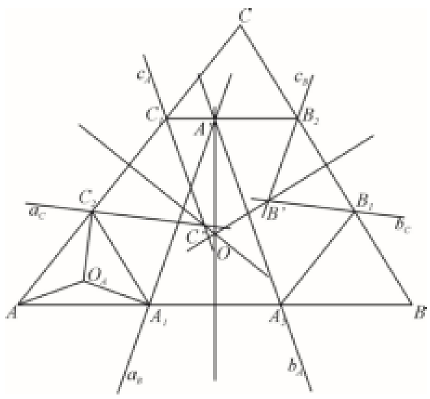
ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА ИМО 2013

Прв ден, Скопје, 8.4.2013

1. На страните на остроаголен триаголник ABC лежат точките A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2, така што $\overline{AA_1}=\overline{A_1A_2}=\overline{A_2B}=\frac{1}{3}\overline{AB}$, $\overline{BB_1}=\overline{B_1B_2}=\overline{B_2C}=\frac{1}{3}\overline{BC}$ и $\overline{CC_1}=\overline{C_1C_2}=\overline{C_2A}=\frac{1}{3}\overline{CA}$. Нека k_A, k_B и k_C се опишаните кружници на триаголниците AA_1C_2, BB_1A_2 и CC_1B_2 соодветно, a_B и a_C се тангентите на k_A во A_1 и C_2, b_C и b_A се тангентите на k_B во B_1 и A_2 и c_A и c_B се тангентите на k_C во C_1 и B_2. Докажи дека нормалите спуштени од пресекот на a_B и b_A на AB, пресекот на b_C и c_B на BC и пресекот на c_A и a_C на CA се сечат во една точка.



Решение. Да ги означиме пресеците на a_B, b_C и c_A соодветно со b_A, c_B и a_C со A', B' и C'. Триаголникот AA_1C_2 е сличен на ABC, бидејќи имаат заеднички агол и страните им се во сооднос 1:3.(1) Нека O_A е центарот на опишаната кружница на триаголникот AA_1C_2, тогаш:

$\angle O_AA_1A=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AO_AA_1)=90^\circ-\angle AC_2A_1=90^\circ-\gamma$

Бидејќи a_B е нормална на O_AA_1 следува дека аголот меѓу a_B и AB е еднаков на

$180^\circ-90^\circ-(90^\circ-\gamma)=\gamma$.(3)

Аналогно и аголот меѓу b_A и AB е еднаков на γ, па триаголникот A_1A_2A' е рамнокрак со основа A_1A_2, то ест нормалата на AB низ C' минува низ средината на A_1A_2, која е истовремено и средина на AB,(4) па нормалата минува и низ центарот на опишаната кружница на триаголникот ABC. Од причини на симетрија сите три нормали минуваат низ центарот на опишаната кружница, то ест низ една точка.

2. **а)** Нека $S(n)$ е збирот на цифрите на бројот n. После запирката ги пишуваме еден по друг броевите $S(1), S(2), \ldots$. Докажи дека бројот што се добива е ирационален.

б) Нека $P(n)$ е производот на цифрите на бројот n. После запирката ги пишуваме еден по друг броевите $P(1), P(2), \ldots$. Докажи дека бројот што се добива е ирационален.

Решение. а) Бројот $0,S(1)S(2)\ldots$ е ирационален ако е непериодичен. Да претпоставиме дека бројот е периодичен и нека периодот има должина d. Јасно е дека периодот мора да содржи цифри различни од 0 бидејќи во спротивно бројот би бил од облик $0,S(1)S(2)\ldots S(k)$ и секогаш постои број поголем од k чиј збир на цифри е различен од 0.(на пример 10^m за доволно голем m е поголем од k а збирот на цифри му е 1). Меѓутоа, постои доволно голем природен број чиј што збир на цифри завршува на $2d$ нули. (11...11 со 10^{2d} единици е таков што е поголем од збирот на цифри му е 10^{2d}). Тогаш периодот со должина d мора да се јави целосно во бројот $S(10^{2d})$, од каде мора да се состои само од нули.

б) Бројот $0,P(1)P(2)\ldots$ е ирационален ако е непериодичен. Да претпоставиме дека бројот е периодичен и нека периодот има должина d. Јасно е дека периодот мора да содржи цифри различни од 0 бидејќи во спротивно бројот би бил од облик $0,P(1)P(2)\ldots P(k)$ и секогаш постои број поголем од k чиј производ на цифри е различен од 0.(на пример 11...1 со доволно многу единици е поголем од k а производот на цифри му е 1). Броевите од облик $\underbrace{22\ldots2}_{m}\underbrace{55\ldots5}_{m}$ може да се изберат произволно големи и јасно е дека производот на цифри на тие броеви е 10^m. Ако го избереме $m > 2d$, тогаш периодот мора целосно да се јави во бројот $S(\underbrace{22\ldots2}_{m}\underbrace{55\ldots5}_{m})$ од каде мора да се состои само од нули.

