„Taxicab“ бројеви

др Марија Станић, **Крагујевац**

У овом чланку биће приче о једној интересантној класи бројева, једном нерешеном математичком проблему, једној математичкој анегдоти и једном генијалном математичару. Но, кренимо редом.

У математици, n-ти „taxicab“ број, који се обично означава са $\mathrm{Ta}\,(n)$, дефинише се као најмањи број који се може представити као збир кубова два позитивна природна броја на n различитих начина, до на поредак сабирака. Енглески математичари G.H. Hardy (1877 – 1947) и E.M. Wright (1906 – 2005) су доказали да такав број постоји за све природне бројеве n. На основу њиховог доказа направљен је алгоритам за генерисање таквих бројева. Међутим, не може се рећи да ли су тако конструисани бројеви најмањи могући, па је тај алгоритам практично неупотребљив за проналажење $\mathrm{Ta}\,(n)$.

До сада је познато само следећих шест „taxicab“ бројева:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ta}\,(1) = 2 &= 1^3 + 1^3, \\
\mathrm{Ta}\,(2) = 1729 &= 1^3 + 12^3 \\
&= 9^3 + 10^3, \\
\mathrm{Ta}\,(3) = 87539319 &= 167^3 + 436^3 \\
&= 228^3 + 423^3 \\
&= 255^3 + 414^3, \\
\mathrm{Ta}\,(4) = 6963472309248 &= 2421^3 + 19083^3 \\
&= 5436^3 + 18948^3 \\
&= 10200^3 + 18072^3 \\
&= 13322^3 + 16630^3, \\
\mathrm{Ta}\,(5) = 48988659276962496 &= 38787^3 + 365757^3 \\
&= 107839^3 + 362753^3 \\
&= 205292^3 + 342952^3 \\
&= 221424^3 + 336588^3 \\
&= 231518^3 + 331954^3, \\
\mathrm{Ta}\,(6) = 24153319581254312065344 &= 582162^3 + 28906206^3 \\
&= 3064173^3 + 28894803^3 \\
&= 8519281^3 + 28657487^3 \\
&= 16218068^3 + 27093208^3 \\
&= 17492496^3 + 26590452^3 \\
&= 18289922^3 + 26224366^3.
\end{aligned}
$$

У математици се среће и појам генералисаног „taxicab“ броја, који се означава са $\mathrm{Taxicab}\,(k,j,n)$, и дефинише се као најмањи број који се може представити као збир j k-тих степена природних бројева на n различитих начина. За $k=3$ и $j=2$, они се своде на обичне „taxicab“ бројеве.

Чувени швајцарски математичар Leonhard Euler (1707 – 1783) је показао да важи

$$635318657 = 59^4 + 158^4 = 133^4 + 134^4.$$

Показано је да је $\mathrm{Taxicab}\,(4,2,2) = 635318657$. Међутим, $\mathrm{Taxicab}\,(5,2,n)$ није познат ни за једно $n \geqslant 2$, тј. није познат ни један природан број који се може представити као збир два пета степена природних бројева на више од једног начина. Дакле, драги математичари ево једног нерешеног математичког проблема за вас.

Да ли постоји природан број који се може представити као збир два пета степена природних бројева на бар два различита начина, тј. да ли постоје природни бројеви a, b, c, d такви да је
$a^5 + b^5 = c^5 + d^5$?

Верујем да сте се читајући ове редове до сада запитали зашто се ови бројеви баш овако зову. „Кривци“ за тај назив су већ поменути Hardy и индијски математичар Srinivasa Ramanujan (1887 – 1920). Наиме, на путу за болницу да обиђе болесног Ramanujan-а Hardy је ишао таксијем број 1729. Констатовао је како је број таксија прилично незанимљив, што је сматрао јако лошим предзнаком. Када је стигао у посету испричао је своје запажање Ramanujan-у, који му је рекао да није у праву, јер је број 1729 врло занимљив број, обзиром да је најмањи број који се може представити као збир кубова два природна броја на два различита начина. Након те анегдоте број 1729 постао је у математичкој литератури познат као Hardy–Ramanujan-ов број, а своје име су добили и „taxicab“ бројеви.

