

**Ристо Малчески**  
**Вера Малческа**

# **МАТЕМАТИКА 4**

## **КАЛКУЛУС (ВТОР ДЕЛ)**

Скопје, 2011

Рецензенти:

Д-р Марија Оровчанец, ред. проф. на Природно-математички факултет, Скопје

Д-р Алекса Малчески, вон. проф. на Машински факултет, Скопје

Издавач: ФОН универзитет, Скопје

Компјутерска обработка: Ристо Малчески

Тираж: 200 примероци

Ниту еден дел на оваа книга не смее да се умножува, фотокопира, ниту на било кој друг начин да се репродуцира без писмено одобрување на издавачот или авторот.

Печати: \*\*\*\*\*, Скопје

## СОДРЖИНА

### ПРЕДГОВОР

vii

### XVIII глава

#### ВЕКТОРСКИ ФУНКЦИИ ОД ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

1. Поим за векторска функција. Основни својства	1
2. Извод и диференцијал на векторска функција	4
3. Интеграл од векторска функција	11
4. Поим за крива во $\mathbf{R}^n$	13
5. Ориентација на крива	16
6. Сингуларни точки. Глатка и глатка по делови крива	19
7. Должина на крива	20
8. Тангента на крива. Природен параметар на крива	22
9. Природен триедар на крива	28
10. Формули на Френе. Кривина и торзија на крива	31
Задачи	36

### XIX глава

#### ФУНКЦИИ ОД ПОВЕЌЕ РЕАЛНИ ПРОМЕНЛИВИ

1. Сферна и правоаголна околина на точка	41
2. Отворени и затворени множества	43
3. Област во $\mathbf{R}^n$	45
4. Низи точки во $\mathbf{R}^n$	46
5. Граница на функција од повеќе променливи	51
6. Непрекинати функции	60
7. Функции непрекинати на ограничени и затворени множества	64
Задачи	69

### XX глава

#### ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ НА ФУНКЦИИ ОД ПОВЕЌЕ РЕАЛНИ ПРОМЕНЛИВИ

1. Извод по правец. Парцијални изводи	73
2. Диференцијабилни функции	77

3.	Тангентна рамнина и нормална права	85
4.	Диференцирање на сложена функција	88
5.	Инваријантна форма на првиот диференцијал во однос на изборот на променливите	91
6.	Изводи и диференцијали од повисок ред	94
7.	Тајлорова формула	101
8.	Екстремни вредности на реална функција од повеќе променливи	105
9.	Доволен услов за локален екстрем	107
10.	Имплицитни функции. Основни својства	113
11.	Имплицитни функции зададени со системи равенки	119
12.	Диференцијабилни пресликувања	123
13.	Зависни функции	126
14.	Замена на променливите	128
15.	Условни екстреми	133
	Задачи	139

## XXI глава

### ОБИЧНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

1.	Воведни поими	151
2.	Теорема за егзистенција и единственост на решението за задачата на Коши за равенката $y' = f(x, y)$	152
3.	Линеарна диференцијална равенка со разделувачки променливи	156
4.	Хомогена диференцијална равенка	158
5.	Линеарна диференцијална равенка од прв ред	161
6.	Бернулиева диференцијална равенка	163
7.	Интегрирање на тотален диференцијал	165
8.	Рикатиева диференцијална равенка	168
9.	Диференцијални равенки кои не се решени по извод	170
10.	Лагранжова и Клерова диференцијална равенка	173
11.	Задача на Коши за диференцијални равенки од повисок ред	175
12.	Равенки од повисок ред кои допуштаат снижување на редот	177
13.	Линеарна диференцијална равенка од $n$ – ти ред	180
14.	Линеарно зависни и линеарно независни системи функции	183
15.	Структура на општото решение на линеарна хомогена диференцијална равенка	186
16.	Линеарна хомогена диференцијална равенка со константни коефициенти	190
17.	Линеарни нехомогени диференцијални равенки	196
18.	Интегрирање на линеарни нехомогени диференцијални равенки со метод на варијација на константите	198

19. Ојлерова диференцијална равенка од втор ред	202
20. Системи диференцијални равенки. Основни поими	204
21. Методи на интегрирање системи диференцијални равенки	206
22. Системи линеарни диференцијални равенки	210
23. Системи линеарни диференцијални равенки со константни коефициенти	215
Задачи	218

