. Корените се реални, па затоа $D=1-4a^2\geq 0$, од каде следува $a\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Понатаму, неравенството (1) го добива обликот

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}<35 \quad\Leftrightarrow\quad (x_1+x_2)^2-2x_1x_2<35x_1^2x_2^2 \quad\Leftrightarrow\quad 35a^4+2a^2-1>0\,.$$

Од последното неравенство добиваме $a^2>\frac{1}{7}$, т.е. $a\in(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{7}})\cup(\frac{1}{\sqrt{7}},+\infty)$.

Конечно, $a\in[-\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{7}})\cup(\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{2}]$.

57. Дадена е равенката

$$(x^2+6x+1)^2+(m+7)(x^2+6x+1)+m^2+7=0\,,$$

каде m е реален параметар.

а) Определи го бројот на реалните решенија на равенката за $m=4$.

б) Определи ги вредностите на параметарот m за кои равенката има точно три реални и различни решенија.

Решение. Ставаме $x^2+6x+1=t$ и ја добиваме равенката

$$t^2+(m+7)t+m^2+7=0\,. \qquad (1)$$

а) За $m=4$ ја добиваме равенката $t^2+11t+23=0$. Бидејќи минимумот на функцијата $f(x)=x^2+6x+1$ е $f(-3)=8$ и $\frac{-11-\sqrt{29}}{2}<-8<\frac{-11+\sqrt{29}}{2}$, дадената равенка има две реални решенија.

б) Потребен услов е равенката (1) да има решение t_0 за кое равенката $x^2+6x+1=t_0$ има единствено решение. Со други зборови $D=32+4t_0=0$, т.е. $t_0=-8$. Ако замениме во (1) добиваме $m^2-8m+17=0$, од каде наоѓаме $m=3$ или $m=5$. За $m=3$ ги добиваме решенијата $-3,-3\pm\sqrt{6}$, а за $m=5$ ги добиваме решенијата $-3,-1,-5$.

58. Нека $f(x)=(a^2+4a+2)x^3+(a^3+4a^2+a+1)x^2+(2a-a^2)x+a^2$, каде a е реален параметар. Определи ги сите вредности на a за кои равенката $f(x)=0$ има три различни реални позитивни решенија.

Решение. Равенката ќе ја запишеме во видот

$$(x+a)((a^2+4a+2)x^2+(1-a)x+a)=0\,, \qquad (1)$$

од каде следува дека $a<0$. Освен тоа квадратниот трином во (1) треба да има два различни корени, т.е. $D=(1-a)^2-4a(a^2+4a+2)>0$, па затоа

$$(a+1)(-4a^2-11a+1)>0\,.$$

Ја решаваме последната неравенка, при што земаме предвид дека $a<0$, и добиваме

$$a \in (-\infty, \tfrac{-11-\sqrt{137}}{8}) \cup (-1,0) . \qquad (2)$$

Корените на квадратниот трином се позитивни кога

$$\tfrac{a}{a^2+4a+2} > 0 \text{ и } -\tfrac{1-a}{a^2+4a+2} > 0 .$$

Оттука добиваме $a \in (-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2})$, па ако го земеме предвид (2) добиваме

$$a \in (-2-\sqrt{2}, \tfrac{-11-\sqrt{137}}{8}) \cup (-1, -2+\sqrt{2}) . \qquad (3)$$

Останува да ги отфрлиме вредностите на a за кои $-a$ е корен на квадратниот трином во (1). Имаме

$$(a^2+4a+2))-a)^2 + (1-a)(-a) + a = 0,$$
$$a^2(a^2+4a+3) = 0,$$
$$a = -3, -1, 0.$$

Конечно, добиваме

$$a \in (-2-\sqrt{2}, -3) \cup (-3, \tfrac{-11-\sqrt{137}}{8}) \cup (-1, -2+\sqrt{2}) .$$

59. Определи ги вредностите на параметарот a за кои равенката

$$x^3 - ax^2 + (a-1)^2 = 0$$

има најмногу едно позитивно речение.

Решение. Забележуваме дека $x = a-1$ е решение на дадената равенка, па затоа истата можеме да ја запишеме во видот

$$(x-a+1)(x^2 - x - a + 1) = 0 .$$

Нека $f(x) = x^2 - x - a + 1$ и $D = 1 - 4(-a+1) = 4a - 3$.

Прв случај. Ако $D \le 0$, т.е. $a \in (-\infty, \tfrac{3}{4}]$, тогаш $f(x) = 0$ има најмногу едно решение $x = \tfrac{1}{2}$ и дадената равенка има едно негативно решение $x = a-1$ и едно позитивно решение $x = \tfrac{1}{2}$ за $a = \tfrac{3}{4}$.

Втор случај. Ако $D > 0$, а како $\tfrac{1}{2} > 0$, тогаш $f(x) = 0$ има барем едно позитивно решение и за да е единствено потребно е $f(0) = -a + 1 \le 0$. Во исто време $x = a - 1 \ge 0$ е решение на равенката, кое ако е позитивно треба да се совпадне со позитивното решение на $f(x) = 0$. Така добиваме $a = 1$ или $f(a-1) = 0$, т.е. $a = 1$ или $a = 3$, при што ги добиваме решенијата $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, соодветно.

Конечно, $a \in (-\infty, \tfrac{3}{4}] \cup \{1, 3\}$.

60. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката
$$x^3+ax^2-(1-a)^2=0$$
има три различни реални решенија x_1,x_2,x_3 за кои важи
$$\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}>\frac{3}{2}.$$
Решение. Имаме
$$x^3+ax^2-(1-a)^2=(a-(1-a))(x^2+x+(1-a))=0.$$
Ако D е дискриминанта на квадратниот трином, тогаш од $D>0$ добиваме $a>\frac{3}{4}$. Освен тоа, $1-a$ не смее да е корен на квадратниот трином, па затоа $a\neq 1,3$. Сега, од Виетовите формули следува
$$\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_1x_2x_3}=\frac{a^2}{(1-a)^2}>\frac{3}{2},$$
па затоа $a\in(3-\sqrt{6})\cup(3+\sqrt{6})$. Конечно, бидејќи $a>\frac{3}{4}$ и $a\neq 1,3$, добиваме $a\in(\frac{3}{4},1)\cup(1,3))\cup(3,3+\sqrt{6})$.

61. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката
$$(x^2-2x)^2-3(x^2-2x)+a=0$$
има четири реални и различни решенија чиј производ е еднаков на 2.
Решение. Нека равенката има четири реални и различни решенија. Ставаме $y=x^2-2x$. Тогаш равенката $y^2-3y+a=0$ треба да има две реални и различни решенија. Да ги означиме со y_1 и y_2. Равенките $x^2-2x-y_1=0$ и $x^2-2x-y_2=0$ треба да имаат по две реални и различни решенија, бидејќи $y_1\neq y_2$. Ако x_1,x_2 и x_3,x_4 се соодветно решенијата на овие равенки, тогаш од Виетовите формули следува $x_1x_2=-y_1$ и $x_3x_4=-y_2$, па затоа
$$2=x_1x_2x_3x_4=y_1y_2=a.$$
За $a=2$ равенката $y^2-3y+2=0$ има решенија $y_1=1$ и $y_2=2$. Решенија на равенките $x^2-2x-1=0$ и $x^2-2x-2=0$ се соодветно $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$ и $x_{3,4}=1\pm\sqrt{3}$, кои се реални и различни и нивниот производ еднаков на 2.

62. Определи ги сите вредности на реалниот параметар p за кои равенката $|x^2-px-2p+1|=p-1$ има четири реални корени x_1,x_2,x_3,x_4 такви што
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=20.$$
Решение. За да постојат четири реални корени потребен услов е $p>1$. Но,

овој услов не е доволен. Ќе разгледаме два случаја.

Случај 1. Ако $x^2 - px - 2p + 1 = p - 1$, т.е. $x^2 - px - 3p + 2 = 0$, тогаш од Виетовите формули добиваме

$$x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2(2-3p) = p^2 + 6p - 4 .$$

Случај 2. Ако $x^2 - px - 2p + 1 = 1 - p$, т.е. $x^2 - px - p = 0$, тогаш од Виетовите формули добиваме

$$x_3^2 + x_4^2 = p^2 + 2p .$$

Сега, од условот на задачата следува $2p^2 + 8p - 4 = 20$, од каде добиваме $p = 2$ или $p = -6$. Втората вредност противречи на условот $p > 1$. За $p = 2$ непосредно се проверува дека дадената равенка има четири корени.

63. Нека

$$f(x) = x^4 - ax^3 + (a+1)x^2 - 2x + 1 ,$$

каде a е реален параметар.

а) Определи го множеството вредности на изразот $\frac{x^2}{x-1}$ за сите допустливи реални вредности на x.

б) Определи ги сите реални вредности на параметарот a за кои равенката $f(x) = a$ нема реални решенија.

Решение. а) Нека $t = \frac{x^2}{x-1}$. Тогаш $x^2 - tx + t = 0$. Ова е квадратна равенка по x и за да има решение $x \in \mathbb{R}$, треба $D \geq 0$, односно $t^2 - 4t \geq 0$, од каде добиваме $t \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$.

б) Имаме

$$f(x) = x^4 - ax^2(x-1) + (x-1)^2 .$$

Очигледно $x = 1$ не е решение на равенката $f(x) = 0$. Ако равенката ја поделиме со $(x-1)^2$ и ставиме $t = \frac{x^2}{x-1}$, ја добиваме равенката $t^2 - at + 1 = 0$. Можни се два случаја:

1) $D = a^2 - 4 < 0$, т.е. $a \in (-2, 2)$. Тогаш последната равенка нема реални решенија, што значи дека и равенката $f(x) = 0$ нема реални решенија.

2) $D = a^2 - 4 \geq 0$, т.е. $a \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. Тогаш равеката има две реални решенија t_1, t_2 и за да нема равенката $f(x) = 0$ реални решенија треба $t_1, t_2 \in (0, 4)$. Ако

$$g(t) = t^2 - at + 1 ,$$

последното е еквивалентно на

$$\begin{cases} g(0) > 0, \\ g(4) > 0, \\ 0 < \frac{a}{2} < 4. \end{cases}$$

Решение на последниот систем е $a \in (0, \frac{17}{4})$ и како $a \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, добиваме $a \in [2, \frac{17}{4})$

64. Нека $f(x) = x^4 - x^3 + 8ax^2 - ax + a^2$ и $g(y) = y^2 - y + 6a$.

а) Докажи дека

$$f(x) = (x^2 - y_1 x + a)(x^2 - y_2 x + a),$$

каде y_1, y_2 се корените на равенката $g(y) = 0$.

б) Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката $f(x) = 0$ има четири реални различни позитивни решенија.

Решение. а) Од $y_1 + y_2 = 1$ и $y_1 y_2 = 6a$ следува

$$\begin{aligned}(x^2 - y_1 x + a)(x^2 - y_2 x + a) &= x^4 - (y_1 + y_2)x^3 + (2a + y_1 y_2)x^2 - a(y_1 + y_2)x + a^2 \\ &= x^4 - x^3 + 8ax^2 - ax + a^2 = f(x).\end{aligned}$$

б) Корените на равенката $f(x) = 0$ се корените x_1, x_2 и x_3, x_4 на равенките

$$x^2 - y_1 x + a = 0 \text{ и } x^2 - y_2 x + a = 0,$$

соодветно. Лесно се гледа дека x_1, x_2, x_3, x_4 се реални, разглични и позитивни ако и само ако истовремено се исполнети следниве три услови:

1) $a \neq 0, y_1 \neq y_2$ се реални, што е еквивалентно со $a \neq 0, D = 1 - 24a > 0$, т.е. со $a \neq 0, a < \frac{1}{24}$,

2) $D_1 = y_1^2 - 4a > 0$ и $D_2 = y_2^2 - 4a > 0$, што е еквивалентно со $y_1 > 10a$ и $y_2 > 10a$,

3) $x_1 + x_2 = y_1 > 0, x_1 x_2 = a > 0$, $x_3 + x_4 = y_2 > 0, x_3 x_4 = a > 0$, што е еквивалентно со $y_1 > 0, y_2 > 0$ и $a > 0$.

Овие услови се еквивалентни со $0 < a < \frac{1}{24}$, $y_1 > 10a$, $y_2 > 10a$, односно со

$$0 < a < \frac{1}{24}, \ g(10a) > 0 \text{ и } 10a < \frac{1}{2},$$

од каде добиваме

$$0 < a < \frac{1}{24}, \ 4a(25a - 1) > 0 \text{ и } a < \frac{1}{20}.$$

Конечно, бараните вредности на параметарот a се $a \in (\frac{1}{25}, \frac{1}{24})$.

65. Определи ги вредностите на реалните параметри a и b за кои функцијата

$y = x^3 + ax + b$ има точно три заеднички точки со координатните оски и тие се темиња на правоаголен триаголник.

Решение. Условот, дека графикот на дадената функција има точно три заеднички точки со координатните оски, кои се темиња на триаголник, означува дека равенката $x^3 + ax + b = 0$ има еден двоен реален корен $x_1 \neq 0$ и уште еден реален корен $x_2 \neq 0$, т.е.

$$x^3 + ax + b = (x - x_1)^2 (x - x_2) .$$

Тогаш $\measuredangle ACB = 90^\circ$, каде $A = (x_1, 0), B = (x_2, 0), C = (0, b)$ и $x_1 x_2 < 0$. Според тоа, важи

$$\overline{AO} \cdot \overline{BO} = \overline{CO}^2 \text{, т.е. } -x_1 x_2 = b^2 .$$

Бидејќи $b = -x_1^2 x_2$ и $x_1, x_2 \neq 0$, од последните две равенства следува

$$x_1^3 x_2 = -1 .$$

Од друга страна, $2x_1 + x_2 = 0$, па затоа

$$2x_1 = -x_2 = \tfrac{1}{x_1^3} .$$

Според тоа, $x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ и $x_2 = \mp \sqrt[4]{8}$. Тогаш

$$a = x_1^2 + 2x_1 x_2 = -\tfrac{3}{\sqrt{2}} \text{ и } b = -x_1^2 x_2 = \pm \sqrt[4]{2} .$$

Од претходните разгледувања е јасно дека и за двете најдени вредности за b се исполнети условите на задачата.

66. Во зависност од вредноста на параметарот m определи го бројот на различните реални решенија на равенката

$$x^6 - 4x^5 + rx^4 + (8 - 3r)x^3 - rx^2 - 4x - 1 = 0 .$$

Решение. Бројот на различните решенија на равенката е:

- 2 ако $r > \frac{1}{4}$,
- 4 ако $r = \frac{1}{4}$ или $r = -6$, и
- 6 ако $r \in (-\infty, -6) \cup (-6, \frac{1}{4})$.

II.2. ИРАЦИОНАЛНИ ПАРАМЕТАРСКИ РАВЕНКИ

1. Реши ја равенката

$$\sqrt{x^2+x+3}=x-a\,,$$

каде a е реален параметар.

Решение. Јасно, допустливи вредности за x е множеството реални броеви. За $x<a$ равенката нема решение, а за $x>a$ таа е еквивалентна со равенката $(1+2a)x=a^2-3$. Бидејќи за $a=-\frac{1}{2}$ равенката нема решение, добиваме $x=\frac{a^2-3}{1+2a}$ за $a\neq\frac{1}{2}$. Од $\frac{a^2-3}{1+2a}\geq a$, добиваме $\frac{a^2+a+3}{1+2a}\leq 0$, што значи $a<-\frac{1}{2}$. Според тоа, ако $a\geq-\frac{1}{2}$ равенката нема решение, а ако $a<-\frac{1}{2}$ тогаш решението на равенката е $x=\frac{a^2-3}{1+2a}$.

2. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$\sqrt{x^2+a}=x-a$$

има барем едно целобројно решение.

Решение. По квадрирањето ја добиваме равенката $2ax=a(a-1)$. Ќе разгледаме два случаја.

Случај 1. Ако $a=0$, тогаш равенката го добива видот $|x|=x$ и секој $x\geq 0$ е решение на истата.

Случај 2. Ако $a\neq 0$, тогаш $x=\frac{a-1}{2}$. Имаме, $x^2+a=\frac{(a+1)^2}{4}\geq 0$ и за да има решение доволно е $x-a=\frac{a-1}{2}-a\geq 0$, т.е. $a\leq -1$.

Конечно, равенката има барем едно целобројно решение секогаш кога a е непарен негативен број или 0.

3. Реши ја равенката $\sqrt{x-a}=x^2+a$, каде a е реален ненегативен параметар.

Решение. Бидејќи за $a\geq 0$ важи $x^2+a\geq 0$ за секој x, по квадрирањето ја добиваме еквивалентната равенка

$$x^4+2ax^2-x+a^2+a=0\,,$$

која разгледувана како мквадратна равенка по a се разложува во видот

$$(a+x^2-x)(a+x^2+x+1)=0\,.$$

Бидејќи за $a\geq 0$ вториот множител е позитивен, останува да ја решиме равенката $x^2-x+a=0$. Последната равенка за $a\in[0,\frac{1}{4})$ има две решенија $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$, за $a=\frac{1}{4}$ има едно решение $x=\frac{1}{2}$, а за $a>\frac{1}{4}$ нема решенија.

4. Реши ја равенката

$$\sqrt{x-\sqrt{a}}=a-x\,,$$

каде a е реален параметар.

