EVOLVENTA (JAMTK) 6(2) (2023), 2 - 14

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: `http://evolventa.ba`
`http://www.umtk.info`

Magični poligoni

Amir Gvozden[1], Nermin Okičić[2]

[1] *Univerzitet u Tuzli, Prirodno-matematički fakultet*
[2] *Univerzitet u Tuzli, Prirodno-matematički fakultet*

Sažetak: U ovom radu razmatrat ćemo poznati problem magičnih poligona. Uočavanjem raznih pravilnosti dat ćemo eksplicitne formule za zbirove po stranicama magičnih poligona, ali i uočiti da su neka rješenja međusobno ekvivalentna. To će nam omogućiti da odredimo bar dva rješenja magičnih n-touglova, a pitanje ukupnog broja rješenja ostaje i dalje otvoreno. U završnom dijelu su data dva algoritma za konstrukciju i kôdove u softwareu Wolfram Mathematica koji softverski pronalaze sve magične n-touglove ($n \geq 3$), metodama pretraživanja.

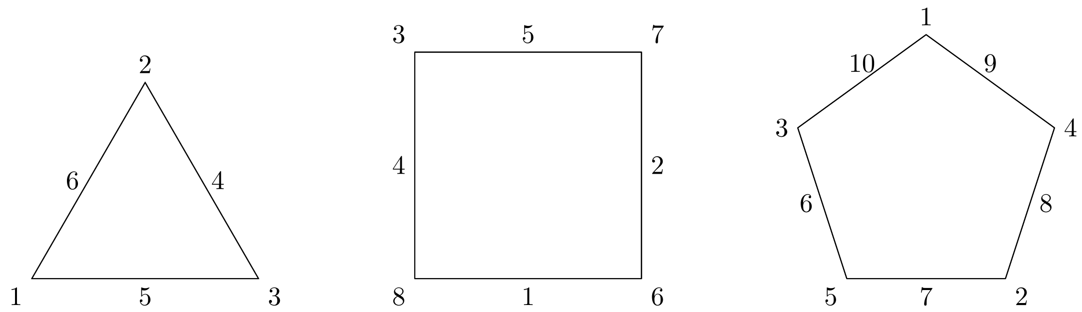
1. Uvod

U "rekreativnoj" matematici, čitavu klasu problema (zadataka) imamo na motiv postavljanja brojeva u određenu šemu, tako da neka osobina bude zadovoljena. Jedan od poznatijih takvih problema jeste na primjer problem magičnih kvadrata, to jest problem raspoređivanja n^2 brojeva u kvadrat podijeljen na n^2 malih kvadrata, tako da sume brojeva po vrstama, kolonama i dijagonalama budu jednake. U ovom radu ćemo se upoznati sa jednim od takvih problema zvanih magični poligoni. Postoje razne vrste problema koje nose isti naziv magični poligoni, naprimjer kao u [6]. Mi ćemo se ovdje upoznati sa formom problema koji je uveo Trotter ([1]).

Terrel Trotter Jr je 1972. godine objavio rad [1] o magičnim trouglovima, a zatim 1974. godine objavljuje i rad pod nazivom "Perimeter Magic Polygons" [2] u kome poopštava problem generalno na proizvoljne mnogouglove koje ćemo zvati magični poligoni. U svojim radovima on posmatra mogućnost da se između vrhova postavi i više od jednog broja. Poznate su i konstrukcije u kojima se raspoređuje $2n + 1$ brojeva, pri čemu se jedan broj postavlja u centar kružnice opisane oko pravilnog n-tougla, i pri tome se zahtijeva da sume brojeva na stranicama i dijagonalama budu iste (vidjeti [5]). Mi ćemo posmatrati slučaj u kojem između dva vrha mnogougla postavljamo jedan broj.

Definicija 1. *Pod magičnim n-touglom podrazumijevamo pravilan, konveksan n-tougao kome su vrhovi i sredine stranica numerisani različitim prirodnim brojevima od $1, \ldots, 2n$, tako da su zbirovi brojeva na svakoj stranici (suma brojeva u dva vrha i broja između njih) međusobno jednaki.*

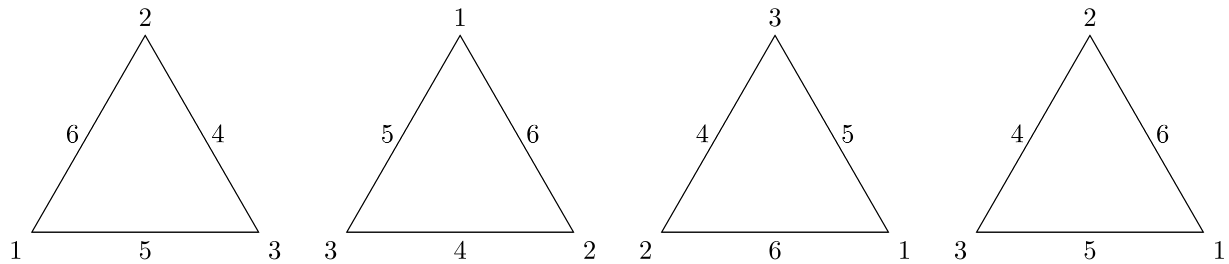
Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: poligon, sumiranje, algoritam
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: decembar 2023.



(1) $n = 3$ (2) $n = 4$ (3) $n = 5$

Slika 1: Primjeri magičnih n-touglova.

