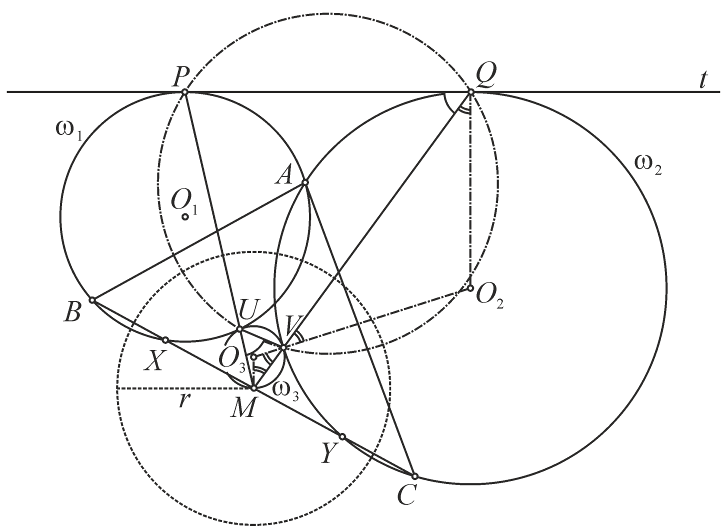
ММО 2025

Задача 1. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со $AB < AC$. Нека M е средишна точка на страната BC, а X и Y се точки на отсечките BM и CM, соодветно, така што $BX = CY$. Нека ω_1 е опишаната кружница на $\triangle ABX$ и ω_2 е опишаната кружница на $\triangle ACY$. Заедничката тангента t на ω_1 и ω_2 која е поблиску до A ги допира ω_1 и ω_2 во точки P и Q, соодветно. Нека правата MP ја сече ω_1 во U, а правата MQ ја сече ω_2 во V. Докажете дека опишаната кружница на $\triangle MUV$ ги допира ω_1 и ω_2.

Решение 1. Забележуваме дека $\overline{MU} \cdot \overline{MP} = \overline{MX} \cdot \overline{MB} = \overline{MY} \cdot \overline{MC} = \overline{MV} \cdot \overline{MQ}$, односно дека четириаголникот $UVQP$ е тетивен. **(2п)** Нека ω_3 е опишаната кружница околу $\triangle MUV$ и центрите на кружниците ω_1, ω_2 и ω_3 се O_1, O_2 и O_3, соодветно. Имаме $\angle O_3VM = 90° - \angle MUV = 90° - \angle PQV = \angle VQO_2 = \angle O_2VQ$, односно точките O_3, V и O_2 се колинеарни, а ω_3 и ω_2 се допираат во точката V. **(3п)** Слично, точките O_3, U и O_1 се колинеарни, а кружниците ω_3 и ω_2 се допираат во точката U. **(3п)** ☐



Решение 2. Забележуваме дека $\overline{MU} \cdot \overline{MP} = \overline{MX} \cdot \overline{MB} = \overline{MY} \cdot \overline{MC} = \overline{MV} \cdot \overline{MQ} = r^2$. Ова повлекува дека инверзијата $I_{M,r}$ во однос на кружница со центар M и радиус r ги пресликува точките U, X, Y и V во точките P, B, C и Q, соодветно. **(2п)** Следствено, кружниците ω_1 и ω_2 се фиксни во однос на $I_{M,r}$, а t се пресликува во ω_3. Бидејќи t е заедничка тангента на ω_1 и ω_2, нејзината слика, т.е. кружницата ω_3, е тангентна на ω_1 и ω_2. **(6п)** ☐

Задача 2. Нека $n > 2$ е цел број, $k > 1$ е реален број и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ се позитивни реални броеви, такви што $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = 1$. Докажете дека:

$$\frac{1+x_1^k}{1+x_2} + \frac{1+x_2^k}{1+x_3} + \cdots + \frac{1+x_{n-1}^k}{1+x_n} + \frac{1+x_n^k}{1+x_1} \geq n\,.$$

Кога важи равенство?

Решение. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме:

$$\begin{aligned}&\frac{1+x_1^k}{1+x_2}+\frac{1+x_2^k}{1+x_3}+\cdots+\frac{1+x_{n-1}^k}{1+x_n}+\frac{1+x_n^k}{1+x_1}\geq\\ &n\sqrt[n]{\frac{1+x_1^k}{1+x_2}\cdot\frac{1+x_2^k}{1+x_3}\cdot\ldots\cdot\frac{1+x_{n-1}^k}{1+x_n}\cdot\frac{1+x_n^k}{1+x_1}}=\\ &n\sqrt[n]{\frac{1+x_1^k}{1+x_1}\cdot\frac{1+x_2^k}{1+x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1+x_{n-1}^k}{1+x_{n-1}}\cdot\frac{1+x_n^k}{1+x_n}}. \quad \textbf{(2п)}\end{aligned}$$

Според ова доволно е да докажеме дека $\frac{1+x_1^k}{1+x_1}\cdot\frac{1+x_2^k}{1+x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1+x_{n-1}^k}{1+x_{n-1}}\cdot\frac{1+x_n^k}{1+x_n}\geq 1$. **(1п)**
Нека $t=\frac{k-1}{2}>0$. Така $k=2t+1$. Забележуваме дека

$$(1+a^{2t+1})-a^t(1+a)=1-a^t-a^{t+1}+a^{2t+1}=(1-a^t)(1-a^{t+1}). \quad \textbf{(1п)}$$