Решение. Јасно, треба да е $a\geq 0$ и за $a=0$ единствено решение е $x=0$. Нека $a>0$. Равенката има смисол за $x\geq\sqrt{a}$ и за $x>a$ таа нема решение. Нека $\sqrt{a}\leq x\leq a$. Оттука следува $a\geq\sqrt{a}$, т.е. $a\geq 1$ и за $0<a<1$ равенката нема решение.

За $a\geq 1$ равенката е еквивалентна на равенката $x-\sqrt{a}=(a-x)^2$, т.е. на равенката $x^2-(2a+1)x+a^2+\sqrt{a}=0$. Решенијата на оваа равенка се

$$x_1=a+\sqrt{a} \text{ и } x_2=a-\sqrt{a}+1.$$

Бидејќи $a+\sqrt{a}>a$ заклучуваме дека x_1 не е решение дадената равенка. Бидејќи $a-\sqrt{a}+1\geq\sqrt{a}$ и $a-\sqrt{a}+1\leq a$, заклучуваме дека x_2 е решение на дадената равенка.

Конечно, за $a<0$ и $0<a<1$ равенката нема решение, за $a=0$ има решение $x=0$ и за $a\geq 1$ има решение $x=a-\sqrt{a}+1$.

5. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}=x$$

има целобројни решенија.

Решение. Јасно, $x\geq|a|$ и по квадрирањето ја добиваме еквивалентната равенка

$$2\sqrt{x^2-a^2}=x^2-2x\,.$$

Според тоа, $x\in[2,+\infty)\cup\{0\}$ и со повторно квадрирање ја добиваме равенката $4x^3-x^4=4a^2$. Но, $4a^2\geq 0$, па затоа $x\in[2,4]\cup\{0\}$ и бидејќи x треба да е цел број добиваме $x=0,2,3$ или 4. Конечно, добиваме $a=0,\pm 2$ или $\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

6. Определи ги сите вредности на параметарот a за кои равенката

$$2x^2-ax=4-2x\sqrt{x^2-ax}$$

има единствено решение.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во видот

$$(x+\sqrt{x^2-ax})^2=4\,.$$

Ако $x+\sqrt{x^2-ax}=2$, тогаш $x^2-ax=(2+x)^2$, кога $2-x\geq 0$, од каде добиваме решение $x_1=\frac{4}{4-a}\leq 2$ кога $a\neq 4$. Последното неравенство е исполнето кога $a \in (-\infty, 2] \cup (4, +\infty)$.

Ако $x + \sqrt{x^2 - ax} = -2$, тогаш $x^2 - ax = (2-x)^2$, кога $2 + x \le 0$, од каде добиваме решение $x_1 = -\frac{4}{4+a} \le -2$ кога $a \ne -4$. Последното неравенство е исполнето кога $a \in (-4, -2)$.

Од петходнте разгледувања следува дека единствено решение имаме кога $a \in (-\infty, -4] \cup (-2, 2] \cup (4, +\infty)$.

7. Нека $f(x) = x^2 + ax + 1$, каде a е реален параметар. Во зависност од a реши ја равенката

$$f(x) = f(\sqrt{a^2 - x^2}). \tag{1}$$

Решение. Равенката има смисла за $|x| \le |a|$.

Прв начин. Бидејќи f е квадратна функција равенството (1) е можно точно во два случаја и тоа кога $x = \sqrt{a^2 - x^2}$ (т.е. кога аргументите се еднакви) и кога $x + \sqrt{a^2 - x^2} = -a$ (т.е. кога аргументите се симетрични во однос на оската на параболата на f). Во првиот случај добиваме $x = \sqrt{a^2 - x^2} > 0$, па затоа $2x^2 = a^2$ и $x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$. Јасно, решенијата се $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ кога $a > 0$ и $x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ кога $a < 0$. Ако $\sqrt{a^2 - x^2} = -a - x$, по квадрирањето добиваме $a^2 - x^2 = (a+x)^2$. Ако $x + a = 0$, добиваме $x = -a$, а ако $x + a \ne 0$ добиваме $a - x = a + x$, т.е. $x = 0$. Со проверка се уверуваме дека тоа е решение само за $a < 0$.

Конечно, решенија се $x = 0$ за $a = 0$, $x = -a$, $x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ и $x = 0$ за $a < 0$ и $x = -a$ и $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ за $a > 0$.

Втор начин. Заменуваме во (1) и ја доибиваме равенката

$$2x^2 + ax - a^2 = a\sqrt{a^2 - x^2},$$

која е еквивалентна на равенката

$$(x+a)(2x-a) = a\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Оттука по квадрирањето добиваме

$$(x+a)^2(2x-a)^2 = a^2(a-x)(a+x).$$

Ако $x + a = 0$, добиваме $x = -a$, кое е решение на дадената равенка. Ако $x + a \ne 0$ последователно добиваме

$$(x+a)(2x-a)^2 = a^2(a-x)$$
$$4x^3 - 2a^2x = 0,$$

т.е. $x=0$ и $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$. Со непосредна проверка се уверуваме дека решенијата се оние кои ги добивме во првиот начин.

8. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кој равенката

$$\sqrt{(4a^2-4a-1)x^2-2ax+1} = 1-ax-x^2 \qquad (1)$$

има точно две решенија.

Решение. Ја квадрираме равенката (1) и по средувањето ја добиваме равенката

$$x^2(x^2+2ax-3a^2+4a-1)=0,$$

чии решенија се $x_1=0, x_2=1-3a$ и $x_3=a-1$. Јасно, $x_1=0$ е решение на (1) за секој a. Бројот $x_2=1-3a$ е решение на (1) кога десната страна е ненегативна, т.е.

$$1-a(1-3a)-(1-3a)^2 \geq 0,$$

од каде добиваме $a\in[0,\frac{5}{6}]$. Аналогно, $x_3=a-1$ е решение на (1) кога $a\in[0,\frac{3}{2}]$. Можни се два случаја.

1) Некои од броевите x_1,x_2,x_3 се еднакви. Тое е исполнето за $a=\frac{1}{3},\frac{1}{2}$ или 1 и од претходните разгледувања следува дека $a=\frac{1}{3}$ и $a=\frac{1}{2}$ се решенија на задачата.
2) Броевите x_1,x_2,x_3 се по парови различни. Тогаш лесно се гледа дека $a\in(\frac{5}{6},\frac{3}{2}]\setminus\{1\}$.

Конечно, решение на задачата е $a=\frac{1}{3}$, $a=\frac{1}{2}$ и $a\in(\frac{5}{6},\frac{3}{2}]\setminus\{1\}$.

9. Определи ги вредностите на реалниот параметар a, за кои равенката

$$\sqrt{8x^2+(8a-6)x+2(2a^2-3a+1)} = 3x+a-1$$

има два различни позитивни корени.

Решение. Дадената равенка ја квадрираме и последователно добиваме

$$8x^2+(8a-6)x+2(2a^2-3a+1) = 9x^2+(6a-6)x+a^2-2a+1,$$
$$x^2-2ax+(-3a^2+4a-1)=0,$$
$$(x-3a+1)(x+a-1)=0.$$

Решенија на последната равенка се $x_1=3a-1$ и $x_2=1-a$. Од условот корените да се позитивни и различни добиваме

$$\begin{cases} 3a-1>0, \\ 1-a>0, \\ 3a-1\neq 1-a, \end{cases}$$

па затоа $a\in(\frac{1}{3},1)\setminus\{\frac{1}{2}\}$. Бидејќи десната страна на равенката исто така треба да биде позитивна и за двата корена, за a треба да се исполнети условите

$$\begin{cases} 3(3a-1)+a-1>0, \\ 3(1-a)+a-1>0. \end{cases}$$

Оттука следува $a>\frac{2}{5}$ и $a<1$. Конечно,

$$a\in((\tfrac{1}{3},1)\setminus\{\tfrac{1}{2}\})\cap(\tfrac{2}{5},1)=(\tfrac{2}{5},1)\setminus\{\tfrac{1}{2}\}.$$

10. За кои вредности на параметарот a равенката

$$(2x-a)\sqrt{ax^2-(a^2+a+2)x+2(a+1)}=0$$

има три реални и различни решенија.

Решение. За $a=0$ дадената равенка има две реални и различни решенија. Ако $a\neq 0$, од

$$ax^2-(a^2+a+2)x+2(a+1)=(ax-2)(x-a-1)$$

следува дека решенија на равенката се $x=\frac{2}{a},a+1,\frac{a}{2}$. Овие решенија се различни за $a\neq -2,1,2$. Останува да провериме, ако $x=\frac{a}{2}$, за кои вредности на a подкореновиот израз епозитивен. Од

$$(a\tfrac{a}{2}-2)(\tfrac{a}{2}-a-1)=-\tfrac{1}{4}(a+2)^2(a-1)\geq 0$$

добиваме $a\leq 2$. Според тоа, $a\in(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,1)\cup(1,2)$.

11. а) Докажи дека функцијата $f(x)=x^3+4x^2+6x$ строго монотоно расте на множеството реални броеви.

б) Определи ги сите релани вредности на параметарот a, за кои равенката

$$x^3+5x=(a-4)x^2-a+4\sqrt[3]{(ax^2+x-a)^2}+6\sqrt[3]{ax^2+x-a}$$

има точно две решенија.

Решение. а) Имаме $f'(x)=3x^2+8x+6=3(x+\frac{4}{3})^2+\frac{2}{3}>0$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Според тоа, функцијата $f(x)$ строго монотоно расте на множеството реални броеви.

б) Дадената равенка ја запишуваме во видот

$$x^3+4x^2+6x=ax^2+x-a+4\sqrt[3]{(ax^2+x-a)^2}+6\sqrt[3]{ax^2+x-a}.$$

Сега, од а) следува дека $x^3=ax^2+x-a$, од каде добиваме

$$(x-a)(x+1)(x-1)=0\ .$$

Значи, равенката има точно две решенија ако $a=1$ или $a=-1$.

12. Определи ги вредностите на реалниот параметар a а кои равенката

$$\sqrt{3+2x-x^2}-\sqrt{4-a^2+2ax-x^2}=1-a$$

има единствено решение.

Решение. Дефиниционата област на равенката е $[-1,3]\cup[a-2,a+2]$ и таа е непразно множество за $a\in[-3,5]$. Јасно, за $a=1$ секој реален број x е решение на равенката. Ќе ја разгледаме дадената равенка за $a\in[-3,5]$ и $a\neq 1$. Равенката е еквивалентна со равенката

$$\sqrt{3+2x-x^2}+a-1=\sqrt{4-a^2+2ax-x^2}\ . \qquad (1)$$

Ако ја квадрираме (1), по средувањето добиваме

$$\sqrt{3+2x-x^2}=x-a\,, \qquad (2)$$

и ако замениме во (1) добиваме

$$\sqrt{4-a^2+2ax-x^2}=x-1\,. \qquad (3)$$

Ако ја квадрираме (2) или (3) добиваме

$$f(x)=2x^2-2(a+1)x+a^2-3=0\,. \qquad (4)$$

Трансформациите од (1) до (4) се еквивалентни за x од дефиницоната област $[-1,3]\cup[a-2,a+2], a\neq 1$ и за $x\geq a$, $x\geq 1$. Значи, дадената равенка има единствено решение ако и само ако равенката (4) има единствено решение, ако $a\in[-3,5]$, $a\neq 1$, $x\in[-1,3]\cup[a-2,a+2]$, $x\geq a$ и $x\geq 1$. Равенката (4) има решение, ако $D_f=-a^2+2a+7\geq 0$, односно $a\in[1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2}]\subset[-3,5]$ и тоа решение ќе биде единствено за $x\geq a$ и $x\geq 1$ само ако a и 1 се наоѓаат меѓу неговите решенија, т.е. за

$$f(a)=f(1)=a^2-2a-3\leq 0\,,$$

т.е. $a\in[-1,3]\subset[1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2}]\subset[-3,5]$.

Останува да видиме за кои $a\in[-1,3]$, $a\neq 1$ решението на равенката (4), за кое $x\geq a$ и $x\geq 1$, припаѓа на дефиниционата област. Бидејќи

$$f(-1)=f(a+2)=(a+1)^2\geq 0 \text{ и } f(3)=f(a-2)=(a-3)^2\geq 0\,,$$

потребно е и двете решенија на равенката (4) да се содржат во интервалите од дефиниционата област, што е еквивалентно на неравенствата

$$-1\leq \tfrac{a+1}{2}\leq 3 \text{ и } a-2\leq \tfrac{a+1}{2}\leq a+2\,,$$

кои се исполнети за секој $a\in[-1,3]$.

Конечно, дадената равенка има единствено решение ако $a\in[-1,1)\cup(1,3]$.

13. Реши ја равенката
$$x+\sqrt{x^2+2}=2a+1+\sqrt{2ax+2a+3}\,,$$
каде a е реален параметар.

Решение. Неравенката има смисла за $2ax+2a+3\geq 0$. Последователно имаме:
$$x+\sqrt{x^2+2}=2a+1+\sqrt{2ax+2a+3} \quad \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2ax+2a+3}=2a+1-x \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{x^2-2ax-2a-1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2ax+2a+3}}=2a+1-x \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{(x+1)(x-2a-1)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2ax+2a+3}}=2a+1-x.$$
Ако $x=2a+1$, тогаш $2a(2a+1)+2a+3=(2a+1)^2+2>0$. Ако $x\neq 2a+1$, тогаш ја добиваме равенката $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2ax+2a+3}}+1=0$, која нема решение. Навистина, ако $x\geq -1$, тогаш левата страна е позитивна, а ако $x<-1$ имаме
$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2ax+2a+3}}>\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}>\frac{x+1}{|x|}>-1\,.$$
Конечно, за секој реален број a равенката има единствено решение $x=2a+1$.

II.3. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ, ЛОГАРИТАМСКИ И ТРИГОНОМЕТРИСКИ ПАРАМЕТАРСКИ РАВЕНКИ

1. Определи ги сите вредности на реалниот параметар $a>0$ за кои равенката $a^{|x+1|}-|a^{x+1}-1|=1$ има точно еден корен.

Решение. Ако $0<a<1$, тогаш $a^{|x+1|}\leq a^0=1$. Од друга страна
$$a^{|x+1|}=|a^{|x+1|}-1|+1\geq 1\,,$$
па затоа $a^{|x+1|}=1$, т.е. равенката има единствено решение $x=-1$.
Ако $a\geq 1$, тогаш секој $x\geq -1$ е решение на равенката, бидејќи тогаш
$$a^{|x+1|}-|a^{x+1}-1|=a^{x+1}-(a^{x+1}-1)=1.$$
Конечно, бараните вредности за a се $0<a<1$.

2. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката
$$2^{3x}-2^{2x+1}a+2^x(a^2+a-1)-a^2+a=0$$
има точно два реални корени.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(2^x - a)(2^{2x} - 2^x a + a - 1) = 0\ ,$$

од каде добиваме $2^x = a, 2^x = 1, 2^x = a - 1$. За $a \le 0$ имаме само едно решение, за $a \in (0,1)$ имаме две решенија, за $a = 1$ имаме едно решение, за $a \in (1,2)$ имаме две решенија, за $a = 2$ имаме едно решение и за $a > 2$ имаме три решенија. Според тоа, решение на задачата е $a \in (0,1) \cup (1,2)$.

3. Определи ги сите целобројни вредности на реалниот параметар a, за кои постои ненулти цел број кој е решение на равенката

$$a4^x + (a-1)9^x = (2a-1)6^x\ .$$

Решение. Ако поделиме со 9^x и воведеме смена $t = (\frac{2}{3})^x$ ја добиваме равенката

$$at^2 + (2a-1)t + a - 1 = 0\ . \tag{1}$$

За $a = 1$ добиваме $t = 1$, од каде следува $x = 0$.

Ако $a \ne 0$ решенијата на равенката (1) се $t_1 = 1$ и $t_2 = \frac{a-1}{a}$. За $t_1 = 1$ повторно добиваме $x = 0$. Нека $(\frac{2}{3})^x = \frac{a-1}{a}$. Непосредно се проверува дека за $a \ge 4$ и за $a \le -3$ се исполнети неравенствата

$$\tfrac{2}{3} < \tfrac{a-1}{a} < \tfrac{3}{2}\ . \tag{2}$$

Бидејќи ако $x \notin (-1,1)$ вредностите на $(\frac{2}{3})^x$ се надвор од интервалот $(\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$ неравенството(2) покажува дека решенија може да има само за $-2 \le a \le 3$. Непосредно се проверува дека целобројни решенија имаме само кога $a = -2$ и $a = 3$ и тогаш $x = -1$ и $x = 1$.

4. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$4^x - (a^2 + 3a - 2)2^x + 3a^3 - 2a^2 = 0$$

има единствено решение.

