д-р БРАНКО ТРПЕНОВСКИ
д-р НАУМ ЦЕЛАКОСКИ

ЕЛЕМЕНТИ
од НУМЕРИЧКАТА МАТЕМАТИКА

IV ИЗДАНИЕ

"ПРОСВЕТНО ДЕЛО"
СКОПЈЕ, 1992 ГОД.

ПРЕДГОВОР КОН ПРВОТО ИЗДАНИЕ

Оваа книга произлезе од предавањата што ги одржуваа авторите со студентите од Електротехничкиот и Машинскиот факултет во Скопје, во текот на последните неколку години. Таа е наполно усогласена со наставната програма по предметот нумеричка математика за студентите од Електротехничкиот факултет, а може да ја користат и студентите од Машинскиот факултет за соодветниот дел од предметот нумеричка математика со употреба на дигитални сметачки машини.

При изнесувањето на материјалот се користат некои резултати, коишто на студентите им се познати од претходните курсеви по виша математика. Референтна книга е учебникот "Предавања по виша математика" од Ѓ. Чупона, Б. Трпеновски, Н.Целаковски, наведена под број 24 во списокот на користената литература; при повикувањата е изоставен насловот и е пишувано само, на пример, кн. III, стр. 23.

Материјалот е поделен во седум глави, а секоја глава е поделена на неколку параграфи. По секоја глава се наведува прилично голем број задачи, зашто нема соодветна збирка задачи на македонски јазик, а малиот број збирки на други јазици се малку достапни за студентите. Повеќето од задачите имаат цел да го илустрираат изнесениот материјал и да го овозможат неговото увежбување, а некои од нив ги дополнуваат или ги прошируваат задачите што се третираат во основниот текст.

Мал дел од материјалот што се изнесува во книгава излегува од рамките на програмата. Таквите делови се означени посебно: ако се работи за цел параграф, тогаш тој е означен со * (на пример, *2.3), а ако се работи за дел од параграф, тогаш тој материјал е издвоен со знаците **...**. Покрај тоа, тие делови се отпечатени погусто, "со петит" и при првото запознавање со предметот може да се изостават без пречки за разбирање на основниот материјал.

Се надеваме дека оваа книга корисно ќе им послужи на студентите при совладувањето на материјалот од нумеричка математика, а и на други лица што сакаат да се запознаат со некои поими и резултати од оваа област на математиката.

Со особено задоволство му се заблагодаруваме на рецензентот проф. д-р Звонимир Бохте за неговите забелешки и предлози кои придонесоа за подобрување на текстот.

Скопје, септември 1978

Авторите

ПРЕДГОВОР КОН ТРЕТОТО ИЗДАНИЕ

Во третово издание на книгава, којашто излегува како основен учебник за предметот нумеричка математика и дигитални сметачки машини (за делот по нумерички методи) на Машинскиот факултет во Скопје, извршени се само исправки на забележаните грешки. Инаку, основниот текст од првото издание не е изменет.

И овој пат им изразуваме благодарност на рецензентите за нивниот придонес за излегувањето на книгава.

Скопје, Февруари 1987 **Авторите**

СОДРЖИНА

Предговор

Со усовршувањето на средствата за вршење пресметувања, улогата на нумеричката математика во решавањето на практични задачи, а и на проблеми од фундаментален карактер, сѐ повеќе расте. Нумеричката математика е мошне разгранета наука, којашто наоѓа примена секаде, каде што се разгледуваат појави и процеси што се потчинуваат на некои "количествени закони". (Такви закони се изучуваат во многу науки: во математиката, физиката, астрономијата, а особено во техниката.) Општо прифатено мислење е дека нумеричката математика во себе ги вклучува следниве три главни делови: 1) теорија на нумерички методи; 2) прибори, коишто овозможуваат да се автоматизираат пресметувањата и да се чуваат информациите (тука, најважни се електронските сметачки машини) и 3) помошни средства за управување со работата на сметачките машини (тука спаѓаат разни алгоритамски јазици, стандардни програми за често употребувани нумерички процеси и др.). Во оваа книга се изнесуваат во кратка форма само некои основни елементи од теоријата на нумеричките методи, па затоа, натаму, терминот "нумеричка математика" ќе го употребуваме за делот "теорија на нумерички методи".

Сфатена во таа, потесна смисла, нумеричката математика има задача да ги развива и оценува методите за пресметување на "барани нумерички резултати" врз основа на "дадени нумерички податоци". Ако е даден математички (нумерички) проблем, нумеричката математика се обидува да изнајде "ефективно средство" или "ефиктивен метод" за наоѓање решение на тој проблем, при што:

1) решението треба "лесно" да се добива,

2) да не се бара секогаш "точно" решение, туку напротив, да се допушта и "приближно" решение на проблемот.

"Ефективниот метод", наменет за добивање решение на даден проблем, наречен алгоритам, претставува определено множество (список) од упатства за извршување на одредени математички операции по определен редослед. Да разгледаме еден едноставен пример за алгоритам, познат од средношколската математика.

Пример 1. За дадените три броја $x=84$, $y=64$ и $z=36$ да се одреди најмалиот заеднички содржател S. Одредувањето на S, како што ни е познато, станува на следниов начин:

а) ако барем еден од дадените броеви се дели со 2, тогаш го одбележуваме 2 како делител и сите броеви, од дадените, што се делат со 2 ги делиме, а оние што не се делат ги препишуваме; така ќе добиеме други три броја x_1, y_1, z_1;

б) ја повторуваме постапката од а) сè додека не се добијат три броја x_k, y_k, z_k од кои никој не се дели со 2;

в) постапките од а) и б) ги повторуваме во однос на сите прости броеви, одејќи по редот на нивното растење, сè додека на крајот, од почетните три броја, дојдеме до броевите 1, 1, 1;

г) го образуваме производот од сите одбележани прости делители добиени во претходните постапки; вака определениот производ е најмалиот заеднички содржател S. Во случајот е $S=252$.

Значењето на зборот алгоритам е многу слично со значењето на зборовите: метод, процес, начин, процедура, рецепт, постапка. Сепак, тој се издвојува од нив со своето прецизирано значење, определено со следните пет својства.

1°. Конечност (финитност). Алгоритамот треба да заврши секогаш по конечен број чекори, подразбирајќи, притоа, дека тој број е "разумно конечен". (Алгоритамот од горниот пример го задоволува тој услов.)

2°. Определеност. Секој чекор на алгоритамот треба да биде точно определен, т.е. да нема неизвесности или двосмислености за извршување на "следниот чекор".

3°. Влез. Алгоритамот има некој (може и еднаков со нула) број влезни податоци, т.е. величини што му се задаваат во почетокот на работата, коишто се земаат од некое конкретно множество објекти. (Во горниот пример, трите влезни величини x, y, z, се земаат од множеството на природните броеви.)

4°. Излез. Алгоритамот има една или неколку излезни величини, т.е. величини коишто имаат сосема определена врска со влезните податоци. (Во горниот пример, алгоритамот има една излезна величина, имено, бројот S во чекорот г).)

5°. Ефективност. Од алгоритамот обично се бара тој да биде ефективен; тоа значи дека сите операции, коишто треба да се извршат во алгоритамот, треба да бидат доволно едноставни за да може во принцип да се извршат точно и за конечен временски интервал (во смисла на 1°) со молив и хартија.

Меѓутоа, некои проблеми, особено во математичката анализа, иако постои определена постапка, не можат да се решат во конечен број чекори. На пример, ако сакаме да најдеме најголема заедничка мера на две отсечки а и с, едната од кои е страна на еден квадрат, а другата - дијагоналата на тој квадрат, постапката на "последователно споредување" никогаш нема да заврши (зашто а и с се несомерливи). Таквите постапки, всушност, се состојат од некоја бесконечна низа операции и ние ќе мораме да се задоволуваме со извршување само на конечно многу од нив, добивајќи на тој начин некој објект, "близок" со бараниот.

Пример 2. Бројот е може да се пресмета само приближно, но со прецизност каква што сакаме, ако се извршат "доволен" број чекори при пресметувањето. Еден од начините за пресметување на е е да се искористи редот

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Земајќи различен број членови од горниот ред и пресметувајќи го нивниот збир, ќе добиеме разни приближни вредности за е. Така,

$$e \approx 1; \approx 1+1 = 2; \approx 1+1+\frac{1}{2!} = \frac{5}{2}; \approx 1+1+\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{8}{3}, \dots$$

Ваквата постапка, којашто ги задоволува сите својства на алгоритамот, освен условот за конечност, би можела да се нарече "бесконечен алгоритам". Натаму ние најчесто ќе го употребуваме терминот нумерички метод или само метод, било да се работи за алгоритам било за постапка што не го задоволува условот за конечност.

Ако еден нумерички метод е добро формулиран, тогаш првото прашање што се наметнува е да се одредат условите под кои тој доведува до решение на разгледуваниот проблем. Во овие предавања најчесто ќе го среќаваме случајот: методот што ќе го користиме за решавање на одреден проблем да доведува до некоја бесконечна низа од реални броеви. Во тој случај се поставува, пред сѐ, прашањето дали таа низа конвергира, односно, кои услови ја обезбедуваат конвергенцијата на така формираната низа. Натаму, ако низата е конвергентна, се поставува прашањето: дали лимесот на таа низа го претставува бараното решение? За да го појасниме изнесеното, ќе разгледаме, во општи црти, еден од проблемите што натаму ќе биде детално разгледуван.

Пример 3. Нека $x=f(x)$ е некоја равенка, каде $f(x)$ е дадена функција од една реална независнопроменлива. Да избереме еден фиксен број a_o и да ставиме

$$a_k = f(a_{k-1}),\ k=1,2,\dots\ .$$

На тој начин добиваме бесконечна низа (a_k) од реални броеви во однос на која, природно, се поставуваат следниве прашања: дали (a_k) е конвергентна, и, во потврден случај, ако $a=\lim\limits_{k\to\infty} a_k$, дали a е решение на равенката $x=f(x)$? (Како што ќе видиме подоцна кога ќе зборуваме за приближното решавање на обични равенки, при определени претпоставки во однос на функцијата $f(x)$ и изборот на a_o, одговорите и на двете прашања се потврдни.)

Ако повнимателно го анализираме изнесениот пример, ќе видиме дека при решавањето на одделните проблеми, задачата најчесто ќе се состои во одредувањето на некој објект (решение на дадена равенка и сл.) со определени својства. При тоа, покрај барањето метод за наоѓање на бараниот објект, нас ќе нѐ интересираат уште две други прашања, кои всушност ѝ претходат на задачата за наоѓање таков метод. Имено, нашето внимание ќе биде концентрирано на:

1. одредување доволни услови што ја обезбедуваат егзистенцијата на бараниот објект;

2. одредување доволни услови при кои, ако бараниот објект постои, тој е еднозначно определен;

3. во случај на потврден одговор на претходните прашања, одредување на метод кој овозможува да се најде (приближно или точно) бараниот објект.

Наведувајќи ги овие три прашања, сакаме да одбележиме дека, "чистите" математичари обично покажуваат интерес само за првите две од нив, посветувајќи му само попатно внимание на третото, додека, пак, инженерите често своето внимание го концентрираат само на третото од овие прашања, претпоставувајќи дека егзистенцијата, а често и еднозначноста на бараниот објект се обезбедени, при што се потпираат на познавањето на конкретната природа на проблемот и на интуицијата. По наше мислење, на сите три прашања треба да им се обрне нужно внимание. Ние, во овие предавања најмногу ќе се задржиме на третото од изнесените прашања.

За решавање на една задача понекогаш стојат на располагање повеќе нумерички методи. За оценување "погодноста" на методот, од практична гледна точка, најважни се следниве две прашања:

1) колку е брз методот (т.е. колку пресметувања треба да се извршат)?

2) колку е точно пресметаното решение (ако процесот се запре по извесен број чекори)?

Значи, дали ќе се примени еден или друг алгоритам за решавање на некој проблем зависи од повеќе причини, но за најважни се сметаат брзината на конвергенцијата и степенот на точноста.

Покрај другите, едно од барањата што се поставуваат за еден алгоритам е и неговата нумеричка стабилност, т.е. тој да остане имун на грешките при заокружувањето на броевите што се врши при изведувањето на поголем број аритметички операции.

ПРИБЛИЖНИ ПРЕСМЕТУВАЊА

Во многу задачи од техниката, економиката, физиката и други науки, при разни мерења и анализи на резултатите добиени од некои експерименти, како и во обичниот живот, се јавува потреба од *приближни пресметувања*, т.е. потреба од сметање со приближни броеви. При мерењата, приближните броеви се јавуваат како поради несовршенството на мерните инструменти, така и поради непостојаноста на формите на објектите што се мерат. При пресметувањата, пак, употребата на приближни броеви често е неопходна поради непостоење на точни методи или пак поради непогодност на точните методи за пресметувања. Во оваа глава накратко ќе се запознаеме со некои факти во врска со приближните броеви и сметањето со нив.

1.1 АПСОЛУТНА И РЕЛАТИВНА ГРЕШКА

Нека X е некоја вредност на дадена величина, т.е. X е некој определен реален број. Често се случува да не може да се најде таа вредност X или, ако е најдена, не е згодна за практични пресметувања. Во такви случаи се избира некој реален број x, кој "незначително" се разликува од "точниот број" X и го заменува X во пресметувањата. Така, ако X е број од сегментот $[a,b]$, $a<b$, тогаш секој број $x\in[a,b]$ го викаме *приближна вредност на бројот* X или, кратко, *приближен број* на X и пишуваме $X\approx x$. На пример, односот на периметарот на една кружница и нејзиниот дијаметар изнесува приближно $\frac{22}{7}$ или 3,14, а точно е π. Според тоа, $\frac{22}{7}$ и 3,14 се приближни броеви на бројот π.

Приближниот број има практична вредност само ако можеме да ја определиме неговата "погрешност", т.е. неговото отстапување од точниот број. Во таа смисла, за бројот

$$|X - x|$$

велиме дека е апсолутна грешка (или апсолутна погрешност) на приближниот број x. Значи, апсолутната грешка кажува колку "блиску" е приближниот број x до точниот број X.

Во практиката најчесто точниот број не е познат, па според тоа и самата апсолутна грешка не може да биде точно определена (или пак може да е познат точниот број, но е таков што апсолутната грешка не може да даде подобра претстава за него, како што е случајот, на пример, со $|\pi-3,14|$). Во таков случај оценката на приближното равенство $X \approx x$ се врши со укажување на таков број Δ_x, за кој

$$|X-x| \leqslant \Delta_x. \tag{1}$$

Таков е, на пример, бројот $b-a$, зашто од $X,x \in [a,b]$ следува дека $|X-x| \leqslant b-a$. Бројот Δ_x за кој е исполнето неравенството (1) не е еднозначно определен, а оценката на приближното равенство $X \approx x$ е дотолку подобра, доколку е помал бројот Δ_x. Секој број Δ_x за кој важи (1) е "ограничувач" на апсолутната грешка $|X-x|$ и затоа се вика мајорантна апсолутна грешка. Натаму ќе станува збор почесто за мајорантна апсолутна грешка, а терминот "апсолутна грешка" често ќе ни означува "мајорантна апсолутна грешка".

Пример 1. Да најдеме апсолутна грешка Δ_x^* (т.е. мајорантна апсолутна грешка) на бројот $x=1,41$, кој го заменува бројот $\sqrt{2}$. Бидејќи $\sqrt{2} \in (1,41;\ 1,42)$[*], следува дека $|1,41-\sqrt{2}| \leqslant 0,01$, па можеме да земеме $\Delta_x=0,01$.

Погоре спомнавме дека приближното равенство $X \approx x$ се оценува со апсолутната грешка на приближниот број x. Меѓутоа, степенот на точноста на тоа приближно равенство не може да биде окарактеризирана доволно само со апсолутната грешка. Да разгледаме еден пример.

Пример 2. При мерењето на една величина X е добиена приближната вредност $x=100$, додека при мерењето на друга (истородна величина Y) е добиена приближната вредност $y=10$. Нека апсолутната грешка и во едниот, и во другиот случај е помала од 0,5.

---

[*] Во случаите кога a или b е број запишан со десетична запирка, интервалот (a,b) ќе го означуваме со (a;b).

Во првиот случај апсолутната грешка е помала од половина единица од 100 измерени единици, додека во вториот случај таа е помала од половина единица од само 10 измерени единици. Тоа значи дека приближноста при првото мерење е квалитетно подобро оценета.

Појавите од типот на штотуку изнесениот пример ја наложуваат потребата од воведување на следниов поим: ако x е приближна вредност на бројот X, тогаш бројот

$$\frac{|X-x|}{|x|}$$

го викаме релативна грешка (или релативна погрешност) на x. Слично како апсолутната грешка, и релативната грешка, во општ случај, не може точно да се одреди, па затоа таа, обично, се оценува со укажување на таков (по возможност што помал) број δ_x кој го има својството

$$\frac{|X-x|}{|x|} \leqslant \delta_x \tag{2}$$

(Секој број δ_x за кој важи неравенството (2) се вика мајорантна релативна грешка; често пати се вели "релативна грешка", а се мисли на некоја мајорантна релативна грешка.) На пример, ако $|X-x| \leqslant \Delta_x$, тогаш може да се земе

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{|x|} \tag{3}$$

Во примерот 2 релативната грешка на приближниот број x е помала од $\delta_x = \frac{0,5}{100} = 0,005$, а на y е помала од $\delta_y = \frac{0,5}{10} = 0,05$.

Релативната грешка често се искажува во проценти, па во тој случај таа се вика процентна грешка (или процентна погрешност). Така, во примерот 2 имаме $\delta_x = 0,5\%$ и $\delta_y = 5\%$.

1.2. ЗАПИШУВАЊЕ ПРИБЛИЖНИ БРОЕВИ

Секој реален број може да се претстави како конечна или бесконечна десетична дропка. Приближните броеви е згодно да се запишуваат во вид на конечна десетична дропка (па обично и така се запишуваат). При задавањето на приближната вредност x на бројот X обично се стремиме да дадеме (да добиеме) информација и за апсолутната грешка на x. Во таа смисла, ако $|X-x| \leqslant \Delta_x$, се пишува $X \approx x(\Delta_x)$.

Пример 3. Ако $X \in [2,7;2,8]$ и акоземеме $x=2,75$, тогаш $|X-x| \leqslant$ $\leqslant 0,05$, т.е. $X \approx 2,75(0,05)$. Ако пак $X \approx 9,6(0,2)$, тоа значи дека $X \in [9,4;9,8]$.

Понекогаш при запишувањето на приближниот број x не се нагласува посебно каква е́ неговата апсолутна грешка, но се запишува на начин што дава можност да се добие информација и за неа. Поради тоа, при запишувањето на еден приближен број x се применува следново правило:

> апсолутната грешка на x да не биде поголема од половина единица од разредот на последната цифра на x.

Во таа смисла, цифрата ξ од приближниот број x се вика точна (или точна во строга смисла) ако апсолутната грешка на x не е поголема од половина единица од разредот на кој му припаѓа ξ. Според тоа, применувајќи го правилото: при запишувањето на еден приближен број да се пишуваат само неговите точни цифри, добиваме информација и за неговата апсолутна грешка.

Пример 4. Да го разгледаме бројот $e=2,718281\ldots$ и да ја земеме приближната вредност $p=2,72$. Тогаш $\Delta_p < 0,0018 < 0,005 =$ $= \frac{1}{2}\cdot 0,01$, што значи дека сите цифри на приближниот број 2,72 се точни (во строга смисла).

Од друга страна, ако се дадени приближните броеви $a = 32,4$, $b = 1,41421$ и $c=5,300$ и ако се знае дека сите нивни цифри се точни, тогаш $\Delta_a=0,05$, $\Delta_b=0,000005$ и $\Delta_c=0,0005$.

Да забележиме дека, во горниот пример, нулите на крајот од приближниот број c не се излишни; имено, кога би ставиле $c=5,3$, тогаш би имале $\Delta_c=0,05$, т.е. постои разлика во однос на информацијата за апсолутната грешка. Воопшто, сите нули што се јавуваат на крајот од еден приближен број, за кои се знае дека се точни цифри, треба да се пишуваат. (Така, на пример, ако x=23, а грешката не е поголема од 0,005, тогаш треба да се напише x=23,00.)

Да видеме сега како ќе ја "читаме" апсолутната грешка на даден приближен број претставен на посебен начин, во т.н. пловечка форма. Имено, секоја (конечна) десетична дропка a може да се претстави во вид

$$a = a_0 \cdot 10^p \tag{1}$$

и тоа на повеќе начини. На пример, $0,0028 = 0,028.10^{-1} = 0,28.10^{-2} = 2,8.10^{-3} = 28.10^{-4}$ итн., или $647=46,7.10^1=4,67.10^2= 0,467.10^3 = 0,0467.10^4$ итн. (Ваквото претставување на десетичните броеви се вика подвижна форма или претставување со подвижна запирка, за разлика од обичното претставување, кое се вика фиксирана форма или претставување со фиксирана запирка.)

Еве како се определува апсолутната грешка на број запишан во пловечка форма. Имено, при запишувањето на еден број a во обликот (1) се зема сите цифри на a_0 да се точни. Според тоа, апсолутната грешка на a_0 е помала од половина единица од разредот на нејзината последна цифра. Ако единицата од разредот на таа последна цифра е 10^n (јасно, n е некој цел број), тогаш за апсолутната грешка на a имаме:

$$\Delta_a = \frac{1}{2} \cdot 10^{n+p}. \tag{2}$$

<u>Пример 5.</u> За броевите $a=2,8.10^{-3}$, $b=0,13.10^4$, $c=542.10^3$ и $e=542000.10^0$ имаме:

$$\Delta_a = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1-3} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}, \quad \Delta_b = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2+4} = \frac{1}{2} \cdot 10^2,$$

$$\Delta_c = \frac{1}{2} \cdot 10^{0+3} = \frac{1}{2} \cdot 10^3, \qquad \Delta_e = \frac{1}{2} \cdot 10^0 = \frac{1}{2}$$

(т.е. би можеле да сметаме дека: $A \approx 0,00028(0,00005)$, $B \approx 1300(50)$, $C \approx 542000(500)$, $E \approx 542000(0,5)$). Значи, записите $c=542.10^3$ и $e=542000$ не се еквивалентни, зашто $\Delta_c=500$, а $\Delta_e=0,5$.

На крајот од овој раздел ќе се задржиме кратко на прашањето со заокружување на броевите. Претходно ќе го воведеме поимот за значајни цифри. *Значајни цифри* на еден приближен број се викаат сите негови точни цифри освен нулите што стојат пред првата, различна од нула цифра. На пример, ако во записот на бројот $a=0,00\underline{57040}$ сите цифри се точни, тогаш значајни цифри се 5,7,0,4,0 (потцртаните). Ако пак $a=32000(100)$, тогаш значајни се цифрите 3,2,0, додека последните две нули не се значајни зашто не се точни.

Во практиката, при работа со броеви што имаат голем број значајни цифри, често се јавува потреба од упростување на пресметувањата. Тоа се постигнува на тој начин што од броевите со голем број значајни цифри се отфрла дел од тие значајни цифри. Тоа дејствие се вика *заокружување* на броевите. Да се заокружи еден број a, всушност, значи тој да се замени со некој број a_1 кој има помал број значајни цифри. Притоа, a_1 се избира така што апсолутната вредност $|a-a_1|$, наречена *грешка на заокружувањето*, да биде најмала. Тоа се постигнува со добро познатото *правило за заокружување:*

Ако бројот се заокружува до n значајни цифри, тогаш се отфрлаат сите цифри десно од n-тата (или пак, се заменуваат со нули, ако е потребно да се зачуваат разредите) и притоа последната задржана цифра останува непроменета ако првата од отфрлените цифри е помала од 5, а се зголемува за 1 ако првата од отфрлените цифри не е помала од 5.

Ќе разгледаме еден пример.

Пример 6. а) Да го заокружиме бројот 8,32574 на три, две и едно десетично место. Тогаш како приближни вредности на дадениот број ги добиваме по ред броевите: 8,326; 8,33; 8,3. За апсолутните грешки на овие приближни броеви имаме: $|8,32574-8,326|<0,0005$, $|8,32574-8,33|<0,005$, $|8,32574-8,3|<0,05$ соодветно.

б) Да го заокружиме бројот 4751382 до стотиците и десетилјадите. Имаме: $4751382\approx 4751400(50)$ и $4751382\approx 4750000(5000)$. Во согласност со запишувањето во пловечка форма, можеме да ставиме: $4751382\approx 47514.10^2$ и $4751382\approx 475.10^4$.

При работата со приближните броеви често пати е потребно да се изврши заокружување и на приближниот број. И во тој случај се применува горното правило за заокружување. Притоа, ако е A точен број, а приближен број и a_1 број добиен по заокружување на a, тогаш имаме:

$$|A-a_1| = |A-a+a-a_1| \leqslant |A-a| + |a-a_1|, \tag{3}$$

што значи дека апсолутната грешка на a_1 е збир од апсолутната грешка на a и од грешката на заокружувањето.

Пример 7. Ако $a=1,53726(0,01)$ е приближна вредност на бројот A, тогаш нема смисла да се задржуваат сите цифри во a кога се знае дека се значајни само цифрите 1 и 5. Ставајќи $a_1 = 1,5$ добиваме дека $|a-a_1|=0,03726<0,04$, а тогаш според (3), $|A-a_1| \leqslant 0,01+0,04 = 0,05$. Така, $a_1=1,5$ може да се земе за приближна вредност на A.

Да забележиме дека, во горниот пример, приближноста на a_1 до A е полоша отколку приближноста на a до A, но доволна компензација за тоа е олеснувањето при пресметувањата во кои учествува a. Ако пак сакаме да најдеме подобра приближна вредност на A, но со помалку цифри од тие во a, можеме да ставиме $A \approx 1,54(0,013)$; во овој случај задолжително ја запишуваме ѝ грешката 0,013 зашто во спротивниот случај би значело дека апсолутната грешка на 1,54 е помала од 0,005, што не е точно.

1.3. ОПЕРАЦИИ СО ПРИБЛИЖНИ БРОЕВИ. ОЦЕНКА НА ГРЕШКА

Една од најчестите задачи при пресметувањата е задачата за наоѓање вредноста на некоја величина според зададена формула (т.е. наоѓање вредноста на некоја функција), во која, покрај аритметичките операции, можат да се јават и други операции, како степенување, коренување, логаритмирање, "синусирање" итн. Во таквите задачи обично се работи со приближни броеви, па затоа се наложуваат следниве две важни задачи:

A) (Директна задача). Дадени се некои приближни броеви со некоја точност; со каква точност може да се добие резултатот по извршувањето на укажаните дејства? Или, малку поинаку речено:

ако е дадена вредност на независнопроменливата x со некоја точност, со каква точност може да се добие вредноста на функцијата $y=f(x)$?

Б) (Обратна задача). Дадени се приближни броеви и некои дејства со нив, а се бара резултат со однапред определена точност; со каква точност треба да бидат зададени тие приближни броеви за да се постигне бараното? Поинаку речено, треба да се најде вредност на функцијата $y=f(x)$ со одредена точност; со каква точност мора да биде зададен аргументот x? (Вторава задача, во општ случај, може да има повеќе решенија, па во таа смисла таа е неопределена.)

Од овие задачи произлегува потребата за изнаоѓување начини за оценување на грешките што настануваат при пресметувањата. Ние ќе се задржиме, главно, на првата задача. Прво ќе го разгледаме прашањето за собирање и вадење на приближни броеви.

Теорема 1. Ако $A\approx a(\Delta_a)$, $B\approx b(\Delta_b)$, тогаш

$$A+B\approx a+b(\Delta_a+\Delta_b),\quad A-B\approx a-b(\Delta_a+\Delta_b),$$

т.е. ако апсолутните грешки на a,b не се поголеми од Δ_a,Δ_b соодветно, тогаш апсолутната грешка на збирот односно разликата на тие броеви не е поголема од $\Delta_a+\Delta_b$.

Доказ. Нека $|A-a|\leqslant\Delta_a$, $|B-b|\leqslant\Delta_b$. Тогаш

$$|(A\pm B)-(a\pm b)|=|(A-a)\pm(B-b)|\leqslant|A-a|+|B-b|\leqslant\Delta_a+\Delta_b.\ \Box$$

Со помош на математичка индукција може да се докаже и следново поопшто тврдење:

1′. Ако $A_1\approx a_1(\Delta_1)$, $A_2\approx a_2(\Delta_2)$, ... $A_k\approx a_k(\Delta_k)$,

тогаш

$$A_1+A_2+\ldots+A_k\approx a_1+a_2+\ldots+a_k(\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_k).$$

Ќе разгледаме еден пример.

Пример 8. а) Збирот на приближните броеви 32,25(0,02), 4,283(0,001), 22,34826(0,00004) е приближниот број 58,88126, чија апсолутна грешка, според тврдењето 1', не е поголема од 0,02104. Со оглед на оценката за апсолутната грешка, последните три децимали би било подобро да ги отфрлиме, со што би го добиле приближниот број 58,88 чија апсолутна грешка не е поголема од 0,0223, така што би имале: s=32,25(0,02)+4,283(0,001) + 22,34826(0,00004) ≈ 58,88(0,023). Овде, ние извршивме заокружување на збирот. Меѓутоа, во практиката често се работи поинаку прво се врши заокружување на собирците така што да се доведат до еднаков број децимали, а потоа се врши собирањето. Во тој случај би имале: s=32,25(0,02)+4,28(0,004)+22,35(0,00178) = 58,88(0,26).

б) Да ја пресметаме разликата на приближните броеви 24,874(0,0007)-14,276(0,0006). Добиваме: 24,874(0,0007) - 14,276(0,0006)=10,598(0,0013).

Со помош на елементарни методи, како и за собирањето, можат да се најдат формули за оценка на апсолутната грешка при множење и делење на приближни броеви. Меѓутоа, за да можеме да добиеме таква оценка и за други операции (како, на пример, коренување, логаритмирање итн.), ќе ја докажеме следнава теорема:

Теорема 2. Нека функцијата y=f(x) е дефинирана и има непрекинат извод на сегментот $[a,b]$. Ако Δ_x е мајорантна апсолутна грешка за вредноста x на аргументот, тогаш за мајорантната апсолутна грешка Δ_y на функцијата $f(x)$ важи следнава формула:

$$\Delta_y = M\Delta_x, \qquad M = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f'(x)|. \qquad (1)$$

Доказ. Нека x е приближна вредност на бројот X од разгледуваниот сегмент со апсолутна грешка $|\Delta x| = |X - x|$. Ставајќи $X=x+\Delta x$, добиваме дека апсолутната грешка на функцијата $f(x)$ претставува апсолутна вредност од нејзиното нараснување во точката x, т.е. $|\Delta y| = |f(x+\Delta x) - f(x)|$. Бидејќи функцијата е диференцијабилна, нејзиното нараснување Δy може да се определи преку Лагранжовата теорема:

$$\frac{|\Delta y|}{|\Delta x|} = |f'(c)|, \qquad c\in(a,b),$$

од каде што

$$|\Delta y| = |f'(c)|\ |\Delta x| \leqslant M.\Delta_x,$$

па можеме да земеме $\Delta_y = M\Delta_x$, т.е. важи (1).▯

Забелешка 1. За олеснување на пресметувањата, во литературата многу често наместо формулата (1), за мали Δ_x, се употребува следнава формула:

$$\Delta_y = |f'(x)|\Delta_x, \qquad (1')$$

којашто се користи и во овој учебник.

Пример 9. Да најдеме мајорантна апсолутна грешка на функцијата $y = \lg x$ за а) 21,5(0,4); б) x=3251(0,5).

Бидејќи

$$(\lg x)' = \frac{1}{x\ln 10} = \frac{M}{x},$$

каде што $M \approx 0{,}4343$, според теоремата 2 добиваме: $\Delta_y = \frac{0{,}4343}{x}\Delta_x$,

па

$$\text{а)}\quad \Delta_y = \frac{0{,}4343}{21{,}5}.0{,}4 < 0{,}009;\quad \text{б)}\quad \Delta_y = \frac{0{,}4343}{3251}.0{,}5 < 0{,}00007.$$

Користејќи ја формулата (1) можеме да добиеме формули и за релативната грешка на функцијата y=f(x). Имено, нека δ_x односно δ_y е мајорантна апсолутна грешка на x односно y. Бидејќи $\delta_x = \frac{\Delta_x}{|x|}$, т.е. $\Delta_x = |x|\delta_x$, за δ_y добиваме:

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|f(x)|} = \frac{|f'(x)|\Delta_x}{|f(x)|} = \frac{|f'(x)|\,|x|\delta_x}{|f(x)|} = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\,x\right|\delta_x. \qquad (2)$$

Со помош на оваа формула можеме да вршиме оценка на релативната грешка за редица конкретни функции.

Пример 10. Да најдеме мајорантна релативна грешка за функциите: а) $y=\sqrt{x}$; б) $y=x^s$ (s-рационален број), б) $y=e^x$; г) y=cosx.

Бидејќи $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x^s)' = sx^{s-1}$, $(e^x)' = e^x$, $(\cos x)' = -\sin x$, според (2) добиваме:

а) $\delta_{(\sqrt{x})} = \left|\frac{1}{2x}\ x\right| \cdot \delta_x = \frac{1}{2}\delta_x,$

б) $\delta_{(x^s)} = \left|\frac{sx^{s-1}}{x^s} \cdot x\right|\delta_x = |s|\,\delta_x,$

в) $\delta_{(e^x)} = \left|\frac{e^x}{e^x}\ x\right|\delta_x = |x|\,\delta_x,$

г) $\delta_{(\cos x)} = \left|\frac{-\sin x}{\cos x}\ x\right|\delta_x = |\mathrm{tg}\,x|\,|x|\,\delta_x.$

Да го разгледаме прашањето за оценка на апсолутната грешка на функција од две нѐзависнопроменливи. За таа цел ќе ја докажеме следнава теорема, аналогна на теоремата 2:

Теорема 3. Нека функцијата $u=f(x,y)$ има непрекинати парцијални изводи во некоја затворена област D. Ако Δ_x и Δ_y се мајорантни апсолутни грешки на приближните броеви x и y, тогаш за мајорантната апсолутна грешка Δ_u на $f(x,y)$ важи:

$$\Delta_u = M_1\Delta_x + M_2\Delta_y, \qquad M_1 = \max_D |u'_x|,\ M_2 = \max_D |u'_y|. \tag{3}$$

Доказ. Нека x,y се приближни вредности на броевите X,Y со апсолутни грешки $|\Delta x| \leqslant \Delta_x$, $|\Delta y| \leqslant \Delta_y$. Тогаш можеме да ставиме $X=x+\Delta x$, $Y=y+\Delta y$, па за нараснувањето Δu на u во точката (x,y) имаме:

$$|\Delta u| = |f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)|.$$

Јасно, $|\Delta u|$ претставува апсолутна грешка на бројот $f(x,y)$.

Претпоставките на теоремата дозволуваат да ја примениме Тајлоровата формула за функции од два аргумента, задржувајќи се на првите парцијални изводи:

$$\Delta u = f'_x(\xi,\eta)\Delta x + f'_y(\xi,\eta)\Delta y, \quad (\xi,\eta) \in D,$$

од каде што направо следува дека:

а) $\delta_{(\sqrt{x})} = \left|\frac{1}{2x}\,x\right| \cdot \delta_x = \frac{1}{2}\delta_x$,

б) $\delta_{(x^s)} = \left|\frac{sx^{s-1}}{x^s}\cdot x\right|\delta_x = |s|\,\delta_x$,

в) $\delta_{(e^x)} = \left|\frac{e^x}{e^x}\,x\right|\delta_x = |x|\,\delta_x$,

г) $\delta_{(\cos x)} = \left|\frac{-\sin x}{\cos x}\,x\right|\delta_x = |\mathrm{tg}x|\,|x|\,\delta_x$.

Да го разгледаме прашањето за оценка на апсолутната грешка на функција од две нeзависнопроменливи. За таа цел ќе ја докажеме следнава теорема, аналогна на теоремата 2:

Теорема 3. Нека функцијата $u=f(x,y)$ има непрекинати парцијални изводи во некоја затворена област D. Ако Δ_x и Δ_y се мајорантни апсолутни грешки на приближните броеви x и y, тогаш за мајорантната апсолутна грешка Δ_u на $f(x,y)$ важи:

$$\Delta_u = M_1\Delta_x + M_2\Delta_y, \qquad M_1 = \max_D |u'_x|, \; M_2 = \max_D |u'_y|. \tag{3}$$

Доказ. Нека x,y се приближни вредности на броевите X,Y со апсолутни грешки $|\Delta x| \leqslant \Delta_x$, $|\Delta y| \leqslant \Delta_y$. Тогаш можеме да ставиме $X=x+\Delta x$, $Y=y+\Delta y$, па за нараснувањето Δu на u во точката (x,y) имаме:

$$|\Delta u| = |f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)|.$$

Јасно, $|\Delta u|$ претставува апсолутна грешка на бројот $f(x,y)$.

Претпоставките на теоремата дозволуваат да ја примениме Тајлоровата формула за функции од два аргумента, задржувајќи се на првите парцијални изводи:

$$\Delta u = f'_x(\xi,\eta)\Delta x + f'_y(\xi,\eta)\Delta y, \quad (\xi,\eta) \in D,$$

од каде што направо следува дека:

добиваме:

$$\delta_u = \frac{\Delta_x+\Delta_y+\Delta_z}{x+y+z} = \frac{x\delta_x+y\delta_y+z\delta_z}{x+y+z} \leqslant \frac{(x+y+z)\delta_{max}}{x+y+z} = \delta_{max} ,$$

каде што $\delta_{max}=\max\{\delta_x,\delta_y,\delta_z\}$. Ставајќи $\delta_{min} = \min\{\delta_x,\delta_y,\delta_z\}$ аналогно добиваме дека $\delta_u \geqslant \delta_{min}$. Според тоа,

$$\delta_{min} \leqslant \delta_u \leqslant \delta_{max}, \tag{5}$$

т.е. релативната грешка на сума од собирци со ист знак е поголема од најмалата, а помала од најголемата релативна грешка на собирците.

б) Нека $u=x-y$, при што $x>0$, $y>0$. Тогаш, за релативната грешка δ на u ќе имаме:

$$\delta = \frac{\Delta_x + \Delta_y}{|x-y|} ,$$

па, ако броевите x и y се блиски еден до друг, тогаш релативната грешка на u може да биде мошне голема дури и при мали апсолутни грешки на x и y.

Тоа ќе го илустрираме со еден пример. Нека $x=4,874(0,0004)$, $y=4,276(0,0006)$. Тогаш $\delta_x \approx 0,009\%$, $\delta_y \approx 0,01\%$, додека пак

$$\delta = \frac{0,0004+0,0006}{|4,874-4,276|}.100\% = \frac{0,001}{0,598}.100\% \approx 17\% .$$

Воопшто, секогаш кога се одземаат два блиски броја, оценката на релативната грешка е многу груба. Поради тоа се препорачува да се трансформира формулата за пресметување (ако е можно) во таков вид, кој не содржи директно одземање на два блиски броја.

в) Имајќи ја предвид (4), за мајорантната релативна грешка δ_u на функцијата $u = xyz$ (при $x>0$, $y>0$, $z>0$), добиваме:

$$\delta_u = \frac{yz\Delta_x + xz\Delta_y + xy\Delta_z}{xyz} = \delta_x + \delta_y + \delta_z, \qquad (6)$$

т.е. мајорантната релативна грешка на производ е еднаква со збирот на мајорантните релативни грешки на множителите.

г) Слично, ако $u = x/y$ $(x > 0,\ y > 0)$, добиваме:

$$\delta_u = \frac{\Delta_u}{u} = \frac{\Delta_x}{x} + \frac{\Delta_y}{y} = \delta_x + \delta_y, \qquad (7)$$

т.е. мајорантната релативна грешка на количник е еднаква со збирот од мајорантните релативни грешки на деленикот и делителот.

Пример 13. При определување на силата F што дејствува на плочите од кондензаторот се користи следнава формула

$$F = -\frac{\epsilon_0}{2} U^2 \frac{s}{x^2},$$

каде што U е напонот, s е плоштината на плочите, x е растојанието меѓу плочите, а ϵ_0 е диелектрична константа. Знаејќи дека $\epsilon_0/2$ е определена со релативна грешка од 0,6%, U со 2%, а s и x со 1%, да се најде мајорантна релативна грешка на F.

Според (6) и (7) имаме:

$$\tilde{\partial}_F = \delta_\epsilon + 2\delta_U + \delta_s + 2\delta_x ,$$

од каде што добиваме дека $\delta_F = 7{,}6\%$.

Во врска со т.н. "обратна задача" (наведена во почетокот на овој раздел) ќе направиме неколку забелешки.

Како што спомнавме, обратната задача се состои во барањето да се одреди точноста со која треба да биде зададен секој од аргументите за да се добие однапред одредена точност на функцијата.

Ако функцијата зависи од една независнопроменлива, т.е. $y=f(x)$, тогаш од формулата (1′) (во теоремата 2) добиваме:

$$\Delta_x = \frac{\Delta_y}{|f'(x)|}. \qquad (8)$$

што значи дека, во тој случај, задачата е еднозначно решлива.

Ако $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ е функција од повеќе аргументи, тогаш задачата може да се реши само при некои дополнителни услови. На пример, во случаи кога вредностите на сите аргументи можат подеднакво лесно да се определат со произволна точност, тогаш, обично, се применува т.н. принцип на еднакви влијанија, според кој во формулата

$$\Delta_u = \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| \Delta_{x_1} + \ldots + \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right| \Delta_{x_n}$$

се смета дека сите собирци од десната страна се еднакви, па во тој случај се добива формулата:

$$\Delta_{x_i} = \frac{\Delta_u}{n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|} \quad (i=1,2,\ldots,n). \qquad (9)$$

(Во други случаи, пак, вредноста на некој од аргументите се пресметува или се мери значително потешко од вредностите на другите аргументи. Во такви случаи погрешноста на тој аргумент треба да се усогласува со бараната погрешност на функцијата. Во практика се јавуваат и задачи што се наоѓаат "меѓу" овие два типа.)

1.4. ПРЕСМЕТУВАЊЕ ВРЕДНОСТИ НА ФУНКЦИЈА СПОРЕД ЗАДАДЕНА ФОРМУЛА

Како што спомнавме, при пресметувањето според зададена формула, обично се работи за наоѓање вредност на некоја функција, и тоа, најчесто, елементарна (т.е. функција добиена како збир, разлика, производ, количник или како суперпозиција на две функции од следниов вид: степенска експоненцијална, логаритамска, тригонометриски и циклометриски). При пресметувањето е згодно да се

81.4

направи некаков редослед што ќе ја олесни работата. Затоа,обично се прави шема за текот на пресметувањето. Ќе го илустрираме тоа со еден пример.

Пример 12. Дадена е функцијата

$$f(x)=\frac{(\sin x-\lg x)^3}{\sqrt{x}+\operatorname{arctg} x}$$

и треба да се пресмета нејзината вредност за некоја зададена вредност (или вредности), на аргументот x. Тогаш изразот од десната страна се расчленува на начин што ќе овозможи постапност во извршувањето на операциите, т.е. се прави следнава шема:

x	sinx	lgx	II−III	$(IV)^3$	$\sqrt{x}$	arctgx	VI+VII	V:VIII
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX

Во секоја од колоните се внесува вредноста или резултатот од изразот што е назначен најгоре во колоната. Во последната колона се запишува крајниот резултат - вредноста на функцијата за дадената вредност на аргументот.

За некои функции (зададени со формула) се јавува потреба од пресметување на вредностите на функцијата за многу вредности на аргументот. За такви функции се составуваат специјални таблици, направени така,што нивната употреба да биде брза и едноставна. Такви таблици често се неопходни при пополнувањето на шемата за одредено пресметување. Така, во претходниот пример можат да се користат таблици за: квадратни корени, логаритми, тригонометриски и циклометриски функции (за сите тие функции постојат готови таблици).

При решавањето на вакви задачи многу е важно да се обезбеди контрола на пресметувањата, и тоа: една во текот на пресметувањата ("тековна контрола") и друга на крајот на пресметувањата ("завршна контрола"). Една од можностите за завршна контрола е да се нацрта графикот на дадената функција по најдените вредности. Најдобар начин, пак, за тековна контрола е користењето на "контролни релации", т.е. релации меѓу величините што се јавуваат во пресметувањето, а тие релации не се користени при самото пресметување (на пример, ако во текот на некое пресметување се добијат четирите агли A,B,C,D на некој четириаголник, а притоа релацијата $A+B+C+D=360^{\circ}$ не е користена, тогаш можеме да ги провериме добиените резултати за A,B,C,D со тоа што ќе видиме дали е задоволена споменатата релација). Но тоа е можно само во некои специјални случаи. Инаку, мошне добар начин за контрола (и тековна, и завршна) е пресметувањето "во две раце" (т.е. пресметувања да вршат двајца паралелно, независно еден од друг и резултатите да ги споредат).

1.5. ОСНОВНИ ИЗВОРИ НА ГРЕШКИ

На крајот ќе направиме една забелешка во врска со основните извори на грешки што се јавуваат при пресметувањата.

Пред сѐ, погрешности при пресметувањата може да произлезат од самата формулација на задачата, т.е. кога се врши упростување на некоја конкретна ситуација и се прави математички, повеќе или помалку идеализиран модел на разгледуваната појава. Во ваквите задачи можна е појава на погрешности сврзани со задавањето на бројните вредности на некои параметри во формулите (на пример, на некои физички константи) коишто можат само приближно да се определат. (Овој вид грешки се наречени почетни или неотстранливи грешки). Потоа, грешки се јавуваат во врска со бесконечни процеси во математичката анализа, при заокружувањето на приближните броеви и при извршувањето на операциите над приближните броеви. Во некои случаи, пак, тешко е или невозможно задачата да се реши во точната формулација, па таа се заменува со друга задача, блиска по резултат со првобитната. Со тоа може пак да се јават погрешности (наречени грешки на методот). За да се оцени точноста на резултатот, неопходно е да се оценат грешките од сите видови, спомнати погоре и да се најде сумарната, т.е. целосната грешка. Меѓутоа, натаму ние ќе обраќаме внимание само на грешките на методот.

1.6. ВЕЖБИ

1. Да се оцени апсолутната грешка на секое од следниве приближни равенства:

а) $\frac{12}{25} \approx \frac{1}{2}$; б) $\pi \approx 3,14$; в) $e \approx 2,71$; г) $\sqrt{3} \approx 1,73$.

2. Да се оценат релативните грешки на секој од приближните броеви во вежбата 1.

3. Да се најде бројот на значајните цифри во бројот а ако се знае неговата апсолутна грешка:

а) $a=25,3246$, $\Delta_a=0,01$; б) $a=0,7231$, $\Delta_a=0,15.10^{-2}$;

в) $a=0,004327$, $\Delta_a=0,1.10^{-4}$; г) $a=312,0078$, $\Delta_a=0,1.10^{-3}$;

д) $a=-0,0793$, $\Delta_a=0,25.10^{-2}$.

4. Да се најде бројот на значајните цифри во приближниот број а ако се знае неговата релативна грешка:

а) $a=35,204$, $\delta_a=0,2.10^{-2}$; б) $a=0,000428$, $\delta_a=0,15$;

в) $a=5,3941$, $\delta_a=0,1\%$; г) $a=693,4$, $\delta_a=2\%$.

5. Да се најде апсолутната и релативната грешка на: 1) $\frac{22}{7}$ ("архимедов број") и 2) $\frac{355}{113}$ ("мециев број") земени за приближни броеви на бројот π споредувајќи ги со записот на бројот π со голем број десетични знаци ($\pi \approx 3,141592653589793$).

6. Во десетичниот запис на некој приближен број пред запирката стои една значајна цифра α. Релативната (мајорантна) грешка на тој број е 0,03%. Да се најде апсолутната (мајорантна) грешка и бројот на точни цифри во случаите: $\alpha=1$; $\alpha=4$; $\alpha=7$; $\alpha=9$.

7. Подолу се наведени некои функции и соодветните тајлорови редови за тие функции. За дадената вредност на x, да се одреди бројот на членовите од редот, потребни за да се пресмета вредноста на функцијата со апсолутна грешка не поголема од: 1) 5.10^{-5}; 2) 5.10^{-9}.

а) $e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots, x=\frac{1}{2}$

б) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots,\ x=2.$

в) $\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^3}+\ldots, x=3$

г) $\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots, \quad x=1$

д) $(1-x^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^4}{2!}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^6}{3!}+\ldots, x=0,2.$

8. Да се извршат назначените операции со дадените приближни броеви и да се оценат апсолутната и релативната грешка во секое од нив.

а) $3,187(0,001)+0,2578(0,0002)+1,3(0,01)$;

б) $7,25(0,005)-2,12(0,002)$;

в) $2,56(0,005).1,2(0,05)$; г) $2,8(0,3):25,8(0,05)$.

9. Да се пресметаат наведените степени на приближните броеви (сите цифри на основите од степените се точни):

а) $2,5^2$; б) $45,3^3$; в) $0,5412^2$; г) $3,215^{1/2}$;

д) $45,3^{1/3}$; ѓ) $65,1^{1/2}$

(Во резултатот да се напишат само точните цифри.)

10. Струја тече низ отпорник со отпор $R=10$ ома, познат со точност $\pm 10\%$. Јачината на струјата е $J=2\pm 0,1$ ампери. Според Омовиот закон, напонот $E=J.R$. Да се најдат апсолутната и релативната грешка на така пресметаниот напон. (Притоа грешките при заокружувањето да не се земат предвид.)

11. Реактансата на кондензатор се определува со формулата $X_C=\frac{1}{2\pi f C}$, каде што X_C е реактивниот отпор на капацитетот во оми, f е фреквенцијата во херци, C капацитетот во фаради. Да се укажат границите на можните вредности на X_C за $f=300\pm 1$ Hz и $C=10^{-7}F \pm 5\%$.

12. "Средната" должина на летот (со авион) меѓу Скопје и Лондон изнесува 1900 км, но може да биде 300 км покуса или подолга поради варијациите во маршрутата на авионот. Средната брзина на авионот на таа линија е 930 км на час, но може да биде за 90 км на час помала или поголема поради воздушните струења. Да се најдат горната и долната граница за времетраењето на летот.

13. Положбата S на тело што паѓа слободно во вакуум се определува по формулата $S=0,5gt^2$, каде што g е забрзувањето при слободно паѓање во m/sec^2, t времето во секунди, поминато од почетокот на паѓањето. Да претпоставиме дека $g=9,81$ m/sec^2 е точно, но дека времето може да биде измерено со точност само до 0,1 sec. Да се покаже дека со зголемувањето на t расте апсолутната грешка на пресметаната вредност за S, но релативната грешка се намалува.

14. Да се пресмета $s=1-\cos 1^\circ$ на два начина: а) непосредно, б) трансформирајќи ја формулата за пресметување на s во: $s=2\sin^2 0^\circ 30'$. Потоа да се оценат апсолутната и релативната грешка во а) и б) и да се споредат соодветните грешки. (Да се земе: $\cos 1^\circ=0,9998$; $\sin 0^\circ 30'=0,0087$.)

§1.6

15. Да се пресмета разликата на волумените од две коцки чии измерени рабови се 12,34 cm и 12,56 cm (со точност до 0,05 mm).

16. Ако u,v и w се диференцијабилни функции од x, докажи дека за мајорантната апсолутна односно релативна грешка на производот од u и v, за производот на u, v и w, како и за количникот на u и v важат следниве формули:

а) $y=uv:\ \Delta_y=|v|\Delta_u+|u|\Delta_v,\quad \delta_y=\delta_u+\delta_v;$

б) $y=uvw:\ \Delta_y=|vw|\Delta_u+|uw|\Delta_v+|uv|\Delta_w,\quad \delta_y=\delta_u+\delta_v+\delta_w;$

в) $y=\frac{u}{v};\quad \Delta_y=\frac{1}{v^2}(|v|\Delta_u+|u|\Delta_v),\quad \delta_y=\delta_u+\delta_v.$

17. Да ги разгледаме изразите $u=(a-b)/c$ и $v=a/c-b/c$. Да претпоставиме дека a,b,c се позитивни и зададени точно, при што $a\approx b$. Покажи дека релативната грешка на заокружувањето за v може да биде значително поголема отколку за u. Да се илустрира тоа за $a=0,41$, $b=0,36$ и $c=0,70$.

18. Една плоча има форма на правоаголен триаголник. Измерени се катетата и хипотенузата: 12,1 cm и 20,3 cm соодветно (со точност до 0,1). Со каква точност може да се пресмета должината на другата катета b и аголот β што лежи спроти измерената катета?

19. Со мерење се добиени приближните вредности на радиусот r и висината H на прав кружен конус: $r\approx 12,6$ cm и $H\approx 28,4$ cm (сите цифри се точни). Да се најде волуменот на конусот по формулата $V=\frac{1}{3}\pi r^2H$ задржувајќи ги во записот само точните цифри. При пресметувањето да се стави $\pi=3,14$. Да се оцени погрешноста на резултатот. Дали резултатот ќе биде поточен ако се земе $\pi=3,142$?

20. Даден е прав потсечен конус со висина $h\approx 84$ cm и радиуси на основите $R\approx 123$ cm, $r\approx 62$ cm при што сите цифри на тие броеви се точни. Со каква точност може да се пресмета должината s на генератрисата? (Да се одреди мајорантна апсолутна и релативна грешка и бројот на точните цифри во записот на s.)

21. Дијаметарот на една топка, измерен со точност од 1 mm, изнесува $d=0,236$ m. Да се пресмета волуменот на топката оценувајќи ја погрешноста.

22. Нека $y=\frac{3x^2+7}{\sqrt{x}}$. Да се најде вредноста на y при $x=e\approx 2,72$ задржувајќи ги во одговорот само точните цифри. Да се оценат апсолутната и релативната грешка. Колку значајни цифри треба да содржи приближната вредност на e за да се добие резултат со пет значајни цифри?

23. Дадена е функцијата $u=\ln(x+\sqrt{y})$. Да се пресмета u за $x=13,8$ и $y=6,6$, сметајќи дека сите цифри на дадените броеви се точни. Да се оцени погрешноста.

24. Да се состави таблична шема за пресметување вредности на функцијата:

а) $y=\frac{5+\sqrt{x}}{3x^2-4}$; б) $y=\frac{\sqrt[3]{x}+2}{(1+\ln x)^2}$

25. Моќноста на електричната струја што ја дава една батерија се изразува со формулата

$$W = \frac{E^2R}{(R+r)^2},$$

каде што W е моќноста изразена во вати, E е електромоторна сила во волти, r е внатрешниот отпор на батеријата и R е отпорот на надворешното коло во оми. Ставајќи $E=10$ V, $r=0,57$ ом,

а) да се направи шема (таблица) за редоследот на пресметувањата на W,

б) да се пополни таа таблица на вредности на W како функција од R за интервалот од $1 \leqslant R \leqslant 5$ со чекор 1 ом, вршејќи пресметувања до четири децимали.

26. Да се најде допустливата апсолутна погрешност на приближните броеви $x=\overline{8,4}$ и $y=31^{\circ}$, за кои може да се пресмета вредноста на функцијата $u = 5x^2(\ln x+\cos 2y)$ со точност до две децимали.

27. Со каква точност треба да се измерат основниот раб и висината H на правилна четиристрана пирамида за да може нејзиниот волумен да се пресмета со точност до 1%?

28. Нека е даден изразот $6x+y$. Покажи дека при пресметувањето на тој израз релативната грешка на величината x е шест пати "повлијателна" од релативната грешка на величината y.

29. Ако во формулата $u = \frac{x^2}{2y}+\frac{y}{2}$ е процентната грешка на u не поголема од 0,3%, да се најде процентната грешка што може да се дозволи за x и y кога $x=48$ mm и $y=56$ mm.

30. Кога индексот на рефракција на некоја течност е определен со рефрактометар, индексот n е даден со формулата

$$n = \sqrt{N^2-\sin^2\theta}\ .$$

Ако $N=1,62200$ со апсолутна грешка 0,00004 и $\theta=38^{\circ}$ приближно, определи го Δ_{θ} за да биде бројот n точен до 0,02%.

31. Периодот на осцилирање на едно нишало со должина ℓ е $T=2\pi\sqrt{\ell/g}$, каде што g е земјиното забрзување. Со каква точност треба да се измери должината на нишалото чиј период на осцилирање е приближно 2s, за да се добие период на осцилирање со релативна грешка до 0,5%? Со каква точност треба да бидат земени π и g?

32. Колку точно би требало да бидат мерени должината и времето на нишањето на математичко нишало за да се пресмета вредноста на земјиното забрзување g со точност од 0,05%?

МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

Целта на оваа глава е да ја докажеме теоремата на Банах за фиксна точка, која подоцна ќе биде користена повеќе пати. Поради тоа, ќе се задржиме на некои прашања во врска со метричките простори, правејќи обид материјалот да претставува, во некоја смисла, заокружена целина.

2.1. ДЕФИНИЦИЈА НА МЕТРИЧКИ ПРОСТОР

Нека M е непразно множество и $d: M \times M \to \mathbb{R}$ пресликување од директниот производ $M \times M$ во множеството на реалните броеви, такво што за кои било $x,y,z \in M$, исполнети се следниве услови:

(i) $d(x,y) \geqslant 0$; $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (аксиома за идентичност)

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (аксиома на симетрија)

(iii) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ (аксиома на триаголник).

Тогаш за пресликувањето d велиме дека е *метрика* во множеството M, а парот (M,d) го викаме *метрички простор со носач M и метрика d* или, просто *метрички простор*. Елементите од метричкиот простор (M,d) ќе ги викаме *точки*, а реалниот број $d(x,y)$ - *растојание* меѓу точките x и y. Метриката d натаму, обично, нема да ја споменуваме и метричкиот простор (M,d) ќе го означуваме само со M.

Со примена на аксиомата (iii) к-2 пати, добиваме дека за секои $x_1, x_2, \ldots, x_k \in M$, точно е неравенството

$$d(x_1, x_k) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \ldots + d(x_{k-1}, x_k). \qquad (1)$$

Ќе разгледаме неколку примери на метрички простори.

Пример 1. Множеството $\mathbb{R}$ од реалните броеви станува метрички простор ако се дефинира метрика со

$$d(x,y) = |x - y|. \qquad (2)$$

Точноста на аксиомите (i) - (iii) следува од соодветните својства на апсолутната вредност.

Споменатата метрика не е единствена што може да се дефинира на $\mathbb{R}$. Така, на пример, ако се стави

$$d_1(x,y) = 0 \quad \text{за } x = y, \quad d_1(x,y) = 1 \text{ за } x \neq y,$$

тогаш $\mathbb{R}$ е метрички простор во однос на метриката d_1. Натаму, меѓутоа, кога ќе зборуваме за $\mathbb{R}$ како за метрички простор, секогаш ќе ја имаме предвид првата од погоре дефинираните метрики на $\mathbb{R}$.

Пример 2. Нека $\mathbb{R}^k$ е множеството од сите подредени к-тки реални броеви. Ако за $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^k$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_k)$, ставиме

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_k - y_k)^2}, \qquad (3)$$

ќе добиеме дека d е метрика на $\mathbb{R}^k$. За $\mathbb{R}^k$ со вака дефинираната метрика велиме дека е евклидски простор со димензија к. За к=2,3 формулата (3) се совпаѓа со соодветната формула за растојание меѓу две точки во рамнина односно во простор. За да се покаже дека d, дефинирано со (3) е навистина метрика, треба да се провери само дали важи аксиомата (iii), зашто првите две очигледно се задоволени. Ако $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_k)$, $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_k)$, тогаш (iii) следува од неравенството

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \ldots + (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_k^2} + \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_k^2} \qquad (4)$$

ако во него се стави: $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$, $i = 1, \ldots, k$.

(Да забележиме дека (4) се добива од неравенството на Коши-Буњаковски

$$|a_1b_1+\ldots+a_nb_n| \leqslant \sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}\ .\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2}, \qquad (5)$$

каде што a_i, b_i се произволни реални броеви; кн.III,стр.96.)

Како и во примерот 1, и овде можат да се дефинираат и други метрики, но кога за $\mathbb{R}^k$ зборуваме како за метрички простор, ќе ја имаме предвид метриката определена со (3).

Пример 3. Нека $C[a,b]$ е множеството од сите функции од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$, непрекинати на сегментот $[a,b], a<b$ и нека за $x=x(t)$, $y=y(t)$ од $C[a,b]$ ставиме:

$$d(x,y) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)-y(t)|. \qquad (6)$$

Од непрекинатоста на $x(t)$ и $y(t)$ следува дека функцијата $|x(t)-y(t)|$ е непрекината, па таа достигнува најголема вредност на $[a,b]$, што значи дека пресликувањето d со (6) е добро дефинирано. Аксиомите (i) и (ii) се, очигледно, исполнети, а точноста на (iii) следува од:

$$|x-z| = |x-y+y-z| \leqslant |x-y|+|y-z|$$

и од фактот дека

$$\max\{|x-y|+|y-z|\} \leqslant \max|x-y|+\max|y-z|.$$

Ако M е метрички простор во однос на метриката d и ако S е непразно подмножество од M, тогаш пресликувањето $d':S\times S \to \mathbb{R}$, дефинирано со:

$$(\forall x,y\in S)\quad d'(x,y) = d(x,y),$$

претставува метрика во S. За множеството S со вака дефинирана метрика ќе велиме дека е метрички потпростор од M; метриката на S, за поедноставно, ќе ја означуваме со d наместо со d'.

Поимот за растојание меѓу две точки во произволен метрички простор овозможува да се пренесат многу поими во врска со точки и подмножества од реалната права, од $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, како што се: околина на точка, внатрешна точка, затворено множество и други. Овде ќе воведеме неколку такви поими, повеќето од кои ќе ги користиме натаму.

Ако а е точка од еден метрички простор М и ако r е даден позитивен реален број, тогаш можеме да го формираме множеството

$$T(a;r)=\{x\,|\,x\in M,\ d(a,x)<r\},$$

коешто се вика отворена топка со центар а и радиус r. Секоја отворена топка со центар а ќе ја викаме околина на точката а; за $T(a;\epsilon)$ ќе велиме дека е ϵ-околина на а.

По аналогија со $\mathbb{R}^3$, множествата

$$T[a;r]=\{x\,|\,x\in M,d(a,x)\leqslant r\},\quad S(a;r)=\{x\,|\,x\in M,d(a,x)=r\}$$

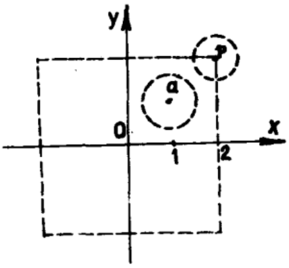
се викаат затворена топка и сфера со центар а и радиус r.

** Во метричкиот простор $\mathbb{R}$ отворена топка е секој отворен интервал $(a-r,a+r)$, затворена топка е секој затворен интервал $[a-r,a+r]$, а сфера-двоелементно множество $\{a-r,a+r\}$. Во $\mathbb{R}^2$, $T(a;r)$, $S(a;r)$ и $T[a;r]$ означуваат: внатрешност на круг, кружница и круг, соодветно, а во $\mathbb{R}^3$ - внатрешност на топка, сфера и топка соодветно (во обична смисла), со центар а и радиус r.

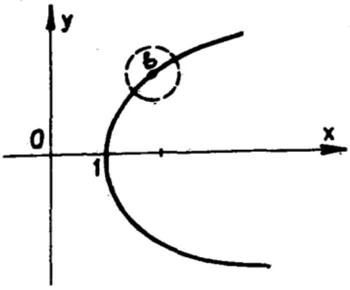
Нека $A\subseteq M$. Точката $a\in M$ ќе ја викаме внатрешна точка за А ако постои околина на а што е целосно содржана во А; со други зборови, точката $a\in M$ е внатрешна за А ако постои реален број $r>0$, таков што $T(a;r)\subseteq A$. Ако $a\in M$ е внатрешна точка за А, тогаш е јасно дека $a\in A$. Ако секоја точка $x\in A$ е внатрешна точка за А, тогаш за А велиме дека е отворено множество во М. Целиот метрички простор М и секоја отворена топка во М се примери за отворени множества во М. **

За една точка $p\in M$ ќе велиме дека е точка на згуснување за подмножеството $A\subseteq M$ ако секоја околина од р содржи барем една точка од А што е различна од р. Тоа е еквивалентно со исказот: секоја околина на р содржи бесконечно многу точки од А. Според тоа, едно конечно подмножество од М не може да има точки на згуснување. Една точка на згуснување за А може да му припаѓа на А, но не мора. Ако А ја содржи секоја своја точка на згуснување, тогаш тоа се вика затворено множество во М. Секое конечно подмножество од М, секоја затворена топка во М и М се примери за затворени множества во М.