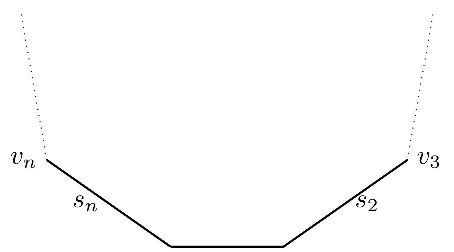
Očigledna je stvar da ako magični n-tougao zarotiramo (centar rotacije je centar opisanog kruga mnogougla), ponovo dobijamo magični n-tougao. Analogno, ako magični n-tougao osno simetrično preslikamo (osa simetrije je prava koja dijeli n-tougao na dva podudarna dijela) opet imamo magični n-tougao. Ako se neki magični n-tougao dobije rotacijom ili osnom simetrijom od nakog magičnog n-tougla jasno je da se suma po stranicama ne mijenja i pri tome oznake vrhova prelaze u oznake vrhova, a oznake stranica prelaze u oznake stranica. Za tako dobijeni magični n-tougao reći ćemo da je ekvivalentan polaznom magičnom n-touglu, a za takva rješenja kažemo da su ekvivalentna.



(1) Magični trougao (2) Rotacija 1 (3) Rotacija 2 (4) Osna simetrija

Slika 2: Ekvivalentni magični mnogouglovi.

Označimo sa v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ vrhove, a sa s_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sredine stranica pravilnog konveksnog n-tougla redom, počevši od proizvoljno izabranog vrha. Ako je posmatrani mnogougao magičan, tada vrijedi



$$\begin{aligned} v_1 + s_1 + v_2 &= M, \\ v_2 + s_2 + v_3 &= M, \\ &\ldots \\ v_i + s_i + v_{i+1} &= M, \\ &\ldots \\ v_{n-1} + s_{n-1} + v_n &= M, \\ v_n + s_n + v_1 &= M, \end{aligned} \tag{1}$$

gdje je $M \in \mathbb{N}$ i predstavlja sumu po stranicama magičnog mnogougla. Ako od ovog magičnog mnogougla formiramo novi mnogougao tako što mu vrhove označimo sa $v_i' = 2n + 1 - v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ i stranice sa $s_i' = 2n + 1 - s_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, onda za takav mnogougao kažemo da je dualan polaznom mnogouglu.

Teorem 1.1. *Dual magičnog n-tougla je opet magični n-tougao.*

Dokaz: Neka su v_i i s_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ vrhovi i stranice magičnog n-tougla čija je suma po stranicama M. Za proizvoljno $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ u dualnom mnogouglu vrijedi,

$$v'_i + s'_i + v'_{i+1} = 2n + 1 - v_i + 2n + 1 - s_i + 2n + 1 - v_{i+1} = 6n + 3 - (v_i + s_i + v_{i+1}) = 6n + 3 - M = M'.$$

Takođe je

$$v'_n + s'_n + v'_1 = 6n + 3 - M = M'.$$

Dakle, zbirovi po stranicama su konstantni i jednaki. Jasno je da zbog različitosti brojeva v_i i s_i imamo različitost i brojeva v'_i i s'_i $(i = 1, 2, \dots, n)$. Prema tome, novodobijeni mnogougao je magičan. □

Dualni magični mnogougao nije posljedica ni rotacije ni simetrije (primjetimo da se sume po stranicama dualnih magičnih mnogouglova razlikuju), te je kao takav neekvivalentan polaznom magičnom mnogouglu.

2. Suma po stranicama magičnog n-tougla

U pronalaženju "magičnosti" zadatog n-tougla ključnu ulogu igra određivanje sume po stranicama M. Jasno je da broj M ne može imati bilo kakvu vrijednost, a o tome govori naredno tvrđenje.

Teorem 2.1. *Neka je M zbir na stranici magičnog n-tougla. Tada vrijedi*

$$\left\lceil \frac{5n+3}{2} \right\rceil \le M \le \left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor. \tag{2}$$

Dokaz: Neka su v_i i s_i međusobno različiti brojevi na vrhovima i stranicama magičnog n-tougla, pri čemu su $v_i, s_i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Označimo sa V sumu svih vrhova i sa S sumu svih sredina stranica magičnog n-tougla, to jest $V = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ i $S = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$. Ako saberemo sve jednakosti u (1), dobijamo da vrijedi

$$2(v_1 + v_2 + \ldots + v_n) + (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) = nM \iff 2V + S = M. \tag{3}$$

S druge strane, kako su $v_i, s_i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ tada mora da vrijedi

$$V + S = 1 + 2 + \ldots + 2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1). \tag{4}$$

Iz jednačina (3) i (4) dobijamo

$$V = n(M - 2n - 1) \tag{5}$$
$$S = n(4n + 2 - M) \tag{6}$$

Najmanja vrijednost sume vrhova se ima ako vrhove numerišemo sa prvih n brojeva, a najveća vrijednost se ima ako numeraciju izvršimo brojevima od $n+1$ do $2n$. Koristeći se ovim i sa (5) imamo,

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + \ldots + n \le V \le (n+1) + (n+2) + \ldots + 2n, \\ \iff & \frac{n(n+1)}{2} \le n(M - 2n - 1) \le \frac{n(3n+1)}{2}, \\ \iff & \frac{5n+3}{2} \le M \le \frac{7n+3}{2}. \end{aligned}$$

Kako M mora biti prirodan broj i zbog osobina funkcija floor i ceiling, zaključujemo da vrijedi (2). □

U gornjem smo se poslužili dvjema specijalnim funkcijama. Prva je funkcija $\lfloor x \rfloor$ (čitamo *floor od x*), koja predstavlja najveći cijeli broj manji ili jednak od x, a druga je $\lceil x \rceil$ (čitamo *ceiling od x*) i predstavlja najmanji cijeli broj veći ili jednak od x. Na primjer

$$\lfloor 2.3 \rfloor = 2 \ , \ \lfloor -1.5 \rfloor = -2 \ ; \ \lceil 2.3 \rceil = 3 \ , \ \lceil -1.5 \rceil = -1.$$