Решение. Воведуваме смена $y = 2^x$, со што задачата се сведува на наоѓање на сите вредности на параметарот a за кои равенката

$$y^2 - (a^2 + 3a - 2)y + 3a^3 - 2a^2 = 0$$

има единствено позитивно решение. Оваа равенка е еквивалентна на равенката $(y - a^2)(y - 3a + 2) = 0$. Бидејќи за $a = 0$ решенијата се $y_1 = 0$ и $y_2 = -2$, заклучуваме дека $a = 0$ не е меѓу бараните вредности. За $a \ne 0$ равенката има позитивно решение $y_1 = a^2$. За ова решение да е единствено потребно е $y_2 = 3a - 2 \le 0$ или $y_2 = y_1$. Во првиот случај добиваме $a \le \frac{2}{3}$, а во вториот имаме $a^2 = 3a - 2$, т.е. $a_1 = 1, a_2 = 2$. Конечно, решение на задачата е

$$a \in (-\infty, 0) \cup (0, \tfrac{2}{3}) \cup \{1, 2\}.$$

5. Определи ги сите вредности на параметарот a за кои равенката

$$3(5x^2 - a^4) - 2x = 2a^2(6x - 1)$$

нема повеќе решенија од равенката

$$2x^3 + 6x = (3^{6a} - 9)\sqrt{2^{8a} - \tfrac{1}{6}} - (3a-1)^2 \cdot 12^x.$$

Решение. Првата равенка е квадратна со дискриминанта $D = (9a^2 - 1)^2$. Според тоа, за секоја вредност на a различна од $\pm\frac{1}{3}$, таа има две решенија. За $a = \pm\frac{1}{3}$, првата равенка има едно решение. Понатаму, функцијата

$$f(x) = 2x^3 + 6x + (3a-1)^2 \cdot 12^x$$

строго монотоно расте, па затоа втората равенка има најмногу едно решение. Последното значи дека можни вредности за a се $\pm\frac{1}{3}$. За $a = \frac{1}{3}$ втората равенка има решение $x = 0$, а за $a = -\frac{1}{3}$ таа не е дефинирана, бидејќи подкореновиот израз на десната страна е негативен. Конечно, единствена вредност на a за која се исполнети условите на задачата е $a = \frac{1}{3}$.

6. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$4^{x-2} - 2^{x-a} + a = 0$$

има точно едно реално решение.

Решение. Ставаме $2^{x-2} = t$ и добиваме дека задачата се сведува да се определат на оние вредности на параметарот a за кои равенката

$$t^2 - 2^{2-a}t + a = 0$$

има точно едно решение. Нека $f(t) = t^2 - 2^{2-a}t + a$. Ќе разгледаме два случаја.

Случај 1. Ако равенката $f(t) = 0$ има двојно позитивно решение, тогаш потребмо и доволно е $D = 4^{2-a} - 4a = 0$, т.е. $4^{1-a} = a$ и $2^{1-a} > 0$. За $a > 1$ имаме $4^{1-a} < 1 < a$, а за $0 < a < 1$ имаме $4^{1-a} > 1 > a$. За $a = 1$ добиваме единстено решение $t = 1$, т.е. $x = 2$.

Случај 2. Ако $f(t) = 0$ има две реални решенија $t_1 \le 0 < t_2$, тогаш потребен и доволен услов е $f(0) \le 0$ и $2^{1-a} > 0$, т.е. $a \le 0$.

7. Определи ги сите вредности на параметарот a за кои равенката

$$2^{2x+1}-(a+8)\cdot 2^{x}+a^{2}+4=0$$

има едно позитивно и едно негативно решение.

Решение. Ставаме $y=2^{x}$ и ја разгледуваме функцијата

$$f(y)=2y^{2}-(a+8)y+a^{2}+4\,.$$

За да почетната равнка има едно позитивно и едно негативно решение, тогаш равенката $f(y)=0$ треба да има по едно решение во интервалите $(0,1)$ и $(1,+\infty)$. Бидејќи $f(0)=a^{2}+4>0$, доволно е да е исполнето $f(1)<0$. Последното е еквивалентно на $a^{2}-a-2<0$, од каде добиваме $a\in(-1,2)$.

8. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$a-4^{x}=\sqrt{a+2^{x}}$$

има решение.

Решение. Ставаме $2^{x}=t,\, t>0$ и ја добиваме ирационалната равенка

$$a-t^{2}=\sqrt{a+t}\,,$$

која е еквивалентна на равенката

$$a+t-\sqrt{a+t}=t+t^{2}\,,$$

т.е. на равенката

$$(\sqrt{a+t}-\tfrac{1}{2})^{2}=(t+\tfrac{1}{2})^{2}\,.$$

Според тоа, $\sqrt{a+t}=t+1$ или $\sqrt{a+t}=-t$. Но, $t>0$, па затоа вториот случај отпаѓа и задачата се сведува на оперделување на оние вредности на параметарот a за кои равенката $\sqrt{a+t}=t+1$ има позитивно решение. Последното е еквивалентно на

$$f(t)=t^{2}+t+1-a=0$$

за баремн една позитивна вредност на t. Бидејќи темето на параболата е во $t=-\frac{1}{2}<0$, горното е исполнето точно кога $f(0)=1-a<0$, односно кога $a\in(1,+\infty)$.

9. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$\sqrt[3]{1+3^{x}}+\sqrt[3]{1-3^{x}}=a$$

има решение.

Решение. Дадената равенка има смисла за секој реален број x. Нека $u=\sqrt[3]{1+3^{x}}$ и $v=\sqrt[3]{1-3^{x}}$, каде u и v се реални броеви такви што $u>1>v$. Тогаш $u+v=a$ и

$$2=u^{3}+v^{3}=(u+v)((u+v)^{2}-3uv)=a(a^{2}-3uv)\,,$$

па затоа $a \neq 0$ и тогаш $uv = \frac{a^3-2}{3a}$.

Според тоа, u и v се корени на квадратната равенка $f(t) = t^2 - at + \frac{a^3-2}{3a} = 0$.

Потребен и доволен услов овие броеви да се реални е $f(1) < 0$, т.е.

$$1 - a + \frac{a^3-2}{3a} < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a(a-2)(a^2 - a + 1) < 0 .$$

Но, $a^2 - a + 1 > 0$, па затоа последната неравенка е еквивалентна со неравенката $a(a-2) < 0$, од каде добиваме $a \in (0,2)$

10. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$(2+\sqrt{3})^x + (2a-1)(2-\sqrt{3})^x = a-3$$

има единствено решение.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$(2+\sqrt{3})^x + (2a-1)\frac{1}{(2+\sqrt{3})^x} = a-3$$

$$(2+\sqrt{3})^{2x} - (a-3)(2+\sqrt{3})^x + 2a - 1.$$

Воведуваме смена $(2+\sqrt{3})^x = t$ и ја добиваме равенката

$$t^2 - (a-3)t + 2a + 1 = 0 . \qquad (1)$$

Сега задачата се сведува на наожање на оние вредности на a за кои равенката (1) има точно едно позитивно решение.

1) Нека (1) има единствено решение. Тогаш $(a-3)^2 - 4(2a-1) = 0$, т.е. $a = 1$ или $a = 13$. Непосредно се проверува дека за $a = 1$ решението на (1) е $t = -1$, а за $a = 13$ решението е $t = 5$.
2) Нека (1) има две реални решенија. Лесно се проверува дека ако едното од нив е 0, т.е. ако $a = \frac{1}{2}$, тогаш другото е негативно. Така, останува да го разгледаме случајот кога едното решение на (1) е позитивно, а другото е негативно. Тоа е случајот кога

$$\begin{cases} (a-3)^2 - 4(2a-1) > 0 \\ 2a - 1 < 0 \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} a^2 - 14a + 13 > 0 \\ 2a - 1 < 0 \end{cases}$$

од каде добиваме $a \in (-\infty, \frac{1}{2})$.

Конечно, $a \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup \{13\}$.

11. Определи ги вредностите на реалниот параметар m за кои равенката

$$9^{x^2-x}-3^{x^2}m+9^x=0$$

има точно две реални решенија.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$9^{x^2-2x}-3^{x^2-2x}m+1=0\,.$$

Воведуваме смена $3^{x^2-2x}=t$ и ја добиваме равенката $t^2-mt+1=0$. Ја разгледуваме квадратната функција $f(t)=t^2-mt+1$ со дефинициона област $t\geq 3^{-1}$. За да е исполент условот на задачата имаме две можности:

Прв случај. $f(t)=0$ има две различни решенија t_1 и t_2, при што $t_1<\frac{1}{3}<t_2$. Тогаш $f(\frac{1}{3})<0$, т.е. $m>\frac{10}{3}$.

Втор случај. $f(t)=0$ има единствено реално решение $t_0>\frac{1}{3}$. Тогаш $D=m^2-4=0$ и $m>\frac{2}{3}$, т.е. $m=2$.

Конечно, $m\in(\frac{10}{3},+\infty)\cup\{2\}$.

12. Определи ги вредностите на реалниот параметар a при кои равенките

$$5^{2x-1}a+5^{x-1}|a-5|=1 \text{ и } 9^x+3^{x+1}=4$$

се едквивалентни.

Решение. Втората равенка ја запишуваме во видот $(3^x-1)(3^x+4)=0$ и како $3^x+4>0$, добиваме $3^x-1=0$, т.е. $x=0$. Според тоа, потребен услов е дадените равенки да се еквивалентни е $x=0$ да е решение на првата равенка. Заменуваме во првата равенка и добиваме $a+|a-5|=5 \Leftrightarrow a\leq 5$. За $a\leq 5$ првата равенка го добива видот

$$5^{2x-1}a+5^{x-1}(5-a)=1 \Leftrightarrow (5^x)^2a+5^x(5-a)-5=0 \Leftrightarrow (5^x-1)(5^xa+5)=0\,.$$

Ако $a\geq 0$ или $a=-5$, тогаш добиваме единствено решение $x=0$. Ако $a<0$ и $a\neq -5$, добиваме две различни решенија $x=0$ и $x=1-\log_5(-a)$. Конечно, бараните вредности за a се $[0,5]\cup\{-5\}$.

13. За кои вредности на реалниот параметар a равенката

$$8^{x^2-x+a^2}-2^{2x^2-x+2a^2-a+1}-2^{x^2-2x+a^2+a+2}+8=0$$

има точно три реални и различни решенија.

Решение. Имаме:

$$8^{x^2-x+a^2}-2^{2x^2-x+2a^2-a+1}-2^{x^2-2x+a^2+a+2}+8=0 \qquad \Leftrightarrow$$
$$(2^{2x^2-x+2a^2-a}-4)(2^{x^2-2x+a^2+a}-2)=0,$$

па затоа решенијата на дадената равенка се точно решенијата на секоја од равенките $2x^2 - x + 2a^2 - a = 2$ и $x^2 - 2x + a^2 + a = 1$. Според тоа, дадената равенка има три реални и различни решенија:

1) ако некоја од равенките има двоен коре, а другата равенка има две реални и различни решенија,
2) двете равенки имаат едно заедничко решение кое не е двоен корен за ниту една од равенките.

Првата равенка има двоен корен ако

$$D_1(a) = 1 - 8(2a^2 - a - 2) = 0 \text{, т.е. } a_1 = \tfrac{1+3\sqrt{2}}{4} \text{ или } a_2 = \tfrac{1-3\sqrt{2}}{4}.$$

Втората равенка има двоен корен ако

$$D_2(a) = 4 - 4(a^2 + a - 1) = 0 \text{, т.е. } a_3 = 1 \text{ или } a_4 = -2.$$

Ако втората равенка ја помножиме со 2 и ја одземеме од првата, добиваме дека равенките имаат заеднички корен $x = a$ за $a_5 = 1$ или $a_6 = -\frac{1}{2}$.

Останува да провериме кои од шесте најдени вредности за a се решенија на задачата. Бидејќи $a_3 = 1 = a_5$, во овој случај имаме само две решенија, бидејќи двојниот корен на втората равенка е решение и на првата равенка. Непосредно се проверува дека

$$D_2(a_1) < 0,\ D_2(a_2) > 0,\ D_1(a_4) < 0,\ D_1(a_6) > 0 \text{ и } D_2(a_6) > 0,$$

што значи дека само $a_2 = \frac{1-3\sqrt{2}}{4}$ и $a_6 = -\frac{1}{2}$ се решенија на задачата.

14. Реши ја равенката

$$\log_a(a^{2(x^2+x)} + a^2) = x^2 + x + \log_a(a^2+1),$$

каде a е реален параметар.

Решение. Јасно, $a > 0$ и $a \neq 1$. Очигледно $a^{2(x^2+x)} + a^2 = a^{x^2+x}(a^2+1)$. Ставаме $a^{x^2+x} = t$ и ја добиваме равенката $t^2 - (a^2+1)t + a^2 = 0$, чии решенија се 1 и a^2. За x ги добиваме соодветно равенките $x^2 + x = 0$ и $x^2 + x - 2 = 0$. Конечно, добиваме дека за секој $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ равенката има четири решенија $x = -2, -1, 0, 1$.

15. За кои вредности на реалниот параметар a равенката

$$\lg(ax+1) = \lg(x-1) + \lg(2-x)$$

има само едно решение?

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $ax + 1 = (x-1)(2-x)$ за $x \in (1,2)$, што е еквивалентно на $x^2 + (a-3)x + 3 = 0$. Според тоа, бараме вредности на a за кои равенката $f(x) = x^2 + (a-3)x + 3 = 0$ има точно едно решение во интервалот $(1,2)$. Ќе разгледаме четири случаи.

1) $f(1)f(2)<0$, што е еквивалентно со $(a+1)(2a+1)<0$, од каде следува $a\in(-1,-\frac{1}{2})$.
2) $f(1)=0$, т.е. $a=-1$ и тогаш $x_1=1, x_2=3$, па затоа $a=-1$ не е решение.
3) $f(2)=0$, т.е. $a=-\frac{1}{2}$ и тогаш $x_1=2, x_2=\frac{3}{2}$, што значи дека $a=-\frac{1}{2}$ е решение.
4) $D=0$, т.е. $(a-3)^2-12=a^2-6a-3=0$, од каде добиваме $a=3\pm2\sqrt{3}$. За $a=3+2\sqrt{3}$ имаме $x_1=x_2=-\sqrt{3}$, т.е. $a=3+2\sqrt{3}$ не е решение. За $a=3-2\sqrt{3}$ имаме $x_1=x_2=\sqrt{3}$, т.е. $a=3-2\sqrt{3}$ е решение.

Конечно, $a\in(-1,-\frac{1}{2}]\cup\{3-2\sqrt{3}\}$.

16. Определи ги сите вредности на реалниот парамтар a за кои равенката

$$\log_{x+a}(x+2a)=\frac{1}{2}$$

има единствено решение.

Решение. Множеството допустливи вредности е дадено со $x+a>0, x+a\neq1$ и $x+2a>0$. Во ова множество равенката е еквивалентна со равенката $\sqrt{x+a}=x+2a$. По квадрирањето ја добиваме равенката

$$f(x)=x^2+(4a-1)x+4a^2-a=0.$$

Последната равенка има реални решенија за $D=1-4a\geq0$, односно за $a\leq\frac{1}{4}$.

Ако $a=\frac{1}{4}$, добиваме единствено решение $x=0$, кое припаѓа на множеството допустливи вредсности.

Ако $D>0$ квадратната равенка има две решенија $x_1<x_2$. Ака за некое од овие решенија важи $x_i+a=1$, тогаш од $\sqrt{x_i+a}=x_i+2a$ следува дека $a=0$. Меѓутоа за $a=0$ ги добиваме решенијата $x_1=0$ и $x_2=1$, при што и двете решенија не се во множеството допустливи вредности.

Нека $a\neq0$. Бидејќи неравенствата $\frac{1-4a}{2}>-a$ и $\frac{1-4a}{2}>-2a$ се еквивалентни соодветно на $a\leq\frac{1}{2}$ и $1>0$, добиваме $x_2>-a$ и $x_2>-2a$, т.е. x_2 е решение.

Бидејќи $f(-a)=a^2>0$, заклучуваме дека x_1 не е решение кога $f(-2a)<0$, т.е. кога $a<0$.

Конечно, бараните вредности на a се $a<0$ и $a=\frac{1}{4}$.

17. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$\log_{ax}(3^x+4^x)=\log_{(ax)^2}(7^2(4^x-3^x))+\log_{(ax)^3}8^{x-1}$$

има решение.

Решение. Да ја решиме дадената равенка. Бидејќи условите $4^x-3^x>0$ и $ax>0$, т.е. $x>0$ треба да се исполнети истовремено за $a<0$ дадената равенка нема решение.

Ако $a>0, x>0, ax\neq 1$, тогаш дадената равенка е еквивалентна на

$$3^x+4^x=7\cdot 2^{x-1}\sqrt{4^x-3^x} \quad\Leftrightarrow\quad 45(\tfrac{4}{3})^{2x}-57(\tfrac{4}{3})^x-4=0 .$$

Воведуваме смена $y=(\frac{4}{3})^x$ и ја добиваме равенката $45y^2-57y-4=0$, чии решенија се $y_1=\frac{4}{3}$ и $y_2=-\frac{1}{15}$, од каде добиваме $x=1$. За да нема решение дадената равенка треба за $x=1$ да важи $ax=1$, што важи кога $a=1$.

Конечно, решение на задачата е $a\in(0,\infty)\setminus\{1\}$.

18. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$\lg(\lg(x^3+ax+1))=\lg(\lg(2x^3+a))$$

има точно едно решение.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$x^3+ax+1=2x^3+a>1. \qquad (1)$$

Од (1) последователно добиваме

$$x^3-ax+1-a=0,$$

$$(x-1)(x^2+x+1-a)=0.$$

Според тоа, $x=1$ е решение на (1), па затоа е решение на дадената равенка кога $2+a>1$, т.е. $a>-1$.

Равенката $x^2+x+1-a=0$ има реални решенија кога $1-4(1-a)\geq 0$, т.е. кога $a\geq\frac{3}{4}$. Ако некое од овие решенија е 1, тогаш $a=3$. Тогаш другото решение е -2 и тоа не е решение на почетната равенка, бидејќи $2(-2)^3+3=-13\leq 1$.