Пример 4. Нека $A=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R},\ |x|\leqslant 2, |y|\leqslant 2\}$ и $B=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R},\ y^2=x-1\}$ се подмножества од метричкиот простор $\mathbb{R}^2$ (црт.1 и црт.2). Точката $\bar{a}=(1,1)$ е внатрешна точка за A бидејќи, на пример, $T(\bar{a}, \frac{1}{2})\subset A$; точката $\bar{a}=(1,1)$ е истовремено и точка на згуснување за A што му припаѓа на A, а $\bar{p}=(2,2)$ е точка на згуснување за A што не му припаѓа на A. Точката $\bar{b}=(2,1)$ е точка на згуснување за B, $\bar{b}\in B$ и $\bar{b}$ не е внатрешна точка за B. Може да се покаже дека



Црт.1



Црт.2

секоја точка од A е внатрешна за A, т.е. A е отворено множество, а секоја точка на згуснување на B му припаѓа на B, т.е. B е затворено множество.

2.2. НИЗИ ВО МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

Секое пресликување $f:\mathbb{N}\to M$ од множеството на природните броеви во метричкиот простор M се вика низа од точки во M. Вообичаено е сликата на $n\in\mathbb{N}$ при f да се означува со a_n наместо со $f(n)$ и пресликувањето f да се задава со сликите $a_1, a_2, \ldots$, на броевите $1, 2, \ldots$

Поимот околина на точка овозможува да се пренесат тука скоро сите поими што се воведуваат за низи од реални броеви. Овде ќе се задржиме на поимите конвергентна и фундаментална низа точки во метрички простор.

Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ или кратко (a_n), е низа точки во метричкиот простор M. Ако p е точка од M со својството: секоја околина на p содржи безброј многу членови од низата (a_n), тогаш p се вика точка на натрупување на (a_n).

За една низа (a_n) од M велиме дека е конвергентна ако постои точка $a \in M$, таква што во секоја нејзина околина се содржат безброј многу членови од низата, а надвор од неа само конечно многу. Точката a во тој случај ја викаме лимес или гранична вредност на низата (a_n) и пишуваме .

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{или: } a_n \to a,\ n \to \infty. \tag{1}$$

Секоја низа точки во метричкиот простор M што не е конвергентна се вика дивергентна.

Теорема 1. Ако (a_n) е конвергентна низа точки во M, тогаш нејзиниот лимес е еднозначно определен.

Доказ. Ако низата (a_n) е конвергентна и a е нејзин лимес, тогаш a е и точка на натрупување за (a_n). Нека $b \in M$ и $b \neq a$. Тогаш $d(a,b) > 0$, па ставајќи $\epsilon = \frac{1}{3}d(a,b)$, добиваме дека $T(a;\epsilon) \cap T(b;\epsilon) = \emptyset$. Бидејќи во $T(a;\epsilon)$ има безброј многу членови од (a_n), а надвор само конечно многу, следува дека во $T(b;\epsilon)$ има само конечен број членови од (a_n), т.е. b не е точка на натрупување, па не е ни лимес на (a_n). Следствено, лимесот на една конвергентна низа е еднозначно определен. ▯

Од дефиницијата за конвергентна низа гледаме дека за секој $\epsilon > 0$, растојанието на кој било член a_n на низата (a_n) до лимесот a, почнувајќи од некој индекс n_0, е помало од ϵ. Така, поимот лимес на низа може да се окарактеризира со т.н. $(\epsilon - n_0)$-својство:

Една низа (a_n) е конвергентна ако и само ако постои точка a, таква што

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})\ n \geqslant n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \epsilon. \tag{2}$$

Конвергенцијата на една низа точки во произволен метрички простор може да се сведе на конвергенција на низа од реални броеви. Имено, ставајќи $\alpha_n = d(a_n, a)$, добиваме низа (α_n) од реални броеви, којашто, поради (2), конвергира кон нула; обратно, ако (α_n) конвергира кон нула, тогаш (a_n) конвергира кон точката a. Значи:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0. \tag{3}$$

Една низа (a_n) точки од метричкиот простор M ја викаме кошиева или фундаментална ако е исполнет следниов услов:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_o \in \mathbb{N}) \; m > n \geqslant n_o \Rightarrow d(a_m, a_n) < \epsilon. \qquad (4)$$

Теорема 2. Секоја конвергентна низа во M е фундаментална.

Доказ. Нека (a_n) е конвергентна низа со лимес a. Тогаш, според $(\epsilon - n_o)$- својството за секој $\epsilon > 0$ постои природен број $n_o = n_o(\epsilon)$, таков што

$$m > n \geqslant n_o \Rightarrow d(a_m, a) < \frac{\epsilon}{2}, \quad d(a_n, a) < \frac{\epsilon}{2},$$

а тогаш

$$m > n \geqslant n_o \Rightarrow d(a_m, a_n) \leqslant d(a_m, a) + d(a, a_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \, ▯$$

Според основниот Кошиев критериум, секоја фундаментална низа во метричкиот простор $\mathbb{R}$ е и конвергентна. Во општ случај, меѓутоа, ова не важи, како што може да се види од следниов пример.

Пример 5. Отворениот интервал $M = (0,1)$ е метрички потпростор од $\mathbb{R}$. Низата $1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$ е кошиева во M, но не е конвергентна во M (нејзиниот лимес 0 во $\mathbb{R}$ не му припаѓа на метричкиот простор M).

Еден метрички простор M се вика комплетен ако секоја кошиева низа во M е конвергентна. Според примерот 5, постојат метрички простори што не се комплетни (види и вежба 11). Како што спомнавме погоре, метричкиот простор $\mathbb{R}$ е комплетен. Уште повеќе:

Теорема 3. Евклидскиот простор $\mathbb{R}^k$ е комплетен.

Доказ. Нека $(\bar{a}_n)$ е кошиева низа во $\mathbb{R}^k$ каде што $\bar{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{kn})$. Ќе покажеме дека $(\bar{a}_n)$ е конвергентна во $\mathbb{R}^k$. Нека $\epsilon > 0$ е произволно избран реален број. Тогаш, според (4), постои природен број $n_o = n_o(\epsilon)$, таков што

$$m>n\geqslant n_o \rightarrow d(\bar a_m,\bar a_n)<\epsilon,$$

$$m>n\geqslant n_o \rightarrow \sqrt{(a_{1m}-a_{1n})^2+\dots+(a_{km}-a_{kn})^2}<\epsilon\ ,$$

од што следува дека

$$m>n\geqslant n_o \rightarrow |a_{jm}-a_{jn}|<\epsilon,\ j=1,2,\dots,k.$$

Значи, секоја од компонентните низи (a_{jn}) од реални броеви е кошиева, па бидејќи ℝ е комплетен, следува дека секоја од овие k компонентни низи е конвергентна. Нека $\lim_{n\rightarrow\infty} a_{jn}=a_j, j=1,\dots,k$ и нека $\bar a=(a_1,a_2,\dots,a_k)$. Тогаш, за произволно избраниот $\epsilon>0$, постојат природни броеви $n_1,n_2,\dots,n_k$, такви што

$$n\geqslant n_j \rightarrow |a_{jn}-a_j|<\frac{\epsilon}{\sqrt{k}},\ j=1,2,\dots,k.$$

Ако $n_o=\max\{n_1,\dots,n_k\}$, тогаш

$$n\geqslant n_o \rightarrow |a_{jn}-a_j|<\frac{\epsilon}{\sqrt{k}},\ j=1,2,\dots,k,$$

па за $n\geqslant n_o$ имаме:

$$d(\bar a_n,\bar a)=\sqrt{(a_{1n}-a_1)^2+\dots+(a_{kn}-a_k)^2}<\sqrt{k.\frac{\epsilon^2}{k}}=\epsilon,$$

што значи $(\bar a_n)$ е конвергентна со лимес $\bar a$. Следствено $\mathbb{R}^k$ е комплетен.▯

Натаму ќе ја користиме и комплетноста на метричкиот простор од примерот 3 поради што неа сега ќе ја установиме.

Теорема 4. Метричкиот простор $C[a,b]$ од сите функции од ℝ во ℝ што се непрекинати на сегментот $[a,b]$, со метрика определена во примерот 3, е комплетен.

┌** Доказ. Нека $x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t),\dots$ е кошиева низа во $C[a,b]$. Тоа значи дека за секој реален број $\epsilon>0$, постои природен број n_o, таков што $m>n\geqslant n_o$ повлекува

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_m(t)-x_n(t)|<\epsilon,$$

$$|x_m(t)-x_n(t)|<\epsilon \qquad (\forall t\in[a,b]). \tag{5}$$

Според тоа, за фиксен t_o од $[a,b]$, бројната низа $x_n(t_o)$ е кошиева низа во $\mathbb{R}$ па значи и конвергентна, т.е. постои број $x(t_o)$, таков што

$$\lim_{n \to \infty} x_n(t_o) = x(t_o).$$

Со тоа, пуштајќи t_o да се менува во $[a,b]$, дефинирана е функција $x(t)$ на $[a,b]$. Ако во (5) пуштиме $m \to \infty$, ќе добиеме дека за секој $t \in [a,b]$ и за секој $n \geqslant n_o$

$$|x(t) - x_n(t)| < \epsilon,$$

а тоа, според дефиницијата за униформна конвергентност, значи дека низата $x_n(t)$ конвергира кон $x(t)$ униформно на $[a,b]$. Функцијата $x(t)$, како гранична вредност на униформно конвергентна низа од непрекинати функции, и самата е непрекината (кн.III, стр.22,1°). Според тоа $x(t) \in C[a,b]$, т.е. кошиевата низа $(x_n(t))$ е конвергентна во $C[a,b]$. Следствено метричкиот простор $C[a,b]$ е комплетен. $\square$ **

Во врска со комплетните метрички простори ќе ја докажеме и следнава:

Теорема 5. Нека S е подмножество од метричкиот простор M.

а) Ако S, сметано како метрички потпростор од M е комплетен метрички простор, тогаш S е затворено подмножество во M.

б) Ако метричкиот простор M е комплетен, а S е затворено подмножество од M, тогаш S е комплетен метрички потпростор од M.

Според б), секој сегмент $[a,b]$ во $\mathbb{R}$ е комплетен метрички потпростор од $\mathbb{R}$.

** Доказ. а) Нека $a \in M$ е точка на згуснување за S. Тогаш, за секој $n \in \mathbb{N}$, постои точка $a_n \in S \cap T(a;\frac{1}{n})$ таква што $a_n \neq a$. Така добиваме низа (a_n) што конвергира кон a во M. Сите членови на низата (a_n) се во S и таа е кошиева во S. Бидејќи S е комплетен потпростор, следува дека (a_n) е конвергентна во S, т.е. $a \in S$. Следствено, подмножеството S е затворено во M.

б) Нека (a_n) е кошиева низа во S. Тогаш таа е кошиева и во M, па од комплетноста на M следува дека таа е конвергентна во M, т.е. постои $a = \lim_{n \to \infty} a_n$ во M. Ќе покажеме дека $a \in S$. Навистина, ако $a = a_n$ за некој n, тогаш $a \in S$; ако пак $a \neq a_n$ за секој $n \in \mathbb{N}$, тогаш a е точка на згуснување за S, па бидејќи множеството S е затворено, следува дека $a \in S$. Значи, секоја кошиева низа (a_n), $a_n \in S$, е конвергентна, т.е. S е комплетен потпростор од M. **

*2.3.ФУНКЦИИ НА МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

Нека (M,d) и (M',d') се метрички простори и нека $D \subseteq M$. Секое пресликување од D во M', $f: D \to M'$, се вика функција од M во M' со домен (или дефинициона област) D. Поимот за конвергентна низа овозможува и за овој вид функции да се воведат такви корисни поими какви што се поимите гранична вредност и непрекинатост на функција, при што тие се дефинираат на сосема ист начин како кај функциите од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$.

Нека f е функција од M во M' со домен D и нека $a \in M$ е точка од D или е точка на згуснување за D. Потоа, нека

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

е низа точки од D која конвергира кон a. Ако за секоја таква низа (x_n) соодветната низа од вредностите на функцијата f,

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots,$$

е конвергентна со лимес a', тогаш точката a' се вика лимес (или гранична вредност) на функцијата f во точката a и се пишува

$$\lim_{x \to a} f(x) = a' \quad \text{или:} \quad f(x) \to a' \quad (x \to a).$$

На ист начин како кај функциите од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$ се покажува дека лимесот на една функција од M во M' со домен D во дадена точка a е еднозначно определен и дека е точно $(\epsilon - \delta)$-својството, т.е. $a' = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ако и само ако се исполнети следниве услови:

$$\text{(i)} \quad (\forall \delta > 0)(\exists x \in D)\ d(x,a) < \delta,$$

$$\text{(ii)} \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)\ x \in D,\ d(x,a) < \delta_\epsilon \Rightarrow d'(f(x),a') < \epsilon.$$

За една функција f од M во M' со домен D велиме дека е непрекината во точката $a \in M$ ако $a \in D$ и ако постои $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Од оваа дефиниција директно следува дека функцијата $f(x)$ е непрекината во точката $a \in D$ ако и само ако

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Ако $f(x)$ е непрекината во секоја точка од едно множество E, $E \subseteq D$, тогаш велиме дека $f(x)$ е непрекината на множеството E.

Со истото расудување како кај функциите од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$ се докажува точноста на таканаречената $(\epsilon - \delta)$ - карактеристика за непрекинатост, т.е. една функција f од M во M' со домен D е непрекината во точката $a \in D$ ако и само ако

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)\ x \in D,\ d(x,a) < \delta_\epsilon \Rightarrow d'(f(x),f(a)) < \epsilon.$$

Секоја функција од еден метрички простор M во метричкиот простор $\mathbb{R}$, $f: M \to \mathbb{R}$ се вика бројна функција. Функциите од $\mathbb{R}^k$ во $\mathbb{R}$, т.е. функциите од k реални независнопроменливи, се примери за бројни функции.

Се разбира дека поимите лимес и непрекинатост, воведени погоре поопшто, имаат смисла и за бројните функции.

Реалните функции од еден реален аргумент, непрекинати на сегмент имаат некои убави својства. Така, на пример, ако $f(x)$ е непрекината функција на сегментот $[a,b]$, тогаш $f(x)$ на $[a,b]$: а) е ограничена, б) има најмала и најголема вредност и в) е рамномерно непрекината (некои од овие својства ги користевме во примерот 3 од оваа глава; тие се познати како *теорема на Вајерштрас*; в.кн.I, стр.188, теоремата 6° и теоремата за униформна непрекинатост).

Се покажува дека тие својства ги имаат и бројните функции општо, коишто се непрекинати на еден вид множества во метрички простор, наречени компактни множества (компактните множества, во таа смисла, се аналози на сегментите во $\mathbb{R}$).

За едно множество К од некој метрички простор М велиме дека е *компактно множество* во М ако секоја низа (a_n) во К има барем една точка на натрупување во К. Така, на пример, секое конечно подмножество од еден метрички простор е компактно множество. Без тешкотии се покажува дека едно подмножество К од $\mathbb{R}$ е компактно во $\mathbb{R}$ ако и само ако е затворено и ограничено во $\mathbb{R}$. Според тоа, секој сегмент $[a,b]$ во $\mathbb{R}$ е компактно множество во $\mathbb{R}$. Исто така, секое затворено и ограничено подмножество од $\mathbb{R}^k$ е компактно.

Заради комплетност, ќе ги формулираме експлицитно гореспоменатите својства во следнава теорема:

Теорема 6. Нека К е компактно множество во еден метрички простор М. Ако $f(x)$ е бројна функција, непрекината на К, тогаш

а) $(\exists \lambda\in\mathbb{R})(\forall x\in K)\quad |f(x)|\leqslant \lambda,$

т.е. $f(x)$ е *ограничена* на К.

б) $(\exists a,b\in K)(\forall x\in K)\quad f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b),$

т.е. $f(x)$ достигнува *најмала* вредност $\alpha=f(a)$ и *најголема вредност* $\beta=f(b)$ на К.

в) $(\forall\epsilon>0)(\exists\,\delta_{\epsilon}>0)\ x,y\in K,\ d(x,y)<\delta_{\epsilon}\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon,$

т.е. $f(x)$ е *рамномерно непрекината* на К.

(Доказот на оваа теорема може да се најде, на пример, во кн.III, стр.111.) ▯

2.4. ТЕОРЕМА НА ФИКСНА ТОЧКА

Нека $f: M\to M$ е пресликување од метричкиот простор М во себе. Ако постои точка $a\in M$ таква што

$$a=f(a),$$

тогаш a се вика *фиксна* или *неподвижна точка*, за пресликувањето f. Едно пресликување f:M → M може да има повеќе фиксни точки, една или ниедна (вежба 22). Доволни услови за егзистенција и единственост на неподвижна точка се дадени со наредната теорема 7.

Секое пресликување f:M → M за кое е исполнет условот

$$(\exists q\in \mathbb{R},\ 0<q<1)\ (\forall x,y\in M)\ d(f(x),f(y))\leqslant q d(x,y) \qquad (1)$$

се вика *контракција* или *стегање* на метричкиот простор M; бројот q се вика коефициент на контракцијата f.

Во врска со овие поими ќе ја докажеме следнава важна теорема:

Теорема 7. (*Теорема на Банах за фиксна точка*). Секоја контракција на еден комплетен метрички простор има една и само една фиксна точка.

Со други зборови: ако M е комплетен метрички простор, а f:M → M го задоволува условот (1) и ако x_0 е произволна точка од M, тогаш низата (x_n) точки од M, формирана на следниов начин:

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\dots,x_n = f(x_{n-1}),\dots \qquad (2)$$

е конвергентна и нејзината гранична вредност $x=\lim\limits_{x\to\infty} x_n$ ја задоволува равенката $x=f(x)$. Уште повеќе, ако $x^*=f(x^*)$, тогаш, $x^*=x$.

Доказ. Од претпоставката дека пресликувањето f:M → M е контракција на M и од начинот на кој е формирана низата (x_n) со (2), добиваме

$$d(x_2,x_1)=d(f(x_1),f(x_0))\leqslant q d(x_1,x_0)=q d(f(x_0),x_0),$$

т.е. ставајќи $d(f(x_0),x_0)=\alpha$, добиваме $d(x_2,x_1)\leqslant q\alpha$,

$$d(x_3,x_2)=d(f(x_2),f(x_1))\leqslant q d(x_2,x_1)\leqslant q^2\alpha,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$d(x_{n+1},x_n)=d(f(x_n),f(x_{n-1}))\leqslant q d(x_n,x_{n-1})\leqslant q^n\alpha.$$

Според тоа, за $m > n$, добиваме

$$d(x_m,x_n) \leqslant d(x_m,x_{m-1})+d(x_{m-1},x_{m-2})+\ldots+d(x_{n+1},x_n)$$
$$\leqslant (q^{m-1}+q^{m-2}+\ldots+q^n)\alpha,$$

па имајќи предвид дека

$$d(x_m,x_n) < (q^n+q^{n+1}+\ldots+q^m)\alpha <$$
$$< (q^n+q^{n+1}+\ldots+q^m+q^{m+1}+\ldots)\alpha,$$

т.е.

$$d(x_m,x_n) < \frac{q^n}{1-q}\, d(f(x_0),x_0). \qquad (3)$$

Бидејќи $\frac{q^n}{1-q}.\alpha \to 0$ кога $n \to \infty$, следува дека и $d(x_m,x_n) \to 0$ кога $m > n \to \infty$, т.е. за произволен $\epsilon > 0$, може да се најде природен број n_0, таков што за $m > n \geqslant n_0$ важи $d(x_m,x_n) < \epsilon$.

Со тоа е покажано дека низата (x_n) е кошиева. Бидејќи M е комплетен, следува дека (x_n) е и конвергентна и конвергира, да речеме, кон x. Тогаш:

$$d(f(x),x) \leqslant d(f(x),x_n) + d(x_n,x) =$$
$$= d(f(x),f(x_{n-1})) + d(x_n,x)$$
$$\leqslant qd(x,x_{n-1})+d(x_n,x).$$

Поради конвергентноста на (x_n), за секој $\epsilon > 0$, постојат $n_1,n_2 \in \mathbb{N}$ такви што

$$n \geqslant n_1 \Rightarrow d(x,x_{n-1}) < \frac{\epsilon}{2q},\ n \geqslant n_2 \Rightarrow d(x_n,x) < \epsilon/2.$$

Ако $n_0 = \max\{n_1,n_2\}$, тогаш за $n \geqslant n_0$ ќе добиеме

$$d(f(x),x) \leqslant qd(x,x_{n-1})+d(x_n,x) < q.\frac{\epsilon}{2q}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

од каде што следува дека $d(f(x),x)=0$, а тоа значи дека $x=f(x)$, т.е. x е фиксна точка за f.

Ако x^* е точка од M, таква што $x^* = f(x^*)$, тогаш

$$d(x^*,x) = d(f(x^*), f(x)) \leqslant q d(x^*,x).$$

Кога би било $d(x^*,x) \neq 0$, од последното неравенство би добиле $q \geqslant 1$ што противречи на претпоставката дека f е контракција. Следствено, $d(x^*,x)=0$, т.е. $x^*=x$.▯

Низата (x_n) определена со (2) се вика итерирана низа (или низа на повторувања) со почеток x_0, а начинот на кој се добива фиксната точка е позната како метод на последователни приближувања или метод на прости итерации.

Покрај тоа што со теоремата за фиксна точка е даден начинот за добивање на фиксната точка (како лимес на низата (2)), возможно е да се даде оценка на отстапувањето на n-тиот член од низата (2) од нејзиниот лимес. Имено, точна е следнава теорема:

Теорема 8. (Оценка на грешка). Ако $f: M \to M$ го задоволува условот за контракција (1) со коефициент $q: 0<q<1$ и ако x е лимесот на низата $(x_n): x_0, x_1=f(x_0), x_2=f(x_1), \ldots$, тогаш грешката што се прави при замена на x со x_n се оценува со неравенството

$$d(x,x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(f(x_0),x_0). \tag{4}$$

Доказ. Неравенството (4) следува од веќе докажаното неравенство (3) кога пуштаме $m \to \infty$. ▯

Забелешка. Наместо оценката (4), попрактична е оценката

$$d(x,x_n) \leqslant \frac{q}{1-q} d(x_n,x_{n-1}), \tag{4'}$$

којашто се докажува како и (4) преку неравенството

$$d(x_m,x_n) \leqslant \frac{q}{1-q} d(x_n,x_{n-1})$$

што се добива аналогно како (3). За $0<q\leqslant \frac{1}{2}$ имаме $\frac{q}{1-q} \leqslant 1$, па за тој случај може да се користи поедноставната оценка

$$d(x,x_n) \leqslant d(x_n,x_{n-1}). \tag{5}$$

Оценката (5) не може да се користи во случајот $\frac{1}{2}<q<1$.

2.5. ВЕЖБИ

1. Да се покаже дека множеството $\mathbb{C}$ на комплексните броеви е метрички простор, ако пресликувањето $d:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{R}$ е дефинирано со:

а) $d(x,y) = |x-y|$; б) $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

(Притоа, ако $x=x_1+x_2i$, тогаш $|x|$ означува $\sqrt{x_1^2+x_2^2}$.)

2. Нека $d(x,y)$ е метрика на множеството M. Дали

а) $d^2(x,y)$; б) $\min\{d(x,y),1\}$

е метрика на M?

3. Нека M е множеството од сите конвергентни низи реални броеви. Ако $\bar{a}=(\alpha_n)$ и $\bar{b}=(\beta_n)$ се два елемента од M, да ставиме

$$d(\bar{a},\bar{b}) = \sup_{1\leqslant n<+\infty} |\alpha_n-\beta_n|.$$

Покажи дека (M, d) е метрички простор.

4. Нека M е како во претходната задача. Ако $\bar{a}=(\alpha_n)$ и $\bar{b}=(\beta_n)$ се две конвергентни низи со лимеси α и β соодветно, ставаме

$$d(\bar{a},\bar{b}) = |\alpha-\beta|.$$

Дали d е метрика на M?

5. Ако x,y,u,v се точки од еден метрички простор M, тогаш важи неравенството

$$|d(x,y)-d(u,v)| \leqslant d(x,u)+d(y,v).$$ Докажи!

6. Множеството A во еден метрички простор M се вика ограничено ако постои отворена топка $T(x_0;r)$ во M таква што $A\subseteq T(x_0;r)$.

Дали е ограничено следново множество во $\mathbb{R}^2$ односно во $\mathbb{R}^3$:

а) $A=\{(x,y)\,|\,(x^2+1)y^2\leqslant 1\}$?

б) $A=\{(x,y)\,|\,(x^2+y^2)^2\leqslant x^2-y^2\}$?

в) $A=\{(x,y,z)\,|\,|x|+|y|+|z|\leqslant 1\}$?

7. Ако a е точка на згуснување за подмножеството A од еден метрички простор M, тогаш постои низа точки од A, сите различни од a, која конвергира кон a. Докажи!

8. Ако a и b се две точки од еден метрички простор M и ако (a_n) е низа што конвергира кон a, тогаш низата реални броеви $d(a_n,b)$ конвергира кон бројот $d(a,b)$. Докажи!

9. Ако во метричкиот простор M $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,

тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n,b_n) = d(a,b)$. Докажи!

10. Нека M е множеството подредени парови $\bar{x}=(x',x'')$ реални броеви и нека

$$d(\bar{x},\bar{y}) = \max\{|x'-y'|, |x''-y''|\}.$$

Да се покаже дека:

а) d е метрика на M,

б) метричкиот простор M со метрика d е комплетен.

11. Дали метричкиот простор $\mathbb{Q}$ со обичната метрика $|x-y|$ е комплетен? ($\mathbb{Q}$ е множеството рационални броеви.)

12. Ако една кошиева низа точки во еден метрички простор M содржи конвергентна подниза, тогаш и самата низа е конвергентна. Докажи!

(Притоа, ако (a_n) е низа во M и ако $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ е монотоно растечка низа од природни броеви, тогаш $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$, кратко (a_{n_k}) се вика подниза од (a_n).)

13. Нека d е метрика на метричкиот простор M и нека x_o е произволно избрана точка од M. Да се покаже дека пресликувањето $f:M \to \mathbb{R}$, дефинирано со $f(x)=d(x,x_o)$, е непрекината функција на множеството M.

14. Нека d е метрика на метричкиот простор M. Да се покаже дека d е непрекината функција од $M\times M$ во $\mathbb{R}$.

15. Нека M е комплетен метрички простор и $f:M \to M'$ непрекинато пресликување од M на метричкиот простор M' (т.е. f е сурјекција). Да се покаже дека и M' е комплетен.

16. Нека f е функција од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$ со домен - сегментот $[a,b]$ и таква што

$$|f(x)-f(y)| \leqslant L|x-y|, \ L>0$$

за секои $x,y \in [a,b]$. Да се покаже дека f е непрекината на $[a,b]$. (Дали е и диференцијабилна?)

Најди пример на непрекината функција што не го задоволува горниот услов.

17. Да се покаже дека следниве функции од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$ го задоволуваат условот за контракција:

$$\text{а)}\ \ f(x) = 1-\frac{1}{3}|x|,\ \ [-1,1];\quad \text{б)}\ \ f(x) = \frac{1}{x+1},\ [1,2];$$

$$\text{в)}\ f(x) = 2+\frac{1}{4}\sin x,\ \ [0,\frac{\pi}{2}];\ \text{г)}\ \ f(x)=x^3,\ \ [0,\frac{1}{2}].$$

Која од овие функции е контракција на наведениот сегмент?

18. $f(x)$ е функција од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$, диференцијабилна за секој $x \in \mathbb{R}$. Да се покаже дека, ако постои $q \in \mathbb{R}$, $0<q<1$, таков што $|f'(x)| \leqslant q$ за секој $x \in \mathbb{R}$, тогаш f е контракција на $\mathbb{R}$.

§2.5

19. Да се провери кое од следниве пресликувања е контракција на $\mathbb{R}$, користејќи ја претходната задача:

а) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + 3$; в) $f(x) = e^{-x}$;

б) $f(x) = 1 - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; г) $f(x) = 1/2(x^2+1)$.

20. Дадено е пресликувањето $f:[1,+\infty) \to [1,+\infty)$ дефинирано со $f(x)=x+1/x$. Да се покаже дека $f(x)$ нема фиксна точка. Дали тоа е контракција на $[1,+\infty)$?

(Да забележиме дека $|f'(x)| < 1$ за секој $x \in [1,+\infty)$!)

21. Да се покаже дека $f(x) = \frac{3x}{x+2}$ е контракција на интервалот $(1,3]$, но нема фиксна точка на тој интервал (сметан како метрички потпростор од $\mathbb{R}$).

22. Да се најдат фиксните точки на следниве функции (во множеството на кое се дефинирани):

а) $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$, од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$;

б) $f(x) = e^x$, од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$;

в) $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ од $\mathbf{C}$ во $\mathbf{C}$;

г) $f(x) = x + \sin x$, од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$.

23. Нека $f(x)$ е пресликување од комплетниот метрички простор M во себе. Ако $f(x)$ не е, но $g(x)=f(f(x))$ е контракција на M, тогаш f има една и само една фиксна точка. Докажи!

24. За реалната функција $F(x)$ се исполнети следниве услови:

а) $F(a) > 0$, $F(b) < 0$, $a < b$;

б) $-K < F'(x) < -k$, $k > 0$, $K > 0$;

в) бројот p е определен така што $K < 1/p$. Да се покаже дека, во тој случај, $f(x=x+pF(x)$ го пресликува сегментот $[a,b]$ во самиот себе и е контракција на тој сегмент.

ПРИБЛИЖНО РЕШАВАЊЕ РАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Во ова глава ќе се задржиме на проблемот за приближно решавање равенки. Главно средство за решавање на овој проблем се методите на итерации; овде ќе разгледаме некои од нив. Централно место во оваа глава имаат методот на последователни приближувања (кој резултира од теоремата на Банах за фиксна точка, а има важни примени и во некои делови на теориската математика) и методот на Њутн-Рафсон. На крајот го засегнуваме прашањето на приближно пресметување корени на полиноми, како и задачата за пресметување вредности на полиноми.

3.1. ОПШТИ ЗАБЕЛЕШКИ

Една од главните задачи на нумеричката математика е приближното решавање равенки од видот

$$f(x)=0, \qquad (1)$$

каде што f(x) е дадена функција од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$ со домен D,т.е. $f:D\to\mathbb{R}, D\subseteq\mathbb{R}$. Потребата за приближно решавање равенки од видот (1) иде, пред сѐ, оттаму што само за релативно мал број функции f(x) постојат начини за наоѓање на точните решенија на (1), т.е. "точни методи", а и затоа што во некои случаи кога такви начини постојат, тие можат да бидат практично непогодни (на пример, кога f(x) е полином од трет или четврти степен, в.кн.II, стр.130-133). Од друга страна, за многу практични цели е доволно да се знаат само приближни вредности на корените од

(1) со однапред зададена точност.

Задачата за наоѓање приближно решение на равенка од видот (1) обично се сведува на две подзадачи:

1) Да се најдат доволни услови за (1) да има решение и потоа да се одредат интервалите во кои (1) има единствено решение, т.е. се врши изолирање или локализирање на корените од (1)

2) Откако е најдено некое приближно решение на (1), да се најдат начини за неговото подобрување, т.е. се врши уточнување на приближното решение, со однапред зададена точност.

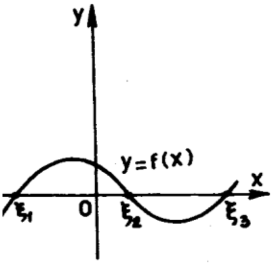
Првата од овие задачи обично е потешка.

Решенијата на равенката $f(x)=0$ геометриски претставуваат апсциси од пресечните точки на оската $0x$ и графикот на функцијата $y=f(x)$ (црт.1). Значи, кога би го имале графикот на $y=f(x)$, би ги имале и решенијата на равенката $f(x)=0$, барем приближно. Затоа, за определување интервалите на изолација на корените, може добро да послужи графикот на $f(x)$, во случаите кога можеме да го нацртаме.

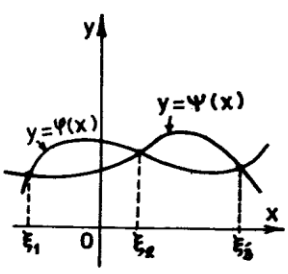
Често се покажува згодно равенката $f(x)=0$ да се претстави во форма

$$\phi(x) = \psi(x).$$

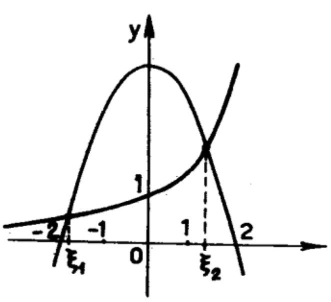
Реалните решенија на оваа равенка, геометриски, претставуваат апсциси на пресечните точки на кривите $y=\phi(x)$ и $y=\psi(x)$ (црт.2), па и тоа во некои случаи може да послужи за локализирање на корените.



Црт.1



Црт.2



Црт.3

На пример, ако равенката $e^x+x^2-4=0$ ја напишеме во форма $e^x=-x^2+4$ и ги нацртаме графиците на функциите $y=e^x$ и $y=-x^2+4$, ќе добиеме дека дадената равенка има два реални корени, локализирани во сегментите $[-2,-1]$ и $[1,2]$ (црт.3).

Постапките за приближно решавање равенки обично се некои методи на итерации. Една итеративна постапка за наоѓање приближни решенија на равенка од видот $f(x)=0$ се состои во тоа што некој еднообразен процес се повторува (се "итерира", од латинскиот збор iteratio што значи повторување). Имено, ако е утврдено дека постои корен ξ на равенката $f(x)=0$, и ако е извршена неговата изолација, тогаш се почнува со некое приближување (или апроксимација) x_0 до ξ и користејќи го x_0 како "влезна информација", се применува некое правило што ќе произведе ново приближување x_1 до ξ (притоа, правилото може да биде изведено директно од дадената функција $f(x)$, а може да биде и некоја општа постапка што само ја вклучува $f(x)$.) Понатаму, добиената апроксимација x_1 се користи како влезна информација за добивање ново приближување x_2 до ξ според споменатото правило, итн. На тој начин се добива низа од приближувања

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

Лимесот на таа низа (се разбира, ако е конвергентна) е коренот ξ на равенката (1). Процесот се завршува тогаш кога две последователни приближувања се "доволно блиски", т.е. кога за нашите практични цели можеме да ги сметаме за еднакви. Притоа, последното приближување се зема како корен на равенката (1).

(Меѓутоа, може да се случи така формираниот итеративен процес да дивергира, т.е. да не постои гранична вредност на низата од така формираните "приближувања"; сепак, од тоа не следува дека не постои решение на (1) ,туку дека можело да се случи процесот на итерациите да е избран несреќно; в.вежба 8.)

3.2. МЕТОД НА ПРЕПОЛОВУВАЊЕ

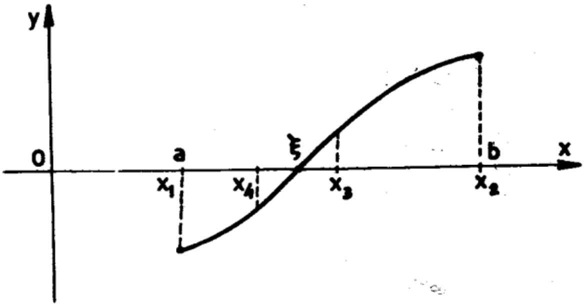
Овој метод базира на следнава теорема за функциите од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$:

Ако функцијата $f(x)$ е непрекината на сегментот $[a,b]$ и $f(a)f(b)<0$, тогаш постои барем еден реален број $\xi\in(a,b)$, таков што $f(\xi)=0$ (црт.4) (види кн.I, стр.187,$\underline{4}^{\circ}$).

Нека е дадена равенката

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

при што функцијата f(x) ги задоволува условите на споменатата теорема. Да ставиме $x_1=a$, $x_2=b$. Сегментот $[x_1,x_2]$ го преполовуваме и ја пресметуваме вредноста на функцијата f(x) во средната точка $x_3=(x_1+x_2)/2$. Ако $f(x_1)f(x_3)<0$, како што е во нашиот случај на црт. 4, тогаш $[x_1,x_3]$ е интервал на изолација на некој корен ξ од (1), двапати покус од претходниот сегмент. Потоа се преполовува $[x_1,x_3]$ и се пресметува вредноста на f(x) во средната точка $x_4=(x_1+x_3)/2$. Ако $f(x_1)f(x_4)<0$, тогаш x_3 се заменува во $[x_1,x_3]$ со x_4, т.е. се разгледува сегментот $[x_1,x_4]$ а во спротивниот случај x_1 се заменува со x_4, итн. Процесот завршува тогаш кога ќе се добие сегмент на изолација чија должина е помала од однапред даден број $\delta > 0$. Средната точка од последниот сегмент претставува некој приближен корен на равенката $f(x)=0$ со апсолутна грешка помала од $\epsilon=\delta/2$.



Црт.4

Методот на преполовување е итеративна постапка за наоѓање реални корени од "реални" равенки. Тој е "сигурен" метод, т.е. тој во секој случај дава низа од приближувања која конвергира кон некој корен на равенката $f(x)=0$.

Од начинот на добивањето на средните точки на сегментите е јасно дека отстапувањето на n-тото приближување (т.е. n-тата средна точка) x_{n+2} од коренот ξ на (1) е помало од $(b-a)/2^n$, т.е.

$$|\xi - x_{n+2}| < \frac{b-a}{2^n}. \qquad (2)$$

Поради бавното конвергирање на процесот, овој метод се применува предимно за изолирање и наоѓање грубо приближување на некој корен, а не за неговото уточнување.

Пример 1. Со помош на методот на преполовување ќе ја уточниме приближната вредност на коренот на равенката

$$f(x) \equiv x^3 + x^2 - 3 = 0$$

што се наоѓа во сегментот $[1,2]$ со точност до 0,1.

Бидејќи $f(1).f(2)=-1.9<0$, дадената равенка навистина има корен во сегментот $[1,2]$. Според (2), за бараната точност ни се доволни четири преполовувања. Бидејќи $f(1).f(\frac{2}{3})=-1.\frac{21}{8}<0$, бараниот корен се наоѓа во $[1,\frac{3}{2}]$. Потоа, бидејќи вредноста на $f(x)$ во средната точка $x=5/4$, е $33/64$, имаме $f(1)f(5/4)<0$, па коренот е во $[1,5/4]$. За средината $9/8$ имаме

$$f(5/4).f(9/8) = \frac{33}{64}.(-\frac{59}{512}) < 0,$$

т.е. коренот е во $[5/4,9/8]$. Земајќи $\xi \approx (5/4+9/8)/2=19/16$, добиваме дека $|\xi-19/16|<2^4<0,1$.

Извесна модификација на овој метод претставува таканаречениот метод на десетично делење на сегменти кој се состои во следното. Нека еден корен ξ на равенката $f(x)=0$ е изолиран во сегментот $[a,b]$, при што функцијата $f(x)$ е непрекината на $[a,b]$ и $f(a)f(b)<0$. Ако меѓу a и b има целобројни точки (т.е. цели броеви), тогаш ќе ги пресметаме вредностите на функцијата $f(x)$ во тие точки. Меѓу нив ќе се најдат две соседни целобројни точки, на пример c и $c+1$, такви што $f(c)f(c+1)\leqslant 0$. Да ставиме $a_0=c$, $b_0=c+1$. Бараниот корен е во $[a_0,b_0]$. Овој сегмент го разделуваме на десет еднакви делови и ги пресметуваме вредностите на $f(x)$ во поделбените точки. Ако во некоја од тие точки вредноста на f е нула, тогаш таа точка е бараниот корен. Ако не, тогаш постојат две соседни поделбени точки a_1 и b_1, такви што $b_1-a_1=1/10$ и $f(a_1)f(b_1)<0$. Коренот е во $[a_1,b_1]$, па $(a_1+b_1)/2$ е приближна вредност на коренот со грешка помала од 0,05. Сегментот $[a_1,b_1]$ пак го делиме на десет еднакви делови и ја повторуваме горната постапка. Така, при n-тиот чекор ќе имаме $b_n-a_n=10^{-n}$, па

$$|\xi - \frac{a_n + b_n}{2}| \leqslant \frac{1}{2.10^n} \qquad (3)$$

Методот на преполовување и методот на десетично делење се, инаку, познати под името <u>методи на проби</u>.

3.3. МЕТОД НА ПОСЛЕДОВАТЕЛНИ ПРИБЛИЖУВАЊА

Еден од најважните методи за приближно решавање равенки е методот на последователни приближувања. Притоа, наместо равенката $f(x)=0$, се разгледува равенката

$$x = \phi(x) \qquad (1)$$

еквивалентна со $f(x)=0$. (За две равенки велиме дека се <u>еквивалентни</u> ако корените им се исти.) Од равенката $f(x)=0$ може да се дојде до (1) ако се стави, на пример, $\phi(x)=x+f(x)$.

Како што спомнавме во §3.1, геометриски решенијата на (1) се апсциси на пресечните точки на кривата $y=\phi(x)$ и правата $y=x$.

Овој метод се состои во реализирање на следнава постапка:

Се избира точка x_o и се формира низа (x_n), рекурзивно, со:

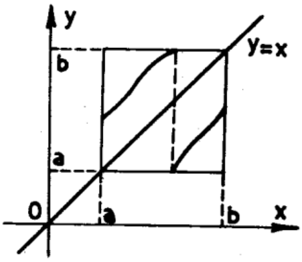
$$x_n = \phi(x_{n-1}), \quad n=1,2,\ldots, \qquad (2)$$

При извесни услови што треба да ги задоволува функцијата $\phi(x)$ низата (x_n), определена со (2) конвергира кон број ξ, кој е фиксна точка на $\phi(x)$, т.е. ξ е решение на равенката (1), па заменувајќи го ξ со "доволно далечен" член од низата, добиваме приближно решение на (1) со барана точност.

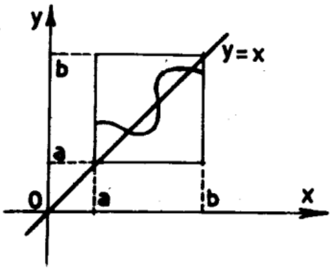
Да уочиме, прво, дека, за да биде алгоритмот добро дефиниран, нужно е вредностите на $\phi(x)$ да му припаѓаат на доменот D од ϕ, т.е. $\phi(D) \subseteq D$. Така, ако D е сегмент, на пример $D=[a,b]$, тогаш графикот на $\phi(x)$ ќе се наоѓа во квадратот $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$. Од графикот на црт. 5 гледаме дека условот $\phi(D) \subseteq D$ не ни гарантира егзистенција на корен на равенката (1).

Но, ако покрај $\phi(D) \subseteq D$, функцијата $\phi(x)$ е непрекината на сегментот $D=[a,b]$, тогаш постои барем едно решение на (1). Навистина, бидејќи $f(x)=x-\phi(x)$ е исто така непрекината на $[a,b]$

и $f(a)=a-\phi(a) \leqslant 0, f(b)=b-\phi(b)\geqslant 0$, т.е. $f(a).f(b)\leqslant 0$, постои барем еден број $\xi\in[a,b]$, таков што $f(\xi)=0$, а тоа значи дека $\xi=\phi(\xi)$.



Црт.5



Црт.6

Сепак, и со тоа не можеме да бидеме задоволени, зашто не знаеме дали нема и други корени на (1) во $[a,b]$ – (дури и бесконечно многу) фиксни точки на $\phi(x)$ во интервалот (a,b) (црт.6).

Спроведената дискусија укажува на потребата од наоѓање услови што ќе гарантираат егзистенција и единственост на фиксна точка на $\phi(x)$ во некое множество $D\subseteq \mathbb{R}$. За таа цел овде ќе ја користиме теоремата за фиксна точка (Т.7 од гл.2).

Теорема 1. Нека $\phi(x)$ е реална функција дефинирана на $[a,b]$ со вредности во $[a,b]$. Ако постои $q\in R$, $0<q<1$, таков што

$$(\forall x,y\in[a,b])\ \ |\phi(x)-\phi(y)|\leqslant q|x-y|, \qquad (3)$$

(т.е. ако $\phi(x)$ е контракција на $[a,b]$), тогаш равенката $x=\phi(x)$ има едно и само едно решение во $[a,b]$ и тоа е лимес на низата

$$(x_n):\ \ x_n=\phi(x_{n-1}),\ n=1,2,\ldots, \qquad (4)$$

при што $x_0\in[a,b]$ е произволно избран. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$, тогаш се точни неравенствата

$$|\xi-x_n|\leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_o-\phi(x_o)|, \qquad |\xi-x_n|\leqslant \frac{q}{1-q}|x_n-x_{n-1}|. \qquad (5)$$

Доказ. Следува од теоремата 7, теоремата 8 и забелешката по неа од гл.2 за $M=[a,b]$, со вообичаената метрика.▯

Последица од Т.1. Ако $\phi:[a,b]\to[a,b]$ е диференцијабилна функција и $|\phi'(x)|\leqslant q<1$ за секој $x\in[a,b]$ тогаш равенката $x=\phi(x)$ има едно и само едно решение во $[a,b]$ што е лимес на низата (4) и точно е неравенството (5).

Доказ. Ако $x,y\in[a,b]$, тогаш според теоремата за средна вредност на функции (теорема на Лагранж) имаме:

$$|\phi(x)-\phi(y)|=|\phi'(c)|\,|x-y|\leqslant q|x-y|,$$

каде што c е меѓу x и y. Според тоа, исполнети се претпоставките на теоремата 1, па значи важат нејзините заклучоци.▯

Да забележиме дека Т.1 и нејзината последица остануваат точни ако во нив сегментот $[a,b]$ се замени со $\mathbb{R}$. Ќе разгледаме два примера.

Пример 2. Равенката $2x-\sqrt{x^2+1}=0$ е еквивалентна со равенката $x=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$. Ако ставиме $\phi(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$, тогаш добиваме дека $\phi(x)$ е дефинирана на $\mathbb{R}$ и

$$|\phi'(x)|=\frac{|x|}{2\sqrt{x^2+1}}<\frac{\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}}\leqslant\frac{1}{2}$$

за секој $x\in\mathbb{R}$, т.е. $\phi(x)$ ги задоволува условите од последицата на Т.1 (модифицирана: $\mathbb{R}$ наместо $[a,b]$). Според тоа, дадената равенка има единствено решение, коешто е лимес, на пример, на следнава низа

$$x_0=0,\ x_1=1/2,\ x_2=\sqrt{5}/4,\dots$$

Ако го земеме $x_2=\frac{\sqrt{5}}{4}$ за приближување до решението ξ на дадената равенка, тогаш за апсолутната грешка, според (5) ја имаме следнава оценка:

$$\left|\xi-\frac{\sqrt{5}}{4}\right|\leqslant\frac{1/4}{1-1/2}\cdot|0-1/2|=\frac{1}{4}.$$

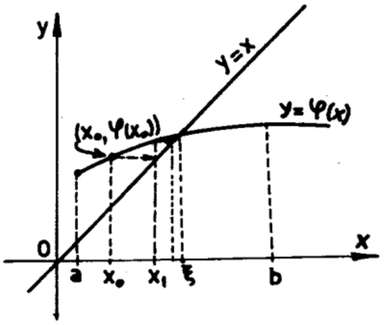
Пример 3. Ако ја напишеме равенката $e^{-x}-2x=0$ во облик $x=\frac{1}{2}e^{-x}$ ќе добиеме дека $\phi(x)=\frac{1}{2}e^{-x}\in[0,1]$ за секој $x\in[0,1]$. Потоа, за $x\in[0,1]$ имаме $\phi'(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}$, па $|\phi'(x)|\leqslant\frac{1}{2}<1$ за секој $x\in[0,1]$. Според последицата од Т.1, $e^{-x}-2x=0$ има единствено решение во сегментот $[0,1]$. Избирајќи го $x_0=0$, ја добиваме низата

$$x_1=\frac{1}{2}\,,\quad x_2=\frac{1}{2\sqrt{e}}\,,\ldots$$

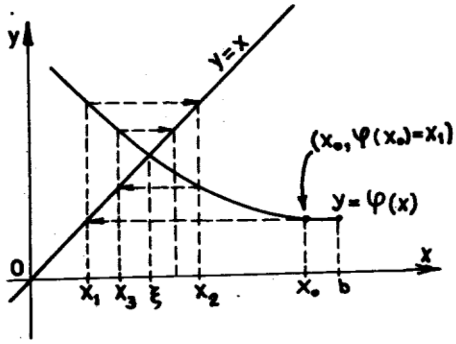
чијшто лимес е решението ξ на дадената равенка. Ако за приближна вредност на ξ ја земеме втората итерација $x_2=\frac{1}{2\sqrt{e}}$, тогаш за апсолутна грешка ја имаме следнава оценка:

$$\left|\xi-\frac{1}{2\sqrt{e}}\right|<\frac{1}{4}.$$

Да погледаме една геометриска илустрација на последицата од Т.1, земајќи да е $0\leqslant\phi'(x)<1$ (црт.7; тогаш итерираната низа е монотона) и $-1<\phi'(x)\leqslant 0$ (црт.8; тогаш итерираната низа осцилира).



Црт.7



Црт.8

Во случајот кога низата осцилира, покрај оценката

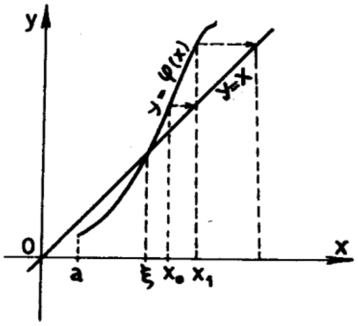
$$|\xi-x_n|\leqslant\frac{q}{1-q}\,|x_n-x_{n-1}|,$$

точна е и оценката

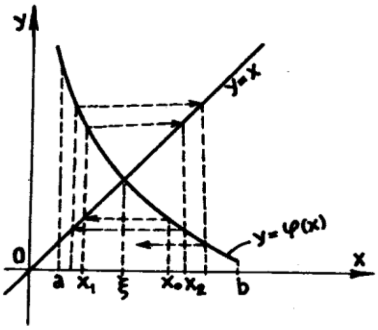
$$|\xi-x_n|\leqslant|x_n-x_{n-1}|. \tag{6}$$

Оценката (6) може да се користи и кога низата не осцилира, но само за $0<q\leqslant\frac{1}{2}$ (види ја и забелешката на стр.40).

Во случаите $\phi'(x)>1$ (црт.9) и $\phi'(x)<-1$ (црт.10) низата (4) е дивергентна иако равенката $x=\phi(x)$ може да има решение ξ.



Црт.9



Црт.10

Методот на последователни приближувања - еден од најважните методи за приближно решавање равенки, како што спомнавме порано - се карактеризира со следново:

- тој служи за уточнување на веќе локализирани реални корени (на алгебарски или трансцендентни равенки),
- програмирањето на пресметувањата и самите пресметувања зависат наполно само од видот на функцијата $\phi(x)$,
- ако при некој чекор се направи грешка (во пресметувањата) која не излегува надвор од почетниот интервал (a,b), тогаш таа грешка не влијае на конечниот резултат (т.е. методот сам "си врши исправки"); тоа иде оттаму што која било точка од интервалот (a,b) може да се земе за почетно приближување.

3.4. БРЗИНА НА КОНВЕРГЕНЦИЈАТА

Ако итерираната низа (на една функција) е конвергентна, природно се наметнува прашањето за "брзината" со која низата се приближува кон лимесот. Попрецизно, нека (a_n) е низа од реални броеви која конвергира кон бројот a и нека $a_n \neq a$ за сите n почнувајќи од некој индекс n_0. Ако

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}-a|}{|a_n-a|^p} = C \neq 0 \quad (p>0) \qquad (1)$$

тогаш ќе велиме дека низата (a_n) конвергира кон a со брзина p или дека брзината на конвергенцијата на (a_n) е p.

Бројот p за (a_n) е еднозначно определен. Навистина, нека лимесот (1) постои за некој број p. Ако r е број, таков што $0<r<p$, тогаш

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}-a|}{|a_n-a|^r}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}-a|}{|a_n-a|^p}\cdot|a_n-a|^{p-r}=C.0=0.$$

Слично се покажува дека за кој било број $r>p$ ќе имаме

$$\frac{|a_{n+1}-a|}{|a_n-a|^r}\to\infty, \qquad \text{кога} \qquad n\to\infty,$$

т.е. и за $r<p$ и за $r>p$ се нарушува условот (1) - да постои конечен лимес, различен од нула.

Ако p=1, брзината на конвергенцијата се вика *линеарна*, а ако p=2, таа се вика *квадратна*. (Да забележиме дека p не мора да е цел број.)

Пример 4. Низата (a_n), $a_n=n2^{-n}$ е конвергентна со лимес 0. (Навистина, $0<n.2^{-n}<1$ и $a_{n+1}<a_n$ за секој $n\in\mathbb{N}$ па (a_n) е конвергентна, а бидејќи $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2^{n+1}}$, следува дека лимесот е 0.) Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|(n+1)2^{-n-1}|}{|n2^{-n}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}\ (\neq 0),$$

следува дека низата $(n2^{-n})$ конвергира со линеарна брзина (p=1)

Пример 5. Нека низата (a_n) е зададена со следнава рекурентна врска

$$a_1=1, \quad a_{n+1}=a_n(2-ca_n), \quad n=1,2,\ldots$$

каде што $0<c<2$. Со математичка индукција се покажува лесно дека е точна формулата

$$a_n=\frac{1-(1-c)^{2^{n-1}}}{c}.$$

Бидејќи $|1-c|<1$, имаме $(1-c)^{2^{n-1}} \to 0$ кога $n \to \infty$, па значи $\lim_{n \to \infty} a_n = 1/c$.

Ќе покажеме дека (a_n) конвергира кон $1/c$ со брзина 2. Навистина,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}-1/c|}{|a_n-1/c|^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{c^2[1-(1-c)^{2^{n+1}}-1]}{c[1-(1-c)^{2^n}-1]^2} = c.$$

Следствено, брзината на конвергенцијата е квадратна.

Во врска со воведениот поим брзина на конвергенција ќе докажеме две теореми.

Теорема 2. Нека функцијата $\phi(x)$, дефинирана во $[a,b]$, прима вредности во $[a,b]$, т.е. $\phi:[a,b]\to[a,b]$, ги задоволува следниве услови:

(i) ϕ е контракција на $[a,b]$,

(ii) ϕ има непрекинат извод ϕ' во $[a,b]$,

(iii) $\phi'(x) \neq 0$ $(\forall x \in [a,b])$.

Тогаш низата $(x_n): x_n = \phi(x_{n-1})$, при произволно избран $x_0 \in [a,b]$, конвергира кон некој број $\xi \in [a,b]$ со линеарна брзина.

Доказ. Да забележиме дека при горните услови, ако $x_0 \neq \xi$, интеративниот процес не може да заврши во конечен број чекори. Навистина, ако n е првиот индекс за кој би било $\phi(x_n)=x_n$, тогаш $x_n=\phi(x_{n-1})=\phi(x_n)$, $x_{n-1} \neq x_n$, а според Лагранжовата теорема

$$0 = \phi(x_{n-1}) - \phi(x_n) = \phi'(c)(x_{n-1}-x_n)$$

за некој c меѓу x_{n-1} и x_n. Но, бидејќи $x_{n-1}-x_n \neq 0$, следува дека $\phi'(c)=0$, а тоа противречи на (iii). Значи, $\phi(x_n) \neq x$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

Да го означиме со d_n отстапувањето на x_n од ξ, т.е.

$$d_n = x_n - \xi.$$

Од горното разгледување следува дека $d_n \neq 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Од дефиницијата на d_n следува дека: низата (x_n) конвергира кон ξ со брзина 1 ако и само ако (d_n) конвергира кон нула со брзина 1.

Применувајќи ја уште еднаш Лагранжовата теорема, имаме:

$$d_{n+1} = x_{n+1} - \xi = \phi(x_n) - \phi(\xi) = \phi(\xi + d_n) - \phi(\xi) =$$

$$= \phi'(\xi + \theta_n d_n) . d_n ,$$

каде што $0 < \theta_n < 1$. Оттука $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \phi'(\xi + \theta_n d_n)$, па поради непрекинатоста на ϕ',

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \phi'(\xi) \quad (\neq 0).$$

Значи условот (1) важи при p=1, па теоремата е докажана.▯

Оваа теорема може да се обопшти на следниов начин:

Теорема 3. Нека $\phi:[a,b] \to [a,b]$ ги задоволува следниве услови:

(i) ϕ е контракција на $[a,b]$;

(ii) ϕ е непрекинато диференцијабилна к пати во $[a,b]$;

(iii) $\phi'(\xi) = \phi''(\xi) = \ldots = \phi^{(k-1)}(\xi) = 0, \ \phi^{(k)}(\xi) \neq 0,$

при што ξ е фиксната точка на ϕ во $[a,b]$.

Тогаш низата $(x_n): x_{n+1} = \phi(x_n)$ при произволно избран x_0 конвергира кон ξ со брзина к.

Доказ. Слично како во Т.2, треба да докажеме, всушност, дека низата (d_n), $d_n = x_n - \xi$, конвергира кон 0 со брзина к. Според Тајлоровата формула, имаме

$$d_{n+1} = x_{n+1} - \xi = \phi(x_n) - \phi(\xi) =$$

$$= \phi'(\xi) d_n + \frac{1}{2!} \phi''(\xi) d_n^2 + \ldots + \frac{1}{(k-1)!} \phi^{(k-1)}(\xi) d_n^{k-1} +$$

$$+ \frac{1}{k!} \phi^{(k)}(\xi + \theta_n d_n) d_n^k =$$

$$= \frac{1}{k!} \phi^{(k)}(\xi + \theta_n d_n) d_n^k , \qquad 0 < \theta_n < 1,$$

па

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k!}\phi^{(k)}(\xi+\theta_n d_n)=\frac{1}{k!}\phi^{(k)}(\xi)\neq 0$$

и теоремата е докажана. □

⌈** Ако итерираната низа $(x_n), x_n=\phi(x_{n-1})$ конвергира кон некој број ξ, тогаш при извесни услови за функцијата $\phi(x)$ може да се формира низа која побрзо од (x_n) конвергира кон ξ. Една таква можност дава таканаречениот Ејткинов Δ^2 - метод (или Δ^2 - процес).

Нека (x_n) е дадена низа реални броеви. Да ставиме:

$$\Delta x_n=x_{n+1}-x_n,\quad n=0,1,2,\ldots;$$

$$\Delta^2 x_n=\Delta(\Delta x_n)=\Delta x_{n+1}-\Delta x_n=$$

$$=x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n,$$

$$\Delta^{k+1}x_n=\Delta(\Delta^k x_n),\quad k=1,2,\ldots$$

Теорема А. (Ејткинов Δ^2-процес). Нека низата (x_n) конвергира кон ξ и нека се исполнети следниве услови:

$$d_n=x_n-\xi\neq 0 \text{ за секој } n=1,2,\ldots,$$

$$d_{n+1}=(A+\epsilon_n)d_n, \tag{2}$$

каде што $|A|<1$ и $\epsilon_n\to 0$ кога $n\to\infty$.

Тогаш низата (x_n') со општ член

$$x_n'=x_n-\frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n},\quad x_n'=x_n-\frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} \tag{3}$$

е дефинирана за доволно големи индекси n и

$$\frac{x_n'-\xi}{x_n-\xi}\to 0\quad (n\to\infty)$$

(т.е. (x_n') конвергира кон ξ побрзо отколку (x_n) кон ξ).

Доказ. Имаме:

$$d_{n+2} = (A+\epsilon_{n+1})d_{n+1} = (A+\epsilon_{n+1})(A+\epsilon_n)d_n,$$

па

$$\Delta^2 x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = (x_{n+2}-\xi) - 2(x_{n+1}-\xi) + (x_n-\xi) =$$
$$= d_{n+2} - 2d_{n+1} + d_n =$$
$$= [(A-1)^2 + \epsilon_n']d_n,$$

каде што

$$\epsilon_n' = A(\epsilon_n + \epsilon_{n+1}) - 2\epsilon_n + \epsilon_n\epsilon_{n+1}.$$

Бидејќи $\epsilon_n \to 0$, следува дека и

$$\epsilon_n' \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Според тоа, за доволно големи индекси n, на пример $n \geqslant n_0$, имаме $\Delta^2 x_n \neq 0$, па низата (x_n') е дефинирана за $n \geqslant n_0$. Бидејќи

$$\Delta x_n = \Delta d_n = (A+\epsilon_n-1)d_n,$$

$$x_n' - \xi = x_n - \xi - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} = d_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} =$$

$$= d_n - \frac{[(x_{n+1}-\xi)-(x_n-\xi)]^2}{\Delta^2 x_n} = d_n - \frac{[A-1+\epsilon]^2 d_n^2}{[(A-1)^2+\epsilon_n']d_n} =$$

$$= \frac{\epsilon_n' - 2\epsilon_n(A-1) - \epsilon_n^2}{(A-1)^2+\epsilon_n'}\, d_n,$$

поради $\epsilon_n \to 0$ и $\epsilon_n' \to 0$ кога $n \to \infty$, добиваме

$$\frac{x_n'-\xi}{d_n}=\frac{x_n'-\xi}{x_n-\xi}\to 0, \qquad n\to\infty,$$

како што се бараше.▯

Постапката,опишана со оваа теорема,се вика и забрзување на конвергенцијата. Од штотуку докажаната теорема се добива следнава последица која ја укажува можноста за забрзување на конвергенцијата на еден интеративен процес.

Теорема Б. Нека функцијата $\phi:[a,b]\to[a,b]$ е:

(i) непрекинато диференцијабилна на $[a,b]$,

(ii) $\phi'(x)\neq 0$ за секој $x\in[a,b]$,

(iii) $|\phi'(x)|\leqslant q<1 \qquad (\forall x\in[a,b])$.

Ако $x_0\in[a,b]$ е различен од фиксната точка ξ на $\phi(x)$, тогаш од низата $x_n=\phi(x_{n-1})$ побрзо конвергира низата (x_n') со општ член

$$x_n'=x_n-\frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}.$$

Доказ. Како што покажавме во доказот на Т.2, направените претпоставки обезбедуваат $d_n\neq 0$ за секој $n=1,2,\ldots$; покрај тоа, важи (2) ставајќи $A=\phi'(\xi)$. Следствено, важи заклучокот на Т.А, па значи и на Т.Б.▯

За добивање на побрзата низа (x_n') при решавање равенки од видот $x=\phi(x)$ без да биде употребена целата низа (x_n) се користи следнава модификација на Ејткиновата процедура. Се избира почетна приближна вредност x_0 и се пресметуваат првите две итерации $x_1=\phi(x_0)$, $x_2=\phi(x_1)$, а потоа се применува формулата (3) на x_0,x_1 и x_2:

$$x_0'=x_0-\frac{(x_1-x_0)^2}{x_2-2x_1+x_0}.$$

Бројот $x_0'=x_0^{(1)}$ се зема за нова почетна вредност на две нови итерации. Откако ќе се пресметаат $x_1^{(1)}=\phi(x_0^{(1)})$, $x_2^{(1)}=\phi(x_1^{(1)})$, пак се применува Ејткиновата формула (3) и се добива "забрзана" вредност $x_0^{(2)}$, која од своја страна се употребува за почеток на ново повторување итн. (Ако се случи именителот во Ејткиновата формула да е нула, тогаш се става $x_0^{(k+1)}=x_0^{(k)}$ и всушност, се завршува итерацијата.) Шематски тоа изгледа вака:

$$\left.\begin{matrix}x_0^{(0)}\\ x_1^{(0)}\\ x_2^{(0)}\end{matrix}\right\}\nearrow\ \left.\begin{matrix}x_0^{(1)}\\ x_1^{(1)}\\ x_2^{(1)}\end{matrix}\right\}\nearrow\ \left.\begin{matrix}x_0^{(2)}\\ x_1^{(2)}\\ x_2^{(2)}\end{matrix}\right\}\nearrow\ \cdots$$

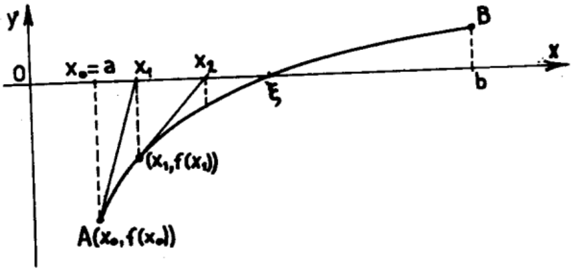
**|

3.5. ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД

Еден од методите за уточнување на корените на равенките од видот $f(x)=0$, без претходно тие да се трансформираат во еквивалентни равенки од видот $x=\phi(x)$, како што бараше методот на последователни приближувања, е методот на Њутн-Рафсон.

Ќе ја појасниме најнапред, идејата на Њутн-Рафсоновиот метод геометриски. За функцијата $f(x)$ ќе претпоставиме дека е диференцијабилна во $[a,b]$ и дека $f'(x)\neq 0$ за секој $x\in[a,b]$, а за равенката $f(x)=0$ ќе претпоставиме дека има единствено решение ξ во (a,b). Нека е, на пример, графикот на $y=f(x)$ во $[a,b]$ како на црт. 11. Тогаш со

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{1}$$



Црт.11

за $x_0=a$, е дадена една низа од уточнувања на решението ξ, којашто може да се добие на следниов начин: ја пишуваме, прво, равенката на тангентата на кривата $y=f(x)$ во $(x_0,f(x_0))$:

$$Y-f(x_0)=f'(x_0)(X-x_0)$$

и, ставајќи $Y=0$, ја наоѓаме апсцисата на нејзината пресечна точка со оската $0x$ (црт.11):

$$X=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\quad \text{т.е.}\quad x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

и x_1 ја земаме за прво приближување кон коренот ξ.