Koristeći se Teoremom 2.1 imamo na primjer,

$$
\begin{aligned}
&n=3 \ \ ; \ 9 \leq M \leq 12\\
&n=4 \ \ ; \ 12 \leq M \leq 15\\
&n=5 \ \ ; \ 14 \leq M \leq 19\\
&n=6 \ \ ; \ 17 \leq M \leq 22\\
&n=7 \ \ ; \ 19 \leq M \leq 26\\
&n=8 \ \ ; \ 22 \leq M \leq 29\\
&n=9 \ \ ; \ 24 \leq M \leq 33, \ \textit{itd.}
\end{aligned}
$$

Naravno, to ne znači nužno da za svaki M mora postojati n-tougao sa tom magičnom sumom. Prvi primjer te pojave je kod petouglova jer ne postoji magični petougao sa zbirom brojeva na stranicama jednakim 15. Označimo sa M_n sumu po stranicama magičnog n-tougla ($n \geq 3$). Prema Teoremu 2.1 je $M_n' \leq M_n \leq M_n''$, gdje je $M_n' = \lceil \frac{5n+3}{2} \rceil$ i $M_n'' = \lfloor \frac{7n+3}{2} \rfloor$. Uočimo da vrijedi,

1. Ako je n paran broj:

$$
\begin{aligned}
M_{n+1}'' - M_n'' &= \left\lfloor \frac{7(n+1)+3}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor\\
&= \left\lfloor \frac{7n}{2} + 5 \right\rfloor - \left\lfloor \frac{7n}{2} + \frac{3}{2} \right\rfloor\\
&= \frac{7n}{2} + 5 - \frac{7n}{2} - 1 = 4.
\end{aligned}
$$

2. Ako je n neparan:

$$
\begin{aligned}
M_{n+1}'' - M_n'' &= \left\lfloor \frac{7(n+1)+3}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor\\
&= \left\lfloor \frac{7(n+1)}{2} + \frac{3}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{7(n+1)}{2} - 2 \right\rfloor\\
&= \frac{7(n+1)}{2} + 1 - \frac{7(n+1)}{2} + 2 = 3.
\end{aligned}
$$

Kako vrijedi

$$
M_n'' = \left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{8n-n+3}{2} \right\rfloor = 4n + \left\lfloor \frac{3-n}{2} \right\rfloor,
$$

onda je

$$
M_{n+1}'' - M_n'' = 4(n+1) + \left\lfloor \frac{2-n}{2} \right\rfloor - 4n - \left\lfloor \frac{3-n}{2} \right\rfloor. \tag{7}
$$

Posmatrajmo izraz $\lfloor \frac{2-n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{3-n}{2} \rfloor$. U zavisnosti od parnosti mogu nastupiti dvije situacije:

Ako je n paran broj, tada je

$$
\left\lfloor \frac{2-n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3-n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor 1 - \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor 1 - \frac{n-1}{2} \right\rfloor = 1 - \frac{n}{2} - \left(1 - \frac{n}{2}\right) = 0.
$$

Ako je n neparan, to jest $n = 2k+1$, tada je

$$
\left\lfloor \frac{2-n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3-n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2-2k-1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3-2k-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor 1 - k - \frac{1}{2} \right\rfloor - \lfloor 1-k \rfloor = 1-k-1-(1-k) = -1.
$$

Dakle, možemo pisati

$$\left\lfloor \frac{2-n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3-n}{2} \right\rfloor = -\frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right)\ ,\ n \geq 3.$$

Stavljajući ovo u (7) dobijamo,

$$M''_{n+1} - M''_n = 4 - \frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right)\ ,\ n \geq 3. \tag{8}$$

Sumirajući jednakosti iz (8) dobijamo,

$$M''_{n+1} - M''_3 = 4(n-2) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-3}\left(1+(-1)^i\right)\ ,\ n \geq 3, \tag{9}$$

a kako je $M''_3 = 12$, dobijamo eksplicitnu formu gornje granice za magične sume po stranicama,

$$M''_{n+1} = 12 + 4(n-2) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-3}\left(1+(-1)^i\right).$$

Kako je još

$$\sum_{i=0}^{n-3}\left(1+(-1)^i\right) = n-2+\frac{1}{2}\left(1+(-1)^{n+1}\right),$$

možemo dati naredno tvrđenje.

Teorem 2.2. *Za proizvoljno cjelobrojno $n \geq 3$ gornja granica za magičnu sumu n-tougla je data sa*

$$M''_n = \frac{7n+3}{2} - \frac{1}{4}\left(1+(-1)^n\right). \tag{10}$$

Na potpuno analogan način za gornju tvrdnju se pokazuje da vrijedi i naredno tvrđenje.

Teorem 2.3. *Za proizvoljno cjelobrojno $n \geq 3$ donja granica za magičnu sumu n-tougla je data sa*

$$M'_n = \frac{5n+3}{2} + \frac{1}{4}\left(1+(-1)^n\right). \tag{11}$$

Na osnovu ova dva tvrđenja Teorem 2.1 možemo iskazati u preciznijoj formi.