За $a>1$ двата множитела се позитивни, а за $a<1$ обата се негативни. Следствено, за секој позитивен реален број a важи:

$$1+a^{2t+1}\geq a^t(1+a)\,, \tag{1}$$

при што равенство важи ако и само ако $a=1$. **(2п)**
Користејќи го (1) за $k=2t+1$ добиваме:

$$\frac{1+x_1^k}{1+x_1}\cdot\frac{1+x_2^k}{1+x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1+x_{n-1}^k}{1+x_{n-1}}\cdot\frac{1+x_n^k}{1+x_n}\geq x_1^t\cdot x_2^t\cdot\ldots\cdot x_{n-1}^t\cdot x_n^t=1^t=1. \quad \textbf{(1п)}$$

Равенство важи ако и само ако $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$. **(1п)** □

Задача 3. На хоризонтално поставена бројна права, врз секој број $i\in\{1,2,\ldots,s\}$ е поставено купче од $t_i>0$ жетони. Сé додека барем едно купче содржи барем два жетона, ја повторуваме следнава постапка: избираме такво купче, нека се состои од $k\geq 2$ жетони, и најгорниот жетон од избраното купче го поместуваме долж бројната права за $k-1$ единечни позиции надесно. Кој е најголемиот природен број N врз кој може да биде поставен жетон? (Изразете го N како функција од $(t_i : i=1,\ldots,s)$.)

Решение. Ќе покажеме дека $N=\sum_{i=1}^s t_i$. Всушност, ќе покажеме дека крајната конфигурација (распределба на жетоните долж бројната права) е следнава: врз секој од броевите $1,2,\ldots,\sum_{i=1}^s t_i$ е поставен по еден жетон. **(1п)**

Започнуваме со забелешка дека најдолниот жетон во секое купче не се поместува во ниту еден момент. Ќе ги користиме следниве терминологија и ознаки. За произволна конфигурација P, секој жетон кој не е најдолниот во некое купче велиме дека е *слободен*. За позитивен цел број врз кој нема поставено ниту еден жетон велиме дека е *празен*. Нека $r(P)$ е најголемиот непразен цел број, $e(P)$ е бројот на празни позитивни цели броеви кои на бројната права се лево од $r(P)$, и $f(P)$ е бројот на слободни жетони. Дефинираме *тежина*, $w(P)$, на конфигурација P со $w(P)=r(P)-e(P)+f(P)$. **(1п)**

Тврдење 1. *Тежината на конфигурација е инваријанта.* Доколку промената $P\rightsquigarrow P'$ се состои од преместување жетон надесно врз непразен број, тогаш $r(P')=r(P)$, $e(P')=e(P)$ и $f(P')=f(P)$, па тежината останува непроменета. Ако пак промената $P\rightsquigarrow P'$ се состои од поместување жетон врз празно поле лево од $r(P)$, тогаш $r(P')=r(P)$ додека $e(P')=e(P)-1$ и $f(P')=f(P)-1$, па повторно $w(P')=w(P)$. Конечно, ако промената $P\rightsquigarrow P'$ се состои од преместување жетон надесно од $r(P)$ тогаш $f(P')=f(P)-1$ и $e(P')=e(P)+(r(P')-r(P)-1)$ (бидејќи има $r(P')-r(P)-1$ празни цели броеви помеѓу $r(P)$ и $r(P')$ во конфигурацијата P'). Следствено, $w(P')=w(P)$. **(2п)** ⋄

Следствено, за секоја конфигурација P која може да настане во текот на процесот важи $w(P) = s - 0 + \sum_{i=1}^{s}(t_i - 1) = \sum_{i=1}^{s} t_i$. **(1п)**

Тврдење 2. *За секоја тековна конфигурација P важи $e(P) \leq f(P)$.* Ќе докажеме дека за секој позитивен цел број $m \leq r(P)$ на сегментот $1, 2, \ldots, m-1$ има барем толку слободни жетони колку и празни броеви. При почетната конфигурација, $e(P) = 0$, па ова навистина важи за секој позитивен цел број $m \leq r(P)$. Под претпоставка дека ова важи за конфигурација P, нека P' се добива од P со поместување на жетон од бројот u врз бројот v. Јасно, тогаш тврденото важи за секој $m \leq u$ и за секој $m > v$ (според претпоставката за P). Има $v - u - 1$ слободни жетони врз u и најмногу $v - u - 1$ празни броеви помеѓу u и v. Значи, тврденото важи за секој $m \leq r(P')$. **(2п)** $\diamond$

Тврдење 3. *За крајната конфигурација P важи $e(P) = f(P) = 0$ и $r(P) = \sum_{i=1}^{s} t_i$.* Јасно, за крајната конфигурација P важи $f(P) = 0$. Според Тврдење 2, мора да важи и $e(P) = 0$. Имајќи предвид дека тежината на секоја конфигурација изнесува $\sum_{i=1}^{s} t_i$, заклучуваме дека $r(P) = w(P) + e(P) - f(P) = \sum_{i=1}^{s} t_i$. **(1п)** $\diamond$

$\square$

Задача 4. Даден е полином $P(x) = ax^{75} + b$, каде a и b се заемно прости броеви кои припаѓаат во $\{1, 2, \ldots, 151\}$, кој го задоволува следниот услов: Постои најмногу еден прост број p така што за секој природен број k, $p \nmid P(k)$. Докажете дека за секој прост број $q \neq p$ постои природен број k, за кој $q^2 \mid P(k)$.

