Јенс Карстенсен, Данска
Алија Мумингиќ, Данска

# ТРИГОНОМЕТРИЈА, ХИПЕРБОЛИЧНИ ФУНКЦИИ И ФИБОНАЧИЕВИ БРОЕВИ

Постојат повеќе начини да се генерираат Фибоначиевите броеви. Еден од нив е до овие броеви да се дојде со помош на тригонометриските и хиперболичните функции. Во следните разгледувања ќе покажеме како тоа може да се направи.

Да се потсетиме: броевите определени со диференцната равенка

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ , за } n \geq 1 \tag{1}$$

се Фибоначиевите броеви (или $F_0 = F_1 = 1,\ \ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, за $n \geq 1$ ).

I. Ако во познатата адициона формула за збир на синуси на два агли

$$\sin\sim + \sin\quad = 2\sin\frac{\sim+}{2}\cos\frac{\sim-}{2}\ ,$$

која важи за секои $\sim$ и , ставиме $\sim = \frac{(n+1)x}{2},\quad = \frac{(n-1)x}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, добиваме

$$\sin\frac{(n+1)x}{2} + \sin\frac{(n-1)x}{2} = 2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{x}{2}\ ,$$

односно

$$2\sin\frac{(n+1)x}{2} = 4\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{(n-1)x}{2}\ . \tag{2}$$

Нека $p_n = 2\sin\frac{nx}{2}$, $n = 01,2,3,....$ и $q = 2\cos\frac{x}{2}$. Со замена во (2) добиваме

$$p_{n+1} = p_n q - p_{n-1} \text{, за } n = 1,2,3,\dots. \tag{3}$$

Користејќи ја формулата (3) можеме членовите на низата $(p_n)$ да ги изразиме преку $p_1$ и $q$. Имаме

$p_1 = p$ ,

$p_2 = p_1 q - p_0 = p_1 q,$

$p_3 = p_2 q - p_1 = (p_1 q)q - p_1 = p_1(q^2 - 1),$

$p_4 = p_3 q - p_2 = p_1(q^2 - 1)q - p_1 q = p_1(q^3 - 2q),$

$p_5 = p_4 q - p_3 = p_1(q^3 - 2q)q - p_1(q^2 - 1) = p_1(q^4 - 3q^2 + 1),$

$p_6 = p_5 q - p_4 = p_1(q^4 - 3q^2 + 1)q - p_1(q^3 - 2q) = p_1(q^5 - 4q^3 + 3q),$

$p_7 = p_6 q - p_5 = p_1(q^5 - 4q^3 + 3q)q - p_1(q^4 - 3q^2 + 1) = p_1(q^6 - 5q^4 + 6q^2 - 1),$

.......................................................................................................................

Сега да ги разгледаме изразите $\frac{p_n}{p_1}$ како полиноми по $q$, занемарувајќи ги собирците кои се еднакви на нула, и да ја формираме табелата на апсолутните вредности на коефициентите на овие полиноми.

| $n \setminus j$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | 1 |
| 2 | 1 | | | | | 1 |
| 3 | 1 | 1 | | | | 2 |
| 4 | 1 | 2 | | | | 3 |
| 5 | 1 | 3 | 1 | | | 5 |
| 6 | 1 | 4 | 3 | | | 8 |
| 7 | 1 | 5 | 6 | 1 | | 13 |
| 8 | 1 | 6 | 10 | 4 | | 21 |

Забележуваме дека збировите на коефициентите во секој ред на табелата се еднакви на Фибоначиевите броеви. Имено, ако со $B(n,j)$ го означиме коефициентот кој се наоѓа во $n-$тиот ред и $j-$тата колона на табелата, тогаш за Фибоначиевите броеви важи следнава табела

$$F_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} B(n,j)\,. \tag{4}$$

На пример, $F_7 = B(7,0)+B(7,1)+B(7,3) = 1+5+6+1 = 13$. Доказот дека оваа формула е точна може да се реализира со математичка индукција (види, на пример, [2]).