Потоа, повлекуваме тангента на кривата $y=f(x)$ во точката $(x_1,f(x_1))$ и ја наоѓаме апсцисата на нејзината пресечна точка со оската 0x:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} ,$$

што претставува второ приближување кон ξ. Општо, за $(n+1)$-то приближување се добива формулата (1).

Од геометриски причини е јасно дека така формираниот итеративен процес е конвергентен. Ќе дадеме строг доказ на тој факт, т.е. сега ќе поставиме такви услови што ќе гарантираат дека Њутн-Рафсоновиот метод конвергира и притоа претпоставките лесно се проверуваат.

Теорема 4. Нека функцијата $f(x)$ ги има следниве својства на сегментот $[a,b]$:

(i) $f(a)f(b) < 0$,

(ii) $f(x)$ има непрекинат втор извод на $[a,b]$,

(iii) $f'(x)$ и $f''(x)$ имаат постојани знаци и не се анулираат на $[a,b]$.

Ако x_0 е оној од краевите на сегментот $[a,b]$ за кој $f(x_0).f''(x) > 0$, тогаш итерираната низа (1) е конвергентна и нејзиниот лимес ξ е единственото решение на равенката $f(x)=0$ во сегментот $[a,b]$.

Доказ. Од претпоставката $f(a).f(b) < 0$ и од непрекинатоста на $f(x)$ следува дека $f(x)=0$ има барем еден корен во (a,b), а бидејќи $f'(x)$ има постојан знак, $f(x)$ е строго монотона на $[a,b]$, па не може да постојат повеќе корени од еден.

Да го означиме решението со ξ и да земеме, на пример:

1°. $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f''(x) < 0$.

Тогаш мора да е $f'(x) > 0$, зашто во спротивно би ја добиле противречноста $0 < f(b) \leqslant f(a) < 0$. Во овој случај, значи ќе земеме $x_0 = a$ (како на црт.12). Ќе покажеме дека: 1) $x_n < \xi$ и 2) $x_n < x_{n+1}$ за секој $n \in \mathbf{N}$, а од тоа ќе следува конвергенцијата на низата (x_n).

Бидејќи $\xi \in (a,b)$, следува дека $x_o = a < \xi$; да претпоставиме дека $x_n < \xi$; тогаш добиваме:

$$-f(x_n) = f(\xi) - f(x_n) = f'(c_n)(\xi - x_n),$$

каде што $x_n < c_n < \xi$. Поради $f''(x) < 0$, добиваме

$$-f(x_n) = f'(c_n)(\xi - x_n) < f'(x_n)(\xi - x_n)$$

а оттука

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < \xi,$$

па бидејќи

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

следува

$$x_{n+1} < \xi.$$

Значи, според принципот на математичката индукција следува дека $x_n < \xi$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

Потоа, поради $f(a) < 0$ и $f'(a) > 0$ имаме

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} > a = x_o,$$

па 2) е точно за $n=0$. Индуктивно, ако $x_n < x_{n+1}$, добиваме:

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{f'(x_{n+1})} > x_{n+1}$$

зашто $f'(x_{n+1}) > 0$, а $f(x_{n+1}) < 0$; притоа, последното следува од $x_{n+1} < \xi$. (Имено, кога би било $f(x_{n+1}) > 0$, тогаш равенката $f(x)=0$ би имала корен и во сегментот $[a, x_{n+1}]$, што не е можно, зашто ξ е нејзин единствен корен во $[a,b]$.)

Со тоа е докажано дека низата (x_n) е конвергентна; нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi^*$. Останува да покажеме дека $\xi^* = \xi$. Ако побараме лимеси од двете страни на равенката

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

кога $n \to \infty$,ќе добиеме:

$$\xi^* = \xi^* - \frac{f(\xi^*)}{f'(\xi^*)}$$

т.е. $f(\xi^*)=0$. Од единственоста на коренот ξ на $f(x)=0$ следува дека $\xi^* = \xi$.▯

Покрај 1°, можни се уште овие случаи:

2°. $f(a)>0$, $f(b)<0$, $f''(x)>0$,

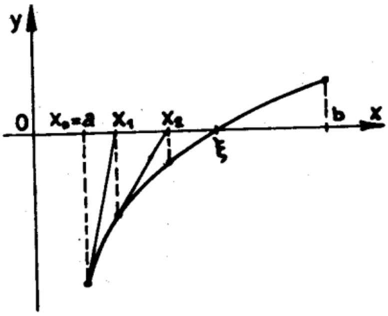
3°. $f(a)>0$, $f(b)<0$, $f''(x)<0$,

4°. $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f''(x)>0$.

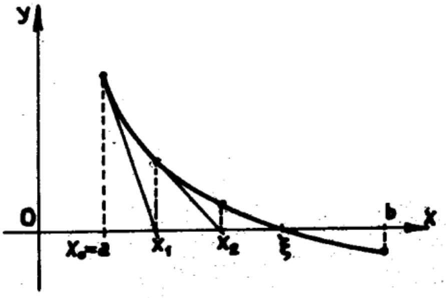
Доказот за овие случаи може да се спроведе на ист начин како за 1° или пак тие можат да се сведат на разгледаниот ако наместо $f(x)$ се разгледа за 2°. $-f(x)$, за 3°. $f_1(x)=f(-x)$, за 4°. $f_2(x)=-f(-x)$.▯

На оваа теорема може да ѝ се даде следнава геометриска интерпретација:

1°. $f''(x)<0$, $f(a)<0$ 2°. $f''(x)>0$, $f(a)>0$

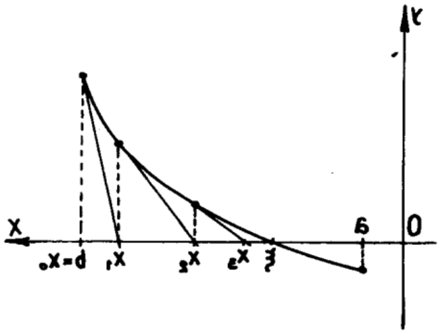


Црт.12



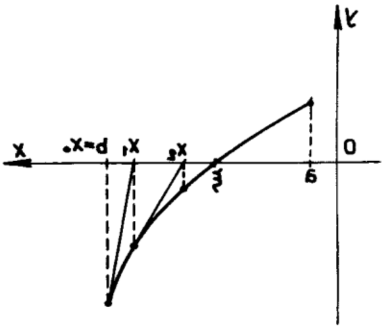
Црт.13

4°. $f''(x)>0,\ f(a)<0$



Црт.15

3°. $f''(x)<0,\ f(a)>0$



Црт.14

3.6. КРАТКА АНАЛИЗА НА СЛУЧАЈОТ $f'(X_0)=0$

Во Т.4 беше претпоставено дека $f'(x)\neq 0$ за секој $x\in[a,b]$. Да видиме што се случува ако за некоја точка $x_0\in(a,b)$ имаме $f'(x_0)=0$. Возможни се два случаја: $f(x_0)=0$, $f(x_0)\neq 0$.

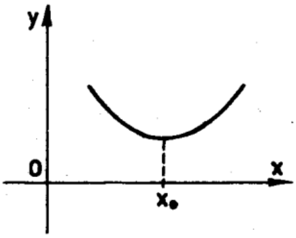
а) $f(x_0)=0$; според Тајлоровата формула имаме

$$f(x)=\frac{1}{2!}(x-x_0)^2 f''(x_0+\theta(x-x_0)),\quad 0<\theta<1,$$

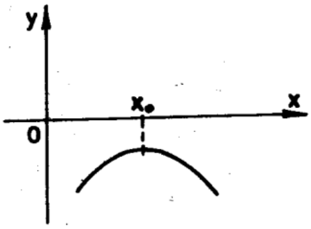
па бидејќи $f''(x)\neq 0$, добиваме дека $x=x_0$ е двоен корен на равенката $f(x)=0$.

б) $f(x_0)\neq 0$; бидејќи $f''(x)\neq 0$ за секој $x\in[a,b]$, следува дека $f''(x_0)\neq 0$. Според знакот на $f(x_0).f''(x_0)$, ги имаме следниве две можности:

$б_1$) $f(x_0)f''(x_0)>0$; при $f(x_0)>0, f''(x_0)>0$, во точката $(x_0,f(x_0))$ имаме позитивен минимум (црт.16), а при $f(x_0)<0$ и $f''(x_0)<0$ во $(x_0,f(x_0))$ имаме негативен максимум (црт.17).



Црт.16

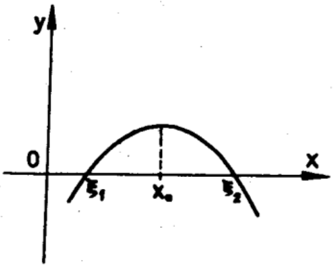


Црт.17

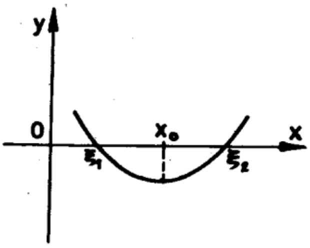
Така, во близина на x_0, равенката $f(x)=0$ нема решение.

б$_2$) $f(x_0)f''(x_0)<0$; при $f(x_0)>0$, $f''(x_0)<0$

ја имаме ситуацијата на црт.18, а при $f(x_0)<0$ и $f''(x_0)>0$ - ситуацијата на црт.19.



Црт.18



Црт.19

Сега, во близина на x_0 може да се очекуваат две решенија на равенката $f(x)=0$. Ако ја напишеме Тајлоровата формула за $f(x)$ во околина на x_0, ќе имаме

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2f''(x_0+\theta(x-x_0)),\ 0<\theta<1,$$

т.е. поради непрекинатоста на f'',

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{1}{2}\ (x-x_0)^2f''(x_0),$$

од каде што, за равенката $f(x)=0$, ги добиваме следниве приближни вредности на двата корена ξ_1 и ξ_2 што се во близина на x_0:

$$\xi_1 \approx x_0 - \sqrt{-\frac{2f(x_0)}{f''(x_0)}}, \quad \xi_2 \approx x_0 + \sqrt{-\frac{2f(x_0)}{f''(x_0)}} .$$

Овие приближни решенија може да се подобруваат применувајќи некоја постапка на секој од сегментите $[\xi_1, x_0]$, $[x_0, \xi_2]$.

3.7. НЕКОЛКУ ПРИМЕНИ НА ЊУТН-РАФСОНОВИОТ МЕТОД

Пресметување квадратни корени. Нека c е даден број, $c>0$, сакаме да го пресметаме $\sqrt{c}$. Ние можеме да сметаме дека се бара решение на равенката $f(x)=0$, каде што

$$f(x) = x^2 - c \qquad (x>0)$$

Претпоставките од Т.4 за функцијата $f(x)$ во сегментот $[a,b]$ $0<a<\sqrt{c}<b$, се исполнети (овде го имаме случајот 4^o), па Њутн-Рафсоновиот процес е

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n},$$

т.е.

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n}) \tag{1}$$

конвергира кон $\sqrt{c}$.

Пресметување к-ти корени. Ако c е даден позитивен реален број, а k природен број поголем од единица, тогаш за пресметувањето на $\sqrt[k]{c}$ можеме да постапиме како погоре, за $\sqrt{c}$. Имено, ја разгледуваме равенката $f(x)=0$, каде што $f(x)=x^k-c$. Њутн-Рафсоновиот метод за овој случај дава

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - c}{kx_n^{k-1}}$$

т.е.

$$x_{n+1} = (1-\frac{1}{k})x_n + \frac{1}{k}\, cx_n^{1-k}. \tag{2}$$

И во овој случај, претпоставките на Т.4 се исполнети во секој сегмент $[a,b]$ ако $0<a<\sqrt[k]{c}<b$ за доволно голем b ,па низата определена со (2) конвергира кон $\sqrt[k]{c}$.

<u>Пресметување реципрочни вредности без делење.</u> Ако сакаме да ја решиме равенката

$$f(x)=\frac{1}{x}-c=0,$$

c е даден позитивен број, тогаш нејзиното решение се сведува на наоѓање реципрочната вредност од c, x=1/c. Њутн-Рафсоновиот метод дава:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{1/x_n-c}{-1/x_n^2}=x_n+(1-cx_n)x_n,$$

т.е.

$$x_{n+1}=x_n(2-cx_n). \tag{3}$$

За $x>0$ имаме $f'(x)=-1/x^2<0$, $f''(x)=2/x^3>0$ и за секој интервал $[a,b]$, $0<a<1/c<b$, имаме $f(a)>0$, $f(b)<0$, па го имаме случајот 2° од Т.4. Така, почнувајќи со $x_o=a$, низата (x_n) определена со (3) конвергира кон 1/c. Да забележиме дека за добивање на низата не се потребни никакви делења.

<u>Пример 6.</u> Да најдеме приближна вредност на 1/3 без делење, почнувајќи ја Њутн-Рафсоновата итерација со $x_o=0,3$. Имаме:

$x_o=0,3$	$2-3x_o=1,1$
$x_1=0,33$	$2-3x_1=1,01$
$x_2=0,3333$	$2-3x_2=1,0001$
$x_3=0,3333333$	$2-3x_4=1,00000001$

Како што гледаме, уште со третото повторување x_3 се постигнува (доволно) голема точност.

3.8. ОЦЕНКА НА ТОЧНОСТА ПРИ ЊУТН-РАФСОНОВИОТ МЕТОД

Ќе го разгледаме и прашањето за оценување точноста на n-тото приближување при Њутн-Рафсоновиот метод.

Ние покажавме во Т.4 дека итерарната низа (x_n), определена со (1) од §3.5 е монотона. Ако (x_n) монотоно расте, тогаш поради $x_n<\xi<b$ добиваме

$$|\xi-x_n| \leqslant b-x_n, \tag{1}$$

а ако (x_n) монотоно опаѓа, тогаш поради $a < \xi < x_n$ имаме

$$|\xi-x_n| \leqslant x_n-a. \tag{2}$$

Друга груба оценка за точноста на n-тото приближување може да добиеме од неравенството

$$x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < \xi, \qquad x_n-\xi<\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

(добиено во доказот на Т.4).Имено, бидејќи $f'(x) \neq 0$ во $[a,b]$, можеме да ставиме $|f'(x)| \geqslant r > 0$, па

$$|\xi-x_n| \leqslant \frac{f(x_n)}{r}. \tag{3}$$

Ќе изведеме уште една оценка за грешката. Користејќи ја Тајлоровата формула, добиваме

$$f(x_n) = f(x_{n-1})+(x_n-x_{n-1})f'(x_{n-1})+\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})^2f''(c_n),$$

каде што c_n е меѓу x_n и x_{n-1}. Оттука, поради

$$f(x_{n-1}) + (x_n-x_{n-1})f'(x_{n-1}) = 0$$

и, поради ограниченоста на вториот извод во $[a,b]$, т.е. $|f''(x)| \leqslant s$, добиваме

$$|f(x_n)| \leqslant \frac{1}{2} s(x_n-x_{n-1})^2.$$

Користејќи го ова неравенство, (3) добива вид

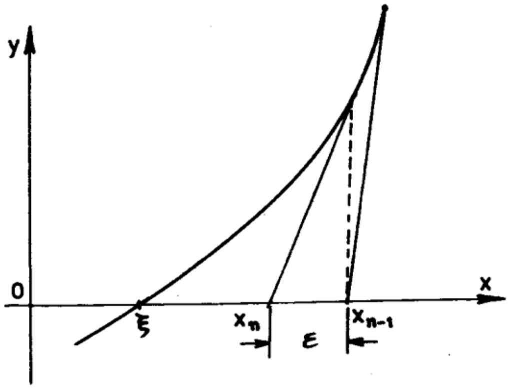
$$|\xi- x_n| \leqslant \frac{s}{2r}(x_n-x_{n-1})^2.$$

Ако процесот конвергира, тогаш $x_n-x_{n-1} \to 0$, па за доволно големи n последното неравенство добива вид

$$|\xi- x_n| \leqslant |x_n - x_{n-1}|. \tag{4}$$

(Понекогаш, при практични пресметувања, се зема $\xi = x_n$ со точност до ϵ кога за две последователни приближувања се добие

$x_{n-1}=x_n$ со точност до ϵ. Со едноставен цртеж можеме да се увериме дека тоа во општ случај не е точно; црт.20.)



Црт.20

<u>Пример 7.</u> Да го пресметаме коренот на равенката $f(x)=\ln x+x-3=0$ со помош на Њутн-Рафсоновиот метод заокружувајќи при пресметувањата на четвртото децимално место.

Видејќи линиите $y=\ln x$ и $y=3-x$ имаат само еден пресек чија апсциса е во сегментот $[1,3]$, следува дека равенката $f(x)=0$ има само еден корен ξ. За почетно приближување во

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\ln x_n+x_n-3.}{\frac{1}{x_n}+1}$$

можеме да гоземеме $x_0=1$. За поэгодно, x_{n+1} ќе го напишеме во форма:

$$x_{n+1}=\frac{(4-\ln x_n)x_n}{1+x_n}$$

и ќе ги вршиме пресметувањата според приведената шема.

Ако земеме $\xi\approx x_4=2,2079$, за грешката добиваме:

$$|\xi-x_4|\leqslant|x_4-x_3|\leqslant 0,0001.$$

n	x_n (1)	$\ln x_n$ (2)	$4-\ln x_n$ (3)	$(4-\ln x_n)x_n$ (4)	$1+x_n$ (5)	(4):(5)
0	1	0	4	4	2	2
1	2	0,6931	3,3069	6,6138	3	2,2046
2	2,2046	0,7905	3,2095	7,0757	3,2046	2,2080
3	2,2080	0,7921	3,2079	7,0830	3,2080	2,2079
4	2,2079	0,7920	3,2080	7,0829	3,2079	2,2079
5	2,2079					

** На крајот, како заклучок, ќе ги наведеме главните особености на Њутн-Рафсоновиот метод. Њутн-Рафсоновиот метод се користи за уточнување на изолирани корени на равенки со една непозната. Поради геометриската интерпретација, овој метод се вика уште и метод на тангенти.
Од формулата (3) е јасно дека овој метод е удобен кога $f'(x_n)$ не се блиски до нулата и кога x_n се блиски до коренот ξ. Во спротивно, пресметувањата можат да траат долго, а во некои случаи може да завршат без резултат (на пр. кога кривата $y=f(x)$ е скоро паралелна со оската 0x во близина на нивната пресечна точка).

Може да се покаже дека, при условите на теоремата 3, брзината на Њутн-Рафсоновиот метод е квадратна (ако се претпостави дека постои $f'''(x)$, тогаш доказот на тоа тврдење следува од теоремата 3, применета на функцијата

$$\phi(x)=x-f(x)/f'(x) .$$

Брзината на конвергенцијата на овој метод при повеќекратен корен $(f'(\xi)=0)$ е 1, додека во специјалниот случај $f''(\xi)=0$, $f'(\xi)\neq 0$ таа, пак, е $\geqslant 3$. **

3.9. МЕТОД НА ТЕТИВИ

Методот на тетиви е еден од најстарите итеративни методи за приближно решавање равенки од видот $f(x)=0$. Тој се користи за уточнување на приближен корен што е веќе издвоен на некој сегмент $[a,b]$. Ќе го формулираме во следнава теорема:

Теорема 5. Нека функцијата $f(x)$ ги има следниве својства на сегментот $[a,b]$:

(i) $f(a).f(b)<0$,

(ii) $f(x)$ има непрекинат втор извод на $[a,b]$;

(iii) $f'(x)$ и $f''(x)$ имаат постојан знак на $[a,b]$.

Тогаш равенката $f(x)=0$ има единствено решение во $[a,b]$ и тоа е лимес на низата (x_n), определена со:

а) $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(a)}(x_n-a), \quad x_0 = b, \qquad f(b)f''(x) < 0.$$

б) $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}(b-x_n), \quad x_0 = a, \qquad f(a)f''(x) < 0.$$

Процесот определен со а) и б) се вика метод на тетиви.

Доказ. Доказот дека равенката $f(x)=0$ при направените претпоставки има единствено решение е даден во Т.4. Да го означиме тоа решение со ξ и да го разгледаме случајот:

1°. $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f''(x) \leqslant 0$; тогаш $f'(x) > 0$ (земаме $f'(x) \neq 0$, а за случајот $f'(x)=0$ за некој $x \in [a,b]$ постапуваме како и при Њутн-Рафсоновиот метод). При овие претпоставки треба, значи, да покажеме дека низата (x_n), определена со а) е конвергентна и дека нејзиниот лимес е ξ.

Пред сè, јасно е дека $\xi < b = x_0$. Да претпоставиме дека $\xi \leqslant x_n$. Тогаш, земајќи ја равенката

$$x_{n+1} = a - \frac{f(a)}{f(x_n)-f(a)} \cdot (x_n-a)$$

наместо а), со која е еквивалентна, ќе добиеме:

$$-f(a) = f(\xi)-f(a) = f'(c_n)(\xi-a),$$

каде што $a < c_n < \xi < x_n$. Од $f''(x) \leq 0$ следува дека функцијата $f'(x)$ монотоно опаѓа, па од $f'(c_n) \geq f'(x_n)$, следува

$$-f(\alpha) \geqslant f'(x_n)(\xi-\alpha),$$

т.е.

$$\xi \leqslant \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(x_n)}. \qquad (1)$$

Сега, земајќи го предвид (1) и фактот што $f''(x) \leqslant 0$, добиваме:

$$x_{n+1} = a - \frac{f(a)}{f(x_n)-f(a)}(x_n-a) = a - \frac{f(a)(x_n-a)}{f'(e_n)(x_n-a)} =$$

$$= a - \frac{f(a)}{f'(e_n)} \geqslant a - \frac{f(a)}{f'(x_n)} \geqslant \xi, \quad e_n \in (a, x_n).$$

Со тоа е докажано дека низата (x_n) е минорирана.

Ќе покажеме уште дека (x_n) монотоно не расте. Бидејќи $x_n \geqslant \xi$ следува дека $f(x_n) \geqslant 0$, зашто во спротивниот случај во сегментот $[x_n, b]$ би имале корен на $f(x)$, а тоа противречи на единственоста на коренот ξ во $[a,b]$. Земајќи предвид дека е и $f'(x) > 0$, имаме

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(c_n)} \leqslant x_n,$$

што значи низата (x_n) не расте. Со тоа докажавме дека низата (x_n) е конвергентна.

Ако $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi^*$, тогаш од а) следува дека

$$\xi^* = \xi^* - \frac{f(\xi^*)}{f(\xi^*)-f(a)}(\xi^* - a),$$

т.е. $f(\xi^*)=0$, а поради единственоста на ξ во $[a,b]$ добиваме $\xi^* = \xi$.

Доказот за другите случаи:

2° $f(a)>0$, $f(b)<0$, $f''(x) \geqslant 0$,

3° $f(a)>0$, $f(b)<0$, $f''(x) \leqslant 0$,

4° $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f''(x) \geqslant 0$,

е ист како за случајот 1° (или, ако наместо $f(x)=0$ се разгледа равенката $-f(x)=0$, тогаш 2° се сведува на 1°, а 4° се сведува на 3°). ▯

До формулата а) во Т.5 геометриски се доаѓа на следниов начин. Ја пишуваме равенката на тетивата АВ (црт.21):

$$Y-f(b)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}(X-b),$$

па ставајќи $Y=0$, ја добиваме апсцисата на пресечната точка со оската $0x$:

$$X=b-\frac{f(b)}{f(b)-f(a)}(b-a).$$

Ставајќи $b=x_0$ и $X=x_1$, добиваме

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f(x_0)-f(a)}(x_0-a)$$

и x_1 го земаме за прво приближување до коренот ξ. Потоа, ја пишуваме равенката на тетивата $AB_1, B_1(x_1, f(x_1))$:

$$Y-f(x_1)=\frac{f(a)-f(x_1)}{a-x_1}(X-x_1)$$

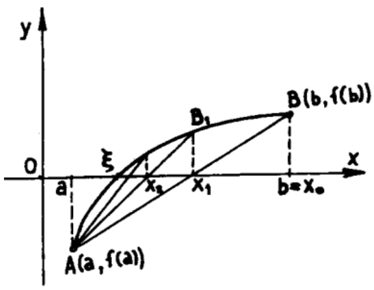
и апсцисата на нејзината пресечна точка со $0x$,

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(a)}(x_1-a),$$

ја земаме за второ приближување кон ξ итн.

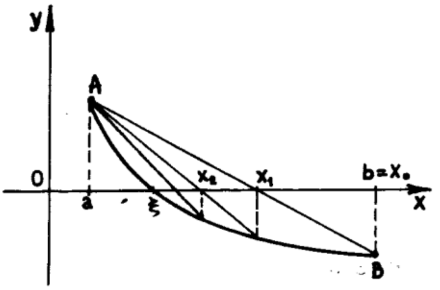
На цртежите 21 - 24 е дадена геометриска интерпретација на методот на тетиви (приближувањето кон коренот ξ се врши преку пресечните точки на тетивите со оската $0x$, па оттаму и името на овој метод).

1° $f''(x)<0$
$f(a)<0$, $f(b)>0$



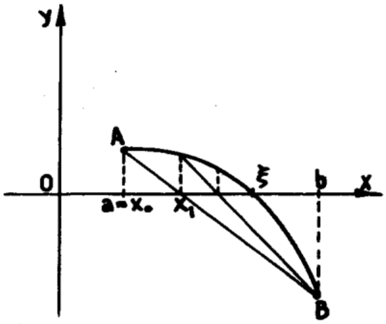
Црт.21

2° $f''(x)>0$
$f(a)>0$, $f(b)<0$



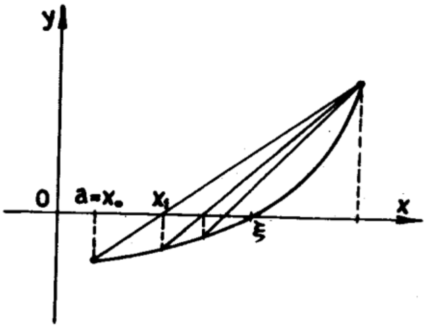
Црт.22

3° $f''(x)<0$
$f(a)>0,\ f(b)<0$



Црт.23

4° $f''(x)>0$
$f(a)<0,\ f(b)>0$



Црт.24

Да забележиме дека во 1° и 2° левата крајна точка на графикот е постојана во итеративниот процес, а во 3° и 4° - десната.

За оценка на грешката на n-тото приближување се користат истите формули како во Њутн-Рафсоновиот метод (§3.8).

** Ќе ја докажеме формулата аналогна на (4) од §3.8. Притоа, ќе го разгледуваме само случајот а), зашто расудувањата за б) се слични.

Бидејќи $f'(x)$ е, според (ii), непрекината на $[a,b]$, следува дека постојат константи m и M, такви што

$$0<m\leqslant|f'(x)|\leqslant M<+\infty \quad \forall x\in[a,b].$$

Од формулата а) во Т.5 имаме:

$$f(\xi)-f(x_{n-1})=\frac{f(x_{n-1})-f(a)}{x_{n-1}-a}(x_n-x_{n-1}).$$

Применувајќи ја Лагранжовата теорема од двете страни на ова равенство, добиваме

$$(\xi-x_{n-1})f'(\xi_{n-1})=(x_n-x_{n-1})f'(\eta_{n-1}),$$

каде што ξ_{n-1} е меѓу ξ и x_{n-1} а η_{n-1} е меѓу x_{n-1} и а, па оттука

$$|\xi-x_n| = \frac{|f'(\eta_{n-1})-f'(\xi_{n-1})|}{|f'(\xi_{n-1})|}\,|x_n-x_{n-1}|.$$

Имајќи предвид дека ξ_{n-1} и η_{n-1} се во $[a,b]$ и дека $f'(x)$ има постојан знак во $[a,b]$ добиваме

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{M-m}{m}\,|x_n-x_{n-1}|$$

Ако сегментот $[a,b]$ е избран доволно мал, така што $M \leqslant 2m$, тогаш последното неравенство добива вид

$$|\xi-x_n| \leqslant |x_n-x_{n-1}|. \qquad **|$$

Пример 8. Да се најде приближна вредност на коренот на равенката

$$f(x) \equiv x^3 - x^2 - 2 = 0$$

со помош на методот на тетиви.

Бидејќи параболите $y=x^3$ и $y=x^2+2$ имаат само еден пресек, следува дека дадената равенка има само еден реален корен ξ; лесно се увидува дека тој се наоѓа во сегментот $[1,2]$, зашто $f(1)<0$, $f(2)>0$. Покрај тоа, $f'(x)=3x^2-2x$ и $f''(x)=6x-2$ имаат постојан знак во $[1,2]$ – тие се позитивни, па значи го имаме случајот 4°, кога останува постојан десниот крај. Ќе најдеме неколку последователни приближувања според соодветната формула б) од Т.5:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2-f(x_n)}(2-x_n), \qquad x_0 = 1,$$

$f(x_0) = -2$, $\quad x_1 = 1,5;$

$f(x_1) = -0,875$, $\quad x_2 = 1,652;$

$f(x_2) = -0,2196$, $\quad x_3 = 1,687;$

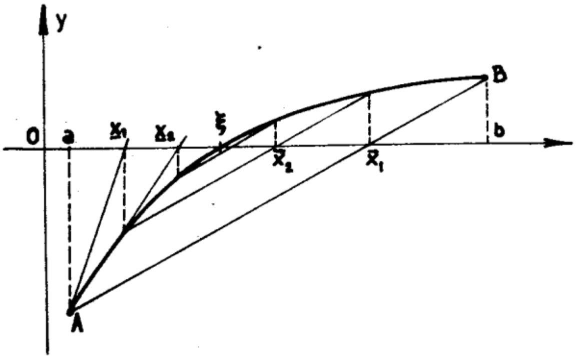
$f(x_3) = -0,047$. $\quad x_4 = 1,694.$

Земајќи $\xi \approx x_4 = 1,694$, добиваме дека

$$|\xi - x_4| \leqslant |x_4 - x_3| \leqslant 0,007.$$

3.10. КОМБИНИРАН МЕТОД

Да ги споредиме Њутн-Рафсоновиот метод и методот на тетиви, на пример во случајот кога $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f''(x) < 0$ (Црт.25). Додека приближувањата $\underline{x}_n$ според првиот метод одат кон коренот ξ одлево, приближувањата $\bar{x}_n$ по методот на тетиви одат



Сл.25

кон ξ оддесно. Во практиката се користат двата метода едновремено, така што од сегментот $[a,b]$ се преминува на сегментот $[\underline{x}_1, \bar{x}_1]$, потоа, по ред, на $[\underline{x}_2, \bar{x}_2], \dots, [\underline{x}_n, \bar{x}_n], \dots$ Така се добиваат две (итеративни) низи: $(\underline{x}_n)$ - добиена по методот на тангенти и $(\bar{x}_n)$ - добиена по методот на тетиви. Земајќи го $x_n = \frac{1}{2}(\underline{x}_n + \bar{x}_n)$ за приближно решение на равенката $f(x)=0$ ќе направиме грешка:

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{1}{2}\,(\bar{x}_n - \underline{x}_n).$$

Ќе го илустрираме овој метод со еден пример.

<u>Пример 9.</u> Да најдеме по неколку членови од итерираните низи (a_n) и (b_n) добиени со тетивниот и тангентниот метод за $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 5 = 0$.

§3.10

Ставајќи $y=\frac{1}{3}x^3$ и $y=5-x$, геометриски лесно увидуваме дека равенката $f(x)=0$ има единствен реален корен $\xi\in[2;2,5]$. Бидејќи

$$f(a)\approx -0,334<0,\ f(2,5)\approx 2,65>0,\ f'(x)=x^2+1,\ f''(x)=2x>0$$

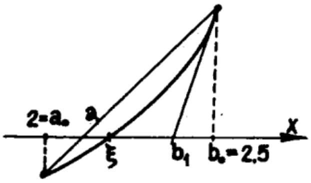
на тој сегмент, т.е. $f(2).f''(x)\leqslant 0$, следува дека десниот крај останува постојан при тетивниот метод (црт.26):

$$a_{n+1}\approx a_n-\frac{f(a_n)}{2,65-f(a_n)}(2,5-a_n),$$

со $a_0=2$. Тангентниот метод:

$$b_{n+1}=b_n-\frac{f(b_n)}{f'(b_n)}$$

почнува со $b_0=2,5$. Резултатите ќе ги сместиме во шемата



Црт.26

n	0	1	2	3
a_n	2	2,05	2,06	2,064
b_n	2,25	2,13	2,067	2,065

Земајќи $\xi\approx a_3$, за грешката имаме: $|\xi-a_3|\leqslant\frac{1}{2}|a_3-b_3|\leqslant 0,0005$.

3.11.ПРИБЛИЖНИ КОРЕНИ НА ПОЛИНОМИ

Изнесените методи за приближно решавање равенки од видот $f(x)=0$ може да се искористат и за приближно одредување корени на полиноми. Но, полиномите имаат и некои посебни својства, па овде ќе се задржиме на две посебни задачи за нив:

- одредување граници во кои можат да се содржат корените на даден полином и

- одредување погоден начин за пресметување вредности на полиномите.

Нека е даден полиномот

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \quad a_0\neq 0. \quad (1)$$

Ќе го разгледаме проблемот за определување граници само за позитивните реални корени на (1), зашто одредувањето на границите на неговите негативни корени се сведува на претходниот проблем за полиномот P(-x); имено, ако се λ и μ, $\lambda<\mu$, границите на позитивните корени на P(-x), тогаш $-\mu$ и $-\lambda$ се границите на негативните корени на P(x).

Прво ќе ја докажеме следнава теорема:

Теорема 6. Бројот $1+\sqrt[k]{B/a_0}$ е мајорант за позитивните корени на P(x) при што $a_0>0$, $a_{\text{н}}$ е првиот негативен коефициент на P(x) и B најголемиот (по апсолутна вредност) негативен коефициент.

Доказ. Претпоставката $a_0>0$ не претставува некое ограничување, зашто равенките P(x)=0 и -P(x)=0 се еквивалентни, така што корените на P(X) и -P(x) се исти, па ако $a_0<0$ во P(x), тогаш ќе го разгледаме полиномот -P(x).

Ако x_0 е корен на P(x), тогаш ќе биде точно равенството

$$a_0x_0^n+\ldots=-a_kx_0^{n-k}-\ldots, \quad (2)$$

каде што на левата страна се членовите на P(x) со позитивни коефициенти, а на десната страна - членовите со негативни коефициенти. Ако

$$x_0>1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}},$$

ќе добиеме дека $(x_0-1)^k>\frac{B}{a_0}$, а оттука

$$a_0x_0^n>B\frac{x_0^n}{(x_0-1)^k}. \quad (3)$$

Да ја земеме десната страна на (2):

$$-a_k x_o^{n-k} - \ldots \leqslant B(x_o^{n-k} + \ldots) \leqslant B(x_o^{n-k} + x_o^{n-k-1} + \ldots + x_o + 1) =$$

$$= B\frac{x_o^{n-k+1} - 1}{x_o - 1} < B\frac{x_o^{n-k+1}}{x_o - 1}.$$

Од $x_o > 1$ следува и дека $\frac{x_o}{x_o - 1} > 1$, т.е. $\frac{x_o^{k-1}}{(x_o-1)^{k-1}} > 1$, така што од веќе докажаното

$$-a_k x_o^{n-k} - \ldots < B\frac{x_o^{n-k+1}}{x_o - 1}$$

следува и

$$-a_k x_o^{n-k} - \ldots < B\frac{x_o^{n-k+1}}{x_o - 1}\cdot\frac{x_o^{k-1}}{(x_o-1)^{k-1}} = B\frac{x_o^n}{(x_o-1)^k}.$$

Од последното, со оглед на (3), се добива:

$$-a_k x_o^{n-k} - \ldots < a_o x_o^n \leqslant a_o x_o^n + \ldots,$$

што, со оглед на (2), претставува противречност. Следствено, не постои корен на P(x) што е поголем од $1 + \sqrt[k]{B/a_o}$ и со тоа теоремата е докажана.▯

Т.6. Може да се искористи и за одредување минорант на реалните позитивни корени на P(x). Имено, да го разгледаме полиномот $P(\frac{1}{x})$; притоа ќе претпоставиме дека $a_n \neq 0$, зашто во спротивно x=0 би бил корен на P(x), па за одредување минорант на позитивните корени на P(x) може да се разгледа полиномот $P_1(x) = \frac{1}{x}P(x)$. Имаме:

$$P(\tfrac{1}{x}) = a_o\frac{1}{x^n} + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{1}{x} + a_n =$$

$$= \frac{1}{x^n}(a_o + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n).$$

Оттука гледаме дека, ако x_o е корен на P(x), тогаш $1/x_o$ е корен на $P(\frac{1}{x})$ и обратно. Сега, ако μ е мајорант за позитивните реални корени на $P(\frac{1}{x})$, т.е. ако за секој корен $1/x_o$ на $P(\frac{1}{x})$ важи $\frac{1}{x_o} \leqslant \mu$ тогаш $x_o \geqslant 1/\mu$, па $1/\mu$ е минорант на позитивните реални корени на P(x).

Пример 10. Да се најде мајорант и минорант на позитивните корени на полиномот

$$P(x) = x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3.$$

Имаме: $a_n=1$, $к=2$, $B=7$, $1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_o}} = 1+\sqrt{7} <3,65$ значи, 3,65 е еден мајорант за позитивните корени на P(x). Натаму:

$$x^5P(\frac{1}{x}) = -3x^5-7x^4+8x^3-5x^2-2x+1,$$

па за полиномот $3x^5+7x^4-8x^3+5x^2+2x-1$ имаме

$$a'_o = 3,\ k'=2,\ B'=8,\ 1+\sqrt[k']{\frac{B'}{a'_o}} = 1+\sqrt{\frac{8}{3}} < 1+1,64=2,64.$$

Значи, позитивните реални корени на P(x) (ако P(x) има такви) се наоѓаат во интервалот $(\frac{1}{2,64}\ ;\ 3,65)$.

Забелешка. Ако λ е минорант, а μ мајорант за позитивните реални корени на P(x), не значи дека P(x) мора да има корен во сегментот $[\lambda,\mu]$; единствено што можеме да тврдиме - тоа е дека P(x), надвор од $[\lambda,\mu]$ нема позитивни реални корени.

Ќе ја разгледаме сега задачата за пресметување вредности на полиноми. Да ја пресметаме, на пример, вредноста на P(x) за x=t. Полиномот P(x) можеме да го претставиме во форма

$$P(x) = (x-t)Q(x) + r, \tag{4}$$

каде што Q(x) е полином од (n-1)-в степен, а r константа. Ако ставиме

$$Q(x) = b_ox^{n-1}+b_1x^{n-2}+\dots+b_{n-2}x+b_{n-1},\quad r=b_n,$$

тогаш од (4) добиваме дека $b_n=P(t)$, а

$$a_ox^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n \equiv$$

$$\equiv(x-t)(b_ox^{n-1}+b_1x^{n-2}+\dots+b_{n-2}x+b_{n-1})+b_n,$$

од каде што, со изедначување на коефициентите пред еднаквите степени на x, добиваме:

$$\begin{aligned} b_o &= a_o\\ b_1 &= a_1+tb_o,\\ b_2 &= a_2+tb_1,\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ b_n &= a_n+tb_{n-1}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Со помош на (5) можеме постапно да ги пресметаме $b_o, b_1, \dots, b_n = P(t)$. Тие пресметувања можат да се претстават со следнава шема:

$$\begin{array}{cccccc} & a_o & a_1 & a_2 & \dots & a_n\\ + & & tb_o & tb_1 & \dots & tb_{n-1}\\ \hline & b_o \nearrow & b_1 \nearrow & b_2 \nearrow & \dots \nearrow & b_n=P(t) \end{array}$$

наречена Хорнерова шема.

Да разгледаме еден пример.

Пример 11. Да ја пресметаме вредноста на

$P(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x-5$ за $x=2{,}1$.

- За таа цел ќе ја напишеме шемата (6) користејќи ги (5):

$$\begin{array}{r|ccccc} & 1 & 2 & -3 & -4 & -5\\ 2{,}1 & + & 2{,}1.1 & 2{,}1.4{,}1 & 2{,}1.5{,}61 & 2{,}1.7{,}781\\ \hline & 1 \nearrow & 4{,}1 \nearrow & 5{,}61 \nearrow & 7{,}781 \nearrow & 11{,}3401 \end{array}$$

значи, $P(2{,}1)=11{,}3401$.

3.12.ВЕЖБИ

1. Да се одредат по графички пат (како што е речено во §3.1) корените на равенката:

а) $xe^x-2=0$; б) $\sin x . \ln x-1=0$;

в) $x^3-3x+1=0$; г) $x^4-3x^2+x+2=0$;

д) $(x^2+1)\sqrt{x^2-1}=1$; ѓ) $x\cos x = 1$.

2. Со помош на методот на преполовување или со десетично делење на сегментот да се изврши уточнување до 10^{-2} на корените (откако е извршено локализирање) на следниве равенки:

а) $x^4+x^2-2x+5 = 0$; б) $x-2\sqrt{x^2-4}=0$.

(Точниот корен во б) е $\xi=\frac{4}{\sqrt{3}}$. Земајќи $\sqrt{3}\approx 1,732$, спореди ги добиените вредности.)

3. Да се уточни со методот на преполовување оној корен на равенката $f(x)\equiv x^4+2x^3-x-1 = 0$ што се наоѓа во сегментот $[0,1]$ извршувајќи пет преполовувања.

4*. Да се направи блок-дијаграм за наоѓање корен на равенката $f(x)=0$ со методот на преполовување, работејќи со три променливи x_1, x_2 и $\bar{x}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, а при секоја итерација, x_1 или x_2 да се заменува со $\bar{x}$, зависно од знакот на $f(x_1)f(\bar{x})$.

5. Ако постои непрекинат извод $f'(x)$ и корените на равенката $f'(x)=0$ се пресметуваат лесно, тогаш процесот за локализирање на корените на равенката $f(x)\neq 0$ може да се упрости; имено, доволно е да се одредат знаците на $f(x)$ во нулите на нејзиниот извод и во граничните точки $x=a$ и $x=b$.

Користејќи го тоа, да се изврши одвојување на корените на равенката:

а) $x^3-6x+2=0$; б) $x^4-8x+1=0$;

в) $x+2=2^x$; г) $x^2=lgx$;

д) $x^4-x-1=0$; ѓ) $x^3-3x^2-9x+7=0$.

6. Нека а) $f(x)=\frac{1}{chx}$, б) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Покажи дека равенката $f(x)=x$ има единствен корен ξ во сегментот $[0,1]$ и дека низата $x_n=f(x_{n-1})$, $n=1,2,\ldots$ конвергира кон ξ за кој било $x_0\in(0,1)$. Користејќи графичко претставување, определи кои почетни вредности x_0 од $\mathbb{R}$ продуцираат низи што конвергираат кон ξ.

7. Нека $m\in\mathbb{R}$ и $|\epsilon|<1$. Да се покаже дека равенката $x=m-\epsilon\sin x$ има единствено решение во сегментот $[m-\pi, m+\pi]$.

8. Равенката $3x=x+6$ има корен $x=3$. Да се примени формално методот на последователни приближувања пишувајќи ја равенката во форма: а) $x=x/3+2$; б) $x=3x-6$, почнувајќи со $x_0=0$. Што се случува?

9. Равенката $x^3-3x-1 = 0$ да се напише во форма $x = \frac{1}{3}(x^3-1)$ и да се примени методот на последователни приближувања почнувајќи со $x_0=0;1;2$.

10. За трансформирање на равенката $f(x)=0$ во вид $x=\phi(x)$ се постапува на следниов начин: равенката $f(x)=0$ се заменува со еквивалентна равенка

$$x = x-\lambda f(x)$$

каде што бројот $\lambda\neq 0$ се избира така што функцијата $[x-\lambda f(x)]'=1-\lambda f'(x)$ да биде мала (помала од единица) по апсолутна вредност во околина на точката x_0 (на пример, може да се стави: $1-\lambda f'(x_0) = 0$).

Користејќи го тоа, дадената равенка $f(x)=0$ да се трансформира во облик $x=\phi(x)$, така што процесот $x_{n+1}=\phi(x_n)$ да конвергира:

а) $x^3-3x-1 = 0$, $x_0 = 2$;

б) $2x-\ln x-4 = 0$, $x_0 = 2{,}5$;

в) $4x-5\ln x = 5$, $x_0 = 2{,}28$.

11. Да се пресмета негативниот квадратен корен од 0,5 претставувајќи ја равенката $f(x) \equiv x^2-0{,}5 = 0$ во вид $x=x^2+x - 0{,}5$ и решавајќи ја последнава со методот на последователни приближувања. За x_0 да се земе $-0{,}6$. Дали може со тој метод да се најде позитивниот корен?

12. Да се најде коренот на равенката $3x-\sqrt{1+\sin x}=0$ со помош на методот на последователни приближувања, почнувајќи од $x_0=0{,}4$, со шест точни децимали.

13. Со помош на методот на последователни приближувања да се најдат приближните вредности на корените со укажаната точност.

а) $\sin x-x+10 = 0$, до 10^{-6};

б) $x=0{,}21\sin(0{,}5+x)$, до 10^{-4};

в) $x=1+\operatorname{arctg}\frac{x}{10}$, до 10^{-3};

г) $x^x+2x = 6$, до 10^{-3}.

14. Докажи дека: ако функцијата $f(x)$ е непрекината и монотоно растечка (односно монотоно опаѓачка) на сегментот $[a,b]$ и $f(a)f(b) < 0$, тогаш равенката $f(x)=0$ има еден и само еден корен ξ во сегментот $[a,b]$.

15. Нека функцијата $f(x)$ е непрекината на сегментот $[a,b]$, диференцијабилна во (a,b), така што $f'(x)$ има постојан знак во (a,b) и нека $f(a)f(b)< 0$. Покажи дека равнката $f(x)=0$ има единствен корен во (a,b).

16. Нека при методот на последователни приближувања m е најмалата вредност на $|\phi'(x)|$. Покажи дека, ако $m >1$, тогаш процесот дивергира.

17.* Да се направи блок-дијаграм за решавање на равенката $f(x)=0$ со методот на последователни приближувања.

18. Нека функцијата f е дефинирана и диференцијабилна на сегментот $[0,1]$ и нека $f(0)<0<f(1)$, $0<a\leqslant f'(x)\leqslant b$, каде што a и b се константни.

Покажи дека постои константа M таква што решението на равенката $f(x)=0$ може да се добие применувајќи итерација на функцијата $\phi(x)=x+Mf(x)$.

За кои вреднсти на константата M низата $x_{n+1}=\phi(x_n)$ ќе конвергира квадратно?

19. Нека $\phi(x) = \frac{x^3+ax}{bx^2+c}$. Определи ги константите a,b,c, така што низата $(x_n):x_{n+1}=\phi(x_n)$ да конвергира кон $\sqrt{z}$ со брзина 3.

Така добиениот алгоритам да се примени за пресметување $\sqrt{10}$ со десет децимални места, почнувајќи со $x_0=3$.

20. Со помош на Њутн-Рафсоновиот метод да се пресмета коренот ξ на равенката $0{,}1.x^2-x\ln x=0$ што се наоѓа во $(1,2)$ со три точни децимали.

21. Применете го методот на Њутн-Рафсон за решавање на равенката $x^3-2x^2-3x+10=0$, земајќи $x_o=1,9$. Можете ли да го објасните чудното поведение на последователните приближувања кон коренот?

22. Да се најде приближна вредност на коренот на полиномот $p(x)=x^3-x^2-4x+3$ што е близу до -2 по методот на Њутн-Рафсон, земајќи две итерации и користејќи ја Хорнеровата шема при пресметувањата.

23. Даден е бројот $c>0$. Да се најде алгоритам за пресметување на бројот $1/\sqrt{c}$ без да се врши делење.

24. Нека $f(x) = \frac{1}{x^4} - c$, $c>0$. Да се покаже дека за решавање на равенката $f(x)=0$ со Њутн-Рафсоновиот метод не се потребни делења. Користејќи го тоа да се пресмета $1/\sqrt[4]{3}$ земајќи три итерации, а почнувајќи со $x_o=1$.

25. Да се изведе, врз основа на Њутн-Рафсоновиот метод, итерациона формула за пресметување $\arcsin A$, ако е A зададен.

Користејќи го тоа, да се пресмета $\arcsin 0,5$ со точност до 10^{-3}.

26. Како мора да се избере функцијата h во формулата

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} + h(x)\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2,$$

така што итерацијата, дефинирана со ϕ, да конвергира со брзина 3 кон некое решение на равенката $f(x)=0$?

27. Да се пресмета позитивниот корен ξ на равенката $x^3-0,2x^2-0,2x-1,2=0$ со точност до 0,002 со помош на тетивниот метод. Увери се со директна проверка дека $x=1,2$ е точниот корен.

28. Со помош на комбинираниот метод (на тетиви и тангенти) да се решат следниве равенки:

а) $x^3+x-3=0$; б) $\sqrt{x}=2x^2-1$;

в) $x-e^{-x}=0$; г) $x+\cos x=0$

со точност до 10^{-3}.

29. Да се најдат по графички пат почетните приближувања и да се пресметаат со точност до 0,01 реалните корени на следниве равенки:

а) $x^3-12x+2 = 0$; б) $x\ln x=14$

в) $x^x+2x-6 = 0$; г) $3\sin x-2x+5 = 0$

д) $x(2+e^{-x}) = 2$,

по два од изнесените методи. Кој од употребените два метода е "подобар" во конкретниот случај? Дали е така во сите случаи?

30. Да се покаже дека равенката $f(x)=x^2-\sqrt{x}-3=0$ има само еден реален корен ξ и да се најде со точност до 5.10^{-4}.

31. Да се покаже дека равенката $2\operatorname{ctg}x = \frac{x}{2,46} - \frac{2,46}{x}$ има бесконечно многу корени. Да се најде најмалиот позитивен корен со точност до три децимали.

§3.12

32. Да се најдат двата најмали позитивни корени на равенката $\cos x \operatorname{ch} x=1$ со четири точни децимали.

33. Да се најде мајорант и минорант на позитивните корени на:

а) $P(x)=x^4-3x^2+6x-8$;

б) $P(x)=2x^5+3x^4-6x^3+9x^2-4x+2$;

в) $P(x)=x^6+4x^5-8x^4+2x^3-x^2-5x+1$.

34. Со помош на Хорнерова та шема да се пресметаат вредностите на дадените полиноми за укажаните вредности на x.

а) $P(x)=x^3+2x^2-7x+4$, $x=3,2$;

б) $P(x)=3,2x^3-2,5x^2+5,1x+1$, $x=4,1$;

в) $P(x)=-2,31x^4+3,10x^3-2,80x+5$, $x=1,51$;

г) $P(x)=4,21x^4-2,8x^3-3,51x^2-8$; $x=4,12$;

д) $P(x)=1,235x^5-2,308x^4+3,152x^3+0,051x^2+$
$+3,705x-0,500$, $x=1,37$

35. Нека $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ и нека $c=1+\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|$. Покажи дека: ако $t\geqslant c$, тогаш $|P(t)|\geqslant 1$.

СИСТЕМИ РАВЕНКИ

Во оваа глава се изнесуваат некои методи за решавање линеарни системи, од кои еден "точен метод"-Гаусовиот метод на елиминација и два "итеративни" – методот на прости итерации и методот на Зејдел, воведувајќи го патем поимот норма на вектори односно норма на матрици. На крајот се задржуваме кратко на системите од произволни (во општ случај нелинеарни) равенки.

4.1. УВОДНИ ЗАБЕЛЕШКИ ЗА ЛИНЕАРНИТЕ СИСТЕМИ

Многу задачи од различни области на математичко-техничките науки можат да се сведат на решавање систем линеарни равенки (кратко: линеарен систем), зашто во голем број случаи се врши "линеаризација" на задачата, т.е. нелинеарен систем се апроксимира со линеарен систем.

Причината за тоа е едноставна: линеарните системи се релати но едноставни за решавање, кај нив постои критериум за единственост на решението, методот на итерации е дефиниран, еднозначен и самокорективен (што не е случај кај нелинеарните системи, кај кои е неопходна "доволно блиска" апроксимација за да се обезбеди итеративниот процес да конвергира кон бараното решение). Накратко, линеарните системи се "погодни за математичка обработка" и од огромно значење за многу области на науките, па според тоа во научната литература им е посветено доволно внимание.

Теоријата на линеарните системи е релативно едноставна и во многу нејзини делови е доведена до совршенство. Сепак, можностите за решавање на линеарните системи во практиката, далеку заостануваат зад потребите. Со зголемувањето на редот на системот (т.е. на равенките и непознатите во него), бројот на аритметичките операции што треба да се извршат многу брзо расте, така што и моќни електронски сметачи имаат ограничени можности во таа смисла. Притоа, бројот на операциите што треба да се извршат зависи не само од редот на системот, туку и од избраниот метод за решавање. Можноста да се смали бројот на аритметичките операции при решавањето на еден линеарен систем има не само економско значење, туку овозможува да се зголеми редот на системите што ќе можат да се решаваат на електронски сметачки машини, а со тоа се проширува кругот на задачите од практиката што можат да се решаваат со методите на нумеричката математика. Тој мошне важен факт го привлекувал вниманието на голем број научници и како резултат на тоа, сега постојат многу методи за решавање на линеарни системи.

Методите за решавање линеарни системи се делат, главно на две групи:

1) точни - тоа се методи коишто доведуваат до точни вредности на непознатите (ако пресметувањата се вршат точно, без заокружувања);

2) приближни (или итеративни) - тоа се сите методи коишто не се точни, т.е. методи коишто овозможуваат да се добие само приближно решение, со некоја, можеби, однапред зададена точност (дури и при претпоставка пресметувањата да се вршат без заокружувања).

Инаку, точното решение на системот со некој итеративен метод може да се добие теоретски како резултат на некој бесконечен процес. Во практиката, пресметувањата обично се вршат со заокружувања, па и со точните методи, обично, се добиваат приближни решенија.

Да забележиме дека, во разгледувањата, често е позгодно даден систем линеарни равенки да се пишува кратко, во матрична форма. Имено, системот

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \tag{1}$$

се претставува со матричната равенка

$$Ax = b, \tag{2}$$

каде што A е матрицата од коефициентите пред непознатите (наречена матрица на системот), а x и b се вектор-колони, т.е.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

4.2. ГАУСОВ МЕТОД НА ЕЛИМИНАЦИЈА

Овде ќе разгледаме еден многу распространет точен метод за решавање линеарни системи, наречен Гаусов метод, којшто му е познат на читателот, во некоја упростена форма, уште од средношколската математика. Тој метод базира врз идејата на последователна елиминација на непознатите, т.е. на трансофрмирање на дадениот систем во еквивалентен систем со горнотриаголна матрица, а решението се добива со т.н. "повратна замена". За илустрација, ќе разгледаме еден таков пример.

Пример 1. Да го решиме системот

$$\begin{aligned} x + 2y - 4z &= 3, \\ 2x + 3y - 4z &= 8, \\ x + y + z &= 6. \end{aligned}$$

Првата равенка од системот ја множиме со -2 и ја додаваме на втората, а потоа пак првата ја множиме со -1 и ја додаваме на третата равенка. Така го добиваме системот

$$\begin{aligned} x+2y-4z&=3,\\ -y+4z&=2,\\ -y+5z&=3. \end{aligned}$$

Втората равенка од овој систем ја множиме со -1 и ја додаваме на третата, па дадениот систем се трансформира во следниов систем (со "триаголна форма"):

$$\begin{aligned} x+2y-4z&=3,\\ -y+4z&=2,\\ z&=1. \end{aligned}$$

Од последната равенка добиваме $z=1$, од претпоследната $y=2$ и од првата $x=3$. Бидејќи последниот систем е еквивалентен со дадениот, следува дека решение на дадениот систем е тројката $x=3$, $y=2$, $z=1$.

Постапката тече слично и во општ случај.

Постојат многу варијанти на Гаусовиот метод, т.е. "шеми" со кои тој се реализира, а ние ќе го разгледаме овде т.н. метод на делење, којшто е доволно згоден за примена.

Нека е даден линеарен систем од n равенки со n непознати

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n&=a_{1,n+1}\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n&=a_{2,n+1}\\ \dots\dots\dots\dots\dots&\dots\dots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n&=a_{n,n+1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Да избереме некоја равенка од (1) и некоја непозната во неа. При изборот ќе водиме сметка само за следниов услов: коефициентот пред избраната непозната да е различен од нула. Ако е потребно, ќе извршиме пермутирање на равенките или пренумерација на непознатите, така што можеме да сметаме дека е избрана првата равенка и непознатата x_1, при што $a_{11}\neq 0$. Со цел да ја извршиме елиминацијата на x_1 од другите равенки, првата равенка ќе ја множиме последователно со $-a_{21}/a_{11}$, $-a_{31}/a_{11}, \dots, -a_{n1}/a_{11}$ и ќе ја додадеме на i-тата равенка ($i=2,3,\dots,n$); по така извршената трансформација, сите равенки на (1), освен првата, добиваат облик

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= a_{2,n+1}^{(1)}, \\ \dots\dots \quad &\dots\dots\dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n &= a_{n,n+1}^{(1)} \end{aligned} \qquad (2)$$

каде што

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}.a_{1j} \quad \begin{matrix}(i=2,3,\dots,n; \\ j=2,3,\dots,n+1).\end{matrix} \qquad (3)$$

Тие равенки образуваат систем од $n-1$ равенка со $n-1$ непозната. За системот (2) ја повторуваме истата постапка: избираме равенка и непозната во неа со коефициент различен од нула, вршиме преместување и пренумерација на непознатите (ако е потребно), така што можеме да сметаме дека е избрана првата равенка од (2) и x_2 со $a_{22}^{(1)} \neq 0$; потоа, за секој $i=3,\dots,n$, таа равенка ја множиме со $-a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ и ја додаваме на i-тата равенка од (2); итн. Таа постапка ќе ја повторуваме сѐ додека такви трансформации се можни, т.е. ќе ја завршиме тогаш кога ќе се исцрпат сите равенки (т.е. по $n-1$ такви чекори) или кога во останатите равенки не ќе има ненулти коефициенти пред непознатите.

Да претпоставиме дека било можно да се извршат $m(m < n)$ такви чекори, а коефициентите пред непознатите во останатите равенки се нули, т.е. дека системот (1) сме го трансформирале во следнава форма:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= a_{2,n+1}^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n &= a_{3,n+1}^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{mm}^{(m-1)}x_m + a_{m,m+1}^{(m-1)}\underset{x_{m+1}}{\uparrow} + \dots + a_{mn}^{(m-1)}x_n &= a_{m,n+1}^{(m-1)} \\ 0 &= a_{m+1,n+1}^{(m-1)} \\ \dots\dots \\ 0 &= a_{n,n+1}^{(m-1)} . \end{aligned} \qquad (4)$$

Ако меѓу слободните членови $a^{(m-1)}_{m+1,n+1},\ldots, a^{(m-1)}_{n,n+1}$ има различни од нула, тогаш системот е противречен, т.е. нема решение; ако, пак, сите тие слободни членови се нули, тогаш дадениот систем, всушност, има m равенки и n непознати, па тој е неопределен, т.е. има безброј многу решенија (на пример, $x_1,\ldots,x_m$ можеме да ги изразиме преку $x_{m+1},\ldots,x_n$, коишто можат да примаат произволни вредности).

Да претпоставиме дека $m=n$. Тогаш (4) има вид:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1} \\ a^{(1)}_{22}x_2 + a^{(1)}_{23}x_3 + \ldots + a^{(1)}_{2n}x_n &= a^{(1)}_{2,n+1} \\ a^{(2)}_{33}x_3 + \ldots + a^{(2)}_{3n}x_n &= a^{(2)}_{3,n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a^{(n-1)}_{nn}x_n &= a^{(n-1)}_{n,n+1}\,, \end{aligned} \tag{5}$$

каде што, ставајќи $a^{(o)}_{ij} = a_{ij}$,

$$a^{(k)}_{ij} = a^{(k-1)}_{ij} - \frac{a^{(k-1)}_{ik}}{a^{(k-1)}_{kk}}\, a^{(k-1)}_{kj}\,, \tag{6}$$

$$k=1,2,\ldots,n-1;\; i=k+1,\ldots,n;\; j=k+1,\ldots,n+1.$$

Од последната равенка на (5) се добива x_n, потоа, заменувајќи ја вредноста за x_n во претпоследната се добива x_{n-1} итн.,

$$x_i = \frac{1}{a^{(i-1)}_{ii}} \left[a^{(i-1)}_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a^{(i-1)}_{ij} x_j \right], \quad i=1,\ldots,n. \tag{7}$$

(Ова "враќање назад" претставува втор дел на изнесениот метод и обично се вика повратна замена, а првиот дел - директна постапка.)

Опишаниот метод може да се претстави шематски, како што е покажано на шемата 1, во која се прикажани одделните чекори при пресметувањата. Во колоната x_i стојат коефициентите пред x_i во одделните чекори, а во колоната Σ се запишани сумите од коефициентите (вклучувајќи го и слободниот член од соодветната

Шема 1

	i	x_1	x_2	x_3	...	x_n	слободен член	Σ
I	1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	$a_{1,n+1}$	s_1
	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	$a_{2,n+1}$	s_2
	⋮	...	...	...	...	...	...	⋮
	n	a_{n2}	a_{n2}	a_{n3}	...	a_{nn}	$a_{n,n+1}$	s_n
		1	c_{12}	c_{13}	...	c_{1n}	$c_{1,n+1}$	s_1/a_{11}
II	2		$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	...	$a_{2n}^{(1)}$	$a_{2,n+1}^{(1)}$	$s_2^{(1)}$
	3		$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	...	$a_{3n}^{(1)}$	$a_{3,n+1}^{(1)}$	$s_3^{(1)}$
	⋮		...	...	...	...	...	⋮
	n		$a_{n2}^{(1)}$	$a_{n3}^{(1)}$	...	$a_{nn}^{(1)}$	$a_{n,n+1}^{(1)}$	$s_n^{(1)}$
			1	$c_{23}^{(1)}$	...	$c_{2n}^{(1)}$	$c_{2,n+1}^{(1)}$	$s_2^{(1)}/a_{22}^{(1)}$
III	3			$a_{33}^{(2)}$	...	$a_{3n}^{(2)}$	$a_{3,n+1}^{(2)}$	$s_3^{(2)}$
	⋮			...	...	...	...	⋮
	n			$a_{n3}^{(2)}$	...	$a_{nn}^{(2)}$	$a_{n,n+1}^{(2)}$	$s_n^{(2)}$
				1	...	$c_{nn}^{(2)}$	$c_{n,n+1}^{(2)}$	$s_3^{(2)}/a_{33}^{(2)}$
				...	...	...	...	...
n.	n					$a_{nn}^{(n-1)}$	$a_{n,n+1}^{(n-1)}$	$s_n^{(n-1)}$

равенка), $s_i^{(к)}=a_{11}^{(к)}+\ldots+a_{1,n+1}^{(к)}$. Таа колона служи за контрола при пресметувањата, којашто се состои во споредување на бројот $s_i^{(к)}/a_{ii}$ со збирот на броевите од последната редица при секој чекор. За илустрација, ќе наведеме еден пример.

Пример 2.

$$\begin{aligned} 2x_1-4x_2+x_3+4x_4&=1,\\ 4x_1+2x_2-4x_3+x_4&=3,\\ x_1-x_2+3x_3+3x_4&=2,\\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4&=1, \end{aligned}$$

задржувајќи само една децимала при секој чекор на пресметувањата.

1) Ги запишуваме коефициентите на системот, по ред, во блокот I од шемата 2.

2) Ја наоѓаме сумата s_i на секоја редица и ја пишуваме во колоната Σ.

3) Ги делиме елементите од првата редица со $a_{11}=2$ и резултатите ги запишуваме во петтата редица од блокот I.

4) Вршиме контрола: го пресметуваме збирот на првите пет броеви, добиени во 3), тој е 2 и заклучуваме дека се совпаѓа со резултатот добиен во колоната Σ за првата равенка, 4:2=2.

5) Ги наоѓаме броевите $a_{ij}^{(1)}$ и ги запишуваме во блокот II.

6) Ги пресметуваме сумите $s_i^{(1)}$ и ги запишуваме во колоната Σ.

7) Ги делиме елементите од првата редица на блокот II и ги запишуваме во четвртата редица.

8) Контрола: сумата на првите четири броеви од четвртата редица на блокот II е -0,2 и заклучуваме дека тој се совпаѓа со бројот -2:10=-0,2 добиен во првата редица од II, во колоната Σ.

Итн. Резултатите од натамошните постапки се внесени во шемата 2.