Teorem 2.4. *Neka je dat pravilan, konveksan n-tougao ($n \geq 3$). Za magičnu sumu po stranicama vrijedi*

$$\frac{5n+3}{2} + \frac{1}{4}\left(1+(-1)^n\right) \leq M_n \leq \frac{7n+3}{2} - \frac{1}{4}\left(1+(-1)^n\right).$$

Teorem 2.5. *Neka je $n \geq 3$ proizvoljan cijeli broj. Neka su k' i k'' magične sume po stranicama, takve da je $M'_n \leq k' \leq k'' \leq M''_N$, gdje su M'_n i M''_n gornja i donja granica za magične suma po stranicama. k' i k'' su dualne magične sume ako i samo ako vrijedi*

$$k'' = 6n + 3 - k'.$$

Dokaz: Neka su k' i k'' dualni zbirovi po stranicama. Iz definicije dualnosti tada imamo da je

$$\begin{aligned} k'' &= v''_i + s'' + v''_{i+1} \\ &= 2n+1-v'_i+2n+1-s'+2n+1-v'_{i+1} \\ &= 6n+3-(v'_i+s'+v'_{i+1}) \\ &= 6n+3-k'. \end{aligned}$$

Obrnuto, neka za cijele brojeve k' i k'' između gornje i donje magične sume vrijedi $k'' = 6n + 3 - k'$. Ako je k' suma po stranicama, to jest $k' = v'_i + s' + v'_{i+1}$, tada je

$$\begin{aligned} k'' &= 6n + 3 - k' \\ &= 2n + 1 - v'_i + 2n + 1 - s' + 2n + 1 - v'_{i+1} \\ &= v''_i + s'' + v''_{i+1}. \end{aligned}$$

Dakle, k'' je dualna suma po stranicama. $\square$

Nije teško vidjeti da za proizvoljno cjelobrojno $n \geq 3$, M'_n i M''_n su dualni zbirovi. Zaista, na osnovu Teorema 2.3 i Teorema 2.2 imamo

$$\begin{aligned} M''_n + M'_n &= \frac{7n+3}{2} - \frac{1}{4}\left(1 + (-1)^n\right) + \frac{5n+3}{2} + \frac{1}{4}\left(1 + (-1)^n\right) \\ &= \frac{7n+3}{2} + \frac{5n+3}{2} \\ &= 6n + 3, \end{aligned}$$

pa na osnovu Teorema 2.5 zaključujemo da su M'_n i M''_n dualne sume.

3. Pronalaženje bar dva rješenja

Kao posljedicu Teorema 2.5 smo dobili da su M'_n i M''_n dualne sume. Ostaje pitanje da li su to "magične" sume, to jest da li za te sume postoje rješenja magičnog n-tougla?
Neka je zadata n-tougao, gdje je n neparan broj. Posmatrajmo sljedeći algoritam:

K1: Numerišimo proizvoljan vrh n-tougla sa $v_1 = 2n$.

K2: Krećući se u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, preskačemo susjedni vrh (obilježen ili ne) i numerišemo naredni vrh sa $2n - 1$.

K3: Ponavljamo korak K2 dok ne numerišemo sve vrhove sa $2n - i$, $i = 2, 3, \dots n - 1$.

K4: Nakon zadnjeg numerisanog vrha numerišemo prvu narednu sredinu stranice u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, sa n.

K5: U smjeru kazaljke na satu numerišemo redom ostale sredine stranica sa $n - 1$ do 1.

Očigledno, primjenjujući gornji algoritam, za $n = 2k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$ imamo da vrijedi

$$v_i - v_{i+2} = 1 \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \quad \text{i da je} \quad v_n - v_1 = -k.$$

Nije teško vidjeti da će tada vrijediti,

$$v_i - v_{i+1} = \begin{cases} k+1 & ; \quad i = 1, 3, 5, \dots, 2k-1 \\ -k & ; \quad i = 2, 4, 6, \dots, 2k-2 \end{cases} , \ v_n - v_1 = -k.$$

Izrazimo li gornju jednakost na drugačiji način, to jest

$$v_i - v_{i+1} = \frac{1}{2} - \frac{2k+1}{2}(-1)^i \ , \ i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

dobijamo eksplicitnu formulu za numerisanje vrhova datog n-tougla,

$$v_{i+1} = v_i - \frac{1}{2}\left(1 - n(-1)^i\right) \ , \ i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \ \text{ i } \ v_1 = 2n. \tag{12}$$

Koristeći se formulom (12) ili analizom datog algoritma, jednostavno se je uvjeriti da vrijede sljedeće formule za numeraciju vrhova i sredina stranica n-tougla, kada je $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$).

$$v_i = \begin{cases} 2n - m & ; \quad i = 2m + 1 \\ 2n - (k + m) & ; \quad i = 2m \end{cases} , \ i = 2, 3, \ldots, n \ ; \quad v_1 = 2n. \tag{13}$$

$$s_i = i + 1 \ , \ i = 1, 2, \ldots, n - 1 \ ; \quad s_n = 1. \tag{14}$$

Vratimo se sada na pitanje da li ovaj algoritam daje magični n-tougao. Neka su v_i i v_{i+1} vrhovi i s_i sredina iste stranice posmatranog n-tougla. Bez umanjenja opštosti neka je i paran broj, to jest $i = 2m$ i po polaznoj pretpostavci o neparnosti neka je $n = 2k + 1$. Na osnovu formula (13) i (14) imamo,

$$\begin{aligned} v_i + s_i + v_{i+1} &= 2n - (k + m) + 2m + 1 + 2n - m \\ &= 4n - k + 1 \\ &= 4n - \frac{n-1}{2} + 1 \\ &= \frac{7n+3}{2}. \end{aligned}$$

Kao prvo, uočavamo da je gornja suma neovisna o indeksu i, te zaključujemo da će sume po bilo kojoj stranici datog n-tougla biti jednake. Dakle, algoritam daje magični mnogougao i on predstavlja jedno rješenje problema za neparne n.

Kao drugo, uočimo da dobijena magična suma po stranicama nije ništa drugo do M''_n iz Teorema 2.4. Ovo nam obezbjeđuje i drugo rješenje problema, a koje dobijamo pravljenjem duala od rješenja dobijenog gore navedenim algoritmom. Šta više, magična suma po stranicama ovog dualnog rješenja je upravo M'_n jer je dualna suma od M''_n suma M'_n.

