БМО 1990

1. Нека $a_1=1, a_2=3$ и $a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$, за секој $n=1,2,\dots$. Определи ги сите броеви n за кои a_n е делив со 11.

Решение. *Прв начин.* Од рекурентната врска следува дека ако два последователни члена на низата се деливи со 11, тогаш сите следни членови се деливи со 11. Со непосредна проверка се добива дека a_{10} и a_{11} се деливи со 11, а меѓу членовите $a_1, a_2, ..., a_9$ само a_4 и a_8 се деливи со 11. Според тоа, a_n е делив со 11 за $n=4, n=8$ и $n\geq 10$.

Втор начин. Ставаме $b_n=a_{n+1}-a_n$, за $n=1,2,\dots$. Тогаш рекурзијата можеме да ја запишеме во видот $b_{n+1}=(n+2)b_n$, за $n=1,2,3,\dots$. Бидејќи $a_2-a_1=2$, со индукција лесно се докажува дека $b_n=(n+1)!$, за $n=1,2,3,\dots$. Значи,

$$\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)!=\sum_{i=1}^{n-1}b_i=\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)=a_n-a_1=a_n-1.$$

Затоа $a_n=\sum_{i=1}^{n} i!$. Јасно, ако $n\geq 11$, бројот $n!$ е делив со 11, така што ако $n=11,12,...$ имаме $a_n\equiv a_{10}(\mathrm{mod}\,11)$. Понатаму, ако ги земеме предвид остатоците на броевите $1!, 2!, ..., 10!$ по модул 11, добиваме:

$a_1\equiv 1(\mathrm{mod}\,11)$, $a_2\equiv 3(\mathrm{mod}\,11)$, $a_3\equiv 9(\mathrm{mod}\,11)$, $a_4\equiv 0(\mathrm{mod}\,11)$, $a_5\equiv 10(\mathrm{mod}\,11)$,
$a_6\equiv 4(\mathrm{mod}\,11)$, $a_7\equiv 6(\mathrm{mod}\,11)$, $a_8\equiv 0(\mathrm{mod}\,11)$, $a_9\equiv 1(\mathrm{mod}\,11)$, $a_{10}\equiv 0(\mathrm{mod}\,11)$.

Од досега изнесеното следува дека a_n е делив со 11 за $n=4, n=8$ и $n\geq 10$.

2. Нека $p(x)$ е полином дефиниран со равенството

$$P(x)\equiv a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}=(1\cdot x+2x^2+3x^3+...+nx^n)^2.$$

Докажи, дека

$$a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{2n}=\frac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24}.$$

Решение. Ќе ги искористиме познатите равенства

$$S_1=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},\ S_2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ и } S_3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Тогаш $P(1)=\sum_{i=0}^{2n}a_i=S_1^2$. Од друга страна, од принципот на споредување на коефициентите, следува дека за секој фиксиран $k\in\{0,1,2,...,n\}$ важи

$$a_k=\sum_{i=0}^{k}i(k-i)=k\sum_{i=0}^{k}i-\sum_{i=0}^{k}i^2=\frac{k^2(k+1)}{2}-\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{k^3-k}{6}.$$

Според тоа,

$$a_0+a_1+...+a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^3-k}{6}=\frac{S_1^2-S_1}{6}$$

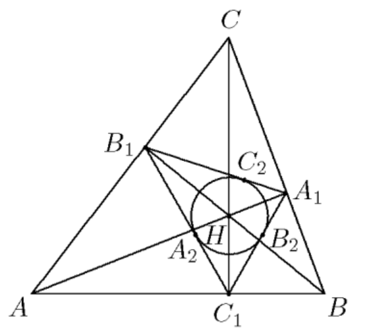
и за бараниот збир добиваме

$$a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{2n}=P(1)-\sum_{k=0}^{n}a_k=S_1^2-\frac{S_1^2-S_1}{6}$$

$$=\frac{5S_1^2+S_1}{6}=\frac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24}.$$

3. Нека ABC е остроаголен триаголник кој не е рамнострам. Нека A_1, B_1, C_1 се подножјата на висините повлечени соодветно од темињата A, B, C и нека A_2, B_2, C_2 се допирните точки на впишаната кружница во $\triangle A_1B_1C_1$ со неговите страни. Докажи дека Ојлеровите прави на $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$ се совпаѓаат.

Забелешка. Ојлеровата права на даден триаголник е правата определена од ортоцентарот и центарот на опишаната кружница околу триаголникот.



Решение. Ќе го користиме фактот дека висините на $\triangle ABC$ се симетрали на аглите на $\triangle A_1B_1C_1$ (Докажи!). Според тоа, ортоцентарот H на $\triangle ABC$ е центар на впишаната кружница k во $\triangle A_1B_1C_1$, која истовремено е опишана кружница околу $\triangle A_2B_2C_2$. Значи, Ојлеровите прави l и l_2 соодветни на $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$ имаат заедничка точка H. Од рамнокракиот $\triangle B_2C_2A_1$ следува дека $AA_1 \perp B_2C_2$, па затоа $B_2C_2 \parallel BC$. Аналогно се докажува дека $A_2B_2 \parallel AB$ и $A_2C_2 \parallel AC$. Според тоа, $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$ се слични, па затоа постои хомотетија h која $\triangle ABC$ го пресликува во $\triangle A_2B_2C_2$. Но, тоа значи дека $h(l)=l_2$, од каде следува $l \parallel l_2$. Но, правите l и l_2 имаат заедничка точка H, па затоа тие се совпаѓаат.

4. Определи го минималниот број елементи на конечното множество A за кое постои функција $f:\mathbb{N}\to A$ со следново својство: $f(i)\neq f(j)$ секогаш кога $|i-j|$ е прост број.

Решение. Нека функцијата $f:\mathbb{N}\to A$ го има саканото својство. Да ги разгледаме броевите 1, 3, 6 и 8. Разликата меѓу секои два од овие броеви е прост број. Тогаш $f(1), f(3), f(6), f(8)$ се различни елементи од A, па затоа A има барем 4 елементи.

Ќе докажеме дека минималниот број елементи на A е четири, така што ќе конструираме функција $f:\mathbb{N}\to A$ со разгледуваното својство, за која A има четири елементи. Нека $A=\{0,1,2,3\}$ и за секој n нека $f(n)$ е остатокот од делењето на n со 4. Очигледно f е добро дефинирана, бидејќи $f(n)\in\{0,1,2,3\}$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Нека $i,j\in\mathbb{N}$ и $|i-j|$ е прост број. Ако допуштиме $f(i)=f(j)$, од дефиницијата на f следува дека $i\equiv j(\mathrm{mod}\,4)$. Но, во тој случај $|i-j|$ е делив со 4, т.е. $|i-j|$ е сложен број, што е противречност. Според тоа, минималниот број елементи на A е 4.