Шема 2

	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	Σ
I	1	2	-4	1	4	1	4
	2	4	2	-4	1	3	3
	3	1	-1	3	3	2	8
	4	2	1	-1	2	1	5
		1	-2	0,5	2	0,5	2
II	2		10	-6	-7	1	-2
	3		1	2,5	1	1,5	6
	4		5	-2	-2	0	1
			1	-0,6	-0,7	0,1	-0,2
III	3			3,1	-1,7	1,4	2,8
	4			1	1,5	-0,5	2
				1	-0,6	0,5	0,9
IV	4				1	-0,9	-0,1

Со повратна замена, земајќи ја првата редица од секој блок, добиваме: $x_4=-0,9$;

$x_3=0,3.(1,4+1,7.0,9)=0,3.2,9=0,9$;

$x_2=0,1.(1+6.0,9-7.0,9)=0,1.0,1=0,0$;

$x_1=0,5.(1+4.0-0,9+4.0,9)=0,5.3,7=1,9$.

Добиеното решение $x_1=1,9$; $x_2=0,0$; $x_3=0,9$; $x_4=-0,9$ ė приближно, зашто вршевме заокружувања.(Инаку, со директна замена, може да се провери дека $x_1^*=2$, $x_2^*=0$, $x_3^*=1$, $x_4^*=-1$ е точното решение на системот.)

Избраната равенка при секој чекор на опишаниот метод често се вика водечка равенка, а коефициентот пред избраната непозната се вика водечки коефициент. Ако водечкиот коефициент $a_{ii}^{(k)}$ е близок до нулата, тогаш делењето на другите коефициенти $a_{ij}^{(k)}$ со него обично доведува до големи нови коефициенти. При повратната замена, со тие коефициенти ќе се множат неточни вредности на непознатите, а тоа може да доведе до пораст на погрешностите и брзо губење на точноста. За да се намалат таквите грешки, за водечки коефициент се избира или најголемиот по апсолутна вредност коефициент во целиот систем или најголемиот коефициент во избраната равенка. Таа модификација на Гаусовиот метод се вика *шема со избор на главен елемент.*

Таа шема може да помогне донекаде да се намалат грешките на заокружувањето и при т.н. *нестабилни* (или *лошо условени*) *системи*, т.е. системи при кои мали измени на коефициентите произведуваат големи измени на решението. (Таков е системот

$$x+3y=4,$$

$$x+3,000001y=4,000001,$$

којшто има решение $x=1, y=1$. Ако ги измениме малку коефициентите од втората равеннка, т.е. ако го разгледаме системот

$$x+3y=4,$$

$$x+2,999999y=4,000002,$$

тогаш го добиваме решението $x=10$, $y=-2$, коешто многу се разликува од решението на првиот систем.)

Да забележиме дека шемата со избор на главен елемент ги ублажува грешките на заокружувањето, но не ги отстранува недостатоците на нестабилните системи.

Гаусовиот метод на последователно исклучување на непознатите во системот равенки може да се пренесе на задачата за *пресметување детерминанти.* Тој се состои во последователно снижување на редот на детерминантата. Имено, нека е дадена детерминантата

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За првиот чекор на пресметувањата избираме водечки елемент. Тој мора да биде различен од нула, а често се избира најголемиот елемент во избраната редица или, пак, најголемиот во целата детерминанта. Можеме да сметаме дека водечки елемент е a_{11} (во спротивно, ќе извршиме потребни пермутации на редиците или колоните). Тогаш, детерминантата можеме да ја напишеме во облик

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & c_{12}\dots c_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Сега, со помош на првата редица, множејќи ја последователно со $-a_{21}, -a_{31},\dots,-a_{n1}$ и додавајќи ја на втората, третата,..., последната, добиваме:

$$D= a_{11}\begin{vmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}.$$

Со тоа D е сведена на детерминантата од $(n-1)$-в ред. Повторувајќи ја горната постапка n пати, детерминантата D ја наоѓаме како производ на водечките елементи:

$$D= a_{11}a_{22}^{(1)}\dots a_{nn}^{(n-1)}.$$

Да забележиме дека Гаусовиот метод може да се приспособи за пресметување инверзна матрица на дадена матрица. Имено, нека A е несингуларна матрица и нека A^{-1} е означена со буквата X. Според дефиницијата на инверзна матрица, имаме $AX=E$. Колоните на X ќе ги разгледуваме како n-димензионални вектор-колони и ќе ги означиме со $x^{k}=(x_1^{k},\dots,x_n^{k})^{T}$ $(k=1,\dots,n)$. Аналогно, и колоните на единичната матрица E ќе ги разгледуваме како вектор-колони $e^{k}=(0,\dots,0,1^{(k)},0,\dots,0)^{T}$. Векторот x^{k} е решение на системот

$$Ax^{k}=e^{k}.$$

Откако ќе се решат сите n такви системи, коишто одговараат на $k=1,2,\dots,n$, ќе ја најдеме инверзната матрица $A^{-1}=X$.

Да забележиме дека сите тие системи имаат иста матрица на коефициентите, а се разликуваат само по вектор-колоните на слободните членови e^{k}. За нивното решавање може да се примени

Гаусовиот метод; притоа, трансформирањето на тие системи може да се врши паралелно, со помош на една обединета таблица на коефициентите и на колоните од слободните членови (шема 3).

Шема 3

A	e^1	e^2	...	e^n
$a_{11}\ a_{12}\dots a_{1n}$	1	0		0
$a_{21}\ a_{22}\dots a_{2n}$	0	1		0
. . . . .	...	...		...
$a_{n1}\ a_{n2}\dots a_{nn}$	0	0		1

*4.3.НЕКОИ МОДИФИКАЦИИ НА ГАУСОВИОТ МЕТОД

Постои голем број модификации на Гаусовиот метод. Овде ќе се задржиме, само кратко, на неколку од нив. Да забележиме дека при примената на електронски сметачки машини Гаусовиот метод често пати има предност во однос на нив.

1) Метод на оптимално исклучување. Овој метод се разликува од Гаусовиот по тоа што, при секој чекор, не се трансформира целиот систем, туку само еден дел од неговите равенки. (При користењето само на оперативната меморија на електронските сметачки машини, тоа овозможува да се решаваат системи со приближно, двапати повеќе непознати отколку со Гаусовиот метод.) Всушност разликата е во тоа што директната постапка од Гаусовиот метод овде е малку изменета и е соединета со повратната замена. Имено, нека е даден системот

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{1}$$

За првиот чекор избираме водечки коефициент (често се избира "главен коефициент", т.е. најголемиот по апсолутна вредност во избраната равенка или во целиот систем). Можеме да сметаме дека водечки е a_{11} во првата равенка. Поделувајќи со a_{11}, првата равенка ја доведуваме во вид

$$x_1 + c_{12}x_2+\dots+c_{1n}x_n = d_1. \tag{2}$$

Потоа, за вториот чекор, избираме нова равенка - нека таа биде втората од (1). Помножувајќи ја (2) со a_{21} и одземајќи ја така добиената равенка од втората, ја добиваме равенката

$$a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+\dots+a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}. \tag{3}$$

Избираме водечки коефициент; тоа ќе биде можно ако во (3) има ненулти коефициенти пред непознатите, а во спротивниот случај (3) ќе има форма $0=b_2^{(1)}$. Ако $b_2^{(1)} \neq 0$, тогаш двете први равенки од (2) се противречни, а ако $b_2^{(1)} = 0$, тогаш втората равенка се разликува од првата само за некој множител, па таа при решавањето може да се изостави.

Ако во (3) има водечки коефициент, тогаш можеме да сметаме дека тој е $a_{22}^{(1)}$. Делејќи ја со него, равенката (3) добива вид

$$x_2+c_{23}x_3+\ldots+c_{2n}x_n=d_2.$$

Со помош на оваа равенка, можеме да ја елиминираме од (2) непознатата x_2, па првите две равенки од системот (1) добиваат форма:

$$\begin{aligned} x_1+c_{13}^{(1)}x_3+\ldots+c_{1n}^{(1)}x_n&=d_1^{(1)}, \\ x_2+c_{23}^{(1)}x_3+\ldots+c_{2n}^{(1)}x_n&=d_2^{(1)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Со тоа го завршуваме вториот чекор на трансформирањето.

Наредниот чекор започнува со избирање на една од преостанатите равенки за трансформирање со (4) и, да речеме, тоа е третата равенка. Ги елиминираме x_1 и x_2 од неа со помош на (4) и добиваме:

$$a_{33}^{(2)}x_3+\ldots+a_{3n}^{(2)}x_n=b_3^{(2)}. \tag{5}$$

Ако се случи (5) да има вид $0=b_3^{(2)}$, тогаш третата равенка може да биде испуштена при $b_3^{(2)}=0$, а при $b_3^{(2)}\neq 0$, таа е противречна со првите две. Да претпоставиме дека не е тоа случај, т.е. во (5) може да се избере водечки коефициент и нека тој е, на пример, $a_{33}^{(2)}$. Тогаш равенката (5), по делењето со $a_{33}^{(2)}$, добива вид

$$x_3+c_{34}^{(2)}x_4+\ldots+c_{3n}^{(2)}x_n=d_3^{(2)}$$

и може да се искористи за елиминација на x_3 од (4), така што системот од првите три равенки на (1) добива облик:

$$\begin{aligned} x_1+c_{14}^{(2)}x_4+\ldots+c_{1n}^{(2)}x_n&=d_1^{(2)} \\ x_2+c_{24}^{(2)}x_4+\ldots+c_{2n}^{(2)}x_n&=d_2^{(2)} \\ x_3+c_{34}^{(2)}x_4+\ldots+c_{3n}^{(2)}x_n&=d_3^{(2)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Со тоа се завршува третиот чекор. Четвртиот и натамошните чекори се спроведуваат аналогно.

На крајот, ако се возможни сите n чекори, ќе се добие систем со "дијагонална форма", т.е. n равенки од видот

$$x_i = d_i^{(n-1)} \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

коишто ги даваат вредностите на непознатите.

Методот на оптимално исклучување е познат и под името Жорданов метод на елиминација.

2) **Шема на Халецки**. Системот (1) се запишува во матрична форма, $Ax=b$, каде што $A=[a_{ij}]$ е матрицата на системот, а $x=(x_1,\ldots,x_n)^T$ и $b=(b_1,\ldots,b_n)^T$ се соодветните вектор-колони. Потоа матрицата A се претставува како производ на долнотриаголна и горнотриаголна матрица, $A=PQ$,

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \ldots & p_{nn} \end{bmatrix}, \quad Q=\begin{bmatrix} 1 & q_{12} & \ldots & q_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & q_{2n} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix},$$

при што елементите p_{ij} и q_{ij} се определуваат по формулите:

$$p_{i1}=a_{i1}, \quad p_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} p_{ik}q_{kj} \quad (i \geqslant j > 1),$$

$$q_{1j}=\frac{a_{1j}}{p_{11}}, \quad q_{ij}=\frac{1}{p_{ii}}\left[a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1} p_{ik}q_{kj}\right] \quad (1<i<j),$$

па бараната вектор-колона x може да се најде од равенките

$$Py=b, \quad Qx=y.$$

Овие системи лесно се решаваат бидејќи P и Q се триаголни матрици. Имено:

$$y_1=b_1/p_{11}, \quad y_i=\left[b_i-\sum_{k=1}^{i-1} p_{ik}y_k\right]/p_{ii} \quad (i>1),$$

$$x_n=y_n, \quad x_i=y_i-\sum_{k=i+1}^{n} q_{ik}x_k \quad (i<n).$$

3) Метод на квадратни корени. Овој метод се користи при решавање линеарен систем Ax=b ,при кој матрицата A е симетрична, $a_{ij}=a_{ji}$, $i,j=1,2,\dots,$. Тогаш A се претставува како производ од две заемно транспонирани триаголни матрици, A=T'T,

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & t_{nn} \end{bmatrix}, \qquad T'=\begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

Од равенството A=T'T се добива:

$$t_{11}=\sqrt{a_{11}}, \quad t_{1j}=\frac{1}{t_{11}}a_{1j} \qquad (j>1),$$

$$t_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}t_{ki}^2} \qquad (1<i\leqslant n),$$

$$t_{ij}=\frac{1}{t_{ii}}\left(a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}t_{ki}t_{kj}\right) \qquad (i<j),$$

$$t_{ij}=0 \quad \text{при} \quad i>j.$$

Потоа, откако е најдена матрицата T, системот Ax=b се заменува со два еквивалентни со него системи од триаголни матрици,

$$T'y=b, \quad Tx=y.$$

Од овие системи, напишани во развиен вид, последователно наоѓаме

$$y_1=\frac{1}{t_{11}}b_1, \qquad y_i=\frac{1}{t_{ii}}\left(b_i-\sum_{k=1}^{i-1}t_{ki}y_k\right) \qquad (i>1),$$

$$x_n=\frac{1}{t_{nn}}y_n, \qquad x_i=\frac{1}{t_{ii}}\left(y_i-\sum_{k=i+1}^{n}t_{ik}x_k\right) \qquad (i<n).$$

4.4. НОРМИ НА ВЕКТОРИ И МАТРИЦИ

Во овој параграф ќе изнесеме неколку основни факти во врска со поимот норма на вектор односно норма на матрица.

Нека V е векторски простор над полето $\mathbb{R}$ на реалните броеви. Ако $N:V \to \mathbb{R}$ е пресликување, такво што за кои било $x,y\in V$ и $\alpha\in\mathbb{R}$ важат следниве услови:

а) $N(x)\geqslant 0$; $N(x)=0 \Longleftrightarrow x=0$,

б) $N(\alpha x)=|\alpha|N(x)$,

в) $N(x+y)\leqslant N(x)+N(y)$,

тогаш N се вика *норма* на векторскиот простор V; во тој случај V се вика *нормиран векторски простор*.

Нормата се означува обично со $\|\ \|$ наместо со N, т.е. наместо $N(x)$ се пишува $\|x\|$. Значи, V е нормиран векторски простор над $\mathbb{R}$ ако за кои било $x,y\in V$ и $\alpha\in\mathbb{R}$ важи:

(i) $\|x\|\geqslant 0$; $\|x\|=0 \Longleftrightarrow x=0$,

(ii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$,

(iii) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

Секој нормиран векторски простор V може да се разгледува како метрички простор со метрика

$$d(x,y)=\|x-y\| . \tag{1}$$

Навистина, од (i) следува дека $d(x,y)\geqslant 0$ и дека $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$. Имајќи го предвид (ii), добиваме:

$$d(x,y)=\|x-y\|=\|(-1)(y-x)\|=$$
$$=|-1|\,\|y\mp x\|=\|y-x\|=d(y,x).$$

Лесно се проверува и аксиомата на триаголник:

$$d(x,z)=\|x-z\|=\|x-y+y-z\|\leqslant$$
$$\leqslant\|x-y\|+\|y-z\|=d(x,y)+d(y,z).$$

Значи, (V,d) е метрички простор.

Норма на векторски простор може да се воведе на разни начини, а во зависност од тоа како е воведена, се добиваат и разни метрички простори, дефинирани на ист векторски простор. Овде ќе разгледаме неколку често употребувани норми на векторскиот простор $\mathbb{R}^n$ од n-димензионални вектори.

1) Прва, кубна норма. Ако $V=\mathbb{R}^n$ и за $\bar{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ ставиме

$$\|\bar{x}\|_1 = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|, \tag{2}$$

тогаш лесно се покажува дека $\|\bar{x}\|_1$ ги задоволува условите (i)-(iii), т.е. $\|\bar{x}\|_1$ е норма на $\mathbb{R}^n$. (Називот кубна норма произлегува од фактот што множеството точки од $\mathbb{R}^n$ коишто го задоволуваат условот $\|\bar{x}\|_1 \leqslant 1$ образуваат единичен куб.) Соодветниот метрички простор има метрика

$$d_1(\bar{x},\bar{y}) = \|\bar{x}-\bar{y}\|_1 = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - y_i|. \tag{3}$$

2) Втора, октаедрална норма. Ако за $\bar{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ од $\mathbb{R}^n$ ставиме

$$\|\bar{x}\|_2 = |x_1|+\ldots+|x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

тогаш добиваме дека $\|\bar{x}\|_2$ е норма на $\mathbb{R}^n$. (Називот потекнува од фактот што множеството вектори за кои $\|\bar{x}\|_2 \leqslant 1$ образува n-димензионален аналог на октаедар.) Соодветната метрика е определена со

$$d_2(\bar{x},\bar{y}) = \|x-y\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|. \tag{4}$$

3) Трета, сферна или евклидска норма. За $\bar{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ од $\mathbb{R}^n$ ќе ставиме

$$\|\bar{x}\|_3 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

Проверката дека условите (i) и (ii) се исполнети е едноставна, а со помош на неравенството на Коши-Буњаковски ((5) од §2.1) се покажува дека е исполнет и условот (iii):

$$\|\bar{x}+\bar{y}\|_3 = [\sum_i |x_i + y_i|^2]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant [\sum_i |x_i|^2]^{1/2} + [\sum_i |y_i|^2]^{1/2} = \|\bar{x}\|_3 + \|\bar{y}\|_3.$$

Соодветниот метрички простор има метрика

$$d(\bar{x},\bar{y}) = \|\bar{x}-\bar{y}\|_3 = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}, \qquad (5)$$

т.е. тоа е евклидскиот простор од n-димензионални точки.

Да забележиме дека $\mathbb{R}^n$, разгледуван како метрички простор во однос на која било од метриките (3) - (5), е комплетен.

Поимот норма на матрица се воведува на ист начин како за вектори, само што матричната норма, покрај (i)-(iii), треба да исполнува уште еден услов што е во врска со операцијата множење на матрици.

Имено, нека $\mathbb{M}_n$ е векторскиот простор од сите реални квадратни матрици од n-ти ред. Едно пресликување $\|\ \|: \mathbb{M}_n \to \mathbb{R}$ се вика <u>матрична норма</u>, ако се исполнети следниве услови:

(i) $\|A\| \geqslant 0;\ \ \|A\| = 0 \iff A = 0,$

(ii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|,$

(iii) $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|,$

(iv) $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|,$

каде што $A, B \in \mathbb{M}_n$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Во голем број проблеми се јавува потребата од истовремено разгледување на матрици и вектори. Во такви случаи е згодно нивните норми да бидат, во некоја смисла, усогласени. За една матрична норма се вели дека е <u>усогласена</u> со дадена норма на вектор ако за произволен вектор-колона $x=(x_1,\dots,x_n)^T$ од

$\mathbb{R}_n$*) и произволна матрица A од n-ти ред е исполнето неравенството

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| . \qquad (6)$$

Од усогласените норми на матрица често се избира најмалата, што е згодно особено при оценки на погрешности (за да се направат точни). Најмалата можна норма меѓу матричните норми, коишто се усогласени со дадена норма на вектори, се вика *матрична норма потчинета* на дадената векторска норма.

За да го појасниме добивањето на матричната норма којашто е потчинета на дадена векторска норма $\|x\|$, ќе го разгледаме неравенството (6). Притоа, ќе го исклучиме како неинтересен случајот кога x е нултиот вектор (зашто двете страни на (6) стануваат нули). Затоа ќе сметаме дека $x \neq 0$ и (6) ќе го земеме во форма

$$\|Ay\| \leqslant \|A\| , \quad y = \frac{x}{\|x\|} , \quad \|y\| = 1 .$$

Тоа значи дека усогласената матрична норма треба да биде мајорант на нормите на векторите Ay при условот $\|y\| = 1$, па најмалата усогласена норма (т.е. потчинетата матрична норма на $\|x\|$) ќе биде супремумот на множеството вредности $\|Ay\|$ при $\|y\| = 1$:

$$\|A\| = \max_{\|x\| = 1} \|Ax\| . \qquad (7)$$

(Да забележиме дека во дефиницијата (7) Ax е непрекината функција од x, којашто се разгледува на ограниченото затворено множество вектори за кои $\|x\| = 1$. Затоа максимумот $\|Ax\|$ се достигнува и постои вектор x_o, таков што $\|x_o\| = 1$ и $\|Ax_o\| = \max \|Ax\| = \|A\|$; в.Т.6 од §2.3.)

И норма на матрица може да се воведе на разни начини. Ќе наведеме неколку примери на потчинети матрични норми.

Ако $A = [a_{ij}]$ е квадратна матрица од n-ти ред, се покажува дека со секој од следните изрази е дефинирана норма на матрица:

---

*) Множеството од n-димензионални вектор-колони често се означува со $\mathbb{R}_n$, а неговите елементи - со мали букви од латиницата без никаква црта.

а) $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

б) $\|A\|_2 = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

в) $\|A\|_3 = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$

Се покажува дека $\|A\|_1$ е потчинета матрична норма на кубната норма $\|x\|_1$, а $\|A\|_2$ е потчинета на октаедралната. Неколку други примери за матрични норми се наведени во вежбите.

4.5. МЕТОД НА ПОСЛЕДОВАТЕЛНИ ПРИБЛИЖУВАЊА ЗА ЛИНЕАРНИ СИСТЕМИ

Нека е даден системот равенки

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{aligned} \tag{1}$$

т.е., во матрична форма

$$Ax = b, \tag{1'}$$

при што претпоставуваме дека матрицата A е несингуларна. При методот на последователни приближувања (којшто се вика и <u>метод на прости итерации</u>) дадениот систем се трансформира во следниов облик

$$\begin{aligned} &x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + v_1, \\ &\dots \quad \dots\dots\dots\dots \\ &x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n + v_n, \end{aligned} \tag{2}$$

т.е.

$$x = Cx + v, \tag{2'}$$

каде што $C=-G^{-1}H, v=G^{-1}b$, $G+H=A$, $\det G\neq 0$ (во некои случаи е можно да се земе C=E-A и $v=b$ каде што E единичната матрица од n-ти ред). Потоа, ако е познато некое почетно приближување $x^{(o)}=(x_1^{(o)},\dots,x_n^{(o)})^T$ кон точното решение $x^*=(x_1^*,\dots,x_n^*)^T$ се формира низата вектори $x^{(к)}$, определени со формулата

$$x^{(k)}=Cx^{(k-1)}+v,\quad k=1,2,\dots \tag{3}$$

Ако низата (3) конвергира кон некој вектор x', тогаш x' ќе биде решение на системот (1′). Навистина, од (3) добиваме $x'=Cx'+v$, па

$$\begin{aligned}Ax' &= A(Cx'+v)=(G+H)(-G^{-1}Hx'+G^{-1}b)=\\ &=-Hx'+b-HG^{-1}Hx'+HG^{-1}b=\\ &=b+H(-x'+Cx'+v)=b.\end{aligned}$$

Во следнава теорема се даваат два доволни услови за конвергенција на итеративниот процес што е определен со (3).

Теорема 1. Ако е исполнет кој било од условите:

а) $\|C\|_1=\max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |c_{ij}|\leqslant q<1$,

б) $\|C\|_3=\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} |c_{ij}|^2\right)^{1/2}\leqslant q<1$,

тогаш низата, орпеделена со формулата

$$x^{(k)}=Cx^{(k-1)}+v \tag{3}$$

конвергира кон единственото решение $x^*=(x_1^*,\dots,x_n^*)^T$ на системот (1) за произволно почетно приближување $x^{(o)}=(x_1^{(o)},\dots,x_n^{(o)})^T$.

Доказ. Нека $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ е пресликување определено со

$$f(\overline{x})=\overline{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n),$$

каде што $(y_1,\dots,y_n)=\overline{y}=y^T$ е определен со

$$y = Cx + v \tag{4}$$

Тогаш за секое решение x^* на (2′) добиваме фиксна точка $\overline{x}^* = (x^*)^T$ на f, па проблемот се сведува на барање фиксна точка на пресликувањето f.

а) Да го разгледаме прво случајот кога

$$\sum_{j=1}^{n} | c_{ij} | \leqslant q < 1 \quad (i=1,2,\dots,n).$$

Низата $(\overline{x}^{(к)})$, што ѝ соодветствува на низата $(x^{(к)})$, можеме да ја сметаме како итерирана низа во R^n добиена со f.

Ако го посматраме $\mathbb{R}^n$ како метрички простор со метрика d_1 определена со (3) од §4.4, тогаш тој е комплетен метрички простор, така што, според теоремата на Банах за фиксна точка, доказот ќе го завршиме ако докажеме дека е исполнет условот за контракција за пресликувањето f.

Нека $\overline{x}=(x_1,\dots,x_n)$ и $\overline{y}(y_1,\dots,y_n)$ се две произволни точки од $\mathbb{R}^n$. Според (4) и дефиницијата на f, i-тата компонента на векторот $f(\overline{x})$ е $\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + v_i$, па значи

$$\begin{aligned}
d_1(f(\overline{x}),f(\overline{y})) &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left| \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + v_i \right) - \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}y_j + v_i \right) \right| = \\
&= \max_{i} \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \right| \cdot |x_j - y_j| \right\} \leqslant \\
&\leqslant \max_{i} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| . \max_{i} |x_j - y_j| \\
&\leqslant q . d_1(\overline{x},\overline{y}),
\end{aligned}$$

т.е. важи условот за контракција.

б) Да го разгледаме сега случајот кога $\|C\|_3 \leqslant q < 1$.

Сега $\mathbb{R}^n$ го разгледуваме како метрички простор со метрика d, определена со (5) од §4.4. И тука треба да го провериме само условот за контракција. Нека $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)$ и $\bar{y}=(y_1,\dots,y_n)$ се произволни вектори од $\mathbb{R}^n$. Имаме:

$$[d(f(\bar{x}),f(\bar{y}))]^2=\sum_{i=j}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}x_j+v_i-c_{ij}y_j-v_i)\right)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(x_j-y_j)\right)^2$$

Ако го земеме предвид неравенството на Коши-Буњаковски ((5) од §2.1), добиваме

$$[d(f(\bar{x}),f(\bar{y}))]^2\leqslant\sum_{i=1}\left(\sum_{j=1}c_{ij}^2\cdot\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^2.$$

Поради $\|C\|_3\leqslant q$, имаме $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^2\leqslant q^2$, па

$$[d(f(\bar{x}),\ f(\bar{y}))]^2\leqslant q^2[d(\bar{x},\bar{y})]^2,$$

односно $d(f(\bar{x}),f(\bar{y}))\leqslant qd(\bar{x},\bar{y})$, што значи дека f е контракција. ▯

При практична примена на Т.1, полесно е да се провери дали е исполнет условот а) отколку условот б). Задржувајќи се само на условот а), за оценка на апсолутната грешка што се прави кога точното решение x^* се замени со $x^{(k)}$ може да се искористи оценката при Банаховата теорема:

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i^*-x_i^{(k)}|\leqslant\frac{q^k}{1-q}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i^{(o)}-x_i^{(1)}| \qquad (5)$$

односно

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i^* - x_i^{(k)}| \leqslant \frac{q}{1-q} \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|. \qquad (5')$$

Од формулата (5) е очигледно дека почетното приближување може битно да влијае на бројот на итерациите за постигнување определена точност.

Да го илустрираме овој метод со еден пример.

Пример 3. Со помош на методот на последователни приближувања да најдеме приближно решение на системот

$$\begin{aligned} 10x + 2y - z &= 3 \\ x - 5y + 2z &= 17, \\ 4x - 2y + 8z &= 32. \end{aligned}$$

Системот ќе го напишеме во форма

$$\begin{aligned} x &= 0,3 - 0,2y + 0,1z, \\ y &= -3,4 + 0,2x + 0,4z, \\ z &= 4 - 0,5x + 0,25y, \end{aligned} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0,1 \\ 0,2 & 0 & 0,4 \\ -0,5 & 0,25 & 0 \end{bmatrix}.$$

Бидејќи

$$\sum_j |c_{1j}| = 0,3; \qquad \sum_j |c_{2j}| = 0,6; \qquad \sum_j |c_{3j}| = 0,75,$$

добиваме дека $\|C\|_1 = 0,75 < 1$, па итеративниот процес

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= 0,3 - 0,2y^{(k-1)} + 0,1\, z^{(k-1)} \\ y^{(k)} &= -3,4 + 0,2x^{(k-1)} + 0,4z^{(k-1)} \\ z^{(k)} &= 4 - 0,5x^{(k-1)} + 0,25\, y^{(k-1)} \end{aligned}$$

конвергира за кое било почетно приближување $(x^{(o)}, y^{(o)}, z^{(o)})$. Немајќи некое (грубо) приближно решение на системот, за почетно приближување е најдобро да се земат слободните членови, т.е.

$$x^{(o)}=0{,}3,\ y^{(o)}=-3{,}4,\ z^{(o)}=4.$$

Соодветните пресметувања ќе ги сместиме во долунаведената таблица.

к	0	1	2	3	4
$x^{(к)}$	0,3	1,38	0,948	0,9723	
$y^{(к)}$	-3,4	-1,74	-1,924	-2,0604	
$z^{(к)}$	4	3	2,875	3,045	

Да го земеме за приближно решение: $x^{(3)}=0{,}9723$; $y^{(3)}=-2{,}0604$; $z^{(3)}=3{,}045$ и да ја оцениме грешката според формулата (5). Најголемата од разликите меѓу почетното приближување (к=0) и првото (к=1) е $y^{(o)}-y^{(1)}=1{,}66$. Бидејќи $q=0{,}75$ и к=3, според (5) добиваме

$$\frac{0{,}75^3}{1-0{,}75}\cdot 1{,}66=\frac{0{,}00700354}{0{,}25}=0{,}02101416<0{,}03,$$

па значи грешката е помала од 0,03.

(Се разбира, дадениот систем можеме да го решиме на вообичаен начин (на пример, со постапно исклучување на непознатите) и да го добиеме неговото точно решение $x=1$, $y=-2$, $z=3$. Како што спомнавме, нашата цел беше само да го илустрираме методот на последователните приближувања.)

** Да забележиме дека, покрај условите во Т.1, постојат и други доволни услови за конвергенција на итеративниот процес (3). Може да се докаже, на пример, дека:

За да конвергира низата (3), доволно е сите сопствени вредности λ_i на матрицата C (т.е. решенијата на равенката $|\lambda E-C|=0$) по апсолутна вредност да се помали од единица:

$$|\lambda_i|<1\quad (i=1,\dots,n). \tag{6}$$

Ако се бара низата (3) да конвергира кон точното решение x^* за кое било почетно приближување $x^{(o)}$, тогаш условот (6) е и неопходен.

Теоремата 1, всушност е само специјален случај од една поопшта теорема: за низата $x^{(к)}$ во методот на прости итерации да конвергира доволно е некоја норма на матрицата C да е помала од единица. Во случаите кога е конвергентен, процесот конвергира со брзина на геометриска прогресија.

Пресметувањето на наредното приближување може да се врши и по формулата

$$x^{(k)} = b+Cb+\ldots+C^{k}b, \qquad (7)$$

којашто се добива од (3), земајќи $x^{(o)}=b$. Но, формулата (7) има еден сериозен недостаток: при големи n може да се натрупа голема грешка од заокружувањето; тој недостаток го нема формулата (3) зашто секоја итерација може да се смета за почетна и претходно направените грешки сами ги "изгладува".

Методот на последователни приближувања може да се примени и на комплексни системи, вршејќи ги пресметувањата директно, со комплексни броеви. Сепак, во современата практика, обично, дадениот комплексен систем се сведува на два реални система. **

4.6.МЕТОД НА ЗАЈДЕЛ

Овој метод претставува извесна модификација на методот на последователните приближувања. Да го земеме пак системот

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x_1+c_{12}x_2+\ldots+c_{1n}x_n+d_1 \\ x_2 &= c_{21}x_1+c_{22}x_2+\ldots+c_{2n}x_n+d_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= c_{n1}x_1+c_{n2}x_2+\ldots+c_{nn}x_n+d_n \ , \end{aligned} \qquad (1)$$

т.е. $x = Cx + d$.

При методот на последователните приближувања определувањето на $x_i^{(к)}$ го вршевме, всушност, заменувајќи ги $x_1,x_2,\ldots,x_n$ од десната страна на i-тата равенка со $x_1^{(к-1)},x_2^{(к-1)},\ldots,x_n^{(x-1)}$. За разлика од тоа, за пресметување на $x_i^{(к)}$ при методот на Зајдел $x_1,x_2,\ldots,x_{i-1}$ се заменуваат со $x_1^{(к)},x_2^{(к)},\ldots,x_{i-1}^{(к)}$ (коишто се веќе пресметани), додека $x_i,x_{i+1},\ldots,x_n$ од десната страна на i-тата равенка се заменуваат со $x_i^{(к-1)},\ldots,x_n^{(к-1)}$, т.е.

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j^{(k-1)} + d_i. \qquad (2)$$

За итерираната низа при методот на Зајдел се покажува дека

а) $\|C\|_1 \leqslant q < 1$; б) $\|C\|_2 \leqslant q < 1$.

е доволен услов за нејзината конвергенција.

При практичната примена на овој метод е позгодно ако равенките се подредат според растењето на сумите $\sum_{j=1}^{n} c_{ij}$ земајќи ја за прва таа равенка, на која ѝ одговара најмалата од споменатите суми.

На крајот ќе забележиме дека методот на Зајдел има предност пред методот на последователни приближувања (може побрзо да конвергира), но само во случајот кога $\|C\|_1 \leqslant q < 1$ (или $\|C\|_2 \leqslant q < 1$); во спротивно може да се случи итерираната низа по методот на Зајдел да не конвергира, додека итерираната низа по методот на последователни приближувања да конвергира.

За оценка на грешката при Зајделовиот метод можат да се земат истите формули како кај методот на последователни приближувања, т.е.

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i^* - x_i^{(k)}| \leqslant \frac{q^k}{1-q} \cdot \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i^{(o)} - x_i^{(1)}| \qquad (4)$$

или

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i^* - x_i^{(k)}| \leqslant \frac{q}{1-q} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| . \qquad (5)$$

Примената на Зајделовиот метод ќе ја илустрираме со еден пример.

<u>Пример 4.</u> Да најдеме приближно решение на системот (од примерот 3):

$$\begin{aligned} 10x+2y-z &= 3, \\ x-5y+2z &= 17, \\ 4x-2y+8z &= 32, \end{aligned} \qquad \text{т.е.} \qquad \begin{aligned} x &= 0,3-0,2y+0,1z \\ y &= -3,4+0,2x+0,4z \\ z &= 4-0,5x+0,25y. \end{aligned}$$

со Зајделовиот метод. Повторувањата ги вршиме според (2):

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= 0,3-0,2y^{(k-1)}+0,1z^{(k-1)} \\ y^{(k)} &= -3,4+0,2x^{(k)}+0,4z^{(k-1)} \\ z^{(k)} &= 4-0,5x^{(k)}+0,25y^{(k)}. \end{aligned}$$

84.6

Земајќи го истото почетно приближување $y^{(o)}=-3,4$ и $z^{(o)}=4$ (како во примерот 3), резултатите ќе ги сместиме во долунаведената таблица.

к	0	1	2	3	4
$x^{(к)}$	-	1,38	0,8977	0,943666	
$y^{(к)}$	-3,4	-1,524	-1,64886	-1,9556908	
$z^{(к)}$	4	2,929	3,13894	3,0392443	

Споредувајќи ја оваа таблица со таблицата од примерот 3 гледаме дека Зајделовиот метод, (во овој пример!) нема битна предност пред методот на последователни приближувања, но причината може да биде во тоа што е земен мал број итерации.

Постои и <u>друга форма на Зајделовиот метод.</u> Таа се карактеризира со тоа што системот Ax=b се трансформира во облик, во кој сите дијагонални коефициенти се различни од нула, а по можност преуредувањето на системот се врши така што тие коефициенти да се најголеми или, уште подобро, доминантни (т.е. $|a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$) во соодветните равенки.

Нека е дадено почетно приближување $\bar{x}^{(o)}=(x_1^{(o)},\dots,x_n^{(o)})$ кон решението на системот. Секое приближување $x^{(к+1)}$ ќе го наоѓаме со помш на $x^{(к)}$ од системот

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1^{(k+1)} + a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)} = b_1, \\
&a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \dots + a_{2n}x_n^{(k)} = b_2, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + a_{n3}x_3^{(k+1)} + \dots + a_{nn}x_n^{(k+1)} = b_n,
\end{aligned} \tag{6}$$

којшто, со разложување на матрицата A на збир од две матрици

$$G = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

може да се напише во следнава матрична форма:

$$Gx^{(k+1)} + Hx^{(k)} = b, \qquad (6')$$

т.е.

$$x^{(k+1)} = -G^{-1}Hx^{(k)} + G^{-1}b. \qquad (7)$$

Од (7) е јасно дека Зајделовиот метод во обликот (6) е еквивалентен со методот на прости итерации применет на системот

$$x = -G^{-1}Hx + G^{-1}b.$$

[** Според забелешката од крајот на претходниот параграф (во врска со таму наведениот услов (6)) можеме да заклучиме дека за конвергенција на методот (7) потребно и доволно е сите сопствени вредности на матрицата $C = -G^{-1}H$, т.е. сите корени на равенките $|-G^{-1}H - \lambda E| = 0$, по апсолутна вредност да се помали од единица. На тој услов може да му се даде попроста форма, во која не се бара "инверзија" на матрицата G, зашто

$$|-G^{-1}H - \lambda E| = |(-G^{-1})(H+\lambda E)| = |-G^{-1}|.|H+\lambda E|$$

и може да се формулира следнава теорема.

Теорема 2. Зајделовиот процес, определен со равенството (6), конвергира при кои било слободни членови $b_1,\ldots,b_n$ ако и само ако сите корени на равенката

$$\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

по апсолутна вредност се помали од единица. ▯

Во претходниот и во овој параграф разгледавме два метода на итерации: метод на прости итерации и Зајделов метод. Меѓутоа, постои голем број итеративни процеси, па ние ќе направиме, овде, неколку општи забелешки за нив.

Еден итеративен процес за решавање систем линеарни равенки

$$Ax = b \qquad (8)$$

се состои, прво, во формирање низа вектори $x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(n)},\ldots$ според формулата

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + H^{(k)}(b-Ax^{(k-1)}), \tag{9}$$

при што $H^{(\kappa)}$ е општ член на однапред зададена низа матрици и $x^{(o)}$ е дадено почетно приближување (обично, произволен вектор), а потоа во наоѓање на лимесот на таа низа (доколку е конвергентна).

Итеративниот процес (9) го задоволува "принципот на неподвижна точка", т.е. ако некое приближување $x^{(\kappa-1)}$ е еднакво со точното решение $x^* = A^{-1}b$ на (8), тогаш секое следно приближување е еднакво со x^*. Навистина од $x^{(k-1)} =$ и (9) следува дека

$$x^{(k)} = x^* + H^k(b-Ax^*) = x^* + H^{(k)}.0 = x^*.$$

Важи и обратното.

Привлечни својства на овие методи се: нивната едноставна реализација на електронските сметачки машини и нивната "самокорекција". Имено, една грешка во пресметувањата (ако не се компензира случајно со некои други грешки) при точните методи неизбежно доведува до грешки во резултатот, додека во случај на конвергентен итеративен процес грешката во некое приближување се исправува во наредните приближувања (таквата исправка ќе бара само уште неколку дополнителни чекори на еднообразни пресметувања).

Секако, својствата на равенките од еден линеарен систем, т.е. својствата на матрицата на системот битно влијаат на условите и на брзината на конвергенцијата на итеративниот процес.

Различните начини на избор на матриците $H^{(\kappa)}$ доведуваат до соодветни различни процеси.

Ако матрицата $H^{(\kappa)}$ не зависи од к (т.е. $H^{(\kappa)}$ е константна матрица), тогаш соодветниот процес се вика стационарен. Специјално, ако $H^{(\kappa)}=E$ се добива методот на последователни приближувања. Ако пак $H^{(\kappa)} \neq E$, но не зависи од к, тогаш итеративниот процес (9) може да се разгледува како метод на последователни приближувања применет на системот:

$$HAx = Hb.$$

Ако матриците $H^{(\kappa)}$ се повторуваат периодично по определен број итерации, на пример р, тогаш се добива т.н. цикличен процес. Тој не е стационарен процес, но може да се разгледа како таков ако р-те итерации што формираат еден циклус се сметаат за една итерација.

Итеративниот процес (9) при кој матрицата $H^{(\kappa)}$ се менува, се вика нестационарен. Нестационарните процеси се од два вида:

1) матрицата $H^{(\kappa)}$ се менува при секој чекор,

2) матрицата $H^{(\kappa)}$ се менува одвреме навреме.

(Со вториот случај можат да се постигнат две определени цели: едната – методот да се направи применлив за што поширока област; другата – методот да се приспособи на најдобар начин за конкретна задача.)

Кај нестационарните процеси, при к-тата итерација, матрицата $H^{(k)}$ обично се избира така што да се намалува некаква величина од која зависи грешката на приближувањето. Овој принцип (на избирање матрица $H^{(k)}$) се вика *релаксација*, а методот построен на тој принцип се вика *релаксационен метод*.

Меѓу релаксационите методи најраспространети се т.н. *координатни методи* (при кои матриците $H^{(k)}$ се избираат така што на секој чекор се менува една или неколку компоненти на приближувањето) и *градиентните методи* - при кои матриците $H^{(k)}$ се скаларни.

Основен недостаток на итеративните процеси е тој што тие не се универзални, т.е. имаат ограничена примена. **

4.7. МЕТОД НА ИТЕРАЦИИ ЗА НЕЛИНЕАРНИ СИСТЕМИ

Еден систем од n равенки со n непознати може да се претстави, во најопшт вид, на следниов начин:

$$F_1(x_1,\ldots,x_n)=0,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$F_n(x_1,\ldots,x_n)=0,$$

каде што F_i се реални функции од n реални независнопроменливи. Ако барем една од функциите F_i не е линеарна, тогаш системот се вика *нелинеарен*. Постои можност и ваквите системи да се решаваат со помош на итерации (при дадено почетно приближување). За да ја упростиме работата, методот што ќе го разгледаме овде ќе го изложиме за систем од две равенки со две непознати, но изнесените резултати може да се обопштат и за системи од n равенки со n непознати $(n>2)$.

Нека е даден системот од две равенки (во општ случај нелинеарни) со две непознати

$$\begin{aligned} F_1(x,y)&=0,\\ F_2(x,y)&=0, \end{aligned} \qquad (1)$$

и нека е претставен во форма

$$\begin{aligned} x&=f(x,y),\\ y&=g(x,y). \end{aligned} \qquad (2)$$

Да претпоставиме дека f и g се дефинирани во правоаголникот D: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. Ако ставиме:

$$X = (x,y),\ F(X) = (f(X),g(X)) = (f(x,y),g(x,y)),$$

ќе добиеме дека F го пресликува правоаголникот D во $\mathbb{R}^2$, а системот (1) можеме да го запишеме во форма

$$X = F(X). \tag{2'}$$

Така добиваме дека решенијата на (1) се фиксни точки на пресликувањето $F:D \to \mathbb{R}^2$. Бидејќи D е затворено подмножество од комплетниот метрички простор $\mathbb{R}^2$, следува дека и D е комплетен метрички простор со евклидската метрика од $\mathbb{R}^2$. Според Банаховата теорема за фиксна точка, ја добиваме следнава теорема:

Теорема 3. Нека D е затворен правоаголник во $\mathbb{R}^2$ и нека $F:D \to D$ е пресликување што го задоволува условот

$$d(F(X),F(Y)) \leqslant q d(X,Y)$$

за некој реален број $q: 0 < q < 1$. Тогаш постои во D едно и само едно решение X^* на равенката (2') кое се добива како лимес на низата (X_n),

$$X_n = F(X_{n-1}),\ n=1,2,\dots, \tag{3}$$

при произволно избрана почетна точка $X_0 \in D$. Притоа

$$d(X_n,X^*) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(X_0,X_1) \text{ односно } d(X_n,X^*) \leqslant \frac{q}{1-q} d(X_n,X_{n-1}). \tag{4}$$

Со оглед на тоа што $d(X,Y) = \sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}$ за $X=(x',y')$, $Y=(x'',y'')$ и бидејќи од $a \leqslant b$ следува $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$ при $a,b \geqslant 0$, теоремата 3 може да се искаже на следниов начин:

Теорема 3'. Нека $f(x,y)$ и $g(x,y)$ се дефинирани во правоаголникот D: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, при што

(а) $(\forall (x,y) \in D)\ \ a \leqslant f(x,y) \leqslant b,\ c \leqslant g(x,y) \leqslant d.$

(б) $(\exists q \in \mathbb{R},\ 0 < q < 1)\ (\forall (x',y'),\ (x'',y'') \in D)$

$$[f(x',y')-f(x'',y'')]^2+[g(x',y')-g(x'',y'')]^2 \leqslant$$
$$\leqslant q[(x'-x'')^2+(y'-y'')^2]$$

Тогаш системот (1) има единствено решение $(x^*,y^*)\in D$ што се добива како гранична вредност на итериранатa низа (x_{n+1},y_{n+1}):

$$x_{n+1}=f(x_n,y_n),\ y_{n+1}=g(x_n,y_n) \qquad (3')$$

за произволно избрана точка $(x_o,y_o)\in D$. Притоа:

$$|x_n-x^*|\leqslant \frac{2q^n}{1-q}M,\ \ |y_n-y^*|\leqslant \frac{2q^n}{1-q}M, \qquad (5)$$
$$M=\max\{(x_1-x_o)^2,\ (y_1-y_o)^2\}.\text{▯}$$

Функциите $f(x,y)$ и $g(x,y)$ се викаат итерирачки функции.

Ќе докажеме уште една теорема за решенијата на системот (1).

Теорема 4. Ако $f(x,y)$, $g(x,y)$ се дефинирани и имаат непрекинати парцијални изводи во правоаголникот $D: a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d$, така што

(а) $(\forall(x,y)\in D)\quad a\leqslant f(x,y)\leqslant b,\quad c\leqslant g(x,y)\leqslant d,$

(б$_1$) $p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2\leqslant q<1,$

при што

$$|f'_x|\leqslant p_1,\quad |f'_y|\leqslant p_2,\quad |g'_x|\leqslant p_3,\quad |g'_y|\leqslant p_4,$$

тогаш е точен заклучокот на теоремата 3'.

Доказ: Доволно е да докажеме дека е задоволен условот (б) од Т.3'.

Според Тајлоровата формула за функции од две независно-променливи при $n=1$ (тоа е аналог на Лагранжовата теорема) имаме:

$$f(x',y')-f(x'',y'')=(f'_x)_P(x'-x'')+(f'_y)_P(y'-y''),$$
$$g(x',y')-g(x'',y'')=(g'_x)_Q(x'-x'')+(g'_y)_Q(y'-y''),$$

каде што, на пример, $(f'_x)_P$ значи вредноста на f'_x во точката P која лежи на отсечката со крајни точки (x',y') и $(x",y")$. Користејќи го и неравенството на Коши-Буњаковски, добиваме:

$$\lfloor f(x',y')-f(x",y")]^2 \leqslant [(f'_x)^2_P+(f'_x)^2_P][(x'-x")^2+(y'-y")^2]$$

$$\leqslant(p_1^2+p_2^2)[(x'-x")^2+(y'-y")^2],$$

$$[g(x',y')-g(x",y")]^2 \leqslant (p_3^2+p_4^2)[(x'-x")^2+(y'-y")2\rfloor$$

и, со собирање, од последниве неравенства го добиваме условот (б) од Т.3'.▯

Може да се покаже дека важи и следнава теорема:

Теорема 5. Нека за функциите $f(x,y)$, $g(x,y)$ важат следниве три услови:

1) функциите $f(x,y)$, $g(x,y)$ се дефинирани и имаат непрекинати парцијални изводи на правоаголникот $D: a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d$,

2) во D се исполнети неравенствата:

$$|f'_x|+|f'_y|\leqslant q<1, \quad |g'_x|+|g'_y|\leqslant q<1, \tag{6}$$

каде што q е некоја константа,

3) последователните приближувања

$$x_{n+1}=f(x_n,y_n), \quad y_{n+1}=g(x_n,y_n), \tag{7}$$

$(n=0,1,2,\dots)$ не излегуваат од D за кое било почетно приближување x_0,y_0.

Тогаш итеративниот процес (7) е конвергентен и неговиот лимес $(x^*,y^*)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)$ во правоаголникот D е единственото решение на системот $x=f(x,y)$, $y=g(x,y)$.

За оценка на грешката, во овој случај, важи следнава формула:

$$|x^* - x_n| \leqslant \frac{q^n}{1-q}.K, \quad |y^* - y_n| \leqslant \frac{q^n}{1-q}.K, \qquad (8)$$

при што

$$K = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|.\square$$

** Забелешка 1. Теоремата 5 важи и во случајот кога условот (6) се замени со условот:

$$|f'_x| + |g'_x| \leqslant q < 1, \quad |f'_y| + |g'_y| \leqslant q < 1, \qquad (9)$$

а оценката на погрешноста за n-тото приближување може да се врши и со неравенството:

$$|x^* - x_n| + |y^* - y_n| \leqslant \frac{q}{1-q}(|x_n - x_{n-1}| + |y_{n-1} - y_n|).$$

Конвергенцијата на методот на итерации се смета за добра ако $q < 1/2$, така што ако во две последователни приближувања се совпаѓаат, да речеме, првите три децимали, тогаш грешката на последното приближување не е поголема од 0,001.

Забелешка 2. Наместо итеративниот процес (7), понекогаш е позгодно да се користи т.н. постапка на Зајдел:

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = g(x_{n+1}, y_n).$$ **

Примената на методот на итерации ќе ја илустрираме со еден пример.

Пример 5. За системот

$$x^3 + y^2 - 8x = 0, \qquad x^3 - y^2 - 6y + 2 = 0$$

да се најде едно од позитивните решенија.

Дадениот систем ќе го напишеме во форма:

$$x = \frac{1}{8}(x^3 + y^2) \equiv f(x,y), \quad y = \frac{1}{6}(x^3 - y^2) + \frac{1}{3} \equiv g(x,y).$$

Да го разгледаме квадратот $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Ако (x_0, y_0) е точка од тој квадрат, тогаш $0 \leqslant (x_0^3 + y_0^2)/8 \leqslant 1/4$, $(x_0^3 - y_0^2)/6 \leqslant 1/6$, па значи $0 \leq f(x_0, y_0) \leqslant 1/4$, $1/6 \leqslant g(x_0, y_0) \leqslant 1/2$. Следствено, точките од итерираната низа (x_n, y_n) ќе останат во правоаголникот $D: 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$, $\frac{1}{6} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$. За точките од D имаме:

$$|f'_x| + |f'_y| = \frac{1}{8}\ (3x^2+2y) < \frac{1}{8}(\frac{3}{16} + \frac{2}{2}) = \frac{19}{8.16} < 1,$$

$$|g'_x| + |g'_y| = \frac{1}{6}.3x^2 + \frac{1}{6}\left|- 2y\right| < \frac{1}{6}(\frac{3}{16} + \frac{2}{2}) = \frac{19}{6.16} < 1.$$

Значи, сите услови 1) до 3) од Т.5 се исполнети, па постои единствено решение на дадениот систем во правоаголникот D и тоа е лимес на низата (x_n, y_n) определена со:

$$x_{n+1} = \frac{1}{8}(x_n^3 + y_n^2), \qquad y_{n+1} = \frac{1}{6}\ (x_n^3 - y_n^2) + \frac{1}{3}\ .$$

Ставајќи $x_o=0$, $y_o=1/2$, добиваме:

$$x_1 = \frac{1}{8}.\ \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = 0{,}031, \quad y_1 = \frac{1}{6}(-\ \frac{1}{4}) + \frac{1}{3} = \frac{7}{24} = 0{,}292,$$

$$x_2 = \frac{1}{8}(0{,}000+0{,}075) = 0{,}009, \ y_2 = \frac{1}{6}(0{,}000-0{,}075) + \frac{1}{3} = 0{,}321$$

$$x_3 = \frac{1}{8}(0{,}000+0{,}103) = 0{,}012, \ y_3 = \frac{1}{6}(0{,}000-0{,}103) + \frac{1}{3} = 0{,}316,$$

$$x_4 = \frac{1}{8}(0{,}000+0{,}100) = 0{,}012, \ y_4 = \frac{1}{6}(0{,}000-0{,}100) + \frac{1}{3} = 0{,}316.$$

Земајќи го за q поголемиот од броевите $\frac{19}{8.16}$, $\frac{19}{6.16}$, т.е. $q = \frac{19}{6.16}$, добиваме дека $q < 1/2$, па според забелешката од Т.5, совпаѓањето на трите децимали во x_3, x_4 односно y_3, y_4 покажува дека грешката е помала од 0,001.

Значи, бараното решение е $x=0{,}312$, $y=0{,}316$ со точност до 0,001.

** Трансформирајќи го системот (1) во видот (2), може да се случи така определениот итеративен процес да не конвергира (в.вежба 34). За да се обезбеди исполнување на условите (6), функциите f и g треба "згодно" да се изберат. За таа цел се препорачува следнава постапка. Да ставиме:

$$f(x,y) = x + \alpha_1 F(x,y) + \alpha_2 G(x,y),$$
$$g(x,y) = y + \beta_1 F(x,y) + \beta_2 G(x,y). \qquad (\alpha_1\beta_2 \neq \beta_1\alpha_2)$$

Коефициентите $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ ќе ги одредиме како приближни решенија на следниов систем равенки:

$$\begin{aligned}1+\alpha_1(F'_x)_o+\alpha_2(G'_x)_o&=0,\\ \alpha_1(F'_y)_o+\alpha_2(G'_y)_o&=0,\\ \beta_1(F'_x)_o+\beta_2(G'_x)_o&=0,\\ 1+\beta_1(F'_y)_o+\beta_2(G'_y)_o&+0.\end{aligned}\qquad (10)$$

(Притоа: $(F'_x)_o=F'_x(x_o,y_o)$ итн.)

При таков избор на параметрите α_i, β_i условот (6) ќе биде исполнет ако парцијалните изводи на функциите F и G не се менуваат многу брзо во околина на точката (x_o,y_o).

Пример 6. Да избереме погодни итерирачки функции $f(x,y)$, $g(x,y)$ за системот

$$F(x,y)\equiv x^3+y^3-x=0,\qquad G(x,y)\equiv x^2-y=0$$

при

$$x_o=0,6,\quad y_o=0,4.$$

Функциите $f(x,y)$, $g(x,y)$ ќе ги бараме во видот

$$f(x,y)=x+\alpha_1(x^3+y^3-x)+\alpha_2(x^2-y),$$

$$g(x,y)=y+\beta_1(x^3+y^3-x)+\beta_2(x^2-y).$$

За определување на параметрите $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ ќе го составиме системот (10). Бидејќи

$$(F'_x)_o=(3x^2-1)_o=0,08,\quad (F'_y)_o=(3y^2)_o=0,48,$$

$$(G'_x)_o=(2x)_o=1,2,\qquad (G'_y)_o=-1,$$

системот (10) е:

$$\begin{aligned}1+0,08\alpha_1+1,2\alpha_2&=0\\ 0,48\alpha_1-\alpha_2&=0,\\ 0,08\beta_1+1,2\beta_2&=0,\\ 1+0,48\beta_1-\beta_2&=0,\end{aligned}$$

чие приближно решение е

$$\alpha_1 \approx -1,5; \quad \alpha_2 \approx -0,7; \quad \beta_1 \approx -1,8; \quad \beta_2 \approx 0,1.$$

Според тоа:

$$f(x,y) = x - 1,5(x^3 - y^3 - x) - 0,7(x^2 - y),$$

$$g(x,y) = y - 1,8(x^3 + y^3 - x) + 0,1(x^2 - 1). \qquad \underline{**}|$$

4.8. ЊУТН-РАФСОНОВ МЕТОД ЗА НЕЛИНЕАРНИ СИСТЕМИ

И овој метод, за попросто, ќе го изложиме за систем од две равенки со две непознати.

Нека е даден системот

$$\begin{aligned} F(x,y) &= 0, \\ G(x,y) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

За овој систем ќе претпоставиме дека:

1) има решение (x^*, y^*),

2) $F(x,y)$ и $G(x,y)$ имаат непрекинати први и втори парцијални изводи,

3) $D(\frac{F,G}{x,y})_* \neq 0$, каде што $D(\frac{F,G}{x,y})_*$ е јакобијанот во точката (x^*, y^*), т.е.

$$D(\frac{F,G}{x,y})_* = \begin{vmatrix} F_x(x^*,y^*) & F_y(x^*,y^*) \\ G_x(x^*,y^*) & G_y(x^*,y^*) \end{vmatrix}$$

или, кратко:

$$D(\frac{F,G}{x,y})_* = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_* = (F_xG_y - G_xF_y)_*.$$

Ако се разгледува $D(\frac{F,G}{x,y})$ во произволна точка, тогаш таа е функција по x,y изразена преку F_x, F_y, G_x, G_y. Поради претпоставката дека овие парцијални изводи се непрекинати, следува дека и $D(\frac{F,G}{x,y})$ е непрекината функција, па тогаш од $D(\frac{F,G}{x,y})_* \neq 0$ следува дека $D(\frac{F,G}{x,y}) \neq 0$ во некоја околина на точката (x^*,y^*). Да ја означиме таа околина со U^* и да земеме $(x_o,y_o) \in U^*$. Ќе ја напишеме Тајлоровата формула (за n=2) за функциите F(x,y) и G(x,y) во околина на (x_o,y_o):

$$F(x_o+h,y_o+k) - F(x_o,y_o) = F_x(x_o,y_o)h + F_y(x_o,y_o)k + \frac{1}{2!}d^2F(\xi_1,\eta_1)$$

$$\xi_1 = x_o+\theta_1 h, \quad \eta_1 = y_o+\theta_1 k, \quad 0<\theta<1,$$

$$G(x_o+h,y_o+k) - G(x_o,y_o) = G_x(x_o,y_o)h + G_y(x_o,y_o)k + \frac{1}{2!}d^2G(\xi_2,\eta_2)$$

$$\xi_2 = x_o+\theta_2 h, \quad \eta_2 = y_o+\theta_2 k, \quad 0<\theta_2<1.$$

Ако земеме да е $x_o+h=x^*$, $y_o+k=y^*$, тогаш горните равенства добиваат форма:

$$F_x(x_o,y_o)h + F_y(x_o,y_o)k = -F(x_o,y_o) - \frac{1}{2}d^2F(\xi_1,\eta_1),$$

$$G_x(x_o,y_o)h + G_y(x_o,y_o)k = -G(x_o,y_o) - \frac{1}{2}d^2(\xi_2,\eta_2).$$

Ако ги изоставиме членовите $\frac{1}{2}d^2F(\xi_1,\eta_1)$, $\frac{1}{2}d^2G(\xi_2,\eta_2)$ во кои h,k се на втор степен, ќе добиеме систем по h_1 и k_1, коишто можат да се земат за приближни вредности за h и k:

$$(F_x)_o h_1 + (F_y)_o k_1 = -(F)_o$$

$$(G_o)_o h_1 + (G_y)_o k_1 = -(G)_o$$

при што $(F_x)_o = F_x(x_o,y_o)$ итн. Детерминантата на овој систем е

$(F_xG_y - G_xF_y)_o = D(\frac{F,G}{x,y})_o \neq 0$, па тој има решение:

$$h_1 = \frac{\begin{vmatrix} F & F_y \\ G & G_y \end{vmatrix}_0}{(F_xG_y-G_xF_y)_0} = -\frac{(FG_y-GF_y)_0}{(F_xG_y-G_xF_y)_0}, \quad k_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_x & F \\ G_x & G \end{vmatrix}_0}{(F_xG_y-G_xF_y)_0} = \frac{(F_xG-G_xF)_0}{(F_xG_y-G_xF_y)_0}.$$

Тогаш (x_1,y_1) со

$$x_1 = x_0 + h_1, \quad y_1 = y_0 + k_1$$

е приближно решение на системот (1).

Во иста смисла можеме да продолжиме со (x_1,y_1) наместо со (x_0,y_0) за добивање $x_2=x_1+h_2$, $y_2=y_1+k_2$; итн. Продолжувајќи така, можеме да добиеме низа

$$(x_1,y_1), \quad (x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n),\dots \tag{2}$$

определена со:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{\begin{vmatrix} F & F_y \\ G & G_y \end{vmatrix}_{n-1}}{D(\frac{F,G}{x,y})_{n-1}} = x_{n-1} - \frac{(FG_y - GF_y)_{n-1}}{(F_xG_y - G_xF_y)_{n-1}} \tag{3}$$

$$y_n = y_{n-1} - \frac{\begin{vmatrix} F_x & F \\ G_x & G \end{vmatrix}_{n-1}}{D(\frac{F,G}{x,y})_{n-1}} = y_{n-1} - \frac{(F_xG - G_xF)_{n-1}}{(F_xG_y - G_xF_y)_{n-1}},$$

каде што, $(\dots)_{n-1}$ означува дека треба да се земат вредностите во точката (x_{n-1},y_{n-1}) на сите функции што се јавуваат во заградите.

Се покажува дека е точна следнава теорема:

Теорема 6. Нека системот (1) има решение (x^*,y^*) и нека во некоја околина на таа точка $F(x,y)$ и $G(x,y)$ имаат непрекинати први и втори парцијални изводи. Ако (x_0,y_0) е "доволно блисна" до (x^*,y^*), тогаш низата (2), определена со (3), конвергира кон (x^*,y^*). ▯

Изнесениот метод се вика Њутн-Рафсонов метод.

Пример 7. Да ги најдеме реалните корени на системот

$$F(x,y)\equiv x-x^3y+4=0,\qquad G(x,y)\equiv x^2-2y^3+1=0$$

со помош на Њутн-Рафсоновиот метод.

Графички ги наоѓаме приближните вредности $x_0=1,7$ и $y_0=1,2$. Јакобијанот во таа точка е

$$D\left(\frac{F,G}{x,y}\right)_0=\begin{vmatrix}1-3x^2y & -x^3\\ 2x & -6y^2\end{vmatrix}_0=\begin{vmatrix}-9,40 & -4,91\\ -3,4 & -8,64\end{vmatrix}=97,910,$$

па според формулата (3) добиваме:

$$x_1=1,7-\frac{1}{97,910}\begin{vmatrix}-0,1956 & -4,91\\ 0,434 & -8,64\end{vmatrix}=1,7-0,0390=1,6610,$$

$$y_1=1,2-\frac{1}{97,910}\begin{vmatrix}-9,40 & -0,1956\\ 3,4 & 0,434\end{vmatrix}=1,2+0,0349=1,2349.$$

Пак според (3), добиваме

$$x_2=1,6615,\qquad y_2=1,2343,\quad \text{итн.}$$

4.9. ВЕЖБИ

1. Со помош на Гаусовиот метод на елиминација, задржувајќи една децимала при пресметувањата, да се реши системот:

а)
$$\begin{aligned}-x_1+x_2+2x_3-2x_4&=-1,\\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4&=7,\\ 3x_1-3x_2+x_3+2x_4&=5,\\ -x_1+x_2+x_4&=4.\end{aligned}$$

б)
$$\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3+x_4&=2,\\ 3x_1-x_2+x_3-2x_4&=1,\\ 4x_1+x_2-2x_3+x_4&=1,\\ -x_1-x_2-x_3+x_4&=2.\end{aligned}$$

в)
$$\begin{aligned}x_1+2x_2-3x_3&=1,\\ 4x_1-x_2-3x_3&=2,\\ 3x_1-2x_2-x_3&=3.\end{aligned}$$

2. Следниот систем линеарни равенки да се реши со Гаусовиот метод, 1) без пермутирање на равенките, 2) со избор на главен елемент.

а)
$$\begin{aligned}2x_1-x_2-2x_3&=-1,\\ x_1+x_2+x_3&=2,\\ 3x_1-x_2+x_3&=4,\end{aligned}$$

б)
$$\begin{aligned}2,10x_1-4,50x_2-2,00x_3&=19,07\\ 3,00x_1+2,50x_2+4,30x_3&=3,21\\ -6,00x_1+3,50x_2+2,50x_3&=-18,25\end{aligned}$$

Пресметувањата да се вршат со точност до три значајни цифри.

3. Даден е системот равенки $\{4x-221y=2,8;\ \ 5x-276y=4,5\}$.

а) Како ќе се промени резултатот ако наместо 2,8 ставиме 3,1 (т.е. ако 2,8 се измени приближно за 10%)?

б) Што значи геометриски еден систем од две линеарни равенки со две непознати да е нестабилен?

4. Покажи дека решението на системот

$$\begin{aligned}10x_1+7x_2+8x_3+7x_4&=32,\\ 7x_1+5x_2+6x_3+5x_4&=23,\\ 8x_1+6x_2+10x_3+9x_4&=33,\\ 7x_1+5x_2+9x_3+10x_4&+31,\end{aligned}$$

е (1,1,1,1) и дека тој е многу нестабилен заменувајќи ја вектор-колоната од десната страна со (32,1; 22,9; 32,9; 31,1) и заокружувајќи на првата децимала при пресметувањата. Кое е решението во тој случај?

5. Да се најде детерминантата од матрицата на системот од:

а) вежбата 1;   в) вежбата 4,

користејќи ја постапката аналогна на Гаусовиот метод за линеарни системи. (Пресметувањата да се вршат со точноста што е укажана таму.)

6. Да се најде инверзната матрица од матрицата на системот равенки

а) од примерот 1; б) од примерот 2;

в) од вежбата 2 ; г) од вежбата 4.