*Забелешка*. Со примена на адиционата формула за збир на косинуси, може слично како за формулата, да се изведе рекурзивна формула со чија помош $u_n = 2\cos\frac{nx}{2}$ да се изрази преку $u_{n-1}, u_{n-2}$ и $q = 2\cos\frac{x}{2}$. Оттука понатаму може да се добие формула за Лукасовите броеви $L_n$, кои се определени со диференцната равенка

$$L_1 = 1,\ L_2 = 3,\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n,\quad n \geq 1$$

(види ја статијата [2]). Врската меѓу Фибоначиевите и Лукасовите броеви е дадена со

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4\cdot(-1)^n\,.$$

II. Швајцарскиот математичар Даниел Бернули на почетокот на 18-тиот век ја нашол следнава формула за Фибоначиевите броеви

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\ n \geq 1\,.$$

Ако ставиме $\sim=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad =\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, горната формула го добива видот

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\sim^n- \quad ^n),\ n\geq 1,$$

од каде ако се има предвид дека $\sim \quad =-1$, однос-но $\quad =-\sim^{-1}$, ја добиваме формулата

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\sim^n-(-1)^n\sim^{-n}),\quad n\geq 1. \tag{5}$$

Нека $f$ произволна функција определена на симетричниот интервал $[-a,a]$. Дефинираме функции

$$f_N(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)] \text{ и } f_P(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)].$$

За секој $x\in[-a,a]$ важи $-x\in[-a,a]$ и

$$\begin{aligned} f_N(-x)&=\tfrac{1}{2}[f(-x)-f(-(-x))]=\tfrac{1}{2}[f(-x)-f(x)]\\ &=-\tfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)[=-f_N(x), \end{aligned}$$

и

$$f_P(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(-(-x))]=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=f_P(x),$$

што значи дека функцијата $f_N$ е непарна, а функцијата $f_P$ е парна. Притоа, за секој $x\in[-a,a]$ важи

$$f_N(x)+f_P(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=f(x),$$

што значи дека произволна функција дефинирана на симетричен интервал $[-a,a]$ може да се претстави како збир на парна и непарна функција дефинирани на интервалот $[-a,a]$. Можеда се докаже дека ова претставување е единствено.

Функцијата $\operatorname{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ ја нарекуваме синусхиперболикум, а функцијата $\operatorname{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ја нарекуваме косинусхиперболикум. Лесно се гледа дека $\operatorname{sh}(x)$ е непарна, а $\operatorname{ch}(x)$ е парна функција. Понатаму, ако ставиме $t=\ln\sim$, т.е. $e^t=\sim$, од (5) следува дека за секој природен број $k$ важи

$$\begin{aligned} F_{2k}&=\frac{1}{\sqrt{5}}(\sim^{2k}-(-1)^{2k}\sim^{-2k})=\frac{1}{\sqrt{5}}(\sim^{2k}-\sim^{-2k})\\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}((e^t)^{2k}-(e^t)^{-2k})=\frac{1}{\sqrt{5}}(e^{2kt}-e^{-2kt}) \qquad (6)\\ &=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sh}(2kt), \end{aligned}$$

и

$$
\begin{aligned}
F_{2k+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\sim^{2k+1} - (-1)^{2k+1}\sim^{-(2k+1)}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sim^{2k+1} + \sim^{-(2k+1)}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}((e^t)^{2k+1} + (e^t)^{-(2k+1)}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(e^{(2k+1)t} + e^{-(2k+1)t}) \qquad (7) \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{ch}((2k+1)t).
\end{aligned}
$$

Десните страни на формулите (6) и (7) ќе ги запишеме во вид на линеарна комбинација $A_n \operatorname{sh}(nt) + B_n \operatorname{ch}(nt)$, каде $A_n$ и $B_n$ ќе бидат функции од $n$ такви што $A_n = \frac{2}{\sqrt{5}}$ кога $n$ е парно и $A_n = 0$ кога $n$ е непарно, а $B_n = \frac{2}{\sqrt{5}}$ кога $n$ е непарно и $B_n = 0$ кога $n$ е парно. За таа цел ќе ја користиме позната Ојлерова формула

