

Самоил Малчески, Скопје

НЕРАВЕНСТВО НА ШУР

Исаи Шур (1875-1941) е евреин, роден во градот Могилев, Царска Русија. Во 1939 година емигрирал во Палестина и умрел две години подоцна во Тел Авив, во време кога Израел, како држава, се уште не постоел. Тој се занимавал со комбинаторика, теорија на броеви и математичка физика, но докажал и неравенство кое подоцна е наречено според неговото име. Токму ова неравенство и примената на истото се предмет на разгледувања во оваа статија.

Теорема 1 (неравенство на Шур). Ако x, y, z се позитивни реални броеви и r е реален број, тогаш важи

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-x)(y-z) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0, \quad (1)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z$.

Доказ. Неравенството (1) е симетрично, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x \geq y \geq z$. Тогаш,

$$x - y \geq 0, x - z \geq 0, y - z \geq 0.$$

Левата страна на неравенството да ја означиме со L .

Ако $r \geq 0$, тогаш бидејќи $x - z \geq y - z$ и $x^r \geq y^r$ последователно добиваме

$$\begin{aligned} L &= (x-y)[x^r(x-z) - y^r(y-z)] + z^r(x-z)(y-z) \\ &\geq (x-y)[x^r(y-z) - y^r(y-z)] + z^r(x-z)(y-z) \\ &= (x-y)(y-z)(x^r - y^r) + z^r(x-z)(y-z) \geq 0. \end{aligned}$$

Ако $r < 0$, тогаш последователно добиваме

$$\begin{aligned} L &= x^r(x-y)(x-z) + (y-z)[y^r(y-x) + z^r(x-z)] \\ &= x^r(x-y)(x-z) + (y-z)[-y^r(x-y) + z^r(x-z)] \\ &\geq (x-y)(x-z)x^r + (y-z)[-y^r(x-y) + z^r(x-y)] \\ &= (x-y)(x-z)x^r + (y-z)(x-y)(-y^r + z^r) \geq 0, \end{aligned}$$

бидејќи $x - y \geq x - z$ и $z^r \geq y^r$. ■

Пример 1. Ако x, y, z се позитивни реални броеви, тогаш

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x). \quad (2)$$

Докажи!

Решение. Во неравенството (1) ставаме $r=1$ и добиваме

$$x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) + z(z-x)(z-y) \geq 0,$$

$$x^3 - x^2y - x^2z + xyz + y^3 - y^2x - y^2z + xyz + z^3 - z^2x - z^2y + xyz \geq 0,$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x),$$

што и требаше да се докаже. ■

Забелешка 1. За $r=1$ неравенството на Шур, односно неравенството (2), е еквивалентно со следниве неравенства:

а) $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq (x+y+z)(xy+yz+zx),$

б) $xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y),$

в) $(x+y+z)^3 + 9xyz \geq 4(x+y+z)(xy+yz+zx),$

г) $(x-y)^2(x+y-z) + (y-z)^2(y+z-x) + (z-x)^2(z+x-y) \geq 0,$

д) $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9xyz}{x+y+z} \geq 2(xy+yz+zx),$

ѓ) $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq 2.$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Пример 2. Нека a, b, c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$a^6 + b^6 + c^6 + a^2b^2c^2 \geq \frac{2}{3}(a^5(b+c) + b^5(c+a) + c^5(a+b)).$$

Решение. Со примена прво на неравенството (2) за $x=a^2, y=b^2$ и $z=c^2$, а потоа на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме неравенството

$$\begin{aligned} 3(a^6 + b^6 + c^6) + 3a^2b^2c^2 &= 2(a^6 + b^6 + c^6) + (a^6 + b^6 + c^6 + 3a^2b^2c^2) \\ &\geq 2(a^6 + b^6 + c^6) + a^2b^2(a^2 + b^2) + b^2c^2(b^2 + c^2) + c^2a^2(c^2 + a^2) \\ &= [(a^6 + a^4b^2) + (b^6 + b^4c^2) + (c^6 + c^4a^2)] \\ &\quad + [(a^6 + a^4c^2) + (b^6 + b^4a^2) + (c^6 + c^4b^2)] \\ &= 2a^5b + 2b^5c + 2c^5a + 2a^5c + 2b^5a + 2c^5b \\ &\geq 2[a^5(b+c) + b^5(c+a) + c^5(a+b)], \end{aligned}$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. ■

Пример 3. Ако $x, y, z \geq 0$, докажи дека

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3}).$$

Решение. Од неравенството (2) и неравенството меѓу аритметичката и геометричката средина следува