Ако и двете решенија се различни од 1, за нив треба да важи

$$2x^3\leq 1-a=-x^2-x\text{, т.е. } x(2x^2+x+1)\leq 0 .$$

Бидејќи $2x^2+x+1>0$, овие решенија треба да се непозитивни. Но, нивниот збие е еднаков на -1, а производот им е $1-a$, па затоа $a\leq 1$. Конечно, $a\in(-1,1]\cup\{3\}$.

19. Определи ги вредностите на реалниот параметар a кои равенката

$$\log_{4ax}(x-3a)+\tfrac{1}{2}\log_{x-3a}4ax=\tfrac{3}{2}$$

има точно две различни решенија.

Решение. Множеството допустливи вредности за x е определено со $4ax>0$, $4ax\neq 1$, $x-3a>0$ и $x-3a\neq 1$.

Воведуваме смена $t=\log_{4ax}(x-3a)$, со која дадената равенка се сведува на равенката $t+\frac{1}{2t}=\frac{3}{2}$. Решенијата на оваа равенка се $t_1=1$ и $t_2=\frac{1}{2}$. Сега од $\log_{4ax}(x-3a)=1$ добиваме $x_1=\frac{3a}{1-4a}$, $a\neq\frac{1}{4}$, а од $\log_{4ax}(x-3a)=\frac{1}{2}$ ја добиваме равенката $x^2-6ax+9a^2=4ax$ чии решенија се $x_2=9a$ и $x_3=a$. Според тоа, бараме вредности на a за кои меѓу броевите $x_1=\frac{3a}{1-4a}$ ($a\neq\frac{1}{4}$), $x_2=9a$ и $x_3=a$ има точно две различни решенија на дадената равенка. Јасно е дека $a\neq 0$. Ќе разгледаме два случаја.

1) Нека $a>0$. Тогаш $x_3-3a=-2a$, од каде следува дека x_1 и x_2 треба да се двете решенија. Според тоа, $x_1=\frac{3a}{1-4a}$ треба да припаѓа на допустливите вредности, па затоа
$$4ax_1=\frac{12a^2}{1-4a}>0,\ 4ax_1=\frac{12a^2}{1-4a}\neq 1,\ x_1-3a=\frac{12a^2}{1-4a}>0 \text{ и } x_1-3a=\frac{12a^2}{1-4a}\neq 1.$$
Оттука наоѓаме $a<\frac{1}{4}$ и $a\neq\frac{1}{6}$. Лесно се проверува дека за $a\neq\frac{1}{6}$ имаме $x_1\neq x_2$ и x_2 припаѓа на допустливите вредности. Конечно, во овој случај имаме $a\in(0,\frac{1}{6})\cup(\frac{1}{6},\frac{1}{4})$.

2) Нека $a<0$. $x_2-3a=6a<0$, од каде следува дека x_1 и x_3 треба да се двете решенија. Според тоа, $x_1=\frac{3a}{1-4a}$ треба да припаѓа на множеството допустливи вредности. На ист начин како и во претходниот случај добиваме $a\neq\frac{1}{2}$. Лесно се проверува дека за $a\neq\frac{1}{2}$ важи $x_1\neq x_3$ и x_3 е во допустливите вредности. Во овој случај имаме $a\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},0)$.

Според тоа, решение на задачата е $a\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},0)\cup(0,\frac{1}{6})\cup(\frac{1}{6},\frac{1}{4})$.

20. Определи ги сите вредности на парметарот a а кои равенката
$$a\sin^2 x-3\sin x\cos x+\cos^2 x=0$$
има две различни решенија во интервалот $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$.

Решение. Јасно, $\sin x\neq 0$. Воведуваме смена $y=\frac{\cos x}{\sin x}$ и ја добиваме равенката $y^2-3y+a=0$. Од $x\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$ следува $y\in(1,\sqrt{3})$. Бидејќи $1<\frac{3}{2}<\sqrt{3}$, условите равенката $f(y)=y^2-3y+a=0$ да има две решенија во интервалот $(1,\sqrt{3})$ се: $D>0$, $f(1)>0$ и $f(\sqrt{3})>0$. Оттука добиваме $a<\frac{9}{4}$, $a>2$ и

$a > 3\sqrt{3} - 3$. Значи, решение на задачата е $a \in (3\sqrt{3} - 3, \frac{9}{4})$.

21. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$\sin 2x \sin 4x - \sin x \sin 3x = a$$

има единствено решение во интервалот $[0, \pi)$.

Решение. Да забележиме дека ако α е решение на дадената равенка, тогаш $\pi - \alpha$ исто така е нејзино решение. Значи, ако $\alpha_0 \in [0, \pi)$ е единствено решение на равенката во интервалот $[0, \pi)$, тогаш $\alpha_0 = 0$ или $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$. Ако $t = \cos 2x$, тогаш равенката последователно е еквивалентна на

$$\begin{aligned}
&\cos 2x - \cos 6x - (\cos 2x - \cos 4x) = 2a,\\
&\cos 4x - \cos 6x = 2a,\\
&2t^2 - 1 - (4t^3 - 3t) = 2a,\\
&4t^3 - 2t^2 - 3t + 2a + 1 = 0,
\end{aligned}$$

За $\alpha_0 = 0$, добиваме $a = 0$ и добиваме $(t-1)(4t^2 + 2t - 1) = 0$. Квадратниот трином во заградите има две реални решенија во интервалот $(-1,1)$, па затоа $a = 0$ не е решение на задачата.

За $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ имаме $a = 1$ и добиваме $(t+1)(4t^2 - 6t + 3) = 0$. Квадратниот трином во заградите нема реални решенија, па затоа $a = 1$ е решение на задачата.

22. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$\sin(\sin x) = \cos(a \cos x)$$

има решение.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на севкупноста равенки

$$\sin x \pm a \cos x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} . \quad (1)$$

Левата страна на (1) прима вредности во интервалот $[-\sqrt{1+a^2}, \sqrt{1+a^2}]$, па затоа ги бараме оние вредности на a за кои $\sqrt{1+a^2} \geq \frac{\pi}{2}$. Според тоа, $|a| \geq \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1}$.

23. Дадена е равенката

$$\sin x + \cos x = \sin 2x + a ,$$

каде a е реален параметар.

а) За $a = 1$ во интервалот $[0, \pi]$ реши ја равенката.

б) Определи ја вредноста на a за која равенката има точно три решенија во интервалот $[0,\pi]$.

Решение. Воведуваме смена $t=\sin x+\cos x$ и дадената равенка ја запишуваме во видот $t^2-t+a-1=0$.

а) За $a=1$ решенијата на последната квадратна равенка се $t=0$ и $t=1$, од каде добиваме $\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ или 0. Според тоа, решијата на почетната равенка во интервалот $[0,\pi]$ се $0,\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{4}$.

б) Бидејќи $t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$, добиваме дека $t\in[-1,\sqrt{2}]$, при што на $t\in[-1,1)$ $\cup\{\sqrt{2}\}$ соодветствува една вредност на $x\in[0,\pi]$, а на $t\in[1,\sqrt{2})$ соодветствуваат две вредности $x\in[0,\pi]$.

Графикот на функцијата $f(t)=t^2-t+a-1$ е симетричен во однос на $t=\frac{1}{2}$, па затоа дадената равенка има точно три решенија во интервалот $[0,\pi]$ точно кога таа има решение во интервалот $[1,\sqrt{2})$. Добиваме $f(1)=0$ или $f(1)f(\sqrt{2})<0$, од каде добиваме $a\in(\sqrt{2}-1,1)$.

24. Определи ги сите целобројни вредности на параметарот a кои равенката
$$\sin x+a\sin 2x+\sin 5x=2a$$
има решение.

Решение. Имаме
$$2|a|=|\sin x+a\sin 2x+\sin 5x|\le|\sin x|+|a|\cdot|\sin 2x|+|\sin 5x|\le 2+|a|, \quad (1)$$
од каде добиваме $|a|\le 2$. Со непосредна проверка се добива дека $x=0$ е решение за $a=0$ и $x=\pm\frac{\pi}{2}$ се решенија за $a=\pm 1$.

За $a=2$ равенката го добива обликот $\sin x+2\sin 2x+\sin 5x=4$, па од (1) следува дека $\sin x=\sin 2x=\sin 5x=1$. Последното не е можно, бидејќи за $\sin x=1$ имаме $\cos x=0$, па затоа $\sin 2x=2\sin\cos x=0$.

За $a=-2$, равенката го добива видот $\sin x-2\sin 2x+\sin 5x=-4$ и од (1) следува дека $\sin x=\sin 5x=-1$ и $\sin 2x=1$, што не е можно бидејќи за $\sin x=-1$ имаме $\cos x=0$, па затоа $\sin 2x=2\sin x\cos x=0$.

25. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката
$$a(\sin 2x+1)+1=(a-3)(\sin x+\cos x)$$
има решение.

Решение. Дадента равенка ќе ја запишеме во видот
$$2ay^2-\sqrt{2}(a-3)y+1=0 \quad (1)$$
каде $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)=\sin(x+\frac{\pi}{4})\in[-1,1]$. Јасно, дадената равенка има ре-

шение ако и само ако равенката (1) има решение во интервалот $[-1,1]$.

За $a=0$, равенката (1) е линеарна со решение $y=-\frac{\sqrt{2}}{6}\in[-1,1]$, па затоа почетната равенка има решение.

Нека $a\neq 0$. Квадратниот трином $f(y)=2ay^2-\sqrt{2}(a-3)y+1$ има точно еден корен во интервалот $[-1,1]$ или се анулира на границата на овој интервал ако и само ако $f(1)f(-1)\leq 0$. Оттука добиваме $a\in[-\frac{7\sqrt{2}+8}{2},0)\cup(0,\frac{7\sqrt{2}-8}{2}]$.

Квадратниот трином $f(y)=2ay^2-\sqrt{2}(a-3)y+1$ има два корена во интервалот $(-1,1)$ ако и само ако

$$\begin{cases} af(-1)>0 \\ af(1)>0 \\ D=2a^2-20a+18\geq 0 \\ -1<\frac{\sqrt{2}(a-3)}{4a}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(-\infty,0)\cup(\frac{7\sqrt{2}-8}{2},\infty) \\ a\in(-\infty,-\frac{7\sqrt{2}+8}{2})\cup(0,\infty) \\ a\in(-\infty,1]\cup[9,\infty) \\ a\in(-\infty,-\frac{3+6\sqrt{2}}{7})\cup(\frac{6\sqrt{2}-3}{7},\infty). \end{cases}$$

Затоа, $a\in(-\infty,-\frac{7\sqrt{2}+8}{2})\cup(\frac{7\sqrt{2}-8}{2},1]\cup[9,\infty)$.

Конечно, $a\in(-\infty,1]\cup[9,\infty)$.

26. Дадена е равенката

$$5-4\sin^2 x-8\cos^2\frac{x}{2}=3m.$$

а) Решија равенката за $m=0$.

б) Определи ги сите целобројни вредности на параметарот m за кои равенката има решение.

Решение. а) Заменуваме $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ и $2\cos^2\frac{x}{2}=1+\cos x$ и ја добиваме равенката $4\cos^2 x-4\cos x-3=0$. Ставаме $\cos x=t$ и ја добиваме квадратната равенка $4t^2-4t-3=0$, чии решенија се $t_1=\frac{3}{2}>1$ и $t_2=-\frac{1}{2}$. Значи, $\cos x=-\frac{1}{2}$, т.е. $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) Како во решението под а) добиваме $4\cos^2 x-4\cos x-3(m+1)=0$. Бараме целобројни вредности на m за кои равенката $f(t)=4t^2-4t-3(m+1)=0$ има решение во интервалот $[-1,1]$. Бидејќи графикот на функцијата $f(t)$ е симетричен во однос на оската на симетрија $t=\frac{1}{2}$, добиваме дека $f(t)=0$ има решение во $[-1,1]$ ако и само ако $D\geq 0$ и $f(-1)\geq 0$. Сега од $D=16(4+3m)$ и $f(-1)=5-3m$

добиваме $m \in [-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}]$, па затоа бараните целобројни вредности за m се $m = -1, 0, 1$.

27. Определи ги сите рални броеви x, y, z за кои
$$a(\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z) + 2(1-a)(\cos x + \cos y + \cos z) + 6 = 9a,$$
каде a е целоброен параметар.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката
$$a(\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z) + (1-a)(\cos x + \cos y + \cos z) + 3 - 6a = 0.$$
Да ја разгледаме функцијата $f(t) = t^2 + (1-a)t + 1 - 2a$, за $t \in [-1,1]$. Решенијата на квадратната равенка $f(t) = 0$ се $t\ = -1$ и $t_2 = \frac{2a-1}{a}, a \neq 0$. Можни се три случаи.

1) $a < 0$. Имаме $\frac{2a-1}{a} > 1$ и од својствата на квадратната фуннкција заклучуваме дека $f(t) \geq 0$ за секој $t \in [-1,1]$, при што $f(t) = 0$ ако и само ако $t = -1$.
2) $a = 0$. Имаме $f(t) = t + 1$ за секој $t \in [-1,1]$, при што $f(t) = 0$ ако и само ако $t = -1$.
3) $a > 0$. Бидејќи a е цел број, имаме $a \geq 1$. Сега $\frac{2a-1}{a} \geq 1$, при што равенство важи за $a = 1$. Од графикот на $f(t)$ се гледа дека $f(t) \geq 0$ за секој $\frac{2a-1}{a} > 1$, при што $f(t) = 0$ за $t = -1$ кога $a > 1$ и $f(t) = 0$ за $t = \pm 1$ кога $a = 1$.

Разгледуваната равенка има вид $f(\cos x) + f(\cos y) + f(\cos z) = 0$, па затоа од претходните разгледувања следува дека нејзините решенија се:

- Ако $a \in \mathbb{Z}, a \neq 1$, тогаш $\cos x = \cos y = \cos z = -1$, од каде добиваме дека $x = (2k+1)\pi,\ y = (2l+1)\pi$ и $z = (2m+1)\pi$, каде $k, l, m \in \mathbb{Z}$.
- Ако $a = 1$, тогаш покрај горните решенија имаме $\cos x = \cos y = \cos z = 1$, т.е. $x = 2k\pi,\ y = 2l\pi$ и $z = 2m\pi$, каде $k, l, m \in \mathbb{Z}$.

28. За кои вредности на реалниот параметар a равенката
$$\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{9}{x} = a$$
има позитивно реално решение.

Решение. Нека $f(x) = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{9}{x}$. Нека претпоставиме дека $f(x) = a$ за некој $x > 0$. Јасно, $a < 2$. Имено, ако $a = 2$, тогаш $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ и $\frac{9}{x} = 2l\pi$ за некои $k, l \in \mathbb{Z}$, од каде добиваме $\pi^2 = \frac{9}{2l(4k+1)}$, што е противречност. Понатаму, $\sin\frac{x}{2}>0$ за $0<x<2\pi$ и $\cos\frac{9}{x}>0$ за $x>\frac{18}{\pi}$. Бидејжи $2\pi>\frac{18}{\pi}$ добиваме дека $a>-1$.

Обратно, ќе докажеме дека ако $a\in(-1,2)$, тогаш $f(x)=a$ за некој $x>0$. Нека $b_n=\pi+4n\pi$ и $c_n=\frac{9}{(2n+1)\pi}$. Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)=2$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n)=-1$, следува дека постои $n\in\mathbb{N}$ таков што $f(c_n)<a<f(b_n)$. Сега, од теоремата на Болцано-Ваерштрас следува дека $f(x)=a$ за некој $x\in(c_n,b_n)$.

29. Определи ги сите природни броеви n такви што за секој x е исполнето равенството

$$(\sin x)^{2n}+(\cos x)^{2n}+n\sin^2 x\cos^2 x=1. \qquad (1)$$

Решение. За $x=\frac{\pi}{4}$ даденото равенство го добива видот $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{n}{4}=1$ и добиваме $1+(n-4)2^{n-3}=0$. Ако $n\geq 4$, тогаш $1+(n-4)2^{n-3}>0$, па затоа равенството не е исполнето.

За $n=2$ имаме

$$\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=1,$$

т.е. даденото равенство е исполнето за секој реален број x.

За $n=3$ имаме

$$\begin{aligned}\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x&=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)\\&=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3=1,\end{aligned}$$

т.е. даденото равенство е исполнето за секој реален број x.

Јасно, $n=1$ не е решение на задачата, бидејќи во тој случај (1) го прима видот

$$\sin^2 x+\cos^2 x+\sin^2 x\cos^2 x=1,\text{ т.е. } \sin^2 x\cos^2 x=0,$$

а последното равенство не е исполнето на пример за $x=\frac{\pi}{4}$.

Конечно, бараните природни броеви се $n=2$ и $n=3$.

30. Определи ги целобројните вредности на параметарот a за кои постои x таков што $\sin^6 x+\cos^6 x=a\sin x\cos x$ и $\sin 2x$ е рационален број.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\sin^6 x+\cos^6 x&=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)\\&=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\\&=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x\\&=1-3\sin^2 x\cos^2 x.\end{aligned}$$

Земаме $y = \sin x \cos x$ и добиваме $3y^2 + ay - 1 = 0$. Бидејќи

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2y,$$

заклучуваме дека y треба да е рационален број. Последното значи дека дискриминантата на равенката $3y^2 + ay - 1 = 0$ треба да е точен квадрат. Според тоа, $a^2 + 12 = t^2$, т.е. $(t-a)(t+a) = 12$. Броевите $t+a$ и $t-a$ се со иста парност, па лесно се добиваат решенијата $t = \pm 4,\ a = \pm 2$.