Решение. Ако $a = b = 1$, тогаш за секој цел број m, $P(m-1) \equiv a(-1)^{75} + a \equiv 0 \pmod{m}$. Претпоставуваме дека $a \neq b$ (односно барем еден од тие два броја е поголем од 1). **(1п)**
Како 2, 6, 10, 30 и 150 се делители на 150 и притоа 3, 7, 11, 31 и 151 се прости броеви, врз основа на малата теорема на Ферма можеме да заклучиме дека за $q \in \{3, 7, 11, 31, 151\}$ важи $x^{150} \equiv 1 \pmod{q}$ (под претпоставка дека $q \nmid x$) **(1п)**. Имајќи го ова во предвид, ако $q \nmid b$, тогаш $q \nmid x$, па за горенаведените q за кои исто така важи $q \neq p$, имаме

$$a^2 - b^2 \equiv a^2x^{150} - b^2 \equiv (ax^{75} + b)(ax^{75} - b) \pmod{q}.$$

Со додавање на случаите каде $q \nmid b$, можеме да заклучиме дека секој број меѓу $\{3, 7, 11, 31, 151\} \setminus \{p\}$ го дели $b(a^2 - b^2)$ $(*)$. **(1п)**
Понатаму, од условите на задачата можеме да забележиме дека за $q \neq p$ кој е делител на a, мора да важи дека q го дели b, што е контрадикција со претпоставката дека a и b се заемно прости, односно мора да важи $a = p^t$ за некој ненегативен цел број t (секако ако p од условите на задачата не постои, тогаш $a = 1$). На основа на $(*)$ можеме да заклучиме дека имаме еден од наредните три случаја: $p = 151$, односно ако не е тоа исполнето, тогаш $151 \mid b(a^2 - b^2)$, што ни ги дава случаите $b = 151$ и $a + b = 151$, ($151 \mid a - b$ повлекува дека $a = b$, што е веќе разрешен случај). **(1п)**
1° $b = 151$
Ако земеме $(*)$ за 31, тогаш важи $p = 31$ или $31 \mid a^2 - b^2$. Во првиот случај $a \in \{1, 31\}$ и на основа на $(*)$, 11 го дели

$$a^2 - b^2 = -(151 - a)(151 + a),$$

што не е можно за ниедна од двете потенцијални вредности на a. Ако $31 \mid 151^2 - a^2$, тогаш $a \in \{120, 89, 58, 27, 4, 35, 66, 97, 128\}$, што после отстранување на броевите кои не се степени на прост број имплицира $a \in \{4, 27, 89, 97, 128\}$. Меѓутоа, ова би значело дека $77 \mid 151^2 - a^2$ (поради $(*)$), што не важи за ниедна вредност на a. **(1п)**
2° $a + b = 151$
Повторно, можеме да заклучиме дека $p = 31$ или $31 \mid b(a-b)$. Во првиот случај имаме $a \in \{1, 31\}$, откај следува $b - a \in \{89, 149\}$. Меѓутоа ниедна од овие 2 вредности не е делива со ниту 7, ниту пак 11. Ако $31 \mid b$, тогаш $a - b \in \{89, 27, -35, -97\}$ но повторно во овој случај ниту b ниту $a - b$ не се дели со 7 ниту со 11. На сличен начин можеме да заклучиме дека ако $31 \mid a - b$, тогаш

$b \in \{122, 91, 60, 29\}$, а притоа само за $b = 91$ добиваме број кој се дели со 7 или 11. Но, во овој случај $p = 11$ и $a = 60$, што не е возможно. **(1п)**

3° $p = 151$

Јасно е дека $a \in \{1, 151\}$. За $a = 1$, ако $31 \mid b$, односно $b = 31c$, тогаш $b^2 - a^2 \equiv 4c^2 - 1 \pmod{11}$, што имплицира $c \pmod{1}1 \in \{5, 6\}$, но ова значи дека $b \geq 5 \cdot 31 > 151$. Ако $31 \mid b - a$, тогаш $(b, b + a) \in \{(32, 33), (63, 64), (94, 95), (125, 126)\}$ а само 33 се дели 11, меѓутоа ни 32, ни 33 не се деливи со 7, односно немаме решение во овој случај. Слично, ако $31 \mid b + a$, тогаш $(b, b - a) \in \{(30, 29), (61, 60), (92, 91), (123, 122)\}$, при што ниеден од овие броеви не се дели со 11. **(1п)**

Во случајот $a = 151$, ако $31 \mid b$, односно $b = 31c$, тогаш $a^2 - b^2 \equiv 9 - 4c^2 \pmod{11}$, та c е конгруентно со 4 или 7 модул 11, па единствената можност е $b = 124 \leq 151$. Но, $a^2 - b^2 = 27 \cdot 275$ не е деливо со 7. Слично постапуваме ако $11 \mid b$ т.е. $b = 11c$, односно имаме $a^2 - b^2 \equiv 16 + 3c^2 \pmod{31}$ кое се дели со 31 само кога c е конгруентно со 6 или 25 модул 31, што ни ја дава единствената можна вредност $b = 66 < 151$. Сега, го прове························руваме условот за $q = 19$. Со оглед на тоа дека $19 \nmid 66$, ако $19 \mid P(k)$, тогаш $19 \nmid k$ и имаме

$$P(k) \equiv (8 \cdot 19 - 1)x^{6 \cdot 18 + 3} + 3 \cdot 19 + 9 \equiv -x^3 + 9 \pmod{19},$$