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz &\geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) \\ &= (x^2y + y^2x) + (y^2z + z^2y) + (x^2z + z^2x) \\ &\geq 2(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3}), \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Пример 4. Нека a, b и c се позитивни реални броеви такви што $abc = 1$. Докажи дека

$$(a - 1 + \frac{1}{b})(b - 1 + \frac{1}{c})(c - 1 + \frac{1}{a}) \leq 1.$$

Решение. Бидејќи a, b и c се позитивни реални броеви и $abc = 1$, постојат $x, y, z > 0$ такви да

$$a = \frac{x}{y}, \quad b = \frac{y}{z}, \quad c = \frac{z}{x},$$

при што даденото неравенство е еквивалентно со неравенствата

$$\begin{aligned} (x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) &\leq xyz, \\ (xy - xz + x^2 - y^2 + yz - yx + yz - z^2 + zx)(z - x + y) &\leq xyz, \\ (x^2 - y^2 - z^2 + 2yz)(z - x + y) &\leq xyz, \\ x^2z - x^3 + x^2y - y^2z + y^2x - y^3 - z^3 + z^2x - z^2y + 2z^2y - 2xyz + 2y^2z &\leq xyz, \\ x^2z + x^2y + y^2x + z^2x + z^2y + y^2z &\leq x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz. \end{aligned}$$

Конечно, последното неравенство е еквивалентно со неравенството (2), со што задачата е решена. ■

Пример 5. Нека $a, b, c > 0$ се такви што $a + b + c = 1$. Докажи дека

$$\frac{9abc+1}{4} \geq ab + bc + ca.$$

Решение. Од $a + b + c = 1$ следува $(a + b + c)^3 = 1$, па затоа

$$a^3 + b^3 + c^3 = 1 - 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) - 6abc.$$

Понатаму, неравенството (2) е еквивалентно со неравенството

$$a^3 + b^3 + c^3 - (a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 3abc \geq 0,$$

па ако замениме од претходното равенство и го искористиме условот $a + b + c = 1$, последователно добиваме

$$1 - 4(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) - 3abc \geq 0,$$

$$1 - 4(ab(a + b + c) + ac(a + b + c) + bc(a + b + c) - 3abc) - 3abc \geq 0,$$

$$1 + 9abc \geq 4(a + b + c)(ab + bc + ca),$$

$$\frac{9abc+1}{4} \geq ab + bc + ca,$$

што и требаше да се докаже. ■

Пример 6. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $a + b + c = 2$. Докажи дека

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc \geq a^3 + b^3 + c^3.$$

Решение. Ако во неравенството (1) ставиме $r = 2$, последователно добиваме

$$a^2(a - b)(a - c) + b^2(b - a)(b - c) + c^2(c - a)(c - b) \geq 0,$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + a^2bc + b^2ca + c^2ab \geq a^3b + a^3c + b^3c + b^3a + c^3a + c^3b,$$

$$2(a^4 + b^4 + c^4) + abc(a + b + c) \geq a^3(a + b + c) + b^3(c + a + b) + c^3(a + b + c),$$

$$2(a^4 + b^4 + c^4) + abc(a + b + c) \geq (a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c).$$

Конечно, бараното неравенство следува од последното неравенство ако ставиме $a + b + c = 2$. ■

Забелешка 2. Од решението на претходната задача се гледа дека за $r = 2$ неравенството на Шур е еквивалентно на неравенството

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) \geq xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2).$$

Пример 7. Докажи дека за секои $x, y, z > 0$ важи

$$\frac{x^3}{y^2 - yz + z^2} + \frac{y^3}{z^2 - zx + x^2} + \frac{z^3}{x^2 - xy + y^2} \geq x + y + z.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\sum_{\text{сус}} \frac{x^3}{y^2 - yz + z^2} \cdot \sum_{\text{сус}} x(y^2 - yz + z^2) \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Затоа доволно е да докажеме дека

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x(y^2-yz+z^2)+y(z^2-zx+x^2)+z(x^2-xy+y^2)} \geq x+y+z.$$

Ова неравенство редоследно е еквивалентно со неравенствата:

$$(x^2+y^2+z^2)^2 \geq (x+y+z)(x(y^2-yz+z^2)+y(z^2-zx+x^2)+z(x^2-xy+y^2))$$

$$x^4+y^4+z^4+x^2yz+y^2zx+z^2xy \geq xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2),$$

а според забелешка 2 последното неравенство е еквивалентно со неравенството на Шур за $r=2$. ■

Во претходните примери со примена на неравенството на Шур докажавме повеќе алгебарски неравенства. Во продолжение, користејќи го неравенството на Шур е докажеме неколку неравенства за триаголник.