Ramanujan је био самоуки математички геније који је дао огроман допринос у теорији бројева, математичкој анализи и теорији континуираних разломака. Иако је живео веома кратко, иза себе је оставио готово 3900 резултата. Међу најпознатијим је његова формула за израчунавање броја π.

Теорема. *Следећи ред конвергира и његова сума једнака је* $\frac{1}{\pi}$*:*

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}.$$

Конвергенција горњег реда је екстремно брза. Наиме, ако узмемо само један сабирак (за $n=0$) добијамо приближну вредност броја π

$$\pi \approx \frac{9801}{2\cdot 1103\cdot\sqrt{2}} = 3.14159273001\ldots,$$

при чему је грешка (по апсолутној вредности) једнака 0.0000000764235 .... Користећи ову формулу, W. Gosper је 1985. године израчунао првих 17 милиона цифара броја π.

У наставку дајемо неколико „егзотичних" идентитета које је Ramanujan доказао.

$$1-\frac{1}{e}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cdots}}}}$$

$$1=\cfrac{x+1}{x+\cfrac{x+2}{x+1+\cfrac{x+3}{x+2+\cfrac{x+4}{x+3+\cdots}}}},\quad \text{за све } x\in\mathbb{N}.$$

$$\frac{e^{\pi}-1}{e^{\pi}+1}=\cfrac{\pi}{1+\cfrac{\pi^2}{6+\cfrac{\pi^2}{10+\cfrac{\pi^2}{14+\cdots}}}}$$

$$\sqrt{\frac{\pi e}{2}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cdots}}}}}+1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots$$

$$e^{\frac{2\pi}{5}}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{e^{-6\pi}}{1+\cfrac{e^{-8\pi}}{1+\cdots}}}}},\quad \phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \text{– златни пресек.}$$

$$\int_0^a e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\cfrac{e^{-a^2}}{2a+\cfrac{1}{a+\cfrac{2}{2a+\cfrac{3}{a+\cfrac{4}{2a+\cdots}}}}}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\cdots}=\frac{\pi}{1(1+r+r^3+r^6+r^{10}+\cdots)}$$

$$4\int_0^\infty \frac{xe^{-x\sqrt{5}}}{\cosh x} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{1+\cfrac{1^2}{1+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{3^2}{1+\cfrac{3^2}{1+\cfrac{4^2}{1+\cdots}}}}}}}}$$

Ако је

$$u = \cfrac{x}{1+\cfrac{x^5}{1+\cfrac{x^{10}}{1+\cfrac{x^{15}}{1+\cdots}}}} \quad \text{и} \quad v = \cfrac{x^{1/5}}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{1+\cfrac{x^3}{1+\cdots}}}},$$

тада је

$$v^5 = u\frac{1-2u+4u^2-3u^3+u^4}{1+3u+4u^2+2u^3+u^4}.$$

Доказао је и следеће формуле за бесконачне производе

$$\prod_p^\infty \frac{p^2+1}{p^2-1} = \frac{5}{2}, \qquad \prod_p^\infty \left(1+\frac{1}{p^2}\right) = \frac{15}{\pi^2},$$

где се производи рачунају преко свих простих бројеба p: $2, 3, 5, 11, 13, 17, 19, \ldots$.

Литература

[1] B.C. Berndt: *Ramanujan's Notebooks, Part I*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1985.

[2] B.C. Berndt: *Ramanujan's Notebooks, Part II*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1989.

[3] R.K. Guy: *Unsolved problems in number theory*, 3rd ed., Springer-Science + Business Media, New York, USA, 2004.

[4] G.H. Hardy, E.M. Wright: *An Introduction to the Theory of Numbers*, 3rd ed., Oxford University Press, London & NY, 1954.

[5] D. Letić, N. Cakić: *Srinivasa Ramanudžan – princ brojeva*, Tehniki fakultet „Mihajlo Pupin", Zrenjanin, 2010.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2009/10 година