3. Со $\mathbb{Z}^*$ и $\mathbb{N}_0$ се означени множеството од сите ненулти цели броеви и множеството од сите ненегативни цели броеви, соодветно. Најди ги сите пресликувања $f: Z^* \to N_0$ за кои се исполнети следниве два услови :

(1) за секои $a, b \in Z^*$ за кои $a+b \in Z^*$ важи $f(a+b) \geq \min\{f(a), f(b)\}$;

(2) за секои $a, b \in Z^*$ важи $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Решение. Едно тривијално решение е константното пресликување $f \equiv 0$. Нека f е едно нетривијално пресликување за кое важат (1) и (2). Ќе покажеме дека постои природен број c и прост број p за кои е исполнето $f(a) = cv_p(a)$ за секој $a \in Z^*$, каде $v_p(a) :=$ експонентот на p во канонската факторизација на a : да забележиме најпрво дека $f(1) = f(-1) = 0$ (доказ:

$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, $f(1) = f((-1)\cdot(-1)) = f(-1) + f(-1)$);

од ова и од (2) следува дека постои прост број p за кој $f(p) \neq 0$; за $c := f(p)$ ќе покажеме дека важи $f(a) = cv_p(a)$ за секој $a \in Z^*$; имено, за секој прост број $q \neq p$ постојат ненулти цели броеви α, β за кои $1 = \alpha p + \beta q$, па исполнето е неравенството $0 = f(\alpha p + \beta q) \geq \min\{f(\alpha p), f(\beta q)\}$; од

$f(\alpha p) = f(\alpha) + f(p) \geq f(p) = c \neq 0$

следува $f(\beta q) = 0$ и $f(q) = 0$; нека $a = \pm p^k q^\beta r^\gamma \dots$ е канонската факторизација на a ; тогаш

$$f(a) = f(\pm p^k) + f(q^\beta) + f(r^\gamma) + \dots = f(\pm 1) + f(p^k) = kf(p) = cv_p(a)$$

Останува да забележиме дека секое вакво пресликување ги исполнува условите (1) и (2) па претставува нетривијално решение на поставениот проблем.

1. Нека $a>0, b>0, c>0$ и $a+b+c=1$. Докажи го неравенството

$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b+c}+\frac{2a^2+b^2+2c^2}{2}\geq\frac{1}{2}.$$

Решение. Од $1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$ добиваме

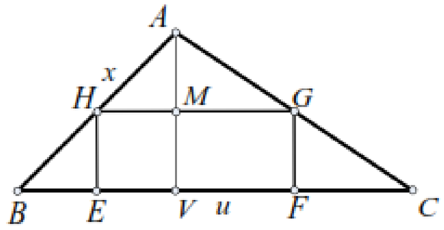
$$ab+bc+ca+\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=\frac{1}{2}.$$

Го користиме неравенството $(a^{n-1}-b^{n-1})(a-b)\geq 0$ за $n\geq 1$ при што равенство е исполнето кога $a=b$. Последното неравенство е еквивалентно со неравенството $a^n+b^n\geq ab(a^{n-2}+b^{n-2})$ кога $n\geq 2$. Во конкретниот случај имаме: $\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}\geq ab$, $\frac{b^3+c^3}{b+c}\geq bc$ и $\frac{c^2+a^2}{2}\geq ca$. Со собирање на последните три неравенства добиваме $\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{2}\geq ab+bc+ac$ од каде

$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b+c}+c^2+a^2+\frac{b^2}{2}\geq ab+bc+ac+\frac{c^2+a^2+b^2}{2}=\frac{1}{2}.$$

Јасно е дека знак равенство се достигнува кога $a=b=c=\frac{1}{3}$.

2. Правоаголник велиме дека е впишан во триаголник ако две негови соседни темиња лежат на една страна на триаголникот, а другите две лежат на останатите две страни на триаголниот. Нека должините на страните на триаголниот ABC се познати. Колкава е најмалата можна должина на дијагонала на правоаголник впишан во овој триаголник.



Решение. Нека четириаголникот $EFGH$ е впишан во триаголникот ABC така што E и F лежат на BC и G лежи на AC и H лежи на AB. Нека должините на страните на триаголникот ABC ги означиме со a, b и c и нека со h ја означиме должината на висината спуштена од A кон BC. Ставаме $\overline{AH}=x$, $\overline{EF}=u$ и $\overline{FG}=v$.