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$

од која следува $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$. Имаме:

$$\operatorname{ch}(ix) + \operatorname{sh}(ix) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} + \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} = e^{ix} = \cos x + i\sin x, \qquad (8)$$

$$\operatorname{ch}(ix) - \operatorname{sh}(ix) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} - \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} = e^{i(-x)} = \cos x - i\sin x. \qquad (9)$$

Ако ги собереме (8) и (9), добиваме

$$\operatorname{ch}(ix) = \cos x, \qquad (10)$$

а ако ги одземеме (8) и (9), добиваме

$$\operatorname{sh}(ix) = i\sin x. \qquad (11)$$

Понатаму, за хиперболичните функции имаме

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y) &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2} \\
&= \frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}+e^{-x+y}+e^{x-y}}{4} + \frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}-e^{-x+y}-e^{x-y}}{4} \\
&= \frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2} = \operatorname{ch}(x+y),
\end{aligned}
$$

т.е.

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y), \qquad (12)$$

и

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2} \\
&= \frac{e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-(x+y)}}{4} + \frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-(x+y)}}{4} \\
&= \frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2} = \operatorname{sh}(x+y).
\end{aligned}
$$

т.е.

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)+\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)\,. \tag{13}$$

Од друга страна за тригонометриските функции $\cos$ и $\sin$ важи

$$\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k+1,\\ (-1)^k, & n=2k,\end{cases} \tag{14}$$

и

$$\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^k, & n=2k+1.\end{cases} \tag{15}$$

Сега, ако прво ја искористиме формулата (13), потоа парноста на хиперболичните функции, па формулите (10) и (11), потоа формулите (14) и (15), и на крајот формулите (6) и (7), при што водиме сметка дека $t=\ln\varphi=\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, последователно добиваме

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{5}}i^n\operatorname{sh}n(t-i\tfrac{\pi}{2}) &= \frac{2}{\sqrt{5}}i^n(\operatorname{sh}nt\cdot\operatorname{ch}(-i\tfrac{n\pi}{2})+\operatorname{sh}(-i\tfrac{n\pi}{2})\cdot\operatorname{ch}(nt))\\
&= \frac{2}{\sqrt{5}}i^n(\operatorname{sh}nt\cdot\operatorname{ch}(i\tfrac{n\pi}{2})-\operatorname{ch}(nt)\cdot\operatorname{sh}(i\tfrac{n\pi}{2}))\\
&= \frac{2}{\sqrt{5}}i^n(\operatorname{sh}nt\cdot\cos\tfrac{n\pi}{2}-i\operatorname{ch}(nt)\cdot\sin\tfrac{n\pi}{2})\\
&= \begin{cases}\frac{2}{\sqrt{5}}i^{2k}(\operatorname{sh}(2kt)\cdot\cos\frac{2k\pi}{2}-i\operatorname{ch}(2kt)\cdot\sin\frac{2k\pi}{2}), & n=2k\\ \frac{2}{\sqrt{5}}i^{2k+1}(\operatorname{sh}(2k+1)t\cdot\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}-i\operatorname{ch}((2k+1)t)\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}), & n=2k+1\end{cases}\\
&= \begin{cases}\frac{2}{\sqrt{5}}(-1)^k\operatorname{sh}(2kt)\cdot\cos k\pi, & n=2k\\ \frac{2}{\sqrt{5}}(-1)^k\operatorname{ch}((2k+1)t)\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}, & n=2k+1\end{cases}\\
&= \begin{cases}\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sh}(2kt), & n=2k\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{ch}((2k+1)t), & n=2k+1\end{cases}\\
&= F_n.
\end{aligned}$$

Конечно, врската меѓу Фибоначиевите броеви и хиперболичните функции е дадена со

$$F_n=\frac{2}{\sqrt{5}}i^n\operatorname{sh}n(t-i\tfrac{\pi}{2})\text{, каде } t=\ln\varphi=\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Литература