Algoritam za minimalni magični n-tougao (suma po stranicama jednaka M'_n) za paran n je nešto komplikovaniji. Sljedeća konstrukcija je preuzeta iz [4] i [3]. Neka je suma po stranicama $M = \frac{5n+4}{2}$ (n je paran, pa osnovu Teorema 2.4 je $M = M'_n$). Razmatrat ćemo dva algoritma, jedan za $n \equiv 0 \pmod 4$ i drugi za $n \equiv 2 \pmod 4$.

Za $n \equiv 0 \pmod 4$, odaberimo proizvoljan vrh i redajmo brojeve na vrhovima n-tougla u smjeru kazaljke na satu (smjer i nije toliko važan jer redanjem u suprotnom smjeru dobijamo ekvivalentno rješenje)

- $1 \to \frac{3}{2}n \to 2,$
- $2 \to \frac{n}{2} \to 3 \to \frac{n}{2} + 1 \to 4 \to \ldots \to \frac{n}{4} - 1 \to \frac{3}{4}n - 3 \to \frac{n}{4} \to \frac{3}{4}n - 2 \to \frac{n}{4} + 1,$
- $\frac{n}{4} + 1 \to \frac{3}{4}n \to \frac{3}{4}n - 1 \to \frac{3}{4}n + 1,$
- $\frac{3}{4}n + 1 \to \frac{n}{4} + 2 \to \frac{3}{4}n + 2 \to \frac{n}{4} + 3 \to \ldots \to n - 3 \to \frac{n}{2} - 2 \to n - 2 \to \frac{n}{2} - 1 \to n - 1.$

Za $n \equiv 2 \pmod 4$, redajmo vrhove na sljedeći način,

- $1 \to \frac{3}{2}n \to 2,$
- $2 \to \frac{n}{2} \to 3 \to \frac{n}{2} + 1 \to 4 \to \ldots \to \frac{n+2}{4} - 1 \to \frac{3n+2}{4} - 3 \to \frac{n+2}{4} \to \frac{3n+2}{4} - 2,$
- $\frac{3n+2}{4} - 2 \to \frac{3n+2}{4} \to \frac{3n+2}{4} - 1 \to \frac{n+2}{4} + 1,$
- $\frac{n+2}{4} + 1 \to \frac{3n+2}{4} + 1 \to \frac{n+2}{4} + 2 \to \frac{3n+2}{4} + 2 \to \ldots \to \frac{n}{2} - 2 \to n - 2 \to n - 2 \to \frac{n}{2} - 1 \to n - 1.$

Prateći prethodno dobijamo eksplicitno koji su brojevi na vrhovima poligona:

- Ako je $n \equiv 0 \pmod 4$

$$v_i = \begin{cases} \frac{i+1}{2} & i = 1, 3, \ldots, \frac{n}{2} + 1 \\ \frac{3n}{2} & i = 2 \\ \frac{n+i}{2} & i = 4, 6, \ldots, \frac{n}{2} \\ \frac{i+2}{2} & i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \ldots, n \\ \frac{n+i-1}{2} & i = \frac{n}{2} + 3, \frac{n}{2} + 5, \ldots, n - 1. \end{cases}$$

- Ako je $n \equiv 2 \pmod 4$

$$v_i = \begin{cases} \frac{i+1}{2} & i = 1, 3, \ldots, \frac{n}{2} \\ \frac{3n}{2} & i = 2 \\ \frac{n+i+2}{2} & i = 4, 6, \ldots, \frac{n}{2} - 1 \\ \frac{n+6}{4} & i = \frac{n}{2} + 1 \\ \frac{i+3}{2} & i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \ldots, n - 1 \\ \frac{n+i}{2} & i = \frac{n}{2} + 3, \frac{n}{2} + 5, \ldots, n - 2 \\ \frac{n}{2} + 2 & i = n. \end{cases}$$

Da li ovi algoritmi daju magični n-touguao? To ćemo pokazati tako što pokažemo da su s_i dobiveni formulom $s_i = M - v_i - v_{i+1} = \dfrac{5n+4}{2} - v_i - v_{i+1}$ međusobno različiti i nalaze se između 1 i $2n$.

Za slučaj $n \equiv 0 \pmod 4$, koristeći se navedenom formulom dobijamo da su brojevi na stranicama

$$s_i = \begin{cases} \dfrac{5n+4}{2} - 1 - \dfrac{3n}{2} & i = 1 \\ \dfrac{5n+4}{2} - \dfrac{3n}{2} - 2 & i = 2 \\ \dfrac{5n+4}{2} - \dfrac{\frac{n}{2}+2}{2} - \dfrac{\frac{n}{2}+2+2}{2} & i = \frac{n}{2} + 1 \\ \dfrac{5n+4}{2} - \dfrac{n+2}{2} - 1 & i = n \\ \dfrac{5n+4}{2} - \dfrac{i+1}{2} - \dfrac{n+i+1}{2} & i = 3, 5, \ldots, \frac{n}{2} - 1 \\ \dfrac{5n+4}{2} - \dfrac{n+i}{2} - \dfrac{i+2}{2} & i = 4, 6, \ldots, \frac{n}{2} \\ \dfrac{5n+4}{2} - \dfrac{i+2}{2} - \dfrac{n+i}{2} & i = \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 4, \ldots, n - 2 \\ \dfrac{5n+4}{2} - \dfrac{n+i-1}{2} - \dfrac{i+3}{2} & i = \frac{n}{2} + 3, \frac{n}{2} + 4, \ldots, n - 1, \end{cases}$$

to jest

$$s_i = \begin{cases} n+1 & i = 1 \\ n & i = 2 \\ 2n-1 & i = \frac{n}{2} + 1 \\ 2n & i = n \\ 2n+1-i & i = 3, 4, 5, 6, \ldots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 2, \ldots n - 1. \end{cases}$$