што имплицира дека $x^3 \equiv 9 \pmod{19}$. Меѓутоа тогаш би имале

$$1 \equiv x^{18} \equiv 9^6 \equiv 81^3 \equiv 5^3 \equiv 125 \equiv 11 \pmod{19},$$

што е контрадикција. Затоа заклучуваме дека $11 \cdot 31 \mid a^2 - b^2$. Како $11 \cdot 31 > 302 > a + b$, можеме да заклучиме и дека и 11 и 31 делат точно еден од $a - b$ и $a + b$, та $302 = 2a = 31c + 11d$, што има решение само за $c = 14 - 11s$, $d = 31s - 12$, за било кој цел број s. Но, единственото позитивно решение е $c = 3$, $d = 19$, што ни дава дека $a + b = 209$, односно дека $b = 58$ и $a - b = 93$, кои не се делат со 7. **(1п)** $\square$

Забелешка. Единствениот полином кои ги задоволува условите на задачата е $P(x) = x^{75} + 1$, за кој веќе искоментиравме дека важи бараното бидејќи за произволен $m > 1$, $P(m-1)$ се дели со m.

Забелешка. Неколку дообјаснувања за распределбата на поени:

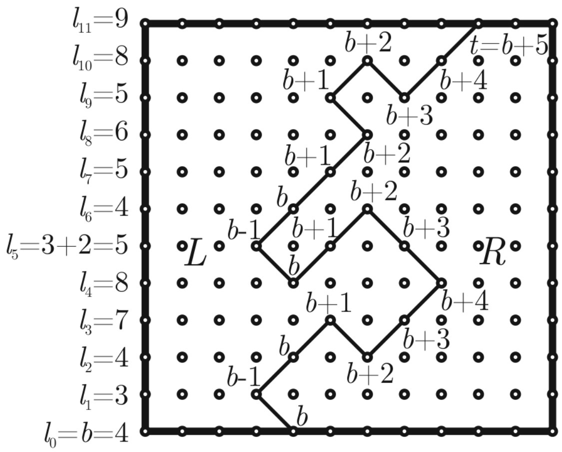
- Применување на малата теорема на Ферма на било кое множество прости броеви кое не го содржи тоа што е потребно за решавање на задачата вреди 0 поени;
- воочување дека a мора да биде степен на прост број не носи поени;
- нецелосно решавање на било кој од четирите потслучаи кои носат поени (односно неизложување на идејата корисна за тој потслучај) вреди 0 поени на соодветниот дел;
- грешка во пресметка во еден од потслучаите, во кој идејата за решавање е точна се наградува со соодветниот поен;
- констатацијата од претходната забелешката не носи поени.

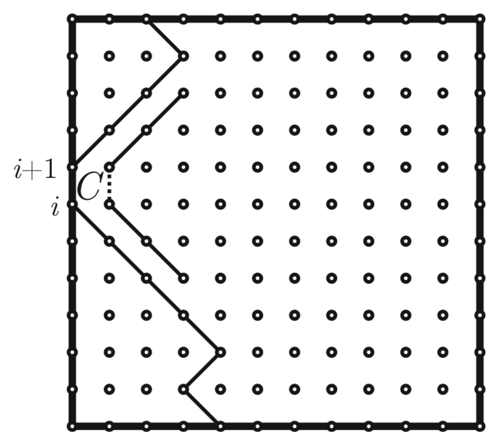
Задача 5. Нека $n > 1$ е природен број, а K е квадрат со страна n кој е разделен на n^2 единечни квадратчиња. За кои вредности на n квадратот K може да се разбие на n фигури со еднакви плоштини само со користење на дијагоналите на единечните квадратчиња, при што од секое единечно квадратче е искористена најмногу една дијагонала (може да има единечно квадратче од кое не е искористена ниту една дијагонала).

Решение. Прво ќе докажеме дека поделбата е невозможна за произволен непарен број $n > 1$. Нека F е фигура чии страни се состојат од дијагонали од единечните квадратчиња (и можеби делови од страните на K) и нека $f_0, f_1, \ldots, f_n$ е бројот на страни на единечни квадратчиња од соодветните хоризонтални линии кои се во фигурата. Бидејќи F се разбива на трапези и триаголници чии основи се овие страни и имаат висина 1, плоштината изнесува:

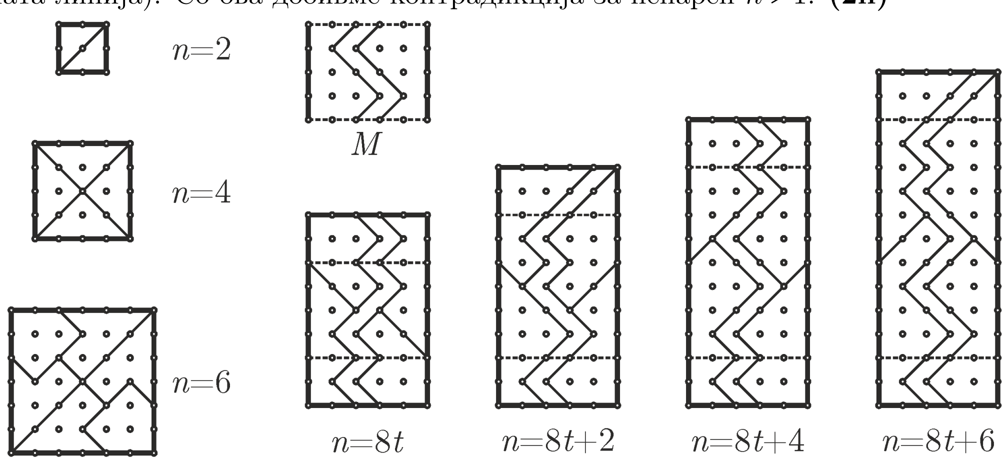
$$P_F = \frac{f_0 + f_1}{2} + \frac{f_1 + f_2}{2} + \cdots + \frac{f_{n-1} + f_n}{2} = \frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}. \quad \textbf{(1п)}$$

Според ова за плоштината да биде целобројна мора $f_0 + f_n$ да е парен. Да претпоставиме дека постои линија (од дијагонали) која почнува од долната страна на K и завршува на горната страна на K. Оваа линија го дели квадратот на две фигури: L - лево и R - десно (види цртеж лево). Нека b е почетната положба, а t крајната положба во соодветниот ред (броено од лево кон десно). Втората точка ќе биде на позиција $b-1$ или $b+1$ на втората линија и општо позицијата се менува за еден кога одиме на следна линија (нагоре или надолу). Ако n е непарен, b и t имаат различна парност, па $l_0 + l_n = b + t$ е непарен, од каде следува дека плоштината на L не е цел број. Заклучуваме дека не може да има ваква линија, а од причини на симетрија нема линија која почнува на левиот раб, а завршува на десниот раб од K. **(2п)**





Нека сега постои бараната поделба на квадрат K чија страна има непарна должина $n > 1$. Од претходната дискусија, делбените линии почнуваат долу и завршуваат лево или десно или почнуваат лево или десно, а завршуваат горе. Оттука следува дека постои „централна“ фигура C која содржи делови од сите страни на квадратот. За ваквата фигура сите c_i се барем 1, но од $P_C = \frac{c_0+c_n}{2} + c_1 + \cdots + c_{n-1} = n$ тие се точно 1. На границата на C постои единечна отсечка на левата страна од K, на пример меѓу i и $i+1$ (цртеж десно). Во овој случај $c_i > 1$ или $c_{i+1} > 1$, бидејќи во спротивно границата на K содржи страна од единечно квадратче (обележана со испрекината линија). Со ова добивме контрадикција за непарен $n > 1$. **(2п)**



Поделбата е можна за секој парен број n. На цртежот се дадени поделбите за $n = 2$, $n = 4$, $n = 6$, $n = 8t$, $n = 8t+2$, $n = 8t+4$ и $8t+6$, за секое $t \in \mathbb{N}$. Притоа, хоризонталните испрекинати линии ни даваат позиции на кои ја додаваме фигурата M (на двете места истовремено) за да

го зголемиме t за 1, а „централната“ фигура (лента од долу до горе) се повторува $n-4$ пати за да се пополнат n колони (наместо 5) во квадратот. **(3п)**
Заклучуваме дека квадрат K со целобројна страна $n > 1$ може да се подели на n фигури со еднаква плоштина ако и само ако бројот n е парен. $\square$

Забелешка. Еден поен може да се добие за поделба направена за $n = 2k$, за секое $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, или за група $8t + 2k$, за едно $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Или вкупно два поена може да се добијат доколку се опфатени малите парни броеви n и барем две од групите $8t + 2k$.

ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА БМО 2025

Задача 1. Кружно се наредени $n \geq 2$ светилки, редоследно нумерирани со $1, 2, \ldots, n$ при кружно движење во насока на стрелките на часовникот. Секоја светилка е во една од следните две состојби: или **вклучена** или **исклучена**. Во почетната конфигурација од состојби, барем една светилка е вклучена. Во текот на секој од n денови ја менуваме тековната конфигурација состојби на следниот начин: за $1 \leq k \leq n$, на k-тиот ден започнуваме од k-тата светилка и се движиме во насока на стрелките на часовникот по кругот, менувајќи ја состојбата на секоја светилка низ која поминуваме, сé додека не вклучиме светилка што претходно била исклучена.

Докажете дека конечната конфигурација, добиена на n-тиот ден, се совпаѓа со почетната.