Од $\Delta AHG \approx \Delta ABC$ имаме $u=\frac{ax}{c}$, од $\Delta BEH \approx \Delta BVA$ добиваме $v=\frac{h(c-x)}{c}$. Ако со l ја означиме должината на дијагоналата на $EFGH$, добиваме $l^2=\frac{a^2x^2}{c^2}+\frac{h^2(c-x)^2}{c^2}$. Најмалата вредност што ја има параболата $f(x)=\frac{a^2x^2}{c^2}+\frac{h^2(c-x)^2}{c^2}$ е $\frac{a^2h^2}{a^2+h^2}$ и таа се добива кога $x=\frac{h^2c}{a^2+h^2}$. Да забележиме $\frac{a^2h^2}{a^2+h^2}=\frac{4P^2}{a^2+\frac{4P^2}{a^2}}$, каде P е плоштината на триаголникот. Сега ако истото го направиме кога впишаниот правоаголник има две соседни темиња кои лежат на страната AC, за најмала можна вредност на дијагоналата добиваме $\frac{4P^2}{b^2+\frac{4P^2}{b^2}}$. Имаме

$$a^2+\frac{4P^2}{a^2}-b^2-\frac{4P^2}{b^2}=(a^2-b^2)\left(1-\frac{4P^2}{a^2b^2}\right).$$

Бидејќи $ab\geq 2P$ последниот израз е поголем или еднаков на 0 ако и само ако $a\geq b$. Со други зборови, најмалата вредност на l се добива кога правоаголникот има две соседни темиња кои лежат на најголемата страна на триаголникот. Нека a е најголемата страна. Веќе видовме дека тогаш најмалата вредност на l е $\frac{2P}{\sqrt{a^2+\frac{4P^2}{a^2}}}$ и таа се добива кога $\overline{AH}=x=\frac{h^2c}{a^2+h^2}=\frac{4P^2c}{a^4+4P^2}$. Да забележиме дека плоштина е позната и може да биде изразена преку страните на триаголникот на пример преку Херонова формула.

3. Нека a и n се цели броеви . Дефинираме $a_n = 1+a+a^2+...+a^{n-1}$. Докажи дека ако $a^p \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ за секој прост делител p на $n_2 - n_1$, бројот $\frac{a_{n_2}-a_{n_1}}{n_2-n_1}$ е цел.

Решение. Лема. Нека a и n се цели броеви такви што $a \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ за секој прост $p|n$ и $a_n = 1+a+a^2+...+a^{n-1}$. Тогаш $n|a_n$.

Доказ на лемата. Нека p^r е најголемиот степен на простиот број p таков што $p^r|n$. Ќе го докажеме равенството

$$1+a+a^2+...+a^{n-1} = \left(1+a^{p^r}+a^{2p^r}+...+a^{p^r(\frac{n}{p^r}-1)}\right)\prod_{k=1}^{r}\left(1+a^{p^{k-1}}+a^{2p^{k-1}}+...+a^{(p-1)p^{k-1}}\right)$$

за секој цел број a. Ако $a=1$ левата страна изнесува n а десната страна на равенството изнесува $\frac{n}{p^r}\cdot p^r = n$ (по едно p за секој член во производот). Нека $a \neq 1$. Ако ја помножиме и левата и десната страна со $a-1$ од десно добиваме

$$(a-1)(1+a+...+a^{p-1})(1+a^p+a^{2p}+...+a^{(p-1)p})...\left(1+a^{2p^r}+...+a^{p^r(\frac{n}{p^r}-1)}\right)$$

$$=(a^p-1)(1+a^p+a^{2p}+...+a^{(p-1)p})...\left(1+a^{2p^r}+...+a^{p^r(\frac{n}{p^r}-1)}\right)$$

$$=(a^{p^2}-1)(1+a^{p^2}+...+a^{(p-1)p^2})...\left(1+a^{2p^r}+...+a^{p^r(\frac{n}{p^r}-1)}\right)=$$

$$=(a^{p^r}-1)\left(1+a^{2p^r}+...+a^{p^r(\frac{n}{p^r}-1)}\right)=a^n-1$$

Секој од изразите во производот е делив со p бидејќи

$$1+a^{p^{k-1}}+a^{2p^{k-1}}+...+a^{(p-1)p^{k-1}} = (a^{p^{k-1}}-1)+(a^{2p^{k-1}}-1)+...+(a^{(p-1)p^{k-1}}-1)+p$$

секој од изразите во заградите е делив со p.

Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $n_1 < n_2$. Јасно е дека

$$\frac{a_{n_2}-a_{n_1}}{n_2-n_1} = \frac{1+a+...+a^{n_2-1}-1-a-...-a^{n_1-1}}{n_2-n_1} = \frac{a^{n_1}(1+a+...+a^{n_2-n_1-1})}{n_2-n_1}.$$

Со користење на лемата добиваме дека $(n_2-n_1)|a_{n_2-n_1}$ од каде добиваме дека бројот $\frac{a_{n_2}-a_{n_1}}{n_2-n_1}$ е природен број.