Конечно, бараните вредности за параметарот a се $a = \pm 2$.

31. Дадена е равенката

$$2^{\sin^2 x} a + 4^{\cos^2 x} = 2a + 1,$$

каде a е реален параметар.

а) Докажи дека равенката има решение за секоја вредност на параметарот a.

б) Определи ги вредностите на a за кои равенката има точно едно решение во интервалот $(0, \frac{\pi}{2})$.

Решение. а) За $x = \frac{\pi}{2}$ имаме $\sin x = 1$ и $\cos x = 0$, па затоа

$$2^{\sin^2 x} a + 4^{\cos^2 x} = 2^1 a + 4^0 = 2a + 1.$$

б) Ако искористиме дека $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ и ја воведеме смената $y = 2^{\sin^2 x}$, тогаш ја добиваме равенката

$$ay^3 - (2a+1)y^2 + 4 = 0,$$

која е еквивалентна на равенката

$$(y-2)(ay^2 - y - 2) = 0.$$

Од $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ следува $\sin^2 x \in (0,1)$, па затоа $y \in (1,2)$. Решението $y = 2$ не припаѓа на разгледуваниот интервал. Ако равенката $f(y) = ay^2 - y - 2 = 0$ има единствено решение во инетрвалот $(1,2)$, тогаш или $D = 0$ и $\frac{1}{2a} \in (1,2)$ или $f(1)f(2) < 0$ или $f(1)f(2) = 0$.

Првиот услов не дава решение, бидејќи $D = 0$ за $a = -\frac{1}{8}$ и тогаш $\frac{1}{2a} \notin (1,2)$.

Од вториот услов добиваме $(a-3)(a-1) < 0$, т.е. $a \in (1,3)$.

Третиот услов не дава решение, бидејќи тогаш второто решение не е во интервалот $(1,2)$.

32. Определи ги сите природни броеви n за кои равенката

$$\log_n(\sin \pi x) = \sin^2(\log_n x^{\pi}) \qquad (1)$$

има реални решенија.

Решение. Бидејќи $\sin \pi x \leq 1$, заклучуваме дека

$$\log_n(\sin \pi x) \leq 0 \leq \sin^2(\log_n x^{\pi}) .$$

Според тоа, од (1) следува дека $\sin \pi x = 1$, т.е. $x = \frac{2k+1}{2}$ и $\log_n x^{\pi} = m\pi$, каде $k, m \in \mathbb{Z}$. Оттука добиваме $\frac{2k+1}{2} = n^m$ и сега лесно се добива $k = 0, n = 2$ и $m = -1$.

II.4. СИСТЕМИ ПАРАМЕТАРСКИ РАВЕНКИ

1. Системот равенки

$$\begin{cases} ax + by = 24a - 4b \\ (c-25)x + cy = 1 - a \end{cases}$$

има бесконечно многу реални решенија. Определи ги вредностите на реалните параметри a, b, c ако едно од решенијата на системот е $(x, y) = (4, 2016)$.

Решение. По заменување на вредностите $(x, y) = (4, 2016)$ во системот од првата равенка добиваме $a = 101b$, а од втората $c = \frac{1-b}{20}$. Сега системот го прима видот

$$\begin{cases} b(101x + y) = 2420b \\ (-b - 499)x + (1-b)y = 20 - 2020b. \end{cases}$$

Разгледуваме два случаја

Прв случај. $b = 0$. Тогаш системоит го прима видот

$$\begin{cases} 0x + 0y - 0 \\ -499x + y = 20 \end{cases}$$

и очигледно тој има бесконечно многу решенија. За параметрите добиваме $a = b = 0$ и $c = \frac{1}{20}$.

Втор случај. $b \neq 0$. Тогаш системот го прима видот

$$\begin{cases} 101x + y = 2420 \\ (-b - 499)x + (1-b)y = 20 - 2020b. \end{cases}$$

Од првата равенка наоѓаме $y = 2420 - 101x$ и по замената во втората равенка и средувањето на истата добиваме $(b-6)x = 4(b-6)$. Последната равенка има бесконечно многу решенија за $b = 6$. Притоа, за параметрите добиваме $a = 606, b = 6$ и $c = -\frac{1}{4}$.

2. Најди ги сите вредности на параметарот a, за кои што системот

$$\begin{cases} x+4|y|=|x| \\ |y|+|x-a|=1 \end{cases}$$

има точно две решенија.

Решение. Нека (x,y) е решение на системот за кое $x\geq 0$. Тогаш $y=0$ и $|x-a|=1$, т.е. $x=a\pm 1$. Јасно, ако $a\geq 1$, тогаш системот има две решенија за кои $x\geq 0$. Тоа се $(a-1,0)$ и $(a+1,0)$. Ако $-1\leq a<1$ тогаш системот има едно решение за кое $x\geq 0$ и тоа (a + 1,0). Ако $a<-1$, тогаш системот нема решение за секое $x\geq 0$.

Нека $x<0$. Тогаш $|y|=-\frac{x}{2}$ и затоа $|x-a|=1+\frac{x}{2}$. Од $|x-a|\geq 0$ следува $1+\frac{x}{2}\geq 0$, т.е. $x\geq -2$. Значи за $x\geq a$, $x-a=1+\frac{x}{2}$ од што добиваме $x=2(a+1)$ и за $x<a$, $x-a=-1-\frac{x}{2}$ од што добиваме $x=\frac{2}{3}(a-1)$. Од $-2\leq 2(a+1)<0$ добиваме $-2\leq a<-1$, а од $-2\leq \frac{2}{3}(a-1)<0$, соодветно $-2\leq a<1$. Очигледно ако (x,y) е едно решение на системот за кое $x<0$, тогаш $y\neq 0$ и затоа $(x,-y)$ исто така е решение на системот. Од претходно изнесеното следува дека за $a<-2$ системот нема решение. Ако $a=-2$, тогаш системот има точно две решенија и тоа $(-2,\pm 1)$. Ако $-2<a<-1$, тогаш $2(a+1)\neq \frac{2}{3}(a-1)$, а бидејќи и двете вредности за x даваат решенија ќе имаме четири решенија на системот за кои $x<0$.

Според тоа, системот има две решенија само ако $a\geq 1$ и тие се $(a-1,0)$ и $(a+1,0)$ и ако $a=-2$ тие се $(-2,\pm 1)$.

3. Определи ги целобројните вредности на параметарот a, за кои системот

$$\begin{cases} a(x-y-3)=5-x-2y \\ a(x+y-3)=2y+3-x \end{cases}$$

има целобројни решенија.

Решение. За $a\neq -1$ и $a\neq 2$ решение на системот е

$$x=\frac{3a+4}{a+1} \text{ и } y=\frac{1}{2-a}.$$

За $a=-1$ или $a=2$ системот нема решение. Бидејќи решенијата на системот се

$$x=\frac{3a+4}{a+1}=3+\frac{1}{a+1} \text{ и } y=\frac{1}{2-a},$$

па за x да е цел број треба $\frac{1}{a+1}$ да е цел број, а тоа е можно ако $a+1=1$ или $a+1=-1$, односно $a=0$ или $a=-2$. Слично, за да y е цел број треба $2-a=1$ или $2-a=-1$, т.е. $a=1$ или $a=3$. Конечно $a\in\{0,-2\}\cap\{1,3\}=\varnothing$ па не постои цел број a за кој истовремено x и y се цели броеви.

4. Даден е системот

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2+2 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a, \end{cases}$$

каде a е реален параметар.

а) Реши го системот за $a=0$.

б) Определи ги сите вредности на параметарот a за кои системот има точно две решенија.

Решение. а) Ако $a=0$, тогаш $x=-y$ и затоа $2x^2=2$. Оттука добиваме $(x,y)=(1,-1)$ или $(x,y)=(-1,1)$.

б) Од а) следува дека $a=0$ е едно решение. Ако $a\neq 0$ ставаме $x+y=p$ и $xy=q$ и добиваме $p=aq$ и $p^2-2q=a^2+2$. Оттука добиваме

$$a^2q^2-2q-a^2-2=0,$$

па затоа $(p,q)=(-a,-1)$ или $(p,q)=(\frac{a^2+2}{a},\frac{a^2+2}{a^2})$. Очигледно двата пара се различни. Првиот случај $x+y=-a$ и $xy=-1$ доведува до квадратната равенка $z^2+az-1=0$, која има две реални и различни решенија z_1 и z_2. Значи, $(x,y)=(z_1,z_2)$ и $(x,y)=(z_2,z_1)$ се решенија на дадениот систем. Така, задачата се сведува на наоѓање на вредностите на a за кои вториот случај не е можен. Тоа значи дека дискриминантата на квадратната равенка

$$z^2-\frac{a^2+2}{a}z+\frac{a^2+2}{a^2}=0$$

е негативна. Според тоа, $a\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})\setminus\{0\}$. Конечно, $a\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

5. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои системот равенки

$$\begin{cases} x^2+2ax-a^2+2=0 \\ y^2+y-x=0 \end{cases}$$

има точно две решенија.

Решение. Дискриминантата на $y^2+y-x=0$ како квадратна равенка по y е $D=1+4x$. Лесно се гледа гледа дека условот на задачата е еквивалентен на тоа да се определат сите a за кои равенката $x^2+2ax-a^2+2=0$ има точно едно решение во интервалот $[-\frac{1}{4},+\infty)$ и тоа е различно од $-\frac{1}{4}$.

Нека $f(x)=x^2+2ax-a^2+2=0$. Ќе разгледаме два случаја.

Прв случај. Имаме

$$f(-\tfrac{1}{4})<0 \quad \Leftrightarrow \quad 16a^2+8a-33>0 \quad \Leftrightarrow \quad a\in(-\infty,\tfrac{-1-\sqrt{34}}{4})\cup(\tfrac{-1+\sqrt{34}}{4},+\infty)\,.$$

Втор случај. Имаме

$$D=0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad a=\pm 1\,.$$

Ако $a=1$, равенката е $x^2+2x+1=0$ и има двоен корен $x_1=x_2=-1$, т.е. $a=1$ не е решение. Ако $a=-1$, равенката е $x^2-2x+1=0$ и има двоен корен $x_1=x_2=1$, т.е. $a=-1$ е решение.

Конечно, решението на здачата е $a\in(-\infty,\frac{-1-\sqrt{34}}{4})\cup\{-1\}\cup(\frac{-1+\sqrt{34}}{4},+\infty)$.

6. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+a=y+b \\ x^3+a^3=y^3+b^3 \end{cases}$$

каде $a\neq 0, b\neq 0$ се реални параметри.

Решение. Втората равенка на системот ја запишваме во видот

$$(x+a)((x+a)^2-3ax)=(y+b)((y+b)^2-3yb)\,.$$

Ако $x+a=0$, го добиваме решението $(x,y)=(-a,-b)$. Ако $x+a\neq 0$, тогаш $y+b\neq 0$ и добиваме $(x+a)^2-3ax=(y+b)^2-3yb$, односно $ax=by$. Значи, $y=\frac{ax}{b}$ и ако замениме во парвата равенка добиваме $x(1-\frac{a}{b})=b-a$. Ако $a=b$, тогаш системот има бесконечно многу решенија $(x,y)=(c,c), c\in\mathbb{R}$, а ако $a\neq b$ системот има решение $(x,y)=(b,a)$.

7. Даден е системот

$$\begin{cases} x-y=a-1 \\ xy=a^2-a-3 \end{cases}$$

каде a е реален параметар. Нека (x,y) е решение на (1). Определи ја најмалата вредност на изразот x^2+y^2 и вредноста на a за која таа се достигнува.

Решение. Бидејќи $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$, добиваме $x^2+y^2=3a^2-4a-5$, и тоа е квадратна функција во однос на параметарот a. Минимумот на функцијата $f(a)=3a^2-4a-5$ е еднаков на $-\frac{19}{3}$ и тој се достигнува за $a=\frac{2}{3}$. Од друга страна, треба да го определиме допустливото множество вредности за a, при што системот има реални решенија и да го определиме локалниот минимум на $f(a)$ на тоа множество. Од првата равенка имаме $x=1-a+y$ и ако замениме во втората ја добиваме квадратната равенка

$$y^2+(1-a)y-(a^2-a-3)=0,$$

која треба да има реални решенија, што значи

$$D=5a^2-6a-11=(5a-11)(a+1)\geq 0,$$

т.е. $a\in(-\infty,-1]\cup[\frac{11}{5},+\infty)$. Допустливото множество вредности за a е симетрично во однос на $a=\frac{2}{3}$ (Зошто?) и како $\frac{2}{3}\notin(-\infty,-1]\cup[\frac{11}{5},+\infty)$ и важи $\frac{2}{3}+1>\frac{11}{5}-\frac{2}{3}$ заклучуваме дека функцијата $f(a)$ на тоа множество својот минимум го достигнува во $a=\frac{11}{5}$ и притоа $f(\frac{11}{5})=\frac{18}{25}$. Во овој случај $x=-\frac{3}{5}$, $y=\frac{3}{5}$.

8. Определи ги вредностите на реалниот параметар m за кои системот

$$\begin{cases}(x+m+2)^2+y^2=1\\ y^2=2mx\end{cases}$$

има четири различни решенија.

Решение. Лесно се проверува дека $m=0$ не е решение на задачата, па затоа од втората равенка имаме $x=\frac{y^2}{2m}$. Заменуваме во првата равенка и добиваме биквадратна равенка, од која со замена $y^2=t$ ја добиваме соодветната квадратна равенка $(\frac{t}{2m}+m+2)^2+t-1$. За да системот има четири различни решенија, последната равенка, која е еквивалентна на равенката

$$t^2+8m(m+1)t+4m^2(m+1)(m+3)=0$$

треба да има две реални и различни позитивни решенија. Решенијата се реални ако и само ако ,

$$D=64m^2(m+1)^2-16m^2(m+1)(m+3)=16m^2(m+1)(3m+1)>0,$$

од каде добиваме $m\in(-\infty,-1)\cup(-\frac{1}{3},+\infty)$. Двете решенија се позитивни ако и само ако

$$4m^2(m+1)(m+3)>0\Leftrightarrow m\in(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)\ \text{и}$$

$$8m(m+1)<0\Leftrightarrow m\in(-1,0).$$

Конечно, бараните вредности на m се $m\in(-\frac{1}{3},0)$.

9. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои системот равенки

$$\begin{cases}x^3=ax+y\\ y^3=x+ay\end{cases}$$

има единствено реално решение.

Решение. Бидејќи $x=0,\ y=0$ е решение за секој a, задачата се сведува на тоа системот да нема други реални решенија. Ако прво ги одземеме, а потоа ги собереме равенките на системот го добиваме еквивалентниот систем

$$\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2)=(a-1)(x-y)\\(x+y)(x^2-xy+y^2)=(a+1)(x+y)\end{cases}\qquad(1)$$

Ако $y=x$, тогаш (1) се сведува на $2x^3=2(a+1)x$. Оттука следува $x=0$ (и $y=0$) или $x^2=a+1$. Последната равенка нема ненулти решенија само за $a\le -1$.

Ако $y=-x$, тогаш (1) се сведува на $2x^3=2(a-1)x$. Оттука следува $x=0$ (и $y=0$) или $x^2=a-1$. Последната равенка нема ненулти решенија само за $a\le 1$.

Ако $y\ne \pm x$, тогаш сисемот (1) е еквивалентен со системот

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2=a-1\\x^2-xy+y^2=a+1.\end{cases}\qquad(2)$$

Ако ги собереме равенките на (2) добиваме $x\ \ +y^2=a$ и оваа равенка нема ненулти решенија за $a\le 0$.

Од досегашните разгледувања следува дека системот нема ненулти решенија ако истовремено важи $a\le -1$, $a\le 1$ и $a\le 0$, односно ако $a\le -1$.

10. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои системот

$$\begin{cases}x^2-2y-2z=a\\y^2-2z-2x=a\\z^2-2x-2y=a\end{cases}$$

има барем едно реално решение.

Решение. Ако ги собереме равенките на системот, последователно добиваме

$$x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z=3a$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=3a+12.$$

Според тоа, $3a+12\ge 0$, т.е. $a\ge -4$ е потребен услов за да дадениот систем има барем едно реално решение. Последниот услов е и доволен, бидејќи за $a\in[-4,+\infty)$ системот има реално решение $x=y=z=2+\sqrt{a+4}$.

11. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+ay^2+a^2z^2=a^2 \\ x+by^2+b^2z^2=b^2 \\ x+cy^2+c^2z^2=c^2 \end{cases}$$

каде $a,b,c\ (a\neq b\neq c\neq a)$ се реални параметри.

Решение. Ако еден од параметрите, на пример a, е еднаков на 0. Тогаш од првата равенка следува $x=0$, а од другите две равенки добиваме

$$\begin{cases} y^2+bz^2=b \\ y^2+cz^2=c, \end{cases}$$

од каде следува $y^2=0$ и $z^2=1$, т.е. $y=0, z=\pm1$.

Сега, нека $abc\neq 0$. Тогаш ако од трите равенки го изразиме z^2-1 го добиваме системот $\frac{x+ay^2}{a^2}=\frac{x+by^2}{b^2}=\frac{x+cy^2}{c^2}$. Според тоа,

$$\begin{cases} x(b^2-a^2)+ab(b-a)y^2=0 \\ x(c^2-a^2)+ac(c-a)y^2=0 \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} x(a+b)+aby^2=0 \\ x(a+c)+acy^2=0. \end{cases}$$

Во последниот систем првата равенка ја множиме со c, втората со b и ако добиените равенки ги одземеме ја добиваме равенката $ax(c-b)=0$, па затоа $x=0$. Тогаш $y=0$ и $z=\pm1$, т.е. повторно го добиваме решението (x,y,z).

