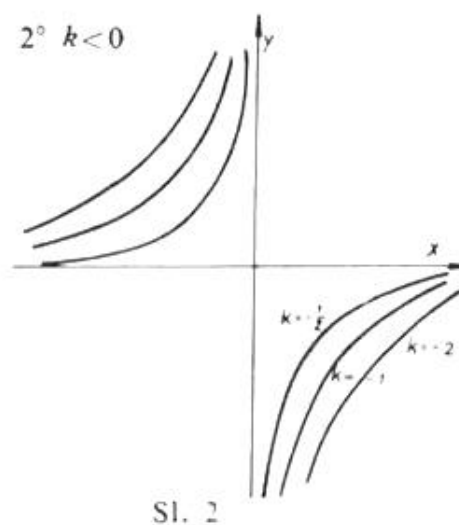
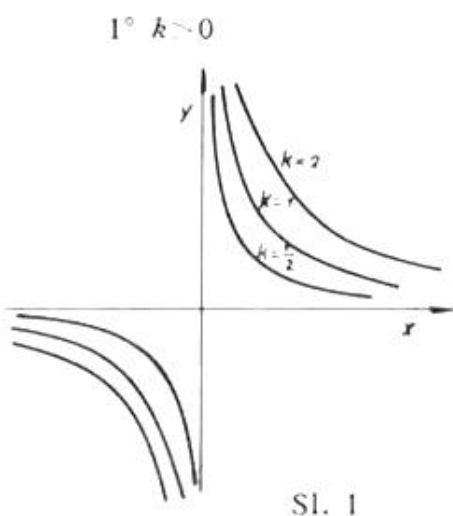


Mr Šefket Arslanagić (Trebinje)

O FUNKCIJI OBRNUTE PROPORCIONALNOSTI I NJENOJ PRIMJENI

Funkcija oblika $y = \frac{k}{x}$, gde je k realan broj različit od nule naziva se funkcija obrnute (inverzne) proporcionalnosti. Njezin grafik je kriva koja se zove jednakostrana (jednakoosna) hiperbola kojoj su koordinatne ose asimptote. Za $k > 0$ kriva se nalazi u prvom i trećem kvadrantu i funkcija je rastuća, a za $k < 0$ kriva se nalazi u drugom i četvrtom kvadrantu i funkcija je opadajuća. Dakle, riječ je o slijedećem grafiku ove funkcije:



U ovom članku biće riječ o grafiku funkcije

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad (1)$$

gdje su a, b, c, d realne konstante. To je linearno-razlomljena ili homografska funkcija. Mora biti $c \neq 0$ (inače imamo linearnu funkciju $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$) i $ad - bc \neq 0$ (jer ako je $ad - bc = 0$, funkcija postaje $y = \frac{a}{c}$ ($= \text{const}$), čiji je grafik prava).

Transformišemo datu funkciju (1); imamo:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left(x+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}$$

$$= \frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right) - \frac{ad-bc}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} - \frac{\frac{ad-bc}{c^2}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} - \frac{k}{x+\frac{d}{c}},$$

gdje je $k = \frac{ad-bc}{c^2}$.

Očigledno je sada da je grafik funkcije (1) takođe hiperbola čiji je centar simetrije tačka $S\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ tj. njen grafik je nastao translacijom grafika funkcije $y = -\frac{k}{x}$ za vektor \vec{OS} , gde je $S\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$.

Nula ove funkcije je $x = -\frac{b}{a}$.

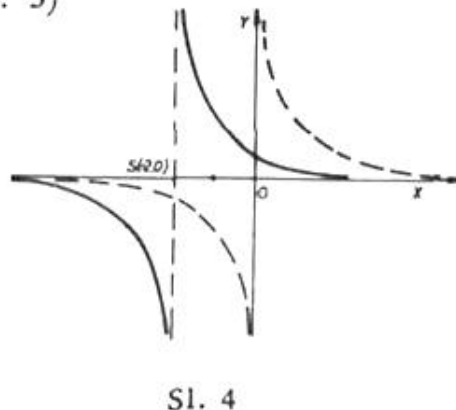
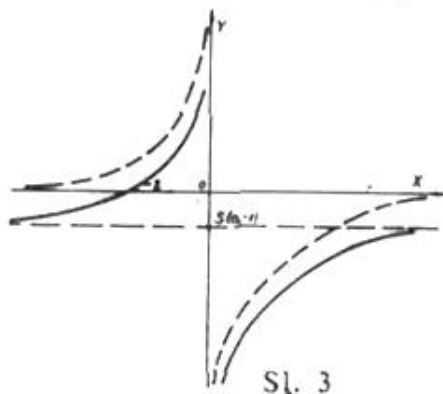
Daćemo više primjera crtanja grafika funkcije (1).