(Пресметувањата да се вршат со точноста што е назначена таму).

7. Знаејќи ја A^{-1}, решението на системот $Ax=b$ може да се напише во форма форма

$$x=A^{-1}b\ .$$

Најди го во таква форма решението на системот:

а)

$$x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{3}x_3=-0{,}03,$$

$$\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{4}x_3=0{,}12,$$

$$\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{5}x_3=-0{,}10;$$

б)

$$x_1+2x_2-\frac{1}{3}x_3+\frac{1}{4}x_4=0{,}5$$

$$\frac{1}{5}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{4}x_3+x_4=0{,}3$$

$$\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+x_3-\frac{1}{4}x_4=0{,}1$$

$$\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{5}x_3+x_4=1{,}0.$$

Пресметувањата да се вршат со заокружување на втората децимала.

8. Во кој случај е згодно да се пресметува инверзната матрица при системи линеарни равенки?

9. Како може проблемот за решавање системи линеарни равенки со комплексни коефициенти да се замени со проблемот за решавање систем со реални коефициенти?

10. Да се реши системот

$$\{ix_1-ix_2+x_3=2,\quad x_1+x_2-ix_3=0,\quad ix_2+x_3=1\}$$

со методот од претходната задача, т.е. сведувајќи го дадениот систем на два такви реални системи.

11. Да се најде бројот на операциите множење и делење, коишто се извршуваат при Гаусовиот метод (сметајќи ги и операциите со очигледен резултат: делење на број сам со себе и множење на број со единица).

12. Да се покаже дека бројот на множењата и делењата што се потребни за решение на линеарен систем од n-ти ред по методот на оптимално исклучување е еднаков со $\frac{1}{3}n(n^2+3n+2)$.(Да се уочи дека тој број е скоро толкав колку при Гаусовиот метод; види го резултатот на претходната задача).

13. Нека $\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$,т.е.$\bar{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, $\bar{y}=(y_1,\ldots,y_n)$. Изразот $x_1y_1+\ldots+$ $+x_ny_n$ се вика скаларен производ на векторите $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и се означува со $(\bar{x},\bar{y})$. Значи:

$$(\bar{x},\bar{y})=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n.$$

Да се покаже дека:

1) $(\bar{x},0)=(\bar{0},\bar{y})=0$; 2) $(\bar{x},\bar{y})=(\bar{y},\bar{x})$;

3) $\alpha(\bar{x},\bar{y})=(\alpha\bar{x},\bar{y})=(\bar{x},\alpha\bar{y})$, $\alpha\in\mathbb{R}$;

4) $(\bar{x}+\bar{y},\bar{z})=(\bar{x},\bar{z})+(\bar{y},\bar{z})$;

5) $(\bar{x},\bar{x})\geqslant 0$.

14. Бројот $|\bar{x}|=\sqrt{(\bar{x},\bar{x})}$ се вика должина на векторот $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$.

Ако $\bar{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$, $\bar{b}=(b_1b_2,\dots,b_n)$, докажи дека

$$|(\bar{a},\bar{b})|\leqslant|\bar{a}|.|\bar{b}| \qquad (1)$$

(неравенство на Коши-Буњаковски).

Упатство. За $\bar{b}=\bar{0}$, (1) важи. За $\bar{b}\neq\bar{0}$, стави $c=a-\alpha b$ и определи го скаларот α така што $(\bar{c},\bar{b})=0$, т.е. $\alpha=\dfrac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{b}|^2}$. Потоа, најди го $(\bar{c},\bar{c})$ и искористи го неравенството $(\bar{c},\bar{c})\geqslant 0$.

Неравенството (1) во "развиена" форма е ((5) од §2.1):

$$|a_1b_1+\dots+a_nb_n|\leqslant\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}.\sqrt{b_1^2+\dots+b_n^2} \qquad (1')$$

15. Да се спроведе со сите подробности доказот дека со секој од следниве изрази е определена норма во $\mathbb{R}^n$

1) $\|x\|_1=\max\limits_i |x_i|$; 2) $\|x\|_2=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$.

3) $\|\bar{x}\|_3=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}=(\bar{x},\bar{x})^{1/2}$.

16. Дадени се векторите $\bar{a}=(2,1,2,-3)$, $\bar{b}=(3,0,-2,4)$ во $\mathbb{R}^4$.

а) Да се пресмета $(\bar{a},\bar{b})$.

б) Да се покаже дека: $\|\bar{a}\|_1\leqslant\|\bar{a}\|_2\leqslant 4\|\bar{a}\|_1$;

$\|\bar{a}\|_1\leqslant\|\bar{a}\|_3\leqslant 2\|\bar{a}\|_1$; $\frac{1}{2}\|\bar{a}\|_2\leqslant\|\bar{a}\|_3\leqslant\|\bar{a}\|_2$.

17. Да се докаже дека важат следниве неравенства за нормите од вежбата 15:

а) $\|\bar{x}\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant k\|\bar{x}\|_1$; б) $\|\bar{x}\|_1\leqslant\|\bar{x}\|_3\leqslant\sqrt{k}\,\|\bar{x}\|_1$;

в) $\frac{1}{\sqrt{k}}\|\bar{x}\|_2\leqslant\|\bar{x}\|_3\leqslant\|\bar{x}\|_2$.

18. Докажи дека: ако $||x||$ е норма во $\mathbb{R}^n$, а р е позитивен реален број, тогаш и $p||x||$ е норма во $\mathbb{R}^n$.

18'. Докажи дека за норма на вектори важи неравенството

$$\big|\,||\bar{x}|| - ||\bar{y}||\,\big| \leqslant ||\bar{x}-\bar{y}||.$$

19. Да се покаже дека множеството точки $(x_1,\dots,x_n)$ од $\mathbb{R}^n$ за кои векторот $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)$ има норма 1, е ограничено и затворено множество во $\mathbb{R}^n$.

20. Да се спроведе во сите подробности доказот дека со секој од следниве изрази е определена норма во векторскиот простор од сите квадратни матрици $A=[a_{ij}]$ од n-ти ред:

а) $||A||_1 = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ б) $||A||_2 = \max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

в) $||A||_3 = \Big(\sum\limits_{i,j=1} |a_{ij}|^2 \Big)^{1/2}$; г) $M(A) = n \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$

21. Да се најде $||A||_i$ $(i=1,2,3)$ и $M(A)$ ако (вежба 20):

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ б) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

22. Ако А е норма на матрицата А, докажи дека $||A^k|| \leqslant ||A||^k$.

23. Дали постои матрична норма за која $||AB|| = ||A|| \cdot ||B||$?

24.* Да се покаже дека матричната норма $M(A)$ (од вежбата 20) е усогласена со векторските норми $||\bar{x}||_1$, $||\bar{x}_2||$, $||\bar{x}||_3$ а $||A||_3$ - со $||\bar{x}||_3$.

25. За системот

$$x_1=0,12x_1 - 0,06x_2 + 0,09x_3 + 0,32$$
$$x_2=0,17x_1 + 0,11x_2 - 0,07x_3 - 0,21$$
$$x_3=0,14x_1 - 0,15x_2 - 0,08x_3 + 0,18$$

да се увиди дека се исполнети условите на Т.1 и да се реши со помош на методот на последователни приближувања со точност до три децимали, земајќи за почетно приближување $x_1^{(o)}=x_2^{(o)} = x_3^{(o)} = 0$.

26.* Една квадратна матрица $A=[a_{ij}]$ се вика дијагонално доминантна ако $|a_{ii}| > \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ за секој $i=1,2,\dots,n$.

§4.9

Нека матрицата A на системот линеарни равенки Ax=b е дијагонално доминантна и нека тој систем е трансформиран во системот x=Cx+d, решавајќи ја i-тата равенка по i-тата непозната за i=1,2,...,n. Да се покаже дека итеративниот процес, определен со матричната равенка x=Cx+d, ќе конвергира кон единствено решение на системот Ax=b.

27. Следниот систем Ax=b да се реши со методот на последователни приближувања продолжувајќи ги итерациите сè додека разликата меѓу последователните приближувања $x_i^{(k)}$ не стане помала од дадениот број ϵ.

Во задачите а) и б) одговорот да се спореди со даденото точно решение.

а) $$A=\begin{bmatrix}10 & 1 & -1\\ 1 & 10 & 1\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}20\\ 13\\ 9\end{bmatrix},\ \epsilon=10^{-3};\quad x=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}.$$

б) $$A=\begin{bmatrix}9{,}3 & 2{,}1 & 1{,}3 & 0{,}5\\ 2{,}1 & 10{,}2 & 3{,}1 & 1{,}5\\ 1{,}3 & 3{,}1 & 8{,}6 & 0{,}6\\ 0{,}5 & 1{,}5 & 0{,}6 & 5{,}0\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}9{,}0\\ 2{,}0\\ -6{,}1\\ 9{,}9\end{bmatrix},\ \epsilon=10^{-3};\quad \begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\\ 2\end{bmatrix}=x.$$

в) $$A=\begin{bmatrix}24{,}41 & 2{,}42 & 3{,}85\\ 2{,}31 & 31{,}49 & 1{,}52\\ 3{,}49 & 4{,}85 & 28{,}92\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}30{,}24\\ 40{,}75\\ 42{,}81\end{bmatrix}=b,\ \epsilon=10^{-4}$$

28. Решението на системот линеарни равенки $5x_1+x_2=4$, $x_1-4x_2=5$ е $x_1=1$, $x_2=-1$.

а) Применувајќи го методот на последователни приближувања, да се најде приближното решение што се добива при четвртата итерација почнувајќи со $x_1^{(o)}=x_2^{(o)}=0$.

б) При која итерација се добива приближното решение од а) ако се примени Зејделовиот метод?

29. Даден е системот

$$\{8x-y+2z=4,\quad x-10y-6z=3,\quad 4x-2y+8z=8\}.$$

Да се уочи дека системот е дијагонално доминантен и, доведувајќи го во нормална форма (т.е. во форма x=Cx+d), да се примени методот на последователни приближувања, почнувајќи со (0,0,0) и земајќи четири итерации. Потоа, при истите услови, да се примени методот на Зејдел и добиените резултати да се споредат.

30. Ако во системот линеарни равенки од примерот 4 се изврши размена на непознатите: x → y, y → x и z → z, тогаш се добива системот

$$\{-5x+y+2z=17,\quad 2x+10y-z=3,\quad -2x+4y+8z=32\}.$$

Уочи дека равенките се подредени според растењето на сумите од апсолутните вредности на коефициентите пред непознатите. Примени го методот на Зејдел и спореди ги пресметувањата со тие од примерот 4.

31. Да се решат системите од вежбата 27 со Зајделовиот метод при истите услови, назначени таму.

32. Да се одредат приближно (по графички пат или инаку) решенијата на дадениот систем, а потоа, со методот на последователни приближувања да се уточни едно од нив при укажаното почетно приближување.

а) $\{x^3-y^2-6y+2=0,\quad x-y=0\}$, $x_0=y_0=0,5$;

две итерации.

б) $\{x^3+y^2-8x+4=0,\ x^3-y^2-6y+2=0\}$, $x_0=y_0=0,5$;

три итерации.

в) $\{x=\sin(x+y),\ y=\cos(x-y)\}$, $x_0=y_0=0$;

седум итерации.

Да се оцени грешката.

33. Даден е системот равенки

$$x=-2y+3, \qquad y=\frac{1}{4}(x+3).$$

а) Дали е задоволен условот (6) од Т.5?

б) Покажи дека $x_{n+1}=-2y_n+3$, $y_{n+1}=\frac{1}{4}(x_{n+3})$ конвергира кон решението $x=y=1$ почнувајќи со $x_0=y_0=0$.

в) Објасни го неслагањето меѓу резултатите во а) и б).

34. Покажи по графички пат дека системот равенки

$$\{x+3.\mathrm{lg}x-y^2=0,\quad 2x^2-xy-5x+1=0\}$$

има приближни решенија (1,4; -1,4) и (3,4; 2,2). Уточни го приближното решение $x_0=3,4$, $y_0=2,2$ со методот на последователни приближувања, претходно трансформирајќи го системот вака:

$$x=\sqrt{\frac{x}{2}(5+y)-\frac{1}{2}}, \qquad y=\sqrt{x+3.\mathrm{lg}x}.$$

(Да се земат: една; две; четири итерации.)

Дали итеративниот процес ќе конвергира, ако дадениот систем се доведе во вид $x=y^2-3.\mathrm{lg}x$, $y=2x+\frac{1}{x}-5$?

35. Да се изберат погодни итерирачки функции $f(x,y)$, $g(x,y)$ за системот

а) $x^2+y^2-1=0$, $x^3-y=0$, при $x_0=0,8$, $y_0=0,55$

б) $x^2-y^2+1=0$, $x^4-y=0$, при $x_0=1,1$, $y_0=1,5$.

36. Да се уточнат приближните решенија (3,3; -3,0) и (-1,53; 0,04) на системот равенки

$$4+x+y-x^2+2xy+3y^2=0, \quad 1+2x-3y+x^2+xy-2y^2=0$$

со Њутн-Рафсоновиот метод ограничувајќи се на пет десетични места.

37. Да се одредат приближно (по графички пат или инаку) решенијата на дадениот систем, а потоа да се уточни едно од нив, со Њутн-Рафсоновиот метод, почнувајќи со наведените приближувања x_o, y_o.

а) $\{x^2+y^2-4=0,\ xy=1\}$, $x_o=2$, $y_o=0$; со една; две итерации.

б) $\{x^2-y^2-1=0,\ x^2-2x+y^2=0\}$, $x_o=1,5$, $y_o=1$; со една; две; три итерации.

в) $\{x^3-2x^2-x+2-y=0,\ x-y=0\}$, $x_o=y_o=0$; две итерации.

г) $\{x+3\cdot\lg x-y^2=0,\ 2x^2-xy-5x+1=0\}$, $x_o=3,4$, $y_o=2,2$;

со: едно; две повторувања. (Спореди ги резултатите со тие во в.34).

д) $\{4x^3-27xy^2+25=0; \quad 4x^2-3y-1=0\}$, $x_o=y_o=1$.

38. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x-0,7\sin x+0,2\cos x=0 \\ y-0,7\cos x+0,2\sin x=0 \end{cases}$$

а) со методот на последователни приближувања,

б) со Њутн-Рафсоновиот метод,

почнувајќи со $x_o=y_o=0$, заокружувајќи на третата децимала.

ИНТЕРПОЛАЦИЈА

Во оваа глава се разгледуваат Лагранжовата и Њутновите интерполациони формули, како и Ејткиновата постапка за образување интерполациони полиноми. Добиените формули се користат и за екстраполација, обратно интерполирање и за приближно диференцирање, при што се разгледува и проблемот за оценка на грешката при интерполацијата.

5.1. ЗАДАЧА НА ИНТЕРПОЛАЦИЈАТА

Наоѓањето на вредности на некоја функција, зададена со некој аналитички израз, дури и во случаи кога тој израз е доста едноставен, често изискува комплицирани и обемни пресметувања. Затоа, за практично користење на некои "многу потребни" функции се составени готови таблици на нивните вредности. Такви се, на пример, таблиците на: логаритми, тригонометриски функции, кубни корени и други. Меѓутоа, секоја таблица, колку и да е опширна, е "конечна", т.е. содржи вредности на функцијата само за конечен број вредности на аргументот содржани во некој конечен сегмент $[a,b]$.

Поради тоа, понекогаш сме принудени да најдеме вредност на функцијата за некоја вредност на аргументот што не се содржи во таблицата и, притоа, да ги користиме само податоците од таблицата. (Тоа често го правиме, на пример при користењето на логаритамските таблици.) Слободно речено, ние, во такви случаи вршиме "пополнување на празнини" меѓу вредностите на аргументот во таблицата, или, како што инаку се вели, вршиме "интерполирање".

Во други случаи, пак, обично како резултат на разни експерименти, се јавуваат функции зададени само со таблица на вредности без никаков аналитички израз. Да разгледаме еден таков пример.

Пример 1. При мерењето на моментната брзина на некоја материјална точка (на пример, автомобил во движење), во зависност од времето, добиени се следниве резултати:

t	0	10	20	30	40	50
$v=f(t)$	8	14	18	20	20	18

(притоа: t е времето мерено во секунди, а $v=f(t)$ е брзината во m/sek).

По завршувањето на експериментот, дадената таблица е единственото средство за пресметување вредности на функцијата $f(t)$ во моментите кога не се вршени мерења (на пример, во седумнаесеттата секунда), зашто не знаеме никаков аналитички израз, т.е. "формула" за $f(t)$. Предностите од располагањето со некој аналитички израз што ја претставува брзината во секој момент од интервалот $[0,50]$ се очигледни: во таков случај ние можеме да пресметаме со каква брзина се движела материјалната точка во кој било момент. Затоа би било згодно да најдеме некоја функција $\phi(t)$ чии вредности за $t=0$, 10, 20, 30, 40, 50 би се совпаѓале со соодветните вредности на $f(t)$, а во интервалите кога не се вршени мерења, $\phi(t)$ приближно, но "доволно добро" да ја претставува $f(t)$. (Може да се покаже дека за конкретниот случај би била "доволно добра" функцијата $\phi(t)=8+0,7t-0,01t^2$.)

Општо, ако е дадена функција чија аналитичка форма е или сосема непозната или незгодна за пресметувања, тогаш е пожелно таа да се замени со некоја друга функција, удобна и едноставна за пресметувања, а "доволно блиска" до дадената. Таа операција на заменување на една функција со друга, поедноставна, ја претставува основната задача на интерполацијата.

Според тоа, интерполацијата опфаќа две задачи:

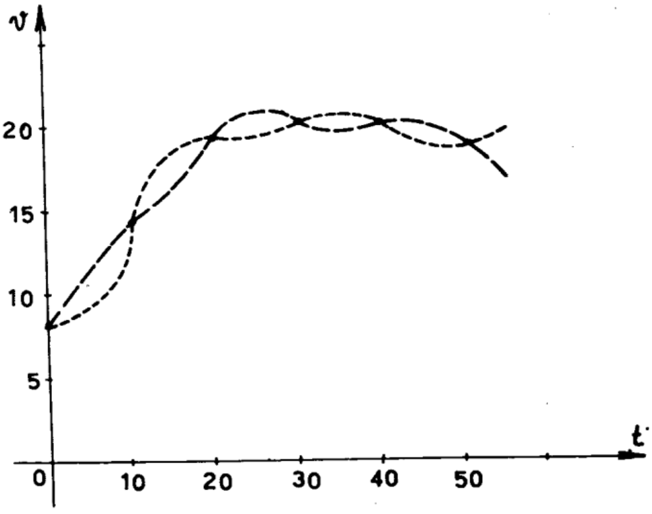
- наоѓање приближен аналитички израз за функцијата f(x) зададена само со таблица од вредности,

- пресметување приближни вредности на f(x) за вредности на x што не се во дадената таблица (а се наоѓаат помеѓу некои таблични вредности на аргументот).

Да го појасниме сето тоа попрецизно. За функцијата f(x), каква и да е, нека е позната само таблицата на нејзините вредности во точките $x_o, x_1, \ldots, x_n$:

$$f(x_o)=y_o,\ f(x_1)=y_1,\ldots,f(x_n)=y_n; \qquad (1)$$

се бара функција $\phi(x)$ која се совпаѓа со f(x) во дадените точки. Геометриски тоа значи дека се бара крива $y=\phi(x)$ која минува



Црт.1

низ точките (x_o,y_o), $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ (црт.1 за случајот од примерот 1). Низ тие точки можат да се повлечат безброј многу криви, па значи задачата има безброј многу решенија. За да биде решението на оваа задача еднозначно, се стеснува класата функции во која се бара решение, а најчесто се избира класата полиномни функции. Така, задачата се сведува на наоѓање полином P(x) со степен не поголем од n, таков што

$$P(x_o)=y_o,\ P(x_1)=y_1,\dots,P(x_n)=y_n. \qquad (2)$$

Натаму се смета дека P(x) ја "претставува" функцијата f(x), макар и приближно на најмалиот можен сегмент a,b кој ги содржи точките $x_o,x_1,\dots,x_n$, т.е. графикот на f(x) на [a,b] е заменет со некоја парабола - со графикот на P(x).

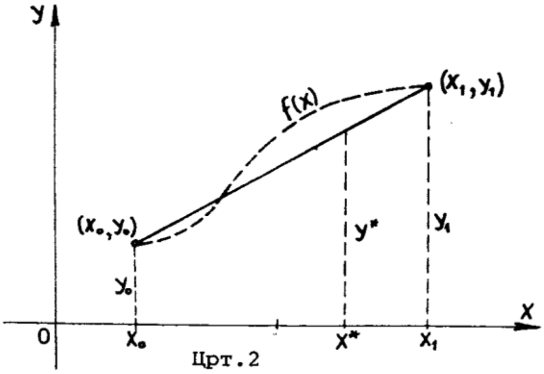
Поради тоа, задачата за наоѓање на P(x) што го задоволува условот (2) се вика параболична интерполација. Дадените точки $x_o,x_1,\dots,x_n$ се викаат јазли на интерполацијата, P(x) се вика интерполационен полином за f(x), а формулите за неговото добивање - интерполациони формули. Растојанието меѓу два соседни јазли се вика чекор на интерполацијата. Ако јазлите $x_o,x_1,\dots,x_n$ се распоредени на еднакви меѓусебни растојанија, тогаш чекорот на интерполацијата е постојан (или рамномерен), а во спротивниот случај тој е променлив.

Кон задачата на интерполацијата често се приклучува и т.н. задача за екстраполација: наоѓање вредности на функцијата f(x) за вредности на аргументот што се надвор од сегментот $[x_o,x_n]$ (при што x_o е земена за најлева, а x_n за најдесна од дадените точки).

Во случај кога интерполацијата се врши со полином P(x) од прв степен, тогаш таа се вика линеарна интерполација, а ако P(x) е од втор степен, интерполацијата се вика квадратна.

На крајот ќе се задржиме кратко на линеарната интерполација - наједноставната и најчесто применувана.

Нека е зададена таблица, со чекор h и нека за x_o и $x_1=x_o+h$ од таа таблица вредностите на функцијата f(x) се $y_o=f(x_o)$ и $y_1=f(x_1)$. Се бара вредноста на f(x) за $x=x^*$, $x_o<x^*<x_1$, т.е. за некоја произволна вредност $x^*\in(x_o,x_1)$ што не се наоѓа во таблицата. Да ја означиме бараната вредност со $y^*=f(x^*)$ и да ја одредиме употребувајќи линеарна интерполација. Геометриски, да се примени линеарна интерполација на сегментот $[x_o,x_1]$ значи дека правата определена со точките (x_o,y_o) и (x_1,y_1), ќе го заменува графикот на f(x) во тој сегмент. И така, y^* ќе претставува ордината на онаа точка што лежи на правата, а има апсциса x^* (црт.2).



Црт.2

Од равенката на таа права,

$$y - y_o = \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o}(x - x_o),$$

ја добиваме следнава формула за пресметување на ординатата y^*:

$$y^* = y_o + \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o}(x^* - x_o). \tag{3}$$

Оваа формула можеме да ја напишеме и во друга форма:

$$y^* = \frac{1}{x_1 - x_o}[y_o(x_1 - x_o) + (y_1 - y_o)(x^* - x_o)] =$$

$$= \frac{1}{x_1 - x_o}[y_o(x_1 - x^*) - y_1(x_o - x^*)],$$

т.е.

$$y^* = \frac{1}{x_1 - x_o} \cdot \begin{vmatrix} y_o & x_o - x^* \\ y_1 & x_1 - x^* \end{vmatrix}; \tag{4}$$

формулата (3) односно (4) се вика формула за линеарна интерполација.

Да забележиме дека пресметаната вредност y^* е дотолку поточна, доколку се поблиску точките x_o и x_1, т.е. доколку е помал чекорот на интерполацијата.

5.2. ЛАГРАНЖОВА ИНТЕРПОЛАЦИОНА ФОРМУЛА

Ако се бара поголема точност, која не може да се постигне со линеарната интерполација, тогаш интерполацијата ја вршиме со некој полином од повисок степен. Овде ќе изведеме една општа формула, наречена Лагранжова интерполациона формула, за наоѓање на интерполациони полиноми.

Нека се дадени $n+1$ различни вредности на аргументот: $x_o, x_1, .., x_n$ (не мора на еднакви меѓусебни растојанија) и за функцијата $y=f(x)$ нека се познати соодветните вредности:

$$f(x_o)=y_o,\ f(x_1)=y_1, \ldots, f(x_n)=y_n.$$

Се бара полином $P(x)$ со степен не поголем од n, таков што

$$P(x_o)=y_o,\ P(x_1)=y_1, \ldots, P(x_n)=y_n.$$

Ако ставиме

$$P(x)=a_o+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

треба, значи, да ги одредиме коефициентите $a_к$ $(к=0,1,\ldots,n)$. Од условите $P(x_к)=y_к$ го добиваме следниов систем линеарни равенки по $a_o, a_1, \ldots, a_n$:

$$\begin{aligned} a_o+a_1x_o+\ldots+a_nx_o^n&=y_o,\\ a_o+a_1x_1+\ldots+a_nx_1^n&=y_1,\\ \ldots\ldots&\ldots\\ a_o+a_1x_n+\ldots+a_nx_n^n&=y_n \end{aligned}$$

Детерминантата на овој систем, наречена Вандермандова детерминанта, е различна од 0 бидејќи $x_j \neq x_к$ за $j \neq к$ (в.кн.I,стр. 74). Според тоа, горниот систем има единствено решение (кое можеме да го одредиме, на пример, по правилото на Крамер). Значи, наоѓањето на $P(x)$ можеме да го сведеме на решавање систем линеарни равенки, но ние ќе го одредиме $P(x)$ на друг начин. Полиномот

$$L_k(x) = \frac{(x-x_o)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_o)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k-1})\dots(x_k-x_n)} \qquad (1)$$

или, кратко,

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

има степен n и својство

$$L_k(x_k) = 1, \quad L_k(x_i) = 0, \qquad i \neq k,$$

(Полиномите $L_k(x)$ се викаат Лагранжови коефициенти.)

Ако ставиме:

$$P(x) = y_oL_o(x) + y_1L_1(x) + \dots + y_nL_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_kL_k(x), \quad (2)$$

тогаш добиваме дека $P(x)$ е полином со бараните својства: $P(x_k)=y_к$ (к=0,1,...,n). Уште повеќе $P(x)$ е еднозначно определен.

Навистина, ако $Q(x)$ е полином со степен $\leqslant n$ и таков што $Q(x_к)=y_к$, к=0,1,...,n, тогаш ќе добиеме дека $R(x)=P(x)-Q(x)$ е полином со степен не поголем од n, а за кој $R(x_k) = P(x_к)-Q(x_к)=y_к-y_к=0$ (к=0,1,...,n).

Бидејќи еден полином од n-ти степен може да има најмногу n корени, а $R(x)$ има $n+1$, следува дека $R(x)$ е нултиот полином, па значи $Q(x) = P(x)$.

Така ја докажавме следнава теорема:

Теорема 1. Ако $x_o, x_1, \dots, x_n$ се различни реални броеви а $y_o, y_1, \dots, y_n$ произволни реални броеви, тогаш постои еднозначно определен полином $P(x)$ со својството $P(x_н)=y_н$, н=0,1,...,n и $\mathrm{st}\,P \leq n$. Полиномот $P(x)$ се определува со формулата (2). ▯

Формулата (2) се вика интерполациона формула на Лагранж.

Да забележиме дека за n=1 (т.е. $x_o=a$, $x_1=b$) се добива

$$P(x) = \frac{x-b}{a-b}\, y_o + \frac{x-a}{b-a}\, y_1,$$

а тоа е формулата за линеарна интерполација. За $n=2$ (т.е. $x_0=a$, $x_1=b$, $x_2=c$), пак, се добива

$$P(x)=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}\,y_0+\frac{(x-a)(x-c)}{(b\ a)(b-c)}\,y_1+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\,y_2,$$

што претставува формула за квадратна интерполација.

Пример 2. Со Лагранжовата формула, да го најдеме интерполациониот полином на функцијата $y=\ln x$, знаејќи дека за: $x_0=2$; $x_1=3,5$; $x_2=4$ соодветните вредности се: $y_0=0,7$; $y_1=1,3$; $y_2=1,4$. Имаме:

$$P(x)=\frac{(x-3,5)(x-4)}{-1,5.(-2)}.0,7+\frac{(x-2)(x-4)}{1,5.(-0,5)}.1,3+\frac{(x-2)(x-3,5)}{2.0,5}.1,4=$$

$$=0,23(x^2-7,5x+14)-1,73(x^2-6x+8)+1,4(x^2-5,5x+7),$$

па по средувањето:

$$P(x)=-0,1x^2+0,95x-0,86.$$

Ако сакаме да пресметаме $\ln 3$ (или $\ln x^*$ за кој било $x^*\in[2,4]$, треба само да замениме во дадениот полином. Така:

$$\ln 3\approx P(3)=-0,1.9+0,95.3-0,86=1,09.$$

5.3. ИНТЕРПОЛАЦИОНА ПОСТАПКА НА ЕЈТКИН

Лагранжовиот метод за составување интерполационен полином е доволно општ, но обемните пресметувања го прават доста неудобен особено кога се бара вредноста на функцијата само за една вредност на аргументот. Затоа се разработени други правила, кои овозможуваат да се најде бараната вредност на интерполациониот полином, без да се пресметуваат неговите коефициенти. Таква можност дава т.н. Ејткинова постапка, кај која интерполациониот полином се конструира индуктивно.,

Ејткиновата постапка се состои во следното. Нека $x_0, x_1, \ldots, x_n$ се таблични вредности на аргументот, а $y_0, y_1, \ldots, y_n$ се соодветните вредности на функцијата $y=f(x)$. Да го напишеме интерполационият полином $P_{o,1}(x)$ од прв степен на сегментот $[x_o,x_1]$:

$$P_{0,1}(x)=\frac{1}{x_1-x_o}\begin{vmatrix} y_o & x_o-x \\ y_1 & x_1-x \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

а потоа интерполационият полином од прв степен на сегментот $[x_1,x_2]$, означен со $P_{1,2}(x)$:

$$P_{1,2}(x)=\frac{1}{x_2-x_1}\begin{vmatrix} y_1 & x_1-x \\ y_2 & x_2-x \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Притоа, јасно е дека $P_{1,2}(x_к)=y_к$ $(к=0,1)$. Со помош на така добиените полиноми ќе го формираме полиномот $P_{0,1,2}(x)$ (применувајќи ја формулата за линеарна интерполација на сегментот $[x_o,x_2]$, но земајќи ги $P_{o,1}(x)$ и $P_{1,2}(x)$ наместо y_o и y_2):

$$P_{0,1,2}(x)=\frac{1}{x_2-x_o}\begin{vmatrix} P_{0,1}(x) & x_o-x \\ P_{1,2}(x) & x_2-x \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

И тука, лесно увидуваме дека $P_{0,1,2}(x_к)=y_к$ $(к=0,1,2)$, што значи дека $P_{0,1,2}(x)$ е интерполационен полином од втор степен за функцијата $f(x)$ на сегментот $[x_o,x_2]$ (т.е. полином за квадратна интерполација на сегментот $[x_o,x_2]$).

Натаму, со помош на полиномите $P_{0,1,2}(x)$ и $P_{1,2,3}(x)$,

$$P_{1,2,3}(x)=\frac{1}{x_3-x_1}\begin{vmatrix} P_{1,2}(x) & x_1-x \\ P_{2,3}(x) & x_3-x \end{vmatrix},$$

каде што

$$P_{2,3}(x)=\frac{1}{x_3-x_2}\begin{vmatrix} y_2 & x_2-x \\ y_3 & x_3-x \end{vmatrix},$$

го формираме полиномот

$$P_{0,1,2,3}(x)=\frac{1}{x_3-x_0}\begin{vmatrix} P_{0,1,2}(x) & x_0-x \\ P_{1,2,3}(x) & x_3-x \end{vmatrix}$$

за кого лесно се увидува дека $P_{0,1,2,3}(x_{\text{к}})=y_{\text{к}}$ (к=0,1,2,3).

Да претпоставиме дека на тој начин се конструирани полиномите $P_{0,1,\ldots,n-1}(x)$ и $P_{1,2,\ldots,n}(x)$, такви што

$P_{0,1,\ldots,n-1}(x_k)=y_k$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$, $P_{1,2,\ldots,n}(x_n)=y_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$.

Тогаш за полиномот

$$P_{0,1,\ldots,n}(x)=\frac{1}{x_n-x_0}\begin{vmatrix} P_{0,1,\ldots,n-1}(x) & x_0-x \\ P_{1,2,\ldots,n}(x) & x_n-x \end{vmatrix} \tag{4}$$

имаме

$$P_{0,1,\ldots,n}(x_0)=P_{0,1,\ldots,n-1}(x_0)=y_0,$$

$$P_{0,1,\ldots,n}(x_n)=P_{1,2,\ldots,n}(x_n)=y_n,$$

а за $x=x_{\text{к}}$, к=1,2,...,n-1:

$$P_{0,1,\ldots,n}(x_k)=\frac{1}{x_n-x_0}\begin{vmatrix} P_{0,1,\ldots,n-1}(x_k) & x_0-x_k \\ P_{1,2,\ldots,n}(x_k) & x_n-x_k \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{x_n-x_0}\begin{vmatrix} y_k & x_0-x_k \\ y_k & x_n-x_k \end{vmatrix}=\frac{y_k}{x_n-x_0}(x_n-x_{\text{к}}-x_0+x_k)=y_k.$$

Од сето тоа, според принципот на математичката индукција, следува дека со (4) се определува интерполационен полином од n-ти степен за функцијата f(x) на сегментот $[x_0,x_n]$ за кој било природен број n.

На еден конкретен пример ќе покажеме како се применува Ејткиновата постапка за пресметување на $f(x^*)$ за дадена вредност x^* на аргументот, без да се наоѓа интерполациониот полином.

<u>Пример 3.</u> Нека е дадена таблицата

к	0	1	2
х	2	2,3	2,5
у	5,848	6,127	6,300

вредности на функцијата $f(x)$. Да пресметаме $f(x^*)$ за $x^*=2,2$.

Наоѓаме: $P_{0,1}(x^*)=6,034$ по формулата (1), $P_{1,2}(x^*)=6,041$ по формулата (2) и $P_{0,1,2}(x\cdot)=6,037$ по формулата (3). Значи: $f(x^*)\approx 6,037$.

(Дадените вредности се за функцијата $f(x)=\sqrt[3]{100x}$. Ако го споредиме добиениот резултат $\cdot$6,037 со тој во таблицата за функцијата $\sqrt[3]{100x}$, ќе видиме дека сите три децимали се точни.)

5.4. КОНЕЧНИ РАЗЛИКИ

Во овој раздел ќе го воведеме поимот за конечна разлика и ќе изучиме некои својства во онаа мера, во која ќе ни бидат потребни за натамошните разгледувања.

Нека се дадени точките

$$x_o, x_1 = x_o + h, \quad x_2 = x_o + 2h, \ldots, x_n = x_o + nh$$

(да уочиме дека тие се на еднакви меѓусебни растојанија) и нека се познати вредностите на функцијата $f(x)$ во тие точки:

$$f(x_o) = y_o, \quad f(x_o + h) = y_1, \ldots, f(x_o + nh) = y_n.$$

Тогаш за броевите

$$\Delta y_o = y_1 - y_o, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ldots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} \qquad (1)$$

велиме дека се <u>први разлики</u> или (конечни) <u>разлики од прв ред</u> за функцијата $f(x)$ во дадените точки.

Броевите, пак,

$$\Delta^2 y_o = \Delta y_1 - \Delta y_o, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \ldots, \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} \qquad (2)$$

се викаат разлики од втор ред. Воопшто, разлики од к-ти ред се дефинираат со

$$\Delta^k y_m = \Delta^{k-1} y_{m+1} - \Delta^{k-1} y_m.$$

За запишување на овие разлики обично ќе користи некоја шема: хоризонтална (шема 1) или дијагонална(шема 2).

Шема 1

$x_к$	$y_к$	$\Delta y_к$	$\Delta^2 y_к$	$\Delta^3 y_к$	...
x_o	y_o	Δy_o	$\Delta^2 y_o$	$\Delta^3 y_o$	
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$		
x_4	y_4	Δy_4			
x_5	x_5				
⋮	⋮	⋮			

Шема 2

$x_к$	$y_к$	$\Delta y_к$	$\Delta^2 y_к$	$\Delta^3 y_к$	...
x_o	y_o				
		Δy_o			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_o$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_o$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3		$\Delta^3 y_3$	
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$		
		Δy_4			
x_5	y_5				
⋮	⋮				

Во некои случаи е позгодно дијагоналната шема да се "заврти", како што е прикажано подолу. Во тој случај таа потсеќа на Паскаловиот триаголник при биномните коефициенти.

$$\begin{array}{ccccccc}
x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \cdots \\
\hline
y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & \cdots \\
\Delta y_0 & \Delta y_1 & \Delta y_2 & \Delta y_3 & \Delta y_4 & & \\
\Delta^2 y_0 & \Delta^2 y_1 & \Delta^2 y_2 & \Delta^2 y_3 & & & \\
\Delta^3 y_0 & \Delta^3 y_1 & \Delta^3 y_2 & & & & \\
 & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Ќе изнесеме неколку својства на конечните разлики. Од (2), т.е. (3), добиваме:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2-y_1)-(y_1-y_0) = y_2-2y_1+y_0;\ \Delta^2 y_1 = y_3-2y_2+y_1;$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_3-2y_2+y_1-(y_2-2y_1+y_0) =$$
$$= y_3-3y_2+3y_1-y_0;\quad \Delta^3 y_1 = v_4-3y_3+3y_2-y_1$$

и, индуктивно:

$$\Delta^k y_0 = \binom{k}{0}y_k - \binom{k}{1}y_{k-1}+\dots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}y_1 + (-1)^k\binom{k}{k}y_0.$$

Така, добиваме:

$\underline{1}^\circ$ $\Delta^k y_m = \binom{k}{0}y_{m+k} - \binom{k}{1}y_{m+k-1}+\dots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}y_{m+1} + (-1)^k\binom{k}{k}y_m.$

Работејќи слично, може да се добие:

$\underline{2}^\circ$ $y_k = \binom{k}{0}y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \dots + \binom{k}{k}\Delta^k y_0$

што дава можност y_k да се пресмета од y_0 и конечните разлики до ред к. Формулата 2° може да се запише симболично во следнава форма, згодна за помнење:

2' $y_k = (1+\Delta)^k y_0.$

Ако $u=u(x)$, $v=v(x)$ и c=константа, тогаш следниве својства $3^o - 7^o$ се очигледно точни:

3.^{o} $\Delta c = 0$

4.^{o} $\Delta(cu) = c\Delta u$;

5.^{o} $\Delta(u+v) = \Delta u+\Delta v$,

а како последица од 4^o и 5^o ги добиваме следниве формули:

6.^{o} $\Delta(u- v) = \Delta u- \Delta v$,

7.^{o} $\Delta(c_1u_1+\ldots+c_nu_n) = c_1\Delta u_1+\ldots+c_n\Delta u_n$,

каде што $u_i=u_i(x)$, а c_i се константи.

Применувајќи ја биномната формула, од $\Delta(x^n)=(x+h)^n-x^n$ ја добиваме формулата:

8.^{o} $\Delta(x^n) = nhx^{n-1} + \binom{n}{2}h^2x^{n-2}+\ldots+nh^{n-1}x+h^n$.

Со помош на тие својства можат да се наоѓаат последователните конечни разлики на произволен полином. Навистина, ако

$$y = P(x) = a_ox^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

тогаш, според 7^o и, потоа, според 8^o:

$$\begin{aligned}\Delta y &= a_o\Delta(x^n)+a_1\Delta(x^{n-1})+\ldots+a_{n-1}\Delta(x)\\ &= a_o[nhx^{n-1}+\binom{n}{2}h^2x^{n-2}+\ldots+h^n] +\\ &+ a_1[(n-1)hx^{n-2}+\binom{n-1}{2}h^2x^{n-3}+\ldots]+\ldots+a_{n-1}h,\end{aligned}$$

т.е.

$$\Delta y = a_onhx^{n-1}+[a_o\binom{n}{2}h^2+ a_1\binom{n-1}{1}h]\,x^{n-2}+\ldots + a_{n-1}h.$$

Значи, првата разлика Δy на полином од n-ти, со "најстар" член a_ox^n, е полином од $(n-1)$-в степен со најстар член a_onhx^{n-1}.

Постапувајќи аналогно и за разликите од повисок ред, индуктивно можеме да заклучиме дека е точно следново својство:

Теорема 2. Ако $P(x)$ е полином со степен n и најстар член a_0x^n, тогаш за кој било $m, m < n$, разликата $\Delta^m P(x)$ е полином со степен $n-m$ и со најстар член $n(n-1)\dots(n-m+1)a_0h^mx^{n-m}$.

Специјално, за $m=n$: $\Delta^n P(x)=n!\ a_0h^n$, т.е. n-тите разлики се постојани, а за $m>n$ имаме $\Delta^m P(x)=0$.

Без доказ ќе ја изнесеме и следнава теорема, која е обратна (во извесна смисла) на Т.2.

Теорема 3. Ако n-тите разлики на една функција $f(x)$ образувани за точки што се распоредени на еднакви растојанија при кој било чекор h, се константни, тогаш $f(x)$ е полином од n-ти степен.

Тврдењето во Т.2 за постојаноста на разликите од n-ти ред е точно само ако вредностите на функцијата, како и вредностите на сите разлики се пресметувани точно. Во случај пресметувањата да се вршени со заокружувања, разликите од n-ти ред нема да бидат постојани, па разликите од $(n+1)$-в ред нема да се нули. Сепак, ако нема груби грешки во пресметувањата, тогаш разликите од n-ти ред ќе бидат "речиси постојани", а разликите од $(n+1)$-в ред ќе бидат блиски до нула.

Во таа смисла, Т.2 и Т.3 даваат можност за вршење контрола при пресметувањата со помош на конечните разлики. Имено, ако е дадена функција, која не е полином, но е "доволно глатка", на разгледуваниот интервал, т.е. нејзиното менување е рамномерно, без големи скокови, тогаш таблицата на нејзините разлики ќе има некоја сличност со таблицата на разлики за полином. Рамномерната промена на разликите покажува дека табличните вредности на функцијата се пресметани добро. Притоа, ако некоја вредност на функцијата е погрешна, тогаш таа врши големо влијание на разликите од повисок ред и во некој дел од нивната таблица се јавуваат неочекувани скокови (види вежба 14).

На крајот ќе ја разгледаме уште врската меѓу конечните разлики и изводите.

Од $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\Delta f(x) = f'(x)$ следува $f'(x)\approx\frac{1}{h}\Delta f(x)$,

а од

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\Delta^2 f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left[f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\left[2f'(x+2h)-2f'(x+h)\right] = 2f''(x)-f''(x) = f''(x),$$

следува дека $f''(x)\approx\frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}$ и, индуктивно,

$$f^{(n)}(x)\approx\frac{\Delta^n f(x)}{h^n}\,. \qquad (4)$$

Формулата (4) може да се искористи за приближно наоѓање на изводите на функцијата f(x). Меѓутоа, точноста на оваа формула, особено за $n>1$, не е доволно добра и затоа во пракса се користи само за груби пресметувања, а за поточни резултати се користат други начини.

5.5. ЊУТНОВИ ИНТЕРПОЛАЦИОНИ ФОРМУЛИ

Конечните разлики што ги разгледавме во претходниот раздел ќе ги искористиме за изведување на таканаречените Њутнови интерполациони формули.

Нека $x_0, x_1=x_0+h, \ldots, x_n=x_0+nh$ $(h>0)$ се точки во кои се познати вредностите на некоја функција $y=f(x)$, $f(x_0)=y_0, \ldots, f(x_n)=y_n$. Се бара полином P(x), со степен не поголем од n, таков што $P(x_k)=y_k$, $k=0,1,\ldots,n$. Полиномот P(x) ќе го бараме во форма

$$P(x) = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Коефициентите a_k на овој полином ќе ги најдеме од условите $P(x_k)=y_k$:

$$y_0 = a_0,$$
$$y_1 = a_0+a_1h,$$
$$y_2 = a_0+2a_1h+2a_2h^2,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Оттука:

$$a_0 = y_0,$$
$$a_1 = \frac{1}{h}(y_1 - a_0) = \frac{1}{h}(y_1 - y_0) = \frac{1}{h}\,\Delta y_0,$$
$$a_2 = \frac{1}{2h^2}(y_2 - y_0 - 2\Delta y_0) = \frac{1}{2h^2}(y_2 - 2y_1 + y_0) = \frac{1}{2!h^2}\,\Delta^2 y_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и индуктивно:

$$a_k = \frac{1}{k!h^k}\,\Delta^k y_0 \qquad (k=0,1,\ldots,n)$$

(при што се подразбира $\Delta^0 y_0 = y_0$). Така добиваме

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \ldots +$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \qquad (1)$$

Полиномот (1) наполно одговара на поставените барања. Навистина, тој има степен не поголем од n, $P(x_0)=y_0$ и за секој $к=1,2,\ldots,n$:

$$P(x_k) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x_k - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x_k - x_0)(x_k - x_1) + \ldots +$$
$$+ \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1}) =$$
$$= y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\,\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots2.1}{k!}\,\Delta^k y =$$
$$= (1+\Delta)^k y_0 = y_k$$

(при што е искористено својството 2' од разделот 5.4.)

┌** Полиномот (1) може да се напише малку пократко ако се искористи т.н. обопштен степен.

Обопштен к-ти степен на еден број z се вика производот на к множители, првиот од кои е z, а секој нареден е за h помал од претходниот:

$$z^{[k]} = z(z-h)(z-2h)\ldots(z-(n-1)h), \qquad (*)$$

каде што h е некој фиксиран постојан број. За к=0 се става $z^{[0]} = 1$, а за $h=0$ обопштениот степен се совпаѓа со обичниот степен, т.е. $z^{[k]} = z^k$.

Така, користејќи го (*), формулата (1) можеме да ја напишеме во следнава форма:

$$P(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0)^{[1]}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)^{[2]}+\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)^{[n]}\quad \underline{**}|$$

Формулата (1) е позната под името прва интерполациона формула на Њутн.

За практично користење, Њутновата формула обично се запишува во друга форма. Ако ставиме

$$\frac{x-x_0}{h}=t, \text{ т.е. } \quad x=x_0+th$$

добиваме:

$$\frac{x-x_1}{h}=\frac{x-x_0-h}{h}=t-1,$$

$$\frac{x-x_2}{h}=\frac{x-x_0-2h}{h}=t-2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

па заменувајќи во (1):

$$P(x_0+th)=y_0+\frac{t}{1!}\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\ldots+\frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (2)$$

Користејќи го 2′ од 5.4, формулата (2) може да се запише во следнава (симболички компактна) форма:

$$P(x_0+th)=(1+\Delta)^t y_0 \qquad (2')$$

каде што во бесконечниот ред $(1+\Delta)^t y_0$ се земени само првите $n+1$ членови.

Формулата (2) обично се користи за пресметување вредности на f(x) кога x е меѓу x_0 и x_1, т.е. за $0<t<1$ (црт.3).

Црт.3

Ако сакаме да пресметуваме вредности на f(x) кога x е меѓу x_1 и x_2, тогаш не е целисходно да ја користиме таа формула, зашто $t>1$ во $x=x_0+th$. Во тој случај за почетен јазол x_0 треба да се земе точката x_1. Општо, при пресметување на f(x) по формулата (2), за почетен јазол x_o се зема најблискиот од јазлите во таблицата што му претходат на x.

Поради тоа што формулата (2) се користи за пресметување на f(x) кога x е напред во таблицата, таа се вика и Њутнова формула за интерполирање напред. Ќе разгледаме два примера.

Пример 4. Да се најде емпириска формула за функцијата у зададена со следнава таблица:

Таб.1.

x	0	1	2	3	4	5
y	-3,0	0,7	3,8	6,3	8,2	9,5

Ја составуваме таблицата на разликите (таб.2.) и забележуваме дека вторите разлики се еднакви. Според тоа, во интерполационата формула на Њутн , (2), земаме n=2 и добиваме:

$$P(x_o+th)=-3,0+3,7t+\frac{t(t-1)}{2!}(-0,6)=-3,0+4,0t-0,3t^2$$

Таблица 2

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	-3,0	3,7	-0,6
1	0,7	3,1	-0,6
2	3,8	2,5	-0,6
3	6,3	1,9	-0,6
4	8,2	1,3	
5	9,5		

Бидејќи h=1 и $x_o=0$ следува дека $t=\frac{x-x_o}{h}=x$, па земајќи го P(x) за y(x) добиваме

$$y(x)=-3+4x-0,3x^2.$$

Пример 5. Во таблицата 3 се наведени вредностите на функцијата y=shx. Применувајќи ја првата интерполациона формула на Њутн, приближно да се пресмета sh(2,94).

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
2,7	7,4063	7856	821	85	11
2,8	8,1919	8677	906	96	12
2,9	9,0596	9583	1002	108	7
3,0	10,0179	10585	1110	115	15
3,1	11,0764	11695	1225	130	12
3,2	12,2459	12920	1355	142	
3,3	13,5379	14275	1497		
3,4	13,9654	15772			
3,5	16,5426				

За таа цел ќе ја дополниме дадената таблица со разликите од прв, втор, трет и четврти ред и ќе забележиме дека четвртите разлики практично (за нашите цели) се еднакви, па во формулата (2) ќе земеме $n=4$. (Притоа, во колоните за разликите не ги означуваме десетичните разреди, зашто тие се јасни од колоната за вредностите на у, а така е и вообичаено.) За x_0 ја земаме најблиската таблична вредност до бараната вредност $x=2,94$, т.е. ставаме $x_0=2,9$. Бидејќи $h=0,1$ следува дека $t=\frac{2,94-2,9}{0,1}=0,4$. Заменувајќи во формулата (2) добиваме:

$$y\approx 9,0596+0,4.0,9583+\frac{0,4(0,4-1)}{2}.0,1002+$$
$$+\frac{0,4(0,4-1)(0,4-2)}{6}.0,0108+\frac{0,4(0,4-1)(0,4-2)(0,4-3)}{24}.0,0007,$$

па откако ќе се извршат назначените операции добиваме дека $sh(2,94)\approx 9,43156$.

Како што се гледа од разгледаниот пример, во интерполационата формула (2) се користат разликите што стојат само во една хоризонтална редица (еднаш потцртаните) од таблицата на "хоризонтални разлики". Во случај да ја користевме таблицата на дијагонални разлики, тогаш во (2) ќе влезеа разликите што се наредени по дијагоналата надолу (в.шема 2 во §5.4.)

Првата Њутнова интерполациона формула не е погодна за пресметување на крајот (поради отсуството на разликите од повисок ред приближувајќи се кон крајот на таблицата). За таа цел ќе изведеме друга формула што ќе ни овозможи добивање добри резултати на пресметувањата на крајот.

Овој пат интерполациониот полином ќе го напишеме на следниов начин

$$P(x) = a_o+a_1(x-x_n)+a_2(x-x_n)(x-x_{n-1})+\dots+a_n(x-x_n)\dots(x-x_1),$$

па, како и порано, коефициентите a_k ги определуваме од условите $y_k=P(x_k)=f(x_k)$, $k=0,1,\dots,n$. Така ќе добиеме:

$$a_o = y_n, \quad a_1 = \frac{1}{h}\,\Delta y_{n-1}, \quad a_2 = \frac{1}{2!h^2}\,\Delta^2 y_{n-2}, \dots$$

и, општо,

$$a_k = \frac{1}{k!h^k}\,\Delta^k y_{n-k},$$

т.е. формулата:

$$P(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_o}{n!h^n}(x-x_n)\dots(x-x_1), \qquad (3)$$

која се вика втора Њутнова интерполациона формула или интерполациона формула на Њутн за интерполирање назад. За практична примена формулата (3) се запишува во друга форма. Имено, ставајќи

$$\frac{x-x_n}{h} = t, \quad \text{т.е.} \quad x = x_n + th,$$

имаме:

$$\frac{x-x_{n-1}}{h} = t+1, \quad \frac{x-x_{n-2}}{h} = t+2, \dots,$$

па, заменувајќи во (3), добиваме:

$$P(x_n+th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\,\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\,\Delta^n y_o. \qquad (4)$$

Пример 6. Користејќи ја таб.3 (од претходниот пример), да пресметаме приближно sh3,46 со помош на формулата (4).

Бидејќи $x_n=3,5$ и $h=0,1$ имаме:

$$t=\frac{x-x_n}{h}=\frac{3,46-3,5}{0,1}=-0,4,$$

па, заменувајќи го тоа и двапати потцртаните броеви од таб. (3) во (4), при $n=4$, добиваме:

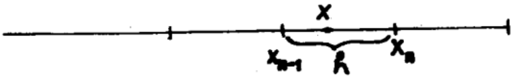
$$y\approx 16,5426+(-0,4)1,5772+\frac{-0,4(-0,4+1)}{2}.0,1497+$$
$$+\frac{-0,4(-0,4+1)(-0,4+2)}{6}.0,0142+$$
$$+\frac{-0,4(-0,4+1)(-0,4+2)(-0,4+3)}{24}.0,0012$$

па, по средувањето, $\mathrm{sh}3,46\approx 15,92428$.

Кога би го вршеле пресметувањето на sh3,46 според првата Њутнова интерполациона формула, тогаш би ја употребиле претпоследната редица од таб.3 (што почнува со $x=3,4$) и би морале да се задоволиме само со првата разлика (зашто нема други разлики во таа редица), т.е. само со $n=1$ во (4) а тоа може да биде недоволно (во тој случај би добиле

$$\mathrm{sh}3,46\approx 16,5426-0,4.1,5772\approx 15,9117).$$

Слично како за x_0 при првата интерполациона формула на Њутн и овде за x_n ја избираме од таблицата најблиската вредност



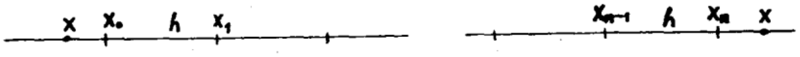
Црт.4

што следува по дадената вредност на x (црт.4). Притоа е јасно дека во изразот $x=x_n+th$ имаме $-1<t<0$.

5.6. ЕКСТРАПОЛАЦИЈА

Њутновите интерполациони формули служат за одредување вредности на функцијата f(x) во случај кога аргументот x прима вредности што се наоѓаат меѓу јазлите. Истите тие формули можат да се користат и за одредување вредности на f(x) за вредности на аргументот надвор од сегментот $[x_0,x_n]$ во кој се распоредени јазлите. Како што спомнавме во §5.1, во првиот случај зборуваме за интерполација, а во вториот случај за екстраполација.

Кога првата интерполациона формула на Њутн ја користиме за интерполација (напред), имаме $t>0$. Оваа формула можеме да ја користиме за екстраполација назад, при што тогаш $t<0$ (црт.5а)).



а) $x=x_0+th$ $(t<0)$ б) $x=x_n+th$ $(t>0)$

Црт.5

За втората Њутнова интерполациона формула е обратно: кога се користи за интерполација назад, тогаш $t<0$, а за екстраполација напред имаме $t>0$ (црт.5б)). Да забележиме дека при екстраполирањето, обично, се прават поголеми грешки отколку при интерполирањето.

Пример 7. Во таб.4 се дадени вредностите на функцијата y=cosx во сегментот $[35^\circ,70^\circ]$ со чекор $h=5^\circ$. Да пресметаме колку изнесува приближно а) $\cos 34^\circ$, б) $\cos 72^\circ$.

Таб.4

x°	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
35°	0,8192	-532	-57	3
40°	0,7660	-589	-54	5
45°	0,7071	-643	-49	5
50°	0,6428	-692	-44	6
55°	0,5736	-736	-38	6
60°	0,5000	-774	-32	
65°	0,4226	-806		
70°	0,3420			

Овде се работи за екстраполација, бидејќи $x=34^\circ$ и $x=72^\circ$ се надвор од најмалиот сегмент $[35^\circ,70^\circ]$ што ги опфаќа јазлите на интерполацијата.

а) За пресметување на $\cos 34^\circ$ ќе ја примениме првата интерполациона формула на Њутн земајќи $x_0=35^\circ$ и $h=5^\circ$, т.е. $t=\frac{34^\circ-35^\circ}{5^\circ}=$ $=-0,2$ (екстраполација назад). За таа цел дадената таблица ја дополнуваме со конечните разлики од прв, втор и трет ред и забележуваме дека третите разлики се, речиси, еднакви. Значи, во формулата (2) од §5.5. ќе ставиме $n=3$, па имаме:

$$\cos 34^{\circ} \approx 0,8192+(-0,2)(-0,0532)+\frac{-0,2(-1,2)}{2}.(-0,0057)+$$

$$+\frac{-0,2(-1,2)(-2,2)}{6}(0,0003),$$

т.е. по средувањето, $\cos 34^{\circ} \approx 0,8291$ (во таблицата $\cos x$ од прилогот П.3: $\cos 34^{\circ}=0,8290$).

б) За пресметување на $\cos 72^{\circ}$ ќе ја примениме втората интерполациона формула на Њутн ставајќи $x_n=70^{\circ}$ и $t=5^{\circ}$, т.е. $t=\frac{72^{\circ}-70^{\circ}}{5^{\circ}}=$ $=0,4$ (екстраполација напред). Земајќи $n=3$ во формулата (4) од §5.5 и двапати потцртаните разлики од таб.4, добиваме:

$$\cos 72^{\circ} \approx 0,3420+0,4(-0,806)+\frac{1}{2}.0,4.1,4.(-0,0032)+$$

$$+\frac{1}{6}.0,4.1,4.2,4.0,0006, \text{ т.е. } \cos 72^{\circ} \approx 0,3090$$

(во таблицата од прилогот 3: $\cos 72^{\circ}=0,3090$, што значи дека сите цифри од добиениот број се точни).

За екстраполација може да се користи и Лагранжовата интерполациона формула, односно интерполациониот полином добиен со Ејткиновата постапка, со тоа што соодветната вредност на аргументот едноставно се заменува во формулата. Притоа, чекорот на интерполација може да биде и нерамномерен.

Пример 8. Да пресметаме $f(4,2)$ ако е зададена таблицата:

Таб.5

к	0	1	2
x	2	3,5	4
y	0,7	1,3	1,4

Ѓо формираме Лагранжовиот интерполационен полином

$$P(x)=-0,1x^2+0,95x-0,86$$

(види пример 2) и заменуваме $x=4,2$. Така, добиваме $P(4,2)=1,366$, т.е. $f(4,2)\approx 1,4$.

5.7. ОБРАТНА ИНТЕРПОЛАЦИЈА

Досега ги решававме задачите при кои за дадени вредности на аргументот се бара вредноста на функцијата $f(x)$ заменувајќи ја неа со интерполационот полином.

Да ја поставиме обратната задача. Дадени се вредностите на функцијата $f(x)$, $f(x_к)=y_к$, во точките $x_0, x_1, \dots, x_n$. За даден y^* се бара вредност x^* на аргументот за која $f(x^*)=y^*$ (обично $y^* \neq y_к$, $к=0,1,\dots,n$).

Оваа задача може лесно да се сведе на поранешните. Имено, наместо да се одредува интерполационот полином $P(x)$ за кој $P(x_к)=y_к$, $к=0,1,\dots,n$, се одредува интерполационот полином $P(y)$ за инверзната функција[*] $\phi(y)$ на $f(x)$, т.е. се одредува $P(y)$ таков што $P(y_к)=x_к$, $к=0,1,\dots,n$.

Да забележиме дека и кога $x_к$ се земени на исти растојанија $(x_0, x_0+h, \dots, x_0+nh)$ соодветните вредности $y_к$, обично, не се распоредени на исти растојанија. Затоа во овој случај се користи интерполационата формула на Лагранж или постапката на Ејткин.

Штотуку опишаната задача е позната како задача на <u>обратна интерполација.</u>

<u>Пример 9.</u> Функцијата $y=f(x)$ е зададена со таб.6. Да се најде за која вредност на x се добива $y=3,70$.

Таб. 6

к	0	1	2
x	1,1	1,4	1,6
y	3,00	4,06	5,00

Таб.7.

к	0	1	2
x	3,00	4,06	5,00
y	1,1	1,4	1,6

---

[*] Ќе сметаме дека $f(x)$ е строго монотона во разгледуваниот интервал, па задачата ќе има единствено решение.

За да не ги менуваме ознаките во интерполационата формула, ќе им ги размениме улогите на x и y, па на тој начин ќе ја добиеме функцијата y=f(x), определена со таб.7. Треба да најдеме f(3,70).

Ќе ја примениме Лагранжовата интерполациона формула за квадратна интерполација (n=2), во која ќе ставиме x=3,70. Имаме:

$$y=\frac{(3,70-4,06)(3,70-5,00)}{(3,00-4,06)(3,00-5,00)}.1,1+\frac{(3,70-3,00)(3,70-5,00)}{(4,06-3,00)(4,06-5,00)}.1,4+$$

$$+\frac{(3,70-3,00)(3,70-4,06)}{(5,00-3,00)(5,00-4,06)}.1,6=\frac{0,36.1,30.1,1}{1,06.2}+\frac{0,70.1,30.1,4}{1,06.0,94}-$$

$$-\frac{0,252.1,6.1,6}{2.0,94},$$

па откако ќе средиме, добиваме y=1,3051. Значи, $f(x^*)=3,70$, за $x^*=1,3$.

(Овде:$f(x)=e^x$; добиениот резултат е во согласност со оној од таблицата на e^x, дадена во прилогот 4.)

Во случај на јазли со еднакви растојанија, задачата за обратна интерполација може да се реши со т.н. метод на последователни приближувања.

Да претпоставиме дека функцијата y=f(x) е монотона и дека дадената вредност y се наоѓа меѓу $y_0=f(x_0)$ и $y_1=f(x_1)$. Заменувајќи ја функцијата y со првиот интерполационен полином на Њутн, имаме:

$$y=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\dots+\frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

а оттука добиваме $t=\phi(t)$, каде што

$$\phi(t)=\frac{y-y_0}{\Delta y_0}-\frac{t(t-1)}{2!\Delta y_0}\Delta^2 y_0-\dots-\frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!\,\Delta y_0}\Delta^n y_0. \qquad (1)$$

Земајќи го $t_0=\frac{y-y_0}{\Delta y_0}$ за почетно приближување и применувајќи го методот на последователни приближувања, добиваме:

$$t_m=\phi(t_{m-1}),\quad m=1,2,\dots \qquad (2)$$

Ако функцијата е непрекинато диференцијабилна $(n+1)$-пат на најмалиот сегмент што ги содржи јазлите на интерполацијата и ако чекорот е доволно мал, тогаш тој процес конвергира кон точното решение t: $t_m \to t$ кога $m \to \infty$. Откако е најден t ($\approx t_k$, при к-тата итерација), се определува x од формулата

$$\frac{x-x_o}{h} = t, \text{ т.е. } x=x_o+th.$$

Наоѓањето на корените на една равенка $f(x)=0$, каде што $y=f(x)$ е зададена функција, практично се сведува на задачата за обратна интерполација (за даден y^*, $y^*=0$, се бара x^*, така што $f(x^*)=0$), па методот изнесен погоре може да се примени и за решавање равенки од тој вид.

Пример 10. Користејќи ја таблицата 8,

Таб. 8

к	x	y=shx	Δy	$\Delta^2 y$
0	2,2	4,457	1,009	0,220
1	2,4	5,466	1,229	
2	2,6	6,695		

приближно да се пресмета коренот на равенката $e^x - e^{-x} - 10 = 0$. Даденава равенка можеме да ја напишеме и во форма $\text{sh}x=5$. Земајќи $y_o=4,457$, имаме:

$$t_o = \frac{5-4,457}{1,009} = \frac{0,543}{1,009} = 0,538;$$

$$t_1 = t_o - \frac{t_o(t_o-1)}{2!\Delta y_o}\Delta^2 y_o = 0,538 + \frac{0,538.0,462}{2.1,009}.0,220 = 0,565;$$

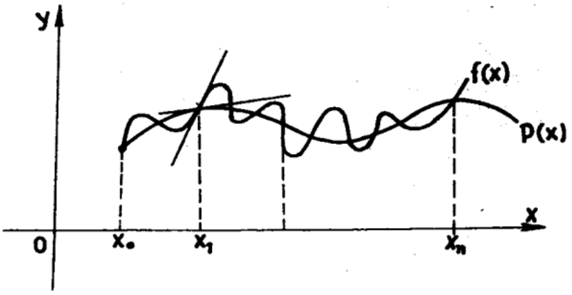
$$t_2 = 0,538 + \frac{0,565.0,435}{2.1,009}.0,220 = 0,565,$$

па може да се земе x=2,2+0,565.0,2 = 2,313.