[1] J. Carstensen, A. Muminagić: Trigonometrija i Fibona čievi brojevi, Nastava matematike, LXV 1-2 (40-41), Beograd, 2020
[2] T. Koshy: Trigonometric Functions and Fibonacci and Lucas Arrays, Mathematical Spectrum, 42, 3, 2009
[3] J. Carstensen: Fibonacci og Lucastal, Matematik Magasinet, 25/2005
[4] R. A. Askey: Fibonacci and Lucas Numbers, Mathematics Teacher, 98, 2005
[5] Р. Малчески, В. Малческа: Математика 3 – калкулус 1 (петто издание), Армаганка, 2020

# Trigonometrija, hiperboličke funkcije i Fibonaccijevi brojevi

*Jens Carstensen, Alija Muminagić*[1]

Postoji više načina za određivanje Fibonaccijevih brojeva. Jedan od njih je pomoću trigonometrije i hiperboličkih funkcija.

Podsjetimo se: brojeve određene diferencijskom jednadžbom

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \text{za } n \geq 1 \tag{1}$$

nazivamo *Fibonaccijevi brojevi*. (Možemo i ovako: $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$; za $n \geq 1$.)

**I.** Koristit ćemo dobro nam znanu formulu za zbroj sinusa dva kuta:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

koja vrijedi za sve kutove $\alpha$ i $\beta$. Stavimo li $\alpha = \frac{(n+1)x}{2}$, $\beta = \frac{(n-1)x}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, dobivamo

$$\sin\frac{(n+1)x}{2} + \sin\frac{(n-1)x}{2} = 2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{x}{2},$$

odnosno

$$2\sin\frac{(n+1)x}{2} = 4\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{(n-1)x}{2}. \tag{2}$$

Neka je $p_n = 2\sin\frac{nx}{2}$, $n \geq 0$ i $q = 2\cos\frac{x}{2}$. Uvrštavanjem u (2) dobivamo

$$p_{n+1} = p_n q - p_{n-1}, \quad \text{za } n \geq 1. \tag{3}$$

Koristeći ovu formulu možemo izračunati koeficijente $p_n$, ako su poznati $p_1$ i $q$. Imamo:

$$\begin{aligned}
p_2 &= p_1q - p_0 = p_1q,\\
p_3 &= p_2q - p_1 = (p_1q)q - p_1 = p_1(q^2-1),\\
p_4 &= p_3q - p_2 = p_1(q^2-1)q - p_1q = p_1(q^3-2q),\\
p_5 &= p_4q - p_3 = p_1(q^3-2q)q - p_1(q^2-1) = p_1(q^4-3q^2+1),\\
p_6 &= p_5q - p_4 = p_1(q^4-3q^2+1)q - p_1(q^3-2q) = p_1(q^5-4q^3+3q),\\
p_7 &= p_6q - p_5 = p_1(q^5-4q^3+3q)q - p_1(q^4-3q^2+1) = p_1(q^6-5q^4+6q^2-1),\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Promatrajmo izraze $\frac{p_n}{p_1}$ kao polinome po $q$, zanemarujući članove jednake nuli i napravimo tablicu s apsolutnim vrijednostima koeficijenata ovih polinoma.

Primijetimo da su zbrojevi koeficijenata u svakom redu tablice 1 Fibonaccijevi brojevi. Ako s $B(n,j)$ označimo koeficijent u $n$-tom retku i $j$-tom stupcu, vrijedi

$$F_n = \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} B(n,j). \tag{4}$$

[1] Autori su iz Danske.

Na primjer, $F_7 = B(7,0)+B(7,1)+B(7,2)+B(7,3) = 1+5+6+1 = 13$. Ova formula se može dokazati matematičkom indukcijom (vidi [2]).

| $n \backslash j$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | 1 |
| 2 | 1 | | | | | 1 |
| 3 | 1 | 1 | | | | 2 |
| 4 | 1 | 2 | | | | 3 |
| 5 | 1 | 3 | 1 | | | 5 |
| 6 | 1 | 4 | 3 | | | 8 |
| 7 | 1 | 5 | 6 | 1 | | 13 |
| 8 | 1 | 6 | 10 | 4 | | 21 |