Решение. Да ги ренумерираме светилките со $0, 1, \ldots, n-1$ при кружно движење по насока на стрелките на часовникот, започнувајќи од првата светилка. Ќе користиме 0 (односно 1) за да означиме дека тековната состојба на светилката е исклучена (односно вклучена). На секоја дадена конфигурација состојби ѝ доделуваме бинарен код

$$b = \overline{b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_1b_0}_{\,(2)}\,,$$

каде што b_i е ознаката за состојбата на светилката со број i ($i = 0, 1, \ldots, n-1$). **(2п)**

Со $b(k)$ (за $0 \leq k \leq n$) го означуваме бинарниот код на конфигурацијата што резултира по трансформацијата спроведена на k-тиот ден. Да забележиме дека

$$b(k) = b(k-1) + 2^{k-1}(\mathrm{mod}(2^n - 1))\,. \quad \textbf{(6п)} \tag{1}$$

Собирајќи ги равенствата (1) за $k = 1, \ldots, n$ **(1п)**, заклучуваме дека $b(n) = b(0)$. **(1п)** □

Задача 2. Нека $\triangle ABC$ остроаголен и A_1, B_1 и C_1 се подножјата на висините од A, B и C соодветно. На полуправите AA_1, BB_1 и CC_1 одбрани се точки A_2, B_2 и C_2 соодветно, надвор од $\triangle ABC$, така што

$$\frac{A_1A_2}{AA_1} = \frac{B_1B_2}{BB_1} = \frac{C_1C_2}{CC_1}.$$

Пресечните точки на B_1C_2 со B_2C_1, C_1A_2 со C_2A_1 и A_1B_2 со A_2B_1 се A', B' и C' соодветно.

Докажете дека AA', BB' и CC' имаат заедничка точка.

Решение. Забележуваме дека од $\triangle BB_1A \sim \triangle CC_1A$ следува дека

$$\frac{B_1A}{C_1A} = \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{B_1B_2}{C_1C_2},$$

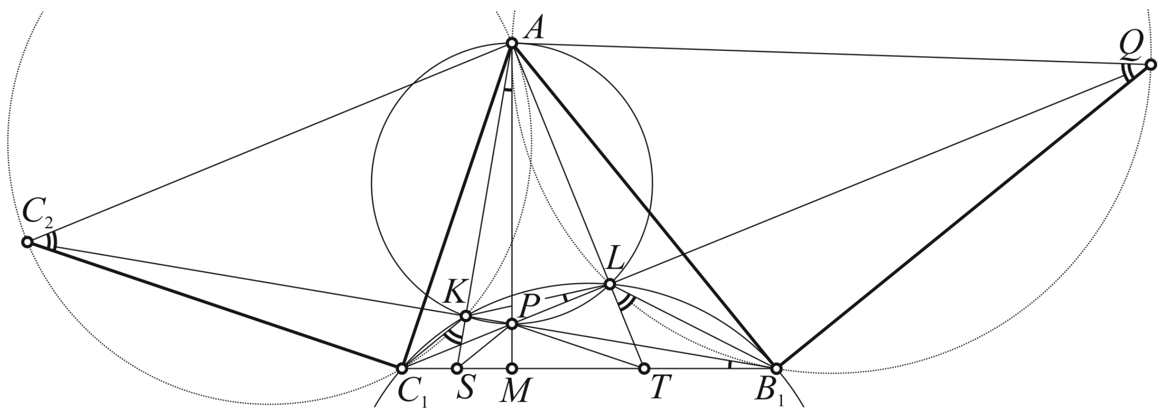
па

$$\frac{B_1A}{B_1B_2} = \frac{C_1A}{C_1C_2}. \quad \textbf{(1п)}$$

Нека AM е висината во $\triangle AC_1B_1$, P е пресечната точка на B_1C_2 со AM и Q е пресечната точка на C_1P со B_1B_2. Точките S и T на C_1B_1 се такви што $SP \parallel B_1Q$ и $TP \parallel C_1C_2$. Од $SP \perp B_1A$ следува дека P е ортоцентар на $\triangle ASB_1$, а од $TP \perp C_1A$, P е ортоцентар и на $\triangle AC_1T$. **(2п)** Нека K е подножјето на висината од B_1 во $\triangle ASB_1$, а L подножјето на висината од C_1 во $\triangle AC_1T$. Бидејќи $AKPL$ е тетивен (имено, $\angle PKA = 90° = \angle ALP$) важи

$$\angle KLC_1 = \angle KLP = \angle KAP = \angle KB_1C_1.$$

Оттука и C_1B_1LK е тетивен, т.е. $\angle C_1KB_1 = \angle C_1LB_1$. **(2п)**



Од

$$\angle QLA = \angle QB_1A = \angle AKC_2 = \angle AC_1C_2 = 90^\circ$$

следува дека четириаголниците ALB_1Q и AC_2C_1K се тетивни. **(1п)** Според тоа добиваме

$$\angle AQB_1 = \angle TLB_1 = \angle C_1LB_1 - 90^\circ = \angle C_1KB_1 - 90^\circ = \angle C_1KS = \angle C_1C_2A.$$