5.8. ПРИБЛИЖНО ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ

За одредување вредности на изводот од една функција $f(x)$ за која се познати вредностите $y_к = f(x_к)$ во точките $x_к$ $(к=0,1,\ldots,n)$ може да се користи интерполациониот полином $P(x)$ за кој $P(x_к)=y_к$. При тоа, ако $f(x)$ е диференцијабилна на разгледуваниот интервал и се менува не со големи промени, а $P(x)$ добро ја апроксимира $f(x)$ тогаш може да се смета дека $P'(x)$ добро ќе ја апроксимира $f'(x)$.

Меѓутоа, при одредувањето на вредности на $f'(x)$ треба да се земаат јазлите на доволно мали растојанија, за $f(x)$ меѓу нив да нема голем број екстреми. Инаку, може да се случи разликата меѓу $P(x)$ и $f(x)$ да е мала, а меѓу нивните изводи да постои огромна разлика (како на црт.6).



Црт.6

Ако за функцијата $f(x)$, за која се знае дека е диференцијабилна, е најден интерполациониот полином $P(x)$ со Лагранжовата или со Ејткиновата постапка, тогаш $f'(x)$ се пресметува директно, т.е. ставаме $f'(x)=P'(x)$.

За примена на Њутновиот интерполационен полином за приближно диференцирање е потребно мало појаснување. Функцијата $y=f(x)$ ја заменуваме со Њутновиот интерполационен полином $P(x_o+th)$, т.е. земаме:

$$y(x) = y_o + t\Delta y_o + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_o + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_o + \ldots,$$

каде што $t=\frac{x-x_o}{h}$ и $h=x_{k+1}-x_k$ ($k=0,1,\ldots,n$). Извршувајќи го множењето на биномите по t, оваа формула ја добива следнава форма:

$$y(x)=y_o+t\Delta y_o+\frac{t^2-t}{2}\Delta^2 y_o+\frac{t^3-3t^2+2t}{6}\Delta^3 y_o+$$

$$+\frac{t^4-6t^3+11t^2-6t}{24}\Delta^4 y_o+\ldots \qquad (1)$$

Имајќи ја предвид формулата за извод од сложена функција, добиваме:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{h}\cdot\frac{dy}{dt}. \qquad (2)$$

Според тоа од (1) следува дека:

$$y'(x)=\frac{1}{h}[\Delta y_o+\frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_o+\frac{3t^2-6t+2}{6}\Delta^3 y_o+$$

$$+\frac{2t^3-9t^2+11t-3}{12}\Delta^4 y_o+\ldots] \qquad (3)$$

Ако се знае дека за $y=f(x)$ постои и вториот извод, тогаш поради

$$y''(x)=\frac{d}{dx}(y')=\frac{d}{dt}(y')\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{h}\frac{d}{dt}(y')$$

добиваме

$$y''(x)=\frac{1}{h^2}[\Delta^2 y_o+(t-1)\Delta^3 y_o+\frac{6t^2-18+11}{12}\Delta^4 y_o+\ldots] \qquad (4)$$

На сличен начин можат да се најдат изводите на $y=f(x)$ и од произволен ред. Притоа, за наоѓањето на извод во фиксирана точка x^*, за x_o треба да се избере најблиската до x^* таблична вредност на аргументот.

Во случаи, пак, кога треба да се пресмета изводот во некој од јазлите на интерполацијата, т.е. во некоја од табличните точки x_k, тогаш формулите за приближно диференцирање се упростуваат. Имено, бидејќи секоја таблична вредност може да се избере за почетна, можеме да ставиме $x=x_o$, $t=0$, па тогаш ќе имаме

$$y'(x_o)=\frac{1}{h}([\Delta y_o-\frac{1}{2}\Delta^2 y_o+\frac{1}{3}\Delta^3 y_o-\frac{1}{4}\Delta^4 y_o+\frac{1}{5}\Delta^5 y_o-\ldots], \qquad (5)$$

$$y''(x_o)=\frac{1}{h^2}[\Delta^2 y_o-\Delta^3 y_o+\frac{11}{12}\Delta^4 y_o-\frac{5}{6}\Delta^5 y_o+\ldots] \qquad (6)$$

$$y'(x_1)=\frac{1}{h}(\Delta y_o+\frac{1}{2}\Delta^2 y_o-\frac{1}{6}\Delta^3 y_o+\ldots); \text{ итн.}$$

Пример 11. Зададена е функцијата $y=f(x)$ со таблицата 9, во која чекорот е $h=0,1$. Знаејќи дека таа е диференцијабилна, да се пресмета а) $f'(3,5)$, б) $f'(3,57)$. (Овде: $f(x)=\lg x$.)

Таб.9

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
3,5	0,5441	122	-3
3,6	0,5563	119	-3
3,7	0,5682	116	-3
3,8	0,5798	113	
3,9	0,5911		

За таа цел таб.9 ќе ја дополниме со колоните на конечните разлики и за пресметување на $f'(3,5)$ ќе ја примениме формулата (5) до конечните разлики од втор ред):

$$f'(3,5)=\frac{1}{0,1}[0,0122-\frac{1}{2}\cdot(-0,0003)]=0,1235.$$

За пресметување на $f'(3,57)$ ја користиме формулата (3), во која $t=\frac{3,57-3,5}{0,1}=0,7$:

$$f'(3,57)=\frac{1}{0,1}[0,0122+\frac{2.0,7-1}{2}(-0,0003)]=0,1214.$$

Да забележиме дека во случај кога се бара изводот на $f(x)$ за некоја вредност што се наоѓа кон крајот на таблицата се применува втората интерполациона формула на Њутн, т.е. од неа, применувајќи ја формулата (2) се добиваат соодветни формули за изводите на $f(x)$.

5.9. ОЦЕНКА НА ТОЧНОСТА НА ИНТЕРПОЛАЦИОНИТЕ ФОРМУЛИ

Нека $P(x)$ е интерполациониот полином на функцијата $f(x)$. Разликата

$$f(x)-P(x)=R(x) \tag{1}$$

се вика остаточен член на интерполацијата. Тргнувајќи од $f(x)=$ $=P(x)+R(x)$, како и при Тајлоровата формула, ќе формираме помошна функција за оценка на $R(x)$:

$$H(t)=f(t)-P(t)-\frac{(t-x_o)(t-x_1)\ldots(t-x_n)}{(x-x_o)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}R(x), \tag{2}$$

каде што $x_o,x_1,\ldots,x_n$ се јазли на интерполацијата.

Нека $f(x)$ има изводи до $(n+1)$-от заклучно, со непрекинат $(n+1)$-в извод во $[x_o,x_n]$. Тогаш и $H(t)$ ќе биде $n+1$ пати диференцијабилна функција со непрекинат $n+1$-в извод. Од конструкцијата на $H(t)$ е јасно дека таа се анулира во $n+2$ точки: $H(x_k)=0$, $(k=0,1,\ldots,n)$ и од (1), $H(x)=0$. Според теоремата на Рол, во секој од интервалите чии крајни точки се два последователни корена на $H(t)$ постои барем една точка што е нула на $H'(t)$, т.е. $H'(t)$ има $n+1$ нула во (x_o,x_n). Слично, $H''(t)$ ќе има барем n нули во (x_o,x_n) итн., па на тој начин доаѓаме до заклучок дека $H^{(n+1)}(t)$ се анулира барем во една точка $\xi\in(x_o,x_n)$. Поради

$$P^{(n+1)}(t)=0,\ [(t-x_o)(t-x_1)\ldots(t-x_n)]^{(n+1)}=(n+1)!$$

добиваме дека

$$H^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-\frac{(n+1)!}{(x-x_o)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}R(x),$$

па за $t=\xi$

$$R(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_o)(x-x_1)\ldots(x-x_n) \tag{3}$$

што потсеќа на останаточниот член при Тајлоровата формула.

Ако јазлите на интерполацијата се распределени на еднакви растојанија и ако ставиме $x-x_o=ht$, ќе добиеме $x-x_k=x-x_o-kh=$ $=(t-k)h$, па остаточниот член можеме да го напишеме во облик:

$$R(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,h^{n+1}t(t-1)\ldots(t-n), \qquad (4)$$

или, користејќи го симболот $\binom{t}{n+1}=\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(n+1)!}$

$$R(x)=\binom{t}{n+1}\,h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi). \qquad (5)$$

Ако е можно за $f(x)$ да се пресмета $(n+1)$-от извод и ако $|f^{(n+1)}(x)|<M$, $\quad x\in[x_0,x_n]$, тогаш ќе ја добиеме оценката

$$|R(x)|<Mh^{n+1}\left|\binom{t}{n+1}\right|. \qquad (6)$$

Во поголемиот број случаи, меѓутоа, $f(x)$ е позната само во јазлите на интерполацијата. Тогаш оценката (6) не може да се користи, но сепак може да се добие некоја претстава за грешката ако се замени $f^{(n+1)}(x)$ со $\frac{\Delta^{n+1}y}{h^{n+1}}$, т.е.

$$y^{(n+1)}\approx\frac{\Delta^{n+1}y}{h^{n+1}} \qquad (7)$$

Со оглед на тоа што Њутновата интерполациона формула ја "сечеме" на членовите чии конечни разлики се, практично, константни: $\Delta^{n+1}y_0=\mathrm{const}$, можеме да ја земеме (7) и за $R(x)$ ќе ја добиеме приближната формула

$$R(x)\approx\frac{\Delta^{n+1}y_0}{h^{n+1}}\,h^{n+1}\binom{t}{n+1}=\binom{t}{n+1}\Delta^{n+1}y_0. \qquad (8)$$

За многу важниот специјален случај - кога интерполацијата е линеарна (т.е.$n=1$)- ќе имаме:

$$R(x)\approx\frac{t(t-1)}{2}\,\Delta^2y_0,$$

а поради $0<t<1$ ќе имаме $|t(t-1)|\leqslant\frac{1}{4}$, така што можеме да сметаме дека

$$|R(x)|\leqslant\frac{1}{8}\,|\Delta^2y_0|. \qquad (9)$$

Пример 12. Да ја оцениме приближноста на резултатот во: а) примерот 2; б) примерот 5.

а) Во примерот 1 имаме: $f(x)=\ln x$, $n=2$, $(x_o,x_2)=(2,4)$, $\ln 3 \approx 1,09$. Според формулата (3) имаме

$$R_2(3)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(3-2)(3-3,5)(3-4), \qquad \xi\in(2,4),$$

па бидејќи $f'''(x)=\frac{2}{x^3}<\frac{1}{24}$ за $x\in(2,4)$, добиваме $R_2(3)<0,03$.

б) Во примерот 6 имаме: $f(x)=\operatorname{sh}x$, $x_o=2,9$, $h=0,1$, $t=0,4$. Користејќи ја формулата (4) имаме:

$$R_4(x)=\frac{h^5}{5!}\,t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)f^V(\xi), \xi\in(2,9;3,5).$$

Бидејќи $f^V(x)=\operatorname{ch}x<20$ за $x\in(2,9;\ 3,5)$, добиваме:

$$R_4(2,94)=\frac{0,1^5}{5!}.0,4(-0,6)(-1,6)(-2,6)(-3,6)\operatorname{ch}\xi<10^{-5}.$$

Значи, четири децимали во добиениот резултат за sh2,94 се точни.

5.10.ВЕЖБИ

1. Дадена е таблицата за функцијата $y=\operatorname{ch}x$:

x	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
y	3,76	4,14	4,57	5,04	5,56	6,13

Користејќи линеарна интерполација, да се пополни оваа таблица земајќи чекор $h=0,05$ (т.е. со вредностите на chx за $x=2,05$; 2,15; 2,25; 2,35; 2,45).

2. Да се најде полином со најмал степен кој во дадените точки ги добива дадените вредности:

а)

x	-1	0	2
y	2,5	3,0	0

б)

x	0	1,5	2	5,2
y	1,4	3,1	4,0	4,8

в)

x	-2	1	2	4
y	25	-8	-15	-23

3. Функцијата $y=f(x)$ е зададена со таблицата:

x	2	3	5	7
y	1	4	3	8

Да се најде приближен израз за $f(x)$ во вид на полином со помош на Лагранжовата интерполациона формула. Потоа да се најде приближната вредност на функцијата за а) $x=3,6$, б) $x=7,2$ и да се оцени грешката. (Ослободување од загради не е нужно.)

4. Да се најде интерполациониот полином на Лагранж за функцијата $\sqrt{x}$ на сегментот $[100;196]$ со јазли на интерполацијата $x_0=100$, $x_1=121$, $x_2=144$, $x_3=169$, $x_4=196$. Со помош на добиениот полином да се пресмета а) $\sqrt{135}$, б) $\sqrt{165}$, в) $\sqrt{192}$ и да се оцени грешката.

За кој x се добива $\sqrt{x} \approx 12,645$?

5. Да се покаже дека полиномот $P_{0,1}(x)$ односно $P_{0,1,2}(x)$ при Ејткиновата постапка се совпаѓа со полиномот $P(x)$ за $n=1$ односно за $n=2$ при Лагранжовата формула.

6. Функцијата $y=e^x$ е зададена со таблицата

к	1	2	3	4
x	2,8	2,9	3,0	3,1
y	16,4446	18,1741	20,0855	22,1979

Со помош на Ејткиновата постапка, користејќи квадратна интерполација, да се пресмета e^x за $x=2,96$ земајќи ги за јазли: а) $к=1,2,3$, б) $к=2,3,4$, в) $к=1,3,4$. Добиените резултати да се споредат со вредностите добиени при линеарната интерполација. Да се оцени грешката во секој од тие случаи.

7. Со помош на Ејткиновата постапка да се најде вредноста на функцијата зададена со таблица, во дадената точка x^*.

а)

x	10	13	25	30
y	50,2	46,1	33,0	27,0

$x^* = 21$

б)

x	0	2	5	6	7
y	20340	25132	30402	34020	36450

$x^* = 4$

Да се оцени грешката.

8. Да се пресметаат конечните разлики до трет ред за функцијата y

к	0	1	2	3	4	5	6	7
x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	2	10	30	69	134	239	370	555

зададена со приложената таблица. Какви се разликите од четврти и повисок ред?

9. Да се најдат разликите од шести ред за:

к	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_к$	0	0	1	0	1	1	0	0	1

10. Кој е најмалиот можен степен за полином што ги прима следниве вредности $y_к$:

а)

к	0	1	2	3	4	5
$y_к$	1	4	9	16	25	36

б)

к	0	1	2	3	4	5
$y_к$	0	1	1	1	1	0

11. Да се пресмета

а) $\Delta^3 y_к$, за $y_к=к^3$; б) $\Delta^4 y_к$, за $y_к=к^4$.

12. Да се најдат вредностите што недостасуваат за $y_к$ и $\Delta y_к$ според дадените податоци во следнава таблица:

$y_к$			.		9		.		
$\Delta y_к$		.		4		.		.	
$\Delta^2 y_к$	1		1		7		5		-2

13. Знаејќи дека дадените податоци $y_к$ се вредности на полином од четврти степен, да се прогнозираат наредните три:

а)

к	0	1	2	3	4	5	6	7
$y_к$	1	0	3	2	1	.	.	.

б)

к	0	1	2	3	4	5	6	7
$y_к$	0	-1	1	2	0	.	.	.

14. Во наредната таблица е направена една грешка, поради која е нарушена

x	4	5	6	7	8	9
y	0,76487	0,76613	0,76733	0,76865	0,76991	0,77117

рамномерноста при конечните разлики од втор (и повисок) ред. Најди ја таа грешка и на нејзиното место стави таква вредност на функцијата y што ќе овозможи да станат нули сите разлики од втор ред.

15. Покажи дека:

а) ако $y_к=2^к$, тогаш $\Delta y_к=y_к$,

б) ако $y_к=a^к$ (a=конст.), тогаш $\Delta y_к=a^к(a-1)$.

16. Да се најде функција за која $\Delta y_к=4y_к$.

17*. Да се најде функција $y_к$ за која $\Delta^2 y_к=25y_к$. Дали може да се најде и друга таква функција? (Равенките од овој вид се викаат диференцни или разликовни равенки од втор ред.)

§5.10

18*. Да се најде функција $y_к$ таква што $\Delta^2 y_к=25y_к$ и за која $y_o=0$, $y_1=1$.

19. Докажи дека:

а) $\Delta^4 y_o=y_4-4y_3+6y_2-4y_1+y_o$,

б) $\Delta^к y_o=\sum_{i=o}^{k}(-1)^i\binom{к}{i}y_{к-i}$ (формулата 1° од §5.4).

20. Покажи дека $\sum_{k=o}^{n}\Delta y_k=y_n-y_o$.

21. Две функции се дефинирани за исти вредности $x_к$ на аргументите. Да ги означиме вредностите на тие функции со u_k и v_k. Да ставиме $S_k=C_1u_k+C_2v_k$ каде што C_1 и C_2 се константи (независни од $x_к$); $P_k=u_kv_k$; $Q_k=u_k/v_k$. Да се докаже дека:

а) $\Delta S_k=C_1\Delta u_k+C_2\Delta v_k$ (тоа е 6° од §5.4 за n=2),

б) $\Delta P_k=v_k\Delta u_k+u_{k+1}\Delta v_k=v_{k+1}\Delta u_k+u_k\Delta v_k$,

в) $\Delta Q_k=\frac{1}{v_{k+1}v_k}(v_k\Delta u_k-u_k\Delta v_k)$.

(Притоа, треба да бидат дадени к+1 вредности на аргументот).

22. Најди интерполационен полином од втор степен за функцијата $y(x)=\sqrt{x}$ при x=0,1,4. Зошто Њутновата формула не може да се примени?

23. Да се состави интерполациониот полином на Њутн за функцијата y, зададена со таблицата:

x	0	2	4	6	8
y	1	8	24	46	82

Да се најде y при x=3,5. За кој x се добива y=16?

24. Со помош на првата Њутнова интерполациона формула, применувајќи квадратна интерполација (n=2), да се пресметаат вредностите на функцијата y=sinx, за полустепените од 0° до 5°30' (т.е. за 30',1°30',...,5°30'). Притоа да се искористи четиризначна таблица за *sinx* со чекор 1°.

25. Со помош на втората Њутнова интерполациона формула, применувајќи квадратна интерполација, да се најдат вредностите на функцијата e^{-x} за x=3,46; 3,34; 3,05; 3,52. Притоа, да се искористат четиризначни таблици за e^{-x} со чекор 0,1.

26. Дадена е таблицата вредности на функцијата y=sinx за вредностите на x од 1,0 до 1,9 (четиризначни таблици со чекор 0,1). Користејќи ја првата Њутнова интерполациона формула при n=2 (квадратна интерполација), да се пресмета sinx за следниве вредности на x и да се оцени остаточниот член R_2

а) 1,05; 1,23; в) 1,46; г) 1,82; д) 1,94.

27. Дадена е таблицата на функцијата $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$ (наречена интеграл на веројатноста). а) Применувајќи квадратно интерполирање со Њутновата формула, пресметај $\Phi(1,64)$, и $\Phi(1,25)$ и оцени ја грешката.

x	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
у	0,9340	0,9523	0,9661	0,9763	0,9838	0,9891

б) Убеди се дека линеарна интерполација тука не може да се примени за $\Phi(1,25)$.
в) За која вредност на x се добива $y=0,9695$?

28. Експериментално се најдени издолжувањата на еден федер (x мм) во зависност од товарот (P кг) на тој федер:

x	5	10	15	20	25	30	35	40
P	24	52	86	126	176	232	310	401

Да се најде товарот што го издолжува федерот на 13 мм.

29. Дадени се таблици од вредности на монотони функции. Применувајќи некој од методите за обратно интерполирање, да се најде x за соодветната укажана вредност на у.

а)

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
у	1,5431	1,6685	1,8107	1,9709	2,1509	2,3524

1) 1,6120; 2) 1,7052; 3) 1,8432; 4) 2,3021

б)

x	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70
у	1,15000	2,12068	2,02667	1,96096	1,91857

1) 2,20102, 2) 2,08340, 3) 1,90901.

30. Со помош на обратно интерполирање да се најде со точност $\epsilon=10^{-4}$ коренот на равенкаташто се наоѓа во сегментот $[a,b]$:

а) $x^2+\ln x-4=0$, $[1,5;2]$;

б) $x^3-\sin x=0$, $[0,1]$;

в) $x^4-3x^2+4x-3=0$, $[-3,-2]$;

г) $\operatorname{ctg} 1,4x-5x=0$, $[0;0,5]$

31. Да се пополни таблицата на функцијата $y = \mathrm{Si}x\left(= \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx\right)$ по дадената таблица:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Six	0	0,0999	0,1996	0,2985	0,3965	0,4931	0,5881	0,6812	0,7721

составувајќи за сегментот [0,1; 0,2] таблица со чекор 0,01.

32. По дадената таблица вредности на беселовата функција $y=J_0(x)$

x	2,4	2,5	2,6
J_0	0,0025	-0,0484	-0,0968

да се најде со точност до 10^{-3} коренот на равенката $J_0(x) = 0$ кој лежи во интервалот (2,4; 2,6) (применувајќи обратно интерполирање).

33. Дадена е функцијата $y=f(x)$ со таблица. Да се пресметаат укажаните изводи во наведените точки:

а)

x	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
y	0,389	0,565	0,717	0,841	0,932	0,9854

1) $y'(0,5)$, $y''(0,5)$; 2) $y'(0,4)$, $y''(0,4)$.

б)

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30
y	1,00000	1,02470	1,04881	1,07238	1,09544	1,11803	1,14017

1) $y'(1,12)$, $y''(1,12)$; 2) $y'(1)$, $y''(1)$, $y'''(1)$.

34. Патот $s=s(t)$ изминат од една точка која се движи праволиниски за време t е даден со следнава таблица:

к	0	1	2	3	4	5	6	7
t_k во сек.	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
$s_к$ во см.	0,000	1,519	6,031	13,397	23,396	35,721	50,000	65,798

Користејќи ги конечните разлики до петти ред заклучно, приближно да се пресмета брзината $v=ds/dt$ и забрзувањето $w=d^2s/dt^2$ на точката за моментите: $t=0$; 0,01; 0,02.

Забелешка. Табеларниот закон на движењето се задава со формулата $s=100(1-\cos\frac{50\pi t}{9})$. Спореди ги приближните вредности на v и w со точните $\tilde{v}$ и $\tilde{w}$.

35. За која вредност на x следнава функција y, дадена со таблица, има а) максимум, односно б) минимум?

а)

x	y
3	205
4	240
5	259
6	262
7	250
8	224

б)

x	y
0,2	0,9182
0,3	0,8975
0,4	0,8873
0,5	0,8862
0,6	0,8935
0,7	0,9086

36. За функцијата $f(x)=\sqrt{1+x}$ треба да се состави таблица со рамномерен чекор h на сегментот $[0,10]$. Какви вредности за h ќе гарантираат дека грешката при линеарна интерполација не ќе биде поголема од 2^{-11}?

37. Со каква точност може да се пресмета ln60,5 по формулата на Лагранж ако се познати вредностите на ln60, ln61, ln62, ln63?

38. Во логаритамските таблици со пет децимали се дадени логоритмите на целите броеви од 1000 до 10000 со мајорантна апсолутна погрешност $0,5.10^{-5}$. Дали е можна линеарна интерполација со истата точност?

39. Дадена е таблицата на косинуси со чекор 1°. Која е најголемата погрешност на линеарната интерполација?

40. Да се определат A_0, A_1 и A_2, така што "тригонометрискиот полином"

а) $p(x)=A_0+A_1\cos x+A_2\sin x$;

б) $p(x)=A_0+A_1\cos 2x+A_2\sin 2x$

да има исти вредности со функцијата $y=y(x)$ во точките x_0, x_1 и x_2.

41. Користејќи ја првата Њутнова интерполациона формула, да се најде

а) $S_n=1+2+\ldots+n$;

б) $S_n=1^2+2^2+\ldots+n^2$;

в) $S_n=1^3+1^2+\ldots+n^3$.

42.* Две функции се дефинирани за исти вредности x_k, распоредени на еднакви растојанија, а соодветните вредности им се означени со u_k и v_k. Докажи дека:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \Delta v_k = u_k v_n - u_0 v_0 - \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} \Delta u_k . \qquad (*)$$

Оваа формула се вика *делумно сумирање*; таа е аналогна на формулата за парцијална интеграција:

$$\int_{x_0}^{x_n} u(x)\,v(x)\,dx = u(x_n)v(x_n) - u(x_o)v(x_o) - \int_{x_o}^{x_n} v(x)u'(x)\,dx.$$

43*. Користејќи ја формулата за делумно сумирање, да се најде сумата S на редот:

а) $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$, б) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2x^k$ каде што $-1 < x < 1$.

44*. Еден динар се фрла нагоре сѐ додека не падне "грб". Тогаш се врши исплата, еднаква со: а) к динари, б) $к^2$ динари, ако прв пат паднал "грб" при к-тото фрлање. За "просечно исплатување", во теоријата на веројатноста се доаѓа до следниов ред:

а) $\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k$, б) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Колку динари ќе бидат исплатени во случајот а), а колку во случајот б)?

ПРИБЛИЖНО ИНТЕГРИРАЊЕ

При пресметувањето на определените интеграли $\int_a^b f(x)\,dx$ не е секогаш возможно да се најде за $f(x)$ примитивна функција $F(x)$ изразена со помош на елементарни функции, па потоа да се искористи Њутн-Лајбницовата формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Таков е, на пример, случајот ако $f(x)$ е $e^{-x^2}, e^x/x$, $\sin x/x$. Дури и во случаите кога постои таква примитивна функција $F(x)$, таа може да е комплицирана или незгодна за пресметување на вредностите $F(a)$ и $F(b)$. Од трета страна, често $f(x)$ не е точно одредена, туку се знаат само нејзините вредности во одреден, конечен број точки од сегментот $[a,b]$.

Наведените причини ја наметнуваат потребата од приближно пресметување на определените интеграли. Ние ќе се задржиме на некои едноставни методи според кои се вршат такви приближни пресметувања.

6.1. ИНТЕГРИРАЊЕ СО ПОМОШ НА РЕДОВИ

За пресметување на определениот интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ често се користат редовите, со тоа што, ако е возможно, прво $f(x)$ се претставува како сума на еден степенски ред и користејќи го својството на униформна конвергенција на степенските редови, интегрирањето се врши член по член. Оваа идеја ќе ја илустрираме со два примера.

Пример 1. Да го пресметаме интегралот

$$\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

со точност до 0,001.

Бидејќи

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots,$$

добиваме дека

$$\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{2n-1} + \dots,$$

при што редот од десната страна е (униформно) конвергентен во интервалот $(-1,1)$. Според тоа,

$$\int_0^t \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = t - \frac{t^3}{3^2} + \frac{t^5}{5^2} - \dots + (-1)^n \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)^2} + \dots$$

За да ја решиме задачата, треба да ја најдеме сумата на последниот ред при $t=1/2$ со точност до 0,001. Бидејќи редот е алтернативен, според Лајбницовиот критериум ќе имаме:

$$\left|\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3.3^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)^2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)^2}.$$

Со проба, за $n=3$, добиваме дека $2^7.7^2 = 6272$, така што

$$\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3.3^2} + \frac{1}{2^5.5^2} = \frac{3600 - 100 + 9}{7200} = 0,487$$

со точност до 10^{-3}.

Пример 2. Да го пресметаме интегралот

$$I = \int_{0}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^5}}$$

со точност до 10^{-4}.

Пресметувањето ќе го извршиме така што подинтегралната функција ќе ја развиеме во ред. Бидејќи биномниот ред

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n+\dots$$

е конвергентен во интервалот $(-1,1)$, следува дека редот

$$(1-x^5)^{-1/2} = 1+\frac{1}{2}x^5+\frac{1.3}{2^2.2!}x^{10}+\dots+\frac{1.3\dots(2n-1)}{2^n.n!}x^{5n}+\dots$$

може да се интегрира член по член во сегментот $[0;0,5]$, па

$$I = \left[x+\frac{1}{2}\frac{x^6}{6}+\frac{1.3}{2^2.2!}\frac{x^{11}}{11}+\frac{1.3.5}{2^3.3!}\frac{x^{16}}{16}+\dots\right]\Bigg|_0^{0,5}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2.6.2^6}+\frac{1.3}{2^2.2!11.2^{11}}+\frac{1.3.5}{2^3.3!.16.2^{16}}+\dots$$

Бидејќи веќе третиот член е помал од 10^{-4}, ќе пробаме да го земеме за приближна вредност на интегралот збирот на првите два члена. Притоа, за оценка на грешката не можеме да го користиме Лајбницовиот критериум, зашто редот не е алтернативен па овде ќе постапиме на друг начин. Ќе го напишеме остатокот R_2 и ќе користиме соодветни неравенства и равенства:

$$R_2 = \frac{1.3}{2!2^2.11.2^{11}}+\frac{1.3.5}{3!2^3.16.2^{16}}+\frac{1.3.5.7}{4!2^4.21.2^{21}}+\dots$$

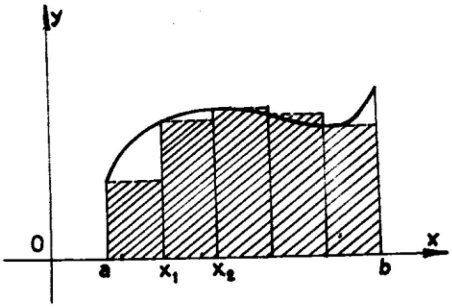
$$< \frac{1}{11.2^{11}}+\frac{1}{11.2^{16}}+\frac{1}{11.2^{21}}+\dots=\frac{1}{11.2^{11}}\left(1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^{10}}+\dots\right)$$

$$=\frac{1}{11.2^{11}}\cdot\frac{1}{1-1/2^5}<\frac{1}{11.2^{10}}<10^{-4}.$$

Според тоа, $I \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2.6.2^6} \approx 0,5013$, при што грешката е помала од 10^{-4}.

6.2. ПРАВИЛО НА ПРАВОАГОЛНИЦИ

Нека $f(x)$ е непрекината функција на сегментот $[a,b]$. Да го поделиме тој сегмент на n(еднакви) делови со точките $a=x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ (на црт.1 е земено $n=5$). Избирајќи по една точка ξ_i во секој потсегмент $[x_{i-1}, x_i]$ ја добиваме интегралната сума



Црт.1

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n,$$

каде што $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Бидејќи $f(x)$ е непрекината, таа е интеграбилна на $[a,b]$, т.е.

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} S_n = \int_a^b f(x)\,dx,$$

па можеме да ставиме:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (1)$$

Ова приближно равенство, во општ случај е дотолку поточно, доколку Δx_i е помал. Специјално:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \qquad \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i,$$

каде што $M_i = f(c_i)$ е најголемата, а $m_i = f(d_i)$ е најмалата вредност на f(x) во $[x_{i-1}, x_i]$. Според тоа, грешката при пресметувањето на интегралот по формулата (1) не е поголема од бројот

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i.$$

Ако $f'(x)$ постои и ако е ограничен, т.е. $|f'(x)| \leqslant K$, тогаш, според Лагранжовата формула, имаме

$$M_i - m_i = f(c_i) - f(d_i) = (c_i - d_i) f'(\eta_i),$$

па

$$|M_i - m_i| \leqslant \Delta x_i K.$$

Значи:

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\ \Delta x_i \leqslant K \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2.$$

При приближните пресметувања на интеграли по формулата (1), во практиката, најчесто сегментот $[a,b]$ се дели на n еднакви делови, т.е. се зема $\Delta x_i = h = \frac{b-a}{n}$, а за ξ_i се зема или почетната или крајната точка на потсегментот $[x_{i-1}, x_i]$. Во тој случај

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h[f(a)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})], \tag{1'}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h[f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})+f(b)]. \tag{1''}$$

Притоа, бидејќи

$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2=\frac{(b-a)^2}{n}=(b-a)h,$$

ја добиваме следнава оценка:

$$R=\left|\int_a^b f(x)\,dx-h\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\right|<(b-a)hK. \qquad (2)$$

Според тоа, грешката ќе биде помала од даден број ϵ ако

$$n>\frac{(b-a)^2K}{\epsilon}.$$

Јасно е дека формулите (1′) и (1″) може да се користат и во случајот кога f(x) не е зададена со аналитички израз, туку со таблица, но тогаш формулата (2) за оценка на грешката не може да се користи. Во тој случај за оценка на погрешноста може да се искористи следнава приближна формула (добиена со заменување на изводот y' со $\frac{1}{h}.\Delta y$):

$$R\approx(b-a)\,\overline{\Delta y}, \qquad (2')$$

каде што $\overline{\Delta y}$ е аритметичката средина на конечните разлики од прв ред.

Да забележиме дека од (1′) и (1″), земајќи аритметичка средина, може да се добие друго приближно равенство:

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\ldots+y_{n-1}\right). \qquad (3)$$

Пример 3. Да го пресметаме со правилото на правоаголници интегралот $\int_{0,4}^{1}\frac{e^x}{x}dx$, земајќи $h=0,1$.

Во наредната таблица ќе ги сместиме соодветните вредности за x, e^x и $y=e^x/x$ од 0,4 до 1,0 со чекор 0,1.

Според формулата (1′) имаме:

$$\int_{0,4}^{1}\frac{e^x}{x}dx\approx 0,1.18,4458\approx 1,8446,$$

к	$x_к$	$e^{x_к}$	$y_к$
0	0,4	1,4918	3,7295
1	0,5	1,6487	3,2954
2	0,6	1,8221	3,0368
3	0,7	2,0138	2,8734
4	0,8	2,2255	2,7819
5	0,9	2,4596	2,7288
6	1,0	2,7183	2,7183
$\sum_{k=0}^{5} y_к = 18,4458;$			$\sum_{k=1}^{6} y_к = 17,4346$

а според (1″):

$$\int_{0,4}^{1} \frac{e^x}{x}dx \approx 0,1.17,4346 \approx 1,7435.$$

Да ја оцениме грешката според формулата (2). Бидејќи $|f'(x)| = |(x-1)e^x/x^2|$ во сегментот $[0,4;1]$ достигнува најголема вредност за $x=0,4$, т.е.

$$\max|f'(x)| = |f'(0,4)| = \frac{0,6.1,4918}{0,16} = \frac{0,89508}{0,16} \leqslant 5,6,$$

следува дека

$$R \leqslant h(b-a)K = 0,1.0,6.5,6 = 0,336,$$

т.е. грешката не е поголема од 0,34.

Да забележиме дека, во дадениов случај, може да добиеме подобра оценка. Имено, бидејќи $f'(x) \leqslant 0$ за $x \in (0,4;1)$, заклучуваме дека $f(x)$ монотоно опаѓа во сегментот $[0,4;1]$, па значи

$$1,7434 \leqslant \int_{0,4}^{1} \frac{e^x}{x}dx \leqslant 1,8446.$$

Бидејќи 1,8446 - 1,7434 = 0,1011, ние сме сигурни дека грешката е помала од 0,11. (Врз основа на тоа, за приближна вредност на дадениот интеграл е најдобро да се земе аритметичката средина на горните крајности, т.е. да се земе бројот 1,794).

6.3. ПРАВИЛО НА ТРАПЕЗИ

Овде ќе ја изведеме формулата (3) од 6.2 на друг начин. Како и во почетокот, ќе претпоставиме дека функцијата $f(x)$ е непрекината на сегментот $[a,b]$ и тој сегмент е поделен на n еднакви потсегменти со точките

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b; \quad x_k = x_0 + kh, \qquad h = \frac{b-a}{n}.$$

Да ставиме $y_k = f(x_k)$. Според првата Њутнова интерполациона формула имаме $f(x) \approx P(x_0+th)$, каде што

$$P(x_0+th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

Оттука добиваме

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_0+nh} P(x_0+th)dx = [x = x_0+th, \qquad dx = hdt]$$

$$= h\int_0^n (y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots)dt$$

т.е.

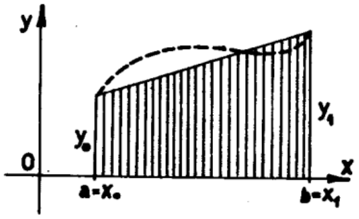
$$\int_a^b f(x)dx \approx h[ny_0 + \frac{n^2}{2}\Delta y_0 + (\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2})\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + $$
$$+ (\frac{n^4}{3} - n^3 + n^2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!} + \ldots]. \qquad (1)$$

Од формулата (1) можат да се добијат редица приближни формули за пресметување определени интеграли, ако сегментот $[a,b]$ се дели на различен број поделоци.

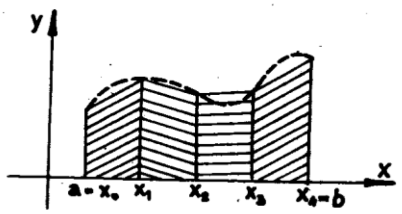
За $n=1$ од (1) се добива формулата

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx \approx h[y_0 + \frac{1}{2}\Delta y_0] = h.\frac{y_0+y_1}{2}; \qquad h = b-a, \qquad (2)$$

која, геометриски означува дека плоштината на криволинискиот трапез е приближно еднаква со плоштината на обичниот трапез (црт.2).



Црт.2



Црт.3

Формулата (2) дава обично груби приближни решенија, но може да се подобри на следниов начин: сегментот $[a,b]$ прво се дели на n потсегменти (црт.3)

$$[x_0,x_0+h],\quad [x_0+h,\ x_0+2h],\ldots,[x_0+(n-1)h,x_0+nh],$$

$x_0=a$ и $h=(b-a)/n$, а потоа на секој од нив се применува формулата (2), така што конечно ќе се добие

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}], \tag{3}$$

при што $y_k=f(x_k)=f(x_0+kh)$, а тоа е формулата (3) што ја добиваме во 6.2.

Да ја оцениме грешката во приближната формула (3). Притоа ќе претпоставиме дека $f(x)$ има непрекинат втор извод на сегментот $[a,b]$.

Според начинот како е добиена формулата (3), функцијата $f(x)$ се заменува на сегментот $[x_{i-1},x_i]$ со полином $P(x)$ од прв степен, па согласно со формулата за остатокот при интерполационите формули (в.(3) од 5.9), добиваме

$$f(x)=P(x)+\frac{f''(\xi_i)}{2}(x-x_{i-1})(x-x_i),$$

од каде што, со интегрирање, се добива

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = h\,\frac{y_{i-1}+y_i}{2}+\frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(\xi_i)(x-x_{i-1})(x-x_i)\,dx.$$

Така, за оценување на грешката во приближната формула

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx h\,\frac{y_{i-1}+y_i}{2}$$

треба да се оценува остаточниот член

$$r_i = \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(\xi_i)(x-x_{i-1})(x-x_i)dx.$$

Според обопштената теорема за средна вредност*) добиваме

$$r_i = \frac{1}{2}\,f''(\bar{\xi}_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})(x\;x_i)dx =$$

$$[\;x-x_{i-1}=th,\quad x-x_i=h(t-1),\quad dx=hdt\;]$$

$$=\frac{1}{2}\,f''(\bar{\xi}_i)\int_0^1 h^3(t^2-t)dt = -f''(\bar{\xi}_i)\,\frac{h^3}{12}.$$

Ако го означиме со R_n остаточниот член за (3), ќе добиеме

$$R_n = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\bar{\xi}_i),$$

а поради непрекинатоста на $f''(x)$ и поради

$$m \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\bar{\xi}_i) \leqslant M,$$

---

*) Нека $\phi(x)$ и $\psi(x)$ се интеграбилни функции на сегментот $[a,b]$, нека $m \leqslant \phi(x) \leqslant M$ и нека $\psi(x)$ не го менува знакот во $[a,b]$: $\psi(x)\geqslant 0$ $[\psi(x)\leqslant 0]$. Тогаш $\int_a^b \phi(x)\psi(x)\,dx = \mu\int_a^b \psi(x)\,dx$, каде што $m \leqslant \mu \leqslant M$.

постои $\xi \in (x_o, x_n)$, таков што

$$f''(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f''(\bar{\xi}_i).$$

Така имаме

$$R_n = -\frac{h^3}{12} n.f''(\xi) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} .nf''(\xi)$$

и, конечно,

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} .f''(\xi) \qquad (4)$$

или

$$|R_n| \leqslant \frac{h^2}{12} (b-a) M_2,$$

каде што $M_2 = \max |f''(x)| \qquad x \in [a,b]$.

Пример 4. Да го решиме приближно интегралот $\int\limits_{0,4}^{1} \frac{e^x}{x} dx$ со трапезното правило, земајќи $h=0,1$.

Користејќи ја таблицата од примерот 3, добиваме:

$$\int\limits_{0,4}^{1} \frac{e^x}{x} dx \approx h[\frac{1}{2} (y_o+y_6) + \sum_{k=1}^{5} y_k] = 0,1[3,2239+14,7163] = 1,794.$$

Да ја оцениме погрешноста според формулата (4). За да го најдеме

$$M_2 = \max f''(x) \text{ во } [0,4;1], \quad f''(x) = (x^2-2x+2)e^x/x^3,$$

ќе уочиме дека $f'''(x) = (x^3-3x^2+6x-6)e^x/x^4 < 0$ за $x \in [0,4;1]$. Тоа значи дека $f''(x)$ монотоно опаѓа во тој сегмент, па најголемата вредност на $|f''(x)|$ во $[0,4;1]$ е $f''(0,4) = 31,701$. Така добиваме:

$$|R_6| \leqslant \frac{h^2}{12}(b-a)M_2 = \frac{0,1^2}{12}.0,6.31,701 = 0,0159 < 0,016.$$

Можеме да забележиме дека резултатот добиен со трапезното правило е значително подобар од резултатот добиен во примерот 3.

Да забележиме дека формулата (4) за оценка на погрешноста нема голема практична вредност. Имено, често се случува подинтегралната функција $f(x)$ да е зададена само со таблица, па немаме можност да го пресметаме (точно) $f''(x)$ или, пак, ако $f(x)$ е зададена со аналитички израз, може да се случи $f''(x)$ да не постои во некои точки од сегментот на интеграцијата. Дури и во случаите кога $f''(x)$ постои, може да се јават потешкотии од техничка природа (така,во примерот 4 имавме едноставна подинтегрална функција, а сепак оценката на погрешноста не беше едноставна).

Поради тоа, за оценка на погрешноста се користи следнава приближна формула:

$$R \approx -\frac{b-a}{12}\overline{\Delta^2 y}, \tag{4'}$$

каде што $\overline{\Delta^2 y}$ е аритметичката средина на вторите конечни разлики. (Јасно е дека формулата (4') е добиена од (4) со примена на (4) од §5.4.)

Определувањето на чекорот h односно бројот n во неравенството (4) за постигнување барана точност, во општ случај,е заплеткано. Затоа се практикува h да се избере со груба проценка, а потоа, откако ќе се добие резултатот, бројот n се удвојува, т.е. чекорот h се преполовува. Ако новиот резултат се совпаѓа со претходниот во децималите што ги задржуваме, тогаш пресметувањето завршува. Во спротивно, таа постапка се повторува.

За приближна оценка на апсолутната погрешност R може да се користи т.н. принцип на Рунге, според кој

$$R \approx \frac{1}{3}\left|I_n - I_{2n}\right|, \tag{5}$$

каде што I_n е резултатот од пресметувањата со чекор h, а I_{2n} со чекор $h/2$.

6.4. ПРАВИЛО НА ПАРАБОЛИ (СИМПСОНОВО ПРАВИЛО)

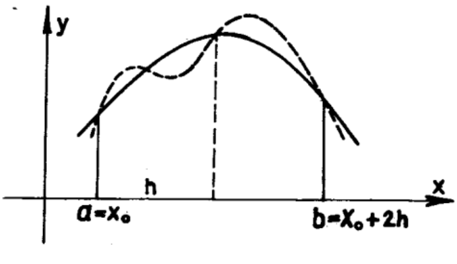
Ќе се задржиме уште на една формула за приближно интегрирање која може да се добие од формулата (1) во 6.3, а нејзината употреба е доста распространета. Имено, ако во (1) од 6.3. ставиме $n=2$, ќе добиеме

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx \approx h[2y_0+2\Delta y_0+(\frac{8}{3}-2).\frac{1}{2}\Delta^2 y_0] =$$

$$=h[2y_0+2y_1-2y_0+\frac{1}{3}(y_2-2y_1+y_0)],$$

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2). \qquad (1)$$

Оваа формула е наречена правило на параболи. Името доаѓа оттаму што во формулата (1) од 6.3. ги земаме членовите заклучно до квадратниот, а тоа значи дека $f(x)$ ја заменуваме со полином од втор степен, т.е. кривата $y=f(x)$ ја заменуваме на $[a,b]$ со парабола (црт.4).



Црт.4

За да се добие подобра формула за приближно пресметување на определениот интеграл, слично како кај трапезното правило, сегментот $[a,b]$ го делиме на $2m$ потсегменти:

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ldots,[x_{2m-1},x_{2m}]$$

а горната формула (1) ја применуваме на сите парови $[x_{2i-2},x_{2i-1}]$, $[x_{2i-1},x_{2i}]$, $i=1,2,\dots,m$. На тој начин ќе ја добиеме следнава формула

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[y_o+y_{2m}+4(y_1+y_3+\dots+y_{2m-1})+$$

$$+2(y_2+y_4+\dots+y_{2m-2})], \qquad (2)$$

т.е. проширена форма на формулата (1). Формулата (1) односно (2) се вика уште и Симпсоново правило.

На крајот ќе наведеме формула за оценка на погрешноста при Симпсоновото правило не задржувајќи се на нејзиното докажување.

Ако функцијата f(x) има четврти непрекинат извод на сегментот $[a,b]$, тогаш за оценка на точноста при Симпсоновото правило важи следнава формула:

$$R=-\frac{(b-a)^5}{180(2m)^4}:f^{iv}(\xi), \qquad \xi\in(a,b)$$

т.е.

$$|R|\leqslant\frac{h^4}{180}(b-a)M_4, \qquad (3)$$

каде што $M_4=\max|f^{iv}(x)|$ за $x\in[a,b]$.

Пример 5. Да го решиме интегралот $\int_{0,4}^{1}\frac{e^x}{x}\,dx$ со Симпсоновото правило при чекор h=0,1.

Пак ќе ја користиме таблицата од примерот 3, но ќе извршиме прегрупирање за поудобно користење. Така, според формулата (2) имаме

$$\int_{0,4}^{1}\frac{e^x}{x}\,dx\approx\frac{0,1}{3}[6,4478+4\cdot 8,8976+2.5,8187]\approx 1,78918.$$

к	$x_к$	$y_к$		
		за к=0, к=6	за непарни к	за парни к
0	0,4	3,7295		
1	0,5		3,2954	
2	0,6			3,0368
3	0,7		2,8734	
4	0,8			2,7819
5	0,9		2,7288	
6	1,0	2,7183		
Суми		6,4478	8,8976	5,8187

Да ја оцениме грешката со помош на формулата (3). И овде можеме да установиме дека $f^{iv}(x)=(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)e^x/x^5$ монотоно опаѓа на сегментот $[0,4;1]$ (навистина, $f^v(x)=(x^5-5x^4+$ $+20x^3-6ox^2+120x-120)e^x/x^6$ е негативен за $x\in[0,4;1]$). Според тоа,

$$M_2=\max_{0,4\leqslant x\leqslant 1}|f^{iv}(x)|=f^{iv}(0,4)=$$

$$=(0,0256-0,256+1,92-9,6-24)\cdot 1,4918/0,4^5=$$

$$=16,0896.1,4918/0,4^5\approx 234,3991.$$

Така, за грешката ќе имаме

$$R\leqslant\frac{0,0001}{180}.0,6.234,3991\approx 0,00008.$$

Значи, земајќи ја 1,7892 за приближна вредност на дадениот интеграл, правиме грешка не поголема од 0,0001.

Формулата (3) за оценка на погрешноста при Симпсоновото правило, од истите причини како кај правилото на трапези, нема голема практична вредност.

Еден од најважните критериуми за применување на Симпсоновата формула е постојаноста на вторите или третите разлики во таблицата на вредности на функцијата, составена со чекор h. Имено, тоа значи дека функцијата доволно добро е претставена со полиноми од втор или трет степен, за кои Симпсоновата формула дава точни вредности.

За оценка на погрешноста R, кога функцијата е зададена само со таблица, може да се користи приближната формула

$$R \approx -\frac{b-a}{180}\,\overline{\Delta^4 y}, \qquad (3')$$

каде што $\overline{\Delta^4 y}$ е аритметичката средина на четвртите разлики.

И при Симпсоновото правило, за определување на чекорот h (за добивање одредена точност), се практикува h да се избере со груба проценка, а потоа, откако ќе се добие резултатот, чекорот h се преполовува и се постапува на ист начин како во соодветната ситуација при правилото на трапези. И тука, за приближна оценка на апсолутната погрешност R, може да се користи т.н. принцип на Рунге:

$$R \approx \frac{1}{15}\left|I_n - I_{2n}\right|, \qquad (4)$$

каде што I_n и I_{2n} се како во (5) од §6.3.

За илустрација на (4′) од §6.3 и на (3′) од овој параграф, ќе разгледаме еден пример.

Пример 6. Под дејство на променлива сила F, насочена по оската $0x$, една материјална точка се преместила по оската $0x$ од положбата $x=0$ во положбата $x=6$. Да ја пресметаме приближно работата A на силата F, ако е зададена таблицата на нејзиниот модул F:

к	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_k	0,0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
F	2,50	1,50	0,75	1,75	2,50	3,25	3,75	4,50	5,00	6,50	8,50	10,00	12,00

Пресметувањето ќе го извршиме по формулата на: а) трапези, б) Симпсон, а оценката на погрешноста - по формулата (4′) од 6.3 и по (3′) од овој параграф.

Работата A на силата F, со модул F(x), извршена на сегментот $[a,b]$, се пресметува по формулата

$$A = \int_a^b F(x)dx .$$

Од зададената таблица гледаме дека чекорот на интеграцијата е $h=0,5$. Според формулите (3) од 6.3 и (2), имаме:

а) $$A = \int_a^b F(x)\,dx \approx 0,5[\frac{1}{2}(F_o+F_{12}) + \sum_{k=1}^{11} F_k] =$$
$$= 0,5.(7,25+48,00) = 27,625;$$

б) $$A \approx \frac{0,5}{3}\,[F_o+F_{12}+4(F_1+F_3+F_5+F_7+F_9+F_{11})+2(F_2+F_4+F_6+F_8+F_{10})]$$
$$= \frac{1}{6}[14,50+4.27,50+2.20,50] = \frac{1}{6}.165,50 =$$
$$= 27,583.$$

За да ги оцениме погрешностите по споменатите формули, ќе ги формираме соодветните конечни разлики; тие се сместени во наредната таблица на конечни разлики.

k	x_k	F_k	ΔF_k	$\Delta^2 F_k$	$\Delta^3 F_k$	$\Delta^4 F_k$
0	0,0	2,50	-1,00	0,25	1,50	-3,50
1	0,5	1,50	-0,75	1,75	-2,00	2,25
2	1,0	0,75	1,00	-0,25	0,25	-0,50
3	1,5	1,75	0,75	0	-0,25	0,75
4	2,0	2,50	0,75	-0,25	0,50	-1,00
5	2,5	3,25	0,50	0,25	-0,50	1,25
6	3,0	3,75	0,75	-0,25	0,75	-0,25
7	3,5	4,50	0,50	0,50	0,50	-2,00
8	4,0	5,00	1,00	1,00	-1,50	-2,50
9	4,5	6,50	2,00	-0,50	1,00	
10	5,0	8,50	1,50	0,50		
11	5,5	10,00	2,00			
12	6,0	12,00				
Сума				3,00		-0,50

Бидејќи $\overline{\Delta^2 F} \approx 0,273$ и $\overline{\Delta^4 F} \approx -0,055$, добиваме:

а) $R \approx -\frac{b-a}{12} . \overline{\Delta^2 F} = -\frac{6}{12} . 0,273 \approx -0,14;$

б) $R \approx -\frac{b-a}{180} . \overline{\Delta^4 F} = -\frac{6}{180}(-0,055) \approx 0,002.$

*6.5. НЕКОИ ЗАБЕЛЕШКИ ЗА НУМЕРИЧКОТО ИНТЕГРИРАЊЕ

1) За конструкцијата на квадратурните формули. Од изнесеното во претходните параграфи можеме да заклучиме дека задачата на приближното интегрирање се состои во наоѓање приближна вредност на даден определен интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

ако се зададени n вредности $y_i = f(x_i)$ на подинтегралната функција во точките $x_1, \ldots, x_n$ (се допушта интервалот на интеграцијата да биде бесконечен). При нумеричкото интегрирање, всушност, подинтегралната функција $f(x)$ се заменува со некоја друга, попроста функција $\phi(x)$, којашто: ги прима истите вредности како $f(x)$ во точките x_i, доволно е блиска до $f(x)$, може лесно да се интегрира. Изборот на функцијата $\phi(x)$ зависи од природата на задачата, но најчесто таа се избира да биде полином. Точноста на резултатот ќе зависи од тоа колку добро е претставена подинтегралната функција на сегментот $[a,b]$ со тој полином или, геометриски, колку добро графикот на тој полином се совпаѓа на $[a,b]$ со графикот на подинтегралната функција. Затоа, пред да се почне нумеричкото пресметување на еден интеграл, препорачливо е да се утврди природата и текот на подинтегралната функција во $[a,b]$, а во некои случаи е пожелно да се нацрта точен график на подинтегралната функција и потоа да почне пресметувањето по некоја формула.

Во некои случаи, кога подинтегралната функција или нејзините изводи од "невисок ред" имаат некои "непожелни својства" (на пример, неограничено растат заменувањето на $f(x)$ со полином е отежнато или сосем невозможно. За да се избегнат таквите особености, се прибегнува кон разложување на подинтегралната функција на два множитела, $f(x)=p(x)\,\phi(x)$, т.е. дадениот интеграл се разгледува во форма

$$\int_a^b p(x)\phi(x)\,dx. \qquad (1)$$

(Тоа често се прави, на пример, при пресметување на несвојствени интеграли со бесконечни граници, т.е. на интеграли од типот

$$\int_a^\infty f(x)\,dx,$$

при кои $f(x)$ монотоно опаѓа кога $x \to \infty$. Во тој случај $p(x)$ се избира така што монотоно да опаѓа, а $\phi(x)$ е доволно глатка функција, т.е. диференцијабилна доволен број пати, којашто допушта добро претставување со алгебарски полином.)

Во општ случај, функцијата $p(x)$ се избира така што да ги содржи основните карактеристики на $f(x)$ и, по возможност, да биде едноставна, а функцијата $\phi(x)$ е произволна, но доволно глатка на $[a,b]$. Функцијата $p(x)$ се вика *тежинска функција* или *тежина* (за f) и при конструирањето на правило за пресметување на (1), таа се смета за фиксирана.

Всушност, повеќето такви правила се специјални и се наменети за интегрирање на функции што имаат основни карактеристики од ист вид, определени со тежината $p(x)$. Бидејќи нумеричкото интегрирање често се вика приближна (или механичка) квадратура, правилата за приближно пресметување на определени интеграли се викаат *квадратурни формули*.

2) За некои линеарни квадратурни формули

За приближно интегрирање често се градат квадратурни формули при кои интегралот се изразува како линеарна комбинација од ординатите на подинтегралната функција (како, на пример, при правилото на трапези и правилото на параболи). Таквите формули се викаат *линеарни квадратурни формули* и може да се напишат во форма

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \omega_k f(x_k), \qquad x_k \in [a,b]. \tag{2}$$

Величините ω_k се викаат *квадратурни коефициенти* или *тежини* на квадратурната формула (2), апсцисите x_k се викаат *квадратурни јазли*, а десната страна на (2) - *квадратурна сума*. Тука n, ω_k и x_k се параметри, вкупно $2n+1$, коишто треба да се изберат згодно за формулата (2) да дава што подобар резултат при интегрирањето на дадената класа Φ од функции.

На пример, кај формулите на трапези и параболи, претпоставувајќи дека подинтегралната функција меѓу јазлите (при зададени јазли на исти растојанија h) се заменува со линеарна функција односно со парабола, тежините се избираат на следниов начин:

$\frac{h}{2}, h, \dots, h, \frac{h}{2}$ - кај формулата на трапези,

$\frac{h}{3}, \frac{4h}{3}, \frac{2h}{3}, \dots, \frac{4h}{3}, \frac{h}{3}$ - кај формулата на параболи.

Се разбира, колку е поголем бројот на јазлите, толку поголема точност може да се постигне, па затоа при изградувањето на формули од видот (2) бројот n често се смета за фиксиран, а се избираат само ω_k и x_k. (Тие параметри не се секогаш произволни, т.е. може да имаат некои ограничувања; на пример, за функции зададени со таблица, јазлите мора да се избираат од таблицата.)

Изборот на параметрите ω_k и x_k се користи за постигнување на неколку цели: 1° за минимизација на погрешноста, 2° за упростување на пресметувањата и 3° за зголемување на "степенот на точноста".

Во врска со првата цел - минимизација на погрешноста - се разгледува остаточниот член или погрешноста на (2),

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} \omega_k f(x_k) \qquad (3)$$

и, за величина што ја карактеризира точноста на квадратурната формула на фамилијата Φ од функции f, се зема супремумот

$$M = \sup_{f \in \Phi} |R_n(f)|,$$

којшто зависи од $x_1,\dots,x_n$, $\omega_1,\dots,\omega_n$, па се оди кон тоа тие да се изберат така, што бројот M да биде што е можно помал. Оваа задача, теориски интересна, сè уште нема дадено некои значителни практични резултати.

2°. За упростување на пресметувањата, при многу квадратурни формули од типот (2), јазлите се избираат на еднакви растојанија, а коефициентите ω_k се избираат според некакви услови. Кај други, пак, за упростување на пресметувањата се зема ω_k да се меѓусебно еднакви, а x_k се избираат на некој начин, па квадратурната формула (2) добива вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx C[f(x_1)+\dots+f(x_n)],$$

којашто содржи $n+1$ параметар: C и $x_1,\dots,x_k$.

Таков е случајот со квадратурната формула на Чебишев:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\,[f(x_1)+\dots+f(x_n)], \qquad (4)$$

при која тежините се еднакви, а јазлите x_k се симетрично распределени во однос на средината на интервалот $[a,b]$ (а се наоѓаат како нули на некои полиноми).

(Да забележиме дека при изведувањето на квадратурни формули од видот (2) нема потреба да се разгледува произволен сегмент $[a,b]$ на интегрирање, а може да се земе некој стандарден сегмент, како на пример $[-1/2,\ 1/2]$, $[0,1]$ и сл. Навистина, со смената

$$x = (b-a)t + \frac{a+b}{2}$$

добиваме

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_{-1/2}^{1/2} g(t)\,dt,$$

каде што

$$g(t) = f((b-a)t + \frac{a+b}{2}),$$

т.е. (2) добива облик

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a) \sum_{k=1}^{n} \omega_k f(x_k),$$

при што јазлите x_k се пресметуваат по формулата

$$x_k = \frac{a+b}{2} + (b-a)t_k$$

а t_k се соодветните јазли за сегментот $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.)

Во врска со третата цел 3^o - зголемување на степенот на точноста - ќе го појасниме, прво, значењето на терминот "степен на точност".

Да претпоставиме дека се разгледува квадратурната формула

$$\int_a^b p(x)\phi(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \omega_k \phi(x_k) \qquad (5)$$

и фамилијата Φ од функции ϕ. Натаму, нека $\psi_m(x)$ $(m=0,1,2,\dots)$ е систем од линеарно независни функции, такви што производите $p(x)\psi_i(x)$ се апсолутно интеграбилни на $[a,b]$ и нека се вршат приближувања кон ϕ со помош на линеарните комбинации

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \psi_k(x).$$

Ако за функциите ψ_i $(i=0,1,\dots,m)$ формулата (5) е точна, т.е.

$$\int_a^b p(x)\psi_i(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \psi_i(x_k), \quad (i=0,1,\dots,m)$$

а не е точна за ψ_{m+1}, тогаш бројот m се вика *степен на точноста* на формулата (5).

Природно се наметнува следново прашање: Каков избор на параметрите ω_k и x_k треба да се направи за да биде степенот на точноста на формулата (5) највисок возможен?

Еден од првите што се занимавал со тој проблем бил Гаус, па затоа квадратурните формули (2) односно (5) со тоа својство се наречени *формули од Гаусов тип* или *формули со највисок степен на точност*. Се покажало дека при овие формули јазлите и тежините треба да се изберат во согласност со системот од $2n$ равенки со $2n$ непознати:

$$\begin{aligned} \omega_1+\dots+\omega_n &= 1, \\ \omega_1 x_1 +\dots+\omega_n x_n &= 1/2, \\ \dots\dots\dots &\dots \\ \omega_1 x_1^{2n-1} +\dots+\omega_n x_n^{2n-1} &= \frac{1}{2n} . \end{aligned}$$

Овие квадратурни формули даваат можност да се добијат резултати со голема точност при пресметување на вредностите на функцијата во мал број јазли, што за примената е многу згодно. Сепак, тие имаат и еден озбилен недостаток. Имено, остаточниот член на формулите од гаусов тип го содржи изводот на функцијата од ред $2n$ и затоа се јавуваат тешкотии при оценката на погрешноста на добиениот резултат. (За ублажување на овој недостаток, т.е. за оценка на погрешноста, се прибегнува кон други начини - споредување на резултати, добиени со користење на различни квадратурни формули.)

3) Формули на Њутн-Котес. Посебно место во приближното интегрирање имаат т.н. интерполациони квадратурни правила. Тие правила базираат на интерполирање на функцијата ϕ по јазлите $x_к$ (к=0,1,..., n), обично на целиот сегмент $[a,b]$, со полином P(x) од n-ти степен (притоа се смета дека јазлите се зададени, а останува правото на избор само на квадратурните коефициенти $\omega_к$).Јазлите $x_к$ при пресметувањата, често се избираат на исти растојанија. Интерполационите квадратурни формули со такви, еквидистантни јазли се наречени формули на Њутн-Котес, поради тоа што за прв пат доволно општо биле разгледани од Њутн, а коефициентите за нив, во случајот на константна тежинска функција, биле најдени од Котес при n= 1,2,...,10.

Најпростите такви правила ние ги разгледавме во претходните два параграфа (правило на трапези и правило на параболи), а тие произлегоа од формулата (1) во 6.3 за n=1 и n=2. Земајќи натамошни вредности за n се добива редица нови такви формули. Така, на пример, ставајќи n=3 во (1) од 6.3 добиваме

$$\int_{x_0}^{x_0+3h} f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}[y_0+3y_1+3y_2+y_3],$$

а потоа и

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}[y_0+y_{3m}+2(y_3+y_6+\dots+y_{3m-3})+ \\ +3(y_1+y_2+y_4+y_5+\dots+y_{3m-2}+y_{3m-1})], \qquad (6)$$

каде што $h=(b-a)/3m$. Формулата (6) се вика Њутнова формула или правило на три осминки.

Да забележиме дека бројот на јазлите во (6) мора да е $3m+1$, т.е. $[a,b]$ е поделен на $3m$ еднакви делови. Како кај правилото на трапези, односно параболи, за оценка на погрешноста и тука може да се користи приближна формула што вклучува конечни разлики:

$$R \approx -\frac{b-a}{80}\,\overline{\Delta^4 y}$$

каде што $\overline{\Delta^4 y}$ е аритметичката средина на конечните разлики од четврти ред (од соодветниот дел на таблицата за $y=f(x)$).

4) Нумеричко решавање на двојни интеграли. Приближното решавање на двојни интеграли,

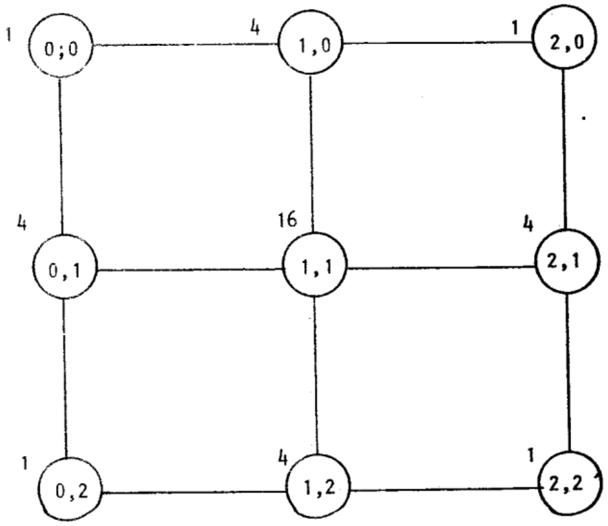
$$I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy, \qquad (7)$$

се вика и нумеричка или механичка кубатура, па затоа формулите за приближно пресметување се нарекуваат кубатурни формули. Постои можност да се изведат кубатурни формули што се аналози на познати квадратурни формули или, пак, да се решаваат двојни интеграли од видот (7) со повторена примена на обичните квадратурни формули за функции од еден аргумент. Една таква кубатурна формула

$$I \approx \frac{hk}{3}[z_{oo}+z_{o2}+z_{22}+z_{2o}+4(z_{o1}+z_{12}+z_{21}+z_{1o})+16z_{11}], \qquad (8)$$

каде што вредностите $z_{ij}=f(x_i,y_j)$ се пресметуваат од аналитичкиот израз (ако $f(x,y)$ е зададена аналитички) или се земаат од таблицата (ако $f(x,y)$ е зададена таблично), а $h=x_i-x_{i-1}$ и $k=y_j-y_{j-1}$ се константни.