12. Даден е системот

$$\begin{cases} (a^2-90a+2016)(|x|+1)=y-9-8|x| \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

каде a е реален параметар. Определи ги сите вредности на a за кои системот има единствено решение.

Решение. Бидејќи системот не се менува ако x се замени со $-x$, заклучуваме дека тој има единствено решение ако и само ако $x=0$. Тогаш од втората равенка добиваме $y=\pm1$ и ги добиваме равенките

$$a^2-90a+2016=-8 \text{ и } a^2-90a+2016=-10.$$

Втората равенка нема реални решенија, а од првата добиваме $a=44$ и $a=46$. За добиените вредности на a системот го добива видот

$$\begin{cases} -8(|x|+1)=y-9-8|x| \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Тогаш $x=0, y=1$ е единствено решение на системот.

13. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои системот

$$\begin{cases} 2x^2 + x(2y+3) - y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

има точно три реални решенија.

Решение. Првата равенка можеме да ја запишеме во видот

$$(x+y+2)(2x-1) = 0 .$$

Според тоа, решенијата на дадениот систем е унијата од решенијата на двата системи

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x^2+y^2=a, \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} 2x-1=0 \\ x^2+y^2=a. \end{cases} \qquad (2)$$

За системот (1) имаме $x=-y-2$ и ако замениме во втората равенка добиваме $2y^2+4y+4-a=0$. Дискриминантата на последната равенка е $D=8(a-2)$, па добиваме дека равенката (а со тоа и системот): нема решение за $a<2$, има единствено решение за $a=2$ и има точмно две решенија за $a>2$.

За системот (2) имаме $x=\frac{1}{2}$ и ако замениме во втората равенка добиваме $y=\pm\sqrt{a-\frac{1}{4}}$. Според тоа, вториот системот: нема решение за $a<\frac{1}{4}$, има единствено решение за $a=\frac{1}{4}$ и има точмно две решенија за $a>\frac{1}{4}$.

За да дадениот систем има точмнно три реални решенија потребно е да е исполнет еден од следниве услови:

1) Системот (1) има едно решение, а системот (2) има две решенија, при што трите решенија се различни. Овој случај е можен за $a=2$. Тогаш решение нма првиот систем е $(1,1)$, а на вториот систем се $(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{7}}{2})$.
2) Системот (1) има две решенија, а системот (2) има едно решение, при што трите решенија се различни. Овој случај не е можен, бидејќи системот (2) има едно решение за $a=\frac{1}{4}$, а тогаш системот (1) нема решенија.
3) Системите (1) и (2) имаат по две решенија при што имаат заедничко решение. Бидејќи како за секое решение на системот (2) имаме $x=\frac{1}{2}$, ќе го определиме a за кое системот (1) има решение во кое $x=\frac{1}{2}$. Тогаш $y=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{3}$, па од втората равенка добиваме $a=\frac{13}{2}$. За $a=\frac{13}{2}$ решението $(x,y)=(\frac{1}{2},-\frac{5}{2})$ е заедничко за системите (1) и (2) и дадениот систем има точно три решенија.

Значи, за $a=2$ и $a=\frac{13}{2}$ дадениот систме има точно три решенија.

III ПАРАМЕТАРСКИ НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМИ НЕРАВЕНКИ

1. Дадена е неравенката

$$|x^2-5x+6|\leq x+a,$$

каде a е реален параметар.

а) Реши ја неравенката за $a=0$.

б) Определи ги сите вредности на параметарот a за кои неравенката има точно три целобројни решенија.

Решение. а) Јасно, $x\geq 0$. Ќе разгледаме два случаја. Ако $x\in[0,2]\cup[3,+\infty)$, тогаш неравенката го добива видот $x^2-6x+6\leq 0$, од каде добиваме $x\in[3-\sqrt{3},3+\sqrt{3}]$. Според тоа, решенија во разгледуваниот интервал се $[3-\sqrt{3},2]\cup[3,3+\sqrt{3}]$. Ако $x\in(2,3)$, тогаш равенката го добива видот $x^2-4x+6\geq 0$ и ова важи за секој $x\in(2,3)$. Конечно решенија на дадената неравенка се $x\in[3-\sqrt{3},3+\sqrt{3}]$.

б) Ако неравенката $|x^2-5x+6|\leq x+a$ има три целобројни решенија, тогаш таа треба да три целобројни решнија во унијата на интервалите $(-\infty,2]$ и $[3,+\infty)$. На унијата на овие интервали таа е еквивалентна со неравенката $x^2-6x+6-a\leq 0$. Дискриминантата е ненегативна кога $a\geq -3$ и тогаш $x\in[3-\sqrt{a+3},3+\sqrt{a+3}]$. Овојинтервал го содржи бројот 3 и е симетричен во однос на него. Според тоа, тој содржи точно три цели броја кога $1\leq\sqrt{a+3}<2$, т.е. кога $a\in[-2,1)$.

2. Определи ги сите вредности на реалните параметри a и b за кои неравенката

$$2|x^2+ax+b|>1$$

има решенија во интервалот $[1,3]$.

Решение. Да означиме $f(x)=x^2+ax+b$. Прво ќе докажеме дека апсцисата на теметото на параболата $f(x)$ припаѓа на интервалот $[1,3]$.

Ако $-\frac{a}{2}<1$, т.е. $a>-2$, тогаш условот е еквивалентен со $2f(1)\geq -1$ и $2f(3)\leq 1$, од каде добиваме $a+2a+2b\geq -1$ и $18+6a+2b\leq 1$. Според тоа, $-2a-3\leq 2b\leq -6a-17$, па затоа $-2a-3\leq -6a-17$, т.е. $a\leq -\frac{7}{2}$, што противречи на $a \geq -2$. Аналогно се добива дека неравенството $-\frac{a}{2} > 3$ кое е еквивалентно со неравенството $a < -6$ доведува до неравенството $a \geq -\frac{9}{2}$, што повторно е противречност.

Ако $-\frac{a}{2} \in [1,3]$, тогаш условот е еквивалентен со $2f(1) \leq 1$, $2f(3) \leq 1$ и $2f(-\frac{a}{2}) \geq -1$, т.е. со

$$1 + a + b \leq \frac{1}{2}, 9 + 3a + b \leq \frac{1}{2} \text{ и } b - \frac{a^2}{4} \geq -\frac{1}{2}.$$

Од првата и третата неравенка добиваме $\frac{a^2}{4} - \frac{1}{2} \leq b \leq -a - \frac{1}{2}$ и затоа $a^2 + 4a \leq 0$, т.е. $a \in [-4,0]$. Аналогно, од втората и третата неравенка имаме $\frac{a^2}{4} - \frac{1}{2} \leq b \leq -3a - \frac{17}{2}$ и затоа $a^2 + 12a + 32 \leq 0$, т.е. $a \in [-8,-4]$. Значи, $a = -4$ е единствената можност, па така за b наоѓаме $b = \frac{7}{2}$.

3. Определи ги вредностите на параметарот a за кои за секој реален број x важи

$$x^3 + a^3 \leq (x+a)^3 - 3a(x-1)^2.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$3a^2x + 6ax - 3a \geq 0,$$

т.е. со неравенството

$$a((a+2)x - 1) \geq 0.$$

За $a = 0$ последното неравенство важи за секој $x \in \mathbb{R}$, а ако $a > 0$, го добиваме неравенството $(a+2)x \geq 1$, кое не е точно на пример за $x = -1$. За $a < 0$ добиваме $(a+2)x \leq 1$ и ова неравенство е точно за секој $x \in \mathbb{R}$ само ако $a = -2$.

4. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои неравенката

$$a^2x^4 - (4a-1)x^2 + 7 < 0$$

има решение.

Решение. Очигледно при $a = 0$ неравенката нема решение.

Нека $a \neq 0$. Да ја разгледаме функцијата

$$f(t) = a^2t^2 - (4a-1)t + 7 < 0,\ t \geq 0.$$

Задачата се сведува на тоа да се определи за кои вредности на a неравенката $f(t) > 0$ има ненегативно решение, или, што е еквивалентно, за кои вредности на a минимумот на функцијата $f(t)$ во интервалот $[0,+\infty)$ е негативен.

Минимумот на $f(t)$ се достигнува во $t_0 = \frac{4a-1}{2a^2}$. Ако $t_0 \leq 0$, тогаш за $t \geq 0$

функцијата моното расте и $f(t) \geq f(0) = 7 > 0$. Според тоа, $t_0 > 0$, т.е. $a > \frac{1}{4}$.
Сега

$$f(t_0) = \min f(t) = a^2 (\tfrac{4a-1}{2a^2})^2 - (4a-1)\tfrac{4a-1}{2a^2} + 7 = -\tfrac{(4a-1)^2}{4a^2} + 7 < 0 .$$

Од последното неравенство се добива неравенството $12a^2 + 8a - 1 < 0$, од каде добиваме $a \in (\frac{-2-\sqrt{7}}{6}, \frac{-2+\sqrt{7}}{6})$. Но, $a > \frac{1}{4}$ и како $\frac{1}{4} > \frac{-2+\sqrt{7}}{6}$, заклучуваме дека не постои a за кои дадената неравенка има решение.

5. Определи ги сите ненегативни вредности на реалниот параметар a за кои решенијата на неравенката

$$(a - 4x^2)^2 - (2a+1)x^2 + 6x^3 \leq 0$$

формираат конечен затворен интервал.

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката

$$(8x^2 - x - a)(2x^2 + x - a) \leq 0 .$$

Бидејќи $a \geq 0$ дискриминантите и на двата множители се позитивни, што значи дека полиномот на левата страна на неравенството има четири реални корени $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$, меѓу кои најмногу две може да се совпаѓаат (корените на секој од квадратните триноми се два по два различни, додека коефициентот пред x^2 и во двата тринома има ист знак, а тие пред x се со спротивни знаци, па затоа двата тринома не може да имаат еднакви корени). Во општ случај решението на неравенката од условот можеме да го запишеме на слениот начин: $x \in [x_1, x_2] \cup [x_3, x_4]$. Притоа решението е затворен интервал ако и само ако $x_2 = x_3$. Заедничкото решение се добива од

$$8x^2 - x - a = 2x^2 + x - a \text{ , т.е. } x(3x-1) = 0 ,$$

па затоа тоа е $x = 0$ или $x = \frac{1}{3}$. За $x = 0$, добиваме $a = 0$ и непосредно се пресметуваат останатите два корени на полиномот на левата страна, т.е. $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{8}$. Во овој случај двојниот корен навистина е меѓу двата други корени и затоа за $a = 0$ имаме решение на неравенката $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}]$, кое е конечен затворен интервал. За $x = \frac{1}{3}$ добиваме $a = \frac{5}{9}$ и другите два корени на полиномот на левата страна се $x = -\frac{5}{6}$ и $x = -\frac{5}{24}$. Според тоа, решението на неравенката е $[-\frac{5}{6}, -\frac{5}{24}] \cup \{\frac{1}{3}\}$ и тоа не е затворен интервал.

Конечно, единствено решение на задачата е $a = 0$.

6. Нека a е реален параметар. Определи го најмалиот можен број целобројни решенија на неравенката

$$\frac{2x^2+(3a^2+1)x-2a^2+4a-6}{x^2+(a^2+a-3)x-a^2+2a-3}<1.$$

Решение. Дадената неравенка е еквивалентан со неравенката

$$\frac{x^2+(2a^2-a+4)x-a^2+2a-3}{x^2+(a^2+a-3)x-a^2+2a-3}<0.$$

За квадратните триноми

$$f(x)=x^2+(2a^2-a+4)x-a^2+2a-3 \text{ и } g(x)=x^2+(a^2+a-3)x-a^2+2a-3$$

важи $f(0)=g(0)=-a^2+2a-3$ каде $-a^2+2a-3-(a-1)^2-2<0$, за секој a. Според тоа, равенките $f(x)=0$ и $g(x)=0$ имаат решенија соодветно $b<0<c$ и $d<0<e$. Бидејќи $de=bc$ и $d+e-(b+c)=a^2-2a+7>0$ распоредот на решенијата е $b<d<0<c<e$. Тогаш решенијата на неравенката се $x\in(b,d)\cup(c,e)$, при што збирот на должините двата интервали е

$$a^2-2a+7=(a-1)^2+6\geq 6.$$

Непосредно се проверува дека за $a=1$ имаме $b=\frac{-5-\sqrt{33}}{2}, c=\frac{-5+\sqrt{33}}{2}, d=-1,$ $e=2$ и тогаш решенија на неравенската се $-5,-4,-3,-2,1$, т.е. има пет решенија. Ако $a\neq 1$, збирот на должините на двата интервали е поголем од 6 и ако искористиме дека затворен интервал со должина природен број t содржи најмалку t цели броеви, лесно се добива дека овие два интервали содржат најмалку 5 цели броеви.

7. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои максимумот на функцијата $f(x)=\frac{ax-1}{x^4-x^2+1}$ е еднаков на 1.

Решение. Именителот на дадената функција е секогаш позитивен, па затоа условот нејзиниот максимум да е 1 означува $ax-1\leq x^4-x^2+1$ за секој $x\in\mathbb{R}$ и знак за равенство важи барем за еден x. Нека $a\geq 0$. Тогаш $ax\leq 0$ за $x\leq 0$ и затоа a е минимумот на функцијата $g(x)=\frac{x^4-x^2+2}{x}$ за $x>0$. Од $g'(x)=\frac{(3x^2+2)(x+1)(x-1)}{x^2}$ следува дека овој минимум е еднаков на $g(1)=2$. Случјајот кога $a\leq 0$ се сведува на претходниот случај ако a го замениме со $-a$ и x го замениоме со $-x$. Според тоа, $a=\pm 2$.

8. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои неравенката $\sqrt{4+3x}\geq x+a$ нема целобројни решенија.

Решение. Доволно е да ги определиме сите реални броеви a за кои обратното неравенство $\sqrt{4+3x}<x+a$ е исполнето за секој цел број $x\geq -1$. Во

случајов, ако $x=0$ е решение на $\sqrt{4+3x}<x+a$ тогаш $a>2$, што значи дека условот $a>2$ е потребен. Ќе докажеме дека овој услов е и доволен. Навистина, за $a>2$ имаме $x+a>x+2$, па затоа е доволно да докажеме дека $x+2\geq\sqrt{4+3x}$ за секој $x\geq-1$. Последователно добиваме

$$x+2\geq\sqrt{4+3x}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}(x+2)^2\geq 4+3x\\ x\geq-\frac{4}{3}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x^2+x\geq 0\\ x\geq-\frac{4}{3}\end{cases}.$$

Последното важи за $x\in[-\frac{4}{3},-1]\cup[0,+\infty)$, т.е. за секој цел број $x\geq-1$. Според тоа, бараните вредности се $a\in(2,+\infty)$.

9. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои неравенката $\sqrt{1+4x}\geq x^2-x+a$ нема целобројни решенија.

Решение. Бидејќи $1+4x\geq 0$ доволно е да ги определиме оние вредности на a, за кои дадената равенка нема ненегативни целобројни решенија. За $x=0$ и $x=2$ добиваме $a\leq 1$, а за $x=1$ добиваме $a\leq\sqrt{5}$. Според тоа, потребен услов е $a>\sqrt{5}$. Ќе докажеме дека овој услов е и доволен, т.е. ќе докажеме дека

$$x^2-x+a>\sqrt{1+4x}\ \text{ за секој цел број }\ x>2\ \text{ кога }\ a>\sqrt{5}.$$

Да го разгледаме неравенството $x^2-x+1>\sqrt{1+4x}$. Ако ова неравенство го квадрираме, по средувањето го добиваме еквивалентното неравенство

$$x^4-2x^3+3x^2-6x>0\quad\Leftrightarrow\quad x(x-2)(x^2+3)>0,$$

кое очигледно е точно за секој $x>2$. Според тоа,

$$x^2-x+a>x^2-x+\sqrt{5}>x^2-x+1>\sqrt{1+4x},$$

за секој $x>2$, со што задачата е решена.

10. Дадена е неравенката $\sqrt{a-x}\leq x$, каде a е реален параметар.

а) Реши ја неравенката за $a=2$.

б) Определи ги сите вредности на a за кои множеството решенија на неравенката е интервал со должина 1.

Решение. а) Неравенката $\sqrt{2-x}\leq x$ може да има решенија само во интервалот $[0,2]$. Тогаш дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $2-x\leq x^2$, т.е. со неравенката $x^2+x-2\geq 0$. Оттука $x\in(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$ и како $x\in[0,2]$ следува дека решенија на неравенката се $x\in[1,2]$.

б) Дадената неравенка може да има решенија само кога $x\in[0,a], a>0$ (кога $a=0$ решение е само $x=0$ и условот не е исполнет). Тогаш неравенката е еквивалентна со неравенката $a-x\leq x^2$, т.е. со неравенката

$$x^2 + x - a \geq 0. \tag{1}$$

Бидејќи $D = 1 + 4a > 0$, левата страна на (1) има реални и различни решенија x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, а од $x_1 x_2 = -a$, следува дека $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$. Според тоа, решенијата на (1) се $x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$. Бидејќи $x \in [0, a]$, дадената неравенка има решенија само ако $x_2 < a$ (за $x_2 = a$ решението е единствено) и овие решенија се $x \in [x_2, a]$. Должината на овој интервал е еднаква на $a - x_2$ и условот го добива видот $a - x_2 = 1$, т.е. $x_2 = a - 1$. Тогаш

$$(a-1)^2 + (a-1) - a = 0,$$

т.е. $a(a-2) = 0$ и оттука $a = 2$ е единствено решение на задачата.