## **XXII глава**

### **ИНТЕГРАЛНО СМЕТАЊЕ НА ФУНКЦИИ**

### **ОД ПОВЕЌЕ РЕАЛНИ ПРОМЕНЛИВИ**

1. Мера на Жордан	223
2. Множества со мера нула	232
3. Риманов интеграл од функција од повеќе променливи	234
4. Својства на Римановиот интеграл од функција од повеќе променливи	238
5. Сведување на повеќекратен интеграл на повторен интеграл	244
6. Линиски интеграл од прв вид	251
7. Линиски интеграл од втор вид	256
8. Векторско поле. Потенцијал	261
9. Гринова формула	263
10. Замена на променливи во повеќекратен интеграл	269
11. Примена на повеќекратните интеграл Задачи	276
	280
Литература	291
Индекс	293
За авторот	299



## ПРЕДГОВОР КОН ТРЕТОТО ИЗДАНИЕ

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките, каде нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Оваа книга е продолжение на книгата Математика 3 – калкулус (прв дел) и содржи дел од предавањата по предметот Калкулус 2 за студентите по информатика на ФОН универзитетот во Скопје. За разлика од второто издание, во ова издание се изоставени содржините од линеарната алгебра, но е вклучена нова глава: векторски функции од една реална променлива. Материјалот во книгата е поделен на пет глави и тоа:

1. Векторски функции од една реална променлива
2. Функции од повеќе реални променливи
3. Диференцијално сметање на реални функции од повеќе променливи,
4. Обични диференцијални равенки.
5. Интегрално сметање на функции од повеќе реални променливи,

Содржините кои се разработени во петте глави во целост кореспондираат со насловите. Имајќи ја предвид тежината на материјалот, но и студентите за кои е наменета оваа книга, дел од теоремите се дадени без доказ и примената на истите е илустрирана преку примери. Притоа, во втората глава се разгледувани низите точки, отворените и затворените множества во реалната рамнина и тоа во обем кој е доволен за усвојување на непрекинатоста, диференцијабилноста и интегралноста на функциите од повеќе реални променливи. Во споредба со претходните изданија петтата глава е целосно преработена, така да во неа детално се разработени мерата на Жордан, линиските интегрални од прв и втор вид, Гриновата формула, векторското поле и потенцијалот на векторско поле, како и примената на двојниот и тројниот интеграл во геометријата.

Како што веќе рековме мал дел од разгледаните 186 теореми, леми и последици не се докажани, и ова посебно се однесува на теоремите за егзистенција на повеќекратните интегрални, чии докази се изоставени заради тежината на истите. Понатаму, заради подобрување на нагледноста книгата содржи 51 цртеж, поголемиот дел од кои се поместени во последната глава. Изучувањето на која било математичка дисциплина не е можно без систематско самостојно решавање на задачи. Токму затоа при изложувањето на материјалот целосно се разработени 154 примери со кои се појаснуваат воведените поими и презентираниите тврдења и на крајот од секоја глава се дадени задачи, вкупно 265, дел од кои, како и примерите содржат и по неколку подзадачи, па така бројот на решените примери и задачи за самостојна работа е значително поголем. Примерите и задачите се така избрани, што дел од нив се во функција на усвојување на презентираниот материјал, а дел се наменети за утврдување на усвоените знаења.

На крајот е даден индекс на поими, кој се надеваме ќе го олесни користењето на оваа книга. Исто така е даден список на користената литература, при што сакаме да напоменеме дека книгите [3], [8], [11], [14] и [27] имаа посебно влијание при оформувањето на овој ракопис.

Пријатна должност и особено задоволство ни е да им искажеме благодарност на рецензентите проф. д-р Марија Оровчанец и проф. д-р Алекса Малчески кои со своите забелешки и сугестии придонесоа за подобрување на содржината на оваа книга, како и на асс. м-р Емилија Камчева која детално го провери овој ракопис и со своите забелешки придонесе да се отстранат некои технички пропусти, но е да се подобри самото изложување на разработуваниот материјал.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа книга, па затоа сме однапред благодарни на секоја добронамерна критика и сугестија.

Септември, 2011  
Скопје

Авторите