Оваа формула може да се претстави со помош на дијаграм, како на црт.5, на кој се претставени и коефициентите на некои z-овци.



Црт.5

Ако собирците во (8) се прегрупираат, може да се добијат следниве формули:

$$I \approx \frac{h}{3}\,[\frac{k}{3}(z_{oo}+4z_{o1}+z_{o2}) + 4\,\frac{k}{3}(z_{1o}+4z_{11}+z_{12}) + \\ + \frac{k}{3}(z_{2o}+z_{21}+z_{22})]\,, \tag{8'}$$

$$I \approx \frac{h}{3}[\frac{k}{3}(z_{oo}+4z_{12}+z_{2o}) + 4\,\frac{k}{3}\,(z_{o1}+4z_{11}+z_{21}) + \\ + \frac{k}{3}(z_{o2}+4z_{12}+z_{22}). \tag{8''}$$

Забележуваме дека секој израз како $\frac{k}{3}(z_{oo} + 4z_{1o} + z_{2o})$ не е ништо друго, туку Симпсоновото правило применето на една редица од дијаграмот, во овој случај на првата. Ставајќи

$$A_i = \frac{k}{3}\,(z_{oi}+4z_{1i} + z_{2i}),\ i=0,1,2,$$

формулата (8") добива облик

$$I \approx \frac{h}{3}\,(A_o + 4A_1 + A_2). \tag{9}$$

Последнава формула покажува дека (8) е еквивалентна со применувањето на Симпсоновото правило на секоја хоризонтална редица од дијаграмот и со неговото повторно применување на така добиениот резултат.

Ова разгледување е само специјален случај од следново општо правило:

Ако е дадена правоаголна шема од вредности на една функција од два аргумента, тогаш на секоја (хоризонтална) редица или на секоја (вертикална) колона може да се примени која било квадратурна формула што "работи" со еквидистантни ординати, како што е Симпсоновото правило. На така добиениот резултат за редиците (или колоните) пак применуваме слична формула.

Ова правило можеме да го интерпретираме геометриски на следниов начин. Бидејќи еден двоен интеграл од видот (7) е претставен со волуменот на тело што има правоаголна основа и висина, во секоја точка, еднаква со $z=[=f(x,y)]$ јасно е дека интегралите $A_o, A_1, \ldots$ се плоштините на вертикалните пресеци на тоа тело направени со еквидистантни рамнини. Применувајќи квадратурна формула на овие A-овци, всушност се добива волуменот на тоа тело како да се пресметува интегралот

$$\int_a^b A_s dx.$$

Оваа дискусија покажува дека не е неопходно изведување на некои општи формули за приближно решавање двојни интеграли.

<u>Пример 7.</u> Со помош на (8") да се пресмета

$$I=\int\limits_{4}^{4,4}\int\limits_{2}^{2,6}\frac{dxdy}{xy}.$$

Земајќи h=0,2 и к=0,3, ги пресметуваме вредностите на $z=\frac{1}{xy}$, дадени во таблицата подолу.

y \ x	4,0	4,2	4,4
2,0	0,125000	0,119048	0,113636
2,3	0,108696	0,103520	0,0988142
2,6	0,096154	0,0915751	0,0874126

Заменувајќи во (8"), добиваме I ≈ 0,025070.

(Точната вредност на интегралот е: I=(ln1,1).(ln1,3) ≈ ≈ 0,0250061, па отстапувањето на едниот од другиот резултат е Δ=0,025070-0,0250061 = 0,0000009.)

6.6. ВЕЖБИ

Во задачите 1 - 4 да се пресметаат дадените интеграли разложувајќи ја подинтегралната функција во степенски ред и земајќи три члена од тоа разложување. Да се оцени грешката:

<u>1</u>. $\int\limits_{0}^{\pi/6}\sin(x^2)dx.$ <u>2</u>. $\int\limits_{0,1}^{0,2}\frac{\ln(1+x)}{x}$

<u>3</u>. $\int\limits_{0}^{1/4}\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}dx;$ <u>4</u>. $\int\limits_{0}^{0,5}x\sqrt{1+x^3}dx$

Разложувајќи ја подинтегралната функција во ред, да се пресметаат со укажаната точност ϵ следниве интеграли (5 - 9):

<u>5</u>. $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{x}\sin x dx,\quad \epsilon=10^{-8}.$ <u>6</u>. $\int\limits_{0}^{0,5}\sqrt{1+x^4}dx,\quad \epsilon=10^{-3}$

<u>7</u>. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\operatorname{sh}x}{x}dx,\quad \epsilon=10^{-3}.$ <u>8</u>. $\int\limits_{0}^{0,2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \epsilon=10^{-5}$

§6.6

9. $$\int_{0}^{0,5} \frac{\mathrm{arctg}x}{x}\,dx, \quad \epsilon = 10^{-3}.$$

10. Да се пресмета

$$\mathrm{Si}(0,19) = \int_{0}^{0,19} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

и да се спореди добиениот резултат со вредноста најдена во вежбата 31 од гл.5.

11. Да се пресмета $\mathrm{Si}(x)$ за а) $x=0,8$, б) $x=1$ со пет точни децимали.

12. Да се пресмета целата должина на елипсата $x^2+y^2/4=1$ со точност до шест децимали.

13. Да се пресмета

$$\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{1-0,162\sin^2 x}\,dx$$

со точност до пет значајни цифри, развивајќи го прво интеграндот во биномен ред и потоа интегрирајќи член по член.

14. Со помош на правилото на правоаголници да се пресмета:

а) $\int_{0,5}^{1} e^x dx$; б) $\int_{2}^{2,5} \mathrm{th}x\,dx$; в) $\int_{0}^{1} \mathrm{ch}x\,dx$

при чекор $h=0,1$, користејќи четиризначни таблици со чекор 0,1.

15. Да се пресмета точната вредност на интегралот

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx,$$

а потоа приближните вредности по формулата на трапези при $h=0,1$ и по формулата на Симпсон со $h=0,1$, земајќи за $f(x)$:

а) $f(x)=2+x$; б) $f(x) = 2+x^2$;

в) $f(x)=2x+3x^2$; г) $f(x) = 2x+x^3$.

Да се оцени апсолутната и релативната погрешност.

16. Како треба да се избере (грубо) чекорот h на пресметувањата при трапезното правило за да се достигне зададената точност ϵ?

17. За функцијата $f(x)$ е познато дека $f''(x) < 0$ за $x \in [a,b]$. Докажи дека во тој случај приближната вредност на интегралот

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx,$$

пресметана по формулата на трапези, секогаш е помала од неговата точна вредност. Какво геометриско толкување има тој факт?

18. Како треба да се избере чекорот h (грубо) за грешката при Симпсоновата формула да биде помала од ϵ?

19. Дадени се три вредности на x: $x=-h$, 0, h и три соодветни вредности за y: $y=y_0$, y_1, y_2. Ако се заменат тие три парови вредности во општата равенка на парабола $y=ax^2+bx+c$, се добиваат три равенки по a, b, c. Користејќи ги така пресметаните a, b и c, интегрирајте ја равенката на параболата во сегментот $[-h,h]$ и покажете дека

$$\int_{-h}^{h}(ax^2+bx+c)\,dx=\frac{h}{3}\,(y_0+4y_1+y_2),$$

т.е. дека на тој начин се добива Симпсоновата формула (1) од §6.4.

20. Да се пресмета $\int_2^3\frac{dx}{\ln x}$ со правилото а) на трапези, б) на параболи при $n=10$ и четиризначната таблица на природни логаритми. Да се оцени точноста на добиените резултати.

Во задачите 21 - 24 приближно да се пресметаат дадените интеграли по назначената формула и да се оцени остаточниот член R.

21. $\int_1^7\sqrt{3x-2}\,dx$ по формулата на трапези при $n=6$.

22. $\int_0^1\frac{dx}{1+x}$ по Симпсоновото правило при $n=10$.

23. $\int_0^{1,2}\ln(1+x^2)\,dx$ а) по формулата на трапези при $n=6$,

б) по Симпсоновата формула за $n=6$.

24*. $\int_0^{1,5}\sqrt[3]{1+x}\,dx$ по формулата на три осминки при $n=15$.

25. Да се пресметаат дадените интеграли по формулата на трапези со бараната точност ϵ, определувајќи го чекорот h на интеграцијата според остаточниот член:

а) $\int_1^2\frac{dx}{x}$, $\epsilon=10^{-2}$; б) $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$, $\epsilon=10^{-2}$

26. Следните интеграли да се пресметаат со бараната точност ϵ по правилото на трапези (зад. а) и б)) односно по Симпсоновото правило (зад.в) и г)). Чекорот h што ја обезбедува таа точност да се определи со удвојување на бројот n.

§6.6

а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x}, \ \epsilon = 10^{-2}$ б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{\lg x}{x}\, dx, \ \epsilon=10^{-2}$

в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx, \epsilon=10^{-4}$, г) $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{dx}{x+\sqrt{1+x}}, \ \epsilon=10^{-3}$

27. Да се најде приближната вредност на интегралот $\int\limits_{1}^{3} y dx$ по правилото на а) трапези, б) параболи, ако подинтегралната функција е зададена со дадената таблица. Да се земе прво чекор $h=0,2$, а потоа $h = 0,1$.

Да се оцени грешката по принципот на Рунге.

x	y	x	y	x	y	x	y
1,0	0,0000	1,6	0,4700	2,1	0,7419	2,6	0,9555
1,1	0,0953	1,7	0,5306	2,2	0,7885	2,7	0,9933
1,2	0,1823	1,8	0,5878	2,3	0,8329	2,8	1,0296
1,3	0,2624	1,9	0,6419	2,4	0,8755	2,9	1,0647
1,4	0,3365	2,0	0,6931	2,5	0,9163	3,0	1,0986
1,5	0,4055						

28. Користејќи ги податоците од приложената таблица, да се пресметаат интегралите:

а) $\int\limits_{0,5}^{1,1} xydx;$ б) $\int\limits_{0,5}^{1,1} y^2dx:$

в) $\int\limits_{0,5}^{1,1} x^2ydx;$ г) $\int\limits_{0,5}^{1,5} y^3dx$

по Симпсоновото правило.

x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
y	0,4804	0,5669	0,6490	0,7262	0,7985	0,8658	0,9281

29. Со помош на Симпсоновото правило, пресметај го интегралот

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx$$

со точност до четвртата децимала.

<u>30</u>. Полниот елиптичен интеграл од прв вид се определува со формулата

$$K(\theta)=\int_{0}^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\sin^{2}\theta\sin^{2}\phi}}$$

Пресметај го $K(30^{\circ})$ користејќи ја Симпсоновата формула со четири отсечки. Точниот резултат до четвртата децимала е 1,6858.

Пресметај го $K(85^{\circ})$, пак со Симпсоновата формула, земајќи четири отсечки. Овој пат точниот резултат до третата цифра по запирката е 3,832.

Зошто $K(85^{\circ})$ се доби со така голема погрешност, додека $K(30^{\circ})$ е пресметан доволно точно?

<u>31</u>.* Користејќи го двапати правилото на трапези, да се изведе формулата

$$\int_{x_o}^{x_n}\int_{y_o}^{y_m} f(x,y)\,dx\,dy \approx \frac{hk}{4}[z_{oo}+z_{no}+z_{om}+z_{nm}+$$

$$+2(z_{1o}+\dots+z_{n-1,o}+z_{o1}+\dots+z_{o,m-1}+$$

$$+z_{n1}+\dots+z_{n,m-1}+z_{1m}+\dots+z_{n-1,m})+$$

$$+4(z_{11}+z_{21}+\dots+z_{n-1,1}+z_{12}+z_{22}+\dots+z_{n-1,2}+$$

$$+\dots+z_{1,m-1}+\dots+z_{n-1,m-1})],$$

каде што

$$z_{ij}=f(x_i,y_j),\quad h=x_i-x_{i-1},\quad k=y_j-y_{j-1}.$$

Со помош на оваа формула, да се пресмета двојниот интеграл:

а) од примерот 7 (за $m=n=2$);

б) $\int_{1}^{1,6}dx\int_{0,4}^{0,8}\frac{dy}{x^{2}+y^{2}}$, $k=0,3$, $h=0,2$.

ПРИБЛИЖНО РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Методите за приближно решавање диференцијални равенки можеме да ги наречеме: аналитички, графички и нумерички, во зависност од тоа дали приближното решение е претставено со некој аналитички израз, графички или пак во форма на таблица. Меѓу аналитичките методи најмногу се среќава интегрирањето со помош на степенски редови со методот на неопределени коефициенти. Имено, решението на дадена диференцијална равенка (ако таа задоволува извесни услови) се бара во форма на степенски ред со неопределени коефициенти. Определувајќи ги првите неколку коефициенти од степенскиот ред се добива некое приближно решение на дадената диференцијална равенка. Со овој метод се сретнавме при изучувањето на диференцијалните равенки (во курсот по "математика III") и затоа нема да го разгледуваме. Овде ќе се задржиме на два други аналитички методи: интегрирање на диференцијални равенки со последователно диференцирање и метод на последователни приближувања, а ќе разгледаме и некои нумерички методи: методот на Ојлер (којшто е и графички метод) и некои негови подобрувања, како и методите на Рунге-Кута, Милн и Адамс.

7.1. МЕТОД НА ПОСЛЕДОВАТЕЛНО ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ

Нека е дадена диференцијална равенка од n-ти ред решена по n-тиот извод, т.е.

$$y^{(n)} = F(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

со почетни услови, дадени при $x=x_o$:

$$y(x_o) = y_o, \; y'(x_o) = y_o',\dots,y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}.$$

Да претпоставиме дека партикуларниот интеграл f(x) на (1) што одговара на дадените почетни услови може да се развие во тајлоров ред во околина на точката x_o:

$$f(x) = f(x_o) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!} (x-x_o)^k. \tag{2}$$

Поради почетните услови ќе имаме:

$$f(x) = y_o + \frac{y'_o}{1!}(x-x_o) + \dots + \frac{y_o^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_o)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n + \dots$$

Тајлоровиот ред на f(x) ќе го знаеме ако ги најдеме $f^{(n)}(x_o)$, $f^{(n+1)}(x_o), \dots,$ а нив можеме да ги одредиме од (1) со последователно диференцирање. Имено, заменувајќи ги вредностите $x_o, y_o, y'_o, \dots, y_o^{(n-1)}$ во (1) ќе го добиеме $y_o^{(n)}$. Потоа, диференцирајќи ја (1) по x и заменувајќи ги $x_o, y_o, y'_o, \dots, y_o^{(n)}$, ќе го добиеме $y_o^{(n+1)}$, итн. Да го илустрираме тоа со еден пример.

<u>Пример 1</u>. Ќе го најдеме решението на диференцијалната равенка

$$xy'' + y' - x^2y = 0$$

што ги задоволува условите y=0 и y′=1 за x=1.

Да ја решиме дадената равенка по y" и да најдеме уште неколку наредни изводи (при $x \neq 0$):

$$y'' = xy - x^{-1}y',$$
$$y''' = y + (x + x^{-2})y' - x^{-1}y'',$$
$$y^{iv} = (2-2x^{-3})y' + (x+2x^{-2})y'' - x^{-1}y'''.$$

Вредностите на тие изводи при x=1 се:

$$y''(1) = -1, \; y'''(1) = 3, \; y^{iv}(1) = -6,$$

па бараното решение е

$$f(x) = (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{3}{3!}(x-1)^3 - \frac{6}{4!}(x-1)^4 + \dots$$

(Всушност ние најдовме приближно решение што ги задоволува дадените почетни услови, но можеме да најдеме толку членови од редот (2) колку што ни се потребни за нашите цели.)

Решението во форма на ред може да биде некоја позната елементарна функција.

Пример 2. Да го најдеме решението на диференцијалната равенка

$$y''' + (x-1)y'' + y' + (x-1)y = 0$$

што ги задоволува условите $y=1$, $y'=0$, $y''=-1$ при $x=0$. Имаме:

$$y''' = (1-x)y - y' + (1-x)y'',$$

$$y^{iv} = -y + (1-x)y' - 2y'' + (1-x)y''',$$

$$y^{v} = -2y' + (1-x)y'' - 3y''' + (1-x)y^{iv},$$

$$y^{vi} = -3y'' + (1-x)y''' - 4y^{iv} + (1-x)y^{v}, \qquad \text{итн.};$$

за $x=0$:

$$y'''(0) = 0 = y^{v}(0), \quad y^{iv}(0) = 1, \quad y^{vi}(0) = -1.$$

Така, бараниот ред е:

$$f(x) = 1 + 0 - \frac{1}{2!}x^2 + 0 + \frac{1}{4!}x^4 + 0 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

$$= \cos x.$$

Методот на последователно диференцирање може да се примени и на системи од диференцијални равенки. Тоа ќе го илустрираме со еден пример.

Пример 3. Да го интегрираме со методот на последователно диференцирање следниов систем

$$y' = xy + z,$$

$$z' = y - z$$

со почетни услови $y(0)=0$, $z(0)=1$.

Од равенките на системот, со замена на вредностите за у и z, дадени со почетните услови, добиваме:

$$y'(0)=1, \quad z'(0)=-1.$$

Со последователни диференцирања на равенките од системот и замена на претходно најдените вредности, добиваме по ред:

$$y''=y+xy'+z' \qquad y''(0)=-1$$

$$z''=y'-z' \qquad z''(0)=2$$

$$y'''=2y'+xy''+z'' \qquad y'''(0)=4$$

$$z'''=y''-z'' \qquad z'''(0)=-3$$

$$y^{iv}=3y''+xy'''+z''' \qquad y^{iv}(0)=-6$$

$$z^{iv}=y'''-z''' \qquad z^{iv}(0)=7$$

Заменувајќи ги добиените вредности за изводите на функциите у(х) и z(х) во точката х=0 во маклореновите формули за овие функции, ќе добиеме:

$$y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}+\ldots.$$

$$z=1-x+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{7x^4}{24}-\ldots.$$

7.2. МЕТОД НА ПОСЛЕДОВАТЕЛНИ ПРИБЛИЖУВАЊА

Методот што ќе го изложиме овде е еден од аналитичките методи, а се добива како последица од теоремата за фиксна точка. Ќе ја разгледаме диференцијалната равенка

$$y'=f(x,y) \qquad (1)$$

и ќе видеме при кои услови за f(x,y) постои (единствено) решение у(х) на (1) што го задоволува почетниот услов

$$y(x_0)=y_0, \qquad (2)$$

т.е. ќе ја докажеме следнава теорема:

Теорема 1 (за егзистенција и единственост). Нека се исполнети следниве услови за функцијата $f(x,y)$:

(i) $f(x,y)$ е непрекината во квадратот

$$D: x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h, \qquad y_0-h\leqslant y\leqslant y_0+h$$

(ii) $(\exists L\in\mathbb{R})\ |f(x,\bar y)-f(x,\bar{\bar y})|\leqslant L|\bar y-\bar{\bar y}|$

за секои $(x,\bar y),(x,\bar{\bar y})\in D$ (Липшицов услов).

Тогаш постои една и само една диференцијабилна функција $y(x)$ во сегментот $[x_0-\gamma,\ x_0+\gamma]=\Gamma$, која е решение на (1) и го задоволува почетниот услов (2); притоа $\gamma<\dfrac{h}{\mu+Lh}$ (и $\gamma<h$) каде што μ е супремумот на $|f(x,y)|$ на квадратот D.

⌈** Доказ. Да забележиме прво дека супремумот μ на $|f(x,y)|$ на D навистина постои поради непрекинатоста на $f(x,y)$.

Најнапред ќе покажеме дека, при направените претпоставки во теоремата, постои функција $y=y(x)$ дефинирана на сегментот Γ и таква што

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt, \qquad x\in\Gamma. \qquad (3)$$

За таа цел ќе го разгледаме метричкиот простор $C(\Gamma)=C[x_0-\gamma,x_0+\gamma]$ од сите непрекинати функции на сегментот Γ. Како што знаеме, овој простор, со метрика

$$d(f,g)=\max_{x\in\Gamma}|f(x)-g(x)|$$

е комплетен (пример 3 од гл.2).

Нека $y(x)\in C(\Gamma)$ и нека $z(x)$ ја определиме со:

$$z(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt. \qquad (4)$$

Бидејќи $f(x,y)$ е непрекината на D, а $y(x)$ е непрекината на Γ, следува дека $f(x,y(x))$ е непрекината на Γ, а бидејќи $z'(x)=f(x,y(x))$, следува дека и $z(x)$ е непрекината на Γ. Според тоа, со прописот $F:y(x)\to z(x)$, т.е.

$$z(x)=F(y(x))$$

е дефинирано пресликување F од $C(\Gamma)$ во $C(\Gamma)$. Ќе покажеме дека F е контракција на $C(\Gamma)$.

За таа цел нека $u(x)$, $v(x) \in C(\Gamma)$. Имаме:

$$|F(u(x))-F(v(x))| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t,u(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t,v(t))dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t,u)(t)) - f(t,v(t))|dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x} L|u(t) - v(t)|dt.$$

Според теоремата за средна вредност при определените интеграли, за некој ξ меѓу x_0 и x добиваме

$$\int_{x_0}^{x} |u(t)-v(t)|dt = |u(\xi)-v(\xi)|\,|x-x_0|.$$

Бидејќи $|x-x_0| < \gamma$, добиваме

$$|F(u) - F(v)| \leqslant L\gamma |u(\xi)-v(\xi)|.$$

Ако ставиме $L\gamma = q$, добиваме:

$$F(u) - F(v) \quad q\max_{x\in\Gamma} |u\ (x) - v(x)|,$$

$$\max_{x\in\Gamma} |F(u(x)) - F(v(x))| \leqslant q\max_{x\in\Gamma} |u(x)-v(x)|,$$

и, конечно,

$$d(F(u),F(v)) \leqslant q\ d(u,v).$$

Од $L\gamma=q$ и $\gamma<h/(\mu+Lh)$ се добива дека $0<q<1$, па за F е задоволен условот за контракција. Оттука, според теоремата за фиксна точка се добива дека постои еднозначно определена функција $y(x)$, дефинирана и непрекината на сегментот Г, таква што

$$y(x) = F(y(x)),$$

што, според дефиницијата на F значи дека $y(x)$ го задоволува условот

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt.$$

За да го завршиме доказот на теоремата, треба да покажеме дека секое решение на диференцијалната равенка $y' = f(x,y)$ што го задоволува почетниот услов $y(x_0)=y_0$ е решение и на интегралната равенка (3) и обратно. Притоа, споменатите решенија се диференцијабилни функции на сегментот Г.

Навистина, ако $y(x)$ е решение на диференцијалната равенка (1), тогаш од $y' = f(x,y)$, со интегрирање, добиваме

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt + C,$$

а поради $y(x_0)=y_0$, се добива $C=y_0$. Значи, секое решение на (1) што го задоволува (2) е решение и на интегралната равенка (3). Обратно, ако $y(x)$ е решение на (3), тогаш $y(x)$ е диференцијабилна функција во Г и со барање извод од (3) се добива дека $y' = f(x,y(x))$, па $y(x)$ е решение и на (1), при што е јасно дека $y(x_0)=y_0$.

Со тоа доказот на теоремата е завршен. $\square$**

Со оваа теорема е установена само егзистенцијата и единственоста на решението на (1) при условот (2). Меѓутоа, од теоремата за фиксна точка може да се добие и начинот за (ефективно) определување на тоа решение. Имено, решението $y(x)$ се добива како лимес на функционалната низа

$$y_0(x),\ y_1(x), \ldots, y_{n-1}(x), \ldots.$$

определена со:

$$y_0(x) = y_0, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt, \tag{5}$$

при што

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant q^n h, \qquad q = L\gamma. \tag{6}$$

Изложениот метод, наречен метод на последователни приближувања е познат и под името Пикаров метод.

Ќе разгледаме еден пример.

Пример 4. Да го најдеме решението на диференцијалната равенка

$$y' = x^2 + y^2$$

при почетниот услов $y(0)=0$.

Ќе ја разгледаме функцијата $f(x,y)=x^2+y^2$ во квадратот $D: -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$.

Овде $h=1/2$, $\mu = 1/2$ (за $x=y=1/2$), а поради $|x^2+y_1^2-(x^2+y_2^2)| = |y_1^2-y_2^2| = |y_1+y_2||y_1-y_2| \leqslant 1 \cdot |y_1-y_2|$, можеме да земеме $L=1$, па $q = L\gamma = \gamma < \frac{1}{2}$.

Земајќи ја $y_0(x) \equiv 0$ за почетно приближување, за првите две приближувања од итерираната низа (5) добиваме:

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x (t^2+y_0^2(t))dt = \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_0^x (t^2+y_1^2(t))dt = \int_0^x (t^2+\frac{t^6}{9})dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}.$$

Така, ако за решение го земеме $y(x) \approx \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$, според (6), ќе направиме грешка што не е поголема од $q^2h^3 = 1/8$, за $x \in [-\gamma,\gamma]$, $\gamma < \frac{1}{2}$.

Наместо Т.1, често се користи една нејзина последица, во која Липшицовиот услов се заменува со друг услов, којшто полесно се проверува.

Теорема 2. Ако во некоја околина на (x_0,y_0) функцијата $f(x,y)$ е непрекината и има ограничен парцијален извод $f'_y(x,y)$, тогаш во некој интервал што ја содржи точката x_0 низата $(y_n(x))$ определена со (5) конвергира кон некоја функција $\phi(x)$ којашто е решение на $y'=f(x,y)$ и го задоволува почетниот услов $\phi(x_0)=y_0$.

Доказ. Доволно е да докажеме дека за функцијата $f(x,y)$ е исполнет Липшицовиот услов (т.е. (ii) од Т.1) во некој квадрат D, којшто се наоѓа во споменатата околина на (x_0,y_0).

Нека $(x,\bar{y}),(x,\bar{\bar{y}}) \in D$ и нека $|f'_y(x,y)| \leqslant M$ на D. Применувајќи ја Лагранжовата теорема на функцијата $g(y)=f(x,y)$ во сегментот со крајни точки $\bar{y}$ и $\bar{\bar{y}}$, добиваме:

$$|f(x,\bar{y}) - f(x,\bar{\bar{y}})| = |f'_y(x,c)||\bar{y} - \bar{\bar{y}}| \leqslant L|\bar{y} - \bar{\bar{y}}|,$$

т.е. важи (ii) од Т.1, па следствено важат и заклучоците од Т.1.▯

Да забележиме дека методот на последователни приближувања може да се примени како на систем диференцијални равенки (од прв ред), така и на диференцијална равенка од n-ти ред, ако таа се запише во вид на систем. Не задржувајќи се посебно на тоа прашање, овде ќе разгледаме само еден пример.

Пример 5. Да најдеме две последователни приближувања кон решението на системот

$$\left.\begin{aligned} y' &= x+z \\ z' &= x-y^2 \end{aligned}\right\} \quad y(0)=1, \quad z(0)=0.$$

Дадениот систем ќе го напишеме во интегрална форма

$$y = 1+\int_0^x (x+z)dx, \quad z = \int_0^x (x-y^2)dx.$$

Од добиениот систем, користејќи ги почетните услови, добиваме дека за почетни приближувања $y_0(x)$, $z_0(x)$ можеме да ги земеме

$$y_0(x)=1, \quad z_0(x) = -x.$$

Наредните приближувања се:

$$y_1(x) = 1+\int_0^x (x+z_0(x))dx = 1+\int_0^x (x-x)dx = 1,$$

$$z_1(x) = \int_0^x (x-y_0^2(x)) = \int_0^x (x-1)dx = \frac{x^2}{2} - x;$$

$$y_2(x) = 1+\int_0^x (x+z_1(x))dx = 1+\frac{x^3}{6},$$

$$z_2(x) = \int_0^x (x-y_1^2(x))dx = \int_0^x (x-1)dx = \frac{x^2}{2} - x.$$

Ако беше дадена равенката $y''=1+x-y^2$ со $y(0)=1$, $y'(0)=0$, тогаш таа може да се сведе на системот

$$y' = x+z, \quad z' = x-y^2$$

со $y(0)=1$, $z(0)=0$, па решавањето иде натаму како во горниот пример.

7.3. МЕТОД НА ОЈЛЕР

За разлика од аналитичките методи при кои приближното решение се дава во вид на аналитички израз ("формула"), при нумеричките методи се бара само нумеричката вредност, т.е. за конечен број вредности на аргументот x се бараат соодветните вредности на приближното решение. Поради честите тешкотии за оценувањето на грешката како и поради, обично, бавното конвергирање при аналитичките методи, во практиката многу почесто се применуваат нумеричките методи. Ние, овде, ќе разгледаме некои од нив.

Еден од наједноставените нумерички методи е <u>Ојлеровиот метод</u>. Решенијата добиени со него, обично, се груби и затоа тој се применува само за ориентациони пресметки. Сепак ние ќе го разгледаме Ојлеровиот метод зашто идеите на кои е тој заснован, во суштина, се појдовни за многу други нумерички методи.

Нека $f(x,y)$ е непрекината во некоја област D. Да ја разгледаме равенката

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

со почетен услов $y(x_o)=y_o$. Да претпоставиме дека соодветното решение е $y=F(x)$. Бидејќи $F(x)$ е непрекината $(F'(x)=f(x,y))$, можеме да избереме доволно мал број h, така што за сите $x \in (x_o, x_o+h)$ вредноста на $y=F(x)$ да се разликува малку од y_o. Во тој случај за разгледуваниот интервал можеме да напишеме

$$y = y_0+(x-x_0).y_0' = y_0+(x-x_0).f(x_0,y_0),$$

т.е. кривата $y=F(x)$ во тој интервал се заменува со отсечка - со делот од тангентата на таа крива во $(x_0,F(x_0))$. За десниот крај $x_1=x_0+h$ на тој интервал добиваме

$$y(x_1) = y_0+hy_0' = y_1.$$

Потоа, за $x=x_2=x_0+2h$, добиваме

$$y_2=y_1+hy_1', \text{ каде што } y_1'=f(x_1,y_1),$$

а слично

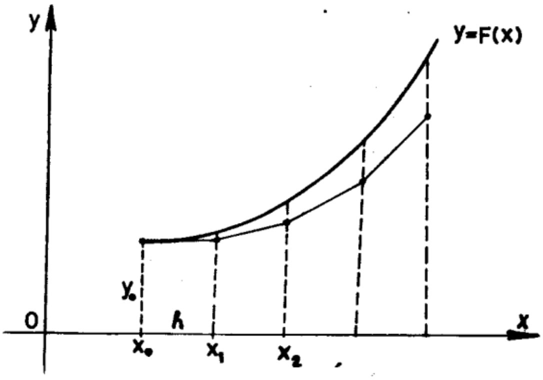
$$y_{k+1} = y_k + h\,y_k' \tag{2}$$

при што $y_k=f(x_k,y_k)$. Бидејќи $\Delta y_k=y_{k+1}-y_k$, добиваме и

$$\Delta y_k = hy_k'. \tag{3}$$

Значи, задачата се сведува на последователно пресметување на разликите од бараната функција $F(x)$.

Геометриски методот на Ојлер покажува дека интегралната крива $y=F(x)$ е заменета со искршената линија која почнува од заедничката точка (x_0,y_0) со кривата $y=F(x)$, а секое ребро е паралелно со тангентата во левата крајна точка од соодветниот интервал (црт.1).



Црт.1

Пример 6. Со помош на Ојлеровиот метод да се интегрира равенката

$$y' = 1+xy^2$$

со почетен услов $y(0) = 0$ на сегментот $[0,1]$ со чекор $h=0,1$.

Одговор. $y_1=0,1$; $y_2=0,2001$; $y_3=0,3009$; $y_4=0,40272$; $y_5=0,50920$; $y_6=0,62217$, $y_7=0,74539$; $y_8=0,88426$; $y_9=1,04684$, $y_{10}=1,24547$.

Методот на Ојлер може да се примени и за систем диференцијални равенки од прв ред доведени во нормална форма, како и за диференцијални равенки од n-ти ред (со сведување на систем диференцијални равенки од прв ред).

Нека е даден системот равенки

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y,z) \qquad (4)$$
$$\frac{dz}{dx} = g(x,y,z)$$

и почетните услови $x=x_o$, $y(x_o)=y_o$, $z(x_o)=z_o$. Како и порано, задачата се сведува на пресметување разликите Δy и Δz а тие можат да се пресметаат по формулите

$$\Delta y_k = hy_k' = hf(x_k,y_k,z_k), \qquad (5)$$
$$\Delta z_k = hz_k' = hg(x_k,y_k,z_k).$$

7.3. ПОДОБРЕНИ МЕТОДИ НА ОЈЛЕР

Методот на Ојлер е мошне едноставен, но, приближувањата добиени со него се доста груби, поради што овој метод се користи најчесто за ориентациони пресметувања. Со помош на извесни модификации, коишто нема многу да ги усложнат пресметувањата, можат да се добијат методи блиски до Ојлеровиот, со значително подобра точност. Овде ќе разгледаме два такви метода што се добиваат со модификација на Ојлеровиот метод.

Нека е дадена пак диференцијалната равенка $y'=f(x,y)$ со почетен услов $y(x_o)=y_o$. Ако h е чекорот на пресметувањата и ако ставиме:

$$x_{k+1/2}=x_k+\frac{h}{2},\qquad y_{k+1/2}=y_k+\frac{h}{2}\,f(x_k,y_k),$$
$$f_{k+1/2}=f(x_{k+1/2},\,y_{k+1/2}),$$

тогаш к+1-то приближување го пресметуваме по формулата

$$y_{k+1}=y_k+hf_{k+1/2}. \qquad (1)$$

На тој начин се добиваат многу поточни приближувања одошто при методот на Ојлер; изложениов метод е познат под името прв подобрен метод на Ојлер.

Друго подобрување на Ојлеровиот метод, наречено втор подобрен метод на Ојлер, се добива на следниов начин: најпрво се пресметува "грубото приближување" $\overline{y}_{к+1}=y_к+hf_k$ каде што $f_k=f(x_к,y_к)$, а потоа за к+1-то приближување се користи формулата

$$y_{k+1}=y_k+h\,\frac{f_k+\overline{f}_{k+1}}{2}, \qquad (2)$$

каде што

$$\overline{f}_{k+1}=f(x_{k+1},\,\overline{y}_{k+1}).$$

Да разгледаме еден пример.

Пример 7. Да се реши диференцијалната равенка $y'=y-\frac{2x}{y}$ со почетен услов $y(0)=1$ во сегментот $[0,1]$ со чекор $h=0,2$.

Пресметувањата се внесени во следниве таблици, при што таблиците се пополнуваат редица по редица.

а) по првиот подобрен метод на Ојлер

к	$x_к$	$y_к$	$\frac{h}{2}f_k$	$x_{k+1/2}$	$y_{k+1/2}$	$\Delta y_k=h.f_{k+1/2}$
0	0	1	0,1	0,1	1,1	0,1836
1	0,2	1,1836	0,0846	0,3	1,2682	0,1590
2	0,4	1,3426	0,0747	0,5	1,4173	0,1424
3	0,6	1,4850	0,0677	0,7	1,5527	0,1302
4	0,8	1,6152	0,0625	0,9	1,6777	0,1210
5	1,0	1,7362				

б) по вториот подобрен метод на Ојлер

к	x_k	y_k	$\frac{h}{2}f_k$	x_{k+1}	$\bar{y}_{k+1}$	$\frac{h}{2}\bar{f}_{k+1}$	$y_k=h\,\frac{f_k+\bar{f}_{k+1}}{2}$
0	0	1	0,1	0,2	1,2	0,0867	0,1867
1	0,2	1,1867	0,0850	0,4	1,3566	0,0767	0,1617
2	0,4	1,3484	0,0755	0,6	1,4993	0,0699	0,1454
3	0,6	1,4938	0,0690	0,8	1,6180	0,0651	0,1341
4	0,8	1,6272	0,0645	1,0	1,7569	0,0618	0,1263
5	1,0	1,7542					

На крајот од овој параграф да го спомeнеме уште методот на Ојлер со итерациона постапка, којшто, како наједноставен, ѝ припаѓа на групата "методи прогноза-корекција". За секоја вредност y_{k+1} се користи една итерациона постапка која го подобрува приближувањето y_{k+1}. Се тргнува од "грубото приближување" $y^{(0)}_{k+1}$, добиено на пример, по Ојлеровиот метод,

$$y^{(o)}_{k+1} = y_k + h.f(x_k, y_k),$$

а потоа пресметувањата продолжуваат по рекурентната формула

$$y^{(n)}_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y^{(n-1)}_{k+1})], \quad n=1,2,\ldots \qquad (3)$$

Пресметувањата ги продолжуваме сѐ до оној момент, додека во $y^{(n)}_{k+1}$ и $y^{(n+1)}_{k+1}$ не се совпаднат соодветните децимали (однапред определени, во зависност од саканата точност). За к+1-ото приближување, тогаш, го избираме $y^{(n+1)}_{k+1}$, т.е. $y_{k+1} = y^{(n+1)}_{k+1}$.

7.5. МЕТОД НА РУНГЕ-КУТА

Постојат повеќе варијанти на методот на Рунге-Кута, но најмногу се користи следниов (т.н. класичен или типичен метод на Рунге-Кута).

Нека е зададена диференцијалната равенка

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

со почетен услов $y(x_o)=y_o$. Да ја означиме со y_n приближната вредност на бараното решение во точката x_n. Според овој метод, пресметувањето на приближната вредност y_{n+1} во наредната точка $x_{n+1}=x_n+h$ се врши по формулата

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}\,(k_1^{(n)}+2k_2^{(n)}+2k_3^{(n)}+k_4^{(n)}), \tag{2}$$

при што

$$\begin{aligned}
k_1^{(n)}&=hf(x_n,y_n)\\
k_2^{(n)}&=hf(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{1}{2}\,k_1^{(n)}),\\
k_3^{(n)}&=hf(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{1}{2}\,k_2^{(n)}),\\
k_4^{(n)}&=hf(x_n+h,\ y_n+k_3^{(n)}).
\end{aligned} \tag{3}$$

Формулата (2) се запишува и во форма

$$y_{n+1}=y_n+\Delta y_n. \tag{2'}$$

каде што

$$\Delta y_n=\frac{1}{6}(k_1^{(n)}+2k_2^{(n)}+2k_3^{(n)}+k_4^{(n)}) \tag{4}$$

Згодно е пресметувањата да се сместат во шема, како што е покажано на таблицата 1.

Таблица 1

n	x	y	$k=hf(x,y)$	Δy
0	x_o	y_o	$k_1^{(o)}$	$k_1^{(o)}$
	$x_o+\frac{h}{2}$	$y_o+\frac{1}{2}k_1^{(o)}$	$k_2^{(o)}$	$2k_2^{(o)}$
	$x_o+\frac{h}{2}$	$y_o+\frac{1}{2}k_2^{(o)}$	$k_3^{(o)}$	$2k_3^{(o)}$
	x_o+h	$y_o+k_3^{(o)}$	$k_4^{(o)}$	$k_4^{(o)}$
				Δy_o
1	x_1	y_1		

Пополнувањето на таблицата е јасно од формулите (2),(3) и (4).

Методот на Рунге-Кута геометриски може да се претстави на следниов начин. Во точката (x_n, y_n) се пресметува коефициентот на правецот на тангентата, $(\frac{1}{h} k_1^{(n)})$. Користејќи го него, одиме половина чекор напред и го разгледуваме коефициентот на правецот тука. Користејќи го новиот коефициент на правецот $(\frac{1}{h} k_2^{(n)})$, пак почнуваме од (x_n, y_n), одиме напред половина чекор и пак го земаме коефициентот на правецот $(\frac{1}{h} k_3^{(n)})$. Земајќи го тој коефициент, пак почнуваме од (x_n, y_n), но сега правиме цел чекор напред, каде што го земаме коефициентот на правецот $(\frac{1}{h} k_4^{(n)})$. Тие четири коефициенти ги "усреднуваме со тежини" 1/6, 2/6, 2/6, 1/6 и , земајќи го тој среден коефициент на правецот, го правиме завршниот чекор од (x_n, y_n) кон (x_{n+1}, y_{n+1}).

Пример 8. Со помош на методот на Рунге-Кута ќе најдеме приближно решение на равенката

$$y' = x+y$$

при $y(0)=1$ (т.е. $x_o=0$, $y_o=1$), во сегментот $[0,1]$ со чекор $h=0,2$.

Имаме:

$$y_o = 1;$$

$$k_1^{(o)} = hf(x_o, y_o) = 0,2 . 1 = 0,2;$$

$$y_o + \frac{1}{2} k_1^{(o)} = 1,1000;$$

$$k_2^{(o)} = hf(x_o + \frac{h}{2}, y_o + \frac{1}{2} k_1^{(o)}) = 0,2 . (0,1+1,1000) = 0,2400$$

$$y_o + \frac{1}{2} k_2^{(o)} = 1+0,1200 = 1,1200$$

$$k_3^{(o)} = hf(x_o + \frac{h}{2}, y_o + \frac{1}{2} k_2^{(o)}) = \ldots = 0,2440;$$

$$y_o + k_3^{(o)} = 1,2440$$

$$k_4^{(o)} = hf(x_o+h, y_o+k_3^{(o)}) = \ldots = 0,2888;$$

$$\Delta y_o = \frac{1}{6} (k_1^{(o)} + 2k_2^{(o)} + 2k_3^{(o)} + k_4^{(o)}) = \frac{1}{6}(0,2+0,4800+0,4880+0,2888)$$

$$= \frac{1}{6} . 1,4668 = 0,2428,$$

па

$$y_1 = y_o + \Delta y_o = 1,2428; \quad \text{итн.}$$

Продолжувајќи на тој начин можеме да ја формирама таблицата 2.

Таблица 2

n	x	y	k	Δy
0	0,0	1,0000	0,2000	0,2000
	0,1	1,1000	0,2400	0,4800
	0,1	1,1200	0,2440	0,4880
	0,2	1,2440	0,2888	0,2888
				0,2428
1	0,2	1,2428	0,28856	0,28856
	0,3	1,3871	0,33742	0,67484
	0,3	1,4115		
	0,4	1,5851		
				0,3408
2	0,4	1,5836		
	0,5	1,7820		
	0,5	1,8118		
	0,6	2,0460		
				0,4606
3	0,6	2,0442		
	0,7	2,3086		
	0,7	2,3451		
	0,8	2,6532		
				0,6068
4	0,8	2,6510		
	0,9	2,9961		
	0,9	3,0406		
	1,0	3,4391		
				0,7854
5	1,0	3,4364		

Да забележиме дека методот на Рунге-Кута има "ред на точност" h^4. Груба оценка на погрешноста на овој метод, на даден интервал $[x_o, X]$, може да се добие од принципот на Рунге:

$$R=\frac{1}{15}|y_{2m}-\tilde{y}_m|,$$

каде што $n=2m$, а y_{2m} и $\tilde{y}_m$ се резултати од пресметувањата по формулите (3) со чекор h и со чекор $2h$.

Методот на Рунге-Кута може да се примени и на систем дифернецијални равенки

$$y'=f(x,y,z), \quad z'=g(x,y,z)$$

со зададени почетни услови $y=y_0, z=z_0$ при $x=x_0$, а може да се прошири, на директен начин, и за диференцијални равенки од повисок ред, односно за систем од n диференцијални равенки од прв ред.

Методот на Рунге-Кута често се користи за пресметување на првите неколку вредности y на бараната функција $y=y(x)$ при некои други методи (на пример, при методите на Милн и Адамс; тие неколку први вредности кај овие методи се наречени "почетна отсечка", којашто се состои најчесто од три вредности y_1, y_2, y_3.)

Ќе разгледаме уште еден пример,при што резултатите ќе ги запишуваме во таблица, којашто за малку се разликува од таблицата во примерот 8.

<u>Пример 9.</u> Со помош на методот на Рунге-Кута да се најде приближно решение на равенката

$$y'=y-x$$

при почетниот услов $y(0)=1,5$ на сегментот $[0;0,75]$ со чекор 0,25. (Значи, овде: $f(x,y)=-x+y$, $x_0=0$, $y_0=1,5$, $h=0,25$.)

Пресметувањата ќе ги вршиме со четири децимали (од кои последните две се "резервни").

Како и во примерот 8, го пресметуваме Δy_0 според формулата (4), а потоа $y_1=y_0+\Delta y_0$. Вредностите y_2 и y_3 ги пресметуваме аналогно. Резултатите од пресметувањата ќе ги запишеме во таблицата 3.

Таблица 3

n	0	1	2	3
x_n	0	0,25	0,50	0,75
y_n	1,5000	1,8920	2,3243	2,8084
$y'_n \equiv f(x_n, y_n)$	1,5000	1,6420	1,8243	2,0584
$k_1^{(n)}$	0,3750	0,4105	0,4561	0,5146
$f(x_n+\frac{h}{2},\ y_k+\frac{1}{2}\,k_1^{(n)})$	1,5625	1,7223	1,9273	2,1907
$k_2^{(n)}$	0,3906	0,4306	0,4818	0,5477
$f(x_k+\frac{h}{2},\ y_k+\frac{1}{2}\,k_2^{(n)})$	1,5703	1,7323	1,9402	2,2073
$k_3^{(n)}$	0,3926	0,4331	0,4850	0,5518
$f(x_n+h,\ y_n+k_3^{(n)})$	1,6426	1,8251	2,0593	2,3602
$k_4^{(n)}$	0,4106	0,4562	0,5148	0,5900
Δy_n	0,3920	0,4323	0,4841	0,5506
y_{n+1}	1,8920	2,3243	2,8084	3,3590

7.6. МЕТОД НА МИЛН

Во повеќе методи за нумеричко решавање диференцијални равенки од обликот $y'=f(x,y)$, при даден почетен услов $y_0=y(x_0)$, се користи следнава идеја: најпрвин се пресметува наредната вредност $y_{к+1}$ ("претскажана вредност" или "прогноза") на бараната функција по формула што не ја вклучува вредноста $y'_{к+1}$ на изводот y' и таа вредност се користи за пресметување на изводот $y'_{к+1}$ од дадената диференцијална равенка; потоа, со помош на најдената вредност $y'_{к+1}$ се врши уточнување ("корекција") на $y_{к+1}$. На тој начин се формира итеративен процес, којшто се состои во наизменично наоѓање на $y_{к+1}$ и $y'_{к+1}$.

Таквите нумерички методи се викаат *методи на прогноза и корекција*. Една добра страна на тие методи е можноста да се врши оценка на добиените резултати според разликите меѓу "прогнозираната" и "коригираната" вредност на бараната функција.

Со еден таков метод, во најпрост вид, се сретнавме во §7.3 (тоа беше еден од подобрените методи на Ојлер, со итеративна постапка). Овде ќе разгледаме уште еден метод од групата методи "прогноза-корекција", наречен *метод на Милн.* Тој е едноставен и прилично точен метод за решавање диференцијални равенки од прв ред, а може да се адаптира за диференцијални равенки од втор ред и за системи диференцијални равенки. За примена на тој метод потребно е да се знае претходно една т.н. "почетна отсечка", т.е. да се знаат три други вредности на бараната функција y_1, y_2, y_3 (покрај y_o, којашто е зададена со почетниот услов) во точките $x_к = x_o + кh$, $к=1,2,3$ (тие вредности би можеле да се пресметаат по некој од порано наведените методи, на пример, по методот на Ојлер или Рунге-Кута).

Да го разгледаме Милновиот метод за диференцијална равенка од прв ред.

Дадена е диференцијална равенка

$$y' = f(x,y), \tag{1}$$

се бара (нумеричко) решение што го задоволува почетниот услов

$$y(x_o) = y_o. \tag{2}$$

Притоа, нека $x_o, x_1, x_2, \ldots$ се точки на еднакви растојанија h и нека се најдени три последователни вредности на y и y', покрај почетниот услов (2). Наредните вредности $y_4, y_5, \ldots, y_{к+1}, \ldots$ се пресметуваат на следниов начин.

За "претскажување" се користи т.н. *прва формула на Милн:*

$$y_{k+1}^{пр} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2y'_{k-2} - y'_{k-1} + 2y'_k). \tag{3}$$

Заменувајќи ја вредноста $y_{к+1}^{пр}$ во (1), добиваме $y'_{к+1} = f(x_{к+1}, y_{к+1}^{пр})$ и со нејзина помош вршиме уточнување ("корекција") на $y_{к+1}$ по *втората формула на Милн:*

$$y_{k+1}^{kop} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(y'_{k-1} + 4y'_k + y'_{k+1}). \qquad (4)$$

Апсолутната грешка $\epsilon^{кор}$ на коригирната вредност $y_{к+1}^{кор}$ се определува приближно, со формулата

$$\epsilon^{kop} \approx \frac{1}{29}\left|y_{k+1}^{kop} - y_{k+1}\right|. \qquad (5)$$

Ако бараното решение треба да се најде сс точност до ϵ, тогаш, при $\epsilon_{k+1} \leqslant \epsilon$, ставаме

$$y_{k+1} \approx y_{k+1}^{kop}$$

и преминуваме на пресметување на $y_{к+2}$. Во спротивниот случај треба да се намали чекорот h (при што мора да се бара нова "почетна отсечка").

Наведените формули (3) - (5) може да се добијат со помош на Њутновата интерполациона формула. Имено, се тргнува од очигледното равенство

$$y_{k+1} - y_{k-3} = \int_{x_{k-3}}^{x_{k+1}} y'\,dx. \qquad (6)$$

Заменувајќи го y' со интерполациониот полином $P(x)$, конструиран по вредностите на y' во точките $x_{к-3}, x_{к-2}, x_{к-1}, x_к$:

$$P(x_{k-3}+th) = y'_{k-3} + t\Delta y'_{k-3} + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y'_{k-3} + \frac{t(t-1)(t-2)}{6}\Delta^3 y'_{k-3} + \binom{t}{4}\Delta^4 y'_{k-3} + \dots, \qquad (7)$$

каде што $t=(x-x_{к-3})/h$, т.е. $x=x_{к-3}+th$, добиваме

$$\int_{x_{k-3}}^{x_{k+1}} y'dx \approx h\int_{0}^{4} P(x_{k-3}+th)dt = \qquad (8)$$

$$= h[4y'_{k-3}+8\Delta y'_{k-3}+\frac{20}{3}\Delta^2 y'_{k-3}+\frac{8}{3}\Delta^3 y'_{k-3}+\frac{28}{90}\Delta^4 y'_{k-3}].$$

Ограничувајќи се на конечните разлики од трет ред и ставајќи $\Delta y'_{к-3}=y'_{к-2}-y'_{к-3}$ итн. (според формулата 1°, §5.4), од (8) и (6) добиваме

$$y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2y'_{k-2} - y'_{k-1} + 2y'_k) + \frac{28}{90} h\Delta^4 y'_{k-3}, \qquad (3')$$

од каде што следува (3). Да забележиме дека (3) се вика уште Милнова екстраполациона формула или формула за прогноза и таа може да се применува само ако $к \geqslant 3$.

За да ја добиеме формулата (4), равенството што се добива од (7) кога $x_{к-3}$ се замени со $x_{к-1}$, ќе го интегрираме од $x_{к-1}$ до $x_{к+1}$, т.е. од $t=0$ до $t=2$, па добиваме

$$y_{k+1} - y_{k-1} = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} y'dx \approx h\int_{0}^{2} P(x_{k-1}+th)dt =$$

$$= h(2y'_{k-1}+2\Delta y'_{k-1}+\frac{1}{3}\Delta^2 y'_{k-1}) - \frac{h}{90}\Delta^4 y'_{k-1}.$$

Заменувајќи ги $\Delta y'_{к-1}$ и $\Delta^2 y'_{к-1}$ според 1° од §5.4, добиваме

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(y'_{k-1} + 4y'_k + y'_{k+1}) - \frac{h}{90}\Delta^4 y'_{k-1}, \qquad (4')$$

од каде што следува втората Милнова формула (4), наречена уште и формула за корекција. (Да забележиме дека таа го вклучува Симпсоновото правило.)

Нека $y^{пр}_{к+1}$ и $y^{кор}_{к+1}$ се вредностите на y определени со (3) и (4), а $\epsilon^{пр}$ и $\epsilon^{кор}$ - грешките на (3) и (4) соодветно. Ако вредноста на чекорот h е таква што $\epsilon^{пр}$ и $\epsilon^{кор}$ се дадени со остаточниот член што ја вклучува конечната разлика од четврти ред, тогаш вредноста на y во $x=x_{k+1}$ ќе биде

$$y=y_{k+1}+\frac{28}{90}h\Delta^4y', \quad \text{односно} \quad y=y_{k+1}^{kop}-\frac{h}{90}\Delta^4y'.$$

По изедначувањето на десните страни, добиваме

$$y_{k+1}^{пр}-y_{k+1}^{kop}=-\frac{29}{90}h\Delta^4y'=29(-\frac{h}{90}\Delta^4y')=29\epsilon^{kop},$$

т.е. формулата (5). Како што спомнавме, таа формула дава можност за проверка на добиените резултати при секој чекор на пресметувањата.

Да забележиме дека остаточните членови при Милновите формули имаат ред h^5 на секој чекор, а h^4 на целиот сегмент $[x_0,x_n]$.

Милновиот метод може да се прилагоди и за диференцијални равенки од втор ред (решени по вториот извод). Навистина, бидејќи (3) и (4) се релации меѓу функции и изводи, тие важат и кога функција е y', т.е.

$$y_{k+1}^{'пр}=y'_{k-3}+\frac{4h}{3}(2y''_{k-2}-y''_{k-1}+2y''_k), \tag{3"}$$

$$y_{k+1}^{'kop}=y'_{k-1}+\frac{h}{3}(y''_{k-1}+4y''_k+y''_{k+1}), \tag{4"}$$

па тие може да се искористат за нумеричко решавање диференцијални равенки од обликот $y''=f(x,y,y')$.

Аналогно на тоа, Милновиот метод може да се користи и за диференцијални равенки од кој било ред.

За илустрација на Милновиот метод, ќе разгледаме еден пример.

Пример 10. Да се најде нумеричко решение за $x=0,4$ на равенката

$$y'=y+x^2$$

при почетниот услов $x_0=1$, $y_0=1$, со точност до петтата значајна цифра.

Почетната отсечка y_1, y_2, y_3 можеме да ја најдеме, на пример со Пикаровиот метод:

$$y_1 = 1{,}1055, \quad y_2 = 1{,}2242, \quad y_3 = 1{,}3595.$$

За h=0,1 имаме $x_i = x_0 + ih = 1 + i.0{,}1 \ (i=1,2,3)$

$$y_4^{пр} = y_0 + \frac{0{,}4}{3}(2y_1' - y_2' + 2y_3'),$$

$$y_1' = y_1 + x_1^2 = 1{,}1155,$$

$$y_2' = y_2 + x_2^2 = 1{,}2642,$$

$$y_3' = y_3 + x_3^3 = 1{,}4495,$$

па според тоа

$$y_4^{пр} = 1{,}5154.$$

Потоа, според (4), добиваме

$$y_4^{kop} = y_2 + \frac{0{,}1}{3}(y_2' + 4y_3' + y_4'),$$

$$y_4' = y_4^{пр} + x_4^2 = 1{,}6754,$$

од каде што добиваме

$$y_4^{kop} = 1{,}5154.$$

Имајќи ја предвид формулата (5), уточнување на y_4 не е потребно.

Пресметувањата на y на следниот интервал треба да се вршат при h=0,2.

7.7. МЕТОД НА АДАМС

Задачата за интегрирање на диференцијална равенка со овој метод се сведува на последователно пресметување на првите разлики $\Delta y_к$ на бараната функција, слично како при методот на Ојлер, но овде разликите се пресметуваат поточно. Во таа смисла, методот на Адамс ѝ припаѓа на групата "методи на конечни разлики" (или "разликовни методи"). Од друга страна, во методот се користат две формули: едната за "претсткажување" а другата за уточнување на вредноста од бараната функција, па во таа смисла, тој ѝ припаѓа на групата "методи на прогноза и корекција". Методот е наречен по англискиот математичар Адамс, којшто го изумил во средината на минатиот век. Потоа бил заборавен, но пак бил откриен од други математичари и подоцна бил усовршен од А.Н.Крилов. Затоа, во некои книги, тој се вика и "метод на Адамс-Крилов".

Нека е дадена диференцијалната равенка

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

со почетен услов $x=x_o$, $y(x_o)=y_o$ и нека $y(x_к)=y_к$, каде што $x_к$ ($к=0,1,2,\ldots$) се точки на еднакви растојанија h, т.е. $x_к=x_o+кh$. Како и кај методот на Милн, нека се најдени три последователни вредности (наречени "почетна отсечка"): $y_1=y(x_1)$, $y_2=y(x_2)$, $y_3=y(x_3)$. Со помош на тие вредности, можеме да ги пресметаме вредностите

$$q_k = hy'_k = hf(x_k,y_k) \tag{2}$$

($к=0,1,2,3$). Броевите $x_к, y_к, y'_к, q_k$ ($к=0,1,2,3$) ги запишуваме во една таблица и ги пресметуваме конечните разлики на величината q (тоа се броевите над искршената линија во таблицата 1).

Методот на Адамс се состои во продолжување на таа таблица според формулата

$$\Delta y_k = q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3}, \tag{3}$$

каде што $к=3,4,5,\ldots$, $\Delta y_к=y_{к+1}-y_к$, $q_k=hy'_к=hf(x_к,y_к)$, $\Delta q_k = q_{k+1}-q_k$, наречена екстраполациона формула на Адамс. За да се добие таа формула, се тргнува од очигледното равенство

$$y_{k+1} - y_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y' dx. \qquad (4)$$

Таблица 1

k	x_k	y_k	Δy_k	y'_k	q_k	Δq_k	$\Delta^2 q_k$	$\Delta^3 q_k$
0	x_0	y_0	Δy_0	$f(x_0,y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
1	x_1	y_1	Δy_1	$f(x_1,y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	$\Delta^3 q_1$
2	x_2	y_2	Δy_2	$f(x_2,y_2)$	q_2	Δq_2	$\Delta^2 q_2$	$\Delta^3 q_2$
3	x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3,y_3)$	q_3	Δq_3	$\Delta^2 q_3$	
4	x_4	y_4	Δy_4	$f(x_4,y_4)$	q_4	Δq_4		
5	x_5	y_5	Δy_5	$f(x_5,y_5)$	q_5			
6	x_6	y_6						

Заменувајќи ја подинтегралната функција y' со интерполационен полином $P(x)$ според втората Њутнова формула (за интерполација на крајот од таблицата), конструиран по вредностите на y' во точките $x_к, x_{к-1}, x_{к-2}, x_{к-3}$, а задржувајќи се до третите разлики,

$$P(x_k+th) = y'_k + t\Delta y'_{k-1} + \frac{t(t+1)}{2}\Delta^2 y'_{k-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{6}\Delta^3 y'_{k-3} + \dots,$$

добиваме

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y' dx = h\int_0^1 y'(x_k+th)dt \approx h\int_0^1 P(x_k+th)dt,$$

т.е., според (4),

$$y_{k+1} - y_k = hy'_k + \frac{1}{2}\Delta(hy'_{k-1}) + \frac{5}{12}\Delta^2(hy'_{k-2}) + \frac{3}{8}\Delta^3(hy'_{k-3}),$$

а тоа е формулата (3) при ознаките (2).

Екстраполационата формула на Адамс често се користи само за "претскажување" на вредноста $y_{к+1}=y_к+\Delta y_к$ (којашто ќе ја означуваме натаму со $y^{пр}_{к+1}$), т.е. вредноста $\Delta y_к$, добиена со (3), може да се запише во таблицата, но може и да се уточни. За таа цел, во таблицата 1 се запишуваат вредностите на $x_{к+1}$, $y_{к+1}$, $y'_{к+1}$ и q_{k+1}, таблицата 1 се дополнува со конечните разлики на q, а потоа се врши пресметување на $\Delta y_к$ по формулата за "корекција"

$$\Delta y_k = q_k + \frac{1}{2}\Delta q_k - \frac{1}{12}\Delta^2 q_{k-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 q_{k-2}, \qquad (5)$$

наречена <u>интерполациона формула на Адамс</u>.

Оваа формула се добива како и првата. Имено, вршејќи смена на променливата $x=x_{к+1}+th$, равенството (4) ќе го запишеме во следнава форма:

$$y_{k+1} - y_k = h\int_{-1}^{0} y'(x_{k+1} + th)dt \qquad (6)$$

и, за претставување на подинтегралната функција, пак ја користиме втората Њутнова формула (за интерполација на крајот од таблицата):

$$y'(x_{k+1} + th) = y'(x_{k+1}) + t\Delta y'(x_k) + \frac{t(t+1)}{2}\Delta^2 y(x_{k-1}) + \dots$$

Задржувајќи се до третите разлики, од (6) добиваме

$$y_{k+1} - y_k = h[y'_{k+1} - \frac{1}{2}\Delta y'_k - \frac{1}{12}\Delta^2 y'_{k-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 y_{k-2}],$$

а тоа е формулата (5) при ознаките (2).

Уточнетата вредност на $y_{к+1}$, добиена со помош на (5), ќе ја означуваме со $y^{кор}_{к+1}$.

При практичната примена на Адамсовиот метод, пополнувањето на таблицата се врши по следниов редослед:

1) ги запишуваме во таблицата 1 броевите $x_к, y_к, y'_к$, q_k (к=0,1,2,3) и ги пресметуваме разликите Δq_k (к=0,1,2) $\Delta^2 q_k$ (к=0,1), $\Delta^3 q_0$;

2) ја пресметуваме Δy_3 со помош на формулата (3) при к=3 (користејќи ги веќе добиените броеви $q_3, \Delta q_2, \Delta^2 q_1, \Delta^3 q_0$);

3) пресметуваме $x_4=x_3+h$, $y_4=y_3+\Delta y_3$;

4) ги запишуваме вредностите x_4, y_4 во таблицата, ги наоѓаме $y'_4=f(x_4,y_4)$, $q_4=hy'_4$ и ја пополнуваме таблицата со разликите $\Delta q_3, \Delta^2 q_2, \Delta^3 q_1$;

5) ја уточнуваме разликата Δy_3 по формулата (5) при к=3 (користејќи ги најдените вредности за разликите на q);

6) ако коригираната вредност на Δy_3 не се разликува битно од претскажаната (т.е. тие се разликуваат само за неколку единици во последниот зачуван разред), тогаш ги внесуваме соодветните поправки во вредностите Δy_3 и y_4, проверуваме дека тие поправки нема битно да се одразат на вредноста q_4 и го продолжуваме пресметувањето со избраниот чекор. Во спротивниот случај избираме помал чекор h, обично двапати помал од претходниот.

Натаму, пресметувањата за к=4,5,... се спроведуваат аналогно.

Ќе разгледаме еден пример.

Пример 11. Со помош на екстраполационата формула на Адамс да се пресмета, при x=1,5 со точност до 0,01, вредноста на решението на диференцијалната равенка

$$y' = y-x$$

со почетен услов y(0)=1,5. Вредностите за почетната отсечка да се пресметаат со методот на Рунге-Кута.

Имајќи предвид дека методот на Рунге-Кута има ред на точност h^4, почетниот чекор на пресметувањата го одредуваме од условот $h^4 < 0,01$. Избегнувајќи сложено запишување на h, се задржуваме на h=0,25. Според тоа, целиот интервал на интегрирање од x=0 до x=1,5, со точките $x_0=0$, $x_1=0,25$, $x_2=0,50$, $x_3=0,75$, $x_4=1,00$, $x_5=1,25$, $x_6=1,50$, се разделува на шест еднакви делови. Соодветните вредности на решението y и изводот y' во точката $x_к$ ќе ги означиме со $y_к$ и $y'_к$.

Првите три вредности y_1, y_2, y_3 ќе ги пресметаме по методот на Рунге-Кута, а y_4, y_5, y_6 по формулата (3). Вредноста y_6 ќе биде решение на задачата.

Пресметувањата ќе ги вршиме со две резервни цифри. Ќе ги искористиме најдените вредности y_1, y_2, y_3 во примерот 9:

$$y_0 = 1,5000, \quad y_1 = 1,8920, \quad y_2 = 2,3243, \quad y_3 = 2,8084,$$

како и најдените вредности y'_k за изводот, и резултатите од пресметувањата по формулата (3), а според шемата за таблицата 1, ќе ги запишуваме во таблицата 2.

Таблица 2 (за пресметување y_4, y_5, y_6)
(Влезните податоци се означени курзивно)

k	x_k	y_k	Δy_k	y'_k	q_k	Δq_k	$\Delta^2 q_k$	$\Delta^3 q_k$
0	0	*1,5000*	▨	*1,5000*	0,3750	0,0355	0,0101	0,0028
1	0,25	*1,8920*	▨	*1,6420*	0,4105	0,0456	0,0129	0,0037
2	0,50	*2,3243*	▨	*1,8243*	0,4561	0,0585	0,0166	0,0047
3	0,75	*2,8084*	0,5504	2,0584	0,5146	0,0751	0,0213	
4	1,00	3,3588	0,6356	2,3588	0,5897	0,0964		
5	1,25	3,9944	0,7450	2,7444	0,6861			
6	1,50	$\boxed{4,7394}$						

Според тоа, одговорот на задачата е: 4,74.