11. Дадена е неравенката

$$\sqrt{x} + \sqrt{2-x} \geq \sqrt{a},$$

каде a е параметар.

а) Реши ја неравенката за $a = 3$.

б) Определи ги вредностите на a за кои неравенката има решенија и множеството решенија е интервал со должина помала или еднаква на $\sqrt{3}$.

Решение. а) Ако $a = 3$ и $x \in [0, 2]$, тогаш неравенката е еквивалентна со неравенката $2\sqrt{x(x-2)} \geq 1$, т.е. со неравенката $4x^2 - 8x + 1 \leq 0$. Според тоа, решението е $x \in [\frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}]$.

б) Ако $a \geq 0$ и $x \in [0, 2]$, тогаш неравенката е еквивалентна со неравенката $2\sqrt{x(x-2)} \geq a - 2$. Ако $a \leq 2$, тогаш секој $x \in [0, 2]$ е решение и условот не е исполнет. Нека $a > 2$. Тогаш неравенката е еквивалентна со неравенката $4x(2-x) \geq (a-2)^2$, т.е. со $4x^2 - 8x + a^2 - 4a + 4 \leq 0$. Ако $D = 16(4a - a^2) < 0$, тогаш добиената квадратна неравенка нема решение и условот повторно не е исполнет. Нека $D \geq 0$, т.е. $a \in (2, 4]$. Сега решение на квадратната неравенка е $x \in [x_1, x_2]$, каде $x_1 \leq x_2$ се нулите на полиномот на левата страна и условот добива вид $x_2 - x_1 \leq \sqrt{3}$. Имаме,

$$x_2 - x_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_2 x_1} = \sqrt{4a - a^2} \leq \sqrt{3}.$$

Последното неравенство е еквивалентно на неравенството $a^2 - 4a + 3 \geq 0$. Оттука и од $a \in (2, 4]$ ги добиваме бараните вредности за a, т.е. $a \in [3, 4]$.

12. Реши ја неравенката

$$\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} > \frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}},$$

каде a и b се реални параметри и $a > b > 0$.

Решение. Одделно ќе разгледаме три можности за знаците на броителите.

Случај 1. Ако $x > -b$, тогаш двете страни на неравенката се позитивни и по квадрирањето и средувањето на добиеното неравенство добиваме

$$(a-b)(x^2 - ab)x > 0 .$$

Од $a-b > 0$, следува $x(x^2 - ab) > 0$, т.е. $x \in (-\sqrt{ab}, 0) \cup (\sqrt{ab}, +\infty)$. Но, $-b > -\sqrt{ab}$, па затоа $x \in (-b, 0) \cup (\sqrt{ab}, +\infty)$.

Случај 2. Ако $-a < x < -b$, тогаш неравенството очигледно е исполнето.

Случај 3. Ако $x < -a$, тогаш аналогно како во првот случај го добиваме неравенството $(a-b)(x^2 - ab)x < 0$, од каде добиваме $x \in (-\infty, -\sqrt{ab}) \cup (0, \sqrt{ab})$. Но, $-a < -\sqrt{ab}$, па затоа решенија во овој случај се $x \in (-\infty, -a)$.

Конечно, решенија на задачата се $x \in (-\infty, 0) \cup (\sqrt{ab}, +\infty)$.

13. Определи ги сите вредности на параметарот a за кои неравенката

$$\sqrt{x - x^2 - a} + \sqrt{6a - 2x - x^2} \le \sqrt{10a - 2x - 4x^2}$$

има единствено решение.

Решение. Ако означиме $u = x - x^2 - a$ и $v = 6a - 2x - x^2$, тогаш имаме

$$10a - 2x - 4x^2 = 2(u+v)$$

и дадената неравенка го прима видот

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} \le \sqrt{2(u+v)} .$$

Последната неравенка е еквивалетна со неравенката $2\sqrt{u}\sqrt{v} \le u+v$, која е точна за сите вредности од дефиниционата област

$$\begin{cases} u \ge 0 \\ v \ge 0. \end{cases}$$

Според тоа, неравенката има единствено решение кога системот

$$\begin{cases} x^2 - x + a \le 0 \\ x^2 + 2x - 6a \le 0 \end{cases}$$

има единствено решение. Можни се следниве случаи.

Прв случај. Едно од неравенствата има единствено решение кое е решение на другото неравенство. Според тоа или $D_1 = 1 - 4a = 0$, т.е. $a = \frac{1}{4}$, што е решение, или $D_2 = 1 + 6a = 0$, т.е. $a = -\frac{1}{6}$, што не е решение.

Втор алсучај. Равенките $x^2 - x + a = 0$ и $x^2 + 2x - 6a = 0$ имаат заедничко реално решение. Ако првата равенка ја помножиме со 6 и ја собереме со втората добиваме $7x^2 - 4x = 0$, т.е. $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{4}{7}$. За $x_1 = 0$ добиваме $a = 0$, а за $x_2 = \frac{4}{7}$ добиваме $a = \frac{12}{49}$. Непосредно се проверува дека $a = 0$ е решение и дека $a = \frac{12}{49}$ не е решение.

Конечно, бараните вредности се $a = 0$ и $a = \frac{1}{4}$.

14. Реши ја неравенката

$$2^{2ax+1} + 2^a \le 2^{ax} + 2^{ax+a+1}.$$

Решение. Ставаме $2^{ax} = y > 0$ и ја добиваме неравенката

$$2y^2 - (2^{a+1} + 1)y + 2^a \le 0,$$

чии решенија се $y \in [\frac{1}{2}, 2^a]$ ако $a \ge -1$ и $y \in [2^a, \frac{1}{2}]$ ако $a < 1$. Значи,

1) Ако $a < -1$ имаме $2^a \le 2^{ax} \le 2^{-1}$, т.е. $a \le ax \le -1$, од каде добиваме $1 \ge x \ge -\frac{1}{a}$.
2) Ако $a = -1$ имаме $2^{-x} = 2^{-1}$, т.е. $x = 1$.
3) Ако $-1 < a < 0$ имаме $2^{-1} \le 2^{ax} \le 2^a$, т.е. $-1 \le ax \le a$ од каде добиваме $-\frac{1}{a} \ge x \ge 1$.
4) Ако $a = 0$, тогаш секој x е решение.
5) Ако $a > 0$ имаме $2^{-1} \le 2^{ax} \le 2^a$, т.е. $-1 \le ax \le a$ од каде добиваме $-\frac{1}{a} \le x \le 1$. .

15. За кои вредности на параметарот a неравенката

$$4 \cdot 27^{2x^2+x-a} < 31 \cdot 3^{2x^2+x-a} + 15$$

има точно едно целобројно решение.

Решение. Воведуваме смена $u = 3^{2x^2+x-a} > 0$ и ја добиваме неравенката $4u^3 - 31u - 15 < 0$ која е еквивалентна на неравенката

$$(u-3)(2u+1)(2u+5) < 0.$$

Решението на последната неравенка е $u \in (-\frac{5}{2}, 0) \cup (0,3)$ и како $u > 0$ добиваме $u \in (0,3)$. Сега имаме $3^{2x^2+x-a} < 3$, па затоа $2x^2 + x - (a+1) < 0$. Решенијата на последната неравенка се $x \in (\frac{-1-\sqrt{8a+9}}{4}, \frac{-1+\sqrt{8a+9}}{4})$. Бидејќи решенијата се симетрични во однос на $-\frac{1}{4}$, имаме точно едно целобројно решение (а тоа е 0) само кога

$$\frac{1}{4} < \frac{\sqrt{8a+9}}{4} \le \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 1 < 8a+9 \le 9 \quad \Leftrightarrow \quad a \in (-1, 0].$$

16. За кои вредности на реалниот параметар m неравенството

$$4^{x^2}-2^{x^2+x+1}m+4^x m^3\geq 0$$

е точно за секој цел број x.

Решение. Воведуваме замена $2^{x^2-x}=t$, $t>0$ и даденото неравенство го добива видот

$$t^2+2mt+m^3\geq 0\,. \qquad (1)$$

Ако x е цел број, тогаш $2^{x^2-x}=t$ е меѓу броевите 1, 2, 4, 8, ... Така задачата се сведува на наоѓање на оние целобројни вредности на m за кои неравенството (1) важи за секој $t\in\{1,2,4,8,...\}$.

Случај 1. Ако $D=4m^2-4m^3=4m^2(1-m)\leq 0$, т.е. $m=0$ или $m\geq 1$, тогаш неравенството е точно не само за секои целобројни, туку и за секои реални вредности на x.

Случај 2. Ако $D=4m^2(1-m)>0$, тогаш $m<1, m\neq 0$, врвот на параболата има абсциса m и затоа е потребно 1 да е десно решенија на (1), т.е.

$$f(1)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad m^3-2m+1\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad (m-1)(m^2+m-1)\geq 0\,,$$

од каде добиваме $m\in[\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}]$. Конечно,

$$m\in[\tfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}]\cup[1,+\infty)\,.$$

17. Определи ги вредноститре на реалниот параметар $a>2$ за кои неравенката

$$(ax-1)^{6x^2-(2a+3)x+a}<0$$

има точно едно целобројно решение.

Решение. Нека $0<ax-1<1$. Тогаш $x\in(\frac{1}{a},\frac{2}{a})$ и како $a>2$, овој интервал не содржи цели броеви. Значи, $ax-1>1$, т.е. $x>\frac{2}{a}$. Тогаш неравенката го добива видот

$$6x^2-(2a+3)x+a<0 \quad\Leftrightarrow\quad (2x-1)(3x-a)<0 \quad\Leftrightarrow\quad x\in(\tfrac{1}{2},\tfrac{a}{3})\,.$$

За распоредот на броевите $\frac{2}{a},\frac{1}{2},\frac{a}{3}$ можни се следниве случаи:

1) $\frac{1}{2}<\frac{a}{3}\leq\frac{2}{a}$ за $a\in(2,\sqrt{6}]$,

2) $\frac{1}{2}<\frac{2}{a}<\frac{a}{3}$ за $a\in(\sqrt{6},4)$,

3) $\frac{2}{a}\leq\frac{1}{2}<\frac{a}{3}$ за $a\in[4,+\infty)$.

Во случајот 1) немаме решение. Во случајот 2(има е $x\in(\frac{2}{a},\frac{a}{3})$, од каде добиваме $a\in(3,4)$. Во случајот 3) имаме $x\in(\frac{1}{2},\frac{a}{3})$, од каде добиваме $a\in[4,6)$.

Конечно, решението на задачата е $a \in (3,6)$.

18. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои неравенката $\log_{x+a} x \le \log_a x$ има решенија чија разлика е еднаква на a.

Решение. Неравенството е можно ако $a > 0, x > 0, a \ne 1$ и $x + a \ne 1$. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството $\frac{\log_a x}{\log_a (x+a)} \le \log_a x$, кое е еквивалентно со неравенството

$$\log_a x(1 - \log_a (x+a)) \log_a (x+a) \le 0. \qquad (1)$$

Ако $a > 1$, тогаш $\log_a (x+a) > 1$ и неравенството (1) е еквивалентно со неравенството $\log_a x \ge 1$, т.е. $x \ge 1$. Во овој случај очигледно постојат решенија чија разлика е еднаква на a, бидејќи кога $a > 1$ решенија се $x = a$ и $x = 2a$.

Нека $0 < a < 1$. Ако $\log_a x \le 0$, тогаш $x \ge 1$ и тогаш од $x + a > 1$ следува $\log_a (x+a) < 0$ и (1) не е исполнето. Според тоа, $\log_a x > 0$, т.е. $x < 1$. Тогаш $\log_a (x+a) \le 0$ или $\log_a (x+a) \ge 1$. Во првиот случај $x + a \ge 1$, а во вториот $x + a \le a$, штои не е можно. Според тоа, за $0 < a < 1$ решенија се $1 - a \le x < 1$ и нема решенија чија разлика е a.

Конечно, бараните вредности се $a > 1$.

19. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои неравенството

$$\log_{\frac{a+1}{a-1}} (x^2 - x + 1) < 1$$

е исполнето за секој реален број x.

Решение. Бидејќи за секој реален број x важи $x^2 - x + 1 \ge \frac{3}{4}$, за секој реален број x изразот на левата страна на даденото неравенство има смисол ако $\frac{a+1}{a-1} > 0$.

Ако $0 < \frac{a+1}{a-1} < 1$, тогаш $x^2 - x + 1 > \frac{a+1}{a-1} > 0$ за секој x. Последното важи ако и само ако $\frac{a+1}{a-1} < \frac{3}{4}$, т.е. $0 < \frac{a+1}{a-1} < \frac{3}{4}$, од каде добиваме $a \in (-7, -1)$.

Ако $\frac{a+1}{a-1} > 1$, тогаш $x^2 - x + 1 < \frac{a+1}{a-1}$ за секој x, што не е можно.

Конечно, решение на задачата е $a \in (-7, -1)$.

20. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои неравенката

$$\log_{a+2-x} (\log_{x-a} a) > 0$$

има решение.

Решение. Допустливите вредности се

$$a > 0,\ x \in (a, a+2),\ x \ne a+1 \text{ и } \log_{x-a} a > 0.$$

Ќе разгледаме два случаја.

1) Ако $x \in (a, a+1)$ имаме $a+2-x>1$ и $x-a<1$. Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $a<x-a$, т.е. на неравенката $x>2a$. Неравенката има решение ако $2a<a+1$, т.е. $0<a<1$.

2) Ако $x \in (a+1, a+2)$, тогаш $a+2-x<1$ и $x-a>1$. Неравенката е еквивалентна на неравенката $0<\log_{x-a} a<1$, т.е. со $1<a<x-a$. Неравенката има решение ако $1<a$ и $2a<a+2$, т.е. $1<a<2$.

Конечно, бараните вредности се $0<a<2, a \neq 1$.

21. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои точно две од целобројните решенија на неравенката

$$\log_a |\log_{\frac{2}{a}}(x+1)|<0$$

се помали или еднакви на 3.

Решение. Јасно, треба да ги разгледуваме само позитивните вредности на a такви што $a \neq 1, 2$. Понатаму, јасно е дека $x>-1$ и $x \neq 0$.

1) Нека $a \in (0,1)$. Сега имаме $|\log_{\frac{2}{a}}(x+1)|>1$, па затоа $\log_{\frac{2}{a}}(x+1)>1$ или $\log_{\frac{2}{a}}(x+1)<-1$, од што добиваме $x+1>\frac{2}{a}$ или $x+1<\frac{a}{2}$. Така ги добиваме решенијата $x \in (-\infty, -1+\frac{a}{2}) \cup (-1+\frac{2}{a}, +\infty)$. Понатаму, $\frac{2}{a}-1>1$ и $-1<-1+\frac{a}{2}<0$, од што следува дека две целобројни решенија, кои се помали или еднакви на 3, се добиваат кога $\frac{2}{a}-1<2$, т.е. кога $a>\frac{2}{3}$. Така, во овој случај имаме $a \in (\frac{2}{3}, 1)$.

2) Нека $a \in (1, 2)$. Сега добиваме $|\log_{\frac{2}{a}}(x+1)|<1$, т.е. $-1<\log_{\frac{2}{a}}(x+1)<1$, од каде добиваме $x \in (-1+\frac{a}{2}, -1+\frac{2}{a})$. Очигледно во овој интервал има само едно целобројно решение за x.

3) Ако $a \in (2, +\infty)$, тогаш како во 2) добиваме $x \in (-1+\frac{a}{2}, -1+\frac{2}{a})$. Точно две целобројни решенија за x, кои се помали или еднакви на 3, се добиваат кога $2<-1+\frac{a}{2} \leq 3$, односно кога $a \in (6, 8]$.

Конечно, $a \in (\frac{2}{3}, 1) \cup (6, 8]$.

22. За кои вредности на реалниот параметар a системот

$$\begin{cases} y \geq x^2+ay+1 \\ x \geq y^2+ax+1 \end{cases}$$

има единствено решение.

Решение. Јасно, ако парот (x, y) е решение, тогаш и парот (y, x) е решение. Според тоа, ако системот има решение (x_0, y_0), тогаш $x_0 = y_0$. За $x = y$ системот е еквивалентен со квадратната неравенка $x^2 + (a-1)x + 1 \leq 0$. Оваа квадратна неравенка има единствено решение, ако нејзината дискримината $a^2 - 2a - 3$ е еднаква на нула, т.е. $a = -1$ или $a = 3$. Обратно, ако $a = 3$, ако ги собереме двете неравенства на системот добиваме $(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 0$, т.е. $x = y = -1$ е единствено решение на системот. Ако $a = -1$, тогаш ги собираме двете неравенства на системот и добиваме $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 0$, т.е. $x = y = 1$ е единственото решение на системот.

23. Определи ги вредностите на параметарот a за кои системот

$$\begin{cases} 4^x + 9^y \leq a \\ 2^x - 3^y \geq 1 \end{cases}$$

има решение.