Primjer 1. Nacrtati grafik funkcije $y = -\frac{2}{x} - 1$.

Ovdje je $a = -1$, $b = -2$, $c = 1$, $d = 0$, tj. $S(0, -1)$.

Najpre nacrtamo grafik funkcije $y = -\frac{2}{x}$, a zatim ga transli-

ramo za vektor translacije \vec{OS} , (sl. 3)



Primjer 2. Nacrtati grafik funkcije $y = \frac{1}{2x+4}$.

Ova funkcija se transformiše u oblik:

$$y = \frac{\frac{1}{2}}{x+2},$$

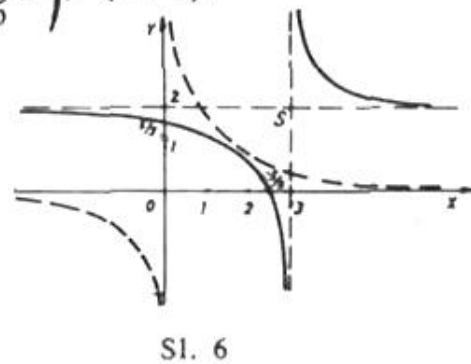
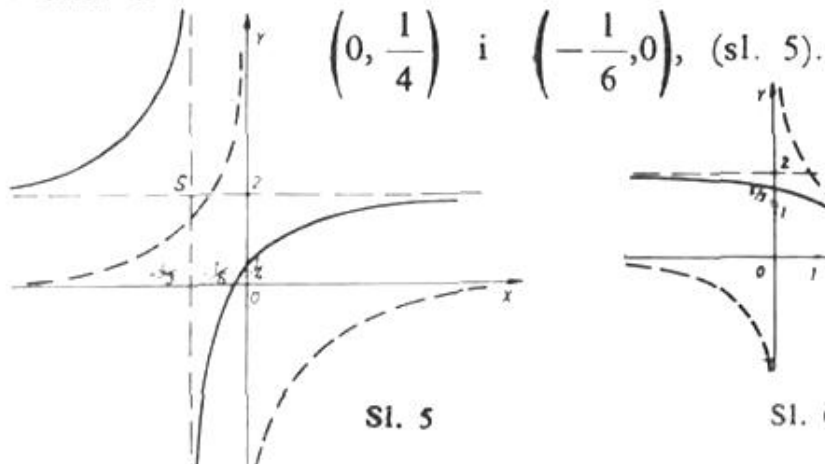
tj. ovdje je $a=0$, $b=\frac{1}{2}$, $c=1$, $d=2$. Znači, centar simetrije grafika ove funkcije je $S(-2,0)$, tj. njen grafik se dobije translacijom grafika funkcije $y = \frac{1}{x}$ za vektor translacije \vec{OS} . Zbog $a=c$, funkcija nema nula, (sl. 4).

Primjer 3. Nacrtati grafik funkcije $y = \frac{6x+1}{3x+4}$.

Funkcija se transformiše u oblik:

$$y = 2 - \frac{\frac{7}{3}}{x + \frac{4}{3}}$$

Traženi grafik ćemo dobiti translacijom grafika funkcije $y = -\frac{7}{3x}$ za vektor \vec{OS} , gdje je $S\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$. Tačke presjeka grafika s koordinatnim osama su



Primjer 4. Nacrtati grafik funkcije $y = \frac{2x-5}{x-3}$.

Funkcija se transformiše u oblik

$$y = 2 - \frac{-1}{x-3}.$$

Dakle, traženi grafik ćemo dobiti translacijom grafika funkcije $y = -\frac{-1}{x} = \frac{1}{x}$ za vektor \vec{OS} , gdje je $S(3,2)$. Tačke presjeka grafika s koordinatnim osama su $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ i $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, (sl. 6).

Preporučujemo da čitaoci nacrtaju grafike ovih funkcija:

1) $y = \frac{3}{x} + 2$, 2) $y = \frac{2}{3x-2}$, 3) $y = \frac{3x-2}{2x+3}$, 4) $y = \frac{5x+4}{x-2}$.