Jasno je da je $1 \leq s_i \leq 2n$ i jednostavnom provjerom nije teško uočiti da je $v_i \neq v_j \neq s_i \neq s_j$ za proizvoljne

$i \neq j$. Analogno bi se pokazalo da za $n \equiv 2 \pmod 4$ vrijedi

$$s_i = \begin{cases} n+1 & i=1 \\ n & i=2 \\ 2n & i=\frac{n}{2} \\ \dfrac{3n}{2}-1 & i=n-1 \\ 2n-1 & i=n \\ 2n-i & i=3,4,5,6,\ldots,\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1,\ldots n-2, \end{cases}$$

i vidimo također da vrijedi $1 \leq s_i \leq 2n$ i $v_i \neq v_j \neq s_i \neq s_j$ za proizvoljne $i \neq j$.

4. Algoritmi za nalaženje magičnih poligona

Magične n-touglove ćemo tražiti "brute force" algoritmom.
Na osnovu prethodnog vidimo da je za pronalaženje magičnog n-tougla dovoljno odrediti sve takve sa zbirom na stranicama koji zadovoljava

$$\left\lceil \frac{5n+3}{2} \right\rceil \leq M \leq \left\lceil \frac{5n+3}{2} \right\rceil + \frac{1}{2}\left(\left\lfloor \frac{7n+3}{2} \right\rfloor - \left\lceil \frac{5n+3}{2} \right\rceil \right)$$

jer preostale dobijamo preko dualnosti. Koristeći se dualnošću možemo zaključiti da ako ne postoji magični petougao sa zbirom na stranicama 15, tada ne može postojati ni petougao sa zbirom 18 jer su jedan drugom duali.
Jedna ideja je da za n-tougao sa zbirom na stranicama M najprije nađemo sve moguće vrhove koristeći se (3). Ova nam formula daje šta je zbir svih brojeva na vrhovima, pa moguće vrhove nalazimo kao razlaganje broja M na zbir n različitih prirodnih brojeva. Pretragu vršimo nad svim permutacijama mogućih vrhova. Implementacija navedenog alogritma je data u Implementacija 1.

Implementacija 1: Brute force metoda

```
(*Ulaz broj vrhova*)
n = 5;
(*Funkcija za provjeru ekvivalentnih *)
simrot[ listajed_ , listadva_ ] :=
 Module[{i, j , priv , n = Length[ listajed ]},
  priv = Join[ listadva , listadva ];
  For[ i = 0, i <= Floor[(n - 1)/2], i++,
   If [ listajed == Table[priv[[j ]], {j , 1 + 2 i , n + 2 i }],
    Return[True ]];
   If [ listajed ==
     Join[{ priv [[1 + 2 i ]]},
      Table[ priv [[ j ]], {j, n + 2 i, 2 i + 2, -1}]], Return[True ]];];
  Return[False ]];
(*Funkcija za razlaganje M u n razlicitih sabiraka*)
 particija [V_, k_, n_] := Module[{it},
   If [k == 1, Return[{{V}}],
     Return[
      Join [Table[
          Map[Join[{it}, #] &, particija [V - it, k - 1, it ]], {it ,
           Ceiling [(-k + k^2 + 2 V)/(2 k)],
           Min[(k - k^2 + 2 V)/2, n - 1]}]] // Catenate ]];];
magntouglov = {};
(*Glavna petlja po zbiru na stranicama*)
For[M = Ceiling[(5 n + 3)/2],
  M <= Ceiling[(5 n + 3)/
       2] + (1/2) (Floor[(7 n + 3)/2] - Ceiling [(5 n + 3)/2]), M++,
(*Konstruisanje vrhova*)
  V = n (M - 2 n - 1);
```

```
  mogvrhovi = particija [V, n, 2 n + 1];
  For[i = 1, i <= Length[mogvrhovi], i++,
   ntouglovi = {};
   vrhovintougl = Permutations[mogvrhovi[[i]]];
(*Konstruisanje magicnih poligona*)
   For[j = 1, j <= Length[vrhovintougl], j++,
    AppendTo[ntouglovi,
     Table[If[Mod[i, 2] == 1, vrhovintougl[[j, (i + 1)/2]],
       M - vrhovintougl[[j, i/2]] - vrhovintougl[[j, i/2 + 1]]], {i,
       1, 2 n - 1}]]
    ];
   For[j = 1, j <= Length[ntouglovi], j++,
    AppendTo[ntouglovi[[j]],
     M - ntouglovi[[j, 2 n - 1]] - ntouglovi[[j, 1]]]
    ];
   For[j = 1, j <= Length[ntouglovi], j++,
    If[AllTrue[ntouglovi[[j]], (1 <= # <= 2 n) &],
      If[DuplicateFreeQ[ntouglovi[[j]]],
       AppendTo[magntouglov, ntouglovi[[j]]]
        ]];];];
(* Izbacivanje ekvivalentnih medju njima*)
kraj = Length[magntouglov];
For[i = 1, i <= kraj - 1, i++,
  For[j = i + 1, j <= kraj, j++,
    If[simrot[magntouglov[[i]], magntouglov[[j]]],
      magntouglov = Delete[magntouglov, j];
      kraj = kraj - 1;
      j = j - 1;
       ];];];
(*Dodavanje dualnih ntouglova*)
kraj = Length[magntouglov];
For[i = 1, i <= kraj, i++,
  AppendTo[magntouglov,
    Table[2 n + 1, {i, 1, 2 n}] - magntouglov[[i]]];];
magntouglov
```

Ova implementacija uzima n kao Ulaz, što je broj vrhova, a kao izlaz izbacuje listu *magntouglovi* magičnih n-touglova kao liste $2n$ brojeva $\{v_1, s_1, v_2, s_2, \ldots, v_n, s_n\}$. Najprije je uvedena funkcija *simrot*, kôd (*Funkcija za provjeru ekvivalentnih*) koja provjerava da li je jedan n-tougao ekvivalentan drugom n-touglu. Uvedena je i funkcija *particija*, kôd (*Funkcija za razlaganje M u n razlicitih sabiraka*) koja nam daje sve moguće načine da se V napiše kao zbir k različitih brojeva ne većih od n. Algoritam je sljedeći

- (*Glavna petlja po zbiru na stranicama*) Glavna petlja ide po zbiru brojeva na stranici M, čije granice znamo na osnovu Teorema 2.4. Ne idemo po svim jer ćemo dodati dualne na kraju algoritma.