Пример 8. Ако a, b, c се должини на страните на даден триаголник, P е неговата плоштина и R е радиусот на опишаната круница околу него, докажи дека

$$a^3+b^3+c^3 \geq 12PR.$$

Решение. Од неравенството на Шур во облик а) од Забелешка 1, неравенството меѓу аритметичка и геометриската средина и равенството $P = \frac{abc}{4R}$ последователно добиваме

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &\geq (a+b+c)(ab+bc+ca)-6abc \\ &\geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} - 6abc \\ &= 9abc - 6abc = 3abc = 12PR, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Пример 9. Ако a, b, c се должини на страните на даден триаголник, s е неговиот полупериметар и R и r се радиусите на неговите опишана и впишана кружница, докажи дека

$$\frac{a^2}{(s-b)(s-c)} + \frac{b^2}{(s-c)(s-a)} + \frac{c^2}{(s-a)(s-b)} \leq \frac{6R}{r}. \quad (3)$$

Решение. Ако ги искористиме Хероновата формула за плоштина на триаголник $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ и земеме предвид дека $s = \frac{a+b+c}{2}$,

$P = sr$ и $P = \frac{abc}{4R}$, тогаш неравенство (3) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$a^2(s-a) + b^2(s-b) + c^2(s-c) \leq \frac{6R}{rs} s(s-a)(s-b)(s-c),$$

$$a^2(s-a) + b^2(s-b) + c^2(s-c) \leq \frac{6R}{P} P^2,$$

$$a^2 \frac{b+c-a}{2} + b^2 \frac{c+a-b}{2} + c^2 \frac{a+b-c}{2} \leq 6PR,$$

$$a^2(b+c) - a^3 + b^2(c+a) - b^3 + c^2(a+b) - c^3 \leq 3abc,$$

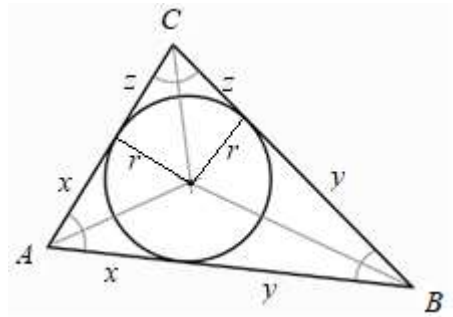
$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b).$$

Но, последното неравенство е еквивалентно со неравенството (2), па затоа тоа е точно, што значи дека е точно и неравенството (3). ■

Пример 10. Ако s е полупериметарот на даден триаголник и R и r се радиусите на неговите опишана и впишана кружница, докажи дека

$$s^2 + r^2 \geq 14Rr. \quad (4)$$

Решение. Ако ги искористиме смените на Рави $a = y + z$, $b = z + x$ и $c = x + y$ (види цртеж), тогаш:



$$s = x + y + z,$$

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)},$$

$$r = \frac{P}{s} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}, \quad R = \frac{abc}{4P} = \frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}},$$

па затоа неравенството (4) е последователно е еквивалентно со неравенствата

$$(x+y+z)^2 + \frac{xyz}{x+y+z} \geq \frac{7}{2} \cdot \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z},$$

$$2(x+y+z)^3 + 2xyz \geq 7(x+y)(y+z)(z+x),$$

$$2(x^3 + y^3 + z^3) \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x). \quad (5)$$

Од друга страна, од неравенството (2) и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned} 2(x^3 + y^3 + z^3) &\geq x^3 + y^3 + z^3 + 3\sqrt[3]{x^3 y^3 z^3} \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \\ &\geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x), \end{aligned}$$

што значи дека е точно неравенството (5), а со тоа е неравенството (4). ■

Пример 11. Ако a, b, c се должини на страните на даден триаголник, r_a, r_b, r_c се радиусите на припишаните кружници и r е радиусот на впишаната кружница на тој триаголник, докажи дека

$$\frac{a^3}{r_a} + \frac{b^3}{r_b} + \frac{c^3}{r_c} \leq \frac{abc}{r}. \quad (6)$$