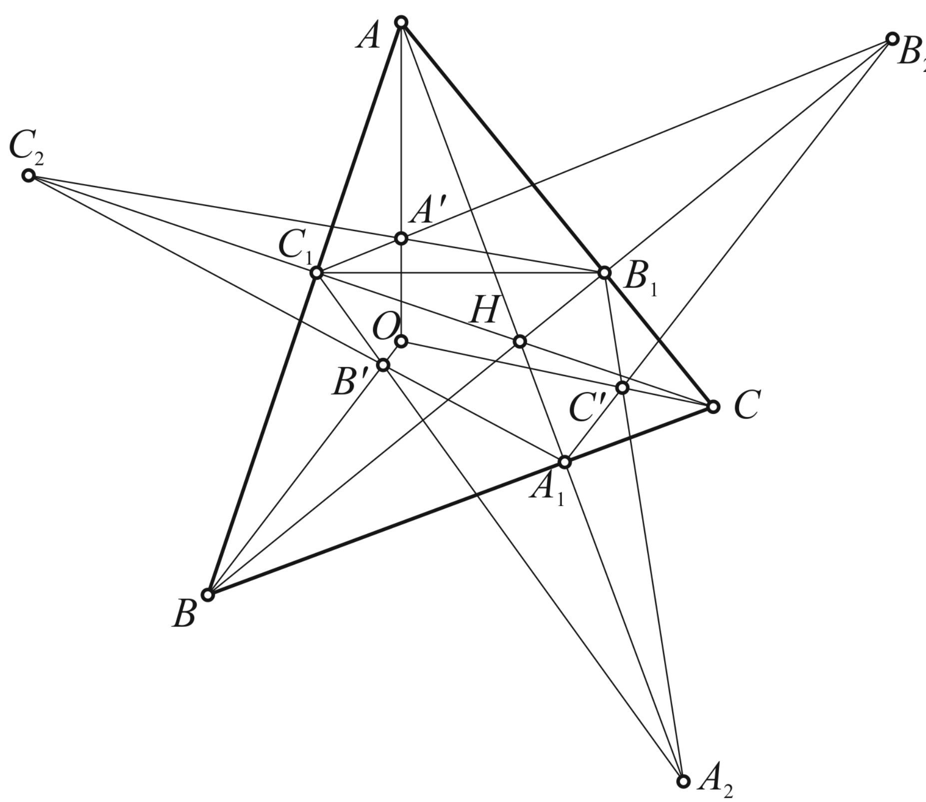
Заклучуваме дека $\triangle AC_2C_1 \sim \triangle AQB_1$, па

$$\frac{C_1C_2}{C_1A} = \frac{B_1Q}{B_1A}.$$

Бидејќи

$$\frac{B_1A}{B_1B_2} = \frac{C_1A}{C_1C_2},$$

важи $Q \equiv B_2$, од каде $P \equiv A'$. **(2п)**



Нека O е центарот на опишаната кружница окколу $\triangle ABC$. Бидејќи AC_1HB_1 е тетивен (имено, $\angle HC_1A = \angle AB_1H = 90°$), имаме $\angle C_1AA' = 90° - \angle B_1C_1A = 90° - \angle B_1HA = 90° - \angle ACB = \angle BAO$. Оттука следува дека O лежи на AA'. Од причини на симетрија O е заедничка точка за трите прави (AA', BB', CC'). **(2п)** □

Задача 3. Најдете ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ кои ја задоволуваат равенката

$$f(xf(y)+f(x)) = f(x)f(y)+2f(x)+f(y)-1,$$

за секои $x, y \in \mathbb{R}$ и неравенката $f(kx) > kf(x)$ за секој $x \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{R}$ таков што $k > 1$.

Решение. За $x = 0$ во даденото ревенство добиваме $f(f(0)) = f(y)(f(0)+1)+2f(0)-1$, т.е. $f(f(0))-2f(0)+1 = f(y)(f(0)+1)$. **(1п)** Според ова ако $f(0) \neq -1$ заклучуваме дека $f(y)$ е константна. Ако $f(y) = c$ за секое $y \in \mathbb{R}$, тогаш $c = c^2+2c-1$, па $(c+1)^2 = 2$. Решенијата на оваа равенка се $c = -1+\sqrt{2}$ и $c = -1-\sqrt{2}$. Лесно се проверува дека $f(x) = -1+\sqrt{2}$ и $f(x) = -1-\sqrt{2}$ ја задоволуваат дадената равенка. Но, единствено $f(x) = -1-\sqrt{2}$ ја задоволува дадената неравенка. **(2п)**
Сега го разгледуваме случајот кога $f(0) = -1$. За $y = 0$ во дадената равенка добиваме $f(f(x)-x) = f(x)-2$. Според ова ако $f(x) = 2x-1$, тогаш $f(x-1) = 2x-3$, а бидејќи ова е точно за $x = 0$, добиваме дека $f(x) = 2x-1$ за сите негативни цели броеви. **(1п)**
За $y = -1$ и цел $x \leq -1$ имаме

$$f(-x-1) = f(-3x+(2x-1)) = f(xf(y)+f(x)) = f(x)(f(y)+2)+f(y)-1 = -(2x-1)-4 = 2(-x-1)-1.$$

Заклучуваме дека $f(x) = 2x-1$ за секој цел број x. **(1п)** Од $f(f(x)-x) = f(x)-2$ за $s \in \mathbb{R}$, $x = s$ и $f(x) = t$, добиваме дека $f(t-s) = t-2$, а за $x = t-s$ добиваме $f(s-2) = f(t-2-(t-s)) = t-4$. Општо се добива $f(x+2m) = f(x)+4m$ за секој реален број x и цел број m. Нека сега $s > 1$ е реален број кој не е цел и $a = [s]$ е најголемиот цел број помал од s. За $k = \frac{s}{a} > 1$ од неравенството добиваме

$$f(s) > f(a)\frac{s}{a} = (2a-1)\frac{s}{a} = 2s-1-\frac{s-a}{a} > 2s-1-\frac{1}{a}. \quad \textbf{(1п)}$$