Во формулите на Адамс, y_{k+1} може да се изрази директно преку hy'. Во тој случај екстраполационата формула на Адамс добива форма

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(55y'_k - 59y'_{k-1} + 37y'_{k-2} - 9y'_{k-3}), \tag{3'}$$

а интерполационата

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(9y'_{k+1} + 19y'_k - 5y'_{k-1} + y'_{k-2}). \tag{5'}$$

(Оваа форма на Адамсоновите формули е позгодна за работа на електронски сметачки машини.)

Методот на Адамс лесно се адаптира за систем диференцијални равенки (а според тоа - и на равенки од n-ти ред). Имено, нека е даден системот

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y,z) \\ z' &= g(x,y,z) \end{aligned} \qquad (7)$$

со почетни услови $y(x_o)=y_o$, $z(x_o)=z_o$. Екстраполационите формули за тој систем се:

$$\begin{aligned} \Delta y_k &= p_k + \frac{1}{2}\,\Delta p_{k-1} + \frac{5}{12}\,\Delta^2 p_{k-2} + \frac{3}{8}\,\Delta^3 p_{k-3}\,, \\ \Delta z_k &= q_k + \frac{1}{2}\,\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\,\Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8}\,\Delta^3 p_{k-3}\,, \end{aligned} \qquad (8)$$

каде што $p_k = hy'_k = h\,f(x_k,y_k,z_k)$, $q_k = hz'_k = hg(x_k,y_k,z_k)$.

Аналогно се запишуваат и интерполационите формули на Адамс за системи.

Да забележиме дека може да се добијат и други формули од "Адамсов тип", поточни од изведените (3) и (5) ако е зададена поголема "почетна отсечка" $y_1,y_2,\dots,y_m$ $(m > 3)$ и ако во Њутновата интерполациона формула ги земеме разликите до m-ти ред.

** Забелешка (за точноста на методите за нумеричко решавање диференцијални равенки). За методите коишто се засновани на интерполациони формули, како што се методот на Милн и методот на Адамс, се добиваат релативно добри оценки на погрешноста, според формулите за остаточниот член (§5.9). Оценки за точноста на добиените резултати постојат и за повеќето од другите нумерички методи, но нивната практична вредност е мала, зашто тука се работи за задачи со почетни услови, а тие се доста незгодни. Имено, грешките што се јавуваат при определувањето на почетните вредности $y_1,y_2,\dots$ предизвикуваат систематско зголемување на грешката при натамошните пресметувања, така што, во некои посебно незгодни случаи, таа може да нарасне и преку 100%.

Сепак, во поголемиот број случаи работата не стои така лошо. За некои методи се пронајдени точни граници за погрешноста, но при поголем број чекори фактичката погрешност е значително помала отколку што ја даваат тие оценки. Имено, оценката ги опфаќа и најнезгодните случаи, па при поблагопријатни услови, кога грешката останува мала, не треба да се очекува дека општата оценка го кажувала правилно редот на грешката, така што, и во таа смисла, практичната вредност на тие оценки е незначителна (дури и кај методите на Милн и Адамс).

Затоа, при практичната примена на методите за приближно решавање диференцијални равенки најмногу се користи правилото: споредување на приближувањата добиени со различен чекор. **

7.8. ВЕЖБИ

1. Со помош на последователни диференцирања да се решат наведените диференцијални равенки од прв ред што го задоволуваат соодветниот почетен услов:

а) $y'=2x-1+y^2$, $y(0)=1$ (да се најдат 3 последователни членови)

б) $y'=xy+\sqrt{x}$, $y(0)=0$ (3 последователни членови)

в) $y'=y\sin x+x$, $y(0)=0$ (4 последователни членови).

2. Со помош на последователни диференцирања да се решат следниве системи диференцијални равенки:

а) $$\begin{aligned} y' &= xy+z \\ z' &= y+xz \end{aligned} \qquad y(0)=0,\ z(0)=1;$$

б) $$\begin{aligned} y' &= x-z^2 \\ z' &= x+y \end{aligned} \qquad y(0)=0,\ z(0)=1.$$

3. Со помош на последователни диференцирања да се решат следниве диференцијални равенки при зададените почетни услови:

а) $y''+xy'+y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ (5 последователни членови);

б) $xy''+y'+xy=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$ (5 последователни членови).

4. Со помош на методот на последователни приближувања да се решат следниве равенки (3 последователни приближувања):

а) $y'=x^2-y^2$, $y(0)=0$;

б) $y'=e^{-x}-y^2$, $y(0)=1$;

в) $y'=\sqrt{x}+y^2$, $y(0)=0$.

5. Со помош на методот на последователни приближувања да се решат следниве системи диференцијални равенки (3 последователни приближувања):

а) $$\begin{aligned} y' &= x+y+z \\ z' &= y-z \end{aligned} \qquad y(0)=1,\ z(0)=-2;$$

б) $$\begin{aligned} y' &= y-z \\ z' &= yz \end{aligned} \qquad y(0)=0,\ z(0)=1/2.$$

6. Со помош на Пикаровиот метод да се реши равенката $y'=y^3$ при почетните услови $x_o=0$, $y_o=1$, заклучно со второто приближување y_2 и добиениот резултат да се спореди со точното решение (претставено со степенски ред)

7. Да се одреди областа во која дадената равенка има единствено решение:

а) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$; б) $y' = y+\sqrt[3]{y}$; в) $y' = x^2 - y^2$.

8. Со помош на методот на степенски редови да се решат следниве диференцијални равенки:

а) $y'=x^2+y^2$ при $x=0$, $y=1$;

б) $(1-x^2)y''-xy'+4y=0$;

в) $y''=yy'-x^2$ при $x=0$, $y=0$, $y'=0$.

9. Со помош на Ојлеровиот метод да се решат следниве диференцијални равенки на сегментот $[a,b]$ со чекор $h=0,1$:

а) $y'=1+xy^2$, на $[0,1]$, $y(0)=0$;

б) $y'=x^2+y^2$, на $[0,1]$, $y(0)=0$;

в) $y'=-y^2 + \frac{4}{10x^2}$, на $[1,2]$, $y(1)=1$.

10. Со помош на Ојлеровиот метод да се решат следниве системи диференцијални равенки со чекор $h=0,1$:

а) $\left.\begin{aligned} y' &= -xz \\ z' &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right\}$ на $[0,1]$, $y(0)=0$, $z(0)=1$;

б) $\left.\begin{aligned} y' &= zx-yx \\ z' &= zx+yx \end{aligned}\right\}$ на $[0,1]$; $y(0)=1$, $z(0)=1$.

11. Применувајќи некој од подобрените методи на Ојлер, да се решат следниве диференцијални равенки:

а) $y'=1+x-y^2$, сегмент $[0,1]$, чекор $h=0,1$; $y(0)=1$;

б) $y'=x^3+y^2$, сегмент $[0,1]$, чекор $h=0,1$; $y(0)=1/2$;

в) $y'=x+\sqrt{y}$, сегмент $[0,5;1,5]$ чекор $h=0,1$; $y(0,5)=0,7240$.

12. По методот на Рунге-Кута, да се најдат решенијата на дадените диференцијални равенки:

а) $y'=y-x$, сегмент $[0,1]$, чекор $h=0,2$; $y(0)=1,5$;

б) $y' = \frac{3}{x^2+y^2+3}$, сегмент $[0; 0,3]$, чекор $h=0,1$; $y(0)=0$;

в) $y' = \frac{y}{x} - y^2$, сегмент $[1,2]$, со чекор $h=0,2$; $y(1) = 1$.

13. По методот на Рунге-Кута да се решат следниве системи диференцијални равенки:

а) $\left.\begin{array}{l} y' = z+1 \\ z' = y-x \end{array}\right\}$ сегмент $[0,1]$; чекор $h = 0,2$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$,

б) $\left.\begin{array}{l} y' = \cos(y+3z)+3 \\ z' = \dfrac{3}{x+3y^2} + x + 1 \end{array}\right\}$ сегмент $[0;0,3]$, чекор $h=0,1$ $y(0) = 1$, $x(0) = 0,05$.

14. Со помош на методот на Милн, со точност до 10^{-4} на сегментот $[a,b]$, да се најде решението на следниве равенки при зададените почетни услови:

а) $y' = -\dfrac{y}{x} - 4y^2\ln x$, $y(1) = 1$, $a = 1$, $b = 2$;

б) $y' = \dfrac{5}{\cos x} - y\,\mathrm{tg}x$, $y(0) = 1$, $a = 0$, $b = 1$.

15. Со методот на Адамс да се најде со точност до 10^{-2} вредноста на решението на диференцијалната равенка, односно системот, при укажаната вредност на аргументот. (Почетната отсечка y_1, y_2, y_3 да се најде со методот на Рунге-Кута.)

а) $y' = 2y - 3$, $y(0) = 1$; $y(0,5) = ?$

б) $\left.\begin{array}{l} y' = -3y - z \\ z' = y - z \end{array}\right\}$ $y(0) = 2$, $z(0) = -1$; $y(0,5) = ?$ $z(0,5) = ?$

ОДГОВОРИ

Гл. 1. Приближни пресметувања

1. а) 0,02. б) $<0{,}002$. в) $<0{,}009$. г) $<0{,}003$.

2. а) $0{,}04=4\%$. б) $< 0{,}0007 = 0{,}07\%$. в) $<0{,}34\%$. г) $0{,}174\%$.

3. а) 3. б) 2. в) 2. г) 6. д) 1. 4. а) 2. б) Нема. в) 2. г) 1.

5. 1) $\Delta_\pi = 0{,}0013$; $\delta_\pi = 0{,}05\%$. 2) $\Delta_\pi = 0{,}0000003$; $\delta_\pi = 0{,}00001\%$.

6.

α	1	4	7	9
Δ	0,0006	0,0015	0,0024	0,0030
број точни цифри	3	2	2	2

Упатство. $\alpha=1$; $a=1,\dots$; $a\in[1;2)$, $\Delta_a=0{,}0003.2=0{,}0006 < 0{,}5.10^{-3}$.

7. а) 5; 9. б) 11; 15. в) 4; 7. г) 19999; 2.10^8-1. д) 3;5.

8. Решение. а) Со претходно заокружување се добива $3{,}2(0{,}014)+0{,}3(0{,}043)+$ $+1{,}3(0{,}01) = 4{,}8(0{,}067) = 4{,}8(0{,}07)$. Релативната грешка е помала од $0{,}0145 = 1{,}45\%$.

   б) 5,13(0,007); релативната грешка е помала од $0{,}014 = 1{,}4\%$

   в) Релативната грешка на 2,56 е помала од 0,002, а на 1,2 е помала од 0,042, па за релативната грешка на производот може да се земе 0,044; по извршеното множење, пресметувањето на апсолутната грешка и заокружувањето, се добива 3,1(0,2). $\delta < 0{,}065$.

   г) Како во в) се добива 0,11(0,013), а релативната грешка е помала од $0{,}13 = 13\%$.

9. а) 6. б) 929.10^2. в) 0,292. г) 1,793. д) 3,56. ѓ) 8,06.

10. $E = 20\pm3$ волти; релативната грешка е помала од 0,15.

11. 5300 ± 310. 12. $2{,}04 \pm 0{,}52$ часа.

13. Упатство. $\Delta_s=0{,}981t$ расте, а $\delta_s = \dfrac{0{,}2}{t}$ опаѓа.

14. а) $s=0{,}0002$; $\Delta_s=5.10^{-5}$; $\delta_s=25\%$. б) $s=0{,}0001512$; $\Delta_s=0{,}5.10^{-7}$; $\delta_s=0{,}0033\%$. 15. $V_2-V_1=102{,}303\ (4{,}65)$.

17. $\delta_u=\delta_{a-b}+\delta_c$, $\delta_v=\dfrac{\Delta_v}{v}=\dfrac{\Delta_x+\Delta_y}{|x-y|}$, каде што $x=\dfrac{a}{c}$, $y=\dfrac{b}{c}$.

   Ако $a\approx b$, тогаш $x\approx y$, па δ_v може да биде многу голем број-значително поголем од δ_u.

Илустрација: $u = \frac{a-b}{c} \approx 0,7.10^{-1}$, $v = \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \approx 0,80.10^{-1}$.

18. а) $b=16,3(0,2)$; $\delta_b = 0,013$. б) $\sin\alpha = 0,59$; $\Delta_{\sin\alpha}=0,08$; $\delta_{\sin\alpha}=0,014$.

19. $V \in (4605;4701)$; резултатот не ќе е поточен ако се земе $\pi = 3,142$.

20. $s \approx 103$ см (три точни цифри), $\Delta_s=1$ см, $\delta_s = 1\%$.

21. $V=6879$ см^3, $\Delta_V = 100$ см^3. 22. $y=17,7$; $\Delta_y=0,033 < 0,05$; $\delta_y=0,19\%$;
е - со 5 точни децимали. 23. $u=2,80(0,003)$.

24. а)

x	√x	5+II	x^2	3.IV-4	III:IV
I	II	III	IV	V	VI

б)

x	$\sqrt[3]{x}$	II+2	lnx	1+IV	V^2	III:VI
I	II	III	IV	V	VI	VIII

25. а) и б).

I	II	III	IV	V
R	100R	R+r	$(R+r)^2$	$w=\frac{II}{IV}$
1	100	1,57	2,4649	40,570
2	200	2,57	6,6049	30,281
3	300	3,57	12,7449	23,539
4	400	4,57	20,8849	19,153
5	500	5,57	31,0249	16,116

26. Решение. Наоѓаме: $u = 5x^2(\ln x+\cos 2y) = 5.(8,4)^2(\ln 8,4+\cos 62^{o}) \approx$ $\approx 917,28$; $(\frac{\partial u}{\partial x})_o = 10x(\ln x + \cos 2y) + 5x = 260,21$; $(\frac{\partial u}{\partial y})_{\bar{o}} = -10x^2 \sin 2y =$ $=-623,04$. По услов $\Delta_u = 0,005$, па согласно со принципот на еднакви влијанија, по формулата (9) во §1.3, добиваме $\Delta_x = \frac{0,005}{2.260,21} < 0,5.10^{-4}$,
$\Delta_y = \frac{0,005}{2.|-623,04|} = 0,00000004 < 0,5.10^{-6}$.

27. $\delta_a=0,25\%$, $\delta_H=0,5\%$. 28. $\delta_u = \frac{12\Delta_x}{6x+y}$, $\delta_u = \frac{2\Delta_y}{6x+y}$.

29. 0,177% за x, 0,98% за y. 30. $\Delta_\theta=0,00079458$ радијани $\approx 2'43''$.

31. Должината на нишалото треба да се измери со точност до 0,3 см, $\Delta_l < 0,3$ см. според принципот на еднакви влијанија, π треба да се земе со три точни цифри ($\pi \approx 3,14$), а g - со две ($g \approx 9,8$). 32. $g = 4\pi^2/T^2$;
$\Delta_l = 0,0025$, $\Delta_T = 0,000125$.

Гл.2. Метрички простори

1. б) Да се искористи фактот што функција $f(t) = \frac{t}{1+t}$ монотоно расте за $t>0$; од $w \leqslant u+v$ добиваме: $\frac{w}{1+w} \leqslant \frac{u+v}{1+u+v} \leqslant \frac{u}{1+u} + \frac{v}{1+v}$.

2. а) Не мора; на пример, во $\mathbb{R}$ со $d(x,y)=|x-y|$, аксиомата на триаголник не важи за $d^2(x,y)$; земи $x=5$, $y=2$, $z=1$. (Да забележиме дека за метриката $d(x,y)=1$ при $x\neq y$ и $d(x,y)=0$ при $x=y$, добиваме дека и $d^2(x,y)$ е метрика на M.) б) Да.

3. Упат. За неравенството на триаголник, да се искористат неравенствата:

$$|\alpha_n-\gamma_n| = |\alpha_n-\beta_n+\beta_n-\gamma_n| \leqslant |\alpha_n-\beta_n|+|\beta_n-\gamma_n|,$$

$$\sup_{1\leqslant n<\infty}|x_n+y_n| \leqslant \sup_{1\leqslant n<\infty}|x_n| + \sup_{1\leqslant n<\infty}|y_n|.$$

4. Не. Решение. За $\overline{a}=(\frac{n}{n+1})$ и $\overline{b}=(\frac{n+1}{n})$ во $\mathbb{R}$ имаме $\alpha=1=\beta$, па $d(\overline{a},\overline{b})=0$, но $\overline{a}\neq\overline{b}$, т.е. аксиомата на идентичност во дефиницијата на метрички простор не е исполнета.

5. Упат. Неравенството следува од: $d(x,y) \leqslant d(x,u)+d(u,v) + d(v,y)$ и $d(u,v)\leqslant d(u,x)+d(x,y)+d(y,v)$. 6. а) Не. б) и в). Да.

7. Упат. За кој било $\epsilon>0$, отворената топка $T(a;\epsilon)$ содржи точка $a_1\neq a$; земи $\epsilon_1=\{\min\{1,d(a,a_1)\}$. Тогаш топката $T(a;\epsilon_1)$ има точка $a_2\neq a$. Нека $\epsilon_2=\min\{\frac{1}{2},d(a,a_2)$; тогаш $T(a;\epsilon_2)$ содржи $a_3\neq a$. Итн.

8. Решение. Ако во $|d(x,y)-d(x,z)|\leqslant d(y,z)$ (кое се добива директно од аксиомата на триаголник) ставиме $x=b$, $y=a$, $z=a_n$, добиваме $|d(a,b)-d(b,a_n)|\leqslant d(a_n,a)$. Бидејќи $d(a,a_n)$ конвергира кон нула, следува дека $d(a_n,b)$ конвергира кон $d(a,b)$.

9. Решение. $|d(a,b)-d(a_n,b_n)|\leqslant|d(a,b)-d(a_n,b)+|d(a_n,b)-d(a_n,b_n)|\leqslant d(a,a_n)+d(b,b_n)$, па според тоа $d(a_n,b_n)$ конвергира кон $d(a,b)$.

11. Не. На пример, низата со општ член $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ е кошиева низа во $\mathbb{Q}$, но не е конвергентна во $\mathbb{Q}$.

12. Решение. Нека $(b_k) = (a_{n_k})$ е конвергентна подниза со лимес а од кошиевата низа (a_n). За кој било $\epsilon > 0$, постои $n_0 \in \mathbb{N}$, таков што: $n > k \geqslant n_0 \Rightarrow d(a_n, b_k) < \frac{\epsilon}{2}$ и $d(b_k, a) < \frac{\epsilon}{2}$, па $d(a_n, a) \leqslant d(a_n, b_k) + d(b_k, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, што значи дека (a_n) има лимес а.

13. Решение. Нека е а произволна точка од M и (a_n) е низа во M, којашто конвергира кон а. Доволно е да докажеме дека низата $f(a_n) = d(a_n, x_0)$ конвергира кон $f(a) = d(a, x_0)$. За кој било $\epsilon > 0$, постои n_0 од $\mathbb{N}$, таков што $[n \geqslant n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \epsilon]$. Користејќи ја задачата 5, имаме: $n \geqslant n_0 \Rightarrow |f(a_n) - f(a)| = |d(a_n, x_0) - d(a, x_0)| \leqslant d(a_n, a) + d(x_0, x_0) < \epsilon$.

Значи, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, т.е. $f(x)$ е непрекината во точката $x = a$.

14. Упат. Да се постапи слично како во задачата 13. (Задачата може да ја добие следнава форма: Ако $a_n \to a$, $b_n \to b$ кога $n \to \infty$, тогаш $d(a_n, b_n) \to d(a, b)$ кога $n \to \infty$. Овој резултат е познат под името "лема за непрекинатост на метриката".)

16. Решение. Нека $\epsilon > 0$ е произволно избран. Избирајќи го $\delta = \frac{\epsilon}{L}$, добиваме $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y| < L \cdot \frac{\epsilon}{L} = \epsilon$, т.е. $f(x)$ е непрекината во точката $y \in [a, b]$. Функцијата $f(x) = |x|$ е непрекината во сегментот $[-1, 1]$, го задоволува наведениот услов во задачата, т.е. $|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leqslant 1 . |x-y|$, но не е диференцијабилна.

17. Контракција на дадениот сегмент е само функцијата во г). Имено, другите функции не го пресликуваат дадениот интервал M во M.

18. Упат. Следува од теоремата на Лагранж: $|f(x) - f(y)| = f'(c)\, |x-y| \leqslant q\, |x-y|$.

19. а), б), г). Да. в) Не. Да забележиме дека e^{-x} е контракција на секој простор $M = [a, +\infty)$, $a > 0$ од $\mathbb{R}$.

20. Упат. $x + \frac{1}{x} = x$ повлекува $\frac{1}{x} = 0$, а таа равенка нема решение. Иако важи $(x + 1/x)' = (1 - 1/x^2) < 1$, ова пресликување не е контракција (спореди со задачата 18: $|f'(x)| \leqslant q$, $q < 1$, но овде q не е фиксен!).

21. Решение. Лесно се уочува дека дадената функција $f(x)=\frac{3x}{x+2}$ го пресликува интервалот $M=(1,3]$ во $(1,3]$, т.е. $f:M\rightarrow M$. Натаму $|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{2}{3}|x-y|$ во M, па f е контракција на M. Равенката $\frac{3x}{x+2}=x$ нема решение во M. Имено, $x_1=0$ и $x_2=1$ се фиксни точки на f, сметана како функција од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$, но тие не му припаѓаат на M. Да уочиме дека не се исполнети претпоставките на Банаховата теорема: метричкиот простор $M=(1,3]$ не е комплетен.

22. а) $x=1$. б) Нема. в) $z_1=i$, $z_2=-i$. г) $x=k\pi$, $k\in Z$

23. Решение. Според Банаховата теорема, g има единствена фиксна точка - да ја означиме со а. Ако $f(a)=b$, Тогаш $b\in M$ и $f(b)=f(f(a))=g(a)=a$. Од $f(b)=a$ добиваме $f(f(b))=f(a)$, т.е. $g(b)=b$, т.е. b е фиксна точка на g. Бидејќи а е единствена, следува дека $b=a$. Значи $f(a)=a$, т.е. а е фиксна точка и на f. Ако с е фиксна точка на f, т.е. $f(c)=c$, тогаш $g(c)=f(f(c))=f(c)=c$, па $c=a$. Значи единствената фиксна точка на f е а. 24. Искористи ја задачата 18.

Гл.3. Приближно решавање равенки со една непозната

1. а) $x\in[0,5;1]$. б) По два корена во секој сегмент $[2k\pi,(2k+1)\pi]$. к=1,2,... в) $x_1\in[-2;-1,8]$; $x_2\in[0,2;04]$; $x_3\in[1,4;1,6]$. г) $x_1\in[-1,8;-1,6]$. $x_2\in[-0,8;-0,6]$. Упат. Стави $y=x^2$; тогаш, од $y^2-3y+x+y=0$ се добива $x=-y^2+3y-2$ итн. д) $x_1\in[-1,2;-1]$, $x_2\in[1;1,2]$. ѓ) По два позитивни корени во секој сегмент $[(4к-1)\frac{\pi}{2}, (4к+1)\frac{\pi}{2}]$, к=1,2,... и по два негативни корени во секој сегмент $[(4к+1)\frac{\pi}{2}, (4к-1)\frac{\pi}{2}]$, к=-1,-2,....

2. а) Равенката нема реални корени. б) Има само еден корен $\xi\in(2,3)$. За точност од 10^{-2}, потребни се 6 преполовувања (т.е. 7 интервали); $\xi\approx2,3047$; $\xi=4/\sqrt{3}\approx2,3095$. 3. 0,859.

5. а) $x_1\in(-3;-\sqrt{2})$, $x_2\in(1;\sqrt{2})$, $x_3\in(\sqrt{2},3)$; б) $x_1\in(0;\sqrt[3]{2})$, $x_2\in(\sqrt[3]{2};2)$. в) $x_1\in(-2,0)$, $x_2\in(0,529;3)$. г) Нема реални корени. д) $x_1\in(-1;1/\sqrt[3]{4})$, $x_2\in(1/\sqrt[3]{4};1,5)$, ѓ) $x_1\in(-2;-1)$, $x_2\in(-1;1)$, $x_3\in(3;5)$.

Бидејќи $\phi'(\xi)-1+Mf'(\xi)$ и $f'(\xi)\nless 0$, од условот $\phi'(\xi)=0$ (и $\phi''(\xi)\neq 0$) добиваме $M=-1/f'(\xi)$. Поради $M>-2/b$, следува дека конвергенцијата ќе може да биде квадратна ако $2f'(\xi)<b$ и $M=-1/f'(\xi)$.

20. 1,1183. 21. Со проверка се увидува дека $x=-2$ е корен на дадената равенка. За $x_o=1,9$ имаме $x_1\approx-15,22$, $x_2\approx-19,36$ итн. Условите на теоремата 4 (во §3.5) на сегментот $[-3;2,5]$ се нарушени - првиот и вториот извод немаат постојан знак и во близина на $x_o=1,9$, $f'(x)\approx 0$ (имаме $f'(2)=0$).

22. Коренот се наоѓа во $[-2,-1]$. За $x_o=-2$ добиваме: $x_1=-1,917$, $x_2=-1,912\,(10^{-2})$.

23. Решение. За наоѓање алгоритам за пресметување $1/\sqrt{c}$ $(c>0)$ без делење, ја разгледуваме равенката $f(x)=0$, каде што $f(x)=\frac{1}{x^2}-c$. Њутн-Рафсоновиот метод дава $x_{n+1}=0,5x_n\cdot(3-cx_n^2)$. За почетно приближување може да се земе кој било број $x_o\in(0,1/\sqrt{c})$.

24. $x_{n+1}=0,25x_n(5-cx_n^4)$; $1/\sqrt[4]{3}\approx 0,759$.

25. $x=\arcsin A$, $f(x)=\sin x-A$; $x_{n+1}=x_n-\frac{\sin x_n-A}{\cos x_n}$
$\arcsin 0,5\approx 0,523\ (10^{-3})$.

26. $f(x)$ треба да биде двапати диференцијабилна и да се избере $h(x)=-\frac{1}{2}f''(x)$.

27. $\xi\approx 1,198$. Упат. $\xi\in(1;1,5)$; $x_1=1,15$; $x_3=1,198$; $f'(x)\geqslant 3,49$ за $x\in(x_3;1,5)$, па $0<\xi-x_3<0,002$.

28. а) $\xi\in(1;1,5)$; $\xi\approx\frac{1}{2}(\bar{x}_3+\underline{x}_3)=1,2154$. б) Од графиците на $y_1=\sqrt{x}$ и $y_2=2x^2-1$ се гледа дека дадената равенка има само еден корен; тој е $x=1$ (точен корен). в) $\xi\approx 0,567$. г) $\xi\approx-0,739$.

29. $\xi_1\in[-4,-3]$, $\xi_2\in[0,1;0,5]$, $\xi_3\in[3;3,5]$; по методот на тангенти $\xi\approx-3,54$ (3 итерации), $\xi_2\approx 0,16$ и $\xi_3\approx 3,37$ (по 2 итерации); по методот на тетиви: 4, 2 и 3 итерации соодветно. Во оваа задача подобар е методот на тангенти. б) $\xi\approx 7,13$. в) 1,72. г) 2,88, д) 0,819.

30. $\xi\in[2,3]$; $x_{n+1}=(3+\sqrt{x_n})^{1/2}$, при $x_o=2$: $x_3=2,11006$, $x_4=2,11012$, па $\xi\approx 2,110$ со три точни децимали.

31. Упат. Покажи дека во секој интервал $((n-1)\pi,n\pi)$, $n\in\mathbb{N}$, постои корен на равенката $f(x)\equiv 2\operatorname{ctg}x-\frac{x}{2,46}-\frac{2,46}{x}=0$ и тој корен е единствен во споменатиот интервал. Поради $f(-x)=-f(x)$, корени се и сите негативни броеви, симетрични на позитивните корени. Најмалиот позитивен корен е $\xi_1\in[1,2]$. Со методот на тангенти: $\xi_1\approx 1,851\ (10^{-3})$.

32. $\xi_1=4,7304$; $\xi_2=7,8532$.

33. а) (0,6;3,83), но графички се установува лесно дека нема реални корени. б) (0,3;2,74), в) (0,25;3,83).

34. а) 34,848. б) 200,4322. в) -0,5642. ѓ) 949,6315. д) 10,6063.

35. Упат. Се покажува со индукција дека $|b_i| \geqslant 1$, каде што b_i се определени со (5) од §3.11. Навистина, $|b_0| = |a_0| = 1$. Да претпоставиме дека $|b_k| \geqslant 1$ (каде што $k < n$) Тогаш: $|b_{k+1}| = |a_{k+1} + tb_k| \geqslant |tb_k| - |a_{k+1}| \geqslant$ $\geqslant (1 + |a_{k+1}|)|b_k| - |a_{k+1}| \geqslant |b_k| + |a_{k+1}|(|b_k| - 1) \geqslant 1$. Следствено: $|P(t)| \geqslant 1$.

Гл.4. Системи равенки

1. Точно решение: а) (0,1,2,3). б) (1,-2,2,3). а) (0,9;1,3;1,9;2,9). б) (1,0; -2,0; 2,0;3,0). в) Системот нема решение.

2. $а_1$) (0,8; -0,2;1,4); $а_2$)(0,83; -0,12; 14).
$б_1$) (1,34; -4,76; 2,58); $б_2$) (1,34; -4,75; 2,57).

3. а) x=221,7; y=4,0; по измената: x=138,9; y=2,5 (изменето за приближно 60%). б) Двете прави, определени со дадените равенки, речиси се паралелни.

4. (6; -7,2; 2,9; -0,1).

5. а) D_1=-13; D_2=32; D_3=0. б) D = 1.

6. а) $\begin{bmatrix} -7 & 6 & -4 \\ 6 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ б) $\begin{bmatrix} 0,3 & -1 & -0,6 & 3 \\ -0,1 & -0,2 & 0,1 & 0,3 \\ -0,1 & 0,2 & 0,5 & -0,6 \\ 0,1 & -0,5 & -0,4 & 1,1 \end{bmatrix}$

$в_а$) $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 & -0,4 \\ -0,4 & -0,1 & 0,3 \end{bmatrix}$ г) $\begin{bmatrix} -15 & 26 & -10 & 7 \\ 27 & -45,5 & 17 & -12,1 \\ -10 & 16,5 & -5 & 3,5 \\ 6 & -10,5 & 3 & -1,9 \end{bmatrix}$

7. а) (-7,59; 42,12; -40,52).

8. Обично, кога треба да решиме повеќе системи кои имаат исти коефициенти пред непознатите, а различни вектор-колони оддесно.

9. Упат. Да се искористи фактот што два комплексни броја a+ib,c+id се еднакви ако и само ако a=c, b=d. Комплексниот n x n систем $(A+iB)(\bar{x}+i\bar{y}) = \bar{a}+i\bar{Б}$ е еквивалентен со реалниот 2n x 2n систем $\{A\bar{x}-B\bar{y}=a,\ B\bar{x}+A\bar{y}=b\}$, т.е. во матрична форма $\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a} \\ Б \end{bmatrix}$

Овој реален систем може да се замени со следниве два система: $(B^{-1}A+A^{-1}B)\bar{x}=B^{-1}\bar{a}+A^{-1}\bar{б}$ и $(B^{-1}A+A^{-1}B)\bar{y}=B^{-1}\bar{б}-A^{-1}\bar{a}$ со форма $n\times n$ коишто имаат еднакви матрици од коефициентите.

10. $(i,-i,0)$. 11. $\frac{n}{6}(2n^2+9n+1)$.

15. Упат. 3) $\|\bar{x}+\bar{y}\|_3^2=|\bar{x}+\bar{y}|^2=(\bar{x}+\bar{y},\bar{x}+\bar{y})=|\bar{x}|^2+(\bar{x},\bar{y})+(\bar{y},\bar{x})+$
$+|\bar{y}|^2\leqslant|\bar{x}|^2+2|\bar{x}|\,|\bar{y}|+|\bar{y}|^2=(|\bar{x}|+|\bar{y}|)^2$

16. а) $(\bar{a},\bar{б})=14$. б) $\|\bar{a}\|_1=3\leqslant 8=\|\bar{a}\|_2\leqslant 12=4\cdot\|\bar{a}\|_1$;
$\|\bar{a}\|_1-3\leqslant 3.\sqrt{2}=\|\bar{a}\|_3\leqslant 6=2.\|\bar{a}_1\|$; $\frac{1}{2}\|\bar{a}\|_2=4\leqslant 3\sqrt{2}=\|\bar{a}\|_3\leqslant 8=\|\bar{a}\|_2$.

17. Упат. в) За левото неравенство да се искористи неравенството на Коши-Буњаковски; $\|\bar{x}\|_2=\sum_{i=1}^{k}|x_i|=\sum_{i=1}^{k}|x_i|.1\leqslant(\sum_{1}^{k}|x_i|^2)^{1/2}.(\sum_{i=1}^{k}1^2)^{1/2}=$
$=\sqrt{k}\,\|\bar{x}\|_3$.

19. Упат. Нека λ е најмалата, а μ најголемата вредност на непрекинатата функција $\|\bar{x}\|=f(x_1,\dots,x_k)$ во ограниченото и затворено множество $|x_1|^2+\dots+|x_k|^2=1$. Ако $\bar{y}=(y_1,\dots,y_k)$ е произволен вектор за кој $\|\bar{y}\|=1$ и ако ставиме $|y_1|^2+\dots+|y_k|^2=r^2$ $(r>0)$, тогаш по смената $y_i=rx_i$ $(i=1,\dots,k)$, добиваме $|x_1|^2+\dots+|x_k|^2=1$. Според тоа, $\lambda\leqslant\|\bar{x}\|=\frac{1}{r}\|\bar{y}\|=\frac{1}{r}f(y_1,\dots,y_k)=\frac{1}{r}$, па $|y_1|^2+\dots+|y_k|^2\leqslant\frac{1}{\lambda^2}$. Со тоа неравенство се дефинира, општо, едно ограничено и затворено множество K, а множеството вектори $\bar{y}$, за кои $\|\bar{y}\|=1$, е подмножество од K. Бидејќи $\|\bar{y}\|$ е непрекината, следува дека и тоа подмножество е затворено и ограничено.

20. в) $\|AB\|_3^2=\sum_{i,j}|\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}|^2\leqslant\sum_{i,j}\sum_{p}|a_{ip}|^2\cdot\sum_{q}|b_{qj}|^2=$

$$=(\sum_{i,p}|a_{ip}|^2).(\sum_{q,j}|b_{qj}|^2)=\|A\|_3^2\,\|B\|_3^2,$$

т.е. $\|AB\|\leqslant\|A\|_3\,\|B\|_3$.

г) $M(AB)=n\max_{i,j}|\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}|\leqslant n\max\sum_{s=1}^{n}|a_{is}|\,|b_{sj}|\leqslant$

$$\leqslant n\max_{i,j}\sum_{s=1}^{pn}\frac{M(A)}{n}.\frac{M(B)}{n}=M(A)M(B).$$

21. а) $\|A\|_1=6=\|A\|_2$, $\|A\|_3=\sqrt{33}$, $M(A)=9$.
б) $\|A\|=6$, $\|A\|=7$, $\|A\|=\sqrt{47}$. $M(A)=16$.

22. Упат. $\|A^2\| = \|A.A\| \leqslant \|A\|.\|A\| = \|A\|^2$; со индукција.

23. Не, зашто ако A и B се матрици со својствата: $A \neq 0$, $B\neq 0$ и $AB=0$, тогаш $\|A\| \neq 0 \neq \|B\|$, но $\|AB\| = 0$.

24. Решение. $\|A\bar{x}\|_1 = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{k} |a_{ij}x_j| \leqslant \max \sum\limits_{j=1}^{k} |a_{ij}|\,|x_j| \leqslant$

$$\leqslant \max_{i} \sum_{j=1}^{k} \frac{M(A)}{k} \|\bar{x}\|_1 = M(A)\|\bar{x}\|_1 ;$$

$$\|A\bar{x}\|_2 = \sum_{i=1}^{k} \Big|\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_j| \quad \sum_{j=1}^{k} |x_j| \sum_{i=1}^{k} |a_{ij}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} |x_j| \sum_{i=1}^{k} \frac{M(A)}{k} = M(A)\|\bar{x}\|_2 .$$

$$\|A\bar{x}\|_3^2 = \sum_{i=1}^{k} \Big|\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j\Big|^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} |a_{ij}|^2\Big)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^2\Big) =$$

$$= \|A\|_3^2\,\|\bar{x}\|_3^2 \leqslant [M(A)]^2\|\bar{x}\|_3^2 ,$$

т.е. $\|A\bar{x}\|_3 \leqslant \|A\|_3\|\bar{x}\|_3$, $\|A\bar{x}\|_3 \leqslant M(A)\,\|x\|_3$.

25. (0,408; -0,1786; 02435).

26. $C=[c_{ij}]$, $c_{ii}=0$ и $c_{ij}=-\dfrac{a_{ij}}{a_{ij}}$ за $i\neq j$ (од условот е јасно дека $a_{ii}\neq 0$);

поради $\sum\limits_{j=1}^{i-1} \Big|\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}\Big| + \sum\limits_{j=i+1}^{n} \Big|\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}\Big| = \dfrac{1}{a_{ii}} \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < 1$, следува дека $\|C\|_1 < 1$.

27. а)(2,000037; 0,99996; 0,999984). б) (0,99996; 0,00038; -1,00012; 1,99992).

в) (0,9383; 1,1687; 1,1711).

28. (0,9975; -0,9975). б) При втората за x_2, при трета за x_1.

29. Со методот на прости итерации: (0,23508; -0,70551; 0,70633); со Зејделовиот метод: (0,24315; -0,69905; 0,70366).

30. (-2,0014; 0,99995; 2,99968); точно решение е (-2,1,3). Може да се забележи дека Зејделовиот метод побрзо конвергира кога равенките од системот $Ax=b$ се подредени според растењето на сумите од апсолутните вредности на коефициентите пред непознатите.

31. а) (1,99998; 0,99998; 1,000012). б) (1,00074; -0,00038; -1,00002; 2,00004). в) (0,93826; 1,16870; 1,17106) .

32. а) Системот има три решенија: (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3), при што $\xi_i = \eta_i$ и $\xi_1 \in [-3,-2]$, $\xi_2 \in [0;0,6]$ и $\xi_3 \in [2,3]$. Поради $x_o = y_o = 0,5$, го уточнуваме второто решение, па: $\xi_2 = \eta_2 \approx 0,3221$ (0,0016).

б) $x \approx 0,533$, $y \approx 0,339$; грешката е помала од 0,02. в) $x \approx 0,935$, $y \approx 0,998$.

33. а) Не, зашто $|f'_x| + |f'_y| > 1$. б) $x \approx 1,00196$, $y \approx 1,00049$ (10 итерации). в) Условите во Т.5 се доволни, но не се неопходни.

34. (3,426; 2,243) - една; (3,451; 2,2505) - две; (3,475; 2,258) - четири. Процесот во вториот случај не конвергира.

35. а) $f(x,y)=x-0,3(x^2+y^2-1)-0,3(x^3-y)$, $g(x,y)=y-0,5(x^2+y^2-1)+0,4(x^3-y)$.

б) $f(x,y)=x+0,08(x^2-y^2+1)-0,24(x^4-y)$, $g(x,y)=y+0,39(x^2-y^2+1)-0,17(x^4-y)$.

36. (3,33862; -2,98438), (-1,53344; 0,06112).

37. а) (1,932; 0,517). б) (1,375; 0,9375); (1,36607143 ; 0,93065476); (1,36602541; 0,93060486). в) (0,5299146; 0,5299146).

г) (3,489; 2,263); (3,4874; 2,2616). д) (1,017636; 1,0282176) - едно.

38. а) (-0,519; 0,707) - осма итерација. б) (-0,533; 0,710) - втора.

Гл.5. Интерполација

1.

x	2,05	2,15	2,25	2,35	2,45
y	3,950	4,355	4,805	5,300	5,845

2. а) $-\frac{1}{6}(x^2+x)+3$. б) $-0,1446639x^3+0,8357484x^2+0,1993435x + 1,4$.

в) $x^2 - 10x+1$.

3. $P(x)=-\frac{1}{15}(x-3)(x-5)(x-7)-0,5(x-2)(x-5)(x-7)-0,25(x-2)(x-3)(x-7)+$
$+0,2(x-2)(x-3)(x-5)$;

а) $f(3,6) \approx 3,45$. б) $f(7,2) \approx 7,97$.

4. а) 11,619 $(0,5.10^{-3})$. б) 12,845 $(0,5.10^{-3})$.

в) 13,856. $\sqrt{x}\approx 12,645$ за $x\approx 159,896$.

5. Упат. $P_{o,1}(x) = \dfrac{1}{x_1-x_o}\begin{vmatrix} y_o & x_o-x \\ y_1 & x_1-x \end{vmatrix} = \dfrac{x-x_1}{x_o-x_1}\,y_o + \dfrac{x-x_o}{x_1-x_o}\,y_1 = P(x)$ - Лагранжовата формула за $n=1$. Слично, $P_{o,1,2}(x)$ се пишува во развиена форма и, по средувањето, се добива Лагранжовиот интерполационен полином за $n=2$.

6. а) 19,299. б) 19,297. в) 19,295.

7. а) 37,2. б) 27400.

8.

к	0	1	2	3	4	5	6
$\Delta y_к$	8	20	39	65	98	138	185
$\Delta^2 y_к$	12	19	26	33	40	47	
$\Delta^3 y_к$	7	7	7	7	7		

$\Delta^m y_к = 0, \quad m \geqslant 4.$

9. 24, -11, -3.

10. а) 2. б) 4.

11. а) 6. б) 24.

12. $\Delta y_к=2,3,4,11,16,14$; $y_к = 0,2,5,9,20,36,50$.

13. Упат. Четвртите разлики се постојани; од дадените податоци, нпр. во а), се добива дека четвртата разлика е 12. Така: а) $y_5=16$, $y_6=75$, $y_7=218$.

б) $\Delta^4 y_к=2$, $y_5=-5$, $y_6=-11$, $y_7=-14$.

14. $y=0,76733$ за $x=6$; треба $y=0,76739$.

15. Упат. $\Delta y_к=y_{к+1}-y_к$.

16. $5^к$. Упат. Да се искористи равенството $\Delta a^к=a^к(a-1)$ (зад.15).

17. $6^к$; $(-4)^к$; $6^к+2.(-4)^к$. Решение. Оваа равенка е пример на т.н. разликовна (или диференцна) равенка; разликовните равенки имаат слични својства како линеарните диференцијални равенки. Се добива: $y_{к+2}-2y_{к+1} - 24y_к = 0$, за која карактеристичната равенка е $r^2-2r-24 = 0$, чии корени се $r_1=6$ и $r_2=4$. Според тоа, решенија на дадената разликовна равенка се $y_к=6^к$, $y_к=(-4^к)$ и, општо, $y_к=C_1 6^к+C_2(-4)^к$, каде што C_1 и C_2 се произволни константи.

18. $\frac{1}{10}\left[6^к+(-4)^к\right]$. Упат. Види го решението на претходната задача.

19. б) Упат. Со индукцијата по к.

20. Упат. $\Delta y_к = y_{к+1} - y_к$, к=0,2,...,n-1. Збирот на левите страни од овие n равенства е еднаков со збирот на десните страни.

22. $\frac{1}{6}(7x-x^2)$; јазлите не се на еднакви растојанија.

23. $P(x)=0,029x^4 - 0,41x^3+2,76x^2 - 0,63x + 1$. Упат. Состави ја таблицата на конечни разлики. За пресметување на вредноста на у во х=3,5, земаме $x_0=2$ па $t = \frac{x-x_0}{h} = \frac{3,5-2}{2} = 0,75$ и

$$y(3,5)\approx y_0+t\Delta y_0 + \frac{1}{2}t(t-1)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}t(t-1)(t-2)\Delta^3 y_0 =$$

$$= 8+0,75.16+\frac{1}{2}0,75(-0,25).6+\frac{1}{6}0,75.(-0,25).(-1,25).8$$

$$= 8+12 - \frac{9}{16} + \frac{5}{16} = 19,75.$$

$y = 16$ за $x = 3,2$.

24.

x	30'	1°30'	2°30'	3°30'	4°30'	5°30'
y	0,0087	0,0262	0,0436	0,0610	0,0784	0,0958

Упат. Ја користиме формулата $P(x_0+th)=y_0+t\Delta y_0+\frac{1}{2}t(t-1)\Delta^2 y_0$. За $\sin 3^0 30$ земаме $x_0=3$; бидејќи $h = 1$, имаме $t = \frac{x-x_0}{h} = \frac{1}{2}$, па $\sin 3^0 30' \approx 0,0523 + + \frac{1}{2}.0,0175 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.(-\frac{1}{2})(-0,0001) \approx 0,0610$.

25.

x	3,46	3,34	3,05	3,52
y	0,0314	0,0355	0,0474	0,0296

Упат.

$x_к$	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
$y_к$	0,0498	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273
$\Delta y_к$	-48	-42	-39	-35	-32	-29	
$\Delta^2 y_к$	6	3	4	3	3		

$P(x_2+th) = y_2+t\Delta y_1 + \frac{1}{2}\,t(t-1)\,\Delta^2 y_0$. На пример, за $e^{-3,34}$ земаме $x_2=3,4$ $(x_1=3,3;\ x_0=3,2)$; бидејќи $h = 0,1$, имаме $t = \frac{x-x_2}{h} = -0,6$ па

$$e^{-3,34} \approx 0,0334 - 0,6.(-0,0035) + \frac{1}{2}(-0,6).0,4.0,0004 \approx 0,0355.$$

26.

x	1,05	1,23	1,46	1,82	1,94
y	0,8665	0,9425	0,9939	0,9683	0,9364

27. а) $\Phi(1,64) \approx 0,9796$ (10^{-3}); $\Phi(1,25) \approx 0,9232(10^{-3})$. в) $x=1,53$.

28. $P(13) \approx 73,2$.

29. а) 1) 1,005. 2) 1,105. 3) 1,175. 4) 1,25.
б) 1) 0,46. 2) 0,57. 3) 0,714.

30. а) 1,8411. б) 0,9286. в) -2,3028. г) 0,3683.

31. Примени ја првата Њутнова интерполациона формула до третите конечни разлики.

x	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19
Si (x)	0,1099	0,1199	0,1299	0,1399	0,1498	0,1598	0,1697	0,1797	0,1896

32. $x = 2,405$.

33. а) $y'(0,5) \approx 0,882$; $y''(0,5) \approx -0,557$; $y'(0,4) \approx 0,937$; $y''(0,4) \approx -0,552$.

б) $y'(1,12) \approx 0,472$; $y''(1,12) \approx -0,236$; $y'(1) \approx 0,5$; $y''(1) \approx -0,236$; $y'''(1) \approx 0$.

34.

t	v	w	$\tilde{v}$	$\tilde{w}$
0,00	0,4	30600	0,00	30462
0,01	303,6	29780	303,08	30001
0,02	596,3	28780	596,98	28625

35. а) 5,69. б) 0,462. Упат. а) Бидејќи вторите разлики се приближно еднакви, земаме $y'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0\right) = 91-16x$; $y'(x)=0$, па $x=\frac{91}{16}$.

36. $h \leqslant 1/8$. Упат. $R=\frac{1}{2}(x-x_0)(x-x_1)f''(\xi) \leqslant \frac{1}{8}|x_0-x_1|^2 M$, $M = \max\limits_{x\in[x_0,x_1]} |f''(x)|$, $h=x_0-x_1$; $|f''(x)| \leqslant \frac{1}{4} = M$, па $\frac{h^2}{8}M = \frac{h^2}{32} \leqslant 2^{-11}$, т.е. $h \leqslant 1/8$.

37. $0,23.10^{-7}$.

38. Да. Упат. При $n=2$, $h=1$, добиваме: $|R_1(x)| \leqslant \frac{t(t-1)}{2!} M_2 \leqslant \frac{t(t-1)}{2} \cdot \frac{1}{2}.10^{-6} < 10^{-7}$, каде што $M_2 = \max|(\lg x)''| = \max\left|\frac{0,43}{x^2}\right| < \frac{0,5}{10^6}$ и $t(1-t) \leqslant \frac{1}{4}$ зашто $0 \leqslant t \leqslant 1$.

39. 10^{-4}. Упат. $|R_1(x)| \leqslant \frac{1}{8}|\Delta^2 y_0|$, $|\Delta^2 y_0| \leqslant 0,0008$.

40. а)

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(x-x_1)\sin\frac{1}{2}(x-x_2)}{\sin\frac{1}{2}(x_0-x_1)\sin\frac{1}{2}(x_0-x_2)} y_0 + \frac{\sin\frac{1}{2}(x-x_0)\sin\frac{1}{2}(x-x_2)}{\sin\frac{1}{2}(x_1-x_0)\sin\frac{1}{2}(x_1-x_2)} y_1 +$$

$$+ \frac{\sin\frac{1}{2}(x-x_0)\sin\frac{1}{2}(x-x_1)}{\sin\frac{1}{2}(x_2-x_0)\sin\frac{1}{2}(x_2-x_1)} y_2.$$

б)

$$\frac{\sin(x-x_1)\sin(x-x_2)}{\sin(x_0-x_1)\sin(x_0-x_2)} y_0 + \frac{\sin(x-x_0)\sin(x-x_2)}{\sin(x_1-x_0)\sin(x_1-x_2)} y_1 +$$

$$+ \frac{\sin(x-x_0)\sin(x-x_1)}{\sin(x_2-x_0)\sin(x_2-x_1)} y_2.$$

41. а) $\frac{n(n-1)}{2}$. Упат. $\Delta S_n = n+1$, $\Delta^2 S_n = 1$, па S_n може да се бара како полином од втор степен. б) $\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$. Упат. $\Delta^2 S_n = 2n+3$, $\Delta^3 S_n = 2$; следствено, S_n треба да се бара како полином од трет степен, па треба да се пресметаат S_1, S_2, S_3 и конечните разлики од трет ред; $t = \frac{n-1}{1} = n-1$.

в) $S_n = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$.

42. Упат. Според вежбата 21, $u_k \Delta v_k = \Delta(u_k \cdot v_k) - v_{k+1} \Delta u_k$. Сумирајќи од $k=0$ до $k=n-1$, добиваме

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \Delta v_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta(u_k v_k) - \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} \Delta u_k,$$

па применувајќи ја вежбата 20, го добиваме бараниот резултат.

43. Решение. а) Бидејќи $\Delta x^{k}=x^{k+1}-x^{k}=x^{k}(x-1)$, можеме да ставиме $u_{k}=k$ и $v_{k}=x^{k}/(x-1)$ и да ја примениме формулата (*) од претходната вежба. Ја земаме конечната сума:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1} kx^k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k\Delta v_k = n\frac{x^n}{x-1} - 0 - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k+1}}{x-1} .$$

Последната сума е сума на геометриска прогресија, па

$$S_n=\frac{nx^n}{x-1}+\frac{x(1-x^n)}{(1-x)^2}.$$

Бидејќи $nx^n \to 0$, $x^{n+1} \to 0$ кога $n\to\infty$, добиваме $S_n \to x/(1-x)^2$ кога $n\to\infty$, т.е. $S=x/(1-x)^2$.

б) Ставаме $u_k=k^2$, $v_k=x^k/(x-1)$, применуваме делумно сумирање, ги користиме резултатите од а) и добиваме $S=(x+x^2)/(1-x)^3$.

44. а) 2. б) 6. Упат. Да се искористи претходната задача при $x=1/2$.

Гл.6. Приближно интегрирање

1. 0,047592920 (10^{-9}). 2 0,09328 (10^{-4}). 3. 0,05833 (10^{-3}).

4. 0,1171 (2.10^{-6}). 5. 0,36422167 (10^{-8}). 6. 0,5016 (10^{-3}).

7. 1,057 (10^{-3}). 8. 0,20136 (10^{-3}). 9. 0,487 (10^{-3}).

10. 0,1896; во гл.5: 0,1876. 11. а) 0,772095 (10^{-6}). б) 0,946082 (10^{-6}).

12. 9,688448. 13. 1,5051.

14. а) 1,01697 (според формулата (1') од §6.2); 1,12393 (според 1'') од §6.2); 1,074045 (аритметичка средина од претходните два резултата).

б) $\frac{1}{2}(0,48739 + 0,48965) = 0,48852$.

в) $\frac{1}{2}(1,14903 + 1,20334) = 1,176185$.

15. а) 6 (точната вредност); 6 (со правилото на трапези и со Симпсоновото правило), $\Delta = 0 = \delta$.

б) 20/3 (точната вредност и со Симпсоновото правило); 7 (со правилото на трапези), $\Delta < 0,35$, $\delta = 5\%$.

в) 12 (точната вредност и со Симпсоновото правило); 13 (со правилото на трапези), $\Delta = 1$, $\delta = 7,7\%$.

г) 8 (точната и пресметана со Симпсоновата формула); 9 (со правилото на трапези), $\Delta = 1$, $\delta = 12\%$.

16. $h \leqslant [12\epsilon/(b-a)M_2]^{1/2}$, $M_2 = \max|f''(x)|$ за $a \leqslant x \leqslant b$; во практиката се зема $h \approx \sqrt{\epsilon}$.

17. Решение. Според формулата за трапези

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + y_n] + R_n,$$

каде што $h = \frac{b-a}{n}$, $R_n = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,

поради претпоставката $f''(x) < 0$, добиваме $R_n > 0$, па

$$I_{tr} = \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + \ldots + y_{n-1}) + y_n] = I - R_n < I.$$

Геометриски тоа значи дека кривата е конкавна, па за $f(x) > 0$ "елементарните трапези" се впишани во кривата и затоа имаат помала плоштина од соодветните криволиниски трапези, а на делот од кривата каде што е $f(x) < 0$, "елементарните трапези" се опишани околу кривата, па нивните плоштини, како "негативни плоштини", се помали од плоштините на соодветните криволиниски трапези.

18. $h < [180\epsilon/(b-a)M_4]^{1/4}$, $M_4 = \max|f^{iv}(x)|$ во $[a,b]$; во практиката се зема $h \approx \sqrt[4]{\epsilon}$. 20. а) 1,11906 ($6,2.10^{-4}$). б) 1,118425 ($2,4.10^{-6}$).

21. 18,093, $|R| < 1,2$ (оценката е груба); точната вредност е 18,1820177..., па $\Delta = 0,1$, $\delta = 0,6\%$.

22. $0,69315 \pm 0,00002$. 23. а) 0,4258, $|R| \leqslant 0,008$. б) 0,42251, $|R| \leqslant 0,00013$.

24. 1,1398788 (8.10^{-8}). 25. а) $h=0,25$; $I \approx 0,69$ (10^{-2}). б) $h = 0,2$; $I \approx 0,78(10^{-2})$

26. а) $n=5$, $h=2$; $I \approx 0,695$ (10^{-2}). б) $n=5$, $h=0,2$; $I \approx 0,10(10^{-2})$. в) $h = 0,1$; $I \approx 0,2722$ (10^{-4}). г) $h = 0,05$; $I \approx 0,3752$ (10^{-3}).

27. а) $h=0,2$; $I_n \approx 1,29362$; $h=0,1$; $I_{2n} \approx 1,2952$ (0,0007). б) $h=0,2$: $I_n \approx$ $\approx 1,295813$; $h=0,1$: $I_{2n} \approx 1,295846$ (0,000003).

28. а) 0,3585. б) 0,3201. в) 0,3104. г) 0,2444. 29. 13506.

Гл.7. Приближно решавање диференцијални равенки

1. а) $y \approx 1+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}x^4$. б) Бидејќи $y''=y+xy'+1/2\sqrt{x}$ не е дефинирана за $x=0$, функцијата $y=f(x)$ не може да се развие во Тајлоров ред во околина на точката $x=0$, па задачата не може да се реши со овој метод.

в) $y(x) \approx \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4$.

2. а) $y \approx x+\frac{2}{3}x^3+\frac{13}{60}x^5$; $z \approx 1+x^2+\frac{5}{12}x^4$.

б) $y \approx -x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4$; $z \approx 1+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{60}x^5$.

3. а) $y \approx x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{15}x^5-\frac{1}{105}x^7$. б) Бидејќи $y'', y''', \ldots$ не се дефинирани во точката $x=0$, задачата не може да се реши со овој метод. За други почетни услови, на пример, $y(1)=1$ и $y'(1)=0$ би имале

$$y \approx 1-\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{1}{3!}(x-1)^3-\frac{2}{4!}(x-1)^4+\frac{10}{5!}(x-1)^5-\frac{52}{6!}(x-1)^6.$$

4. а) $y_1=\frac{x^3}{3}$, $y_2=\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{63}$, $y_3=\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2079}-\frac{x^{15}}{59535}$; грешката е помала од 0,15. Упат. Разгледај го квадратот $-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2$, $-1/2 \leqslant y \leqslant 1/2$ и провери ги условите на Т.1 од §7.2 ($h=1/2$, $\sup f(x,y)=1/4$, $q<2/3$). б) $y_1=2-x-e^{-x}$;

$y_2=\frac{11}{2}-4x+2x^2-\frac{x^3}{3}-4e^{-x}+2xe^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}$;

в) $y_1=x^{3/2}$, $y=\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{1}{9}x^4$, $y_3=\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{1}{9}x^4+\frac{x^9}{729}+\frac{8x^{13/2}}{351}$.

5. а) $y_1=1+x-\frac{x^2}{2}$, $y_2 = 1-x + \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$, $y_3=1+x+\frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{12}$; $z_1=-2+3x$,

$z_2=-2+3x-x^2-\frac{x^3}{6}$, $z_3=-2+3x-2x^2 + \frac{7x^3}{6}$. б) $y_1 = -\frac{1}{2}x$, $y_3=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2-\frac{x^3}{24}$,

$z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^2$, $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^5}{160}$.

6. $y_2=1+x+\frac{3}{2}x^2 + x^3 + \frac{1}{4}x^4$. Точното решение е $(1-2x)^{-1/2} = 1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x^3+\ldots$,

т.е. имаме совпаѓање на првите три членови.

7. а) Целата рамнина 0xy без точките од оската 0x. б) $y\neq 0$. в) Целата рамнина. Упат. Да се искористи Т.2 од §7.2.

8. а) $1+x+x^2+4x^3/3+\ldots(x^2<1)$. б) $y=a_o(1-2x^2)+a_1x(1-x^2/2-x^4/2.4-1.3x^6/2.4.6-$ $-\ldots)$ $[=a_o(1-2x^2)+a_1x\sqrt{1-x^2};\ x<1]$. в) $1+x+x^2/2!+2x^3+8x^4/4!+14x^5/5!+\ldots$

9. а) $y_1=0,1$, $y_2=0,2001$, $y_3=0,3009$, $y_4=0,40\ 272$, $y_5=0,50920$, $y_6=0,62217$, $y_7=0,74539$, $y_8=0,88428$, $y_9=1,04684$, $y_{10} = 1,24547$. б) $y_1=0$, $y_2=0,001$,

$y_3=0,005$, $y_4=0,014002$, $y_5=0,030022$, $y_6=0,055112$, $y_7=0,091416$,

$y_8 = 0,141252$, $y_9=0,207247$, $y_{10} = 0,292542$.

в)

x	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
y	0,9400	0,8342	0,7483	0,6753	0,6144	0,5877

10. а) Бидејќи $\frac{y}{x}$ не е дефинирана за x=0, вредностите $z_1,z_2,\ldots$ не може да се пресметаат. Овде ќе го наведеме решението на системот $\{y'=-xz,\ z'=xy\}$ при истите почетни услови.

x	y	z
0,1	0	1
0,2	-0,01	1
0,3	-0,03	0,9998
0,4	-0,056	0,9989
0,5	-0,10	0,9965
0,6	-0,15	0,9915
0,7	-0,209	0,9825
0,8	-0,278	0,9679
0,9	-0,355	0,9456
1,0	-0,441	0,9136

б)

x	y	z
0,1	1	1
0,2	1	1,02
0,3	1,004	1,0604
0,4	1,0022	1,1222
0,5	1,0070	1,2072
0,6	1,0170	1,3179
0,7	1,0350	1,4580
0,8	1,0646	1,6325
0,9	1,1100	1,8483
1,0	1,1764	2,1145

11. Со првиот подобрен метод на Ојлер:

а)

$x_к$	$y_к$
0,1	1,005
0,2	1,01809
0,3	1,03777
0,4	1,06275
0,5	1,09191
0,6	1,1243
0,7	1,15909
0,8	1,19558
0,9	1,23317
1,0	1,27139

б)

$x_к$	$y_к$
0,1	0,52628
0,2	0,5558
0,3	0,59004
0,4	0,63139
0,5	0,68334
0,6	0,7508
0,7	0,84064
0,8	0,96259
0,9	1,13103
1,0	1,36841

в)

$x_к$	$y_к$
0,5	0,7240
0,6	0,86797
0,7	1,03016
0,8	1,2108
0,9	1,41007
1,0	1,62813
1,1	1,86511
1,2	2,12112
1,3	2,39625
1,4	2,69058
1,5	3,00418

12. а)

$x_к$	y
0,2	1,8180
0,4	2,15483
0,6	2,52195
0,8	2,92607
1,0	3,37538

б)

x	y
0,1	0,09778
0,2	0,19826
0,3	0,29427

в)

x	y
1,2	0,95379
1,4	0,91229
1,6	0,87213
1,8	0,82774
2,0	0,78290

13. а)

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y	1,4213	1,8905	2,1492	2,7473	3,4237
z	1,2214	1,4840	1,8139	2,1720	2,6075

б)

x	0,1	0,2	0,3
y	1,29861	1,52938	1,73317
z	0,23036	0,39423	0,55583

14.

x	1,3	1,5	1,8	2,0
y	0,6761	0,5017	0,3285	0,2550

б)

x	0,3	0,5	0,8	1,0
y	2,4329	3,2747	4,2835	4,7477

15. а) 0,14. б) y(0,5) = 0,55, z(0,5) = - 0,18.

ЛИТЕРАТУРА

1. АНГО А.: "Математика для электро - и радиоинженеров", Москва,1964
2. BARRODALE I., ROBERTS F.D.K., EHLE B.L.: "Elementary Computer Applications", John Wiley and Sons, New York 1971
3. BOHTE Z.: "Numerična analiza", Ljubljana 1975
4. ГУТЕР Р.С., ОВЧИНСКИЙ Б.В.: " Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта", Наука, Москва, 1970
5. ГУТЕР Р.С., МИНАЕВА С.С., РЕЗНИКОВСКИЙ П.Т.: "Задачник-практикум по программированию и вычислительной математике",Наука, Москва, 1973
6. ДЕМИДОВИЧ Б.П.,МАРОН И.А.: "Основы вычислительной математики", Наука, Москва, 1970
7. ДЕМИДОВИЧ Б.П., МАРОН И.А., ШУВАЛОВА Э.З.: "Численные методы анализа", Наука, Москва, 1967
8. DEMIDOVIČ B.P.(i grupa avtori): "Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke" , Tehnička knjiga, Zagreb 1968
9. DORN W.S., McCRACKEN D.D.: "Numerical Methods with FORTRAN IV Case Studies", John Wiley and Sons, New York 1972
10. КНУТ Д.: "Искусство программирования для ЭМВ", Т.1 Основные алгоритмы ; "Мир", Москва, 1976
11. КОПЧЕНОВА Н.В., МАРОН И.А.: "Вычислительная математика в примерах и задачах", Наука, Москва, 1972
12. COPSON E.T.: "Metric Spaces", Cambridge University Press,1968
13. КРИЛОВ В.И., БОБКОВ В.В., МОНАСТЫРНЫЙ П.И.: "Вычислительные методы", том 1 ("Наука", Москва 1976) и том 2 ("Вышэйшая школа", Минск, 1975).
14. MILNE W.E.: "Numerical Solution of Differential Equations", John Wiley and Sons, 1957

15. McCRACKEN D.D., DORN W.S.: "Numerical Methods and FORTRAN Programming", John Wiley and Sons, New York 1964

16. ПЕТКОВ М.: "Числени методи на алгебрата", Наука и изкуство, София 1974

17. ПУЛЬКИН С.П.: "Вычислительная математика", Просвещение, Москва 1972

18. SCARBOROUGH J.B.: "Numerical Mathematical Analysis", The Johns Hopkins Press, Baltimor 1966

19. SCHEID F.: "Theory and Problems of Numerical Analysis", McGrow-Hill Company, New York 1968

20. FOX L.: "An Introduction to Numerical Linear Algebra", Oxford University Press, New York 1965

21. ХЕММИНГ Р.В.: "Численные методы", Наука, Москва, 1972

22. HENRICI P.: "Elements of Numerical Analysis"", John Wiley and Sons, New York 1964

23. ЦЕЛАКОСКИ Н: "Задачи по линеарна алгебра", Скопје, 1972

24. ЧУПОНА Ѓ., ТРПЕНОВСКИ Б.,ЦЕЛАКОСКИ Н.: "Предавања по виша математика", кн.I(1971), кн.II(1971),кн.III(1972), Скопје.

ИНДЕКС