Решение. Бидејќи $P = (s - a)r_a = (s - b)r_b = (s - c)r_c = sr$, добиваме дека неравенството (6) последователно е еквивалентно на неравенствата

$$\frac{a^3}{r_a} + \frac{b^3}{r_b} + \frac{c^3}{r_c} \leq \frac{abc}{r}$$

$$\frac{a^3(s-a)}{P} + \frac{b^3(s-b)}{P} + \frac{c^3(s-c)}{P} \leq \frac{abc s}{P},$$

$$a^3(s-a) + b^3(s-b) + c^3(s-c) \leq abc s,$$

$$a^3(b+c-a) + b^3(c+a-b) + c^3(a+b-c) \leq abc(a+b+c),$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geq a^3b + b^3a + b^3c + c^3b + c^3a + a^3c,$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geq ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2).$$

Според забелешка 2, последното неравенство е неравенството на Шур за $r = 2$, т.е. тоа е точно, па затоа е точно и неравенството (6). ■

Пример 12. Ако a, b, c се должини на страните на даден триаголник, α, β, γ се внатрешните агли и P е плоштината на тој триаголник, докажи дека

$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab} \geq 4P(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}). \quad (7)$$

Решение. Ако ги искористиме смените на Рави $a = y + z$, $b = z + x$ и $c = x + y$ (види цртеж), тогаш:

$$P = (x + y + z)r, \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{x}, \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{r}{y}, \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{z}, r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}},$$

па затоа

$$\begin{aligned} 4P(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}) &= 4(x + y + z)r \cdot \left(\frac{r}{x} + \frac{r}{y} + \frac{r}{z}\right) \\ &= 4(x + y + z) \frac{xyz}{x+y+z} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\ &= 4(xy + yz + zx) \\ &= 4((s-a)(s-b) + (s-b)(s-c) + (s-c)(s-a)) \\ &= 4(3s^2 - 2s(a+b+c) + ab + bc + ca) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 4(ab + bc + ca - s^2) \\ &= 4(ab + bc + ca - \frac{(a+b+c)^2}{4}) \\ &= 2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2. \end{aligned}$$

Значи, неравенството (7) е еквивалентно со неравенството

$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab} \geq 2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2. \quad (8)$$

Воведуваме смени $\sqrt{a} = u$, $\sqrt{b} = v$, $\sqrt{c} = w$ и добиваме дека неравенството (8) е еквивалентно со неравенството

$$u^4 + v^4 + w^4 + uvw(u + v + w) \geq 2u^2v^2 + 2v^2w^2 + 2w^2u^2. \quad (9)$$

Конечно, според забелешка 2, од неравенството на Шур и од неравенството меѓу аритметичката и геометричката средина следува

$$\begin{aligned} u^4 + v^4 + w^4 + uvw(u + v + w) &\geq u^3v + uv^3 + v^3w + vw^3 + w^3u + wu^3 \\ &\geq 2\sqrt{u^4v^4} + 2\sqrt{v^4w^4} + 2\sqrt{w^4u^4} \\ &= 2u^2v^2 + 2v^2w^2 + 2w^2u^2, \end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (9), што значи дека е точно неравенството (7). ■

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Нека a, b и c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\begin{aligned} a^3b^6 + b^3c^6 + c^3a^6 + 3a^3b^3c^3 &\geq abc(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) + \\ &\quad + a^2b^2c^3(a^3 + b^3 + c^3). \end{aligned}$$

2. Ако $x, y, z > 0$, докажи дека

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz + 1 \geq 2(xy + yz + zx).$$

3. Ако $a, b, c > 0$, докажи дека

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq \sum_{\text{cyc}} (b + c - a)(c + a - b).$$

4. Ако $a, b, c > 0$, докажи дека

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + (a + b + c)^2 \geq 4\sqrt{3abc(a + b + c)}.$$

5. Ако $x, y, z > 0$ и $(x + y)(y + z)(z + x) = 1$, докажи, дека

$$xy + yz + zx \leq \frac{3}{4}.$$

6. Да се докаже, дека ако $a, b, c > 0$, тогаш

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca).$$

7. Нека a, b, c се ненегативни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)} \geq 2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Arslanagić, Š., Zubović D., *Zanimljive primjene Šurove nejednakosti*, Evolventa (JAMTK) 4(1), 2021
2. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
3. Cîrtoaje, V., *Algebraic Inequalities*, GIL Publishing house, Zalau, 2006
4. Govedarica, V., *Matematička takmičenja u Republici Srpskoj*, ZUNS, Sarajevo, 2007
5. Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., Fink, A. M., *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publisher, Dodrecht, 1993
6. Малчески, Р., Малчески, А., Велинов, Д. Малчески, С., Костадинова, С., *Математички талент С7 (збирка задачи за IV година, прв дел)*, Армаганка, Скопје, 2019