Osječki matematički list 24 (2024), 19–24

Zanimljiva svojstva broja 1729

Suzana Antunović*

Sažetak

Britanski taksi s brojem 1729 potaknuo je poznatu anegdotu u matematici i doveo do otkrića *taksi–brojeva* koji vuku svoje podrijetlo iz 1918. godine i onoga što se činilo kao usputni komentar genijalnog indijskog matematičara Srinivase Ramanujana. Broj 1729 posjeduje brojna zanimljiva matematička svojstva te je uspio pronaći svoje mjesto čak i u popularnoj kulturi.

Ključne riječi: *Ramanujan, taksi–broj, Carmichaelov broj, Zeiselov broj*

Interesting properties of the number 1729

Abstract

The British taxi 1729 inspired a famous anecdote in mathematics and led to the discovery of *taxicab numbers* that trace their origins back to 1918 and what appeared to be a passing insight by the brilliant Indian mathematician Srinivasa Ramanujan. The number 1729 has many interesting mathematical properties and has managed to find its place even in popular culture.

Keywords: *Ramanujan, taxicab number, Carmichael number, Zeisel number*

*Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Splitu, email: *santunovi@pmfst.hr*

1 Uvod

„Svaki prirodni broj jedan je od njegovih bliskih prijatelja" rekao je John Littlewood o Srinivasi Ramanujanu [2], samoukom indijskom matematičkom geniju, čiji je doprinos razvoju matematike zaista neprocjenjiv. Ramanujan je u svojim bilježnicama izložio više od 3900 teorema i tvrdnji koji su utjecale na razvoj matematičke analize, teorije brojeva, beskonačnih nizova i drugih grana matematike, uključujući i rješenja nekih problema koji su se dotad smatrali nerješivima.

Srinivasa Ramanujan Aiyangar

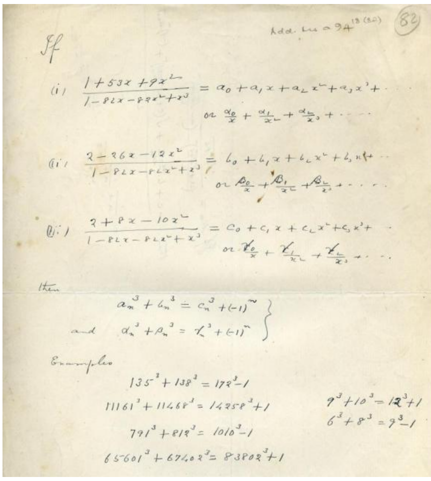
(1887.–1920.)

Na poziv matematičara G. H. Hardyja 1914. Ramanujan dolazi na Sveučilište u Cambridgeu. Vrijeme provedeno u Engleskoj smatra se njegovim najproduktivnijim razdobljem. Ipak se zbog lošeg zdravlja 1919. vraća u Indiju, gdje umire godinu kasnije u dobi od samo 32 godine. Čak 56 godina nakon njegove smrti, na Trinity Collegeu u Cambridgeu, otkrivena je Ramanujanova *Izgubljena bilježnica*, skup papira koji sadrži matematičke rezultate iz posljednje godine njegova života. Važnost toga otkrića najbolje opisuju riječi američkog matematičara Brucea Berndta: „Otkriće ove *Izgubljene bilježnice* izazvalo je otprilike onoliko komešanja u matematičkom svijetu koliko bi otkriće Beethovenove desete simfonije izazvalo u glazbenom svijetu" [3].

2 Taksi–broj

Važno mjesto u Ramanujanovu opusu zauzima broj 1729. Dobro je poznata anegdota kako je tijekom njegovog boravka u bolnici njegov prijatelj i matematičar G.H. Hardy u posjet došao taksijem s brojem 1729 za koji je broj Hardy napomenuo da je prilično nezanimljiv. No, Ramanujan je zamijetio kako je 1729 najmanji prirodni broj koji se na dva načina može prikazati kao suma kubova dva broja

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3.$$



If

(i) $\frac{1+53x+9x^2}{1-82x-82x^2+x^3} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$

or $\frac{\alpha_0}{x} + \frac{\alpha_1}{x^2} + \frac{\alpha_2}{x^3} + \cdots$

(ii) $\frac{2-26x-12x^2}{1-82x-82x^2+x^3} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots$

or $\frac{\beta_0}{x} + \frac{\beta_1}{x^2} + \frac{\beta_2}{x^3} + \cdots$

(iii) $\frac{2+8x-10x^2}{1-82x-82x^2+x^3} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots$

or $\frac{\gamma_0}{x} + \frac{\gamma_1}{x^2} + \frac{\gamma_2}{x^3} + \cdots$

then

$$\left.\begin{aligned} a_n^3 + b_n^3 &= c_n^3 + (-1)^n \\ \text{and} \quad \alpha_n^3 + \beta_n^3 &= \gamma_n^3 + (-1)^n \end{aligned}\right\}$$

Examples

$135^3 + 138^3 = 172^3 - 1$

$11161^3 + 11468^3 = 14258^3 + 1$

$791^3 + 812^3 = 1010^3 - 1$

$65601^3 + 67402^3 = 83802^3 + 1$

$9^3 + 10^3 = 12^3 + 1$

$6^3 + 8^3 = 9^3 - 1$

Stranica iz Ramanujanove *Izgubljene bilježnice* na kojoj se spominje da vrijedi jednakost $1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. [4]