- (*Konstruisanje vrhova*) Za zbir na stranici M, nađimo sve moguće vrhove kao particiju zbira vrhova V koju dobijemo pomoću formule (5), a zatim napravimo listu svih mogućih permutacija svakog od njih.

- (*Konstruisanje magicnih poligona*) Zatim konstruišemo n-touglove tako što dopunimo sredine stranica formulom $M - v_i - v_i + 1$. Provjeravamo da li su dati n-touglovi magični n-touglovi, to jest provjeravamo da li su poredani različiti brojevi od 1 do 2n, i na kraju ubacujemo u listu *magntouglov*.

- (*Izbacivanje ekvivalentnih medju njima*) Izbacujemo sve one koje su međusobno ekvivalntni, koristeći se funkcijom *simrot*.

- (*Dodavanje dualnih ntouglova*) Dodamo preostale dualne magične n-touglove u našu konačnu listu *magntouglov*.

Druga ideja za pretragu jeste da se nađu sve moguće stranice, to jest da nađemo sve moguće različite trojke brojeva iz skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, a zatim da magične n-touglove nalazimo spajanjem tih stranica čije vrhove i sredine numerišemo prema nađenim trojkama brojeva. Kôd je dat u Implementacija 2. Ova implementacija uzima n kao ulaznu veličinu, to je broj vrhova, a kao izlaz izbacuje listu *svintouglovi* magičnih n-touglova kao liste od $2n$ brojeva u formi $\{v_1, s_1, v_2, s_2, \ldots, v_n, s_n\}$ (brojevi pridruženi vrhovima i sredinama stranica).

Implementacija 2: Stranica po stranica metoda

```
n = 5;
(*Funkcija za provjeru ekvivalnetnih*)
simrot[listajed_, listadva_] :=
 Module[{i, j, priv, n = Length[listajed]},
  priv = Join[listadva, listadva];
  For[i = 0, i <= Floor[(n - 1)/2], i++,
   If[listajed == Table[priv[[j]], {j, 1 + 2 i, n + 2 i}],
    Return[True]];
   If[listajed ==
     Join[{priv[[1 + 2 i]]},
      Table[priv[[j]], {j, n + 2 i, 2 i + 2, -1}]], Return[True]];];
  Return[False]]
 svintouglovi = {};
(*Glavna petlja*)
For[M = Ceiling[(5 n + 3)/2],
 M <= Ceiling[(5 n + 3)/
     2] + (1/2) (Floor[(7 n + 3)/2] - Ceiling[(5 n + 3)/2]), M++,
 stranice = Table[{}, {i, 1, 2 n}];
 ntouglovi = {};
(*Generisanje stranica*)
 For[j = 1, j <= 2 n - 1, j++,
  For[k = j + 1, k <= 2 n, k++,
    If[j != M - j - k && k != M - j - k && 1 <= M - j - k &&
      M - j - k <= 2 n,
     AppendTo[ntouglovi, {j, M - j - k, k}];
     AppendTo[stranice[[j]], {j, M - j - k, k}];
     AppendTo[stranice[[k]], {k, M - j - k, j }]];];];
(*Konstruisanje prvih n-1 stranica*)
 For[i = 1, i <= n - 2, i++,
  novintouglovi = {};
  For[j = 1, j <= Length[ntouglovi], j++,
   For[k = 1, k <= Length[stranice[[ntouglovi[[j, 2 i + 1]]]]], k++,
    kand =
     Join[ntouglovi[[j]], {stranice[[ntouglovi[[j, 2 i + 1]], k, 2]],
        stranice[[ntouglovi[[j, 2 i + 1]], k, 3]]}];
    If[DuplicateFreeQ[kand], AppendTo[novintouglovi, kand]]];];
  ntouglovi = novintouglovi;];
(*Konstruisanje n-tougla*)
 novintouglovi = {};
 For[j = 1, j <= Length[ntouglovi], j++,
  If[1 <= M - ntouglovi[[j, 1]] - ntouglovi[[j, 2 n - 1]] <= 2 n,
   kand =
    Append[ntouglovi[[j]],
     M - ntouglovi[[j, 1]] - ntouglovi[[j, 2 n - 1]]];
    If[DuplicateFreeQ[kand], AppendTo[novintouglovi, kand]];];];
 ntouglovi = novintouglovi;
(*Izbacivanje medjusobno ekvivalentnih*)
 kraj = Length[ntouglovi];
 For[i = 1, i <= kraj - 1, i++,
  For[j = i + 1, j <= kraj, j++,
    If[simrot[ntouglovi[[i]], ntouglovi[[j]]],
     ntouglovi = Delete[ntouglovi, j];
     kraj = kraj - 1;
     j = j - 1;];];];
 (*Dodavanje ukupnom rjesenju*)
 AppendTo[svintouglovi, ntouglovi]
 ]
 svintouglovi = svintouglovi // Catenate;
```

```
(*Ubacivanje dualnih ntouglova*)
kraj = Length[svintouglovi];
For[i = 1, i <= kraj, i++,
  AppendTo[svintouglovi,
    Table[2 n + 1, {i, 1, 2 n}] - svintouglovi[[i]]];];
svintouglovi
```

Najprije je uvedena funkcija *simrot* kod (*Funkcija za provjeru ekvivalentnih*) koja provjerava da li je jedan n-tougao ekvivalentan drugom n-touglu. Algoritam je sljedeći

- (*Glavna petlja po zbiru na stranicama*) Glavna petlja ide po zbiru brojeva stranici M, čije granice znamo na osnovu Teorema 2.4. Ne idemo po svim jer ćemo dodati dualne na kraju algoritma.