*Tablica 1.*

**Napomena.** Primjenom formule za zbroj kosinusa može se dobiti rekurzivna formula kod koje je $u_n = 2\cos\frac{nx}{2}$, $u_{n-1}$, $u_{n-2}$ i $q = 2\cos\frac{x}{2}$, za *Lukasove brojeve* koji su definirani s

$$L_1 = 1,\ L_2 = 3,\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n,\ n \geq 1$$

(vidi [2]). Postoji zanimljiva veza između Fibonaccijevih i Lukasovih brojeva:

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4 \cdot (-1)^n,\ n \geq 1.$$

**II.** Švicarski matematičar Daniel Bernoulli je početkom 18. stoljeća našao ovu formulu za Fibonaccijeve brojeve

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \quad n \geq 1.$$

Ako stavimo $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, gornja formula poprima oblik

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \quad n \geq 1.$$

Kako je $\alpha\beta = -1$, tj. $\beta = -\alpha^{-1}$, dobivamo formulu

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - (-1)^n\alpha^{-n}), \quad n \geq 1. \tag{5}$$

Neka je $f$ proizvoljna funkcija definirana na simetričnom intrevalu $[-a,a]$. Definirajmo funkcije

$$f_N(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \quad \text{i} \quad f_P(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)].$$

Za svaki $x \in [-a,a]$ je $-x \in [-a,a]$ i

$$\begin{aligned} f_N(-x) &= \frac{1}{2}[f(-x) - f(-(-x))] = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] \\ &= -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -f_N(x) \end{aligned}$$

i

$$f_P(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(-(-x))]=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=f_P(x),$$

što znači da je $f_N$ neparna, a $f_P$ parna funkcija. Pritom za svaki $x\in[-a,a]$ vrijedi:

$$f_N(x)+f_P(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=f(x),$$

što znači da se svaka funkcija defirirana na simetričnom intervalu $[-a,a]$ može prikazati kao zbroj parne i neparne funkcije definirane na tom intervalu. Može se pokazati da je ovaj prikaz jedinstven.

Funkcije $\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ i $\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ nazivamo sinus hipreboličkom i cosinus hiperboličkom funkcijom. Lako se vidi da je $\sinh(x)$ neparna, a $\cosh(x)$ parna funkcija. Stavimo li $t=\ln\alpha$ tj. $e^t=\alpha$, iz (5) za svaki prirodan broj $k$ imamo:

$$\begin{aligned}F_{2k}&=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2k}-(-1)^{2k}\alpha^{-2k})=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2k}-\alpha^{-2k})\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}((e^t)^{2k}-(e^t)^{-2k})=\frac{1}{\sqrt{5}}(e^{2kt}-e^{-2kt})\\&=\frac{2}{\sqrt{5}}\sinh(2kt)\end{aligned}\tag{6}$$

i

$$\begin{aligned}F_{2k+1}&=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2k+1}-(-1)^{2k+1}\alpha^{-(2k+1)})=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2k+1}+\alpha^{-(2k+1)})\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}((e^t)^{2k+1}+(e^t)^{-(2k+1)})=\frac{1}{\sqrt{5}}(e^{(2k+1)t}+e^{-(2k+1)t})\\&=\frac{2}{\sqrt{5}}\cosh((2k+1)t).\end{aligned}\tag{7}$$

Desne strane u (6) i (7) zapišimo u obliku linearne kombinacije $A_n\sinh(nt)+B_n\cosh(nt)$, gdje su $A_n$ i $B_n$ funkcije od $n$ takve da je $A_n=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ kada je $n$ paran i $A_n=0$ kada je $n$ neparan, a $B_n=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ kada je $n$ neparan i $B_n=0$ kada je $n$ paran. Da bismo to pokazali koristit ćemo Eulerovu formulu

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

odakle je $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$. Sada imamo:

$$\cosh(ix)+\sinh(ix)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}+\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}=e^{ix}=\cos x+i\sin x\tag{8}$$

$$\cosh(ix)-\sinh(ix)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}-\frac{e^{ix}-e^{-ix)}}{2}=e^{i(-x)}=\cos x-i\sin x.\tag{9}$$