Решение. Од втората неравенка добиваме $2^x \geq 1 + 3^y$, па затоа

$$4^x \geq 1 + 2 \cdot 3^y + (3^y)^2 .$$

Од друга страна, $4^x \leq a - (3^y)^2$, па ја добиваме неравенката

$$2 \cdot (3^y)^2 + 2 \cdot 3^y + 1 - a \leq 0 .$$

Бидејќи $3^y \geq 0$ за секој y добиваме дека

$$a \geq 2 \cdot (3^y)^2 + 2 \cdot 3^y + 1 > 1 .$$

Ќе докажеме дека $a > 1$ е доволен услов за да дадениот систем неравенки има решение. Навистина, ако $a > 1$, тогаш

$$3^y = \tfrac{-1+\sqrt{2a-1}}{2}, \; 2^x = 3^y + 1 = \tfrac{1+\sqrt{2a-1}}{2} ,$$

па така дадениот систем неравенки е задоволен и така добиваме еден пар можни решенија на системот

$$x = \log_2 \tfrac{1+\sqrt{2a-1}}{2}, \;\; y = \log_3 - \tfrac{1+\sqrt{2a-1}}{2} .$$

IV ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Нека x, y, z се реални броеви такви што

$$x^4 - 4xz + z^2 - 2z = 0 \text{ и } y^4 - 4yz + z^2 - 2z = 0 . \qquad (1)$$

Определи ја најголемата можна вредност на $|x - y|$.

Решение. Имаме $t^4 - 4tz + z^2 - 2z = (t^2 + z)^2 - 2z(t+1)^2$. Можеме да сметаме дека $x \neq y$. Тогаш $z > 0$ и ако ставиме $u = \sqrt{2z}$, т.е. $z = \frac{u^2}{2}$ добиваме

$$\begin{aligned} t^4 - 4tz + z^2 - 2z &= (t^2 + \tfrac{u^2}{2})^2 - u^2(t+1)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(2t^2 + u^2 - 2ut - 2u)(2t^2 + u^2 + 2ut + 2u) \\ &= \tfrac{1}{4}(2t^2 + u^2 - 2ut - 2u)[(t+u)^2 + t^2 + 2u]. \end{aligned}$$

Но, $(t+u)^2 + t^2 + 2u > 0$, па од последното равенство и од равенствата (1) следува дека x и y се решенија на квадратната равенка

$$2t^2 - 2u + u^2t - 2u = 0,$$

(разгледувана како равенка по t). Оттука добиваме $|x - y| = \sqrt{4 - (u-2)^2} \leq 2$, при што знак за равенство важи за $u = 2$, односно $z = 2$.

2. Нека $k \in (0,1)$ е реален параметар. Определи ја најголемата можна вредност на изразот $\frac{x + k^2 y + (1-k)^2 xy}{(1+x+y)^2}$, кога $x, y \geq 0$.

Решение. Нека $f(x, y) = \frac{x + k^2 y + (1-k)^2 xy}{(1+x+y)^2}$. Очигледно $f(x, 0) = \frac{x}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{4}$, при што знак за равенство важи само за $x = 1$. Сега, доволно е да докажеме дека

$$f(ty, y) \leq \frac{ty + k^2 y + t(1-k)^2 y^2}{(1+ty+y)^2} \leq m_t = \frac{1}{4}(\frac{t+k^2}{t+k})^2 < \frac{1}{4},$$

кога $t, y \geq 0$. Тоа е еквивалентно со

$$(t + k^2)y + (1-k)^2 ty^2 \leq m_t (1 + (t+1)y)^2,$$

т.е.

$$(m_t (t+1)^2 - (1-k)^2 t)y^2 + (2m_t (t+1) - t - k^2)y + m_t \geq 0 .$$

Ако се земе предвид дефиницијата на m_t дискриминантата на левата страна е еднаква на 0, па останува да искористиме дека $m_t > 0$.

3. Определи ги сите природни броеви n за кои

$$(x+y)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} = (2n+1)xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)^{n-1} \qquad (1)$$

за секои реални броеви x и y.

Решение. За $x=y=1$ добиваме $2^{2n+1}-2=2(2n+1)\cdot 3^{n-1}$, од каде наоѓаме $2^{2n}-1=(2n+1)\cdot 3^{n-1}$. Ова равенство важи за $n=1,2,3$. Нека $n\geq 4$. Даденото равенство го запишуваме во видот $(\frac{4}{3})^n=\frac{2n+1}{3}+\frac{1}{3^n}$. Имаме

$$(\tfrac{4}{3})^n=(1+\tfrac{1}{3})^n>1+\tfrac{n}{3}+\tfrac{n(n-1)}{2\cdot 3^2}+\tfrac{1}{3^n},$$

па затоа треба да важи $\frac{2n+1}{3}>1+\frac{n}{3}+\frac{n(n-1)}{2\cdot 3^2}$, т.е. $n^2-7n+12<0$, што не е точно за $n\geq 4$. За $n\geq 4$ со индукција се докажува дека $(\frac{4}{3})^n>\frac{2n+1}{3}+\frac{1}{3^n}$.

Лесно се проверува дека за $n=1,2,3$ равенството (1) важи за секои реални броеви x и y. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

4. Определи ги вредностите на реалниот параметар a, за кои равенката

$$\left|\frac{|x+1|-|x-1|}{|x+1|+|x-1|}\right|=a$$

има четири различни реални решенија, кои формираат аритметичка прогресија.

Решение. Нека $f(x)=\left|\frac{|x+1|-|x-1|}{|x+1|+|x-1|}\right|$. Лесно се гледа дека

$$f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|\leq 1\\ \frac{1}{|x|}, & |x|\geq 1.\end{cases}$$

Според тоа, дадената равенка има четири различни реални решенија ако $0<a<1$ и тие се $\frac{1}{a},a,-a,-\frac{1}{a}$. Од $0<a<1$ следува $-\frac{1}{a}<-a<a<\frac{1}{a}$, па затоа овие броеви формираат аритметичка прогресија ако и само ако $\frac{1}{a}-a=a+a=-a+\frac{1}{a}$, т.е. $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ..

5. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$x^3-ax^2+(a^2-1)x-a^2+a=0$$

има три различни реални решенија кои формираат аритметичка прогресија.

Решение. Дадената равенка е еквивалентн а на равенката

$$(x-1)(x^2+(1-a)x-a+a^2)=0,$$

од каде добиваме $x_1=1$. Нека x_2 и x_3 се решенијата на квадратната равенка. Ако 1 е средниот член на прогресијата, тогаш $x_2+x_3=2$, од каде добиваме $a-1=2$, т.е. $a=3$. За $a=3$ решенијата на квадратната равенка не се реални.

Ако x_1 не е среден член, тогаш без ограничување на општоста можеме да земеме $1+x_2=2x_3$, што заедно со $x_2+x_3=a-1$ дава $x_3=\frac{a}{3}$. Значи, $\frac{a}{3}$ е решение на квадратната равенка, т.е.

$$(\tfrac{a}{3})^2+\tfrac{a(1-a)}{3}-a+a^2=0,$$

од каде наоѓаме $a=0$ и $a=\frac{6}{7}$. За $a=0$ добиваме $x_2=-1$ и $x_3=0$, а за $a=\frac{6}{7}$ добиваме $x_2=-\frac{3}{7}$ и $x_3=\frac{2}{7}$.

Значи, решенија на задачата се $a=0$ и $a=\frac{6}{7}$.

6. Определи ги сите реални броеви b и c за кои равенката $x^2-bx+c=0$ има две реални и различни ненулти решенија x_1 и x_2, а броевите x_1,x_2,b и c формираат (во некој редослед) аритметичка прогресија.

Решение. Нека прогресијата е a_1,a_2,a_3,a_4, каде $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}=\{x_1,x_2,b,c\}$. Од

$$a_1+a_4=a_2+a_3 \text{ и } a_1+a_2+a_3+a_4=x_1+x_2+b+c=2b+c$$

следува

$$a_1+a_4=a_2+a_3=b+\tfrac{c}{2}.$$

Затоа $b\in\{a_1,a_4\}$ или $b\in\{a_2,a_3\}$. Ако другиот елемент на $\{a_1,a_4\}$ или $\{a_2,a_3\}$ е еднаков на c, тогаш добиваме $c=0$, што е противречност со $x_1x_2\neq 0$. Според тоа, тој елемент е едно од решенијата на равенката и без ограничување на општопста можеме да земеме $x_1=\frac{c}{2}$, од каде добиваме $x_2=2$. Значи, $2b=c+4$.

Бидејќи $\{b,x_1\}=\{a_1,a_4\}$ или $\{b,x_1\}=\{a_2,a_3\}$, лесно се гледа дека се можни следниве четири подредувања $b,c,x_1,x_2;\, b,x_2,c,x_1;\, x_2,b,x_1,c$ и c,b,x_1,x_2. Во првиот случај имаме $c+x_1=2x_2$, од каде добиваме $c=\frac{8}{3}$ и потоа $b=\frac{10}{3}$.

Во преостанатите три случаи имаме соодветно $b=\frac{8}{3},c=\frac{4}{3};\, b=0,c=-4$ и $b=6,c=8$.

7. Определи ги вредностите на реалните параметри p,q и r, ако броевите $p,-\frac{q}{2}$ и r формираат аритметичка прогресија и равенката

$$x^3+px^2+qx+r-1=0$$

има три корени кои се природни броеви и кои формираат артиметичка прогресија со разлика 2013.

Решение. Од условот $p+r=-q$ следува дека едно решение на дадената равенка е $x_1=1$. Значи, равенката го добива облокот

$$(x-1)(x^2+(p+1)x+p+q+1)=0,$$

при што корените на квадратната равенка се $x_2=2014$ и $x_3=4027$. Сега, од Виетовите формули следува $p=-x_2-x_3-1=-6042$ и

$q=x_2x_3-p-1=x_2x_3+x_2+x_3=(x_2+1)(x_3+1)-1=2015\cdot 4028-1=8116419$.

8. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$2^{3x}-2^{2x+1}a+2^x(a^2+1)-a=0$$

има три реални и различни решенија, кои формираат аритметичка прогресија.

Решение. Ставаме $2^x=y$ и ја добиваме равенката

$$y^3-2ay^2+(a^2+1)y-a=0. \qquad (1)$$

Ако равенката од условот има три реални и различни решенија кои формираат аритметичка прогресија, тогаш равенката (1) има три реални и различни решенија кои формираат геометриска прогресија. Равенката (1) е еквивалентна со равенката

$$(y-a)(y^2-ay+1)=0.$$

За да има три решенија треба $a>0$ и $a^2-4>0$, што значи $a>2$. За овие вредности на a решенијата y_1 и y_2 на $y^2-ay+1=0$ се позитивни бидејќи $y_1y_2=1$ и $y_1+y_2=a>0$. Единствена можност a, y_1 и y_2 да формираат геометриска прогресија е $y_1^2=ay_2$, од каде добиваме $ay_1-1=a(a-y_1)$. Оттука добиваме $y_1=\frac{a^2+1}{2a}$ и со замена во равенката добиваме $a^4-4a^2-1=0$. Единствено позитивни решение на последната равенка е $a=\sqrt{2+\sqrt{5}}$ и притоа $a>2$.

9. Права која минува низ почетокот O на координатниот систем го сече графикот на функцијата $y=x(x-1)(x+2)$ во уште две точки A и B при што O лежи меѓу овие точки. Докажи дека $\overline{AB}>\sqrt{5}$.

Решение. Нека правата е $y=kx, A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$. Тогаш x_1 и x_2 се решенија на равенката $x^2+x=k+2$ и имаат различни занци, од каде следува $k>-2$ и

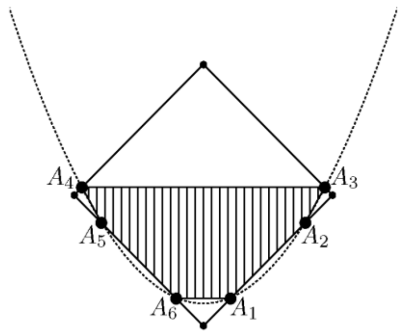
$$\overline{AB}^2=(x_1-x_2)^2(1+k^2)=((x_1+x_2)^2-4x_1x_2)(1+k^2)=(1+4k+8)(1+k^2).$$

Тогаш

$$\overline{AB}^2-5=(1+4k+8)(1+k^2)-5=(k+2)(4k^2+k+2)>0\,.$$

10. Реалниот број a е таков што графикот на функцијата $y=x^2-a$ го сече квадратот $|x|+|y|=1$ во шест точки. Докажи, дека плоштината на добиениот шестаголник е помала од $\frac{17}{16}$.

Решение. Лесно се проверува дека бројот на пресечните точки на графикот на функцијата и квадратот е еднаков на 0 ако $|a|>1$, на 1 ако $a=-1$, на 3 ако $a=1$, на 2 ако $a\in(-1,\frac{3}{4})$, на 4 ако $a=\frac{3}{4}$ и на 6 ако $a\in(\frac{3}{4},1)$.



За $a\in(\frac{3}{4},1)$ имаме две пресечни точки $A_1(x_1,y_1)$ и $A_2(x_2,y_2)$ во четвртиот квадратнт и една пресечна точка $A_3(x_3,y_3)$ во првиот квадрант, каде $0<x_1<x_2<1$ се корени на равенката $x^2-x+1-a=0$, а $x_3\in(0,1)$ е поголемиот корен на равенката $x^2+x-1-a=0$ и $y_i=x_i^2-a$ за $i=1,2,3$. Останатите пресечни точки A_4,A_5,A_6 се симетрични соодветно на A_3,A_2,A_1 во однос на ординатата.

Тогаш плоштината S на $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ е еднаква на збирот на плоштините на четириаголниците $A_1A_2A_5A_6$ и $A_2A_3A_4A_5$, т.е.

$$S=(x_1+x_2)(y_2-y_1)+(x_2+x_3)(y_3-y_2)=u+\frac{(u+v)^2(v-u-2)}{8}\,,$$

каде $u=\sqrt{4a-3}$ и $v=\sqrt{4a+5}$. Бидејќи $v^2-u^2=8$, важи $S=2u+v-\frac{(u+v)^2}{4}$. Бидејќи $u<1$, важи $u+v<4$, па затоа на разгледуваното множество S е растечка квадратна функција во однос на u. Имаме, $u+8<3v$ и затоа

$$S<2(3v-8)+v-\frac{(3v-8+v)^2}{4}=\frac{17-(8v-23)^2}{16}\,.$$

11. Позитивните броеви a,b,c во овој редослед формираат геометриска прогресија. Определи го количникот q на оваа прогресија ако решенијата на равенката $a^3x^3+b^2x^2+cx=0$ формираат аритметичка прогресија.

Решение. Бидејќи a,b,c се позитивни броеви имаме $q>0$. Ако замениме $b=aq$ и $c=aq^2$, добиваме

$$a^3x^3 + b^2x^2 + cx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2x^3 + aq^2x^2 + q^2x = 0\,,$$

со решенија $0, x_1, x_2$, кои според условот формираат аритметичка прогресија. Ако 0 е средниот член на прогресијата, тогаш $-\frac{q^2}{a} = x_1 + x_2 = 0$, што не е можно. Според тоа, $0, x_1, x_2$ во овој редослед формираат аритметичка прогресија и добиваме $x_2 = 2x_1$. Сега, од Виетовите формули за равенката

$$a^2x^2 + aq^2x + q^2 = 0$$

добиваме

$$2x_1^2 = 2x_1x_2 = \frac{q^2}{a^2}, \quad 3x_1 = x_1 + x_2 = -\frac{q^2}{a}\,.$$

Од горните равенства наоѓаме

$$x_1^2 = \frac{q^2}{2a^2}, \quad x_1^2 = \frac{q^4}{9a^2},$$

па затоа $\frac{q^2}{2a^2} = \frac{q^4}{9a^2}$ и како $q > 0$ добиваме $q = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Непосредно добиваме дека за $q = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ важи $x_1 = -\frac{3}{2a}, x_2 = -3a$ и затоа $0, x_1, x_2$ формираат аритметичка прогресија.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
2. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
3. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
4. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2006-2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
5. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
6. Горнщейн, П. И., Полонски, В. Б., Яакир, М. С.: Задачи с параметри, Академично издателство „Проф. Марин Дринов", София, 2000
7. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Збирка задачи по елементарна алгебра, Армаганка, Скопје, 2020
8. Малчески, Р., Малчески, А., Брсаковска, С., Мисајлески, З., Димовски, Т.: Математички талент C6 (збирка задачи за III година, втор дел), Армаганка, Скопје, 2019
9. Малчески, Р., Малчески, А., Велинов, Д., Малчески, С., Костадинова, С.: Математички талент C1 (збирка задачи за I година, прв дел), Армаганка, Скопје , 2019
10. Малчески, Р., Малчески, А., Велинов, Д., Малчески, С., Костадинова, С.: Математички талент C3 (збирка задачи за II година, прв дел), Армаганка, Скопје, 2019
11. Малчески, Р., Малчески, А., Велинов, Д., Малчески, С., Костадинова, С.: Математички талент C5 (збирка задачи за III година, прв дел), Армаганка, Скопје, 2019
12. Ašić, M. i dr.: Republička i savezna takmičenja srednjoškolaca (1970-1983), DMS, Beograd, 1984
13. Đurković, R.: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DMS, Beograd, 1991
14. Kadelburg, Z., Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematike, DMS, Beograd, 1990
15. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjoh škola, DMS, Beograd, 1991
16. Јегоров, А.: Логаритамски равенки, Сигма, Скопје