Daljnja istraživanja brojeva s ovakvim svojstvom dovela su do otkrića Hardy-Ramanujanovih ili taksi-brojeva. Formalno, n-ti taksi-broj ili n-ti Hardy-Ramanujanov broj, u oznaci $Ta(n)$, je najmanji prirodni broj koji se može izraziti kao suma kubova dva prirodna broja na n različitih načina. Dosad je poznato šest taksi–brojeva.

$$\begin{aligned}
Ta(1) &= 2 \\
&= 1^3 + 1^3 \\[1em]
Ta(2) &= 1729 \\
&= 1^3 + 12^3 \\
&= 9^3 + 10^3 \\[1em]
Ta(3) &= 87539319 \\
&= 167^3 + 436^3 \\
&= 228^3 + 423^3 \\
&= 255^3 + 414^3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Ta(4) &= 6963472309248 \\
&= 2421^3 + 19083^3 \\
&= 5436^3 + 18948^3 \\
&= 10200^3 + 18072^3 \\
&= 13322^3 + 16630^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Ta(5) &= 48988659276962496 \\
&= 38787^3 + 365757^3 \\
&= 107839^3 + 362753^3 \\
&= 205292^3 + 342952^3 \\
&= 221424^3 + 336588^3 \\
&= 231518^3 + 331954^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Ta(6) &= 24153319581254312065344 \\
&= 582162^3 + 28906206^3 \\
&= 3064173^3 + 28894803^3 \\
&= 8519281^3 + 28657487^3 \\
&= 16218068^3 + 27093208^3 \\
&= 17492496^3 + 26590452^3 \\
&= 18289922^3 + 26224366^3
\end{aligned}
$$

3 Ostala svojstva

Osim što je Hardy-Ramanujanov, broj 1729 ima i neka druga zanimljiva svojstva. Na primjer, broj 1729 je jedan od tri broja (uz brojeve 81 i 1458) za koji vrijedi: suma znamenki pomnožena sa svojim zrcalnim brojem, odnosno brojem koji nastaje zamjenom mjesta znamenki, daje početni broj. Dakle, vrijedi:

$$
\begin{aligned}
1729 \to 1 + 7 + 2 + 9 = 19, \\
19 \times 91 = 1729.
\end{aligned}
$$

Broj 1729 ujedno je i:

- *treći Carmichaelov broj*

  Carmichaelov broj je složeni cijeli broj n takav da je $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ za svaki $1 < a < n$ za koji vrijedi $(a, n) = 1$.

- *treći Zeiselov broj*

  Zeiselov broj je broj oblika $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n$, gdje su, za svaki i, p_i različiti prosti brojevi takvi da vrijedi

  $$p_i = a \cdot p_{i-1} + b$$

  pri čemu su a i b neki fiksni cijeli brojevi i $p_0 = 1$. Broj 1729 je Zeiselov broj za konstante $a = 1$ i $b = 6$. Naime, možemo ga prikazati u obliku $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$ pri čemu prosti faktori zadovoljavaju relacije:

  $$\begin{aligned} p_1 &= 7, & p_1 &= 1 \cdot p_0 + 6 \\ p_2 &= 13, & p_2 &= 1 \cdot p_1 + 6 \\ p_3 &= 19, & p_3 &= 1 \cdot p_2 + 6. \end{aligned}$$

- *Hardshadov broj*

  Harshadov broj je dijeljiv sa sumom svojih znamenki.

- *Loeschianov broj*

  Loeschianov broj je broj koji se može prikazati u obliku $a^2 + ab + b^2$. Broj 1729 može se u ovoj formi prikazati na četiri različita načina. Parovi brojeva koji daju broj 1729 su $(25, 23)$, $(32, 15)$, $(37, 8)$ i $(40, 3)$.

Zanimljivo je da se broj 1729 često pojavljuje u seriji *Futurama* čiji su autori Matt Groening (ujedno i autor serije *Simpsoni*) i fizičar David Cohen. Poznato je da mnogi matematičari sudjeluju u kreiranju ovih dviju animiranih serija pa se u njima nerijetko mogu pronaći razne matematičke reference. Primjerice, jedan od glavnih likova u *Futurami* je robot Bender, kojemu je Ken Keeler, matematičar koji je posao istraživača zamijenio poslom scenarista u ovoj animiranoj seriji, dodijelio serijski broj 1729 kako bi odao počast Ramanujanu.

Broj 1729 često se pojavljuje u animiranoj seriji *Futurama* [1]

Taksi-broj 1729 spominje se i u filmu *Čovjek koji je spoznao beskonačnost* iz 2015. godine. Riječ je o svojevrsnoj biografiji Srinivase Ramanujana u kojoj Ramanujana glumi Dev Patel, a Hardyja Jeremy Irons.

Literatura

[1] T. Georgoulias, S. J. Greenwald and M. Wichterich, *Futurama πk: Mathematics in the Year 3000*, Math Horizons, (2004), 12–15.

[2] G. H. Hardy, *Obituary Notices: Srinivasa Ramanujan*, Proceedings of the London Mathematical Society, s2–19, (1921), 40–49. https://doi.org/10.1112/plms/s2-19.1.1-v

[3] D. Peterson, *Raiders of the Lost Notebook*, LASNews, 2006.

[4] K. Ono, S. Trebat–Leder, *The 1729 K3 surface*, 2016. https://doi.org/10.48550/arXiv.1510.00735