Слично за $b = a+1$, и $k = \frac{b}{s} > 1$ имаме

$$f(s) < f(b)\frac{s}{b} = (2b-1)\frac{s}{b} = 2s-1+\frac{b-s}{b} < 2s-1+\frac{1}{b}. \quad \textbf{(1п)}$$

Бидејќи $f(s+2m) = f(s)+4m$ заклучуваме дека

$$2s-1-\frac{s-a}{a+2m} < f(s+2m)-4m = f(s) < 2s-1+\frac{b-s}{b+2m}.$$

А, бидејќи m може да биде произволно голем, $\frac{1}{a+2m}$ и $\frac{1}{b+2m}$ може да бидат произволно мали (поголеми од 0), па $f(s) = 2s-1$ за секој $s > 1$. Сега од $f(s+2) = f(s)+4$ Заклучуваме дека $f(s) = 2s-1$ за секој $s \in \mathbb{R}$. **(2п)** Од

$$f(xf(y)+f(x)) = 2(x(2y-1)+2x-1)-1 = 4xy-2x-2y+2y+4x-2 =$$
$$(2x-1)(2y-1)+2(2x-1)+(2y-1)-1 = f(x)f(y)+2f(x)+f(y)-1,$$

функцијата $f(x) = 2x-1$ го задоволува даденото ревенство, а од $f(kx) = 2kx-1 = k(2x-1)+(k-1) > kf(x)$ го задоволува и неравенството. **(1п)**
Функциите кои ги задоволуваат условите на задачата се: $f(x) = -1-\sqrt{2}$ и $f(x) = 2x-1$. □

Задача 4. За даден природен број n, нека p е непарен прост делител на n^2+n+2. Докажете дека постојат цели броеви a, b такви што $p = a^2+7b^2$.

Решение. Да забележиме дека постои $x \in \mathbb{N}$ за кое важи $p \mid x^2 + 7$ (т.е. -7 е квадратен остаток модуло p): навистина, $p \mid 4(n^2 + n + 2) = (2n + 1)^2 + 7$. (**2п**) Лемата на Туе имплицира дека постојат $a, b \in \mathbb{N}$ така што $a, b < \sqrt{p}$ и $a \equiv xb \;\; mod\, p$, односно $p \mid a^2 - x^2b^2$, та $p \mid a^2 + 7b^2$ (**3п**), при што последниот израз е помал од $8p$ (односно, заради деливоста со p, помал или еднаков на $7p$). Оттука можеме да заклучиме дека $a^2 + 7b^2 = kp$ за некое $1 \leq k \leq 7$. (**1п**)

1° $k \in \{2, 6\}$

Како левата страна на $kp = a^2 + 7b^2$ е 2 модуло 4, можеме да заклучиме дека a, b имаат иста парност, па десната страна се дели со 4, контрадикција. (**1п**)

2° $k = 5$

Модуло 5 имплицира $5 \mid a^2 + 2b^2$, но ниту a ниту b е делив со 5 (бидејќи ова би значело дека $5 \mid p$, но $5 \nmid n^2 + n + 2$, лесна проверка), што не е возможно (поради тоа што -2 не е квадратен остаток модуло 5, односно бидејќи $a^2 + 2b^2 \equiv \begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix} \;\; mod\, 5$).

3° $k = 3$

Слично како во претходниот случај, со сведување модуло 3 добиваме дека $3 \mid p$ (но повторно, $3 \nmid n^2 + n + 2$), освен ако ниту a ниту b не се делат со 3, што би значело дека ни $a^2 + 7b^2$ не се дели со 3. (**1п**)

4° $k = 4$

Ако a, b се парни, тогаш $a = 2a_0, b = 2b_0$, та затоа $p = a_0^2 + 7b_0^2$. Ако и a и b се непарни, гледаме модуло 8 овојпат, заедно со фактот дека $m^2 \equiv 1 \;\; mod\, 8$ за m непарно; заклучуваме дека десната страна е делива со 8, што е контрадикција со нашата претпоставка дека p е непарен. (**1п**)

5° $k = 7$

Јасно е дека $7 \mid a$, та $p = b^2 + 7a_0^2$, каде $a = 7a_0$. (**1п**)

Конечно, од разгледуваните случаи можеме да заклучиме дека $p = a^2 + 7b^2$. $\square$

Коментари:

- За целосно решавање на случаите $k = 3$ и $k = 5$ се добива 1 поен. Ако барем еден од двата случаја е нецелосно решен (дури и другиот случај да е точно и комплетно решен), следуваат 0 поени;
- Има и помалку директен, но можеби некому порутински начин да се докаже дека -7 е квадратен остаток при делење со p, а тоа е со примена на следнава лема:
Ако $p \mid ax^2 + bxy + cy^2$ за p прост број, a, b, c цели броеви кои не се деливи со p и $(x, y) = 1$, каде x, y се целобројни, тогаш дискриминантата $D = b^2 - 4ac$ е квадратен остаток при делење со p.
Докажување на соодветниот чекор од доказот со помош на оваа лема исто така се наградува со 2 поена, при што докажување на лемата не е потребно;
- Спомнување на лемата на Туе без правилно искористување на истата (погрешен модуларен израз, неточна горна граница за a и b...) се наградува со најмалку 1, најмногу 2 поена;
- Нецелосно решавање на било кој од случаите не се вреднува со поен.