Zbrajanjem (8) i (9) dobivamo

$$\cosh(ix)=\cos x\tag{10}$$

a oduzimanjem

$$\sinh(ix)=i\sin x.\tag{11}$$

Za hiperboličke funkcije imamo odgovarajuće identitete:

$$\begin{aligned}
&\cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)\\
&=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}\\
&=\frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}+e^{-x+y}+e^{x-y}}{4}+\frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}-e^{-x+y}-e^{x-y}}{4}\\
&=\frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}\\
&=\cosh(x+y)
\end{aligned}$$

tj.

$$\cosh(x+y)=\cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y), \tag{12}$$

i

$$\begin{aligned}
&\cosh(x)\sinh(y)+\sinh(x)\cosh(y)\\
&=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}\\
&=\frac{e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-(x+y)}}{4}+\frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-(x+y)}}{4}\\
&=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}\\
&=\sinh(x+y)
\end{aligned}$$

tj.

$$\sinh(x+y)=\cosh(x)\sinh(y)+\sinh(x)\cosh(y). \tag{13}$$

S druge strane za trigonometrijske funkcije $\cos$ i $\sin$ imamo:

$$\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k+1\\ (-1)^k, & n=2k,\end{cases} \tag{14}$$

i

$$\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k\\ (-1)^k, & n=2k+1.\end{cases} \tag{15}$$

Na kraju, iz formule (13), zatim iz parnosti hperboličke funkcije, te iz (10) i (11) i zatim iz (14) i (15) i na kraju iz (6) i (7), uz supstituciju $t=\ln\alpha=\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, redom dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\sqrt{5}}i^n\sinh n\left(t-i\frac{\pi}{2}\right)\\
&=\frac{2}{\sqrt{5}}i^n\left(\sinh(nt)\cdot\cosh\left(-i\frac{n\pi}{2}\right)+\sinh\left(-i\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\cosh(nt)\right)\\
&=\frac{2}{\sqrt{5}}i^n\left(\sinh(nt)\cdot\cosh\left(i\frac{n\pi}{2}\right)-\cosh(nt)\cdot\sinh\left(i\frac{n\pi}{2}\right)\right)\\
&=\frac{2}{\sqrt{5}}i^n\left(\sinh(nt)\cdot\cos\frac{n\pi}{2}-i\cosh(nt)\cdot\sin\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$
= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{5}} i^{2k} \left( \sinh(2kt) \cdot \cos \frac{2k\pi}{2} - i \cosh(2kt) \cdot \sin \frac{2k\pi}{2} \right), \quad n = 2k \\ \frac{2}{\sqrt{5}} i^{2k+1} \left( \sinh(2k+1)t \cdot \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} - i \cosh(2k+1)t \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi}{2} \right), \\ \hfill n = 2k+1 \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{5}} (-1)^k \sinh(2kt) \cdot \cos k\pi, \quad n = 2k \\ \frac{2}{\sqrt{5}} (-1)^k \cosh(2k+1)t \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad n = 2k+1 \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh(2kt), \quad n = 2k \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \cosh(2k+1)t, \quad n = 2k+1 \end{cases}
$$

$$
= F_n.
$$

Dakle, veza između Fibonaccijevih brojeva i hiperboličke funkcije je dana s

$$
F_n = \frac{2}{\sqrt{5}} i^n \sinh\left(t - i\frac{\pi}{2}\right), \quad \text{gdje je} \quad t = \ln \alpha = \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}.
$$

## Literatura


[1] J. CARSTENSEN, A. MUMINAGIĆ, *Trigonometrija i Fibonaccijevi brojevi*, Nastava matematike, LXV 1–2 (40–41) Beograd 2020.

[2] T. KOSHY, *Trigonometric functions and Fibonacci and Lucas Arrays*, Mathematical Spectrum, 42, 3, 2009.

[3] J. CARSTENSEN, *Fibonacci og Lucastal*, Matematik Magasinet, 25/2005.

[4] R. A. ASKEY, *Fibonacci and Lucas Numbers*, Mathematics Teacher, 98, 2005.

[5] R. MALČESKI, V. MALČESKA, *Matematika 3 – kalkulus 1* (peto izdanje), Armaganka, 2020.