- (*Generisanje stranica*) Najprije za M se generišu sve moguće stranice. Te stranice pohranjujemo u listu *stranice* i u listu *ntougao*, kao početne iteracije za naše n-touglove. Biramo samo one stranice koje su moguće da se nađu u magičnom n-touglu.

- (*Konstruisanje prvih n-1 stranica*) Zatim konstruišemo još $n-1$ stranicu. Svakom u listi *ntougao* pridržimo sve moguće stranice sa desna, tako da zadnji element u n-touglu je isti kao prvi element u listi koji predstavlja stranicu. Svi takvi validni se pohranjuju u *ntougao* i ponovo ponavljamo postupak, gdje pod validnim podrazumijevamo da imaju različite brojeve od 1 do $2n$.

- (*Konstruisanje n-tougla*) Zatim konstruišemo n-tougao tako što pridružimo posljednji broj s_n. Izbacujemo ga ako nije validan.

- (*Izbacivanje medjusobno ekvivalentnih*) Izbacujemo sve one koje su međusobno ekvivalentni, koristeći se funkcijom *simrot*.

- (*Ubacivanje dualnih ntouglova*) Dodamo preostale dualne magične n-touglove u našu konačnu listu *magntouglov*.

U Tablici 1 i Tablici 2 su dati svi magični petouglovi i šestouglovi. Dobijamo i da magičnih sedmouglova ima 128, dok magičnih osmouglova ima 282.

R.Br	Poligon $\{v_1, s_1, v_2, \ldots\}$	Suma na stranici
1.	5, 6, 3, 10, 1, 9, 4, 8, 2, 7	14
2.	9, 2, 5, 10, 1, 8, 7, 6, 3, 4	16
3.	10, 2, 4, 9, 3, 6, 7, 8, 1, 5	16
4.	2, 9, 6, 1, 10, 3, 4, 5, 8, 7	17
5.	1, 9, 7, 2, 8, 5, 4, 3, 10, 6	17
6.	6, 5, 8, 1, 10, 2, 7, 3, 9, 4	19

Tablica 1: Magični petouglovi

R.Br.	Poligon $\{v_1, s_1, v_2, \ldots\}$	Zbir na stranici
1.	7, 4, 6, 8, 3, 12, 2, 10, 5, 11, 1, 9	17
2.	7, 4, 6, 10, 1, 11, 5, 9, 3, 12, 2, 8	17
3.	9, 6, 2, 12, 3, 10, 4, 8, 5, 11, 1, 7	17
4.	10, 3, 5, 11, 2, 12, 4, 6, 8, 9, 1, 7	18
5.	11, 1, 7, 9, 3, 12, 4, 10, 5, 8, 6, 2	19
6.	11, 2, 6, 12, 1, 10, 8, 4, 7, 9, 3, 5	19
7.	11, 1, 7, 10, 2, 8, 9, 6, 4, 12, 3, 5	19
8.	11, 5, 3, 12, 4, 6, 9, 2, 8, 10, 1, 7	19
9.	12, 2, 5, 6, 8, 10, 1, 11, 7, 9, 3, 4	19
10.	12, 2, 5, 11, 3, 9, 7, 4, 8, 10, 1, 6	19
11.	2, 12, 6, 4, 10, 1, 9, 3, 8, 5, 7, 11	20
12.	2, 11, 7, 1, 12, 3, 5, 9, 6, 4, 10, 8	20
13.	2, 12, 6, 3, 11, 5, 4, 7, 9, 1, 10, 8	20
14.	2, 8, 10, 1, 9, 7, 4, 11, 5, 3, 12, 6	20
15.	1, 11, 8, 7, 5, 3, 12, 2, 6, 4, 10, 9	20
16.	1, 11, 8, 2, 10, 4, 6, 9, 5, 3, 12, 7	20
17.	3, 10, 8, 2, 11, 1, 9, 7, 5, 4, 12, 6	21
18.	6, 9, 7, 5, 10, 1, 11, 3, 8, 2, 12, 4	22
19.	6, 9, 7, 3, 12, 2, 8, 4, 10, 1, 11, 5	22
20.	4, 7, 11, 1, 10, 3, 9, 5, 8, 2, 12, 6	22

Tablica 2: Magični šestouglovi

Literatura

[1] T. Trotter, Jr.: *Normal Magic Triangles of Order n*, Journal of Recreational Mathematics, Vol. 5,, No. 1, 1972.
[2] T. Trotter, Jr.: *Perimeter-magic Polygons*, Journal of Recreational Mathematics, Vol. 7,, No. 1, 1974.
[3] O. Berkman, M. Parnas, Y. Roditty: *All Cycles are Edge-Magic* Ars Comb. 59., 2001.
[4] A.M. Marr, W.D. Wallis: *Magic Graphs*, Birkhauser 2013.
[5] V. Jakicic, R. Bouchat: *Magic Polygons and Their Properties*, arXiv:1801.02262 [math.CO], 2018.
[6] D.D. Augusto, J.S. Rocha: *Magic Polygons and Degenerated Magic Polygons: Characterization and Properties*, Asian Research Journal of Mathematics July 2019.